

---

振动/噪声测试与分析系统

# 理 论 基 础

《 Thory and Background 》

---

# 目 录

目录单	2--12
<b>第一篇 信号处理</b>	13
<b>第一章 谱分析</b>	13
1.1 数字信号处理	13
1.2 频率混淆与抗混滤波	18
1.3 泄漏与加窗	19
1.3.1 窗处理	20
窗的特性	20
常用窗	21
窗函数的选择	23
窗的校正方式	24
窗的校正因子	25
1.4 平均	25
1.5 参考文献	27
<b>第二章 结构动力学试验</b>	28
2.1 信号分析	29
2.2 系统分析	30
2.3 特征分析	30
<b>第三章 基本测量功能</b>	33
3.1 时域测量	33
时间记录	33
自相关	34
互相关	35
直方图	35
概率密度	36
概率分布	36
3.2 频域测量	36

线性谱 .....	36
自功率谱 .....	37
互功率谱 .....	38
相干函数 .....	39
常相干 .....	39
重相干 .....	39
偏相干 .....	40
虚拟相干 .....	40
主分量谱 .....	41
频响函数 .....	41
冲激响应 .....	44
3.3 复合函数 .....	44
总量级 (OA) .....	44
频率切片 .....	45
阶次切片 .....	46
倍频程切片 .....	46
3.4 单位 .....	46
3.5 有效值计算 .....	47
<b>第二篇 声学 and 声品质 .....</b>	<b>50</b>
<b>第四章 声学的基本术语和定义 .....</b>	<b>50</b>
4.1 声学参数 .....	50
声功率 .....	50
声压 .....	50
声强 .....	51
法向声强 .....	51
自由场 .....	51
扩散场 .....	52
质点速度 .....	52
声阻抗 .....	53
4.2 用对数标尺度量声学参数 .....	53

---

dB 标尺 .....	53
声功率级 .....	53
质点速度级 .....	54
声强级 .....	54
法向声强级 .....	54
声压级 .....	54
4.3 倍频程带 .....	55
4.4 声计权 .....	56
<b>第五章 声学测量 .....</b>	<b>58</b>
5.1 声学测量 .....	59
声压级 .....	59
声强 .....	59
残余声强 .....	60
声压残余声强指数 .....	60
动态性能指数 .....	61
5.2 声学量的计算 .....	61
等效声压 .....	62
声强 .....	62
声功率 .....	62
质点速度 .....	62
5.3 声学测量表面 .....	63
声学测量的 ISO 标准 .....	64
5.4 频带 .....	64
5.5 声场指数 .....	65
$F_1$ 声场瞬变指数 .....	65
$F_2$ 测量面声压—声强指数 .....	65
$F_3$ 局部负功率指数 .....	66
$F_4$ 不均匀指数 .....	67
5.5.1 准则 .....	67

---

第六章 声品质 .....	69
6.1 声品质的基本概念.....	69
声信号 .....	69
声功率和声压 .....	69
声压级 .....	69
可听声频.....	69
响度和音高.....	70
人耳对声音的感觉.....	70
听的过程.....	70
双耳听觉.....	71
声感觉 .....	71
响度.....	72
音高.....	72
临界带 .....	73
掩蔽效应.....	73
瞬态效应.....	74
6.2 声品质分析.....	75
声信号的分析 .....	75
测量.....	76
评价.....	76
修改.....	76
双耳记录和回放 .....	77
记录.....	77
传递给计算机.....	78
重放.....	78
6.3 参考文献.....	79
第七章 声品质的定量分析 .....	82
7.1 声压级.....	82
时域声压级.....	82
7.2 等效声压级.....	83

---

7.3 响度.....	84
7.3.1 斯蒂文司 Mark VI.....	85
7.3.2 斯蒂文司 Mark VII.....	86
7.3.3 兹维克尔响度.....	86
7.4 尖锐度.....	88
7.5 粗糙度.....	89
7.6 抖动强度.....	90
7.7 音高.....	90
7.8 清晰度指数 (AI) .....	91
7.9 语言干扰级 (SIL,PSIL) .....	92
7.10 冲激量.....	93
<b>第八章 声全息 .....</b>	<b>94</b>
8.1 概述.....	94
基本原理.....	94
8.2 基本概念.....	95
时间频率和空间频率.....	95
时域.....	95
空间域.....	96
扩散波和损耗波.....	98
反演到其它平面.....	99
维纳滤波和阿德霍克窗.....	100
演算出其它声学量.....	102
<b>第三篇 时域数据处理 .....</b>	<b>103</b>
<b>第九章 统计分析 .....</b>	<b>103</b>
最大植, 最小值, 幅值范围和极值.....	103
总和.....	104
积分.....	104
峰值因子.....	104
均值.....	105
中值.....	105

---

百分点 .....	106
方差和标准差 .....	106
平均绝对偏差 .....	107
最大偏差 .....	107
偏斜度 .....	107
峭度 .....	107
马可夫回归 .....	108
<b>第十章 时频分析 .....</b>	<b>109</b>
10.1 概述 .....	110
10.2 线性时频表示 .....	111
短时傅里叶变换 (STFT) .....	111
小波分析 (WT) .....	113
10.3 二次型 (双线性) 时频表示 .....	114
Wigner - Ville 分布 (WVD) .....	115
广义化 .....	117
10.4 参考文献 .....	118
<b>第十一章 重采样 .....</b>	<b>118</b>
11.1 固定比率重采样 .....	118
11.1.1 整数倍降采样 .....	119
11.1.2 整数倍升采样 .....	121
11.1.3 分数比率重采样 .....	122
11.1.4 任意采样率 .....	123
11.2 自适应重采样 .....	124
举例 .....	125
11.3 参考文献 .....	128
<b>第十二章 数字滤波器 .....</b>	<b>128</b>
12.1 与数字滤波相关的基本定义 .....	128
12.2 FIR 和 IIR 滤波器设计 .....	134
12.2.1 滤波器设计的术语 .....	135
滤波特性 .....	135

线性相位滤波器 .....	135
滤波器的类型 .....	136
12.2.2 FIR 滤波器设计 .....	138
FIR 单窗滤波器设计 .....	138
FIR 多重窗滤波器 .....	140
FIR Remez 滤波器 .....	141
12.2.3 利用原型模拟式滤波器设计 IIR 数字滤波器 .....	142
第一步：给定滤波特性 .....	142
第二步：计算模拟频率 .....	142
第三步：选择适当的模拟滤波器 .....	143
贝塞尔滤波器 .....	143
巴特沃斯滤波器 .....	144
切比雪夫（I 型）滤波器 .....	144
反切比雪夫（II 型）滤波器 .....	145
考尔（椭圆）滤波器 .....	146
第四步：将原型低通滤波器转换为其它类型的模拟滤波器 .....	147
第五步：通过双线性变换，得到所希望的数字滤波器 .....	147
12.2.4 IIR 逆向设计滤波器 .....	149
12.3 分析 .....	150
12.4 使用滤波器的两种方法 .....	150
12.5 参考文献 .....	152
<b>第十三章 谐波跟踪 .....</b>	<b>152</b>
13.1 引言 .....	152
使用条件 .....	153
13.2 理论背景 .....	153
13.2.1 Rpm 的确定 .....	153
13.2.2 波形跟踪 .....	154
结构方程 .....	154
数据方程 .....	155
13.3 实用的讨论 .....	156



---

第十四章 计数和直方图 .....	158
14.1 引言.....	158
14.2 一维计数法.....	159
14.2.1 峰值计数法.....	159
14.2.2 跨越量级计数法.....	160
14.2.3 值域计数法.....	161
单值域计数.....	161
值域对计数.....	162
14.3 二维计数法.....	162
14.3.1 “From—to” 计数 .....	162
14.3.2 “Range-mean”（值域—均值）计数 .....	163
14.3.3 “值域对—值域”或“雨流”计数法 .....	164
14.4 参考文献.....	167
第四篇 分析与设计 .....	168
第十五章 模态参数估计 .....	168
15.1 模态参数估计.....	168
关于单位的说明 .....	170
15.2 分析方法分类.....	170
15.2.1 单自由度和多自由度方法.....	171
15.2.2 局部估计和整体估计 .....	172
15.2.3 多输入分析.....	173
15.2.4 时域分析和频域分析.....	175
15.2.5 声振模态分析.....	177
15.3 参数估计方法.....	178
方法的选择.....	179
15.3.1 峰检索.....	180
15.3.2 模态检出法.....	181
15.3.3 圆拟合法.....	182
15.3.4 复模态指示函数（CMIF）法 .....	183
交叉检验和跟踪 .....	186

---

15.3.5 最小二乘复指数 (LSCE) 法 .....	188
连续数据模型 .....	188
抽样数据模型 .....	189
方法的具体实施 .....	189
最佳模态数的确定 .....	191
举例 .....	193
15.3.5.1 多输入最小二乘复指数法 .....	194
抽样数据模型 .....	195
方法的具体实施 .....	195
举例 .....	198
15.3.6 最小二乘频域 (LSFD) 法 .....	198
15.3.6.1 多输入最小二乘频域法 .....	198
15.3.7 频域直接参数识别 (FDPI) 法 .....	199
15.4 最大似然法 .....	203
15.4.1 理论简介 .....	203
15.5 静态补偿模态的计算 .....	206
<b>第十六章 工作模态分析 .....</b>	<b>208</b>
16.1 为什么要做工作模态分析 .....	208
工作数据的传统处理 .....	208
采用工作模态分析 .....	209
16.2 理论基础 .....	209
自然激励技术 (NEXT) .....	210
随机子空间法 .....	210
16.2.1 随机子状态识别法 .....	210
16.2.2 自然激励技术 (NEXT) .....	215
16.2.3 模态识别方法的选择 .....	217
16.3 参考文献 .....	218
<b>第十七章 运行模态 (ODS) 分析 .....</b>	<b>219</b>
17.1 运行模态分析 .....	219
17.2 ODS 的测量 .....	221

---

17.2.1 传导函数.....	222
17.2.2 互功率谱.....	223
17.3 ODS 的识别和给定标尺.....	224
17.3.1 ODS 的标尺.....	224
17.4 对 ODS 分析结果的诠释.....	225
模态比例因子 (MSF) 和模态置信判据 (MAC) .....	225
模态分解.....	226
<b>第十八章 模态验证 .....</b>	<b>227</b>
18.1 引言.....	227
18.2 MSF 和 MAC.....	228
18.3 模态参预.....	229
18.4 输入与输出之间的互易性.....	230
FRF 的互易性 .....	230
模态模型的互易性 .....	230
18.5 广义模态参数.....	231
18.6 模态超复性.....	233
18.7 模态相位共线性.....	233
平均相位偏差 .....	234
18.8 模型的比较.....	234
18.9 模态指示函数.....	234
18.10 FRF 累加 .....	236
18.11 FRF 综合 .....	236
<b>第十九章 刚体模态 .....</b>	<b>237</b>
19.1 计算刚体属性.....	237
由测量的 FRF 推算出刚体属性.....	238_Toc105569519
计算刚体属性 .....	239
19.2 刚体模态分析.....	243
刚体模态分析的应用 .....	243
19.2.1 从测量模态中分离出刚体模态.....	244
19.2.2 刚体模态基于几何数据的综合 .....	245

---

19.3 参考文献.....	246
<b>第二十章 设计 .....</b>	<b>246</b>
20.1 利用模态模型实施模态设计.....	246
20.2 灵敏度分析.....	249
20.2.1 灵敏度分析的数学背景.....	249
20.3 修改预测.....	252
20.3.1 数学背景.....	253
20.3.2 修改预测的实施.....	260
20.3.3 模型修改的定义.....	261
20.3.4 修改预测.....	267
梁元件应用举例 .....	268
20.4 强迫响应.....	272
20.4.1 强迫响应的数学背景 .....	272
<b>第二十一章 结构的几何骨架 .....</b>	<b>274</b>
21.1 试验结构的几何骨架.....	274
21.2 结点.....	275
位置.....	275
方位.....	276

---

# 第一篇 信号处理

## 第一章 谱分析

本章提供振动和声学数据常规信号处理的术语及技术综述。包括：

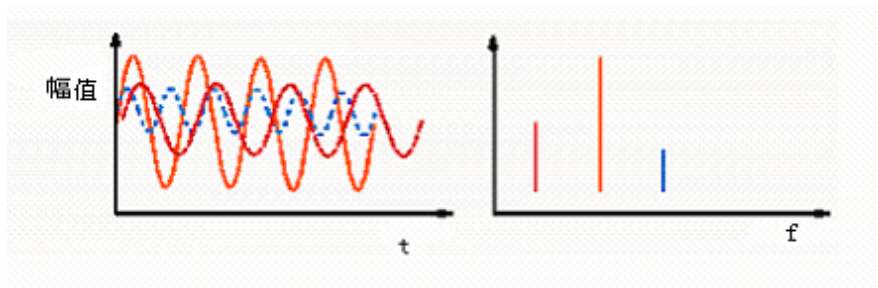
- ☐ 数字信号处理
- ☐ 频率混淆与抗混滤波
- ☐ 泄漏和加窗
- ☐ 平均

本文并非对这一命题的全面论述。章末附录有相关的参考文献。

### 1.1 数字信号处理（DSP）

#### 时域和频域

任何实际的波形均可视为由若干正弦波所合成，每一正弦分量各有其一定的频率和幅值。从频域研究这些波形或许比时域考察更为有用一些，因为它可以更好地揭示出信号的所有成分。



时域中的每一正弦分量，在频域中用一谱线表示。描述波形的一系列谱线构成所谓“频谱”。

#### 傅里叶变换（FT）

信号从时域到频域的变换（以及逆变换），通过傅里叶变换来实现，其定义式为：

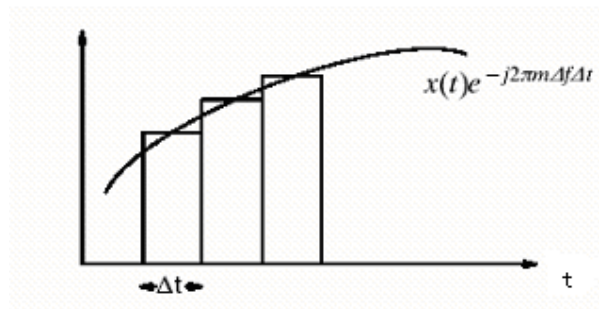
$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (1-1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1-2)$$

函数必须是连续的。同时，为了能通过数字积分的方法进行傅里叶变换，积分限不能无穷，必须是有限的。

### 离散傅里叶变换（DFT）

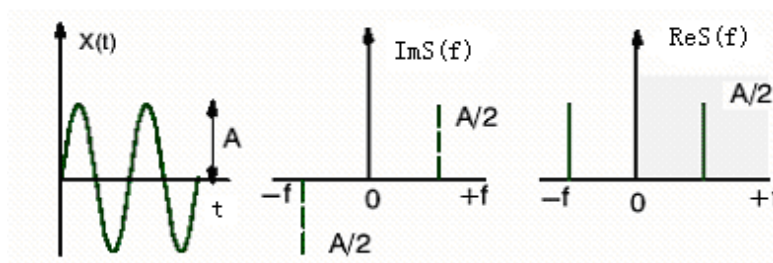
傅里叶变换的数值算法称为离散傅里叶变换。它通过对固定限值（N 个）时域抽（采）样的数字积分，求出频域离散点（ $m\Delta f$ ）的谱值。



由于波形只在有限的观察时间内按一定的时间间隔抽样，无论在时域或频域，一般都不会得到完全精确的表示。由此带来的缺失，将在后文讨论。

### 厄米特（Hermitian）对称

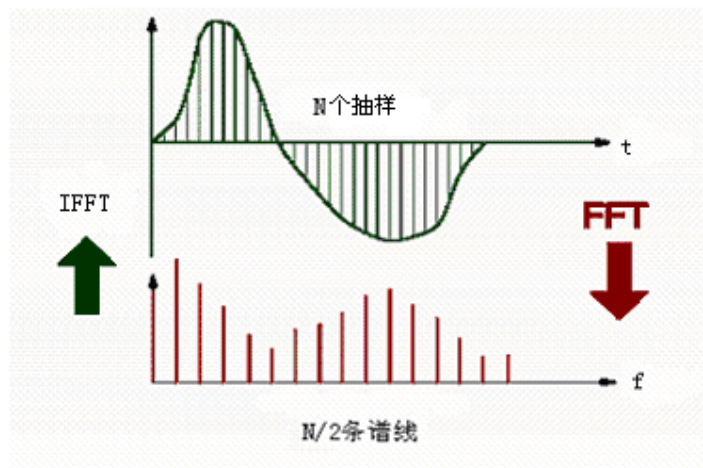
正弦函数的傅里叶变换，得到的是由实部和虚部组成的复值函数，其实部和虚部在正负频率域分别成偶对称和奇对称，如下图所示。在多数情况下，只需计及实部，且只在正频率域将其表示出来。这样，正弦波的频谱专指下右图中涂有灰色背景区域所表征的图象。



### 快速傅里叶变换（FFT）

快速傅里叶变换是一种适合于计算机运算的 **DFT** 算法。用于求得抽样、离

散时间信号的谱（频率）成分。所得到的谱也是离散的。其逆变换称为逆 **FFT** 或 **IFFT**。



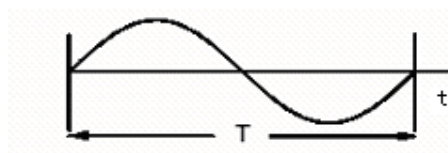
高品质的 **FFT** 算法，要求时域抽样数  $N$  必须是 2 的幂（诸如 2, 4, 8...512, 1024, 2048 等）。

### 数据块尺寸

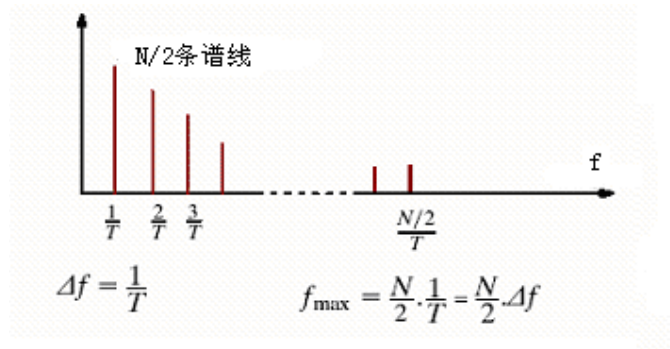
$N$  个抽样的时间记录，称尺寸为  $N$  的数据块。 $N$  个时域抽样的 **FFT** 得到  $N/2$  条谱线。每一谱线都含有幅值和相位二者的信息。

### 频率范围

抽样集成“块”，相应的时间长度为  $T$ 。**FFT** 能检测的最低频率等于此时时间长度  $T$  的倒数，即  $1/T$ 。



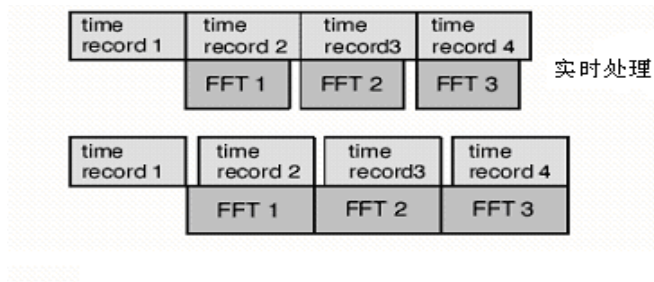
谱线之间的频率间隔也是等于  $1/T$ ，谱的最高频率则等于  $(1/T) \cdot (N/2)$ 。



FFT 分析的频率范围，取决于数据块尺寸  $N$  和采样周期  $T$ 。要想获得高频特性，就需要有高速的采样频率，而同时也意味着短的采样周期。

### 实时带宽

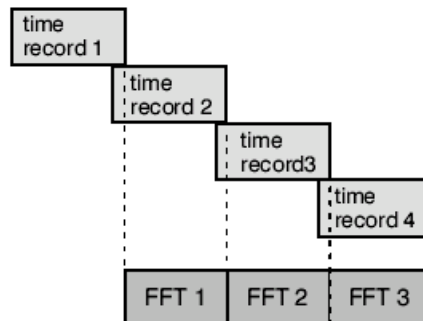
在进行变换运算时，**FFT** 要求完整的数据块。而取一完整的数据块所需的时间，则取决于数据块尺寸和分析的频率范围。在第一段时间记录被变换、分析的同时，第二段时间记录正在被采集。如果计算所需时间比测量时间短，那么，CPU 可以等待新的数据块采集完整，这样的过程称为实时处理。



如果计算所需时间比测量时间长，或者采集数据需要有触发条件的话，则不属于实时处理情况。

### 重叠

重叠处理如下图所示。历次 **FFT** 所取的时间记录并非彼此完全独立，而是取部分重叠。

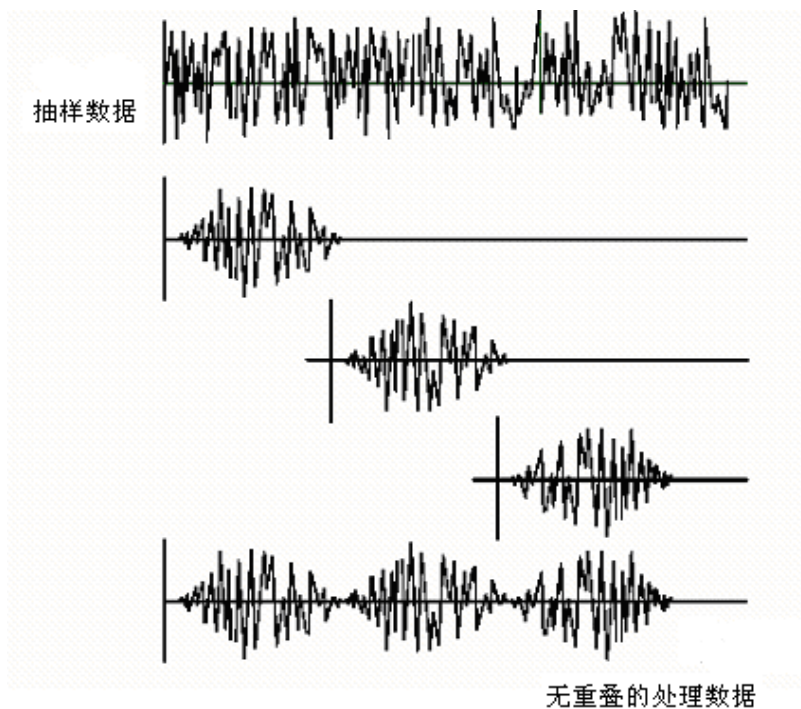


如果时域数据完全没有经过加窗，即加权的话，重叠处理并未计入任何新的数据，因而对谱估计没有任何统计上的改善。然而，在有加窗的情况下，重叠处理能更好地利用无重叠情况下被忽视的数据。

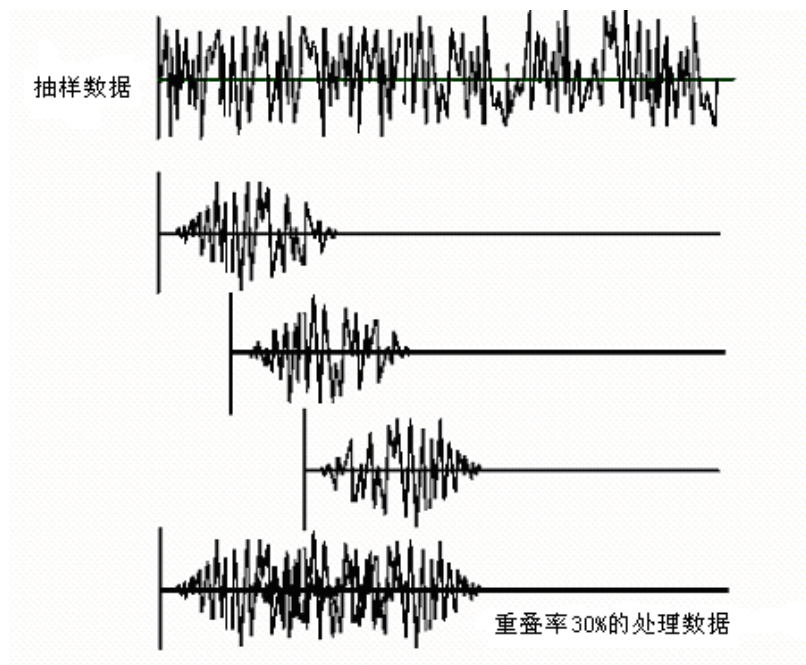
下图表示数据用汉宁窗加权的情况。在无重叠处理情况下，每一采样周期前 20% 和后 20% 的数据，实际上大部分被舍弃掉了，它们对于平均处理而言几乎不



提供任何贡献。

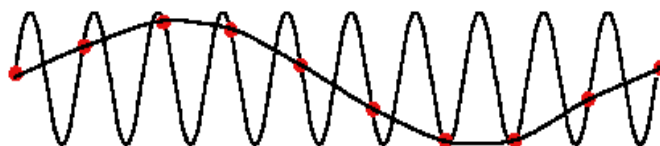


施加至少 30%的重叠，即可挽回数据的损失，如下图所示。这不但加快了数据采集过程（对同样的平均次数而言），也使得在统计意义上更加可信，因为在平均过程中，所有采集数据被利用的程度更为均衡。



## 1.2 混淆 (Aliasing)

采样率过低会使混淆问题变得严重，甚至导致错误的结果，如下图所示。



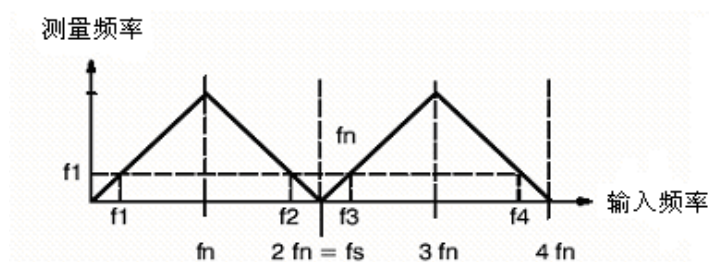
这一问题可通过遵守耐奎斯特 (Nyquist) 准则予以克服。该准则规定：采样率  $f_s$  应大于感兴趣最高频率  $f_m$  的二倍，即

$$f_s > 2f_m$$

或者说，允许被测量的最高频率  $f_{\max}$  等于采样率  $f_s$  的一半。后者也称为耐奎斯特频率  $f_n$ 。

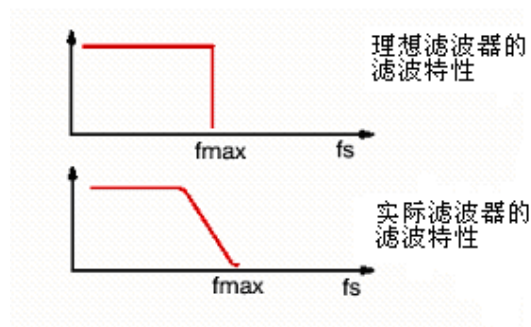
$$f_{\max} = \frac{f_s}{2} = f_n$$

混淆的问题也可以在频域上用下面图形来说明。



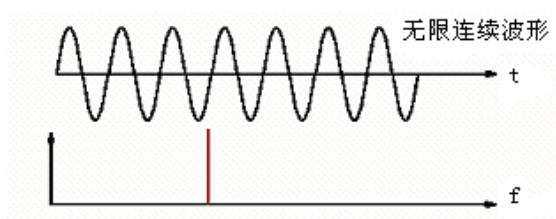
耐奎斯特频率  $f_n$  的所有倍乘数起到“折叠线”的作用。上图中， $f_4$  以  $3f_n$  线为基准折叠到  $f_3$ ， $f_3$  则以  $2f_n$  线为基准折叠到  $f_2$ ，而  $f_2$  又以  $f_n$  线为基准折叠到  $f_1$ 。因此，频率为  $f_2$ ， $f_3$  和  $f_4$  的所有信号看起来都是频率为  $f_1$  的信号。

避免这种问题的惟一途径，是采用模拟式或数字式抗混滤波器，以抑制信号中的高频成分。然而，滤波器的特性不可能是完全理想的，应当使滤波器的截止频率等于感兴趣的最高频率  $f_{\max}$ ，并关注滤波器在其通带以外的衰减特性。

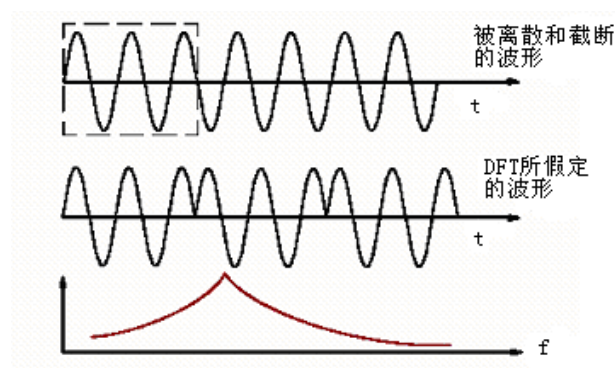


### 1.3 泄漏与加窗

与离散时间抽样数据相伴随的再一个问题是泄漏。一连续的正弦波应该得到如下图所示的单一谱线。



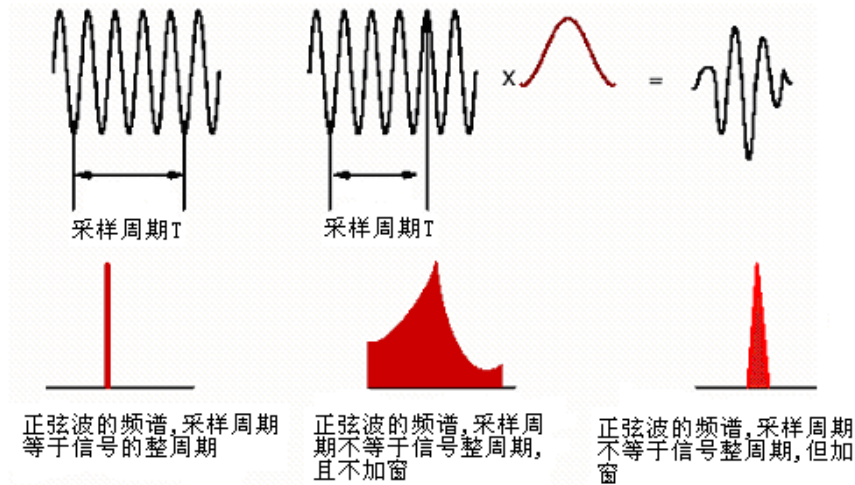
由于信号仅在一个采样周期  $T$  内被测量，而 **DFT** 却假定其表征了所有时刻的值。如果一正弦波在采样时窗内不是整周期采样，其结果由于边缘的不连续性，使得能量从本来的谱线处显著地泄漏至相邻频域。



泄漏是伴随数字信号处理最严重的问题之一。如果说，混淆误差尚可通过某些处理技术予以消除的话，泄漏误差则永远不可能完全消除。泄漏可通过采取不同的激励技术和提高频率分辨率来削减，或通过下文论述的加窗办法来缩小。

### 1.3.1 窗处理

要想消除或减轻信号截断和周期化带来的不连续问题，有两种方法：一是保证采样周期同步于信号整周期；二是保证在采样周期的起点和终点处，信号的幅值均为零。后一种方法是通过“加窗”来实现的，这相当于对信号作幅值调制。



加窗本身也造成误差的增加，这一点用户应当清楚，并尽量避免。加不同的窗函数导致能量的不同分配。窗的选择依赖于输入信号的类型，以及你所感兴趣的问题属于哪方面。

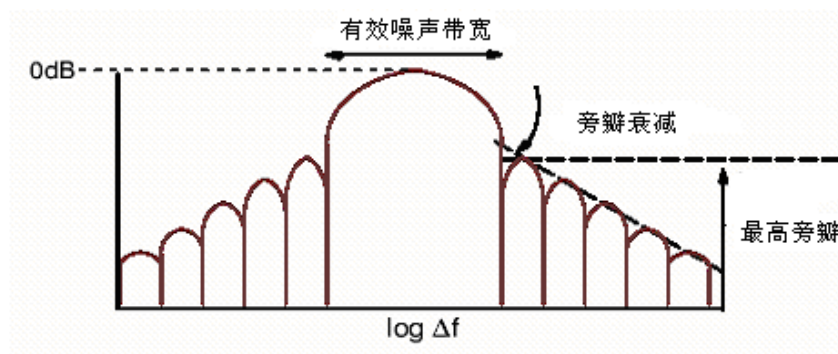
#### 自窗函数

自窗函数用于整周期采样或瞬态信号。瞬态信号的自然属性就是在采样周期的起点和终点幅值都等于零，例如脉冲或猝发信号即是。无论什么时候，自窗函数总是可取方案之一，因为加窗结果，会带来它自身的问题。矩形窗或称其为等权（uniform）窗，可用作自窗函数，因为这种窗不影响能量的分布。

**注意！** 对于采样周期与信号周期同步的情况，采用自窗函数优于任何其它窗函数。

#### 窗的特性

可供选用的时窗有多种，它们中多数可视为以多个正弦分量的组合作幅值调制。它们起到一种滤波器的作用，各种窗函数的性质可通过考察它们在频域上的滤波特性作出比较。下图标明其主要特性参数的物理意义。



各种窗的差别主要在于集中于主瓣的能量和分散在所有旁瓣的能量之比例。窗的选择取决于分析的目标和被分析信号的类型。一般说，有效噪声频带越宽，频率分辨率就越差，越难于分清有相同幅值的邻近频率。选择性（即分辨出强分量频率邻近的弱分量的能力）的提高与旁瓣的衰减率有关。通常，有效噪声带宽窄的窗，其旁瓣的衰减率较低，因此窗的选择是在二者中取折衷。表 1.1 给出常用窗的主要特性。

表 1.1 时窗的主要特性

窗类型	最高旁瓣 (dB)	旁瓣衰减 (dB/每十个)	有效噪声带宽 ( $\Delta f$ )	最大幅值误差 (dB)
矩形窗	-13	-20	1.00	3.9
汉宁窗	-32	-60	1.50	1.4
哈明窗	-43	-20	1.36	1.8
凯赛窗	-69	-20	1.80	1.0
布莱克曼窗	-92	-20	2.00	1.1
平顶窗	-93	0	3.43	<0.01

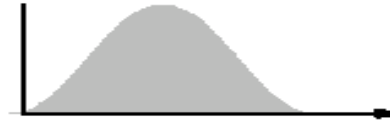
## 常用窗

### 矩形 (Uniform) 窗

这种窗在泄漏不成为问题的情况下被采用。譬如，用于整周期正弦波、脉冲、瞬态信号等等，其采样周期起端和末端的函数值在自然属性上就等于零。



下面说到的其它窗，包括汉宁窗，哈明窗，布莱克曼窗，凯赛窗和平顶窗，都是在时域上以多正弦分量函数对信号作幅值调制。它们在频域上的滤波特性比较，可参看表 1.1。



### 汉宁 (Hanning) 窗

这是在对随机信号作一般目的分析时最常采用的窗。它具有拱形的滤波特性。区分小幅值邻近频率的能力较低，因此不适合小信号的精确测量。

### 哈明 (Hamming) 窗

与汉宁窗比较，最高旁瓣低，但旁瓣衰减慢，最适用的动态范围约  $50\text{ dB}$ 。

### 布莱克曼 (Blackman) 窗

这种窗适用于检测存在于强信号中的弱分量。

### 凯赛 (Kaiser-Bessel) 窗

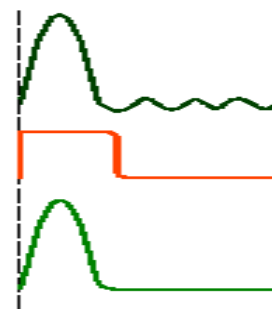
这种窗的滤波特性能提供较好的选择性，因而适合用于区分彼此的幅值差别甚大的多音信号。与汉宁窗相比较，在采用随机激励的情况下，这种窗会引起较大的泄漏误差。

### 平顶 (Flattop) 窗

这种窗的名称，源于它的滤波特性中，通带内波纹度低的缘故。这种窗用于纯音（单频）信号的精确幅值测量，特别适用于测量系统的标定。

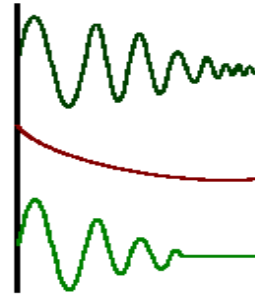
### 力 (Force) 窗

这种窗用于锤击法模态试验情况下的瞬态信号分析。它专用于削减激励通道的杂散噪声，如右图所示。在脉冲作用期间其取值为 1，其余时间取值为 0。



## 指数 (Exponential) 窗

这种窗也是用于瞬态信号的分析。目标是使信号在采样周期的终点衰减到接近于零。指数窗的数学表示式为  $e^{-bt}$ 。由衰减指数  $b$  可以确定在时窗的终点信号衰减的百分率。



指数窗通常用于锤击法模态试验的响应 (输出) 通道。也适用与猝发信号激励情况, 其时力信号和响应信号都应该加指数窗。然而加指数窗的结果会在测量数据中附加人为的阻尼, 在随后的模态分析处理中应仔细计入其影响。

## 窗函数的选择

### 对于瞬态信号分析

- |     |                                       |
|-----|---------------------------------------|
| 矩形窗 | 用于一般目的                                |
| 力窗  | 用于短促的脉冲信号和瞬态信号, 目的是提高总体信噪比            |
| 指数窗 | 用于比采样周期还要长的瞬态信号, 或者说在采样周期内尚未充分衰减的瞬态信号 |

### 对于连续信号的分析

- |           |  |
|-----------|--|
| 汉宁窗       | 用于一般目的                                       |
| 布莱克曼窗或凯赛窗 | 当选择性很重要, 需要区分幅值差别很大的谐波分量时使用                  |
| 平顶窗       | 用于测量系统标定, 或者幅值的精确测量十分重要的场合                   |
| 矩形窗       | 只用于分析特殊的多正弦波合成信号, 即它的所有谐波的频率都正好与谱的抽样频率相吻合的情况 |

### 对于系统分析, 即频响函数测量

- |     |                   |
|-----|-------------------|
| 力窗  | 用于锤击法的激励 (参考) 信号  |
| 指数窗 | 用于锤击激励小阻尼系统的响应信号  |
| 汉宁窗 | 用于随机激励的参考通道和响应通道  |
| 矩形窗 | 用于伪随机激励的参考通道和响应通道 |



## 窗的校正方式

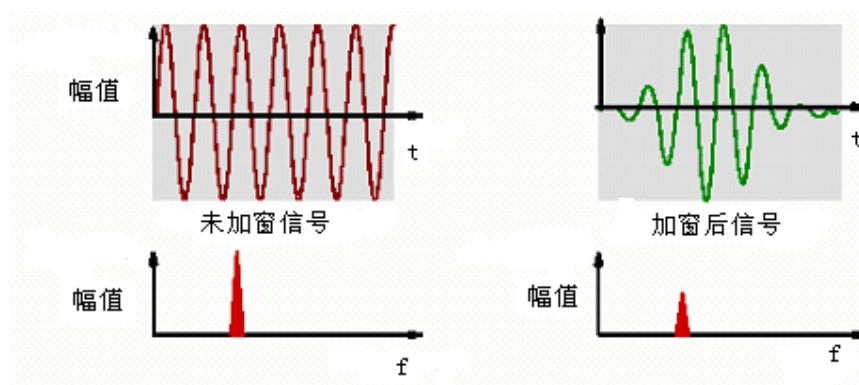
加窗改变了信号的固有属性，为补偿这种改变需要乘一校正因子。这种校正可通过两个方式之一施加：

幅值校正：对原数据从幅值上予以校正

能量校正：中对特定频带，校正信号的总能量。此方法仅用于宽带分析

### 幅值校正

作为例子，讨论正弦波加汉宁窗的情况（见下图）。

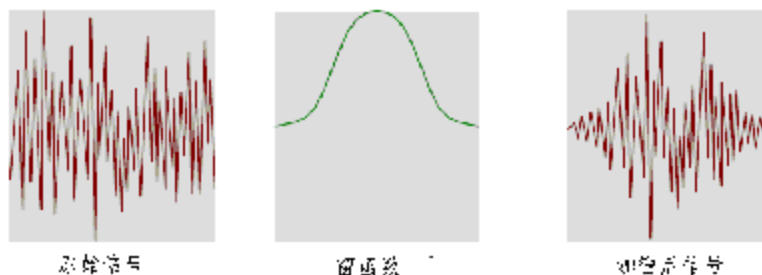


当加窗后的信号（正弦波乘以汉宁窗）被转换至频域时，所得谱的幅值将等于同源未加窗信号幅值的一半。因此，为了校正汉宁窗对频谱幅值的影响，所得到的谱必须倍乘以幅值校正因子 2。

对于单频信号的幅值测量，如果想得到准确的分析结果的话，必须采用幅值校正。

### 能量校正

加窗也改变了宽带信号的原有属性。不过，这时对于保持信号的能量不变通常更为重要。为此，可施加一能量校正因子使加窗后的信号恢复到与原信号有相同的能量。





在加汉宁窗情况下，加窗后信号的能量仅为原信号能量的 61%。因此，加窗后的数据需要倍乘 1.63，以校正能量的大小。

### 窗的校正因子

补偿加窗所需的校正因子，取决于校正类型和加窗的次数。表 1.2 给这些校正因子的值。

表 1.2 窗的校正因子

窗的类型	幅值校正因子	能量校正因子
矩形窗	1	1
汉宁窗×1	2	1.63
汉宁窗×2	2.67	1.91
汉宁窗×3	3.20	2.11
布莱克曼窗	2.80	1.97
凯赛窗	2.49	1.86
哈明窗	1.85	1.59
平顶窗	4.18	2.26

## 1.4 平均

现实世界的信号往往受到不同程度的噪声污染——包括随机噪声和偏置噪声二者。通过多次测量的平均可缩减污染，随机的噪声信号将通过平均变为零，而那些因非线性特性、泄漏、质量载荷变动等引起的有偏误差却不能通过平均得到缩减。现将几种不同测量平均技术分述如下。

### 线性平均

对于线性平均而言，每一个别测量子集，对于最终的平均结果有完全相同的影响。 $M$  个连续测量子集的平均值用  $\bar{x}$  表示，有

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x_m \quad (1-3)$$

平均过程的中间值为  $\bar{x}_{an} = \bar{x}_{a(n-1)} + x_n$ 。最终的平均需待采集停止后才进行。

---

### 稳态平均（移动平均）

在稳态平均情况下，所有个别的测量子集，对于最终的平均值同样有相同的影响。虽然在此情况下，平均过程的中间取值基于下面算式：

$$\bar{x}_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)\bar{x}_{n-1} + \frac{x_n}{n} \quad (1-4)$$

稳态平均的优点是运算中间的平均结果总是可以正常地定标。不过，这种定标使得处理过程速度变缓，需耗费较长的时间。

### 指数平均

指数平均的效果，是使最新的测量有最大的影响，旧的测量影响则逐步递减。这种情况下，

$$\bar{x}_n = \left(\frac{t-1}{t}\right)\bar{x}_{n-1} + \frac{x_n}{t} \quad (1-5)$$

其中  $t$  为常数，起加权因子的作用。

### 峰值电平保持

对于这一平均类型，所有测量子集之间逐一进行比较。如果数据是复数，则只对幅值信息进行比较。包含  $N$  个抽样的新测量子集  $x_n(k) (k=0, \Lambda N-1)$  与前面  $(n-1)$  步平均的结果  $\bar{x}_{n-1}(k)$  进行比较，在新的平均结果中， $\bar{x}_n(k)$  的取值方法如下：

$$\begin{aligned} \bar{x}_n(k) &= x_n(k) & \text{若 } |x_n(k)| > |\bar{x}_{n-1}(k)| \\ \bar{x}_n(k) &= \bar{x}_{n-1}(k) & \text{若 } |x_n(k)| \leq |\bar{x}_{n-1}(k)| \end{aligned} \quad (1-6)$$

按照这样的取值办法，平均结果中，对于任何给定的序号  $k$  而言，均保留所有参与平均的子集中那些在绝对值意义上的最大值。

### 峰值参考保持

这一平均方式，是利用一个通道的数据去控制整个平均过程。以  $x^i$  表示  $i$  个通道数据的集合， $x^r$  表示参考通道数据，则新的测量子集  $x_n^r(k) (k=0, \Lambda N-1)$  与前面  $n-1$  步平均结果  $\bar{x}_{n-1}^r(k)$  进行比较，而新的

---

平均  $\bar{x}^i(k)$  的取值方法如下:

$$\begin{aligned}\bar{x}_n^i(k) &= x_n^i(k) && \text{若 } |x_n^r(k)| > |\bar{x}_{n-1}^r(k)| \\ \bar{x}_n^i(k) &= x_{n-1}^i(k) && \text{若 } |x_n^r(k)| \leq |\bar{x}_{n-1}^r(k)|\end{aligned}\quad (1-7)$$

这样, 平均结果, 所有测量通道保留下与参考通道最大值同时发生的测量值。

## 1.5 参考文献

### 信号与系统

- J. S. Bendat and A.G. Piersol.  
Random Data : Analysis and Measurement Procedures  
Wiley - Interscience, 1971.
- J. S. Bendat and A.G. Piersol.  
Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis  
Wiley - Interscience, 1980.
- R.K. Otnes and L. Enochson.  
Applied Time Series Analysis  
John Wiley & Cons, 1978.
- J. Max  
Méthodes et Techniques de Traitement du Signal (2 Tomes)  
Masson, 1972, 1986.

### 数字信号处理

- A.V. Oppenheimer and R.W. Schafer  
Digital Signal Processing  
Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1975.
- L.R. Rabiner and B. Gold  
Theory and Application of Digital Signal Processing  
Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1975.
- K.G. Beauchamp and C.K. Yueu  
Digital Methods for Signal Analysis  
George Allen & Unwin, London 1979.
- M. Bellanger  
Traitement Numérique du Signal  
Masson, Paris 1981.
- A. Peled and B. Liu  
Digital Signal Processing  
Theory, Design And Implementation  
John Wiley & Sons.

---

离散傅里叶变换

E.O. Brigham  
The Fast Fourier Transform  
Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1974.

R.W. Ramirez  
The FFT : Fundamentals and Concepts  
Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1985.

C.S. Burrus and T.W. Parks  
DFT/FFT and Convolution Algorithms : Theory and Implementation  
John Wiley & Sons, 1985.

H.J. Nussbaumer  
Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms  
Springer Verlag, 1982.

R.E. Blahut  
Fast Algorithms for Digital Signal Processing  
Addison Wesley, 1985.

IEEE-ASSP Society  
Programs for Digital Signal Processing  
IEEE Press, New York, 1979.

## 第二章 结构动力学试验

了解结构的动力特性，是改进现有结构的性能，设计与开发新结构的重要基础。

本章简要介绍考察结构动力特性的三种分析类型，即：

- ☐ 信号分析
- ☐ 系统分析
- ☐ 特征分析

### 2.1 信号分析

线性物理系统的动力学分析，可通过测量系统在某种激励下的响应来实现。激励源可以是系统在工况下的作用力，不一定非得要知道。知道激振力情况的响应测量和分析，在 2.2 节讨论。

考察结构的振动特性，在可获得功能方面受到一定的限制。我们希望通过测

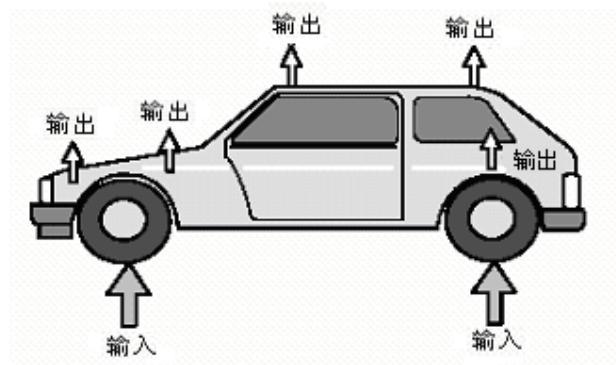
量分析, 提供与发生特殊现象相关连的、通常与频率有关的信息。这些测量功能, 我们将放在第三章作专门讨论。

噪声是大家关心的问题。有关声学测量方面的专题资料, 将分为声学测量和声品质分析等几个部分作逐一介绍。

考察改变环境状况时结构的特性, 例如考察发动机升速或降速过程中振动和噪声的特性, 通常称为**特征 (signature) 分析**, 这一课题在 2.3 节讨论。

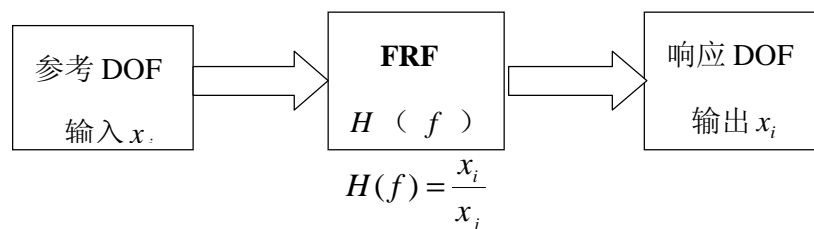
## 2.2 系统分析

系统分析是一种考察系统特性的方法, 即考察对应某一给定输入, 结构会产生怎样的响应。对于线性系统而言, 输入与输出之间的关系是系统的一种基本属性, 可用来预测系统在不同状况下的特性。

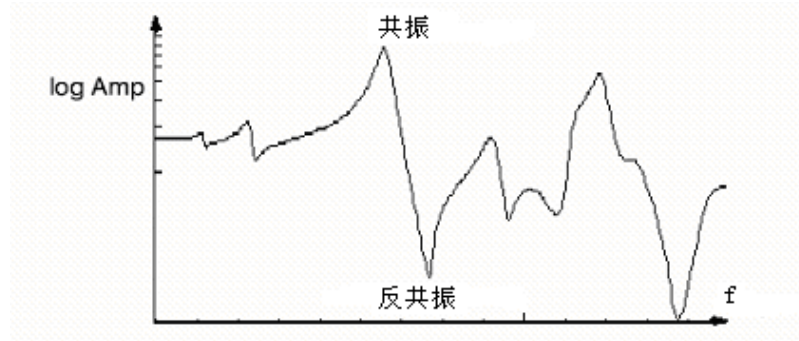


模态分析是系统分析的一种手段, 用以建立系统的模态模型。该模型由一系列频率、阻尼比和模态振型构成。

频响函数 (**FRF**) 属于频域函数, 表征一响应 (输出) 信号与一参考 (输入) 信号之间在频域上的比值关系。一测量点的位置和方向定义为一个自由度 (DOF), 一个 **FRF** 总是涉及两个 DOF, 即响应 DOF (分子) 和参考 DOF (分母)。



对于试验模态分析而言,响应信号通常是响应 DOF 在另一 DOF 上输入激振力时的加速度信号。**FRF** 的峰值指示低量级的输入产生高量级的响应(共振),而 **FRF** 的极小值指示即使有高量级的输入也只得到低量级的响应(反共振)。



## 测点

数据采集通道的数目,决定了能同步进行测量的响应和激励的 DOF 数。测点在试验系统中的几何位置,作为结构的几何图形组成部分予以给定。为了每一 DOF 响应的可视化,测点的几何位置必须预先给定。

## 结构的激励

可用力锤或激振器对结构施加激振力。使用激振器需要专门的信号源。原始的信号可以是数字式的。信号的选择取决于分析方法本身。

如果系统受多个输入激励,同时在多个响应 DOF 测量响应,则 **FRF** 分析方法属于多输入多输出(**MIMO**)方法。

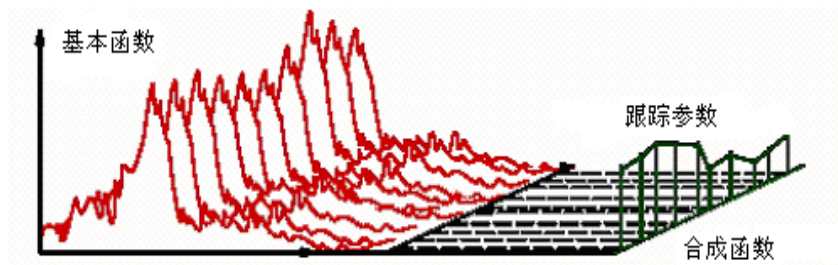
如果采用力锤激励机械结构,则试验过程称为锤击试验(**Impact testing**)。这种试验可取两种方法之一实施:第一种方法是在某一固定不变的测点测量响应,用力锤在多个点逐一施加锤击激励,这种情况称为“游动锤击”(**Roving hammer**)。第二种方法则是在某一固定点施加锤击,而在其它所有测点测量响应,这一情况称为“定点锤击”(**Fixed hammer**)。

## 2.3 特征分析

此课题涉及分析一系列非稳态信号,该信号在整个分析周期内是不断地变化的。一个例子是结构的振动特性和噪声特性作为转速的函数。在升速或降速的过程中,测量一系列的信号,从中确定出转速(由转速信号确定)的变化与相应的

结构特性变化。

相对于不同外部参数的谱数据，被分析并绘制成阵列图（见下图）。象这样对测量函数作阵列布置的图形就是所谓瀑布（Waterfall）图或地形（Map）图。3.1 节和 3.2 节所列举的所有时域和频域函数都可以阵列成瀑布图的形式。



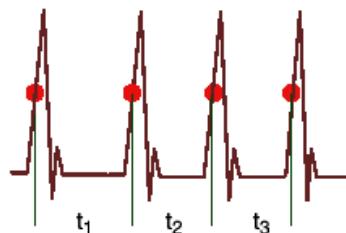
除了测量函数的瀑布图以外，特征分析还可得到所谓复合函数。这是指直接相对于跟踪参数值的二维函数。这种函数可以是总量级或频率“切片”等，在 3.3 节讨论。

测量通常跟随采集过程，而测量函数相对于跟踪参数的进一步分析，可放在后处理阶段来实施。

### 跟踪

表征信号变化的控制参数称为跟踪参数，它可以是时间、转速（rpm），温度或其它参数。转速是最常用的跟踪参数，需要有某种转速表信号来确定 rpm 值。

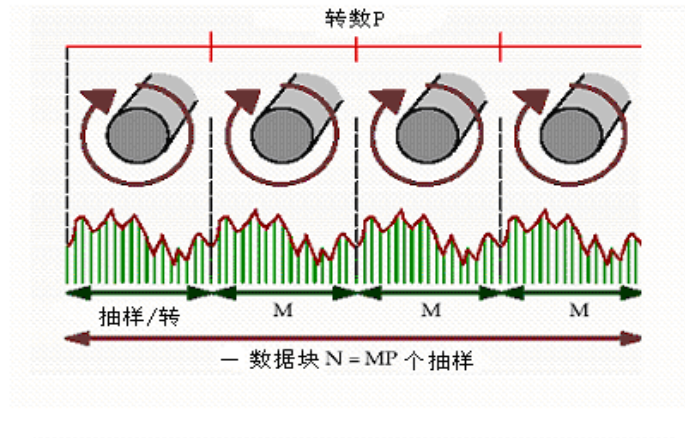
转轴每转过一圈，转速表通道产生若干个脉冲信号（见右图）。根据正斜率通过触发电平的时刻，求出脉冲之间的时间间隔，并进而求得 rpm 值。



若多个通道同时测量跟踪值，则必须采取某种控制采集方式，以便明确何时开始进行测量和终止测量。

### 特征分析中的参数关系

采样率  $f_s = 1/\Delta T$ ，采样周期  $T = N \cdot \Delta T$ 。



$P$  每一数据块对应转轴旋转的圈数

$$P = rpm(Hz) \cdot T = \frac{rpm(Hz)}{\Delta f}$$

$M$  每转过一圈取样的个数

$N$  一数据块取样的个数 (  $N = M \cdot P$  )

### 阶次 (orders)

旋转机械的大多数信号特征，都与转速频率及其倍频有关。

转速的倍频称为阶次。它是信号频率与转速 ( $rpm$ ) 之间的比例系数，以字符  $O$  表示。即

$$f = O \cdot rpm(Hz)$$

与稳态信号相对应的  
分析参数为：

最高分析频率  $f_{\max}$

$$f_{\max} = f_s / 2$$

$$f_{\max} = O_{\max} \cdot rpm$$

与旋转机械相对应的  
分析参数为：

最高分析阶次  $O_{\max}$

$$O_{\max} = M / 2$$

频率分辨率  $\Delta f$

$$\Delta f = 1/T$$

$$\Delta f = \Delta O \cdot rpm$$

阶次分辨率  $\Delta O$

$$\Delta O = 1/P$$



---

## 固定采样

为基本特征分析的另一术语，信号测量采用上文叙述的标准数据采集技术，即取固定的采样率和固定的采样间隔。rpm 值虽然被测量，但它只用于采集控制和采集数据块的注释。这种情况下，最高阶次分辨率随转速（rpm）而变化。

## 阶次跟踪

这涉及到变转速情况下的信号测量，其采样率（ $f_s$ ）和观察时间（ $T$ ）随转速（rpm）而改变。

数据的采集与转速相关联。每一转的采样数保持为常数。信号不是按照时间增量而是恒定的转轴角位移增量来采样。这意味着最高测量阶次保持常量（ $O_{\max} = M/2$ ）。

在阶次跟踪情况下，每一次测量对应的转数（ $P$ ）取决于转速。 $P$  为常数，阶次分辨率也为常数（ $\Delta O = 1/P$ ）。在一次测量的转数为整数时， $\Delta O$  决定的阶次点正好位于谱线的离散点上，从而避免了所谓“泄漏”的问题。

# 第三章 基本测量功能

本章简述各种可能的测量功能及其应用。包括：

- ☐ 时域测量功能
- ☐ 频域测量功能
- ☐ 复合测量功能
- ☐ 单位
- ☐ 有效值计算

其中包括以阶次跟踪为基础的特征分析，但不包括声学测量和分析，后者放在第四章至第八章另作专门讨论。

## 3.1 时域测量

### 时间记录

取  $N$  个瞬时的时域采样  $x(n)$ ， $N$  为数据块的尺寸。连续  $M$  个时间记录的系

---

集平均，得到时间记录测量平均的集合  $\bar{x}(n)$ ：

$$\bar{x}(n) = A_{m=0}^{M-1}(x_m(n)) \quad n = 0, \Lambda N-1 \quad (3-1)$$

其中， $M$  为平均次数， $A$  表示平均运算。

时间平均用于澄清信号由于随机噪声的存在而表现出的假象。确定一数据块应取多少平均次数的规定，以及各种平均方法，都已在第 1.4 节叙述过。

作特征分析时，取采集过程中所有时间测量构成瀑布图或地形图。由于这种分析是对时变信号的，平均只有在信号作缓慢变化或阶梯式变化时才用得上。

### 自相关

相关用于测量两个变量之间的相似性。自相关函数取信号本身不同时刻的值相比较而得出。

时域计算自相关函数  $R_{xx}(t)$ ，是通过一信号与同一信号的时延 ( $t$ ) 相乘，取其乘积对所有时间作积分平均而求出，即

$$R_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t+t)dt \quad (3-2)$$

不过，在一般情况下，都是通过频域函数计算相关函数。其时，采样信号  $x(n)$  的离散型自相关函数  $R_{xx}(n)$  由下式求出：

$$R_{xx}(n) = F^{-1}(S_{xx}(k)), \quad \begin{matrix} k = 0, \Lambda N-1 \\ n = 0, \Lambda N-1 \end{matrix} \quad (3-3)$$

其中， $F^{-1}$  表示逆傅里叶变换，而  $s_{xx}(k)$  则是离散型自功率谱。

可以看出，最大相关发生在  $t = 0$  处，即自相关在  $t = 0$  处有最大值，且等于  $x(t)$  的均方值。纯随机信号只在  $t = 0$  处有唯一的峰。而周期信号则有很多的峰，它们分别出现在时延等于周期的整数倍处。

周期信号的自相关函数也是周期函数，且其周期就等于信号波形本身的周期。这一性质被用来检测湮没在噪声中的周期信号。这种方法优于线性平均，它不要求有同步触发信号。对某些脉冲型的信号做分析时，利用自相关函数也许比利用频域函数能获得更好的结果。

## 互相关

互相关用于测量两个不同信号之间的相似性。因此需要有多组测量通道。在时域上的定义式为

$$R_{xy}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t)y(t+t)dt \quad (3-4)$$

如同自相关函数计算，两个采样信号  $x(n)$  和  $y(n)$  之间的离散型互相关函数按下式计算：

$$R_{xy}(n) = F^{-1}(S_{xy}(k)), \quad k=0, \Delta N-1 \\ n=0, \Delta N-1 \quad (3-5)$$

其中， $S_{xy}(k)$  为两个信号之间的离散型互功率谱。

互相关作为时延的函数，表征两个信号之间的相似性。可用于确定两个信号之间的时间差关系。

## 直方图 (Histogram)

概率直方图  $q(j)$  表述特定的信号幅值出现的相对比率。将抽样信号  $x(n)$  的信号输入量程划分为  $J$  个级别。其每一级别  $j(j=0, \Delta J-1)$ ，表征一平均值  $x_j$  和级增量  $\Delta x$ 。

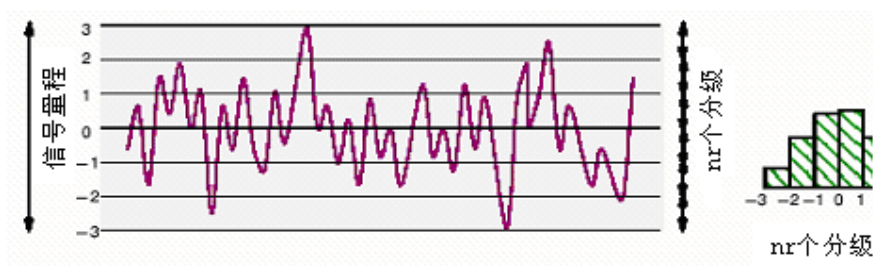


图 3-1 直方图

抽样信号  $x(n)$  的概率直方图定义式为：

$$q(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} k(x(n)), \quad j=0, \Delta J-1 \quad (3-6)$$

其中， $k(x(n))=1$ ，若  $x_j - \frac{\Delta x}{2} \leq x(n) < x_j + \frac{\Delta x}{2}$

$$k(x(n)) = 0, \quad \text{否则}$$

N 的最大取值，或等于时域抽样数据总量，或等于谱线总量。

### 概率密度

概率密度  $p(j)$  是概率直方图  $q(j)$  的正则化表示：

$$p(j) = \frac{100}{\Delta x} q(j), \quad j = 0, \Delta J - 1 \quad (3-7)$$

此函数代表每一工程单位所占百分率。

### 概率分布

概率分布  $d(j)$  表示信号幅值低于给定值所占的百分比概率。此函数可由式

3-6 给定的概率直方图  $q(j)$  按下式求得：

$$d(j) = \sum_{i=0}^j q(i), \quad j = 0, \Delta J - 1 \quad (3-8)$$

## 3.2 频域测量

### 线性谱

即时离散型线性谱  $x(k)$ ，定义为即时采样时间记录的离散傅里叶变换：

$$\begin{aligned} x(k) &= F(x(n)) & n &= 0, \Delta N - 1 \\ & & k &= 0, \Delta N - 1 \end{aligned} \quad (3-9)$$

对连续 M 个即时离散频谱作系集平均得到的线性谱为：

$$\bar{x}(k) = A_{m=0}^{M-1} (x_m(k)), \quad k = 0, \Delta N - 1 \quad (3-10)$$

考虑时间记录为实值情况，线性谱存在厄米特（Hermitian）对称，即

$$x(k) = x^*(-k) = x^*(N - k), \quad k = 0, \Delta N / 2 \quad (3-11)$$

其中， $x^*$  表示  $x$  的共轭复数。

谱线数等于时域采样数的一半。

**FFT** 算法产生的是双边傅里叶变换，需转换为单边谱。只有正频率才有物理意义。这需要按格式要求来转换。峰值谱将计算结果倍乘因子 2，得到的是正

弦波时间信号的幅值。有效值谱则是将计算结果倍乘 $\sqrt{2}$ 。

如同时间记录的平均一样，非同步触发信号的线性谱不可以做平均处理。平均功能用于辨识被噪声污染的信号。当存在同步触发信号时，线性谱的平均优于自功率谱平均，它可使噪声平均成零，而不像后者被平均为均方值。

### 自功率谱

自功率谱的值等于线性谱幅值的平方。抽样信号的离散型自功率谱 $S_{xx}(k)$ 定义为 $M$ 个即时离散线性谱 $X_m(k)$ 幅值平方的系集平均，即

$$S_{xx}(k) = A_{m=0}^{M-1} (X_m^*(k) \bullet X_m(k)), \quad k = 0, \Delta N - 1 \quad (3-12)$$

其中， $X^*$ 为 $X$ 的共扼复数。

线性谱的值为复数，含相位信息；而自功率谱则是实数，不含相位信息。

考虑时间记录为实值情况，自功率谱在正负频域是偶对称的，即

$$S_{xx}(k) = S_{xx}(-k) = S_{xx}(N - k), \quad k = 0, \Delta N/2 \quad (3-13)$$

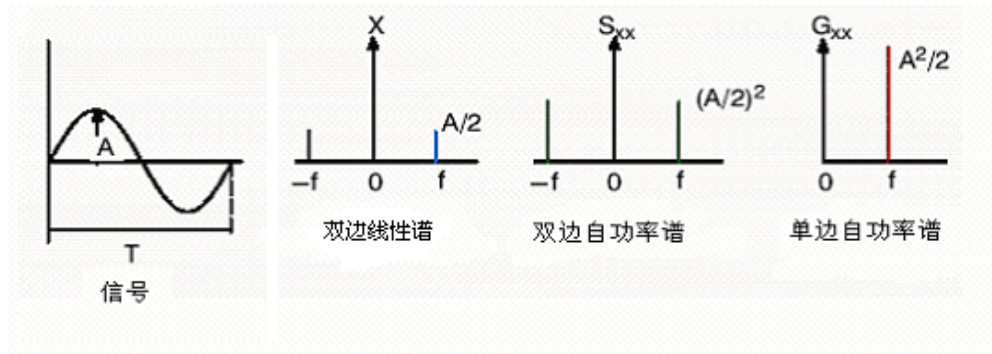


图 3-2 自功率谱

功率谱的值是通过双边傅里叶变换得到的，因此它是双边谱。要想得到时域信号的功率估计，必须对正、负频率域的所有功率谱值求和而得出。由于只有正频率才有物理意义，对双边功率谱 $S_{xx}(k)$ 可按下面规则转换成单边功率谱

$G_{xx}(k)$ ：

$$\begin{aligned} G_{xx}(k) &= S_{xx}, \quad k = 0 \\ G_{xx}(k) &= 2S_{xx}(k), \quad k = 1, \Delta \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (3-14)$$

此单边功率谱也称为 **RMS**（有效值）自功率谱，其平方根则称为 **RMS** 谱。

自功率谱有多种格式：

**功率谱密度（PSD）**：是一种对于频率分辨率作幅值正则化的表示方式。这种方式可克服由于选取不同的分析带宽而造成幅值不同的问题。对于平稳宽带信号的测量，这是一种标准的表示形式。

**能量谱密度（ESD）**：用于瞬态信号。因为对于瞬态信号而言，研究它的总能量比研究它在采样总时间内的平均功率更有意义。实际运算是将 **PSD** 的值乘以测量周期 **T** 的值。

这些自功率谱不同格式之间的相互关系如表 3.1。其中，参数 **A** 和 **T** 的意义可参看图 3-2，而  $\Delta F$  则为频率分辨率。

表 3.1 自功率谱的各种格式

幅值类型	幅值格式	除 DC 线外取值
RMS（有效值）	功率谱	$A^2/2$
RMS	线性谱	$A/\sqrt{2}$
RMS	<b>PSD</b>	$A^2/2\Delta F$
RMS	<b>ESD</b>	$A^2T/2\Delta F$
Peak（峰值）	功率谱	$A^2$
Peak	线性谱	$A$
Peak	<b>PSD</b>	$A^2/\Delta F$
Peak	<b>ESD</b>	$A^2T/\Delta F$

### 互功率谱

互功率谱  $S_{xy}$  用以测量两个信号之间在分析带宽内每一频率的互功率。它与互相关函数为一傅里叶变换对。其定义式为：

$$S_{xy}(k) = A_{m=0}^{M-1} (X_m^*(k) \bullet Y_m(k)), \quad k = 0, \Delta N - 1 \quad (3-15)$$

其中， $X_m^*(k)$  为时间信号  $x(n)$  即时线性谱的共轭复数，而  $Y_m(k)$  则为时间信号

---

$y(n)$  的即时线性谱。

互功率谱蕴涵有两个信号之间在幅值和相位上的相互关系信息。它在任意频率的相位值，表示两个信号之间在该频率的相对相位，因此，可用它作相位关系分析。

由于互功率谱是一乘积，当两个信号的幅值都大时，它的值也大，两个信号的幅值都小时，它也小。因此它可以指示输入和输出二者中占优势的信号幅值。然而，在利用这一关系时，也应当特别小心，互功率谱的高值也可能只是由于输出幅值高，而它并非由于输入所引起。输入和输出的相互关系可以由相干函数予以揭示，这将在下文讨论。

互功率谱一个主要用途是计算频响应函数。

互功率谱的幅值类型与前面介绍的自功率谱的幅值类型相同，分为 **RMS** 和 **Peak** 两种幅值类型。

## 相干函数

有四种类型的相干函数：常相干、重相干、偏相干和虚拟相干。

### 常相干

信号  $x_i(n)$  和  $x_j(n)$  之间的常相干定义为：

$$g_{oij}^2(k) = \frac{|\overline{S_{ij}}(k)|^2}{\overline{S_{ii}}(k) \times \overline{S_{jj}}(k)} \quad (3-16)$$

其中， $\overline{S_{ij}}(k)$  为互功率谱平均， $\overline{S_{ii}}(k)$  和  $\overline{S_{jj}}(k)$  为自功率谱平均。

常相干反映多分量组成的输出信号中最大能量与输出信号中总能量的比值。相干可用于检测由别的通道信号功率引起的一测量通道的功率。据此用于评估频响函数的测量质量。另外，它不仅用于评估输入输出关系，还可用来评估多个激振器给出的激振力之间的相干关系。

相干函数的取值范围在 0 和 1 之间。高值（接近于 1）表明输出几乎完全由输入引起，你可以充分相信频响函数的测量结果。低值（接近于 0）表明有其它的输入信号没有被测量出，或存在严重的噪声，系统有明显的非线性或时延等诸类问题。

## 重相干

重相干属于频域函数（无量纲系数），它描述单一信号（输出谱）与另外一组视为参考信号（输入谱）之间的因果关系。它等于由多个输入信号引起的输出信号的能量与该输出信号的总能量之比。它用于检验测量中的噪声含量，其所有响应信号应该与所取参考（输入）信号有因果关系。

单一响应谱  $Y(k)$  与一组参考谱  $X_i(k)$  之间的重相干用下式计算：

$$g_{yx}^2(k) = 1 - \frac{S_{yy \cdot n!}(k)}{S_{yy}(k)} \quad (3-17)$$

其中， $S_{yy}(k)$  为响应信号  $y(n)$  的自功率谱； $S_{yy \cdot n!}(k)$  为自功率谱  $S_{yy}(k)$  的局部分量，是在所有参考谱  $X_i(k)$  的贡献均被消除之后得到的。

重相干的值也总是在 0 和 1 之间。

## 偏相干

偏相干属于“状态信号”之间的常相干。所谓状态信号是指那样一些信号，除外的信号所产生的影响可在最小二乘意义上被排除掉。

考虑信号  $X_1, \Lambda X_i, X_j, \Lambda$ ，其  $X_i$  和  $X_j$  的偏相干是在排除信号  $X_1, \Lambda X_g$  后由下式给出：

$$g_{pij \times g}^2(k) = \frac{|S_{ij \times g}(k)|^2}{S_{ii \times g}(k) \bullet S_{jj \times g}(k)} \quad (3-18)$$

其中， $S_{ii \times g}(k)$  为无信号  $X_1, \Lambda X_g$  影响时信号  $X_i$  的自功率谱； $S_{jj \times g}(k)$  为无信号  $X_1, \Lambda X_g$  影响时  $X_j$  的自功率谱； $S_{ij \times g}(k)$  为无信号  $X_1, \Lambda X_g$  影响时  $X_i$  和  $X_j$  之间的互功率谱。

偏相干的取值也是在 0 和 1 之间。

## 虚拟相干（Virtual Coherence）

虚拟相干是一信号与下文所述主分量之间的常相干。虚拟相干由下式求得：

$$g_{vij}^2(k) = \frac{|S'_{ij}(k)|^2}{S'_{ii}(k) \bullet S_{jj}(k)} \quad (3-19)$$



其中,  $S'_{ii}(k)$  为主分量  $X'_{ii}(k)$  的自功率谱,  $S'_{ij}(k)$  为信号  $X_j$  与主分量  $X'_i$  之间的互功率谱。

虚拟相干的值总是在 0 和 1 之间。任意信号与所有主分量之间虚拟相干的和也在  $[0, 1]$  的域内。

### 主分量谱

考虑一组信号  $X_1, \Lambda X_n$ , 假定它们可以由一组完全不相关的信号通过线性组合来描述。这后一信号组 (用  $X'_1, \Lambda X'_n$  表示) 就称为原有信号组的主分量。注意, 主分量之间的相干函数值精确地等于 0。因为按定义, 它们之间是完全不相关的。在理念上, 主分量就是信号组中能观察的主要独立机械源。

主分量可由时域抽样数据或响应的线性谱求得。基本关系式为:

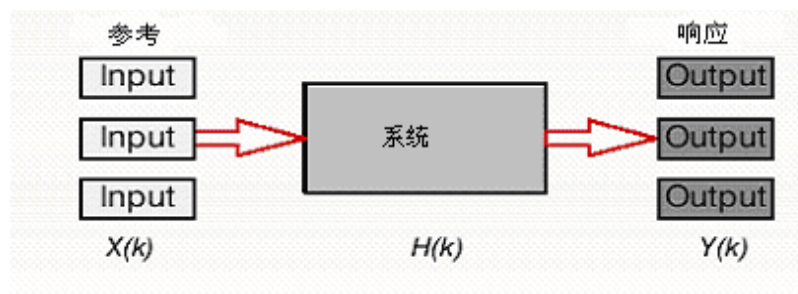
$$\begin{aligned} \{X(k)\} &= [U]^H \{X'(k)\} \\ \{X'(k)\} &= [U] \{X(k)\} \\ [U]^H [U] &= [I] \\ [S_{xx}] &= [U]^H [S'_{xx}] [U] \end{aligned} \quad (3-20)$$

其中,  $[S'_{xx}]$  为以主分量自功率谱为对角线元素的对角线矩阵;  $\{X'(k)\}$  为不相关的主分量信号组;  $[U]$  为转换酉矩阵。

主分量谱的主要应用是确定信号组中不相关机械源的数目。一个熟知的例子是 **MIMO** 频响函数估计中多输入激励源的鉴别。

### 频响函数

频响函数 (FRF) 矩阵  $[H(k)]$  表示一线性时不变系统输入和输出的频域关系。



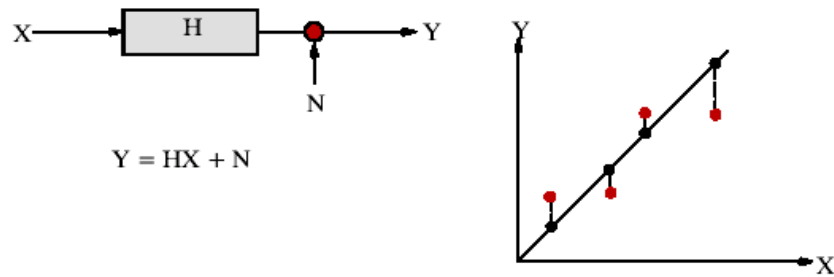
以  $N_i$  表示系统输入个数,  $N_o$  表示系统输出个数,  $\{X(k)\}$  为系统输入信号  $N_i$  维向量,  $\{Y(k)\}$  为系统输出信号  $N_o$  维向量。维数为  $(N_o \times N_i)$  的频响应函数矩阵  $[H(k)]$  与  $\{X(k)\}$  和  $\{Y(k)\}$  之间的关系为

$$\{Y(k)\} = [H(k)] \times \{X(k)\} \quad (3-21)$$

上式描述的系统是一理想系统,其输出直接由输入引起,没有任何噪声混杂进来。实际上不可能是这样的情况,因而人们提出各种估计方法,用于从实际测量的输入和输出信号出发估计出  $[H(k)]$ 。

### $H_1$ 估计

最常用的是  $H_1$  估计,它假定输入信号中不含有噪声,从而认为所有  $X(k)$  的测量都是精确的。



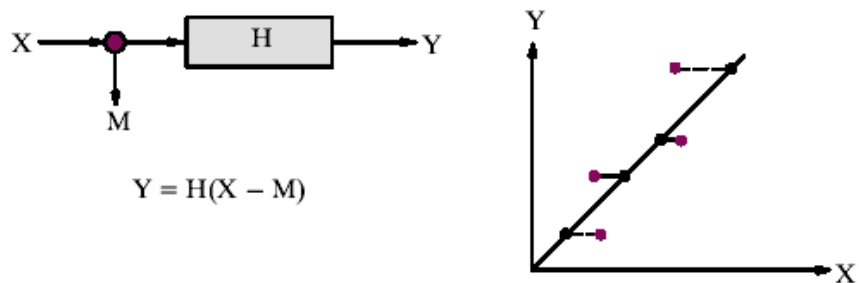
使输出信号的噪声影响在最小二乘意义上极小化,得到频响应函数  $H_1$  估计的计算式为:

$$[H_1(k)] = \frac{[S_{yx}(k)]}{[S_{xx}(k)]} \quad (3-22)$$

如果输入信号中存在噪声,那么  $H_1$  估计得到的是 **FRF** 的欠估计。反共振区的  $H_1$  估计优于共振区的  $H_1$  估计。在各输入信号之间不相关情况下,  $H_1$  估计得到最佳的结果。

### $H_2$ 估计

作为替换,可以采用  $H_2$  估计。这里假定输出信号中都不含有噪声,从而所有  $Y(k)$  值的测量都是精确的。



使输入信号的噪声影响在最小二乘意义上极小化，得到频响函数  $H_2$  估计的计算式为：

$$[H_2(k)] = \frac{[S_{yy}(k)]}{[S_{yx}(k)]} \quad (3-23)$$

如果输出信号中存在噪声，那么  $H_2$  估计得到的是 **FRF** 的过估计。其对共振区的估计优于反共振区的估计。

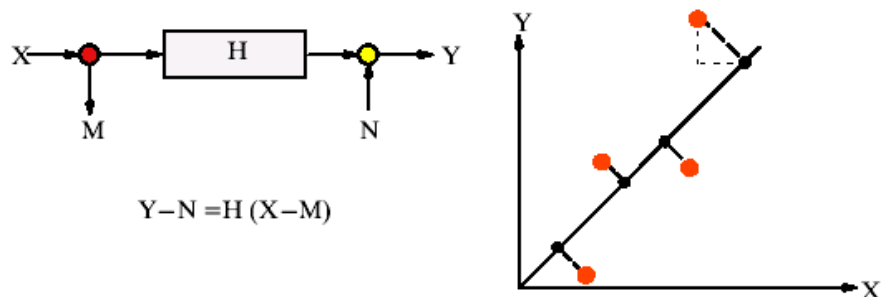
**注意！** 这种估计只有在单输出情况下才能计算。（在多输入多输出情况下，可采用 Moore-Penrose 伪逆法即广义逆法进行计算—译者）

### $H_v$ 估计

对  $H_v$  估计， $[H(k)]$  的值是由矩阵  $[S_{xxy}]$  的最小特征值相应的特征向量得出，其中

$$[S_{xxy}] = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

这种估计由总体最小二乘意义上总体噪声贡献极小化得到。采用这种估计，输入信号和输出信号中噪声成分均可被缩减。



$H_v$  估计得到 **FRF** 的最佳总体估计。它在共振区的估计接近于  $H_2$  估计，而在

反共振区的估计则接近于  $H_1$  估计。不过，比之  $H_1$  估计和  $H_2$  估计， $H_v$  估计需要较长的计算时间。

频响函数估计，至少需有一个参考通道和一个响应通道。

### 冲激响应

冲激响应( **IR** )函数矩阵  $[h(t)]$  代表线性系统输入输出之间在时域上的关系。这一关系取卷积运算的形式：

$$y(t) = \int x(t)x(t-t)dt \quad (3-25)$$

$[h(t)]$  由频响函数的逆傅里叶变换求出，即

$$[h(t)] = F^{-1}[H(k)] \quad (3-26)$$

求冲激响应函数至少需有一个参考通道和一个响应通道。

## 3.3 复合函数

本节介绍特征分析中，数据采集和处理的某些特殊功能。由于这类分析倾向于考察信号随环境（即 rpm、时间，…）变化而发生的演变，因而需要有反映这种演变的功能。

称为复合函数，是因为它们是从前文讨论过的基本测量函数进一步导出的。

### 总量级（OA）

此功能描述测量信号的总能量随环境（转速、时间，…）变化的演变。通常它总是表示为谱的总有效值。对于所有的基本测量功能，都可以得到它。只是对不同的测量功能，应施加相应的能量校正。

#### ANSI 1.4 时基 OA 级计算

通过指数平均计算时间信号在特定带宽的 **OA** 级，以  $e^{-\Delta t/t}$  作为指数加权因子。其中， $\Delta t$  为信号的采样间隔， $t$  为时间常数。 $t$  的取值与信号类型有关，ANSI 1.4 标准规定有三种标准取值：

$t = 35ms$  ,      对脉冲（尖峰）信号

$t = 125ms$  ,      对快变信号

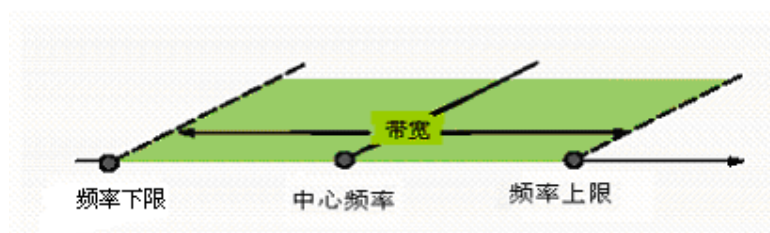
$t = 1000ms$  , 对缓变信号

对于包含有尖峰的信号，按“脉冲”处理并附加峰值检测功能。这时，信号的首次平均取  $35ms$  平均时间常数，此后以  $1500ms$  的延迟率进行峰值检测。

### 频率切片

该功能描述在规定频带内测量信号的能量随转速的变化。它总是表示为有效值谱，且只有当基础测量是频域测量才有可能得到。

频率切片的计算，是围绕一中心频率邻近一定带宽上的积分运算。

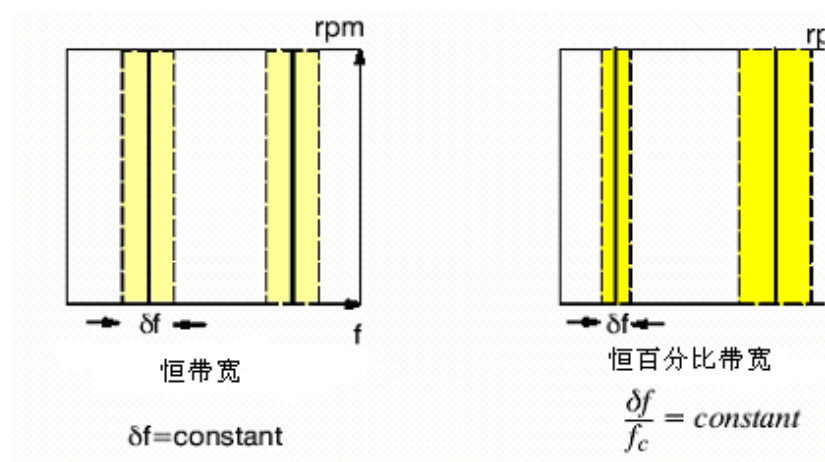


计算切片的中心频率由中心参数给定。切片带宽的上、下限频率取决于中心频率  $\pm$  (带宽  $\div 2$ )

带宽由带型参数确定。可有三种表示带宽的办法：

- 固定的频率区间
- 固定的谱线数。谱线吻合精确的频率值
- 所选中心频率的百分比

这些不同办法如下图所示。



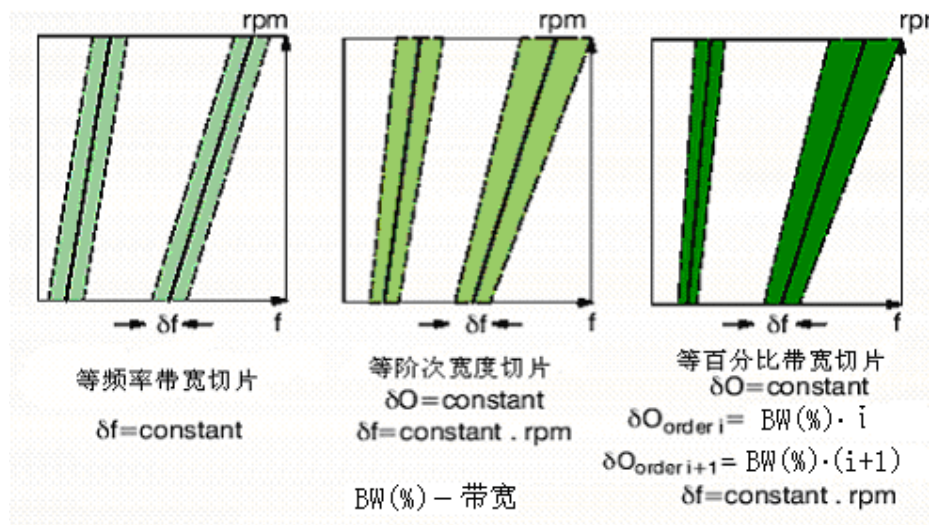
## 阶次切片

该功能描述在规定的“阶次”内测量信号的能量变化。有关阶次的概念见 2.3 节。“次”指这样一种特殊频带，其中心频率随测量环境或跟踪参数改变。跟踪参数一般为“频率型”参数（即以 rpm 表示的转速）。阶次只不过是基本跟踪参数的倍乘系数罢了。在规定阶次带内的能量变化表示为测量 rpm 的函数。通过后处理来考察阶次切片随测量时间或频率的变化也是可能的。

阶次切片分析定义积分带的可能方法有：

- 固定的频率区间
- 固定的谱线数，谱线吻合精确的频率值或阶次值
- 固定的阶次带宽
- 选定阶次值的百分比

下图表示出三种不同的选择方式。



## 倍频程切片

一倍频程切片表示一倍频程带内能量总和的变化。倍频程带的中心频率按 ISO 150266 标准规定。倍频程分析包括 1/1, 1/2, 1/3, 1/12 和 1/24 倍 频程分析。

## 3.4 单位

为了保证数据管理和运算的统一性，国际上通用的软件一律采用国际标准单位制。

长度、角度、质量、时间、温度、电流和亮度等基本物理量的规范量纲，即参考单位如下表。

表 3.2 参考单位

物理量	名称缩写	参考单位	代 号
长度	le	米	m
角度	an	弧度	rad
质量	ma	千克	kg
时间	ti	秒	s
电流	cu	安培	A
温度	te	开尔文度	°K
亮度	li	坎德拉	cd

无论是 软件的内部数据结构，还是存储在数据库的数据，全都采用这些单位。由规范量纲组合成的物理量的单位，都按照国际单位制，由相应的参考单位组合而成。例如，加速度值的单位等于长度的参考单位除以时间参考单位的平方，即取  $m/s^2$ 。

### 3.5 有效值计算

本节讨论对应不同测量功能的有效值计算方法。有效值（RMS）也称为均方根值，用于测量信号的能量大小。

如果数据已作了幅值校正，那么计算中会自动完成能量校正。

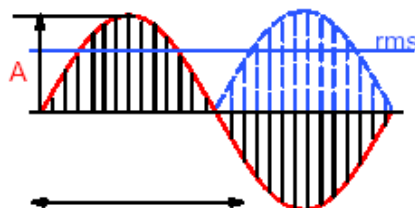
#### 时间记录和脉冲记录

在研究时域数据时，为了得到信号的属性和信号的能量，必须取足够数量的抽样数据进行分析。一般通过对多量抽样值平方、求和，再进行平均，以排除抽样数据取多取少的影响。然后再取平方根，便得到 RMS 值。设抽样数据的始末序号为 o 和 k，则

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k y_i^2} \quad (3-27)$$

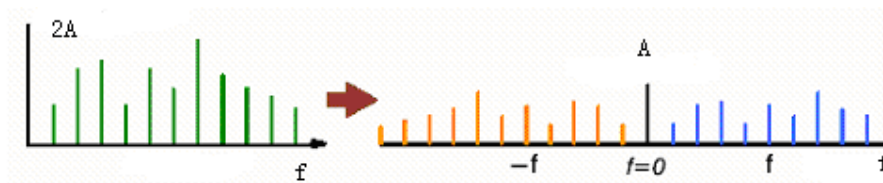


以幅值为  $A$  的正弦波为例，其 RMS 值等于  $A/\sqrt{2}$ 。



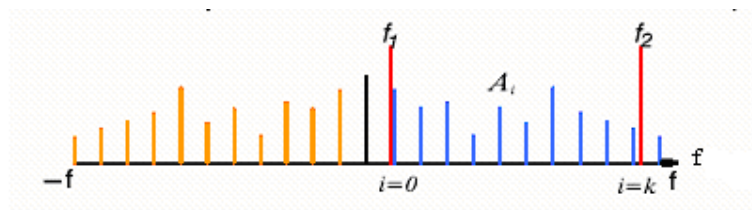
### 线性谱

线性谱需首先还原为双边幅值谱。频率范围应覆盖你计算有效值所要求的频



带，即上限频率  $f_2$  和下限频率  $f_1$  所限定的频率区间。对于  $i$  的取值为 1 至  $k-1$  的所有谱线取其全值 ( $A_i$ ) 进行计算，对于始末谱线取其半值 ( $A_o^2/2$  和  $A_k^2/2$ ) 进行计算，即

$$RMS = \sqrt{2 \left[ \frac{A_o^2}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} A_i^2 + \frac{A_k^2}{2} \right]} \quad (3-28)$$



### 自功率谱和互功率谱

这些谱宜先转换为双边功率谱。参与计算的谱线数取决于规定的频率区间。如同上文中对线性谱的计算一样，第一个和最后一个采样取半值。从而有效值按



下式计算：

$$RMS = \sqrt{2 \left[ \frac{A_o}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} A_i + \frac{A_k}{2} \right]} \quad (3-29)$$

### **FRF，阻抗，传递率和透射率**

这些函数的 RMS 值不好下定义。**软件**对 **FRF** 的解释是，外加力的幅值为 1 时，得到的 RMS 响应。幅值为 1 的力得到的有效值为：

$$F_{rms} = \sqrt{1+k} \quad (3-30)$$

其中，k 为分析范围的抽样数。响应的有效值  $X_{rms}$  由式 (3-28) 求出。这样，**FRF** 的有效值为：

$$H_{rms} = \frac{X_{rms}}{F_{rms}} \quad (3-31)$$
$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{k+1} \left[ \frac{A_o^2}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} A_i^2 + \frac{A_k^2}{2} \right]}$$

### **声功率，声强（直达声和反射声）SFTVI 和 SFUI**

**SFTVI**（声场时间均匀度指数）和 **SFUI**（声场均匀度指数）是 **ISO** 规定的声学测量分析参数。由于 RMS 是规定频带总能量的计量，可直接将谱线的值简单相加得到总有效值：

$$RMS = \frac{A_o}{2} + \sum A_i + \frac{A_k}{2} \quad (3-32)$$

### **质点速度**

虽然质点速度是以线性谱测量为基础求得的，但它只计算单边谱，这与式 (3-28) 有一因子 2 不同，即质点速度的有效值应为：

$$RMS = \sqrt{\frac{A_o^2}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} A_i^2 + \frac{A_k^2}{2}} \quad (3-33)$$

---

## 第二篇 声学 and 声品质

### 第四章 声学的基本术语和定义

本章介绍有关声学测量的基本术语和定义。内容有：

- ☐ 声学参数
- ☐ 用对数标尺度量声学参数
- ☐ 倍频程带
- ☐ 声计权

#### 4.1 声学参数

##### 声功率

声源辐射的噪声总量取决于声源的声功率。声功率是噪声源的基本特征，它提供可用作比较的绝对参考量。由声压级测量得到的声功率，会由于某些外在因素影响，导致测量值有差别。

被  $N$  个测量表面所包围的声源，其总声功率由下式求出：

$$P_I = \sum_{i=1}^N P_i \quad (4-1)$$

声功率的单位为焦耳/秒或瓦特，通常用字符  $W$  表示。

##### 声压

声源辐射声功率产生的效应是声压。声压是人耳对声的感觉，它的量级很大程度上还取决于声环境和声源到人耳或测量点的距离。声压定义为实际压强与大气压之差。

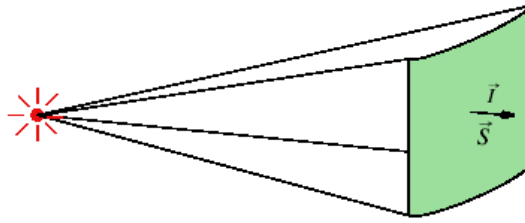
声压是一种标量。可利用测量的声压有效值谱或声压自功率谱得出某一给定频率（谱线）的声压分量，或者通过积分求出某给定频带的总声压。

在任何一点测量的声压，均与测量方向无关。声压的单位为帕斯卡（Pa）或  $N/m^2$ 。

## 声强

声强是与声功率有关的重要参数，表示声波沿某方向传播时，通过单位面积的声能量流。它是一种向量，用符号 $\vec{I}$ 表示，其单位为 $W/m^2$ （即每单位面积传递的功率）。而总的声功率为

$$P_I = \int \vec{I} \cdot d\vec{s} \quad (4-2)$$



这里，我们把面积也表示成三维空间向量，它的模等于几何面积，方向垂直于测量表面。这样，向量点积 $\vec{I} \cdot \vec{S}$ 就代表沿测量表面法线方向的声能量流。这一方向也就是通常的声强测量方向。如果声强向量与测量面相重合，那么传递的声功率将等于零。

声强也可以认定为每单位面积上能量流的时间平均，即：

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt \quad (4-3)$$

因此，如果能量来回地流动的话，平均结果就得到零能量流，也就是零声强。

## 法向（Normal）声强

当测量表面与声强向量不是正交时，声强向量在测量面法线方向的分向量即为法向声强。

## 自由场

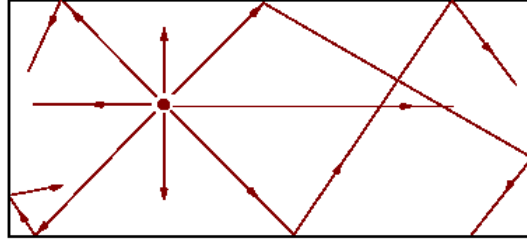
指一种理想化的声场，其各处的声能量流方向均背离声源，声压和声强均随测量点离声源距离的增加按反平方律而降低。



## 扩散场

也称为混响场。

在混响场中，声波来回地发生全反射，从而使得各处的声强都等于零。



声压的变化引起空气质点的移动。声强即是声压与质点速度的积，其意义为声能量在媒质中的流动速度：

$$\vec{I} = p\vec{v} \quad (4-4)$$

其中，  $p$  声压（ $pa$ ）

$v$  质点速度（ $m/s$ ）

媒质的质点速度应理解为媒质的一个体积单元的平均速度。该体积单元必须“大”得足于包含数百万个分子，以便把它视为连续的流体；然而，它又应该足够“小”，以便在考虑诸如压强、密度和速度等声学变量时，将整个体积单元的这些变量值视为常值。

当声强和声压已经测量出时，可以用式（4-4）计算出质点速度。质点速度是三维向量，其单位为  $m/s$ 。

在扩散场内，声压和质点速度在相位上的随机变化使得净声强等于零。

在某些情况下（例如在自由场中的平面波），质点速度也可以根据声压和媒质的声阻抗（ $rc$ ）求出：

$$v = p_e / rc \quad (4-5)$$

其中，  $p_e$  等效声压（ $Pa$ ）

$r$  媒质的质量密度（ $kg/m^3$ ）

$c$  声波在媒质中的传播速度（ $m/s$ ）

结合式（4-4）和（4-5）可以得出，在自由场中由平面波的等效声压确定的声强关系式为：

$$\|\vec{I}\| = \frac{p_e^2}{rc} \quad (4-6)$$

### 声阻抗 (Z)

声阻抗定义为媒质的质量密度和声速的乘积:

$$Z = rc \quad (4-7)$$

其中,  $r$  质量密度 ( $kg/m^3$ )

$c$  媒质中的声速 ( $m/s$ )

声阻抗  $Z$  的单位为瑞利 ( $kg/m^2s$ )

## 4.2 用对数标尺度量声学参数

在确定声压、声强等声学参数时, 习惯上规定环境温度  $20^\circ C$ , 大气压等于一个标准大气压, 即  $102.3 kPa$  ( $1 bar$ ), 作为标准状态。该状态下,

空气的密度  $r_o = 1.21(kg/m^3)$

空气中声速  $c = 343(m/s)$

声阻抗  $r_o c = 415 \text{ 瑞利}(kg/m^2s)$

### dB 标尺

由于可检测到的声压幅值范围很大, 而人耳对声压刺激的反应与对数规律有关, 习惯上在表示声学参数时, 都是取测量值和参考值比率的对数值, 即采用 dB 标尺。其声压、声强和声功率的参考值规定如下。

### 声功率级 $L_w$

定义为声源功率绝对值的对数测量值, 即

$$L_w = 10 \log_{10} \left( \frac{|P_I|}{P_o} \right) dB \quad (4-8)$$

其中, 参考功率为  $P_o = 10^{-12} (W)$ 。

---

### 质点速度级 $L_v$

规定为质点速度的对数测量值

$$L_v = 20 \log_{10} \left( \frac{v}{v_0} \right) dB \quad (4-9)$$

其中，参考质点速度为  $v_0 = 50 \times 10^{-9} (m/s)$ 。

### 声强级 $L_I$

规定为声强向量模的对数测量值

$$L_I = 10 \log_{10} \left( \frac{|\vec{I}|}{I_0} \right) dB \quad (4-10)$$

一般用作空气传播声的参考标准声强为  $I_0 = 10^{-12} (W/m^2)$ 。

### 法向声强级 $L_{In}$

规定为法向声强模的对数测量值

$$L_{In} = 10 \log_{10} \left( \frac{|\vec{I}_n|}{I_0} \right) dB \quad (4-11)$$

### 声压级 $L_p$

其定义为

$$\begin{aligned} L_p &= 10 \log_{10} \left( \frac{p}{p_0} \right)^2 \\ &= 20 \log_{10} \left( \frac{p}{p_0} \right) dB \end{aligned} \quad (4-12)$$

式中， $P$  为声压有效值，单位为  $Pa$ 。

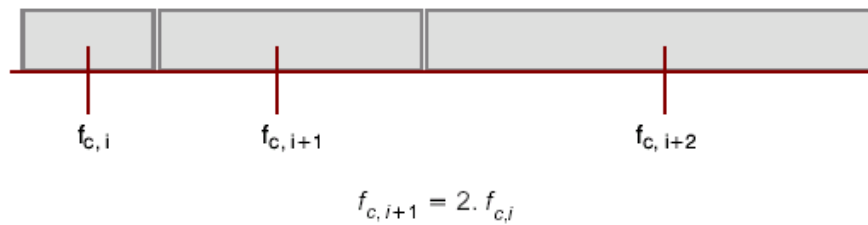
与上面声强和声功率的参考值相对应，有效值参考声压为：

$$P_0 = 0.00002(Pa) = 20mPa$$

这个  $20mPa$  的声压级，就是众所诸知的标准化额定听阈，它表示有正常听力的人平均能听到的  $1000 Hz$  的最轻声音。

### 4.3 倍频程（Octave）带

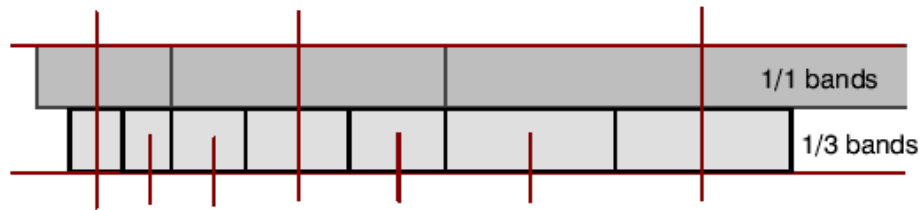
整数（1/1）倍频程带，表示顺序地后一个频带的中心频率大致等于前一个频带中心频率的二倍（按标准化值）。



分数倍频程带（1/3, 1/12, 1/24...），表示相邻频带的中心频率按下式规定：

$$f_{c,i+1} = (2^{1/x}) f_{c,i}$$

其中， $x = 1/3, 1/12, 1/24 \dots$



一个  $1/x$  倍频程带的下限频率为  $f_c \cdot 2^{-1/2x}$

一个  $1/x$  倍频程带的上限频率为  $f_c \cdot 2^{+1/2x}$

上面公式给定的倍频程带称为自然（natural）频率，国际标准 **ISO 150266** 规定的 1/1, 1/2 和 1/3 倍频程带的中心频率如表 4.1 所列。

自然频率用于计算，而标准化频率则用作标注。自然频率可能会稍高于或稍低于标准化频率。

表 4.1 倍频程带 标准化中心频率 (Hz)

标准化 中心频率	1/ 1 oct	1/ 2 oct	1/ 3 oct		1/ 1 oct	1/ 2 oct	1/ 3 oct		1/ 1 oct	1/ 2 oct	1/ 3 oct
16	x	x	x	160			x	1600			x
18				180		x		1800			
20			x	200			x	2000	x	x	x
22.4		x		224				2240			
25			x	250	x	x	x	2250			x
28				280				2800		x	
31.5	x	x	x	315			x	3150			x
35.5				355		x		3550			
40			x	400			x	4000	x	x	x
45		x		450				4500			
50			x	500	x	x	x	5000			x
56				560				5600		x	
63	x	x	x	630			x	6300			x
71				710		x		7100			
80			x	800			x	8000	x	x	x
90		x		900				9000			
100			x	1000	x	x	x	10000			x
112				1120				11200		x	
125	x	x	x	1250			x	12500			x
140				1400		x		14000			
160			x	1600			x	16000	x	x	x
Table 4.1 Normalized frequencies (Hz)											

## 4.4 声计权

### 频率计权

人耳对声音的反应具有非线性特性和频率相关特性,这意味着对响度的感觉不能完全由声压级或它的谱来描述。由声压信号诱导出一种经验性的响度级,是由声压信号的频谱倍乘一频率计权函数得出来的。计权函数是以实验得到的等响度曲线为基础规定的,表达作为声压级和频率二者的函数的响度感觉。图 4-1 表示一族等响度曲线。响度级的单位为方 (Phon)。它以 1kHz 的纯音作为参考。



对于 1000Hz 的纯音而言，方的值就等于声压级的  $dB$  值。

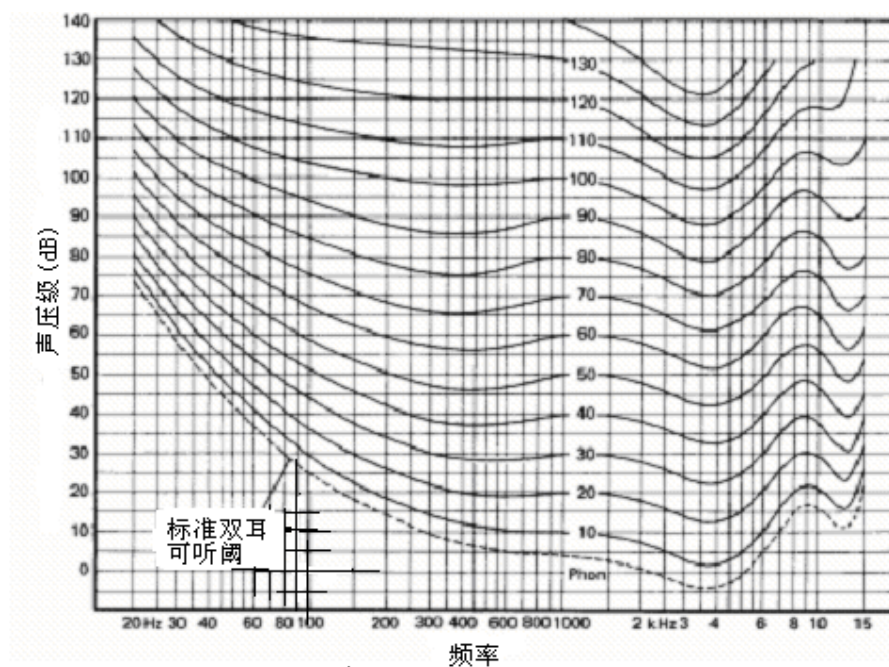


图 4-1 等响度感觉曲线

IEC651-79 标准规定 A、B、C 三种声信号计权函数。A 计权相当于用 40 方的等响度曲线（倒置）去修正频响。A 计权声级被证实是人耳对声压主观反应的极好校正。B 计权和 C 计权则分别相当于 70 方和 100 方等响度曲线的倒置。这些计权曲线如图 4-2 所示。经过计权的声压级记作  $L_A, L_B, L_C$ ，而单位则写成  $dBA, dBB, dBC$ 。

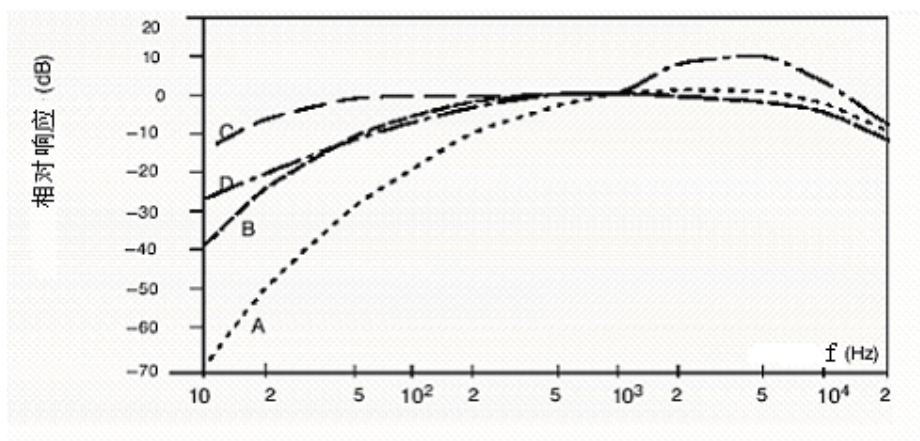


图 4-2 标准计权曲线

表 4-2 列出三种类型滤波器的衰减或放大相对响应值。在表中列出的额定频率之间，滤波特性的值可以在 log-log 标尺下用线性插值方法求出。图 4-2 则以图形表达相同的信息。

表 4-2 声信号的计权

1 / 3 倍频程带 中心频率 H z	A 计权 dB	B 计权 dB	C 计权 dB
16	-56.7	-28.5	-8.5
20	-50.5	-24.2	-6.2
25	-44.7	-20.4	-4.4
31.5	-39.4	-17.1	-3.0
40	-34.6	-14.2	-2.0
50	-30.2	-11.6	-1.3
63	-26.2	-9.3	-0.8
80	-22.5	-7.4	-0.5
100	-19.1	-5.6	-0.3
125	-16.1	-4.2	-0.2
160	-13.4	-3.0	-0.1
200	-10.9	-2.0	0
250	-8.6	-1.3	0
315	-6.6	-0.8	0
400	-4.8	-0.5	0
500	-3.2	-0.3	0
630	-1.9	-0.1	0
800	-0.8	0	0
1000	0	0	0
1250	+0.6	0	0
1600	+1.0	0	-0.1
2000	+1.2	-0.1	-0.2
2500	+1.3	-0.2	-0.3
3150	+1.2	-0.4	-0.5
4000	+1.0	-0.7	-0.8
5000	+0.5	-1.2	-1.3

## 第五章 声学测量

本章讨论声学量的测量。内容有：

- ☐ 声学量的测量
- ☐ 声学量的计算

- ☐ 声测量表面
- ☐ 声场指数

## 5.1 声学量的测量

本节先讨论可直接测量的声学量。而需要进一步诱导出的声学量则放在 5.2 节讨论。

### 声压级

声压级的定义如式 (4-12)，可利用一信号通道测量出。得到的是平均声压或声压的自功率谱。

在自由场中，沿声波的传播方向测量声压时，标称的声强级将等于声压级。而在非自由场情况下，声强级将低于声压级。

### 声强

给定点、给定方向的声强，是指单位时间内，声波通过与该方向正交的单位面积所传播的声能量。

很多情况下，测量到的只是声强向量  $\vec{I}$  在测量表面法线方向的分量  $\vec{I}_n$ 。

为了得到声强，可同时测量瞬时声压和相应的质点速度。其中声压信号可直接由传声器得到，而瞬时质点速度则可由两个邻近的传声器之间的声压梯度经计算求得。因此，声强探头可由两个相靠近的传声器组成，使用时，同时测量两个传声器各自的声压和两者之间的压力梯度。

采用频域算法的话，可以证明，由两个传声器信号的互功率谱的虚部能求出声强。其计算公式为：

$$I = \text{Im} \frac{S_{1,2}}{2pfrd} \quad (5-1)$$

其中， $S_{1,2}$  为两个传声器信号之间的双边互功率谱， $f$  为信号频率， $d$  为两个传声器探头之间的距离， $\rho$  为空气的密度。

采用这种测量功能时，应将所有测量通道整理成若干通道对，每一对由两个序号相邻的通道对组成。

无功 (reactive) 声强 (对应于非传播能量) 可按下式计算

$$I_{reactive} = \frac{S_{1,1} - S_{2,2}}{2pfrd} \quad (5-2)$$

在自由场中（不存在反射的自由空间），沿声波传播方向作测量的理想情况下，无功声强应等于零。

### 残余（Residual）声强（RI）

其定义为：

$$RI = L_p - d_{plo} \quad (5-3)$$

其中， $L_p$  为测量的声压级， $d_{plo}$  为声压残余声强指数。计算残余声强需要有可资利用的声压残余声强指数。这将在后面讨论。

声强测量可能是在下式表示的声场状况下进行的，其声强范围为：

$$L_p - d_{plo} < L_I < L_p \quad (5-4)$$

$L_p$  的定义如式（4-12）， $L_I$  的定义如式（4-10）。在自由场中，声压级和声强级是相同的；而在其它的声场中，测量的声强级将会小于声压级。残余声强（ $L_p - d_{plo}$ ）表示对于给定的声压级而言，可能被测量系统检测到的最低声强级。

### 声压残余声强指数

为了计算声强探头的声压残余声强指数，需要将声强探头放置在一个声压处处均匀的声场内。在这种场所，一对传声器得到的两个信号之间应该没有任何差别，因而测量到的声强应为零。然而，两个测量通道之间的相位失配，导致两个信号稍有不同，使得表观上声强有一低值。声强检测就像是存在一个噪声阈，低于该阈的测量是不可能的，可测的低限声强不是固定的，而是随声压级变化的。当相同的信息同时馈入两个测量通道时，固定不变的是声压级与声强级的差。声压残余声强指数就是这样下定义的。数学上，声压残余声强指数表为：

$$d_{plo} = L_p - L_{In} \quad \text{dB} \quad (5-5)$$

其中， $L_p$  为声压级，而  $L_{In}$  则为法向声强级。

## 动态性能指数

为了保证特定的测量精度等级，需要提高由残余声强级规定的测量门坎，方法是计入一称为“偏差因子”（ $C$ ）的项：

$$L_p - d_{plo} + c \text{ dB} < L_I < L_p \quad (5-6)$$

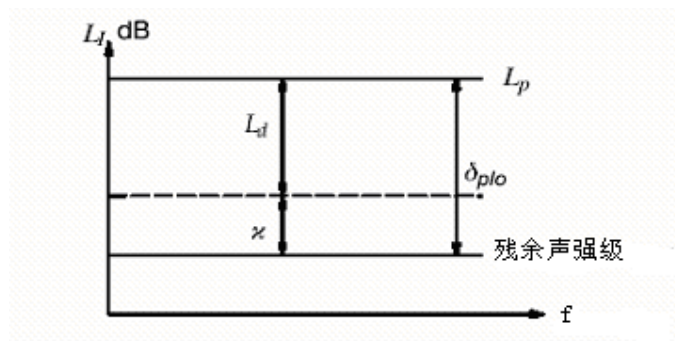


图 5-1 动态性能指数  $L_d$

偏差因子  $C$  的值可根据精度等级要求从表 5-1 中选取。

表 5-1 偏差因子  $C$  取值

精度等级	偏差因子 $c$ (dB)
精密级 (1 级)	10
工程级 (2 级)	10
观察级 (3 级)	7

残余声压—声强指数与偏差因子  $C$  的差，代表声强探头的工作范围，称其为探头的“动态性能指数”（ $L_d$ ）。

$$L_d = (d_{plo} - c) \text{ dB} \quad (5-7)$$

## 5.2 声学量的计算

从一次测量的数据可求出多个声学量。本节将讨论这些分析功能，表 5-2 列出这些分析功能及分析计算要求的测量数据。

计算工作应计及整个规定频带。这一问题将在 5.4 节讨论。

某些计算涉及一确定的面积，这一声学量与限定测量面（或测量网格）相关

---

的问题放在 5.3 节讨论。

### 等效声压

等效声压  $p_e$  或  $p_{rms}$ ，可由测量的声压谱线或声压功率谱求出

$$\begin{aligned} p_e^2 &= 2 \int_{f_1}^{f_2} \|p(f)\|^2 df \\ &= 2 \int_{f_1}^{f_2} A_p(f) df \end{aligned} \quad (5-8)$$

其中， $p(f)$  为声压谱， $A_p(f)$  为声压功率谱。

### 声强

声强是向量，从测量到的声强按下式计算声强向量：

$$\vec{I} = \int_{f_1}^{f_2} \vec{I}(f) df \quad (5-9)$$

在声强测量不可能，而声压测量可能的情况下，声强的幅值可由等效声压

$p_e$  和媒质声阻抗  $r_o c$  按下式求出：

$$I = \frac{p_e^2}{r_o c} \quad (5-10)$$

不过，这一算式只适用于自由场中平面波的前提。

### 声功率

声功率可由声强在测量面法线方向的分量  $I_n$  与几何面积  $S$  的乘积求出：

$$P = I_n S \quad (5-11)$$

在某些场合，可认为声强与等效声压的平方成正比，因而有

$$P = \frac{p_e^2}{r_o c} S \quad (5-12)$$

### 质点速度

质点速度可由声压和声强数据算出：

$$v = I/p \quad (5-13)$$

所有可能的分析功能汇总在表 5.2 中（基于自由场中平面波的假定）。

表 5-2 声信号分析功能汇总

声学量	符号	要求的数据	计算公式	MKS 单位
等效声压(RMS)	$p_e$	声压谱 $p(f)$	$\sqrt{2 \sum \ p_i\ ^2}$	$P_a$
		声压自功率谱 $A(f)$	$\sqrt{2 \sum A_i}$	或 $N/m^2$
声强	$\vec{I}$	声强	$\sum I_i$	$W/m^2$
声功率	$P$	声强和面积	$\vec{I} \cdot \vec{S}$	$W$
		声压谱和面积	$\frac{P_E^2}{r_o C} S(1)$	
		声压自功率谱和面积	$\frac{P_E^2}{r_o C} S(1)$	
质点速度	$\vec{v}$	声强和声压	$\frac{P}{I/p}$	$m/s$

### 5.3 声学测量表面

声学测量与其它测量不同之处，在于它必须与测量对象保持一定距离，而不是在试验结构本体上进行。测量点也称为结点，分布在一个假想的封闭的测量面上。测量和结点的有机集合称为测量网格，ISO 标准规定了某些特定测量类型的网格布置。

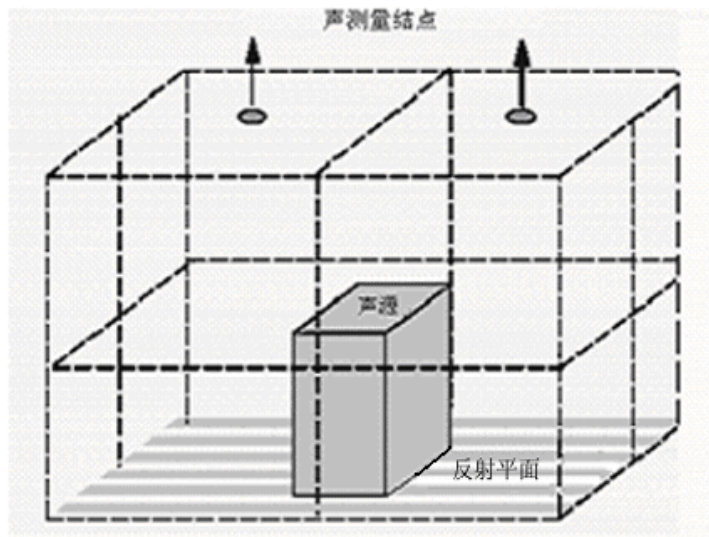


图 5-2 声源，声测量网格和结点

声测量网格可布置在平行六面体、圆柱体或球体的表面。

对测量网格，有一个结点取向问题。通常采用笛卡儿坐标系，将测量坐标系的 +z 向规定为测量方向。

### 声学测量的 ISO 标准

**ISO-3744** 和 **ISO-3745** 规定了声压测量标准。传声器的安放位置，在一个规定的（半）球体或平行六面体表面测量网格上。测量网格的维数（测点数）与参考表面的特征距离有关。参考表面规定为包围声源的最小矩形箱表面。

**ISO-3744** 噪声源声功率的测定——在有一反射面的自由场中的工程法

**ISO-3745** 噪声源声功率的测定——消声室和半消声室精密法

**ISO-9614-1** 用声强法测定噪声源声功率—第一类：离散点测量法

**ISO-9614-2** 用声强法测定噪声源声功率—第二类：扫描测量法

## 5.4 频带

任何时候，声学量应视为一定频带内频率分量的积分，即

$$\bar{a} = \int_{f_1}^{f_2} a(f) df \quad (5-14)$$

实用上，常常用相应频带内有限的离散样值求和来代替连续函数的积分，即



$$\bar{a} = \frac{1}{2}a_1 + \sum_i a_i + \frac{1}{2}a_2 \quad (5-15)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= a(f_1) \\ a_2 &= a(f_2) \\ f_1 &< f_i < f_2 \end{aligned}$$

即对应上、下限频率  $f_1$ 、 $f_2$  的取样取半值，这两个频率之间的取样取全值。测量频率的上、下限可任意设定。

最好能保留数据采集过程所取的频带类型。事实上，倍频程分析就是以该频带为基础进行分析的。也许对于现场使用的指示器来说，这样的计算没有太多意义，除非分析频带恰好对应于测量频带。

## 5.5 声场指数

要想在噪声源的现场，测量和分析噪声源辐射的声功率，那么必须对分析结果附录由国际标准 **ISO 9614-1** 拟定的一系列测量状况指数。基于特定指数值的若干准则必须得到满足，并保证有足够的测量和网格。本节将叙述声场指数本身和用于评估结果的准则这二者。

### F<sub>1</sub> 声场瞬变指数

用于量化声场瞬变（或时变）状况。其定义为

$$F_1 = \frac{1}{\bar{I}_n} \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (I_{nk} - \bar{I}_n)^2} \quad (5-16)$$

其中， $\bar{I}_n$  为  $M$  个短时均值  $I_{nk}$  的平均值，定义为

$$\bar{I}_n = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M I_{nk} \quad (5-17)$$

### F<sub>2</sub> 测量面声压—声强指数

如果在自由声场中，只存在单一声源辐射声，那么声压级和声强级在数值上是相等的。然而在混响场或扩散场中，声强级的值则通常会低于声压级的值。偏

低的测量声强，也可能源于声波沿某一倾斜的角度入射到测量探头上，由此导致探头的检测产生相位偏差效应。声压—声强指数考察声压与声强的模之间的差值。这一函数可在采集过程中逐点确定，而本文中的函数  $F_2$  代表所有测量面所得值的平均。

$$F_2 = \overline{L}_p - \overline{L}_{|I_n|} \quad (5-18)$$

$\overline{L}_p$  为测量声压级，定义为

$$\overline{L}_p = 10 \log_{10} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i}{p_o} \right)^2 \right] \quad (5-19)$$

其中， $i$  为测量面序号， $N$  为测量面分块总数。 $\overline{L}_{|I_n|}$  为测量面法向（不带正负号）声强级，定义为：

$$\overline{L}_{|I_n|} = 10 \log_{10} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|I_{ni}|}{I_o} \right] \quad (5-20)$$

其中， $|I_{ni}|$  为第  $i$  个测量面法向声强向量的绝对值（不带正负号）。

**注意！** 若声强级与声压级之间相差很大，提醒你可能是探头没有对正声源，或者探头工作在扩散场里。

为了计算出  $F_2$ ，需要对网格中所有结点测量声强和声压自功率谱这二者。

### **F<sub>3</sub> 局部负功率指数**

这一指数也是用来考察测量的声强级与声压级之间的差别，不过这时需要计及声强向量的方向。因此，这一函数表示被研究的声源引起的声强（正值）和那些无关的声源引起的声强（负值）之间的偏差。

$$F_3 = \overline{L}_p - \overline{L}_{In} \quad (5-21)$$

$\overline{L}_p$  为测量面声压级，定义如前。 $\overline{L}_{In}$  为测量面法向带正负号的声强级，定义为：

$$\bar{L}_{ln} = 10 \log_{10} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{I_{ni}}{I_o} \right| \quad (5-22)$$

注意！如果求出的  $\sum \frac{I_{ni}}{I_o}$  是负值，表明无关声源的影响实在太太，测量不满足 **ISO** 标准的要求。

为了计算出  $F_3$ ，需要对网格的所有结点测量声强和自功率谱（或声压）二者。

#### $F_4$ 不均匀指数

这一参数表达存在于声场中的空间（或位置）上的测量变率。它等于统计标准偏差与平均法向声强的比值，即

$$F_4 = \frac{1}{\bar{I}_n} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (I_{ni} - \bar{I}_n)^2} \quad (5-23)$$

其中， $i$  为测量面序号， $N$  为测量面分块总数。 $\bar{I}_n$  为所有  $N$  个测量面法向声强的平均值：

$$\bar{I}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{ni} \quad (5-24)$$

为计算  $F_4$ ，只需测量声强。

### 5.5.1 准则

在查验声强分析结果时，有三个准则可供评估：

#### $L_d - F_2$ 测量链的精度

如果按照 **ISO 9614-1** 标准确定噪声源声功率级时，认为测量阵列是适当的，那么对于每一分析频带，动态性能指数  $L_d$  必须大于测量面声压一声强指数  $F_2$ ，即

$$L_d - F_2 > 0 \quad \text{准则之一}$$

$L_d$  依赖于测量设备，由式 (5-7) 给定。 $F_2$  由式 (5-18) 给定。 $L_d$  由声压残余声强指数导出，在测定相位时必须计算这一指数。

如果这一准则不被满足，则表明被测的声级实在太低了，需要缩短测量面到声源之间的距离。

### $F_3 - F_2$ 无关噪声源

如果声场指数  $F_2$  和  $F_3$  之间的差别很显著（大于  $3\text{ dB}$ ），则表明受测试噪声源的近处存在有很强的定向外噪声源。

如果这两个指数之差大于  $3\text{ dB}$ ，那么通过缩短测量面到噪声源的平均距离，或隔离测量噪声源与外噪声源，或减低指向被研究声源的某些反射声，会使这一情况得到改善。

### 测量网格的充分程度

检验测量部位（网格）是否充分，可利用下列准则

$$N > C \cdot F_4^2 \quad \text{准则之二}$$

其中， $N$  测量探头（部位）的数量

$F_4$  式 (5-23) 定义的声场指数

$C$  从表 5.3 选定的因子，与精度要求有关

同一网格用于多个频带测量时，应以  $CF_4^2$  的最大值作为评价准则。

表 5.3 不同精度要求下测量网格  $C$  因子的取值

中心频率 (Hz)		C		
倍频程带	$\frac{1}{3}$ 倍频程带	精密级 1 级	工程级 2 级	观察级 3 级
63-125	50-160	19	11	
250-500	200-630	9	19	
1000-4000	800-5000	57	29	
	6300	19	14	
A 计权 (63-4k 或 50-6.3k) Hz				8

---

## 第六章 声品质

本章介绍有关声品质的基础知识。内容有：

- ☐ 关于声品质的基础理论
- ☐ 声品质分析

更详尽的信息可参阅本章末所列参考文献。

### 6.1 声品质的基本概念

#### 声信号

人感觉到的声音特性和声源发射的声音特性并不完全相同。我们先讨论描述实际声信号的有关术语。然后再讨论影响人感受特定信号的生理和心理反应。

#### 声功率和声压

声源辐射噪声的量，取决于声源的声功率。

声源发射声功率的效果是声压级。由人耳的鼓膜检测到的声压，其量级在很大程度上依赖于声环境和人耳到声源的距离。

用传声器（麦克风）测量到的声压，以及声品质分析所使用的诸多数据，可采用多种标尺，统称为声信号。不存在任何完全不发生变化的声场，然而，一直在变化的数据也都是可以进行分析的。

#### 声压级

描述声信号的基础参数是声压级（**SPL**），用符号  $L_p$  表示，其定义见式（4-12）。众所周知， $20\text{ mPa}$  的声压级是标准化的听阈，代表有正常听力的人平均能听到的  $1000\text{ Hz}$  最低声音。

由于可检测到的声压级范围很大，而且人耳对声刺激的反应也是与对数规律有关，实用上总是以测量值和参考值的对数比率表示声学参数。即采用分贝（**dB**）标尺。

#### 可听声频

人类能听到的声频率上限为  $20\text{ kHz}$ 。低于这一频率限值的信号称为声信号（audio signals）。为了避免出现频率混淆，对声信号采样，必须保证采样率至少

---

大于该频率限值的两倍。你会发现，一般 CD（光盘）记录器使用的采样率为 44.1kHz，而 DAT（数字式磁带数据记录仪）使用的采样率为 48kHz，就是这个道理。

### 响度（loudness）和音高（pitch）

声音的特征可通过它的响度（相对于 **SPL**）和它的频率成分来表征。描述声（sound）或音（tone）频率成份的一般术语为它的“音高”。然而，说音高反映人耳对频率的感受却并不完全，实际上，它取决于频率成份和声压级二者。后文对响度和音高还要作进一步的分析讨论。

### 人耳对声音的感觉

为什么人们对两种有相同 dB 值的声会有可能完全不同的主观感觉呢？最主要的原因在于“听”的生理过程。人耳是一种复杂的非线性接收装置，具有特殊的、与频率相关的传导特性。另外，“听”通常涉及到两耳（binaural），这也会影响对声音的感觉。正确理解“听”的过程，使我们更好地了解为什么声音有它的特殊品质，并由此指导模型的修改以及分析过程的量化。

然而，仅仅从生理学出发，还不足以充分解释声感觉的所有层面。这里还存在心理学因素的影响，诸如听者的姿势、经历、期望、环境、当时的前前后后情况等。结论是，无论你在量化和模型化方面作出怎样的努力，没有什么比人的听觉更好的评判（judge）声品质的方法。

本文仅着眼于本命题的要点。要想更透彻地了解这一命题，你可以参考本章末所列参考文献，特别是文献【1】中收录的论文。

### 听的过程

在入射声信号到达耳鼓之前，就已经被人体和人耳的频率特性及空间滤波特性对其作了颇大的修改。人体躯干本身就起到一种方向滤波器的作用。由于绕射，使得听觉上的声与声源直接发射的声已有了明显的不同<sup>[2]</sup>。

图 6-1 表示人耳的生理构造<sup>[5]</sup>。外耳由耳廓和耳道组成。耳廓的绕射效应和耳道内与方向无关的其它效应，使得人耳最敏感的频率范围为 1 kHz 到 10 kHz。中耳链接耳鼓和耳蜗，后者才是真正的声接收器。声信号与神经中枢反应的最终链接，就发生在耳蜗内。耳蜗属于内耳器官。

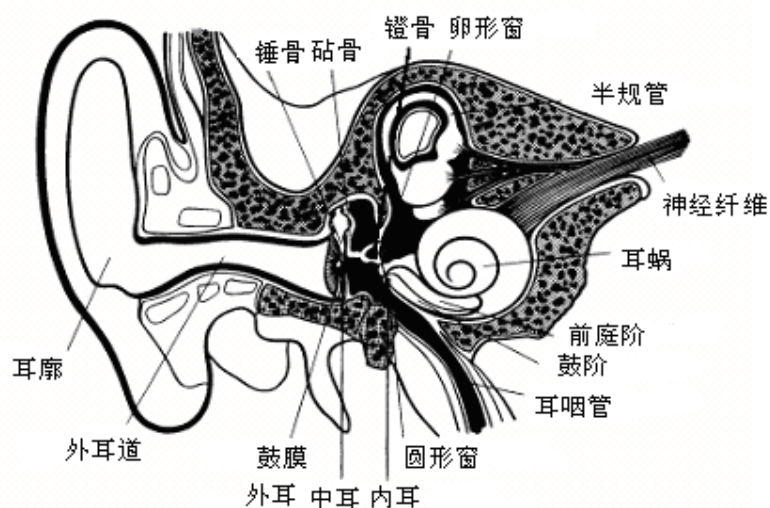


图 6-1 人耳的主要组成

## 双耳听觉

人的听觉的另一基本特性是自然的双耳听。左耳和右耳接受的声信号在时间上存在相对的延迟，感受的声压谱因声音的方向不同而存在差别。在频率约为 1500Hz 以下，两个信号之间的相位差对于声源的定位起主要作用；而对高于该频率的声音，则听力感觉中幅值的差别和声压谱的差别是主要因素。

人脑的处理功能不仅能对声音作出空间上的定位，而且能抑制不想听的声音，并把听力凝聚在某一来自特定方向的声音。<sup>[26]</sup> 这就是所谓的“派对”(party)效应，即一个人的听力可以聚焦在某方向确定的距离处，而不理睬明显的背景噪声的存在。

## 声感觉

躯体、头和外耳对于声刺激所起的作用，主要是空间滤波和谱滤波。理所当然地，只要求看一看随意放置的传声器所测声信号的频谱，就没有必要去修正听反应的评估。换句话说，测量的物理声压级与人对同一声音的感觉之间不是一种简单的关系。

内耳的作用是多方面的，而最重要的是它的非线性特性。这意味着对声强的听觉印象，即所谓“响度”，相对于声压级不是一种线性的关系。另外，对有恒定声压级的纯音感觉到的响度，是随它的频率而变化的。而且，对频率的听觉印象，即所谓的“音高”，相对于频率自身而言，也不是线性的。这些方面的细



节，以及其他的效应，将在后文中另叙述。

## 响度

声压级与声强的听觉印象（即响度）之间不是线性关系。这一性质和上面讨论过的频率相关属性合在一起，意味着感觉响度不能简单用声压级或它的谱来描述。图 6-2 给出的一簇曲线，表示纯音（正弦音）感觉等响度级在整个声频范围内作为声压级的函数。<sup>[5]</sup>

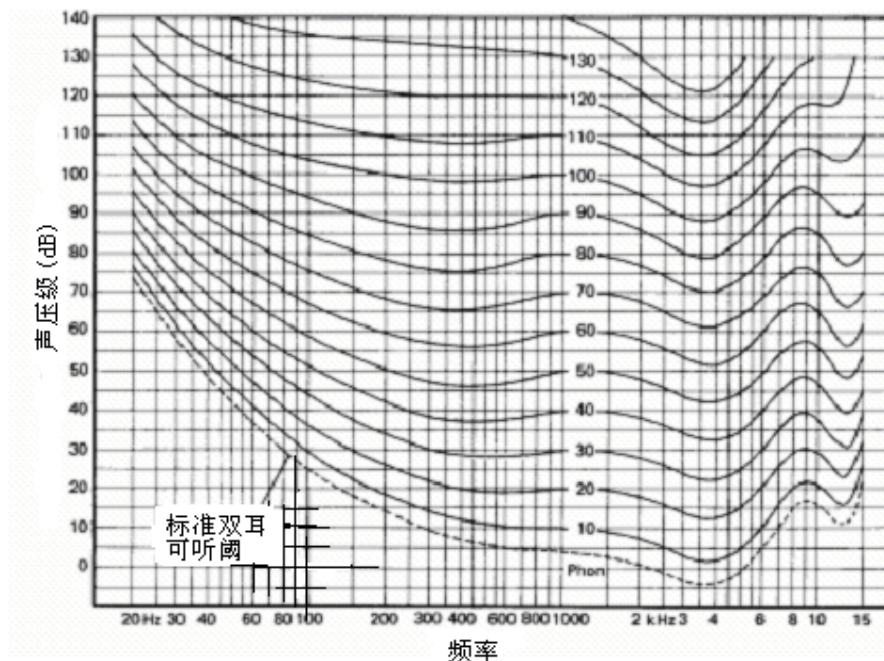


图 6-2 等响度感觉等高线

## 音高

对声音所含频率的感觉，称为“音高”。但它并非单一地取决于频率本身<sup>[6]</sup>。

纯音的音高随频率和声压级二者变化，而这一关系本身又与音的频率有关。纯音虽然可用来确定感觉到的是怎样的音高，而更现实的是测量所谓“半音高”的感觉。在这个意义上，要求先听一种频率的纯音，然后调第二种纯音的频率，使其音高为前一种纯音的一半。在低频区，半音高的感觉相应于 2:1 的频率比。而在高频区，却并非也是这个比例，其频率比会大于 2:1。例如，8kHz 的纯音给出只是 1300Hz 的“半音高”。

虽然音高之间的比率可以由经验来确定，但要得到绝对值，就需要对感觉“半音高”确定一个参考量。125Hz 的参考频率被选定为这样的低频参考，该频率的



数值即作为“比音高”的数值,由于用这一方法确定的音高与我们对主调(melody)的感觉有关,因而命名它的单位为“麦耳”(mel)。就是说,125Hz 的纯音具有 125 mel 的比音高,而调谐到 440Hz 的标准值时,表明其比音高几乎与该频率有同样的值。

在高频区,频率值和比音高值二者有明显偏离。经验表明,8kHz 的纯音具有 1300Hz 纯音的半音高,这反映到相应的比音高的值上,8kHz 频率相应于比音高 2100 mel,而 1300Hz 相应于比音高 1050 mel,恰好是 2100 mel 的一半。

**临界带 (Critical bands)**

内耳的作用相当于一组互相衔接的恒百分比带宽滤波器。频率低于 500Hz 部分,各滤波器的有效噪声带宽近似于一常值,约为 110Hz 带宽;而高频部分,逐渐扩展为恒百分比(约为 23%)带宽。这与耳蜗的非线性频率—距离特性十分符合。这些带宽常称为“临界带带宽”,同时以“巴克”(Bark)的标尺来标识这些临界带,如表 6.1 所示。

表 6.1 临界带表

临界带 (Bark)	1	2	3	4	5	6	7	8
中心频率 (Hz)	50	150	250	350	450	570	700	840
带宽 (Hz)	100	100	100	100	110	120	140	150
临界带 (Bark)	9	10	11	12	13	14	15	16
中心频率 (Hz)	1000	1170	1370	1600	1850	2150	2500	290
带宽 (Hz)	160	190	210	240	280	320	380	450
临界带 (Bark)	17	18	19	20	21	22	23	24
中心频率 (Hz)	3400	4000	4800	5800	7000	8500	10500	13500
带宽 (Hz)	550	700	900	1100	1300	1800	2500	3500
Table 6.1 Table of critical bands								

**掩蔽效应 (Masking effect)**

对于由多种声分量组成的复合声来说,上面提到的临界带有着极重要的意义。例如,听某一滤波器通带范围内的窄带声,其总的响度感觉就等于声音都在滤波器中心频率上一样。换句话说,高声级的声分量“掩蔽”掉那些与该分量的频率相接近的其他低声级分量。

掩蔽效应的一个具体例子如图 6-3 所示<sup>[5]</sup>。一个 50dB, 4kHz 的纯音(图中标记“+”),当存在一中心频率 1200Hz,声压级为 90 dB 的窄带背景噪声时,

它可以听得出来。如果背景噪声的声压级提高到 100dB 时，该纯音就听不到了。

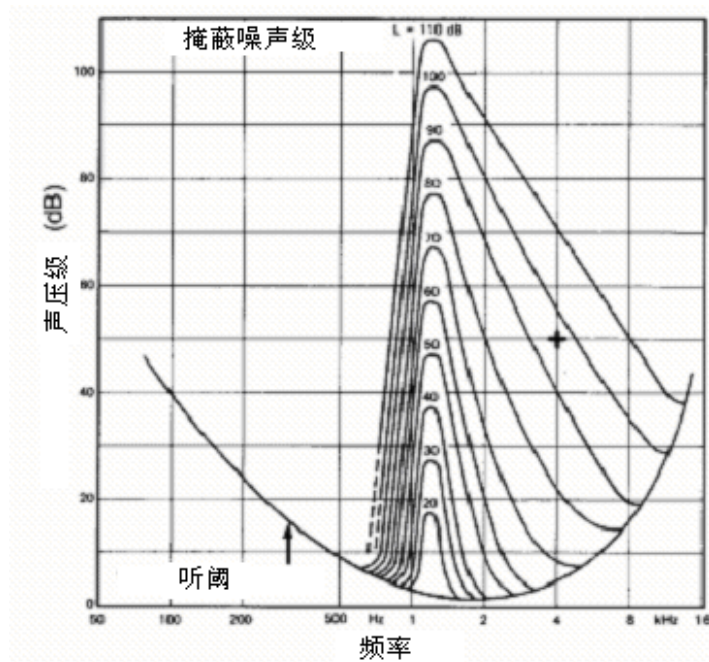


图 6-3 窄带噪声的掩蔽效应

掩蔽声的声级越高，受掩蔽的频带就越宽。

### 瞬态效应 (Temporal effect)

最后，听过程还伴随若干瞬态效应。在引起神经中枢反应之前，声音必须“积聚” (build up) 起来，而反应时间则与声级的高低有关。猝发音的存留时间短于 20ms 时，响度会降低，这是感觉响度的效应之一。声音存留时间长于 20ms 时，响度几乎与时间长短无关。

掩蔽效应的影响还包括：

—— 时间上领先于另一较响声音的短促声，其响度可能会降低，甚至被掩蔽掉。这种称为瞬态前掩蔽 (Pre-masking) 现象的时间大致为几十 ms。

—— 类似的效应可能在去掉响声后发生。在去掉响声后 20ms 时间内 (与掩蔽和声级有关)，短促的猝发声可能被掩蔽掉，这称为后掩蔽 (Post-masking)。

—— 存在有连续声时，声级高于此连续声的猝发声可能变得模糊不清，具体现象与猝发声的持续时间有关。这称为即时掩蔽 (simultaneous masking)。

这些瞬态效应更详细的论述见参考文献<sup>[6]</sup>。

---

## 6.2 声品质分析

声品质的基本问题之一是“你听到的不是你得到的”。人耳在生理上的非线性特性，使得声感觉不仅仅取决于声级。接下来的问题是“你喜欢的不是你听到的”，因为声音好听不好听很大程度上依赖听者的心态和姿态。人耳在生理学上 and 心理学上的愉悦感觉是理解声品质的基础，也是本节提出的要点以及上面 6.1 节所介绍术语的基础。

声学的大多数问题或声学的研究方向，都是中对声学舒适性，而不是听力损伤或结构损伤。为了准确描述声学舒适性，人们早就清楚，声压级不足以、或者说不适以正确表示真实的声感觉。正是由于声信号的听觉印象十分复杂的自然属性，使得人们要采用“声品质”这一概念。

不希望的声音，通常称为“噪声”，给人的听觉印象往往是使人“厌烦”的。典型的例子是车辆发动机的工作噪声，道路噪声和空气动力噪声，飞机噪声，工作环境中的机械噪声和风扇噪声等等。

车辆噪声中，不一定对声压级起主要影响，但也是很让人“厌烦”的例子有：刮水器（雨刷）噪声，燃油泵噪声，电动机的呜呜声，仪表板的喀啦喀啦声等。为表达这些负面的声品质和使人“厌烦”的特性，人们使用各种各样的名词术语加以形容，诸如：呜呜声，喀啦喀啦声，轰鸣声，隆隆声，嘶嘶声，拍打声，嘎嘎声，语言干扰声，刚硬度，尖锐度，粗糙度，抖动度，强度 … 等等。

但也并非你所听到的所有声音都是坏的或者不希望听到的。声音可以是重要的信息载体，传达出某些正面的感觉。例如，从关车门时“砰！”的一声中觉察出车门是否关严实了，赛车加速时那种运动玩耍的冲动感，大型高级轿车发动机运行的平滑感，车门或座位上安全带锁入扣时的咔哒声等等。这些噪声都是没必要去除掉的，在感觉上也是“好”的声音。

### 声信号的分析

所有关心的问题都指向去测量、评价和改变声信号，而这一切都要求有高质量的声记录作为前提。

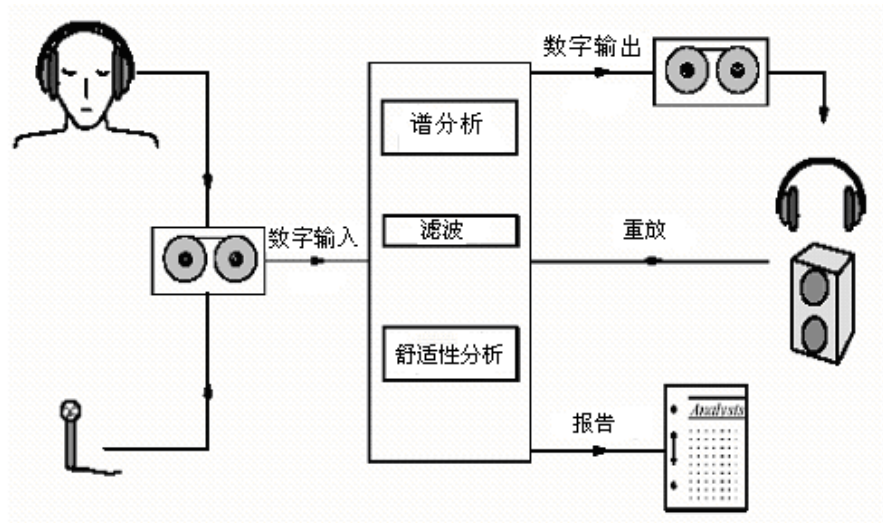


图 6-4 声品质测量/分析系统

## 测量

声品质测量是用传声器进行声学测量。通常采用数字记录方式，并传送至计算机系统，为了成功地对声作出评价，绝对必要的基础是尽可能得到最精确的、最具代表性的记录和回放。一种双耳记录技术，就是利用装置在人工头耳内的传声器，力求符合人耳的真实感觉。

## 评价

作为第二步，我们来研讨有关声品质问题的一些论点，以求增进对声品质真谛的理解。为评价声品质特性，不同的（非排他性的）可能途径如下：

a. 声信号可由专家或听众评判员进行主观评价。为此，可重放数字记录仪记录的信号，或者直接将模拟式输出信号传送至头戴受话器（耳机）或扬声器。当采用直接回放方式时，可循环地重复播放某一特定的记录段，并在技术上提供对记录段起端和末端出现“咔哒”声的抑制，其作用如同在线的陷波滤波器。而陷波滤波器则用于关键的声谱性质的快捷评估。

b. 对声压信号作某些特殊的处理，通过得到各种声品质度量数据，给出声感觉的定量分析。这些声品质度量就成为声舒适性（comfort）分析的组成部分。

## 修改

声音本身内涵的重要信息，可通过修改声信号并将其和原始的声信号在感觉品质上进行比较来获得。这种修改，可强加于时域、频域和阶次域。

声音修改的重要意义，还在于它可用于生成所谓“目标”（target）声，作为产品修改序列中的技术指标之一。

## 双耳记录和回放

声品质分析的基本要求是记录、分析、作必要的修改，然后重放声音，目标是精确地再现收听者曾经听到过的原始声音。本节给出该全过程的综述，并介绍与此有关的某些因素。并阐明这一过程所使用的各个术语的意义。

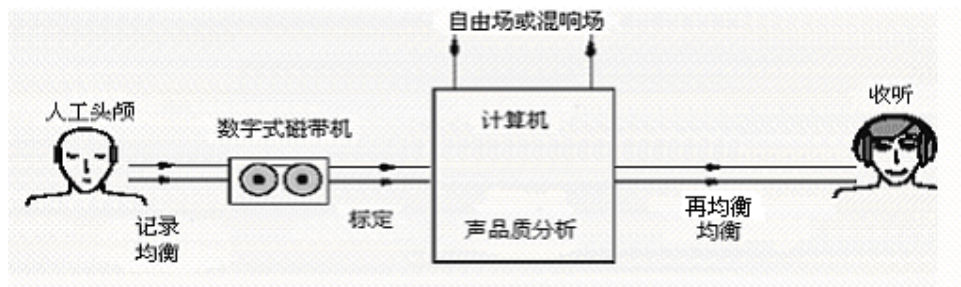


图 6-5 双耳记录和回放系统

## 记录

过程的第一步是精确地记录声音。在自由空间场合，仅用单个传声器是不够的，至少需要有四个传声器才能正确捕获三维的自然声。上一节讲过，耳鼓对声压的感受，由于听者头和躯干的存在而受到很大的影响，而进一步的影响是耳本身听力功能上的非线性工作特性。由此，记录声信号最精准的方法之一，就是模仿人耳自身的功能，在耳道内放置两个传声器。这一技术就是诸知的双耳记录，它涉及两个输入，各自代表左耳和右耳收听。

虽然可以将耳机放置在真人的头上，但更通常的是使用所谓人工头，它提供类似于人头—肩膀—躯干的空间滤波作用。

你可能希望由记录再现原始声，而不是如同头内听到的声。这时，你需要“消除”（undo）由于头的存在而引起的修改。如果记录的是自由场或扩散场的声，那么这样的声再现是可以做到的。

自由场属于一种理想化的声场，声流直接发自声源，声压级随着到声源距离的增加而衰减。扩散场占有一较小的空间，声波发生多次的来回反射。

因此，当你肯定是在某类声场中记录下声时，要想再现原来的声，需要施加适当的补偿或均衡。如果你只要求重放声音至耳机上，那就不需要均衡，所以你可以或者选择不均衡记录方式，或者在重放至耳机之前必须做再均衡。

---

## 传递给计算机

数字式磁带记录仪按 16 位声频格式作记录。数据传送给计算机后，转换成 32 位浮点格式。实现这一转换需要有标定因子。

## 重放

当你需要重放信号到耳机上时，如果自由场或扩散场均衡已经加到原始记录中话，就可能需要再均衡。另外，在计算与所用的特殊耳机系统相关的传递函数时，需要做某种补偿。



---

### 6.3 参考文献

- 1 D.LUBMAN, *Noise Quality, Toward a Larger Vision of Noise Control Engineering*, Journal of Noise Control Engineering, ....
- 2 J.BLAUERT, *Spatial Hearing*, MIT Press, Cambridge (MA), 1983.
- 3 W.BRAY ET AL, *Development and Use of Binaural Measurement Technique*, Proc. Noise Con. '91, Tarrytown (NY), July 14–16, 1991, pp 443–450.
- 4 D.HAMMERSHOI, H.MOLLER, *Binaural Auralisation : Head-Related Transfer Function Measured on Human Subjects*, Proceedings 93rd AES Convention, Vienna (A), March, 24–27, 1992, 7pp.
- 5 J.HASSAL, K.ZAVERI, *Acoustic Noise Measurements*, Bruel & Kjaer, DK2850 Naerum, Denmark, 1988
- 6 E.ZWICKER, H.FASTL, *Psychoacoustics, Facts and Models*, Springer Verlag, Berlin (Germany), 1990.
- 7 J.HOLMES, *Speech Synthesis and Recognition*, Van Nostrand Reinhold, Wokingham, Berkshire (UK), 1988.
- 8 M.HUSSAIN, J.GOELLES, *Statistical Evaluation of an Annoyance Index for Engine Noise Recordings*, SAE Paper 911080, Proc. SAE Noise and Vibration Conference, Traverse City (MI), May 16–18 1991 pp 359–368.
- 9 H.SHIFFBAENKER ET AL, *Development and Application of an Evaluation Technique to Assess the Subjective Character of Engine Noise*, SAE paper 911081, Proc. SAE Noise and Vibration Conference, Traverse City (MI), May 16–18 1991, pp 369–379.
- 10 K.TAKANAMI ET AL, *Improving Interior Noise Produced During Acceleration*, SAE paper 911078, Proc. SAE Noise and Vibration Conference, Traverse City (MI), May 16–18 1991, pp 339–348.
- 11 G.IRATO, G.RUSPA, *Influence of the Experimental Setting on the Evaluation of Subjective Noise Quality*, Proceeding of the second International Conference on Vehicle Comfort, Oct 14–16, 1992, Bologna (Italy), pp. 1033–1044.
- 12 INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION, *Method for Calculating Loudness Level*, ISO–532–1975 (E)
- 13 E.ZWICKER ET AL, *Program for Calculating Loudness According to DIN45631 (ISO532B)*, Journal Acoustic Society Jpn (E), Vol. 12, Nr.1, 1991.
- 14 S.J.STEVENS, *Procedure for Calculating Loudness : Mark VII*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 33, Nr.11, pp.1577–1585, 1961.
- 15 S.J.STEVENS, *Perceived Level of Noise by Mark VII and Decibel*, J. Acoust. Soc. Am., Vol.51, Nr.2, pp. 575–601, 1971.
- 16 E.ZWICKER, *Procedure for Calculating Loudness of Temporally Variable Sounds*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 62, Nr. 3, pp 675–681, 1977.
- 17 L.L.BERANEK, *Criteria for Noise and Vibration in Communities, Buildings and Vehicles in Noise and Vibration Control*, revised edition, McGraw–Hill Inc., 1988.
- 18 WAURES, *Berechnungsverfahren für den Sensorischen Wohlklang beliebigen Schallsignale*, Acustica, Vol.59, pp. 130–141, 1985

- 
- 19 M.ZOLLNER, *Psychoacoustic Roughness. A New Quality Criterion*, Cortex Electronic, 1992.
  - 20 W.AURES, *Ein Berechnungsverfahren der Rauigkeit*, Acustica, Vol.58, pp. 268–280, 1985.
  - 21 M.F.RUSSEL, *What Price Noise Quality Indices*, Proc. Engineering Integrity Society Symposium on NVH Challenges – Problem Solutions, Oct.21, 1992.
  - 22 M.F.RUSSEL ET AL. *Subjective Assessment of Diesel Vehicle Noise*, IMechE paper 925187, Ref. C389/044, FISITA Conference Engineering for the customer, pp.37–42, 1992.
  - 23 D.G.FISH, *Vehicle Noise Quality – Towards Improving the Correlation of Objective Measurements with Subjective Rating*, I. Mech. E. – paper 925186, Ref. C389/468 FISITA – conference, Engineering for the customer, pp. 29–36, 1992.
  - 24 G.TOWNSEND, *A New Approach to the Analysis of Impulsiveness in the Noise of Motor Vehicles*, Proc. Autotech '89, paper 7/26.
  - 25 MOTOR INDUSTRY RESEARCH ASSOCIATION, *Improving Correlation of Objective Measurements with Subjective Rating of Vehicle Noise*, MIRA research report K3866326.
  - 26 F.K.BRANDL ET AL, *A Concept for Definition of Subjective Noise Character – A Basis for More Efficient Vehicle Noise Reduction Strategies*, – Proceedings Internoise – 89, Newport Beach (CA), Dec. 4–6, 1989, pp.1279–1282.
  - 27 R.S.THOMAS, *A Development Process to Improve Vehicle Sound Quality*, SAE paper 911079, Proc, SAE Noise and Vibration Conference, Traverse City (MI), May 13–16 1991, pp. 349–358.
  - 28 G.R.BIENVENUE, M.A.NOBILO, *The Prominence Ratio Technique in Characterizing Perception of Noise Signals Containing Discrete Tones*, Proc. Internoise '92, Toronto, Canada, July 20–22, 1992, pp. 1115–1118.
  - 29 K.TSUGE ET AL, *A Study of Noise in Vehicle Passenger Compartment during Acceleration*, SAE paper 8509665, Proceedings SAE Noise and Vibration Conference, Traverse City (MI), May 15–17, 1985, pp. 27–34.
  - 30 T.WAKITA ET AL, *Objective Rating of Rumble in Vehicle Passenger Compartment during Acceleration*, SAE paper 891155, Proceedings SAE Noise and Vibration Conference, Traverse City (MI), May 16–18, 1989, pp. 305–312.
  - 31 W.YAGISHASHI, *Analysis of Car Interior Noise during Acceleration Taking into Account Auditory Impressions*, JSAE Review (E), Vol. 12, nr.4, Oct. 1991, pp. 58–61.
  - 32 K.FUJITA ET AL, *Research on Sound Quality Evaluation Methods for Exhaust Noise*, JSAE Review (E), Vol. 9, Nr. 2, April 1988, pp. 28–33.
  - 33 American National Standard, S3.14–1977 (R886), *Rating Noise with Respect to Speech Interference*, Acoustical Society of America.
  - 34 H.STEENEKEN, THOUTGAST, RASTI, *A Tool for Evaluating Auditoria*, Bruel & Kjaer Technical Review, nr.3–1985, pp. 13–30.
  - 35 M.NAKAMURA, TYAMASHITA, *Sound Evaluation in Cars by RASTI Method*, JSAE Review, Vol.11, Nr.4, Oct 1990, pp.38–41.
  - 36 H.MOLLER, *Fundamentals of Binaural Technology*, Applied Acoustics, Vol. 36, 1992, pp. 171–218.



- 
- 37 K.GENUIT, M.BURKHARD, *Artificial Head Measurement System for Subjective Evaluation of Sound Quality*, Sound and Vibration, March 1992, pp. 18–23.
  - 38 G.MICHEL, G.EBBIT, *Binaural Measurements of Loudness as a Parameter in the Evaluation of Sound Quality in Automobiles*, Proc. Noise Con. '91, Tarrytown (NY), July 14–16, 1991, pp. 483–490.
  - 39 G.THEILE, *The Importance of Diffuse Field Equalisation for Stereophonic Recording and Reproduction*, Proc. 13–th Tonmeistertagung, 1984.
  - 40 D.S.MANDIC, P.R.DONOVAN, *An Evaluation of Binaural Measurement Systems as Acoustic Transducers*, Proc. Noise Con 91, Tarrytown (NY), July 14–16, 1991, pp. 459–466.
  - 41 H.HAMMERSHOI, H.MOLLER, *Artificial Head for Free Field Recording ; How Well Do They Simulate Real Heads ?*, Proc. 14th ICA, Beijing, 1992, Paper H6–7 (2pp).
  - 42 K.GENUIT, H.GIERLICH, *Investigation between Objective Noise Measurement and Subjective Classification*, SAE Paper 891154, Proceedings SAE Noise and Vibration Conference, Traverse City (MI), May 16–18 1989, pp 295–303.
  - 43 H.MOLLER ET AL, *Transfer Characteristics of Headphones*, Proc. 92nd AES Convention, Vienna (A), March 24–27, 1992, 28 pp.
  - 44 Y.OKAMOTO ET AL, *Evaluation of Vehicle Sounds Through Synthesized Sounds that Respond to Driving Operation*, JSAE Review (E), Vol.12, Nr.4, Oct.1991, pp.52–57.
  - 45 S.M.HUTCHINS ET AL, *Noise, Vibration and Harshness from the customer's Point of View*, IMechE paper 925181, Ref. C389/049, Proc. FISATA–92 Conf, Engineering for the Customer.
  - 46 H.AOKI ET AL, *Effects of Power Plant Vibration on Sound Quality in the Passenger Compartment During Acceleration*, SAE paper 870955, Proc. SAE Noise and Vibration Conf., Traverse City (MI), Apr. 28–30, 1987, pp.53–62.
  - 47 K.C. PARSONS, M.J. GRIFFIN, *Methods for predicting Passenger Vibration Discomfort*, Society of Automotive Engineers Technical Paper Series 831921
  - 48 M.J. GRIFFIN, *Handbook of Human Vibration*, Academic Press Ltd. ISBN 0–12–03040–4
  - 49 J.D. LEATHERWOOD, L.M BARKER, *A User– Oriented and Computerized Model for Estimating Vehicle Ride Quality*, NASA Technical Paper 2299 (1984)
  - 50 International Standard, Ref. No. ISO 2631/1 – 1985 (E)
  - 51 International Standard, Ref. No. ISO 5349 – 1986 (E)
  - 52 British Standards Institution, *Measurement and evaluation of human exposure to whole–body mechanical vibration and repeated shock* Ref. No. BS 6841 – 1987
  - 53 American National Standard, S3.14 – 1977 (R–1986), *Rating Noise with Respect to Speech Interference*, order from the Acoustical Society of America.
  - 54 ANSI S3.5, *Calculation of the Articulation index*, American National Standards Institute, Inc., 1430 Broadway, New York, New York 10018 USA, 1969
  - 55 International Standard, Ref. No. ISO 532 – 1975 (E)

---

## 第七章 声品质的定量分析

可以说,评价声品质的最佳方法,是组织专家和一般听众直接听和发表看法。然而,在许多场合下,人们对这些主观评价与各测量参数之间的相互关系,表示浓厚的兴趣。为此,专家们提出多种声品质的度量办法,它们都是对声压信号作分析计算,得到与感觉相关的定量度量。包括:

- ☐ 声压级
- ☐ 响度
- ☐ 尖锐度
- ☐ 粗糙度
- ☐ 抖动强度
- ☐ 音高
- ☐ 清晰度指数
- ☐ 语言干扰级
- ☐ 声冲量

相关的参考文献在第六章末。

### 7.1 声压级

声压级 (SPL) 是声信号最基本的测量参数,用符号  $L_p$  表示,其定义依据式 (4-12)。

以声压级的刺激来诠释人的听觉时,在求总有效值 (RMS) 前,必须对声压信号的频谱先倍乘一计权函数。IEC 标准规定了几种计权函数。其中,以 A, B, C 和 D 计权应用最为广泛。这些计权函数是依据实验确定的等响度曲线制定的。后者将纯音的响度感觉表为声压级和频率的函数。

#### 时域声压级

这一功能是按照 IEC 651 标准和 ANSI 1.4—1983 标准进行频率计权和时间计权所得到的声压级。

频率计权可施加于时域信号,先进行上述 A、B 或 C 计权,然后再对时间

信号作指数平均，得到规定的计权声压级。指数平均的计权因子采用  $(e^{-\Delta t/t})$ 。其中， $\Delta t$  为信号的采样间隔，而  $t$  则为时间常数。 $t$  的取值依赖于信号的类型，三种非约定值（即非标准化值）的取值为：

$t = 35ms$  ,      用于脉冲（尖峰）信号

$t = 125ms$  ,      用于快变信号

$t = 1000ms$  ,      用于慢变信号

首先判断信号的类型，然后再选择适当的时间常数。

当信号包含有尖峰脉冲时，规定信号属于“脉冲”类型，并附加实施峰值检测。当被平均的信号强度递增变化时，信号平均可以准确跟踪其变化。当信号递减变化时，指数平均应取更长的时间常数，非约定的取值为 1500ms。这种场合下，时间常数也称为衰减时间常数。

## 7.2 等效声压级

ISO 1996/1-1982 和 ISO 1999/1-1990 规定了“等效 A 计权声压级 dB 值”的定义，以符号  $L_{Aeq,T}$  表示。

这一测量功能既可以给出一连续的平稳声在规定时间间隔  $T$  内的 A 计权声压级值，也可以给出声级随时间变化的均方声压。其表示式为：

$$L_{Aeq,T} = 10 \log \left[ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{p_A^2}{p_o^2} dt \right] \quad (7-1)$$

其中， $L_{Aeq,T}$  为等效连续 A 计权声压级，单位为 dB。积分时间间隔  $T$  的起始时刻为  $t_1$ ，终了时刻为  $t_2$ 。

$p_o$       参考声压（20 mPa）

$p_A(t)$       声信号的瞬时 A 计权声压。

实际上，对抽样数据计算等效声压级，是通过以 dB 标度的声压级抽样值求和及平均得出的，抽样的数目按要求给定。

---

一般说，可以用同样的公式计算非 **A** 计权声压级信号  $p(t)$ ，得到的是  $L_{eq,T}$ 。

### 7.3 响度

作为声品质分析依据的等响曲线，如图 6-2 示。它是由大量心理声学试验得出的结果，只是原则上只对试验所涉及的特定声类型有效。等响曲线对纯音有效，它描述给定频率、给定声压级的纯音与参考音比较时的实际感觉响度，所得到的值称为“响度级”。

响度级的单位为方（Phon）。1kHz 的纯音被选做参考音。这意味着对 1kHz 的纯音来说，方（Phon）的值就等于声压级 dB 值。自由场中纯音和扩散场中窄带随机噪声的等响曲线，已作为 **ISO 226-1987(E)** 标准颁布。

由对数标尺响度级方（Phon）值导出的线性标尺响度，单位为宋（Sone），宋与方之间的换算式为：

$$S = 2^{(P-40)/10} \quad (\text{宋}) \quad (7-2)$$

“宋”标尺对感觉响度的线性关系，使它更容易被理解。1 宋的响度对应于 40 方的响度级。两倍响度的纯音，有两倍响度的宋值，而其响度级则高出 10 方。

如果研究的是宽带声或多音声，那么响度的频谱视为临界带的函数而取代总响度值。临界带和巴克（Bark）的关系如上一章的表 6.1 所列。这种情况下，宜采用“局部响度”的术语，单位为宋/巴克（Sone/Bark）。

对于稳态声响度的计算，兹维克尔（Zwicker）和斯蒂文司（Stevens）提出的标准算法，已得到 **ISO** 标准的承认<sup>[12][13][14]</sup>。斯蒂文司提出的更现代的算法则尚未得到 **ISO** 标准的承认。

这两种方法的共同点是：

- 用图形表示出倍频程带声压级和倍频程带局部响度之间的关系。
- 将局部响度组合为总响度时，要计及掩蔽效应。

对于瞬变声，兹维克尔提出了一种计及瞬态效应的响度算法，但也还没有得到 **ISO** 标准的认定。

### 7.3.1 斯蒂文司 Mark VI

斯蒂文司 Mark VI 法, 作为 ISO 532A—1975 和 ANSI S3.4—1980 法定标准, 是以倍频程带声压级测量为起点的。各频带的响度与 1kHz 临界带噪声相比较。该方法仅适用于混响声场中相对平稳的宽带噪声测量。通过一组标准曲线, 将每一倍频程带声压级转换为一局部响度指数  $S$ , 见图 7-1。再将局部响度值依据式 7-3 综合为总响度值 (宋):

$$S_t = S_m + F(\sum S - S_m) \quad (7-3)$$

其中,  $S_t$  总响度, 宋

$S_m$  最大响度指数, 宋

$\sum S$  所有各频带的响度指数求和, 宋

$F$  反映掩蔽效应的分响度贡献因子。其取值依赖于倍频程测量的类型 (1/1 倍频程取 0.3, 1/3 倍频程取 0.15)。

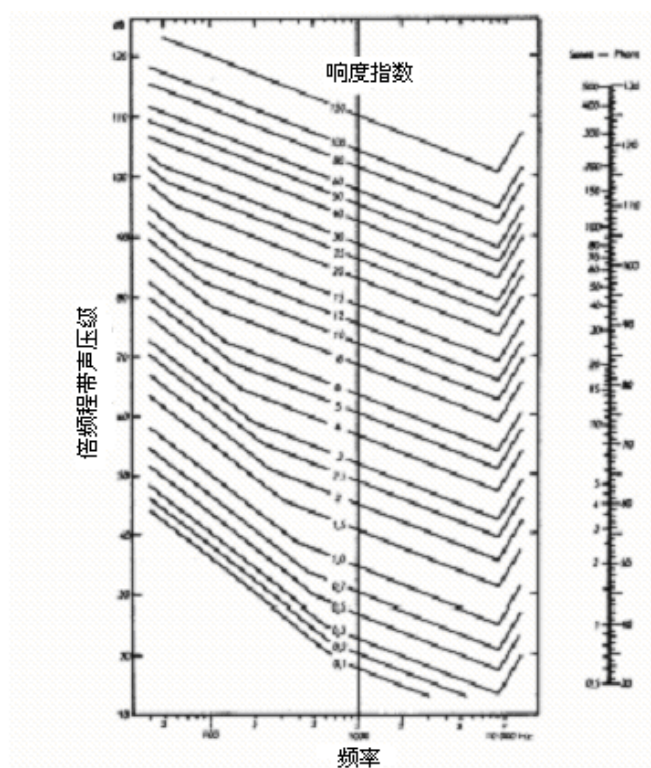


图 7-1 斯蒂文司响度指数 (Mark VI)

### 7.3.2 斯蒂文司 Mark VII

斯蒂文司 Mark VII 是一更新的计算图表，<sup>【15】【17】</sup>用以更精确的响度计算（参看图 7-2）。仍旧用式 7-3 计算总响度，采用的参考频率都是 3150 Hz。除了计算线性标尺的响度（宋）外，还可以计算对数标尺的“感觉响度级”（PLdB），这里规定以中心频率 3150 Hz，声压级 32dB 相应的响度为 1 宋。PLdB 值比以方为单位的响度级值大致低 8 dB。有关的例子和讨论见参考文献【5】和【17】。

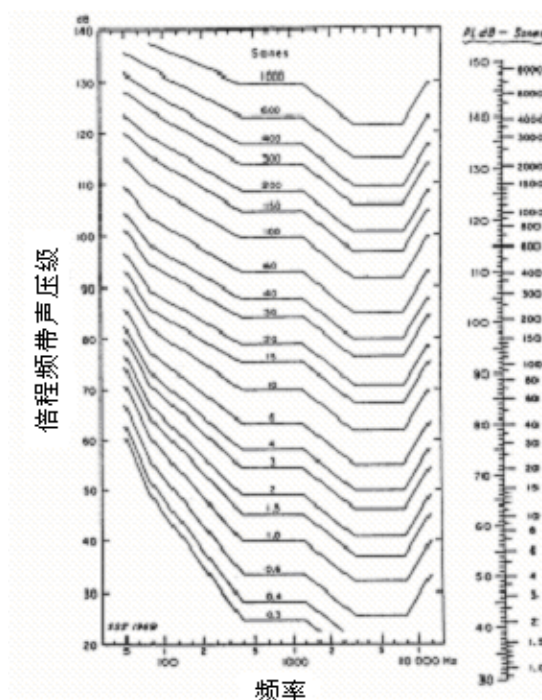


图 7-2 斯蒂文司响度指数（Mark VII）

### 7.3.3 兹维克尔响度

用兹维克尔法进行响度评估（ISO 532B 标准），是以 1/3 倍频程声压级数据作基础，数据可源于自由声场或者扩散声场。该方法用于处理复杂的宽带噪声，当然也可用以分析纯音。

这一方法充分地考虑了掩蔽效应，对于多分量复合声而言，掩蔽效应是十分重要的。一高声级的声分量可以“掩蔽”其它低声级的声分量，如果它们的频率彼此相接近的话。掩蔽的一个例子见图 7-3【5】，一 50 dB，4 kHz 的纯音（标记



有“+”号), 在中心频率 1200 Hz、声级高达 90 dB 的背景噪声中仍可听到, 但当背景噪声的声级上升到 100dB 时, 此纯音就听不到了。

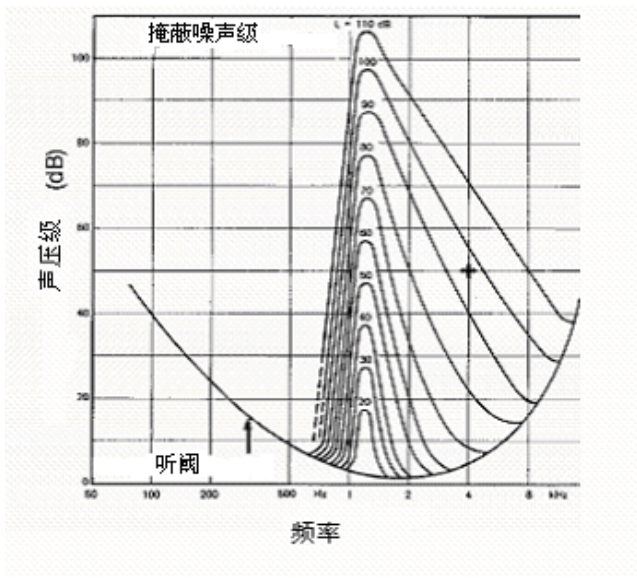


图 7-3 窄带噪声的掩蔽效应

兹维克尔法分别对扩散场和自由场各给出一套计算图组, 每张图各用于不同声场和不同声压级范围的响度计算。考虑掩蔽效应时还要计及每一倍频程带的斜坡边缘滤波特性。通过这一处理方式, 占优的频带, 即掩蔽带, 将暴露出其影响的频率宽度, 并抑制被掩蔽声对总响度的贡献。

图 7-4 所示为兹维克尔方法的例子。1/3 倍频程带数据被转换为适当的兹维克尔图。

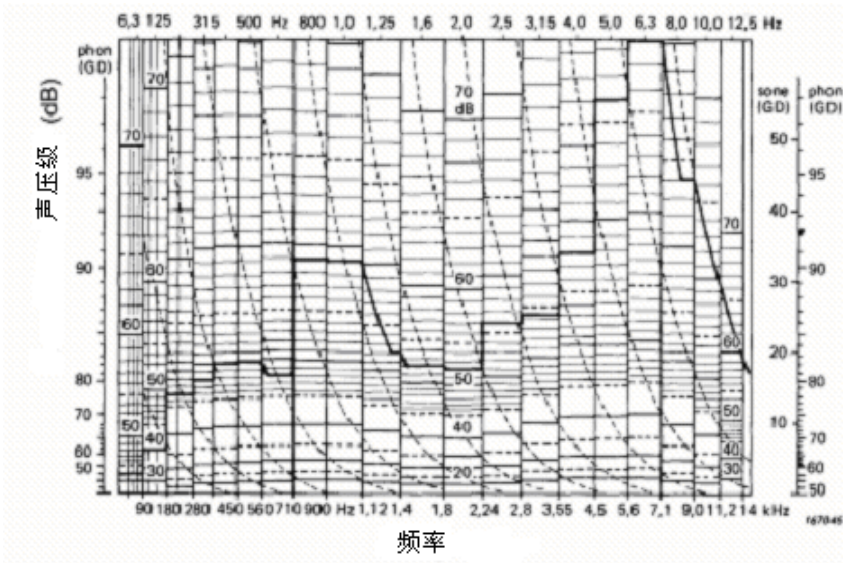


图 7-4 兹维克尔法响度计算举例

局部响度图线可由每一规定频段的总体估计算出,或者用经典的兹维克尔响度算法进行追踪评估而构建。选择频带分段或构架的大小,应保证能实现 FFT 基倍频程分析所需的谱分辨率。构架的大小往往受到分析所取的时间周期(记录长度)限制,在该周期内,时变信号可视为平稳信号。

兹维克尔响度分析法,允许你辨别非掩蔽区还是掩蔽区,从而可以判明某一局部声分量的声级是否完全彻底地被另一局部声分量所掩蔽。

总响度作为局部响度图线包围的面积而算出。作为时间的函数,表示成响度宋或响度级方。它表征总体评估下的单一值,或跟踪评估下的跟踪值。

## 7.4 尖锐度 (Sharpness)

尖锐度是声音是否使人愉悦的一种感觉,用以区别声音是尖锐 (sharp), 抑或沉闷 (Dull)。尖锐度感觉主要与窄带声的谱成分及中心频率有关,而不依赖于响度级和声谱成分的细节。

粗略地说,它相当于强化高频成分后的特殊响度谱的一次矩。一种推荐的量化处理,是将尖锐度表示单位取为 “acum”(acumer 的缩写)。1 acum 的参考声为中心频率 1kHz, 声压级 60dB, 带宽等于一个临界带的窄带噪声。

尖锐度与噪声的中心频率和带宽的相关性表示如图 7-5<sup>[6]</sup>。图中,中间一条曲线(实线)代表一临界带噪声的尖锐度作为中心频率的函数;而上部一条曲线(虚线)和下部一条曲线(点线),则分别代表具有固定的上截止频率(10 kHz)或下截止频率(0.2 kHz)噪声的尖锐度作为其它截止频率的函数。越是高频的噪声导致越高的尖锐度。

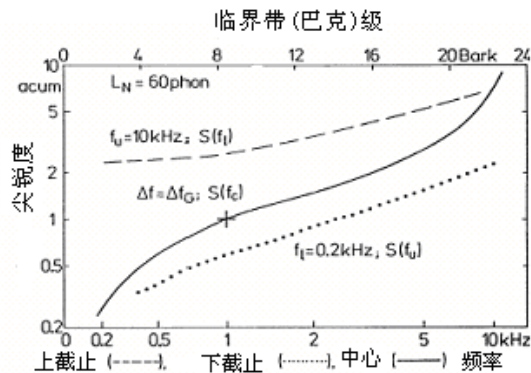


图 7-5 限带噪声的响度



对应某一临界带的尖锐度分量按下式计算：

$$S'(z) = \frac{0.11N'(z)g(z)z}{\sum_{0\text{Bark}}^{24\text{Bark}} N'(z)\Delta z} \quad (7-4)$$

其中，  $N'(z)$  该临界带的兹维克尔响度

$g(z)$  用于强化高频分量的计权函数（图 7-6）

对于 0~16Bark，  $g(z)$  的值为 1；高于 16Bark，  $g(z)$  按指数规律上升，即

$$g(z) = 0.066e^{0.171z} \quad (7-5)$$

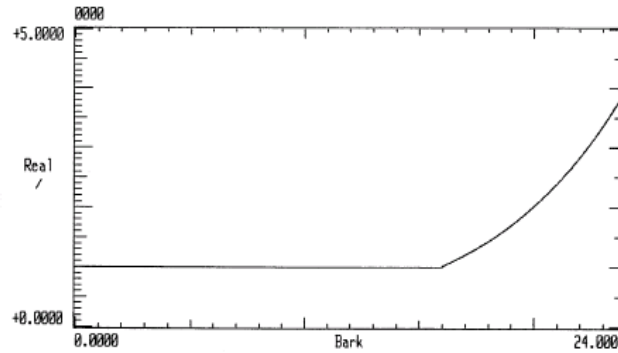


图 7-6 计算尖锐度的计权函数

以 “acums”表示的总尖锐度  $S$ ，由尖锐度分量  $S'(z)$  的积分求出：

$$S = \sum_{0\text{Bark}}^{24\text{Bark}} S'(z)\Delta z \quad (7-6)$$

## 7.5 粗糙度（Roughness）

粗糙度是声音受到幅值调制时的声品质评价指标。当调制频率很低时（低于 15Hz），可直接感受到时变的响度抖动。有关抖动的感觉将在下文 7.6 节讨论。

调制频率高至 150~300 Hz 时，可听到三种不同的音。而在中间不高不低的调制频率（约为 15~300Hz）下，感觉到的是稳定的，然而却是粗糙的、令人感觉厌恶的声音。这种感觉常伴随发动机噪声出现，其分数谐波可能引起这样的调制效果。

---

对粗糙度的感觉与调制深度和调制频率有关，而它对基本频率并不敏感。用于表述粗糙度的单位为“asper”(asperity 的缩写)。规定以 1 kHz, 60dB 的纯音被 70Hz、100% 调制时的粗糙度为 1 asper。

调制深度和调制频率之间的主从关系，并非是简单明了的。一个重要的因素是响度的瞬变可引起掩蔽效应。关于瞬变掩蔽深度( $\Delta L$ )的概念，上文已做过介绍，它表示实际感觉到的时变响度样本的最大值与最小值之差。对于后掩蔽效应，掩蔽深度比调制深度的影响要小一些，对较高的频率而言，两者的差别显得更大一些。幅值调制声的粗糙度(R)可近似地表示为：

$$R \cong f_{\text{mod}} \Delta L \quad (7-7)$$

定量计算粗糙度的方法已经提出。这涉及到计算每一个临界带的局部粗糙度，在计及调制深度，掩蔽效应和对它们进行积分的基础上，求得总体粗糙度。

## 7.6 抖动 (Fluctuation) 强度

当声音的调制频率低于 20 Hz 时，可直接感觉到音量随时间的变化。比之有同样 RMS 值的平稳声信号，抖动声信号显得更响（从而更加烦人）。这种情况下，感觉到的强度称为“抖动强度”，单位为“Vacil”(vacillate 的缩写)。1 kHz, 60dB 的纯音受到 4Hz, 100% 的幅值调制时，规定为 1 Vacil。抖动强度的定量模型已经提出来<sup>[6]</sup>，它计及了声音抖动造成的瞬变掩蔽效应。

抖动强度(F)与调制频率( $f_{\text{mod}}$ )及掩蔽深度( $\Delta L$ )之间的依赖关系如下式：

$$F \approx \frac{\Delta L}{(f_{\text{mod}} / 4\text{Hz}) + (4\text{Hz} / f_{\text{mod}})} \quad (7-8)$$

## 7.7 音高 (Pitch)

音高是声音的一种属性，它以由低至高的标尺对音作分类。

对于纯音，音高主要依赖于音频，但也受到声压级的影响。

对于由多个谱分量组成的复合音，可感觉到一个或多个音高。这些音高，也是在很大程度上依赖于组成复合音的各分量的频率，但也可能发生掩蔽效应，使得某些音高比其它音高更为突出。

纯音或复合音的音高，可以由信号的谱分布求出，称为谱音高（spectral pitches）。

考察包含基频及若干谐波组成的复合音，可感觉出相应于基频的音高，甚至将基频从信号中滤除后仍可感觉到。这一情况下，感觉音高不但与真实存在的信号分量有关，而且与高次谐波之间的频率差有关。这一类型的音高称为残差音高（residue pitch）或虚拟音高（virtual pitch）。

音高的计算按照塔赫提（Terhardt）研发的方法来做（参阅 J.Acoust.soc.Am.Vo171,pp679-688,1982）。谱音高和虚拟音高二者都作为每个计算音高的“权”而求出，从而指明在感觉上各音高分量占有怎样的地位。

如果在计算时，计及声压级对音高的影响的话，得到的计算音高称为真实音高（true pitch）。如果忽略声压级影响的话，则称之为标称音高（nominal pitch）。

## 7.8 清晰度指数（Articulation index 或 AI）

清晰度指数是以保证交谈的私密性观点提出的参数。交谈的私密性可定义为背景声或噪声侵扰正常交谈的“免以”程度，它提供私密性的正面品质评价。

噪声对语言的掩蔽造成的干扰作用，可通过对噪声频谱（1/3 倍频程带）按其对应语言可懂度影响的重要程度适当加权，由经过加权的谱求出清晰度指数。

图 7-7 给出相应的图形算法<sup>[17]</sup>。与语言相关的倍频程带通过圆点的数目来计权。将声压级的 1/3 倍频程谱绘在图上，谱线以上的点数除以总点数就是要求的 AI 值。实际计算可以表格化。

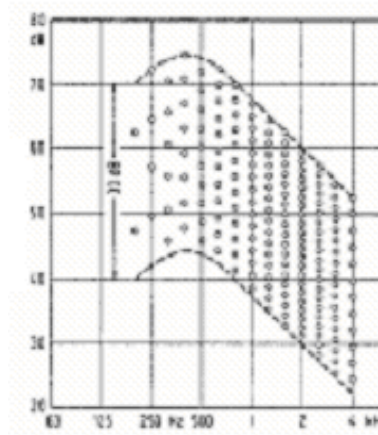


图 7-7 AI 的图算法

清晰度指数与可听懂音节的百分比有关，见图 7-8<sup>[17]</sup>。对于完全私密而言，AI 等于 0.05 是其上限；对于商谈非保密性的事情要求的半私密而言，可接受的 AI 值为 0.1<sup>[17]</sup>。

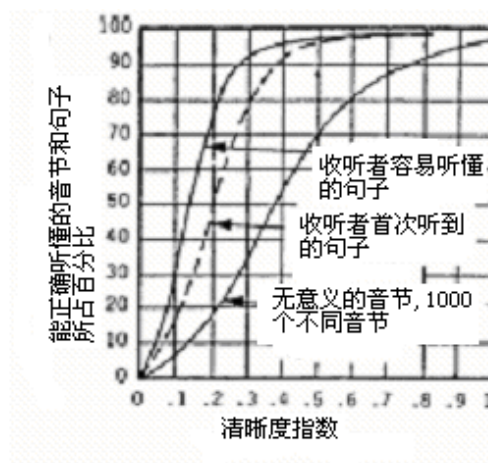


图 7-8 句子可懂度作为清晰度的函数

求 AI 有两种方法可供选用：

- 标准方法

这一算法基于班涅克 (Beranek) 的著作《语音通讯系统的设计》(The design of speech communication system, Proceedings of the IRE, Vo145,880-884,1947. ) 此方法得到的 AI 值范围为 0~100%。

- 改良方法

其计算基于 AIM 方法，该方法已在上文介绍过，而测量范围在 20dB 至 100dB 之间 80dB 的固定量程基础上可上下浮动 30dB。其结果，这一方法得到的 AI 值范围可达到 107%至约 160%。

## 7.9 语言干扰级 (SIL,PSIL)

以对语言的领会作为目标的话，背景声或噪声作为语言的干扰起负面作用，它可能对工作环境造成骚扰甚至危险，如果在该场所内所有对话必须得到正确理解的话。为此，学术界提出了一种称为“语言干扰级”(SIL)的噪声评价指标。

按照班涅克的原始定义，SIL 定义为 600~1200Hz，1200~2400Hz 和 2400~4800Hz 三个频带声压级的算术平均值。后来，由于新规定了所谓优先倍频程带的设限，SIL 被改称为优先语言干扰级 (PSIL)，规定其为 500Hz，1000Hz

和 2000 Hz 三个倍频程带声压级的算术平均值。<sup>[51][17]</sup>

到 1977 年, 语言干扰级被纳入美国国家标准 ANSI S3.14—1977 (R—1986)<sup>[33]</sup>, 并加进了 4kHz 倍频程带。这与 ISO 的建议是彼此一致的, 在 ISO 的技术报告 TR3352-1974 中曾作出过这一建议。总体说, ANSI-SIL 大致比班涅克的原始 SIL 高出 1dB, 而比 PSIL 低约 2.5dB<sup>[17]</sup>。

SIL 对语言易懂度的实际应用, 可利用提供的几种图和表格<sup>[51][17]</sup>。这些文件表达出 SIL 与语言易懂条件之间的关系。例如, 图 7-9 表示出不同的 PSIL 环境噪声级下, 面对面交谈的容易程度与交谈者相互距离之间的关系。<sup>[5]</sup>

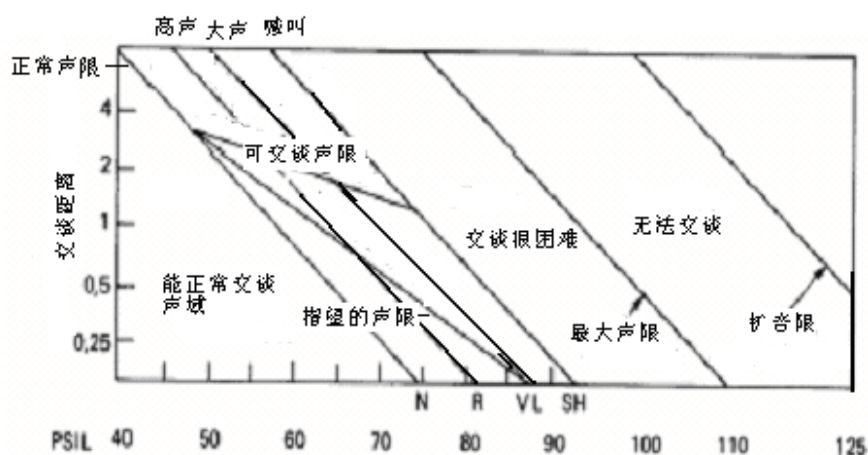


图 7-9 存在背景噪声时通话限制

## 7.10 冲激量 (Impulsiveness)

冲激量用于量化信号的冲激性质。它用于要求量化柴油发动机噪声的场合。

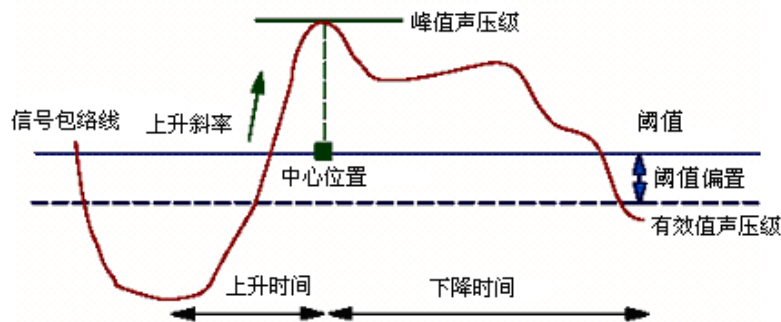
冲激量的算法基于信号的包络分析, 其结果以多个输出值表示: 包括平均脉冲峰值电平, 平均脉冲上升斜率和平均脉冲作用时间。所有这些参数的意义可参看下图。另外, 还要求计算平均脉冲发生率。

一定阈值 (threshold) 被用于确定冲激事件的发生。阈值包括所有信号分段的 RMS 值 (总体求得), 帧信号 (跟踪分析情况下) 的 RMS 值 and 用户定义的阈偏置的综合。

脉冲的起始点定义为信号从低值上升至阈值时的极小值点。脉冲上升时间为脉冲起始至达到脉冲峰值电平之间的时间间隔。峰值电平用 dB 值表示, 代表脉

冲峰值电平和阈值电平之差。峰点定义为越过阈值电平之后达到的第一最大值。  
脉冲作用时间为上升时间与下降时间之和。

上升斜率为发生在脉冲起始点与脉冲峰点之间的最大上升斜率。



## 第八章 声全息

本章叙述声全息的背景。

### 8.1 概述

声全息用于精确定位噪声源。以便有效缩减不希望的声—振噪声，或优化噪声级。

- 评估被考察物体所发射的声功率和声谱。
- 用彩色图象表示测量平面和其它平行平面上的声压、质点速度和声强的分布状况。测量平面之外的（近场和远场）的声学量彩色图象可经由声全息分析而得到。
- 评估主声源产生的声级，包括贡献量分析。

本文讨论伴随声学测量的声全息分析一般原理。包括稳态过程和瞬态过程两种情况下的测量和分析。

#### 基本原理

声全息需要测量一组参考传感器与声全息传声器之间的互功率谱，据此求出声强、质点速度和声功率的值。

一个基本前提是，测量是在自由场环境进行的。在自由场中，声能量流直接

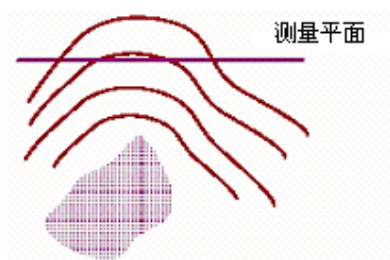
来自声源。测量面要求充分靠近声源。

声全息提供声场和声源精确的三维特性,比一般的声腔测量有更高的空间分辨率。

## 8.2 基本概念

声全息的原理是通过空间傅里叶变换,把测量的压力场分解为平面波。对于每一个固定的频率,我们可以计算出这些平面波是怎样传播的,把它们累加,就可以找出任何与测量平面相平行平面上的压力场。

让我们来研究声波。在一平面上测量声压,意味着波阵面被测量平面所剖切。



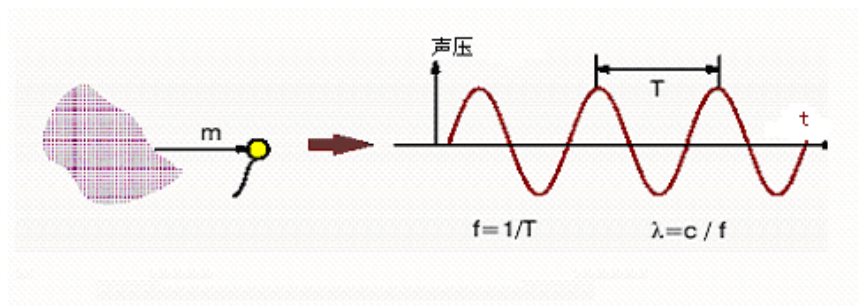
我们的目标是,由测量平面上的已知声压,推算出整个声波的波阵面。测量阵列的每一个传声器均测量出复数声压(包括幅值和相位)。

### 时间频率和空间频率

在讨论声全息分析之前,让我们比较一下时域和空间域。

#### 时域

在讨论时域测量时,认为声源的位置是固定不变的。测量得到的是声压变化作为时间的函数。



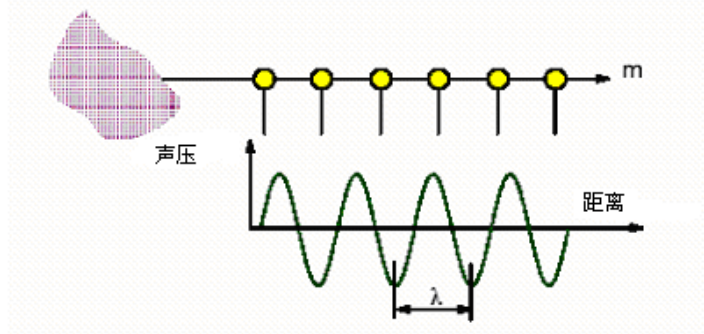
从时域到频域的转换,是通过下式给定的傅里叶变换得到的:

$$F(\bar{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\bar{w}t} dt \quad (8-1)$$



## 空间域

如果我们所讨论的测量，认为时间是固定不变的，声压的变化只作为测点到声源距离的函数，那么我们得到的就是能量流测量。



函数的空间频率，也称为波数 ( $k_o$ )，其定义式为：

$$k_o = \frac{2\pi f}{c} = \frac{w}{c} = \frac{2\pi}{l}$$

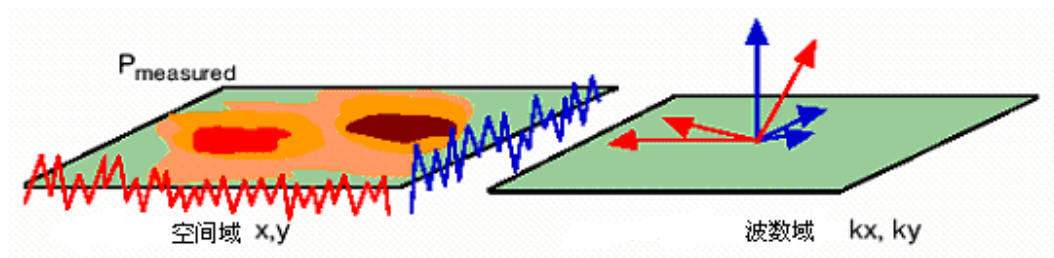
其中， $c$  为声速， $f$  为时间频率， $l$  为波长。如果时间频率是固定的，那么测量到的声波波长也是固定的。

复数声压作为空间的函数，称为给定频率的声压映象 (pressure image)。

空间域的转换，也可以利用傅里叶变换。对于声全息分析，声压测量是以二维（例如  $x$  和  $y$ ）测量为基础的，而二维的傅里叶变换式为：

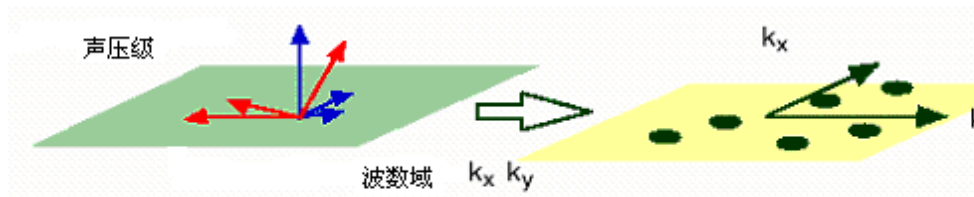
$$S(k_x, k_y) = \iint_S P_{measured}(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (8-2)$$

其中  $S(k_x, k_y)$  为测量的压力场对波数域 ( $k_x$  和  $k_y$ ) 的空间变换。其结果给出二维的全息压力场。



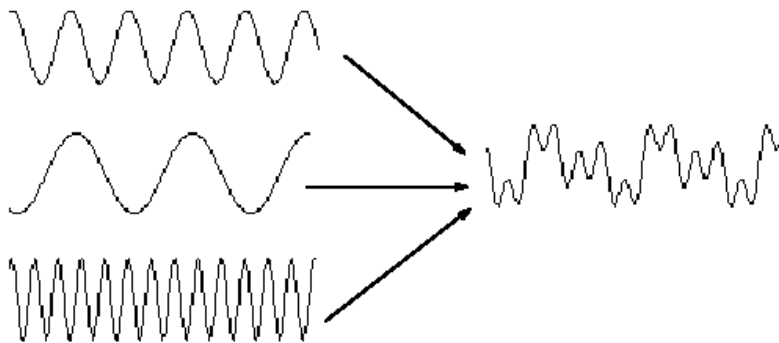


具有某一特定时间频率的被测量（声）压力波可沿着多个方向传播，所以波数向量（ $\mathbf{k}$ ）有多个分量。这些分量的值依赖于你所观察的平面。我们的目标是要找到这些向量在规定平面的二维分量，并求出这些向量在平面上的投影。

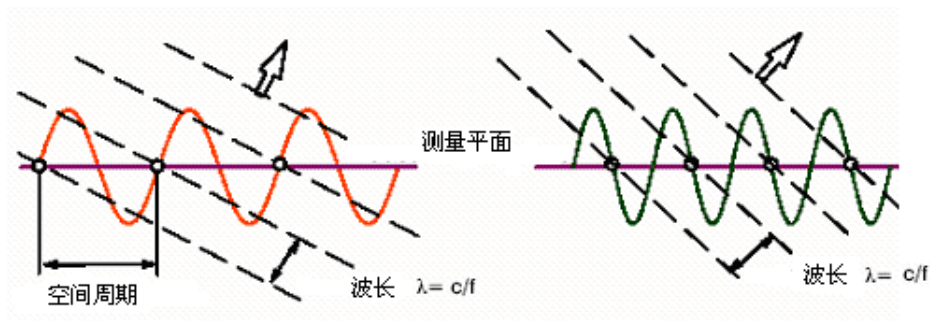


### 平面波的求和

空间傅里叶变换的意义是，测量的压力场可认为是若干正弦函数的和。



这些正弦函数中的每一个，均可理解为平面波的波阵面被测量平面剖切的结果。



正弦函数的波节与波阵面之间存在互相一致的关系。事实上，将压力场分解为正弦函数之和意味着将实际声波分解为平面波之和。

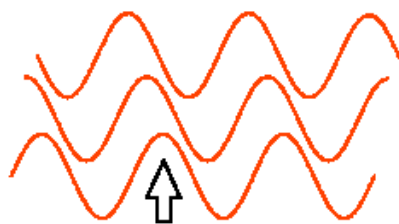
无论入射角怎样，空间域的周期必定大于波长( $\lambda$ )。

## 扩散波和损耗波 (propagating and evanescent waves)

有两类平面波：

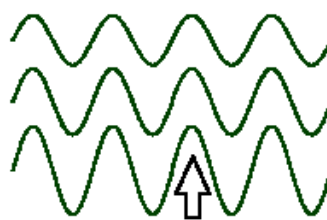
### 扩散波

传播中声级保持不变，  
但相位不断偏移。



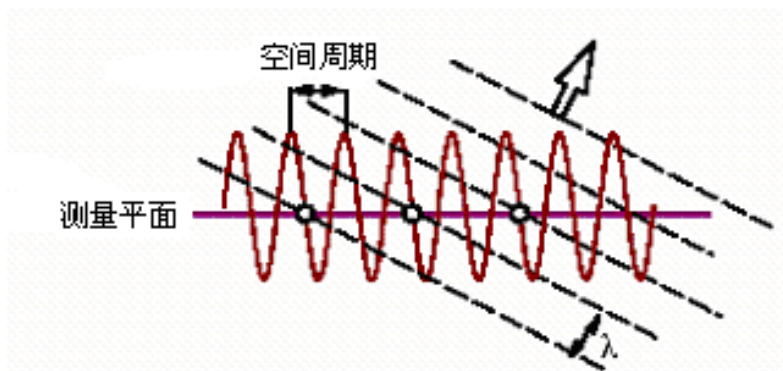
### 损耗波

传播中声级逐渐衰减。



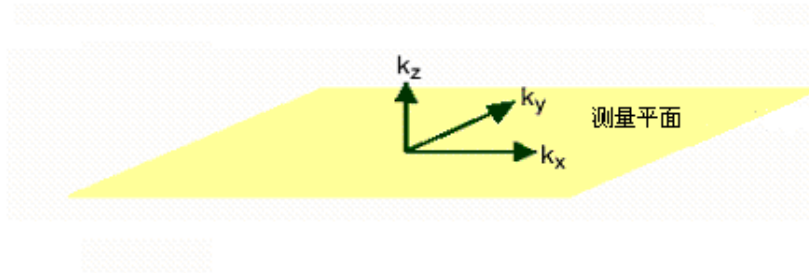
扩散波代表这样的声场，其声波从近场向远场扩散开来。而损耗波则表征声源近场的复数声场。

要想了解为什么我们必须取耗散平面波、即损耗波进行计算，应当从研究压力场怎样分解为正弦函数入手。如果正弦函数的空间周期比波长还短，它就不可能是扩散平面波被测量平面剖切得到的结果。



无论扩散平面波沿什么方向传播，都不可能使正弦函数的波节与波阵面相一致。因此，只能认为正弦函数是损耗波（比起扩散波，它可以有较小的空间周期）被测量平面剖切而得。

损耗波的一种数学描述是基于  $k_z$  估值，后者为波数域内与测量平面正交的波数分量。



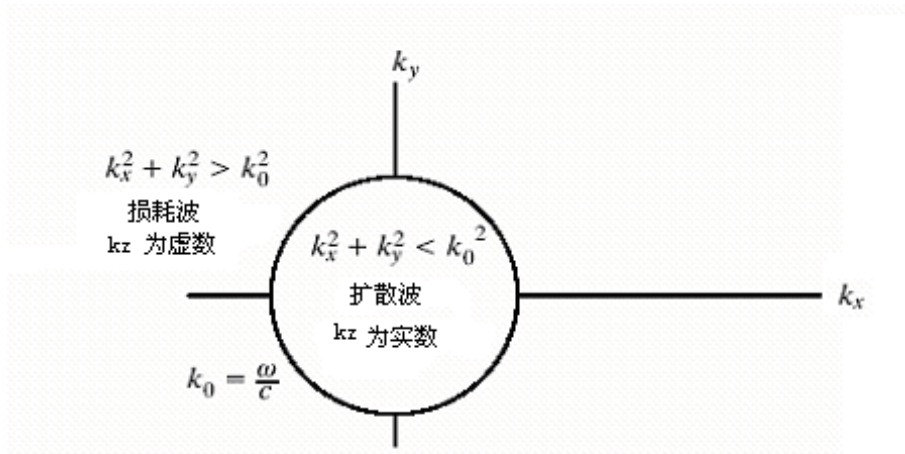
$k_z$  可由波数  $k_o$  和由空间变换得到的  $k_x$  和  $k_y$  值而求出:

$$k_o = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{W}{c}$$

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (k_x^2 + k_y^2)} \quad (8-3)$$

当  $k_x^2 + k_y^2 < \left(\frac{W}{c}\right)^2$  时,  $k_z$  为实数 (空间周期大于波长)。这意味着波在

波数域内以  $W/c$  为半径的圆内。超出这一区域的  $k_z$  为虚数。



当  $k_z$  为虚数时, 传播因子变为衰减指数函数 ( $e^{-jk_z z}$ ), 这意味着被传播的波在相位不变得情况下, 幅值逐渐衰减。

### 反演到其它平面

其它平面上的声压可利用带特利克莱特 (Dirichlet) 格林函数的拉雷夫

---

(Raleigh) 积分方程求出:

$$p(r) = \iint P(r') G_d(r - r') dx dy \quad (8-4)$$

其中, 格林函数  $G_d$  可视为传递函数, 它将声场从一个平面传递到另一平面。

我们可利用波数域参数  $k$  来预测不同空间位置 ( $z$ ) 的声压。

拉雷夫方程的实际计算式为:

$$\text{对 } z > z', \quad s(k_x, k_y, z) = S(k_x, k_y, z) g_d(k_x, k_y, z - z') \quad (8-5)$$

$$\text{对 } 0 < z < z', \quad s(k_x, k_y, z) = S(k_x, k_y, z) \frac{1}{g_d(k_x, k_y, z' - z)} \quad (8-6)$$

其中,  $z'$  为测量平面, 而  $z$  为要求推演平面的位置。

格林函数由下式给出

$$g_d = e^{jk_z(z-z')}$$

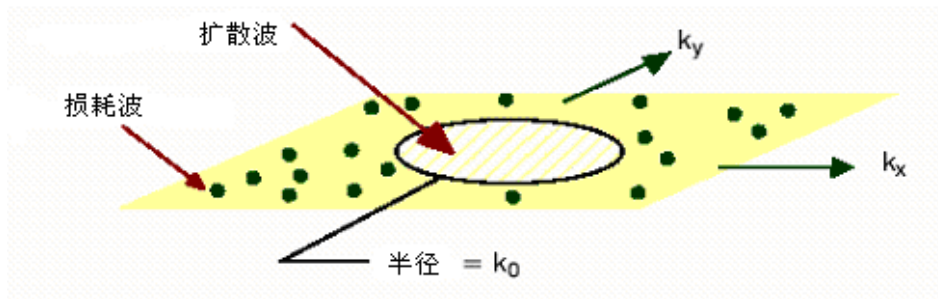
而  $k_z$  可由式 (8-3) 求出。

最后一步是作逆变换, 得到推演平面的瞬间声压场。

### 维纳 (Wiener) 滤波和阿德霍克 (AdHoc) 窗

如上所述, 损耗波的幅值在传播过程中是不断变化的。指向声源的传播意味着作为  $k_z$  函数的信号被放大, 远离单位圆的损耗波有大的  $k_z$  值, 因此, 传向声源时, 其幅值明显放大。损耗波的这一特质, 增强了空间分辨率。注意! 损耗波的蕴涵只适合于指向声源的传播。

对于远离声源的传播, 损耗波的幅值很快衰减, 它们对空间分辨率的贡献变得可忽略不计。然而, 离声源更远处的波, 幅值估计的精度变差, 以至于在某一处, 传播的只是一些杂音, 传播图象开始变得模糊不清。



对指向声源的传播，维纳滤波适用于含一定量损耗波情况，可提高分辨率。取更多量的波进行计算，可能使放大量变得不稳定。这取决于在维纳滤波器中称为信噪比 ( $S/N$ ) 的参数。当  $S/N$  的值大于 15dB 时，随着损耗波数量的增多，放大量将变得不稳定。使用低的  $S/N$  值（例如 5dB），意味着即便计及损耗波，但由于它们衰减得快，对分辨率的改善非常微小。取  $S/N$  值略低于 15dB 是对分辨率和幅值精度的最佳折衷。

在使用维纳滤波时，声压映象需要用二维窗函数作倍乘。如同单变量 FFT 情况一样，被观察的声压必须在被观察的声全息图内是“周期”的。如果不是那样，如同单变量 FFT 一样会产生截断误差。这种误差会造成在观察面的边缘上出现声源的“鬼影”。

有两种窗函数供采用：

### 矩形窗

即对声压映象不作任何修改。这种情况下，计算只计及扩散波，得到的分辨率等同于声强测量。

### 阿德霍克 (AdHoc) 窗

对时间信号而言，FFT 算法相当于取一段时间信号，在其前后两端无限地（周期地）重复该信号。如果在测量窗的起端和末端的信号幅值不一样，连接点的突变造成 FFT 的计算误差。这种误差可通过采用诸如汉宁窗等加于修正。全息图采用的是双变量 FFT，所加的 AdHoc 窗本质上是一种二维汉宁窗，用于改善  $x$  方向和  $y$  方向变换分析时的突变。

一维的 AdHoc 窗 ( $w$ ) 为：

---

当  $\frac{N-1}{2}(1-a) \leq I \leq \frac{N-1}{2}(1+a)$  时,  $W[I]=1$

当

$$I < \frac{N-1}{2}(1-a) \text{ 时,}$$

$$W[I] = 0.5 + 0.5 \cos \left[ \frac{2p}{N-aN+a} \left( I - \frac{N-1}{2}(1-a) \right) \right]$$

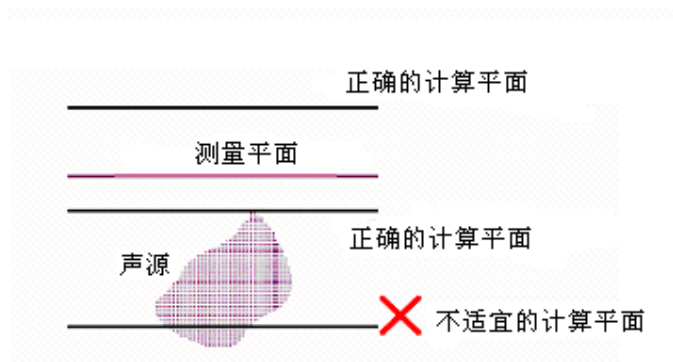
当

$$I > \frac{N-1}{2}(1+a) \text{ 时,}$$

$$W[I] = 0.5 + 0.5 \cos \left[ \frac{2p}{N-aN+a} \left( I - \frac{N-1}{2}(1+a) \right) \right]$$

### 演算出其它声学量

如果知道平面波是怎样传播的, 我们就能演算出任何平行平面的压力场。办法是将所有平面波的贡献相加。这只有在所有声源都位于测量平面和演算平面二者的相同一边时, 才可能得到正确结果



知道了平行平面上的声压场, 就可以演算出质点速度, 并最终演算出该平面上的声强分布。

如果声压差可以求出, 那么质点速度 ( $v$ ) 也就知道。声全息测量分析过程中, 在  $r$  位置和 ( $r + dr$ ) 位置的声压是可以测量到的。

$$\Delta P(r) = f(P(r), P(r + \delta dr)) \quad \text{Eqn 8-7}$$

$$\nabla = \frac{-j}{\rho c k} \Delta P(r)$$

一旦声压和质点速度知道，那么声强立刻可由二者的乘积求出。

$$I = P \nabla \quad \text{Eqn 8-8}$$

## 第三篇 时域数据处理

### 第九章 统计分析

统计分析提供数据组的特征信息，本章简要介绍各种特征参数。

**最大植，最小值，幅值范围和极大值**

这些参数的意义如图 9-1 所示：

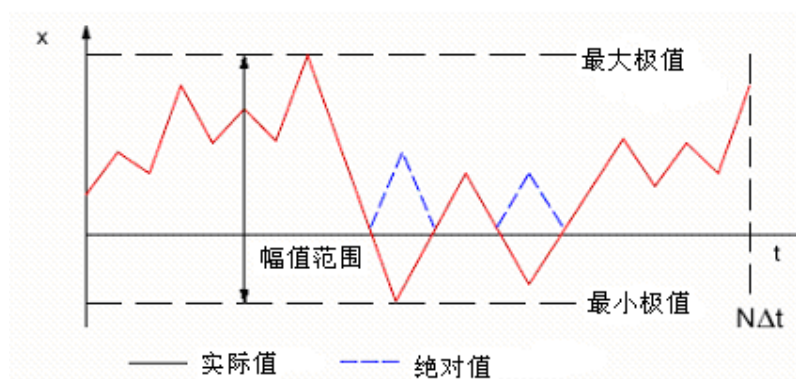


图 9-1 最大值，最小值，幅值范围和极值示意

**最大值**

在规定测量时间段内的最大幅值。

**最小值**

在规定测量时间段内的最小幅值。

---

## 幅值范围

最大值与最小值的差值。

## 极大值

指规定测量时间段内的最大绝对值。如果最大值的绝对值大于最小值的绝对值，那么它就等于最大值的绝对值，否则它等于极小值的绝对值。

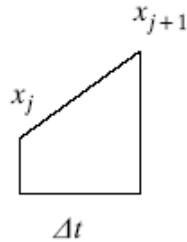
## 总和

在测量时间段所有  $N$  个采样值代数求和，即

$$Sum = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \quad \text{Eqn. 9-1}$$

## 积分

在测量时间段内，时间波形与时间坐标轴包围的面积（area），可通过相邻数据求和的半值倍乘时间增量  $\Delta t$ ，再累加而得出。



$$area = \sum_{j=0}^{N-2} \frac{x_j + x_{j+1}}{2} \Delta t \quad \text{Eqn. 9-2}$$

## 均方根值

均方根值，也称为有效值，由下式求出：

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j^2} \quad \text{Eqn 9-3}$$

其中  $N$  为采样点总数。均方根值表征该时间序列的总能量。

## 峰值因子

峰值因子由下式求出：

$$\frac{|max - min|}{2 RMS} \quad \text{Eqn 9-4}$$



---

峰值因子提供数据的“峰态”测量。正弦波信号的峰值因子等于 1.41，随机信号的峰值因子大致等于 3~4。一短促的尖脉冲可有很大的峰值因子。

### 均值 (mean)

一数据组的均值，是其中心值的估计，用  $\bar{x}$  表示，其定义为：

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \quad \text{Eqn 9-5}$$

其中，N 为采样点总数。

均值并非表征数据中心值的唯一参数。另一参数为中值(median)。

均值和中值都提供数据中心值或平均的信息。如何适当选用这二者之一，取决于下文论述的偏斜度(skewness)。

### 中值(median)

概率密度函数  $p(x)$  的中值  $x_{med}$  的意义是变量  $x$  大于和小于该值的概率相等，即

$$\int_{-\infty}^{x_{med}} p(x) dx = \int_{x_{med}}^{+\infty} p(x) dx = \frac{1}{2} \quad \text{Eqn 9-6}$$

对于离散数据而言，如果所有采样数据按递增或递减顺序排列的话，中值就是中间数据的值。如果 N 为奇数，则中值

$$x_{med} = x_{\frac{N-1}{2}} \quad \text{Eqn 9-7}$$

即大于中值的数据和小于中值的数据各占半数。若 N 为偶数，则中值乃是两个中心值的代数平均，即

$$x_{med} = \frac{x_{\frac{N}{2}-1} + x_{\frac{N}{2}}}{2} \quad \text{Eqn 9-8}$$

均值和中值都提供数据组的中间值或平均值的信息。特殊情况下，如何选用二者之一，取决于数据的偏斜度(skewness)。关于数据偏斜度的说明请参看图 9-2。

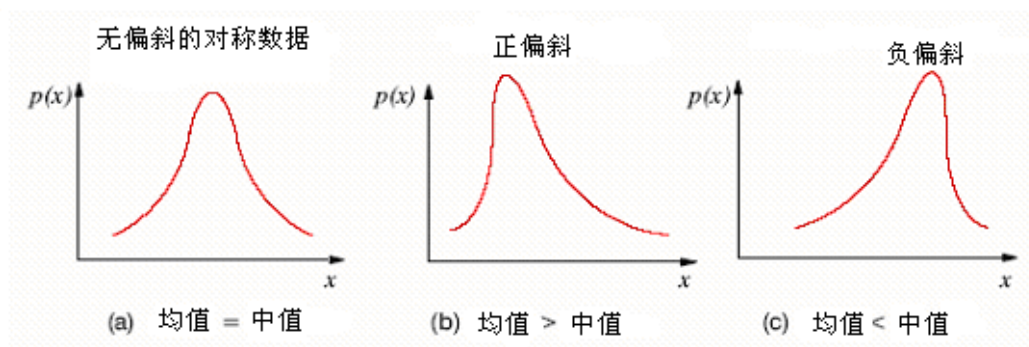


图 9-2 数据分布的对称和偏斜

偏斜度表征数据相对其中间值的分布形态。高值数据量偏少的数据分布说成是正偏斜，其时均值>中值；低值数据量偏少的数据分布说成负偏斜，其时均值<中值。均值比中值更常被使用，如果偏斜度保持在-1~1 的范围内，这种使用没什么问题。关于偏斜度的计算见下文式 9-13。

### 百分点

中值也可以表示第 50 个百分点，因为高于和低于该数值的数据量各占 50%。类似地可以计算出第 10，25，75 和 90 等百分点的值。

概率密度函数  $p(x)$  的第  $n$  个百分点，表示数据组中有  $n\%$  的数据的值小于该百分点的值。所以，有 10% 的数据比第 10 个百分点的值小，有 90% 的数据比第 10 个百分点的值大。如此类推。

### 方差和标准差

分析数据的值相对于均值的变化情况，可得到有关数值分布的其他信息。其中，方差(variance)由下式定义：

$$\text{var}(x_0, \dots, x_{N-1}) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (x_j - \bar{x})^2 \quad \text{Eqn 9-9}$$

也可视其为数值分布的二次矩。标准差定义为方差的平方根，即

$$\sigma(x_0, \dots, x_{N-1}) = \sqrt{\text{var}(x_0, \dots, x_{N-1})} \quad \text{Eqn 9-10}$$

标准差与原始测量数据有相同的单位。

---

## 平均绝对偏差

在研究数据幅值分布时，二次矩不存在（即数据的幅值变化无限）的情况在现实中并不罕见。在这种情况下，用方差或标准差来测量数据在中间值周围的幅值宽度没有意义。即便是凭眼睛观察似乎幅值宽度有限的情况，也存在这样的问题。

幅值宽度更具鲁棒性（robust）的估计是平均绝对偏差，其定义为：

$$ADev(x_0, \dots, x_{N-1}) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |x_j - \bar{x}| \quad Eqn 9-11$$

## 最大偏差

最大偏差由下式给出：

$$\frac{\max(\max - mean, mean - \min)}{\sigma} \quad Eqn 9-12$$

最大偏差类似于峰值因子，只不过它是以均值作为参考，因而特别针对均值不等于零的情况。

## 偏斜度(skewness)

偏斜度的说明见图 9-2，也称其为偏态系数。表征数据在其中值上下分布的不对称程度。其定义式为：

$$skew(x_0, \dots, x_{N-1}) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{x_j - \bar{x}}{\sigma} \right]^3 \quad Eqn 9-13$$

可见偏斜度是概率分布三次矩的无量纲参数。

即使偏斜度不等于零，未必就意味着数据确实存在偏斜情况。仅当三次矩的值比标准差还要大时，才可以确信偏斜度。对于正态（高斯）分布的理想情况，偏斜度估计的标准差约为  $\sqrt{6/N}$ 。习惯上，仅当偏斜度的估计比这个值大出几倍时，才可以相信偏斜度。

## 峭度(kurtosis)

表征概率分布的另一参数是峭度，或称为峰态系数。也是一无量纲参数，用于评价实际数据的概率分布与高斯或正态分布比较是相对尖锐还是相对平坦。这

种比较见图 9-3。

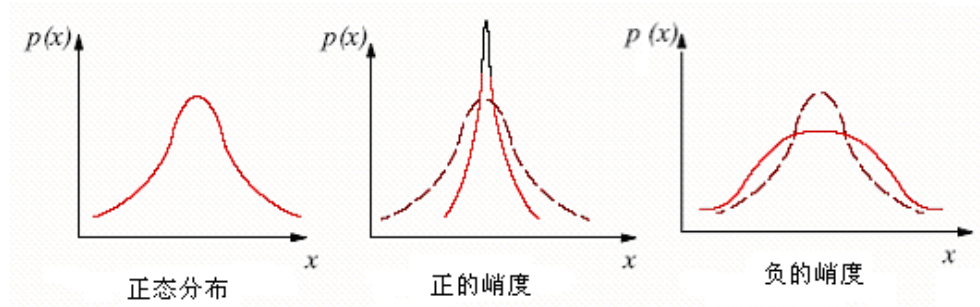


图 9-3 正负峭度分布与正态分布的比较\*

(注：此图中正峭度和负峭度二图形似应互换—译者)

峭度的定义如下式：

$$kurt(x_0, \dots, x_{N-1}) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{x_j - \bar{x}}{\sigma} \right]^4 \right\} - 3 \quad Eqn 9-14$$

上式等号右边有一常数项 -3，是因为按上式求得的峭度对于高斯正态分布而言，它等于零。

峭度是概率分布四次矩的无量纲参数。峭度为正值，表示实际分布比高斯分布有更长的尾部；负值表示实际分布比高斯分布有较短的尾部。

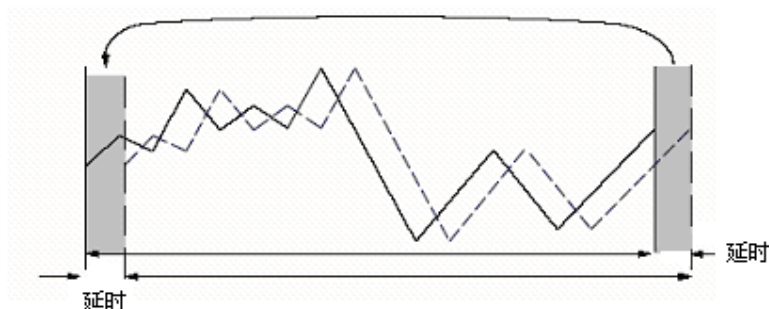
对于高斯分布的理想情况，式 9-14 的标准差为  $\sqrt{24/N}$ 。然而，由于峭度取决于概率分布如此高的阶次矩，许多情况下，对实际概率分布而言，式 9-14 的标准差实际上是无法确定的。

**注意！** 偏斜度和峭度这种高次矩，与基于线性相加的低次矩相比较，其鲁棒性通常较差，因此偏斜度和峭度的计算结果往往比较漫泛（分散），在使用它时务必谨慎。

## 马可夫回归

马可夫回归提供数据组中一个数据与其它数据之间相似性评估。它的基础

是一数据组的循环自相关  $R(\bullet)$ ，即计算数据中一个特定值与延时某一间隔的值之间的相关，其意义如下图所示。



所谓循环相关，是将数据组的最后一个值绕回至第一个值相衔接。延时一个数据采样的循环相关用下式计算：

$$R(1) = \left[ \sum_{j=0}^{N-2} x_j x_{j+1} \right] + x_0 x_{N-1} \quad \text{Eqn 9-15}$$

延时为 0 的循环相关为：

$$R(0) = \sum_{j=0}^{N-1} x_j^2 \quad \text{Eqn 9-16}$$

马可夫回归系数即是  $R(1)$  和  $R(0)$  的比值：

$$\text{马可夫回归系数} = \frac{R(1)}{R(0)} \quad \text{Eqn 9-17}$$

其取值在 0（极低的相关性）和 1（高度相似）之间。对于窄带信号，其取值会接近于 1，而对于宽带信号，取值会接近于 0。因此，它可以提示我们，滤波后的信号大致有怎样的带宽。

## 第十章 时频分析

时频分析用于考察那种谱（频率）成分随时间变化的特种类型信号。本章仅对这类分析的理论背景作一简略的介绍。包括

- ☐ 概述
- ☐ 线性时频表示
- ☐ 二次型时频表示

## 10.1 概述

很多物理信号归属于非平稳信号。傅里叶变换建立起时域和频域之间的映射关系，但它不能提供信号频率分量的时间定位。从总体上表示出观察周期内所有出现频率的同时，未能精确地指示出这些频率的出现是在什么时间内。

时频分析方法将信号表述成时间和频率的二元函数。其目标是发现信号能量在时间局域和频率局域上的分布。另外，这些分布可能满足、也可能不满足某些关心的数学性质，例如所谓“边缘方程”。

信号在时刻  $t$  的即时功率为：

$$|S(t)|^2 \quad \text{—— 在时刻 } t \text{、每单位时间的能量或强度}$$

每单位频率的强度由傅里叶变换  $S(\omega)$  模的平方得出：

$$|S(\omega)|^2 \quad \text{—— 在频率 } \omega \text{ 处、单位频率的能量或强度}$$

二元函数  $P(\omega, t)$  应该表述出单位时间、单位频率的能量，即

$$P(\omega, t) \quad \text{—— 每单位时间（在时刻 } t \text{）和每单位频率（在频率 } \omega \text{ 处）} \\ \text{的能量或强度}$$

理论上，这种能量分布对所有频率求和，应当得到即时功率：

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, t) d\omega = |s(t)|^2 \quad \text{Eqn 10-1}$$

而它对所有时间求和，应当得到能量密度谱：

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, t) dt = |S(\omega)|^2 \quad \text{Eqn 10-2}$$

式 10-1 和 10-2 就是所谓的“边缘（marginal）方程”，而信号总能量为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, t) dt d\omega \quad \text{Eqn 10-3}$$

它应当与边缘方程相一致。有多种分布，它们都满足式 10-1 和 10-2，但彼此却有不同的属性。

一般有两种主要类型的时频分析方法，这就是：

- 10.2 节讨论的线性技术
- 10.3 节讨论的二次（双线性）技术

## 10.2 线性时频表示

这是一种满足线性原理的表示。设  $x_1$  和  $x_2$  为两个独立信号， $T(t, f)$  为线性时频表示。如果

$$x_1(t) \Rightarrow T_{x_1}(t, f)$$

$$x_2(t) \Rightarrow T_{x_2}(t, f)$$

则有

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \Rightarrow T_x(t, f) = c_1 T_{x_1}(t, f) + c_2 T_{x_2}(t, f)$$

本节讨论两种线性时频分析技术：

- 短时傅里叶变换
- 小波变换

### 短时傅里叶变换（STFT）

研究时变信号的一种标准方法，称为短时傅里叶变换（STFT）。它包括选择相对短的观察周期，加时窗，然后计算该时间局域的频率。其后，让观察窗沿着总时间轴滑动，从而得到一系列的谱，如图 10-1 中竖向灰带所示。

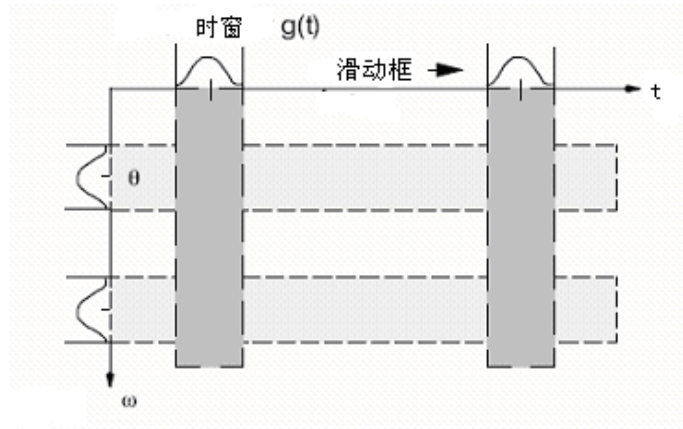


图 10-1 短时傅里叶变换

时间信号  $s(t)$  倍乘于窗函数  $g(t)$  后，定位在时间  $\tau$  的短时傅里叶变换式为：

$$STFT(\tau, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} s(t) g^*(t - \tau) dt \quad \text{Eqn 10-4}$$

如果可以这样来选择观察周期，使得在观察周期内，信号认为是平稳的，那么 STFT 这一技术就是可用的。然而，也存在一种广域信号，其频率成分的变化非常迅速，以至于对观察周期的要求，小到使人难于接受的程度。

这种技术的另一个缺点是，总是用同一时窗去分析不同时间局域的信号，从而保持固定不变的频率分辨率 ( $\Delta f = 1/T$ )。这种固定的关系，意味着必须在频率分辨率和时间分辨率之间做出交易。这样，如果你碰到一种由长时间处于准平稳的信号和混杂在其中的短促猝发信号复合成的信号，要想分析出其中每种信号的成分，就必须同时有细的时间分辨率和高的频率分辨率才成，而实际上却难于两全。

从另一个角度来考察和获得 STFT，就是将它表示为信号  $S(\omega)$  和窗函数  $G(\omega)$  积的逆傅里叶变换。这时式 10-4 就变为

$$STFT(\tau, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\theta\tau} S(\theta) G^*(\omega - \theta) d\theta \quad \text{Eqn 10-5}$$

与前面的讨论相类似，对“所有时间”信号属性的频率映象，就是图 10-1 中的水平灰带。这些带可看作是带通滤波器的通带，该滤波器的冲激响应函数与窗函



数相对应。

### 小波 (Wavelet) 分析 (WT)

当 STFT 由于采用不变的分析窗, 使得对某些非平稳信号的分析, 难于在时间分辨率和频率分辨率之间妥善地彼此兼顾时, 有一种可替换的方法, 这就是所谓小波分析。

实际上, 傅里叶变换式把信号分解为一系列基函数, 该基函数就是不同频率的正弦波。小波变换也是将信号分解为一系列基函数, 但基函数不再是正弦波, 而是所谓小波。这些基函数在时间上更加集中, 能得到信号能量更确切的时间定位。先定义一种称为“原象小波”的基函数, 再通过一个“尺度因子”来扩展或收缩该原象函数, 就得到分析所需的一系列基函数。

这促成我们定义连续小波变换。设  $h(t)$  为定位在时间  $t_0$  和频率  $w_0$  处的原象函数 (小波基), 那么变尺度基函数由下式给出

$$h_a(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} h\left(\frac{t}{a}\right) \quad \text{Eqn 10-6}$$

其中,  $a$  为尺度因子, 由  $w_0/w$  给定。

连续小波变换 CWT 由下式定义:

$$CWT(a, t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau \quad \text{Eqn 10-7}$$

其中,  $t$  为时间定位。

STFT 的缺点是采用恒定带宽的单一分析窗。结果在频率分辨率和时间分辨率之间有一固定不变的关系。要想改善其中一个, 只能通过牺牲另一个来实现。在时间—频率平面上绘图只能在固定的分格上绘出, 如图 10-2 (a) 所示。

采用尺度因子来扩展或压缩小波基, 形成在高频窄、低频宽的分析窗。图 10-1 将 STFT 比作一恒带宽的带通滤波器组。按相同的概念, 小波变换可视为一恒百分比带宽的滤波器组。即

$$\frac{\Delta f}{f} = \text{Const}$$

图 10-2 (b) 示意说明其频率分辨率和时间分辨率均允许变化, 即可实现多

分辨率的分析。

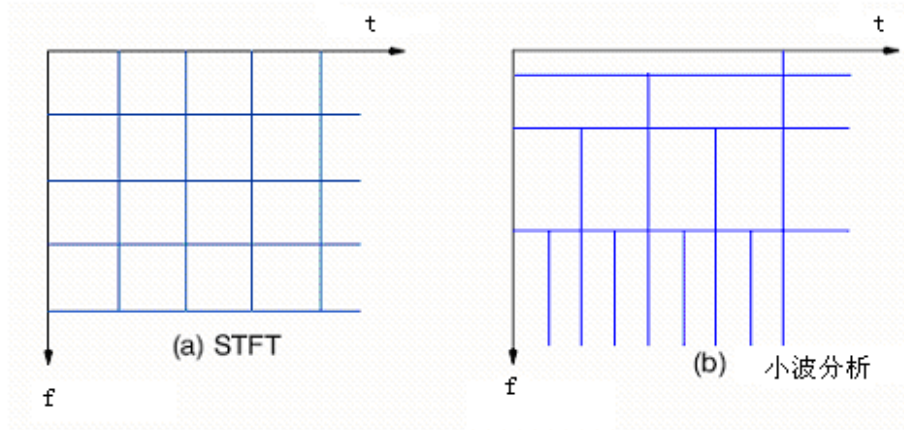


图 10-2 在时间—频率平面上绘图示意

事实上，这种信号分析方法是一种十分自然的途径。低频是一种随时间缓慢变化的现象，只需粗的时间分辨率，细的时间分辨率可能损害高的频率分辨率。高频则是随时间快速变化的现象，因而时间的尺度变得十分重要。对此，小波分析正好可以在损失频率分辨率的前提下，提高时间分辨率。这种类型的分析与人耳听觉过程也有着十分密切的联系，因为人耳的听觉类似于声学倍频程分析。

### 10.3 二次型（双线性）时频表示

虽然线性是我们希望有的性质，然而在许多情况下，我们更关心的，是如何用时频表示来阐明时频能量分布，而能量分布本身就是二次型信号表示。这种类型的时频表示可以揭示出许多“所希望的”数学性质，而这些性质对于研讨双线性原理的推论是很重要的。设

$$\begin{aligned} x(t) &\Rightarrow T_x(t, f) \\ y(t) &\Rightarrow T_y(t, f) \\ z(t) = c_1 x(t) + c_2 y(t) &\Rightarrow T_z(t, f) \end{aligned} \quad \text{Eqn. 10-8}$$

则

$$T_z(t, f) = |c_1|^2 T_x(t, f) + |c_2|^2 T_y(t, f) + c_1 c_2^* T_{xy}(t, f) + c_2 c_1^* T_{yx}(t, f)$$

上式右边前两项视为“信号项”，后面项为“干涉项”。干涉项需满足数学上的“所

希望”性质，譬如“边缘（marginal）方程”，但他们常常难于对结果做出解释。

二次型时频表示的两个特例是**谱图**（spectrogram）和**尺度图**（scalogram）。它们分别定义为短时傅里叶变换（STFT）和小波变换（WT）幅值的平方：

$$\text{谱图} = |STFT|^2$$

$$\text{尺度图} = |WT|^2$$

这两种表示的干涉项，仅当不同信号分量重叠时才存在。因此，如果信号分量在时间——频率平面上分开足够远的话，干涉项将实质上等于零。在两种表示都不满足边缘方程时，对于能量定位的定性评估来说，则没有多大关系。

为了充分解释时频分析结果，融合多项技术（STFT 或 WT 与其二次型一起做）常常是一个好办法，这使得可以避开“干涉项”，区分出“信号分量”。

### **Wigner -Ville 分布（WVD）**

在所有具有能量化解释的二次型时频表示中，WVD 满足大多数所希望的数学性质，实际信号  $s(t)$  的 WVD 定义为：

$$W(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s^* \left( t - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\tau\omega} s \left( t + \frac{\tau}{2} \right) d\tau \quad \text{Eqn 10-9}$$

其中， $t$  为局部时间。若以谱表示 WVD，则定义为：

$$W(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^* \left( \omega + \frac{\theta}{2} \right) e^{-j\theta t} S \left( \omega - \frac{\theta}{2} \right) d\theta \quad \text{Eqn 10-10}$$

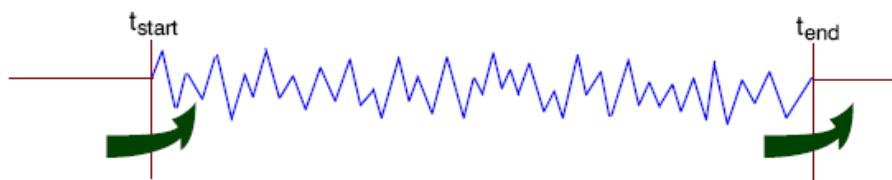
其中， $\theta$  为局部频率。

这种分布满足边缘方程，且为实值函数。而信号的时移和频移会引起 WVD 的相应偏移。

注意，在方程 10-9 中，计算任意时刻  $t$  的 WVD 值，实质上是以先于该时刻的数据段，乘上后于该时刻的数据段后，再积分求和的。据此不难理解 WVD 的多项特性。上述运算，也可想象为将  $t$  左边的数据段，摺叠到  $t$  右边的数据段的前端，其相重叠的数据彼此相乘，再积分求和，由此而得到 WVD 的值。

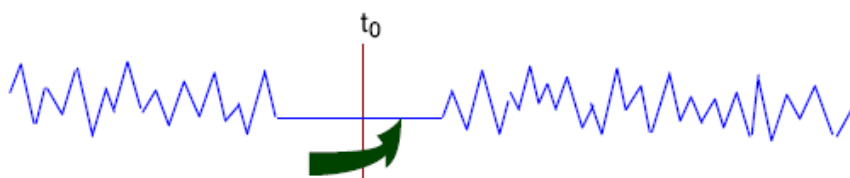
下图所示信号，有一起始时刻  $t_{start}$ ，由于  $t_{start}$  左边任意时刻的值均为零值，

可知时刻 $t_{start}$ 的WVD值也具有零值。同样理由，末端时刻 $t_{end}$ 的WVD也将具有零值。



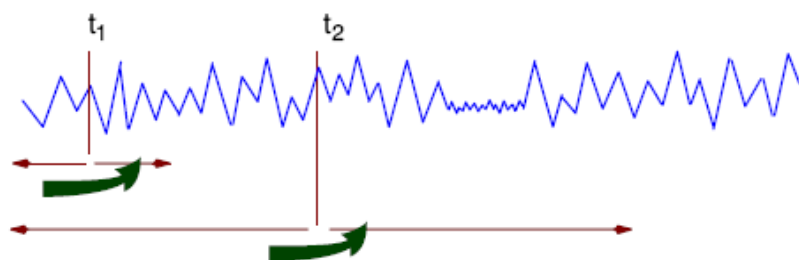
据此，WVD的第一个特性就是：对于有限长度的信号而言，相应于信号起始端之前及其末端之后所有时刻的WVD值均为零。在考虑频域上的限带信号时，同样可以说：超越该频率范围的WVD值均等于零值。

用同样的思路，可以解释为什么当某段时间的信号电平跌落至零值，而该时段的WVD值却不为零值。请观察下图所示情况：



在 $t_0$ 时刻，信号本身为零值，但其左边的数据段与其右边的数据段相乘及求和之后得到的WVD都是非零值。通常可以这么说：某时刻的信号值为零，但其WVD值却往往不为零，这一不良特性使得对信号的诠释造成困难，尤其是分析包含多种分量的信号时更甚。

由于相同的机理，在信号中并不存在噪声的区段，计算相应的WVD值时，却很可能需计及其它区段所存在噪声的影响，如下图所示：



该图中，在估算时刻 $t_1$ 的WVD值时，重叠段可不涉及噪声；但在时刻 $t_2$ 附近，即便该时刻信号不含噪声，但后面信号段的噪声却一定会影响该时刻的WVD

值。可见，噪声扩散到信号中很宽的时间段内。

用同样的理由，可解释沿频率轴出现的干涉项。尤其当信号在某时刻同时存在多个频率分量情况下，在各分量频率间的中间频率处，会形成频率干涉项。如前文所述，这些干涉项可依据其振荡属性容易辨认出来，并采用平滑技术缩小其影响。下文将讨论某些可实施的平滑技术。

## 广义化

WVD 的广义化，诱导出时频表示的统一形成。它们具有所希望的主要数学性质，譬如它们在时移、频移及时、频尺度展缩运算中的不变性。即信号的时移或频移导致信号时频表示中的等量偏移；而信号的尺度变化导致时频表示相应的尺度变化。

时频表示最普遍的类型可统一定义如下式：

$$T_x(t, f) = \iint_{t' f'} \Psi_T(t - t', f - f') W_x(t', f') dt' df' \quad \text{Eqn. 10-11}$$

其中， $W_x(t', f')$  为信号  $x(t)$  的 Wigner -Ville 分布，而  $\Psi_T$  则称为“核函数”。核函数的不同选择，决定了由一般定义所导出的各种特殊时频表示之基本特性。核函数也可视为对 WVD 所施加的平滑函数。由上述框架定义的技术，有下列几个典型特例：

- 谱图 (Spectrogram)

其核函数即等同于对 Wigner 分布所加的分析窗。

- 平滑伪 Wigner 分布 (SPWD)

其核函数为在时域和频域可分开的、各自独立的平滑函数。

- 伪 Wigner 分布 (PWD)

与 SPWD 相似，但不具有沿频率轴的平滑。这种分布也可视为“短时 Wigner 分布”。

- Choi-Williams 分布 (CWD)

其核函数为指数平滑函数。

移（时移和频移）不变类时频表示，也称为 **Cohen** 类时频表示，属于这一类表示的有谱图、Wigner -Ville 分布、PWD、SPWD……等。

---

时移及时间尺度不变类时频表示即是众所诸知的 **Affine** 类时频表示，属于这一类表示的有尺度谱、Wigner -Ville 分布、CWD……等。

## 10.4 参考文献

### 参考书

Time-frequency analysis :  
Leon Cohen - Prentice Hall - 1995 - 299 pp. - ISBN 0-13-594532-1

### 论文

Linear and Quadratic Time-frequency Signal Representations :  
F. Hlawatsch, G.F.Boudreaux-Bartels (IEEE SP Magazine, April 1992)

Time-frequency distributions - A review :  
Leon Cohen (Proc. of IEEE, July 1989)

Wavelets and signal processing :  
O. Rioul, M. Vetterli (IEEE SP Magazine, October 1991)

Time-frequency analysis applied to door slam sound quality problems. :  
H. Van der Auweraer, K. Wyckaert, W. Hendrickx (Journal de physique IV, May 1994)

# 第十一章 重采样

本章的关注点是固定重采样和自适应（或同步）重采样这二者。讨论这两种处理的一般原理，并提供了解这方面进一步信息的参考文献。

- ☐ 固定重采样
- ☐ 自适应重采样

## 11.1 固定重采样

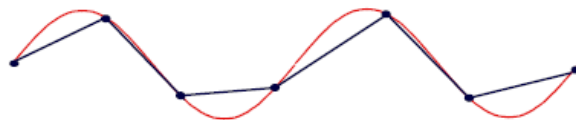
将已经按特定速率采样的信号，转换为不同速率的抽样，这样的过程就称为重采样。

需要重采样可能有多种理由。例如，一数字式磁带记录仪，以每秒 48000 个抽样的速率对信号采样，如果信号的带宽仅仅 200Hz，那么有每秒 500 个抽样

---

的速率已经足够了。也就是说,磁带机的采样率远远高于描述信号所需的采样率。在这种场合下,采样率可加于缩减,这一过程称为**选抽** (decimation) 或**降采样** (downsampling)。

从另一角度看,足于描述信号的所有频率分量,或者说它所包含的全部信息的恰当的抽样信号在直观上可能并不好,或者说在时域上表达得似乎不够充分(见下图)。



对于已经识别出其谱分量的信号,提高其采样率是为了产生更好的时间波形。当重采样涉及提高采样率时,处理过程就称为**插值** (interpolation) 或**升采样** (upsampling)。

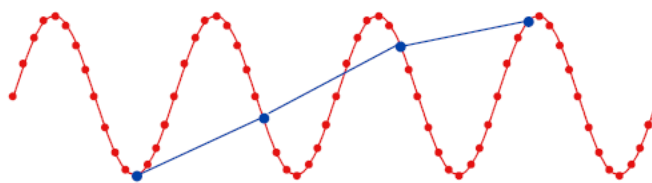


要求按规定速率采样的另一例子,是希望通过 D/A (数—模) 转换重放信号的情况。它可能要求抽样信号必须正好具有 D/A 转换器所支持的规定采样率。

本节讨论数字重采样处理的理论背景,并讨论实施重采样达到要求的精度必需考虑的一些因素。不过,也请注意,本节内容并非全面地论述这一命题。要想更透彻地了解这一命题,可阅读本章末列出的参考文献,尤其是其中的【3】和【4】。

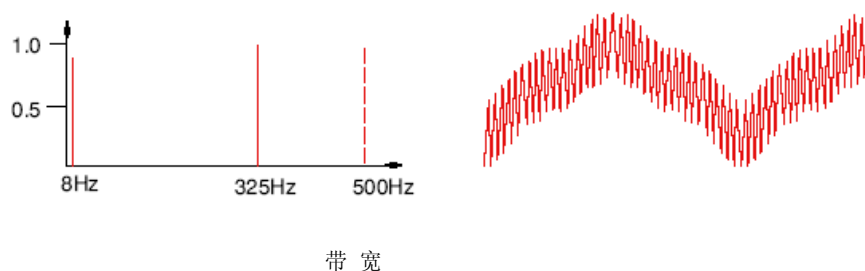
### 11.1.1 整数倍降采样

以因子  $n$  做整数倍的降采样,意味着对原数据保留住每隔  $n$  点的数据。不过,在做降采样处理时,需要注意避免出现频率混淆的问题。下图所示例子中,降采样因子为 13,而原始信号中,对应每一信号周期的采样点数为 16。这样,总采样信号的采样率低于信号最高频率每周期 2 个以上采样点的要求,从而会给出错误的结果。

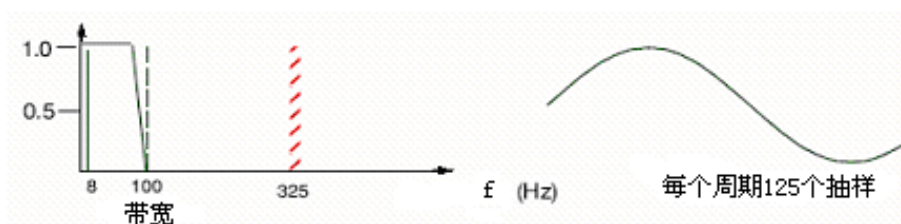


为避免重采样处理引起混淆，必须保证信号不包含任何高于采样率缩减后能描述的频率成分。为此，需采用一低通滤波器来做到这一点。下面以降采样因子为 5 的例子来说明这一问题。

设原始信号以 1 kHz 的速率采样，其许可分析的带宽为 500 Hz。假定信号中有两个谱分量，一在 8 Hz 处，一在 325 Hz 处。

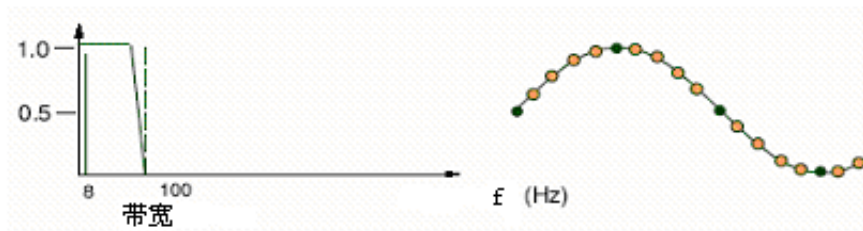


降采样因子为 5 意味着采样率缩减到 200Hz，其许可分析的带宽为 100Hz 。首先需要加一个低通滤波器，使数据的谱成分限制在 100Hz 带宽以内。也就是滤掉 325Hz 的高频分量，而保留下的时域信号为 8Hz 的分量，其每一周期仍然有 125 个采样点。

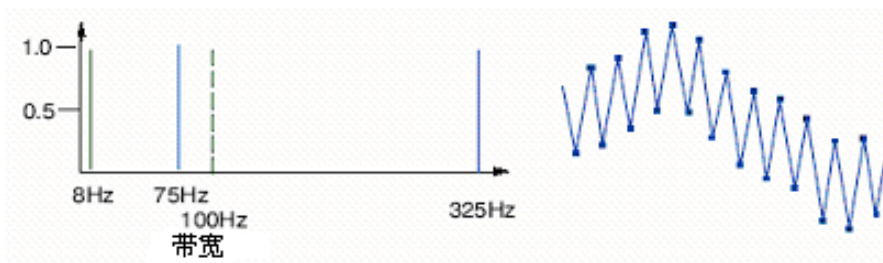


因子为 5 的降采样，是通过每相隔 5 个点取一个点来实现的。





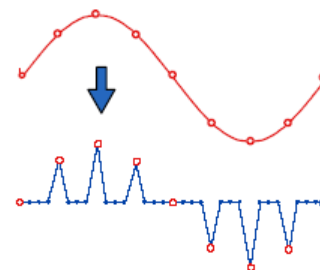
不加滤波器造成的后果如下：325Hz 的分量折叠到 100Hz 带宽的 75Hz 处，从而给出严重失真的结果。



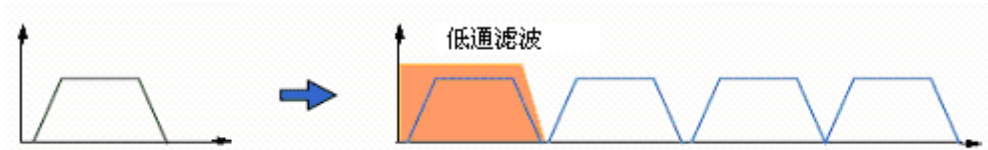
### 11.1.2 整数倍升采样

因子为  $n$  的整数倍升采样，涉及到在原有测量的采样点之间插入  $n-1$  个数据点。通常的做法是先令所有插入点的取值为零，然后需要加一适当的滤波器来消除这一处理所产生的谐波成分。

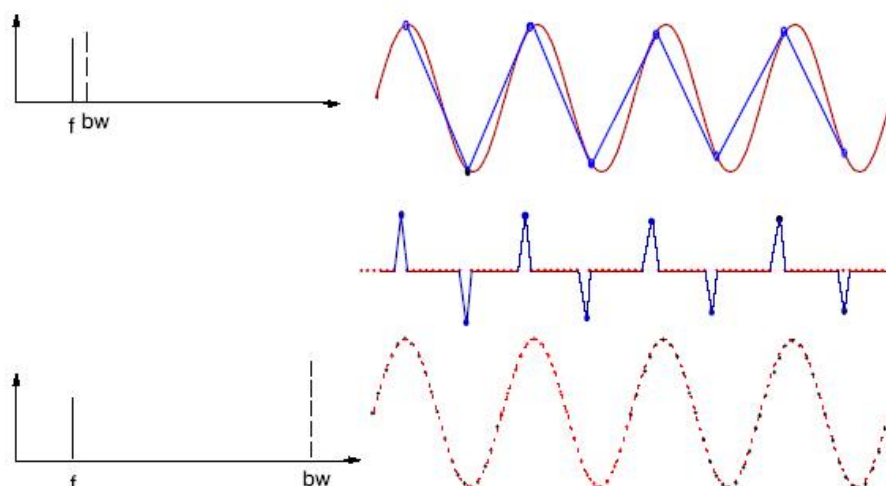
右图所示迹线以因子 4 作升采样，这意味着在现有数据点之间各添补三个零值。其结果是看起来时域信号产生严重失真。



可以证明，这种升采样信号的谱，由它原来的谱加上这个谱在所有更高频率上的“镜像”所组成（如下图）。



这种由插零引起的“失真”，可以通过加适当的低通滤波器来滤除，使其正好保留原信号带宽内的谱成分。对临界采样的正弦波作升采样以改善其时域表示的过程如下图所示。所谓临界采样，即采样率刚好大于每个信号周期 2 个采样，即满足耐奎斯特判据。虽然其时域表示显得粗糙，但对于频域的精确表示却已得到足够的信息。采用因子为 10 的升采样可以使信号的时域描述更加精确。



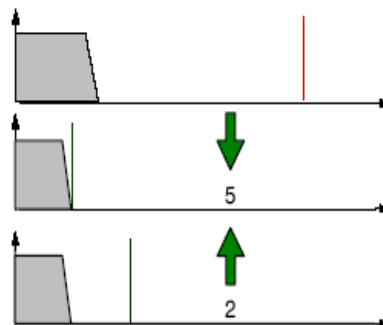
最终的信号保持原有信号相同的谱成分。信号每一循环中采样点数的增加，使得时域波形的描述变得更完美。

### 11.1.3 分数比率重采样

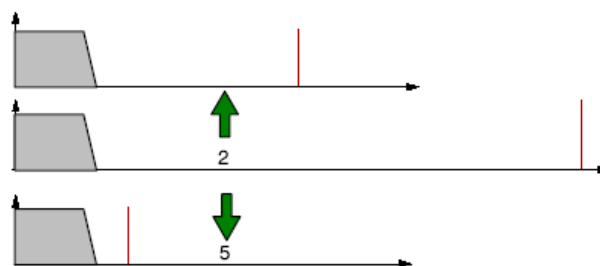
非整数比率的重采样可通过升采样和降采样的组合来实现。如因子为 2.5 的降采样，可先作因子为 2 的升采样再进行因子为 5 的降采样而达到。这两种处理的先后顺序是非常重要的，如果原始信号中感兴趣的谱成分在重采样过程中要求保持不变的话。

我们来讨论一上限频率为 300Hz 的信号，原采样率为 2 kHz 的情况。现在要求以 800Hz 的采样率作重采样，即以因子 2.5 作降采样。

如果信号先进行因子为 5 的降采样，则要求作截止频率为 200Hz 的低通滤波，结果 200Hz 至 300Hz 之间的信号分量都被滤掉，而后续的升采样已不可能恢复这些成分。



正确的步骤是首先升采样至 4 kHz（其分析带宽为 2 kHz）。采用截止频率为 1 kHz 的低通滤波器可保留信号的原本谱成分。第二步是作因子为 5 的降采样，并采用截止频率为 400 Hz 的低通滤波，这样，就保留了原本上限频率 300 Hz 的所有谱成分。



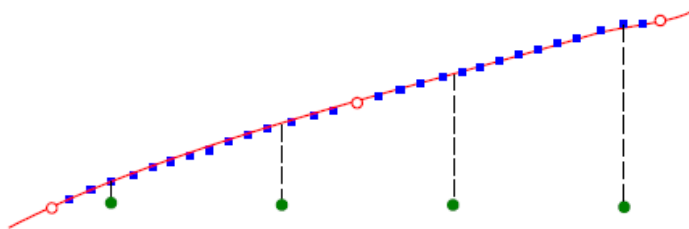
当需要一个非整数的采样因子时，重采样软件会确定一个优化的采样率，并确定重采样运算的顺序，以达到希望的采样率转换。

#### 11.1.4 任意采样率

对采样率的有些要求，可能不容易通过升采样和降采样的组合来实现。即便是要求的采样率可以表示为原有采样率的分数倍，却需要极高的中介升采样率，处理过程强加一繁琐的计算，而所得结果从数字上看却并非是很合理的。

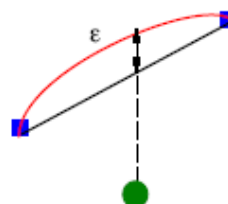
我们来讨论一个例子，假定某一测量的采样率为每秒 8192 个采样，现在要将其转换为 8000 Hz 的采样率，以便在数字式音频硬件上重放。理论上，这可以通过 125 倍升采样和 128 分之一降采样的组合来实现，但这样的计算，代价实在太高了！

对于这种情况，可采取另外的策略。在下面所示图中，信号的原始采样用白圈标出，要求的采样用圆形绿点表示，新采样率与原采样率之间不成整数比。



第一步是以较高的因子  $a$  作升采样。该因子称为“插值前升采样因子”，其默认值为 15。图中以方形蓝点表示升采样的插值。

第二步是对升采样后的信号实施线性插值，使新的采样率为目标采样率的整数倍  $b$ 。线性插值引致的误差  $\varepsilon$  将会小于以足够高的比率升采样后的源迹线长度。



## 11.2 自适应重采样

自适应重采样或同步重采样，是以从不同“域”考察信号特征为目的，对信号进行重采样。在机械领域，一个熟知的应用，就是以某一部件的转速测量为基础，萃取发动机振动信号中与“阶次”相关联的现象。该现象的分析和解释在某一个“域”内可能是困难的，而在另一个“域”则有可能变得清晰和明朗。

例如，信号处理中的同步平均，对于研究参与平均的不同信号段，在相同时

刻发生的重复现象来说，是必不可少的。采用同步采样技术，数据可转换到特殊的“域”内，在该“域”内，现象才真正是重复性的。

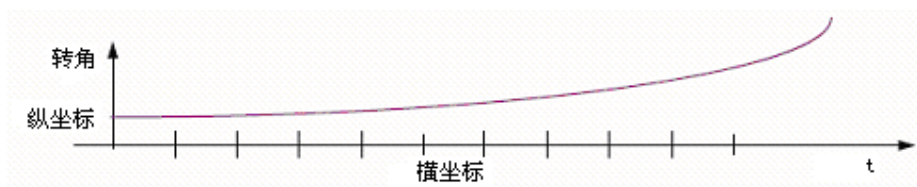
类似于傅里叶变换将时域数据转换到频域，以揭示其频率成分，也可以将角度域数据转换至阶次域。正如每秒发生两次的事件其频域为 2 Hz 一样，每一循环发生两次的事件与阶次为 2 相关联。举个例子，假定测量取自推测为恒定转速的发动机，而即便是转速的微小变化，仍有可能在频域表示法中，对应低阶次的谱分量发生锐变，而对于更高的频率则变化将显得模糊不清。小的转速变化导致频域中大的疏漏误差。

作为应用，有必要研究更高阶次的现象（譬如，以齿轮箱为例），变化的模糊不清使得难于甄别谐分量的阶次。如果将这样的数据转换到阶次域，则所有阶次的结果都可以清晰地显示出来，但任何谐振现象的存在仍然是模糊不清的。频域和阶次域表示互相补充，可以在最适合的分析域内获得有用的信息。自适应重采样使你能灵活地从一个域转换到另一个域。

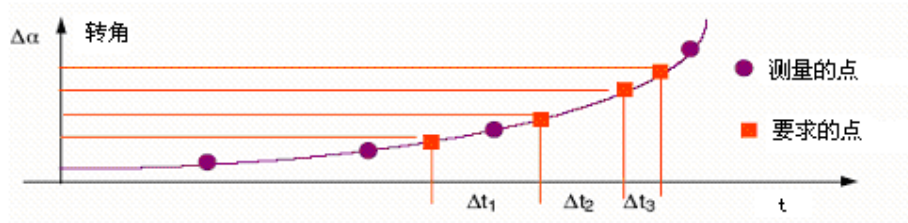
## 举例

作为例子，以下图说明时域到角度域的转换步骤。其原理适用于任意两个域之间的转换。

源信号必须和跟踪信号一起测量。跟踪信号最可能是转速信号，即由光电式、磁电式或电涡流式探头得到的脉冲串，它可以转换为转速（rpm）—时间函数，经过积分后还可以得到转角—时间函数。



从时域转换至角度域的情况下，要求有恒定的角度域分辨率（ $\Delta a$ ），其相应的时间间隔，对于按某时间间隔采样的振动测量数据而言，应该是可得到的。



最适当的角度域分辨率  $\Delta a$ ，基于能应对最低旋转速率。

作时域采样时，时间增量  $\Delta T$  是采样率  $F_s$  的倒数，即

$$\frac{1}{F_s} = \Delta T$$

根据耐奎斯特判据，能获得信息的上限频率为  $F_s/2$ 。自适应重采样遵守同样的规则：如果你的采样率不够高的话，就会损失信息；如果你用了过高的采样率，则不必要地增加了处理的工作量。

需要确定出与时域—频域转换要求的采样率  $F_s$  相对应的角度域分辨率  $\Delta a$ 。

自适应重采样要求一种变化的时间增量，如果转角—时间的关系不是线性的话。数据的损失将首先发生于最低 rpm（旋转速率）值处，目标是确定全部采样之间的角度分辨率  $\Delta a$  的阈值。

$$\Delta a = \frac{\left(\frac{da}{dt}\right)_{\min}}{F_s} = \frac{rpm_{\min}}{F_s}$$

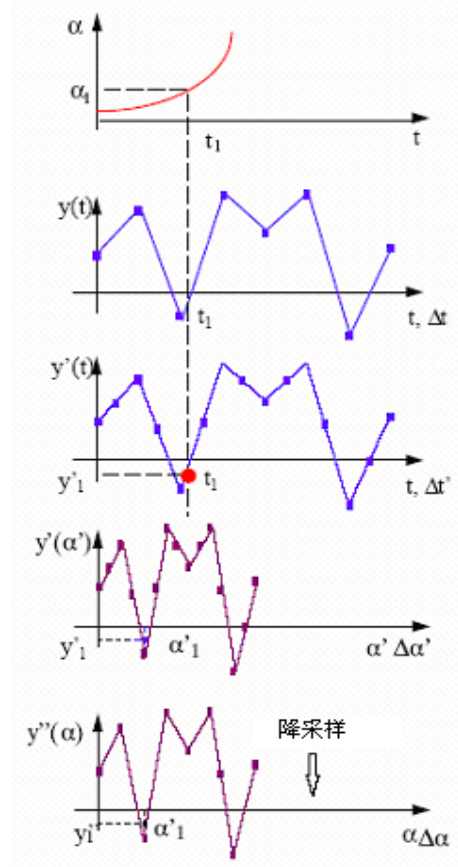
例如，设最低旋转速率 ( $da/dt$ ) 为 500rpm，而采样频率为 2000Hz，那么， $\Delta a$  的阈值就是

$$\Delta a = 500/2000 = 0.25 \{ \times (360/60) \} = 1.5 \text{ 度}$$

采用小于阈值的角度增量，会产生更多的角度域数据点，但不会增加任何信息，只意味着超量处理。采用高于阈值的角度增量，会导致低 rpm 范围内的信息损失，如果将数据转换回原来域的话，将不能恢复原来数据。

从角度域中要求的参考点  $a_1$  出发，由

$a(t)$  函数曲线找出相对应的时刻  $t_1$ 。然后，



在升采样，插值和降采样的所有各个步骤中，如何保持信号的谱特性问题，已经在前文讨论过。要求正确地应用这些步骤，同样必须注意所加的有限冲激响应（FIR）低通滤波器，应该有足够充分的阻带抑制和足够小的通带波纹，并得到适度的速度属性，以达到可接受的计算时间。重采样的原理已在 11.1.4 节讨论过。

---

## 11.3 参考文献

- [1] A. V. Oppenheimer and R.W. Schaffer  
Digital Signal Processing  
Prentice Hall 1975
- [2] L.R. Rabiner and B. Gold  
Theory and Application of Digital Signal Processing  
Prentice Hall 1975
- [3] R.E. Crochiere and L.R. Rabiner  
Multirate Digital Signal Processing  
Prentice Hall 1983
- [4] J.G. Proakis and D.G. Manolakis  
Digital Signal Processing: Principles Algorithms and Applications  
MacMillan Publishing 1992

## 第十二章 数字滤波器

滤波器的主要用途是从信号中消除不需要的频率成分。本章讨论数字滤波器设计的理论基础。包括

- ☐ 与数字滤波相关的基本定义
- ☐ 滤波器的分类及设计
- ☐ 滤波器的分析
- ☐ 滤波器的应用

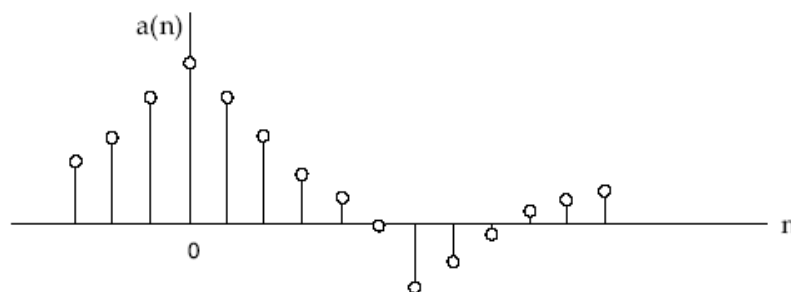
本章并非对该命题的全面论述，目标只是给出命题的初步认识。章末附录一部分参考文献。

### 12.1 与数字滤波相关的基本定义

#### 线性时不变（LTI）系统

离散时间信号给定  $t = nT$  时刻的离散值。数学上描述下图所示离散冲激序列幅值  $a(n)$  的一般表示式为：





$$\{a(n)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) u_0(n-m) \quad \text{Eqn 12-1}$$

其中  $u_0$  为单位脉冲（即冲激函数）。一离散时间系统是将一个序列转换为另一个序列的算法，如下文所述。在这种情况下，输入  $x(n)$  通过给定的系统  $\phi$  与输出  $y(n)$  相联系。



$$y(n) = \phi [x(n)] \quad \text{Eqn 12-2}$$

线性系统意味着输入到系统的组合  $ax_1 + bx_2$  产生的输出符合于  $ay_1 + by_2$ ，其中， $a$  和  $b$  为任意常数。

线性时不变系统意味着输入序列  $x(n-n_0)$  对任意  $n_0$  产生的输出均为  $y(n-n_0)$ 。

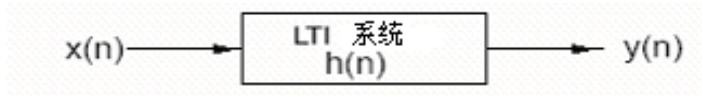
根据式 12-1，系统的输入可表示为：

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) u_0(n-m) \quad \text{Eqn 12-3}$$

如果将  $h(n)$  定义为系统的冲激响应（也称为单位样值响应），即对冲激序列  $u_0(n)$  的响应。那么，时不变  $h(n-m)$  即是系统对  $u_0(n-m)$  的响应。由于系统是线性的，它对序列  $x(m)u_0(n-m)$  的响应必然是  $x(m)h(n-m)$ 。因此，对  $x(n)$  的响应应为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n-m) \quad \text{Eqn 12-4}$$

式 12-4 中的运算,称为卷积运算,即  $y(n)$  等于  $x(n)$  和  $h(n)$  的卷积,记作  $x(n)*h(n)$ 。因此,一线性时不变系统输入与输出之间的关系,完全被系统的冲激响应  $h(n)$  所表征。



### 稳定性和因果性

稳定性和因果性对线性时不变系统的类型,给出更严格的界限,也更有重要的实用价值。

对于平稳系统而言,任何有界的输入必产生有界的输出。稳定性的充要条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad \text{Eqn 12-5}$$

对于因果系统而言,任何  $n=n_0$  的输出仅取决于  $n \leq n_0$  的输入。当且仅当冲激响应或单位样值响应在  $n < 0$  时为零,线性时不变系统才是因果系统。在这种情况下,单位样值响应可称为因果序列。

### 差分方程

有些线性时不变系统,其输入序列和输出序列的关系可表为常系数线性差分方程。用这种方法表示这种系统,提供了使系统成为可实现的手段,并提供适当的差分方程来揭示并表征系统的有用信息,诸如:固有频率,它们的多重性,系统的阶次,传递率等于零的频率等等。

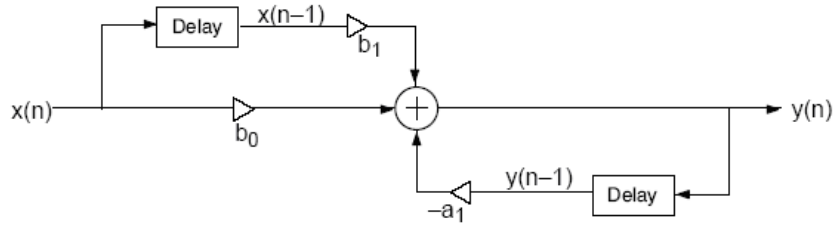
$M$  阶线性常系数差分方程的一般形式如式 12-6 所给:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i) \quad \text{Eqn 12-6}$$

例如,一个一阶差分方程由下式给出:

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \quad \text{Eqn 12-7}$$

它由下面的流程图来实现：



图中，Delay 表示一采样延迟。对输入和输出二者采用各自分开的延迟，这样的实现称为 Direct 形式 1。有关滤波器实现更详尽的资料可参看本章末所列举的参考文献。

## Z 变换

序列  $x(n)$  的 Z 变换，其定义如下式：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad \text{Eqn 12-8}$$

其中，Z 为复变量。Z 变换对于表征和操控序列是一种极有用的技术。

Z 变换所蕴含的信息可以用术语极点和零点表示。如果函数  $X(z)$  落在极点上的留数为  $R_1$ ，其中若  $R_1 \leq 1$ ，则意味着该系统是稳定的。

在 Z 平面上，线性时不变系统的总体表示式为：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \text{Eqn 12-9}$$

而  $H(z)$  可写成差分方程的一般形式：

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots b_N z^{-N}} \quad \text{Eqn 12-10}$$

$H(z)$  称为系统的转移函数。

## 滤波器的频响

讨论滤波器输入为  $x(n) = e^{jw_0 n}$ （相当于对频率为  $w_0$  的正弦波取样）的情

况。由式 12-4 得

$$\begin{aligned}y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\omega_0(n-m)} \\&= e^{j\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega_0 m} \\&= x(n) H(e^{j\omega_0})\end{aligned}\quad \text{Eqns 12-11}$$

$H(e^{j\omega})$  为滤波器的频响应函数，它给出系统对每一  $\omega$  值的传递率。

事实上，若系统冲激响应的 Z 变换中，令  $z = e^{j\omega}$  即得到  $H(e^{j\omega})$ ：

$$H(z)|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} \quad \text{Eqn 12-12}$$

这意味着滤波器的频响是系统对任意输入序列响应的重要指数，即系统的响应可表为输入序列  $x(n)$  有序的线性累加。

### 滤波器的频响与傅里叶变换的关系

线性时不变系统的频响应函数可视为  $H(e^{j\omega})$  的傅里叶级数表示式： $d\omega$

$$\begin{aligned}H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} \\h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega\end{aligned}\quad \text{Eqn 12-13}$$

其中，冲激响应系数也就是傅里叶级数系数。因此上面的关系式对于任何可求和的序列，都是成立的。对于  $x(n)$  和  $y(n)$  来说，下面关系式同样可用：

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \quad \text{Eqn 12-14}$$

即时域的卷积对应频域的乘积。

## 离散傅里叶变换 (DFT)

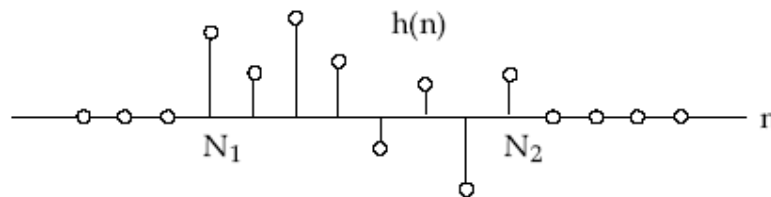
对于有  $N$  个抽样的周期序列而言，离散傅里叶变换式为：

$$H_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h_p(n) e^{-j(2\pi/N)nk} \quad \text{Eqn 12-15}$$

DFT 系数等同于相同序列的  $Z$  变换在单位圆  $N$  等分点的值。因此，DFT 系数是有限时间序列的单值表示。通过人为地增加等分单位圆的点数，就可以由 DFT 系数得到连续的频响函数。所以，通过附加等间隔的零采样值以扩展有限时间序列，傅里叶变换便可以任意分辨率求出。

### 有限和无限冲激响应滤波器

如果冲激响应  $h(n)$  是由  $N_1 < n < N_2$  之间有限个脉冲序列所组成(如下图所示)，且在该范围之外， $h(n)$  的值均为零，那么，系统就称为有限冲激响应滤波器或 FIR 系统。



通过延缓冲激响应和适当地取限值总量，这种 FIR 滤波器总是稳定的和可实现的。关于 FIR 滤波器的设计将在 12.2.2 节讨论。

冲激响应趋向  $-\infty$  或  $+\infty$ （或者双向趋于  $\infty$ ）的滤波器（或系统）称为无限冲激响应（IIR）滤波器。这种滤波器的设计在 12.2.3 节和 12.2.4 节讨论。

### 数字滤波器的使用

数字滤波器有下列一些方面的用途：

- 抗混滤波
- 平滑处理
- 噪声抑制
- 补偿（均衡）
- 改善疲劳/损伤特性

---

与模拟滤波器比较，它有如下一些主要优点：

- 更高的精度
- 一致的功效率和特性
- 很少物理限制
- 与硬件无关
- 容易在不同的处理算法中使用

## 12.2 FIR 和 IIR 滤波器设计

如上文所述，滤波器区分为两种不同类型：有限冲激响应（FIR）滤波器和无限冲激响应（IIR）滤波器。下表给出这两种滤波器的特性比较。

特性	FIR 滤波器	IIR 滤波器
稳定性	总是稳定的（极点等于 0）	如极点小于 1，则是稳定的
相位	线性相位（在语音处理等方面有重要应用）	非线性相位
效率	低 长度（磁带计数）必须较长， 以产生足够陡峭的截止	高 只需较低的阶次
对舍入误差的敏感度	低	高
启动瞬态时间	有限长时间	无限长时间
自适应滤波	容易	较难
实现	直截了当（直接形成）	更苛刻（直接或分级）

本章将讨论下列滤波器九种基本设计：

- FIR 单窗滤波器
- FIR 多重窗滤波器
- FIR 雷蒙兹（Remez）滤波器
- IIR 贝塞尔（Bessel）滤波器
- IIR 巴特沃斯（Butterworth）滤波器

- IIR 切比雪夫 (Chebyshev) 滤波器
- IIR 反切比雪夫 (Inverse Chebyshev) 滤波器
- IIR 考尔 (Cauer) 滤波器
- IIR 逆向设计滤波器

本节的讨论，将从介绍滤波器设计所用的基本术语开始，后面的几个分节将研究上面提到的各种滤波器的处理过程和涉及的参数。

### 12.2.1 滤波器设计的术语

#### 滤波特性

表述（低通）滤波器的术语如图 12-1 所标示。

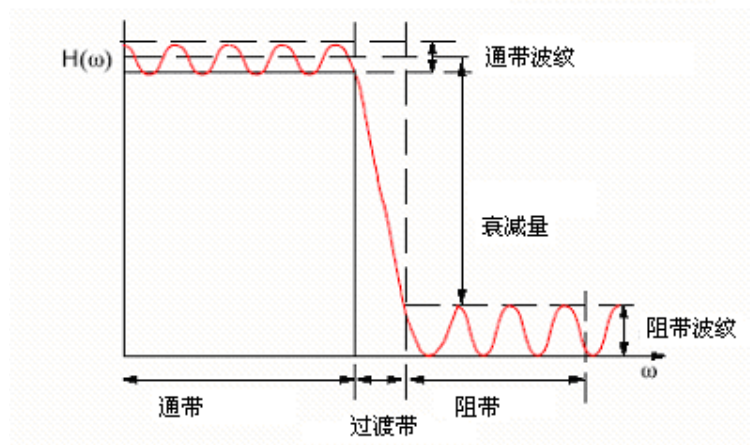


图 12-1 滤波特性

在滤波器设计中采用所谓正则化频率，其单位频率等于采样率，即

$$\text{正则化频率} = \frac{\text{频率 (Hz)}}{\text{采样率}}$$

因此，滤波器的工作频率范围为 0 至 0.5。而在单位圆上的角频率 = 正则化频率 \*  $2\pi$ 。

#### 线性相位滤波器

滤波器的频响包括幅值和相位，即

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{jq(\omega)}$$

对于线性相位情况，有  $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ ，其中  $-p \leq \omega \leq p$ 。这表明，线性相移的必要条件是冲激响应函数必须是对称的，即

$$h(n) = h(N-1-n)$$

而且在这种情况下，有  $\alpha = (N-1)/2$ 。

这意味着，对于任一  $N$  值，只有一个  $\alpha$  值可以使滤波器获得精确的线性相位。图 12-2 表示  $N$  为奇数和偶数时，要求的对称类型。

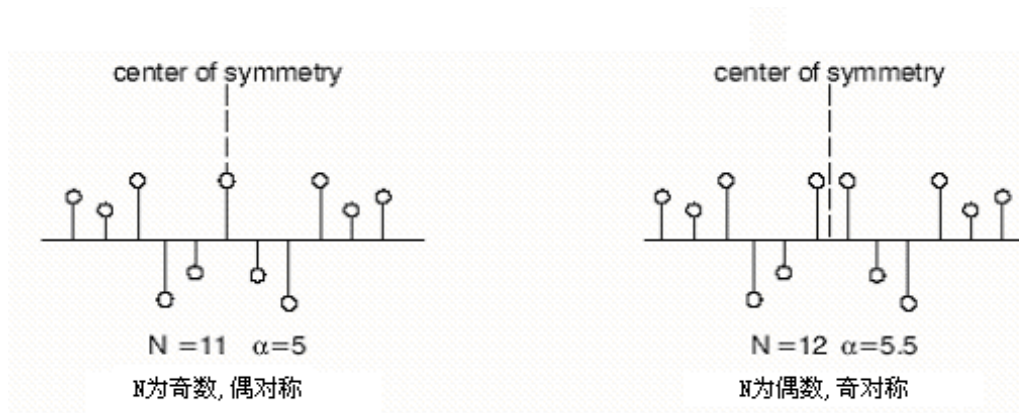


图 12-2  $N$  为奇数和偶数时的对称冲激序列

### 滤波器的类型

下图表示出几种基本类型的滤波器（低通、高通、带通、带阻），而用多重滤波可实现要求的任意特性响应。

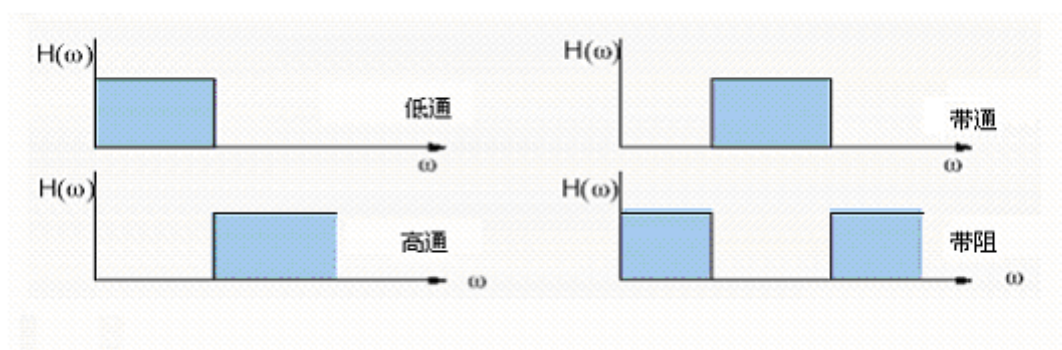


图 12-3 滤波器分类

另外，还可以设计出一种差分滤波器和一种希尔伯特（Hilbert）变换。下面就利用雷蒙兹（Remez）互调算法设计这二者的方法，作简要的叙述。



## 差分滤波器

这种滤波器是对信号作一阶微分，理想的差分器希望得到的频响为：

$$H_d(\omega) = j\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad \text{Eqn 12-16}$$

其单位样值响应为

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\omega e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\cos \pi n}{n} \end{aligned} \quad \text{Eqn 12-17}$$

这是一个逆对称的单位样值响应。然而，实际上并不要求理想情况，通带及其它技术指标的规定如图 12-4 所示。

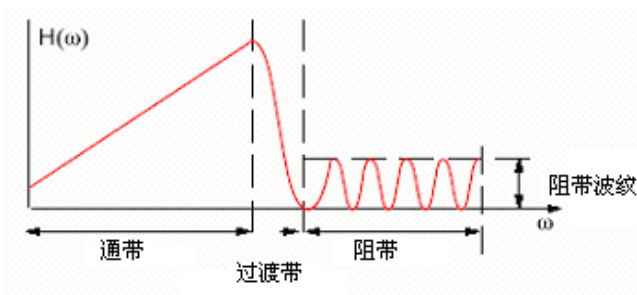


图 12-4 差分滤波器特性

## 希尔伯特变换

这种滤波器对输入赋予  $90^\circ$  的相移。理想的希尔伯特变换所期望的频响为

$$\begin{aligned} H_d(\omega) &= -j \quad 0 \leq \omega \leq \pi \\ &= j \quad -\pi \leq \omega \leq 0 \end{aligned} \quad \text{Eqn 12-18}$$

其单位样值响应为

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \int_0^{\pi} j e^{j\omega n} d\omega \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2(\pi n/2)}{n} \end{aligned} \quad \text{Eqn 12-19}$$

实际上并不要求理想情况，希尔伯特变换所期望的频响可规格化为：在  $w_l < w < w_u$  范围内  $H_d(w)=1$ ，如图 12-5 所示。

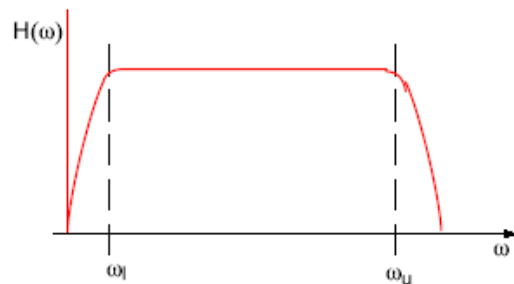


图 12-5 希尔伯特变换的幅频特性

## 12.2.2 FIR 滤波器的设计

### FIR 单窗滤波器的设计

滤波器的频响可展开为傅里叶级数：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad \text{Eqn 12-20}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

傅里叶级数的系数等同于滤波器的冲激响应。然而，这样的滤波器是不可实现的，因为它要求从  $-\infty$  开始，且无限长。需要做出使其变为有限的截断和作某一变换，以便使它变为可实现的。然而，简单直接的截断可能导致吉布斯（Gibbs）现象，即产生图 12-6 所示的过冲和波纹（振铃）效应。

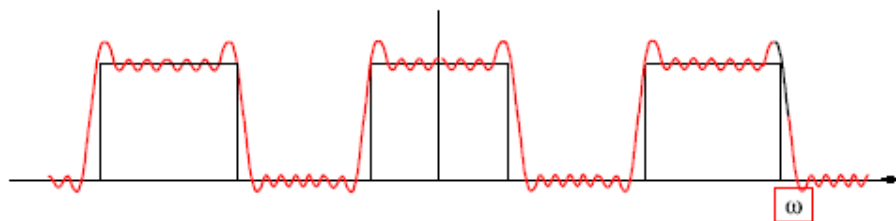


图 12-6 傅里叶级数截断引起的吉布斯现象

解决这个问题的方法是通过用窗函数来截断傅里叶级数。也就是通过有限长

的计权序列去修改傅里叶级数的系数，以控制级数的收敛。即

$$\hat{h}(n) = h(n)w(n) \quad \text{Eqn 12-21}$$

其中， $w(n)$ 为窗函数序列，而 $\hat{h}(n)$ 为给定要求的冲激响应。

窗函数的理想特性为：

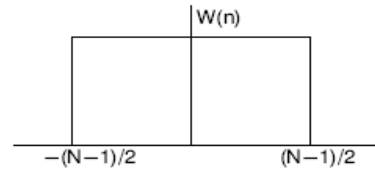
- 有窄的主瓣，主瓣涵盖尽可能多的能量。
- 当 $\omega$ 趋向 $\pi$ 时，旁瓣的能量很快衰减。

下面列举几种窗。

### 矩形窗

这等同于直接截断，即

$$W(n) = \begin{cases} 1 & \text{对 } \frac{-(N-1)}{2} < n < \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



### 汉宁（Hanning）窗

这种窗在截断宽度和消除波纹之间作出折衷。这时，有

$$W(n) = \begin{cases} a + (1-a) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & \text{对 } \frac{-(N-1)}{2} < n < \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

取  $a=0.5$

### 哈明（Hamming）窗

与汉宁窗的性质相类似，只是窗函数表示式中取  $a=0.54$ 。

### 凯塞（Kaiser）窗

凯塞窗函数近似于长球面波函数的简化，具有限时函数所期望的品质，其傅里叶变换接近于限带函数。它溢出到选定频带外的能量最小。它的数学式为：

$$W(n) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - [2N/(N-1)]^2})}{I_0 \beta}, \quad \text{对 } \frac{-(N-1)}{2} < n < \frac{N-1}{2}$$

其中， $I_0$ 为零阶贝塞尔（Bessel）函数， $\beta$ 为一常数，它的取值反映旁瓣波纹高度与主瓣宽度之间在频率上的折衷。

---

### 切比雪夫 (Chebyshev) 窗

这是一种类似于凯塞窗的另一个重要的最优窗，在有限时间序列意义上，其超出给定频率限的谱能量最小。这种窗函数是由切比雪夫多项式诱导出的，表述如下。

变量  $x$  的  $r$  次切比雪夫多项式记作  $T_r \equiv T_r(x)$ ，其中  $-1 \leq x \leq 1$ ，有

$$T_r(x) \equiv \cos(r \cdot \cos^{-1} x) \quad \text{及} \quad T_{r+1}(x) = 2x \cdot T_r(x) - T_{r-1}(x)$$

因而有  $T_0 = 1$

$$T_r(1) = 1$$

$$T_r(-1) = (-1)^r$$

$$T_{2r}(0) = (-1)^r$$

$$T_{2r+1}(0) = 0$$

切比雪夫窗函数  $W(n)$  由切比雪夫多项式的逆 DFT 得出，而多项式中变量  $x$  的值则由单位圆的  $N$  等分点得出。

### FIR 多重窗滤波器

这种滤波器使你可以设计出有任意滤波特性的滤波器，特别适合于设计窄带可选择性滤波器。它利用的是所谓频域抽样设计技术。

回顾前文中式 12-15，滤波器可由它的 DFT 系数来规定，而 DFT 系数可认为是单位圆  $N$  等分点函数值作  $Z$  变换的抽样值。

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j(2\pi/N)nk}$$
$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(2\pi/N)nk}$$
$$H(k) = H(z) \big|_{z=e^{j(2\pi/N)k}}$$

因  $e^{j2\pi k} = 1$ ，由以上关系式可证明有

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-N})}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{[1 - z^{-1}e^{j(2\pi/N)nk}]} \quad \text{Eqn. 12-22}$$

期望的滤波特性可以按单位圆  $N$  等分点在频率上抽样，给出期望的频响  $H(k)$ 。连续的频响可通过沿单位圆抽样值的插值来得到。

滤波器的系数通过对经插值的频响作逆 FFT 而得到。通过给定的窗函数去倍乘冲激响应函数使系数的端部逐渐减缩平滑至零值。

### FIR Remez 滤波器

利用 Remez 互调算法和切比雪夫近似理论，使滤波器实现对其期望的频响与实际的频响之间最优拟合，即在这一概念上它们之间误差极小化。利用 Parks-McClellan 算法能设计出一种等波纹最优 FIR 滤波器。

期望的频响表示为包含若干个频带的样板。在这些频带内添加密集的格子，采用上文叙述过的加窗方法实现多点 FIR 滤波器设计。

期望的频响与实际的频响之间的加权逼近误差，均匀地分布于通带和阻带，并通过线性最优技术使其最大误差极小化。图 12-7 说明一低通滤波器通带和阻带内的逼近误差。

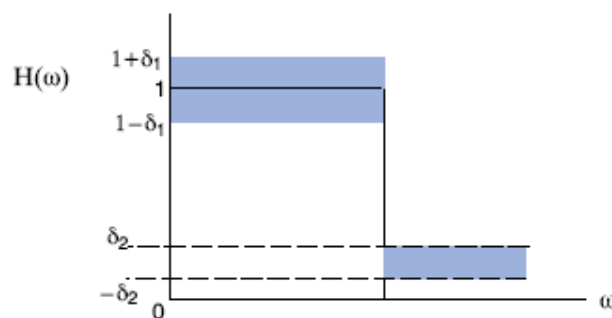


图 12-7 逼近误差

对优化的频响作逆 DFT 后，得出滤波系数。

### 加权

对于每一频带，逼近误差可以做作加权处理，这是通过给定一个权函数  $W(\omega)$  来执行的。在所有的频带取权函数值等于 1（单位），意味着在整个频带上误差均匀地分布。要想缩小某一特定频带的波纹，就需要对所有频带作相对加权，随之对感兴趣的频带应取相对较大的权值。规格化的做法是取阻带内的  $W(\omega)$  的值为 1，通带内则设置  $W(\omega)$  等于逼近误差比率  $d_2/d_1$ 。

### 12.2.3 利用原型模拟式滤波器设计 IIR 数字滤波器

以下几个小节叙述 IIR 滤波器的设计步骤。需要时可进一步阅读本章末所列参考文献。

#### 第一步：给定滤波特性

图 12-8 表述了对滤波特性的要求。当然，这些参数依赖于要求的滤波器类型。

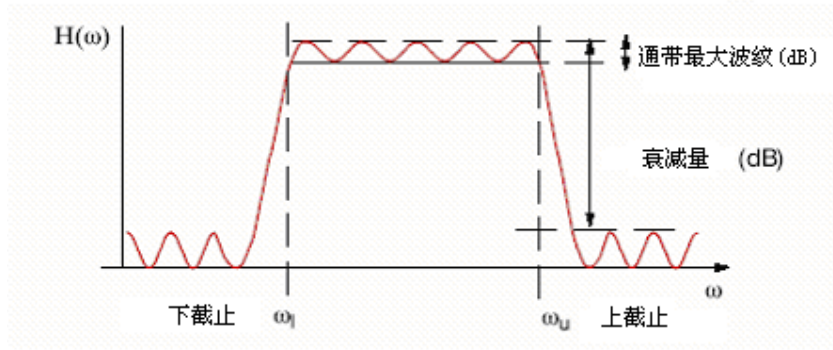


图 12-8 IIR 滤波器的技术规格

#### 第二步：计算模拟频率

设计原型低通滤波器应基于对数字截止频率  $\omega_c$  的要求。而首先要做的是将数字频率  $\omega_d$  转换为模拟频率  $\omega_a$ 。这要通过从数字 (z) 平面到模拟 (s) 平面的双线性变换来实现，其中，s 与 z 的对应关系为：

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad \text{Eqn 12-23}$$

当  $z = e^{j\omega T}$  (单位圆) 和  $S = j\omega_a$  时，

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}} \right) = \frac{2}{T} j \tan(\omega_d T / 2) \quad \text{Eqn 12-24}$$

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan(\omega_d T / 2) \quad \text{Eqn 12-25}$$

模拟式的频率 ( $\omega$ ) 轴是在单位圆一个循环上给出的，但却是按照非线性的方式得出。需要按下图所示方法补偿这一非线性 (翘曲特性)。

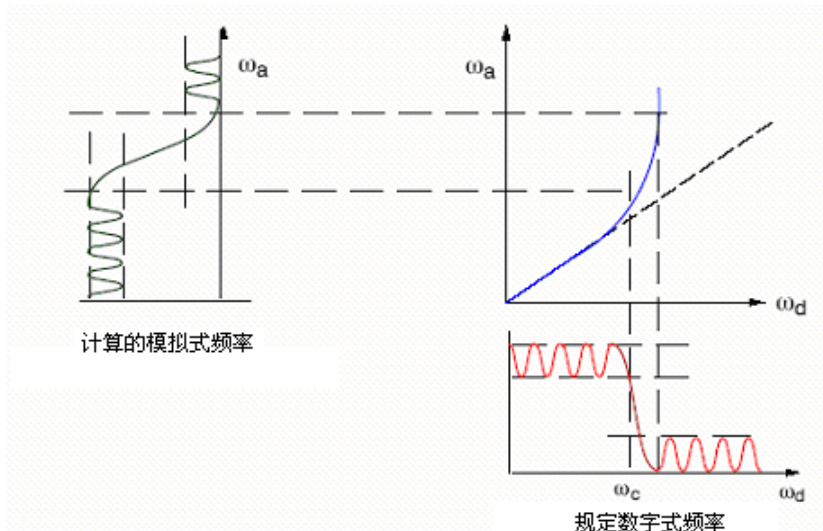


图 12-9 由数字频率到模拟频率的转换

### 第三步：选择适当的模拟滤波器

现在需要做的是选择适当的原型低通模拟滤波器，以产生要求的滤波特性。这可以从下面列出的滤波器品种中作出选择：

贝塞尔滤波器

巴特沃斯滤波器

切比雪夫（I 型）滤波器

反切比雪夫（II 型）滤波器

考尔（椭圆）滤波器

### 贝塞尔滤波器

在滤波器设计中，贝塞尔逼近的目标是获得通带内的平延时特性。贝塞尔逼近的延时特性远胜于巴特沃斯逼近和切比雪夫逼近的延时特性。然而，平延时是以损失阻带衰减为代价来得到的，甚至比巴特沃斯逼近的阻带衰减特性还要差。贝塞尔逼近很差的阻带特性，使得它没有多大实用价值。

贝塞尔滤波器有斜坡型的通带和阻带特性，且过渡带很宽，使得很难定义其截止频率。

其传递函数表为：

$$H(s) = \frac{d_0}{B_n(s)} \quad \text{Eqn 12-26}$$

其中， $B_n(s)$  为  $n$  阶贝塞尔多项式：

$$B_n(s) = (2n - 1)B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s) \quad \text{Eqn 12-27}$$

而  $d_0$  为一正则化常数：

$$d_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad \text{Eqn 12-28}$$

### 巴特沃斯滤波器

这种滤波器的特性是通带内的响应极为平坦，而且通带和阻带的特性都是单调下降。“极为平坦”意味着响应特性在原点的各阶导数都接近于零。巴特沃斯滤波器的平方幅值响应为：

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{s}{s_c})^{2n}} \quad \text{Eqn 12-29}$$

其中， $n$  为滤波器的阶次。令  $s=j\omega$  代入式 12-29 可得到滤波器的传递函数为：

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-\frac{s^2}{j\omega_c^2})^n} \quad \text{Eqn 12-30}$$

巴特沃斯滤波器是一种全极点滤波器，即在  $s = \infty$  时， $H(s)$  全都为零。当  $\omega/\omega_c = 1$  时，幅值等于  $\sqrt{2}/2$ ，亦即在截止频率出处幅值响应下降 3 dB。确定其最优阶次的方法在后文（148 页）另作讨论。

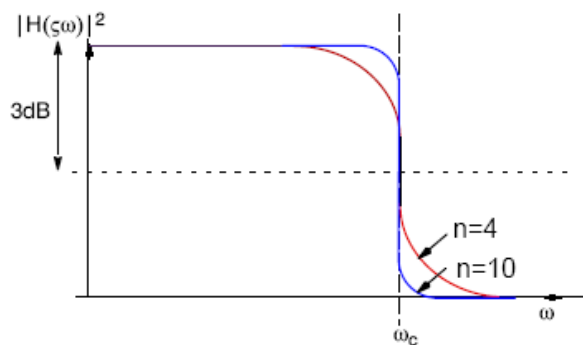


图 12-10 巴特沃斯滤波器的特性

### 切比雪夫（I 型）滤波器

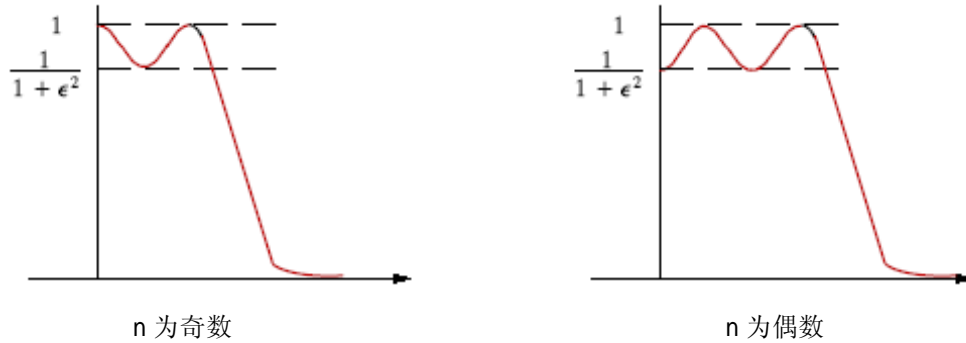
这是一种具有等波纹通带和单调下降阻带特性的全极点滤波器。其平方幅值



响应表示式为：

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega)} \quad \text{Eqn 12-31}$$

其中， $C_n(\omega)$  为切比雪夫多项式， $\epsilon$  为与通带内波纹度有关的参数， $n$  为奇数和偶数时波纹状况如下图所示：



对损失的要求相同条件下，切比雪夫逼近与巴特沃斯逼近相比通常要求较低的阶次，但却以等波纹通带为代价。切比雪夫滤波器的过渡带比相同阶次的巴特沃斯滤波器的过渡带要窄得多。

要想增强阻带的衰减效果，可通过改变通带逼近状况来达到，也就是使得相对于理想平坦特性的最大偏差量达到最小。可能达到的最大阻带衰减率为  $6 \times \text{阶次} \text{ dB/倍频程}$ 。

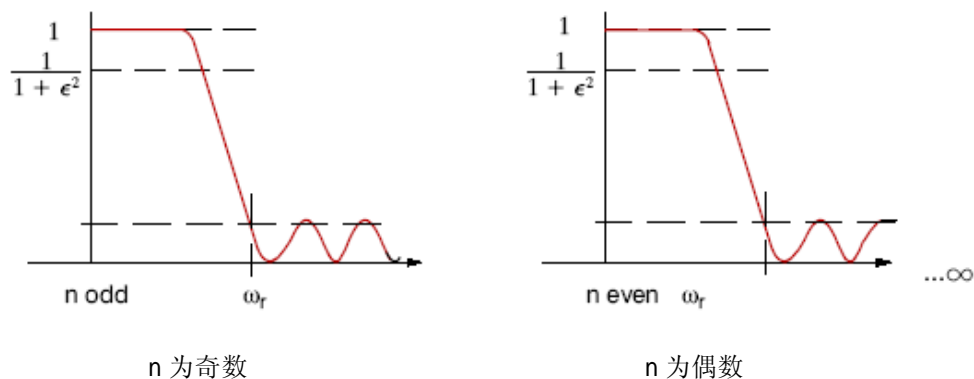
切比雪夫滤波器具有不均匀的群延时和明显的非线性相位。确定其最优阶次的方法在后文（148 页）另作讨论。

### 反切比雪夫（II 型）滤波器

这种滤波器既有极点，也有零点，有等波纹阻带，有很平坦的通带。其滤波特性为

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[ \frac{C_n(\omega_r)}{C_n(\omega_r/\omega)} \right]^2} \quad \text{Eqn 12-32}$$

其中， $C_n(\omega)$  为切比雪夫多项式， $\epsilon$  为通带波纹参数，而  $\omega_r$  为阻带衰减至某一规定值的最低频率。对应  $n$  为奇数和偶数的这些参数的意义如下图所示。

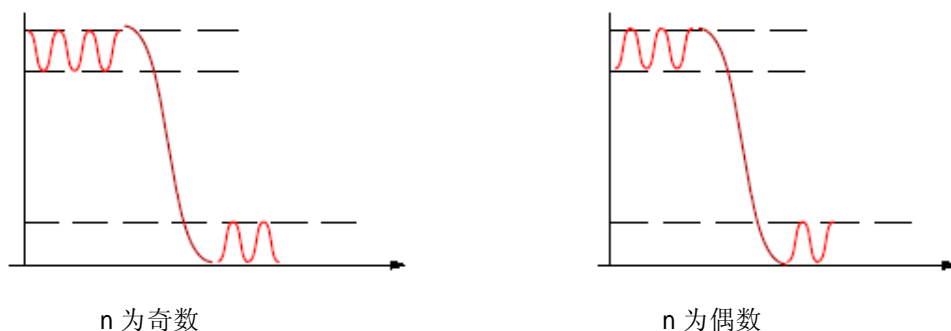


对于相同的损失要求，反切比雪夫逼近与巴特沃斯逼近相比较，前者要求较低的阶次，但以等波纹阻带为代价。

通过改变逼近状态来提高通带的平坦度，即对理想平坦特性最大偏离量的极小化。

### 考尔（椭圆）滤波器

这种滤波器对于给定滤波器阶次和波纹指标从感觉上看是最优的，它能实现从通带到阻带的最短过渡（即有最窄的过渡带），它具有等波纹的阻带和等波纹的通带。



其传递函数表示式为：

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\omega L)} \quad \text{Eqn 12-33}$$

其中， $R_n(\omega L)$  称为切比雪夫定额函数，而  $L$  则是用以描述  $R_n(\omega L)$  波纹特性的参数。确定  $R_n(\omega L)$  涉及利用雅可毕椭圆函数。 $\epsilon$  为一反映通带波纹的参数。

这一类滤波器是以在  $s$  平面的原点有最平的群延时为其特征。然而，这一特

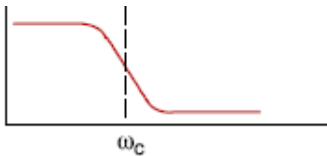
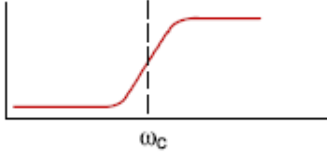
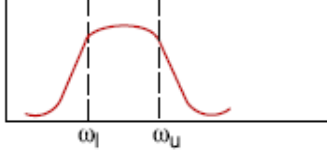
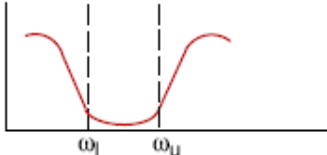
征不能一般地通过双线性变换予以保持，而且其阻带特性也较差。

在给定要求下，比之巴特沃斯逼近或切比雪夫逼近，考尔逼近通常要求较低的阶次。因此，考尔逼近给出最廉价的滤波器实现，但却以最差的延时特性为代价。

对于切比雪夫逼近和巴特沃斯逼近来说，阻带衰减率的最大可能是达到  $6 * \text{阶次} \text{ dB/倍频程}$ 。而考尔逼近则可以提供对阻带边缘更快的衰减。这就是为什么要用考尔逼近或椭圆逼近取代低效率的前两种逼近的根本原因。

#### 第四步：将原型低通滤波器转换为其它类型的模拟滤波器

首先是选择适当的、具有正则化截止频率  $\omega_c=1$  的低通滤波器原型，下一步是将这种低通滤波器再转换为具有你所希望的截止频率的各种模拟滤波器。为此，进行下列的转换：

转换类型	将 $s$ 替换为	要求的频响
低通 $\rightarrow$ 低通	$s \rightarrow \frac{s}{\omega_c}$	
低通 $\rightarrow$ 高通	$s \rightarrow \frac{\omega_c}{s}$	
低通 $\rightarrow$ 带通	$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_u \omega_l}{s(\omega_u - \omega_l)}$	
低通 $\rightarrow$ 带阻	$s \rightarrow \frac{s(\omega_u - \omega_l)}{s^2 + \omega_u \omega_l}$	

#### 第五步：通过双线性变换，得到所希望的数字滤波器

设计过程的最后一步，是作出  $s$  平面图形和  $z$  平面图形的双线性变换，以得

到希望的数字滤波器。

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Eqn 12-34

得到的最终结果是一组滤波系数 **a** 和 **b**, 存储进长度为 **n+1** 的向量组内。其中, **n** 为滤波器的阶次。如下文所述, 你可以很容易根据特定的设计要求, 确定出最优的滤波器阶次。

确定滤波器阶次

对于如图 12-11 所指出的一组给定的滤波器设计参数, 你可以确定出滤波器的阶次和截止频率。

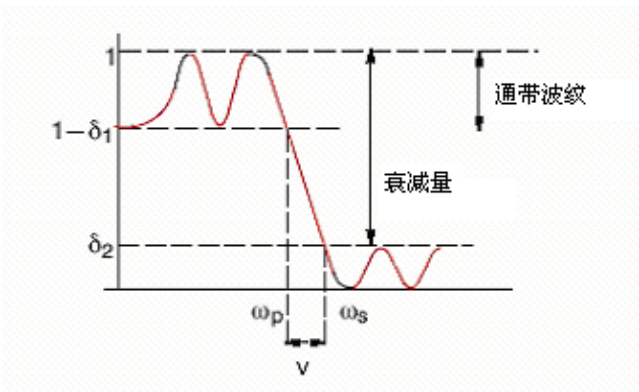


图 12-11 确定滤波器阶次需要的技术指标

通带波纹	确定波纹参数 $d_1$ , 表示为 dB 值。
衰减	按其定义求出波纹参数 $d_2$ , 也表示为 dB 值。
低频限和高频限	指低通或高通滤波器的两个边界频率 $\omega_p$ (通带的末端频率) 和 $\omega_s$ (阻带的起端频率)。而带通和带阻滤波器需要定义两对频率。
采样频率	指滤波器工作所必须的采样频率。

滤波器可以是上面所述的任一类型滤波器, 而原型则可以从巴特沃斯、切比雪夫 I 型、切比雪夫 II 型及考尔滤波器中任取其一。这样的过程不可以用在贝塞尔滤波器上, 因为从属于该滤波器的特殊性质使得滤波器的阶次会影响截止频率。

对滤波器阶次的最低要求取决于下面所述的一群参数。

与通带和阻带的波纹指标有关的一个滤波器设计参数为  $\eta$ ，其对应关系为：

$$\eta = 2 \frac{\sqrt{\delta_1 \delta_2}}{(1 - \delta_1) \sqrt{(1 - \delta_1^2) - \delta_2^2}}$$

另一个参数与通带截止频率  $\omega_p$ 、过渡带宽度  $\nu$  和低通滤波器的过渡比率  $k$  有关，

其中

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{\tan \omega_p/2}{\tan \omega_s/2}$$

模拟式                  数字式

最后一个参数与滤波器阶次  $n$ ，低通滤波器的过渡比率  $k$  和滤波器设计参数  $\eta$  有关。其关系式取决于原型模拟滤波器的类型。

$$n = \frac{\eta}{k} \quad \text{对巴特沃斯滤波器}$$

$$n = \frac{\cosh^{-1}(1/\eta)}{\ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{k}\right)} \quad \text{对切比雪夫滤波器}$$

$$n = \frac{K(k)K\sqrt{1 - \eta^2}}{K(\eta)K(1 - k^2)} \quad \text{对椭圆滤波器}$$

其中， $K(\cdot)$  为完全的第一类椭圆积分。

#### 12.2.4 IIR 逆向设计滤波器

‘滤波器逆向设计’的指令是采用一种直接的数字设计技术，而不是第 12.2.3 节描述的将已有的模拟滤波器数字化的技术。一种迭代法通常是在真实的频响与规定的或希望得到的频响之间作最小二乘误差拟合。

要求的频响按照一种规定好的模板给出，它包含需要的频率和幅值转折点，绘制成带小方格的图。

最终的输出为一组滤波系数。

---

## 12.3 分析

本节说明那些与滤波特性相关的信息。

### 滤波器的频响

滤波器的幅频和相频响应由式 12-20 中的系数 **a** 和 **b** 确定。

### 群延时

滤波器的一组群延时，提供视为频率函数的平均延时测量。滤波器的频响由下式给出：

$$H(z)|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

相延时的定义为：

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad \text{Eqn 12-35}$$

而群延时则定义为相位的一阶导数：

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad \text{Eqn 12-36}$$

如果通过滤波器后，信号的波形不失真，那么在整个频带内群延时应当是一常数。

对于线性延时而言，有  $q(w) = -aw$ ，其中， $-p \leq w \leq p$ 。则  $a$  既是相延时，也是群延时。

## 12.4 使用滤波器的两种方法

本节讨论怎么样对数据进行实际滤波处理。

### 直接滤波

这种方法，实质上就是让数据 **x** 按照由系数 **a** 和 **b** 定义的滤波运算产生滤波后的数据 **y**。

### 零相位滤波

这一选项，也是采用由系数 **a** 和 **b** 定义的滤波器对数据进行滤波运算，只是按照这一方法能产生无相位失真的滤波。在采用 FIR 滤波器的情况下，由于输出简单地按某一固定的取样点数延时，因此可以得到精确的线性相移。但在采用

IIR 滤波器时，相移则可能表现出明显的非线性。如果数据已经记录下来，而且可以完整地按顺序重放。那么这个问题可以通过所谓“时间倒流”的概念予以克服。要旨是数据被两次滤波，一次是数据正向重放，另一次是数据作逆向重放。这样做的结果，所有的相位失真可以消除掉，而幅值的滤波效应则被平方。

如果在  $n < 0$  时, 有  $x(n) = 0$ ，那么时间上逆序的数据的  $z$  变换为：

$$Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^0 x(-n) z^{-n} \quad \text{Eqn 12-37}$$

$$= \sum_0^{\infty} x(u) (z^{-1})^{-u}$$

令  $-n = u$

因  $X(z) = Z\{x(n)\}$

故  $Z\{x(-n)\} = X(z^{-1})$

时间逆向滤波可采用图 12-2 所示方法来实现。

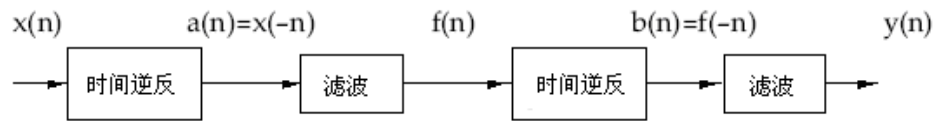


图 12-2 零相位滤波的实现

按照这一流程，有

$$A(z) = X(z^{-1})$$

$$F(z) = A(z) H(z) = H(z) X(z^{-1})$$

$$B(z) = F(z^{-1}) = H(z^{-1}) X(z)$$

$$Y(z) = H(z) B(z) = H(z) H(z^{-1}) X(z)$$

这样对输入数据的“等效”滤波作用为：

$$H_{eq}(z) = H(z) H(z^{-1})$$

取  $z = e^{j\omega}$ ，

$$H_{eq}(z) = H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2$$

即它的作用为产生零相移和幅值被平方。采用这种方法，会在起端和末端产生瞬

---

态过程，但通过仔细地匹配初始条件，可使其最小化。

## 12.5 参考文献

- [1] A. V. Oppenheimer and R.W. Schaffer  
Digital Signal Processing  
Prentice Hall 1975
- [2] L.R. Rabiner and B. Gold  
Theory and Application of Digital Signal Processing  
Prentice Hall 1975
- [3] R.E. Crochiere and L.R. Rabiner  
Multirate Digital Signal Processing  
Prentice Hall 1983
- [4] J.G. Proakis and D.G. Manolakis  
Digital Signal Processing: Principles Algorithms and Applications  
MacMillan Publishing 1992

## 第十三章 谐波跟踪

本章讨论关于利用卡尔曼滤波器进行谐波跟踪的概念。包括

- ☐ 理论背景
- ☐ 实用讨论

### 13.1 引言

许多情况下，要求跟踪某周期分量（阶次），而感兴趣的信号却可能湮没在噪声信号中，或者转速实在变化得太快。而当频率的变化速率很高时，某些效应会变得明显起来。在这种场合，实时的模拟滤波器和数字滤波器都受到分辨率的限制，原因是信号的瞬变性和超出处理的技术指标。而卡尔曼滤波器则有可能精确地跟踪那些隐蔽在杂乱噪声，和来自不明结构的周期信号中的、某已知结构产生的信号。

卡尔曼滤波器一个重要特性是它的非平稳性。它的功能在高旋转速率下保持



---

良好，因为系统的模型不是居于固定的时间频率分量的假定，而是自适应于系统本身的变化。对应记录（在用户指定的范围）内每一时域采样,自适应地导出系统模型的能力,使它摆脱了传统的时—频变换通常会遭遇到的时域和频率分辨率互相矛盾的制约。

### 使用条件

卡尔曼滤波器的一些重要性能：

- 从恒采样率信号中，以任意的分数阶次分辨率作阶次跟踪的能力
- 只需少量的测量抽样（甚至不足基本分量的一个循环），便可得到良好的阶次谱分辨率（如 0.01Hz）
- 旋转速率实际上不受限制
- 对于每一抽样点产生阶次值的能力
- 无相位失真

使用卡尔曼滤波器必须具备如下条件：

- 被跟踪信号（正弦波）的结构必须是精确地知道的
- 信号必须以恒定的采样率进行采集
- 在研究随转速而变化的信号时，即时的 **Rpm** 值必须精确地估计出

## 13.2 理论背景

利用卡尔曼滤波器去跟踪谐分量，涉及两个步骤：

### 1. 精确地确定 **Rpm** 的值

如果你要作阶次跟踪分析，那么你必须提供相应的 **Rpm**—时间迹线。

**Rpm** 可以用转速表信号求出，如果转速信号是脉冲串或扫描正弦函数，那么你必须将它转换为 **Rpm**—时间函数

### 2. 跟踪规定的波形

13.2.2 节将叙述执行跟踪功能的数学背景

13.3 节将讨论某些特殊的考虑

### 13.2.1 **Rpm** 的确定

卡尔曼滤波器在跟踪隐匿在噪声中的目标信号时，有极好的选择性和精度。

而对于系统精确建模而言，知道即时的 Rpm 值是非常关键的。否则可能会跟踪错误的分量。Rpm 的信息可以从转速通道获得，该通道与其他的测量通道是以相同的采样率采样的，得到的是周期估计小的统计变率。很明显，转速表的信号有低的变率，要想缩小周期估计的误差，需要对原始的转速信号进行重采样。

因此，处理的第一步是将脉冲串形式的原始转速信号转换成 Rpm—时间函数。

第二步是获取一同比函数。由于所有的机械系统总是存在一定的惯性，完全有理由相信，转速应该是时间的连续函数（不会发生突变），因此可以采用逼近边界条件的三次条样来得到所要求的“采样再采样 Rpm”转速函数估计。

### 13.2.2 波形跟踪

卡尔曼滤波方法涉及到建立和求解一对方程，即所谓结构方程和数据方程。

#### 结构方程

这一方程规定你所要跟踪的波形的形态或结构。以正弦波为例，频率为  $\omega$  的  $x(t)$  以时间间隔  $\Delta t$  取样，应满足下面的二阶差分方程：

$$x(n\Delta t) - 2\cos(2\pi\omega\Delta t)x((n-1)\Delta t) + x((n-2)\Delta t) = 0 \quad \text{Eqn. 13-1}$$

去掉时间增量符号  $\Delta t$  后，上式重写为：

$$x(n) - c(n)x(n-1) + x(n-2) = 0 \quad \text{Eqn. 13-2}$$

其中，  $c(n) = \cos(2\pi\omega\Delta t)$

当即时频率  $\omega$  已知时，方程 13-2 是一线性频率相关约束方程，是以已知的正弦波作为结构方程。

当被跟踪的正弦波其频率在变化，而且它还受到噪声和其它正弦信号的污染时，宜引入一个非齐次项  $e(n)$ 。这样，就可允许正弦波的频率、幅值和相位发生变化，而方程 13-2 则变为

$$x(n) - c(n)x(n-1) + x(n-2) = e(n) \quad \text{Eqn. 13-3}$$

$e(n)$  是确定的，但却是未知的项，它的引入使得允许偏离严格稳定的波。此外，

它还可用于定义  $S_e(n)$  作为非齐次结构方程的标准偏差。

## 数据方程

$x(n)$  为由结构方程所定义的时间历程，而测量信号  $y(n)$  则既包含与结构方程相配合的信号，也包括噪声和其他的周期信号。即

$$y(n) = x(n) + \eta(n) \quad \text{Eqn. 13-4}$$

其中， $\eta(n)$  包含噪声和频率与目标信号不同的其它周期分量。定义  $S_h(n)$  作为数据方程中噪声干扰项的标准偏差。

## 最小二乘公式

对于任意时间点  $n$ ，方程 13-3 和 13-4 给出对数组  $\{x(n) \ x(n-1) \ x(n-2)\}$  的线性方程。整理这些方程，给出一非加权形式的方程，其中结构方程放在上面一行，而数据方程放在下面一行。有

$$\begin{Bmatrix} 1 & -c(n) & 1 \\ & & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-2) \\ x(n-1) \\ x(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon(n) \\ y(n) - \eta(n) \end{bmatrix} \quad \text{Eqn. 13-5}$$

通过加一计权因子  $r(n)$ ，使方程 13-5 的误差均匀化， $r(n)$  定义为结构方程误差和数据方程误差的标准偏差之比：

$$r(n) = \frac{s_{\epsilon(n)}}{s_{\eta(n)}} \quad \text{Eqn. 13-6}$$

这样，方程 13-5 变为：

$$\begin{Bmatrix} 1 & -c(n) & 1 \\ & & r(n) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-2) \\ x(n-1) \\ x(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon(n) \\ r(n)(y(n) - \eta(n)) \end{bmatrix} \quad \text{Eqn. 13-7}$$

计权函数  $r(n)$  表达结构方程与数据方程之间的置信度，或者数据阶次存在的确定性。这一函数形成了卡尔曼滤波器的属性，并影响其跟踪特性。小的  $r(n)$  值使滤波器具有高的频率分辨率，但幅值估计的收敛时间长；相反，选择大的  $r(n)$ ，则幅值估计的收敛加快，而频率分辨率变低。

当对所有的时间观察点，都列出方程 13-7 时，得到一超定方程组，可以用标准的最小二乘法求解该超定方程组。

### 13.3 实用的讨论

本节讨论卡尔曼滤波器的某些实用特性，以及影响它们的参数。

#### 频率分辨率

在原理上，卡尔曼滤波器可以跟踪任意频率的正弦分量，频率上限为采样频率的二分之一。不过，在实际上，会发现对两个间隔密集的正弦波之分辨能力是与总的观察时间成反比的。结论是，观察时间应等于各分量间最小频率间隔要求的倒数。

#### 滤波特性

如上文所述，在方程 13-7 中采用不同的计权函数  $r(n)$ ，可以影响所取跟踪滤波器的属性。可通过一个谐波置信因子 HC 的指数来调整这一计权，HC 定义为计权因子  $r(n)$  的倒数：

$$HC = \frac{1}{r(n)} = \frac{s_{\eta}(n)}{s_{\epsilon}(n)} \quad \text{Eqn. 13-8}$$

HC 取高值，意味着谐波（结构数据）是可信的，并假定你的测量数据误差较大。这种情况下，滤波器具有窄带性质，即具有高的频率分辨率。但这是以幅值收敛时间长为代价得到的。HC 取低值，意味着测量数据的误差小，后果是滤波器的频带变宽，即频率分辨率下降，但具有幅值收敛快的优点。

下图表示取不同谐波置信因子 HC 的三种卡尔曼滤波器特性比较，主要是影响滤波器的带宽。

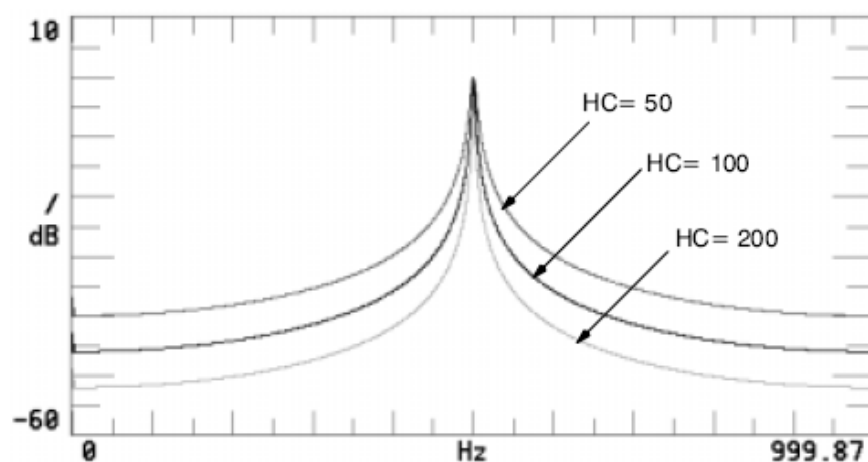


图 13-1 谐波置信因子的影响

## 带宽特性

方程 13-7 表明，作为谐波置信因子倒数的计权函数  $r(n)$ ，对应每一时间点可以取不同的值。这意味着滤波器带宽可作为被跟踪频率或阶次的函数而变化。

以频率定义带宽，意味着在低 Rpm 值内，滤波范围将包括若干阶次。

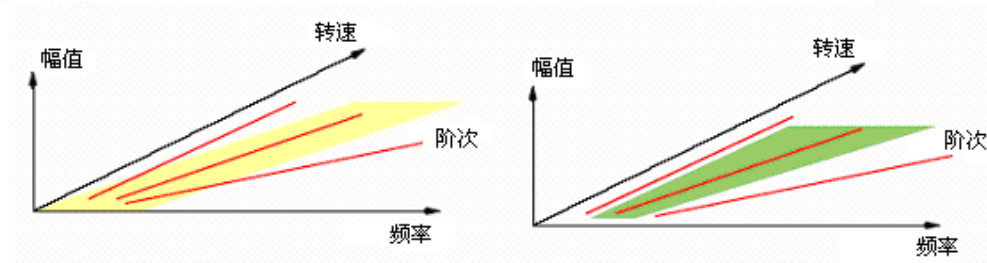


图 13-2 定义滤波带宽为频率和幅值的函数

## 允许的旋转速率

卡尔曼滤波器的公式假定被跟踪的信号频率超过三个连续测量点范围内保持为常值。当频率虽然有变化，但在超过三个测量点范围内，变化量小于滤波器带宽时，则不会有问题。

带宽的最小值等于观察时间  $T$  的倒数。如果采样率为  $F_s$ ，则旋转速率必须小于  $F_s / 2T$ 。

跟踪有密集阶次、具有高旋转速率的信号，要求以高采样率作长周期采样，从而导致繁重的计算工作量。然而，如果你考虑到转速变率为 75Hz/sec 的燃气涡轮，在超过 5 秒的降速过程中可能遇到的有效旋转速率的话，根据以上讨论，意味着要求的采样率为 750Hz。可以看出，即便这样一个极高的旋转速率下，对采样率并无任何有实际意义的限制。

## 第十四章 计数和直方图

本章讨论变量的计数方法，章末提供了解进一步信息的参考文献。内容有：

- ☐ 单一事件的计数和出现率
- ☐ 二维计数方法

### 14.1 引言

在做疲劳分析时，机械载荷或者热力载荷的实际测量，被用于评估和预测在产品的寿命时限内承受这种载荷的危险性。图 14-1 表示从一车辆部件上得到的 5 分多钟（330 秒）时间的载荷测量。



图 14-1 典型的载荷-时间数据

在疲劳分析中，特殊事件的出现率比载荷的频率成分更为重要。采用的方法是浏览时间历程，找出产生疲劳的典型事件，并记录它们的发生概率。典型事件的统计可以用图 14-2 所示载荷-时间历程的局部放大图来加以说明。

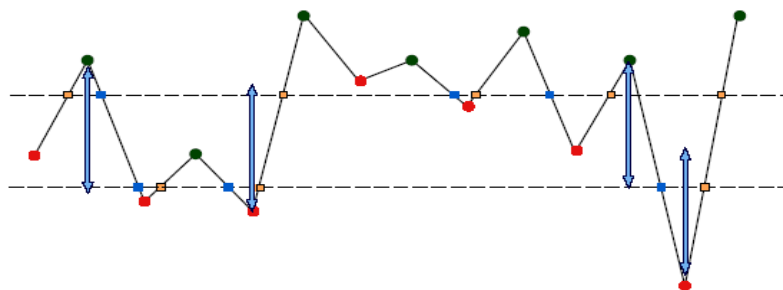


图 14-2 数据迹线中的典型事件

感兴趣的事件有：

- 规定量级的峰值出现率

在图 14-2 中，它们以圆黑点 “•” 表示，用“峰值计数法”得出，放在 14.2.1 节讨论。

- 超越规定量级时间出现率

在图 14-2 中，以浅灰或深灰色小方块表示，用“超越量级计数法”得出，放在 14.2.2 节讨论。

- 信号幅值变化超过某一量级的出现率

在图 14-2 中，以箭头表示，用“值域计数法”得出，见 14.2.3 节。

基于上面所述事件求取信号特征，分为两个处理步骤：

- 第一步，计数

浏览数据，找到上列事件之一的出现率。其作用是将整个时间历程缩减为一组机械载荷或热力载荷事件。

- 第二步，作直方图

这涉及到对每一事件的出现率作分类统计，得到多个规定值的出现率。

## 14.2 一维计数法

上面介绍了研究“单一事件”的计数或出现率方法。本节将对其作进一步的论述。

后文 14.3 节将讨论用于考察额外事件出现率的几种方法，这些方法被称为“二维计数法”。

### 14.2.1 峰值计数法

数据迹线的折返点称为“峰”（极大值）和“谷”（极小值）。对峰和谷在规定量级内出现的次数作出统计，如下图所示。你可以选择同时统计峰和谷（极值），或者只统计峰（极大值），或者只统计谷（极小值）。

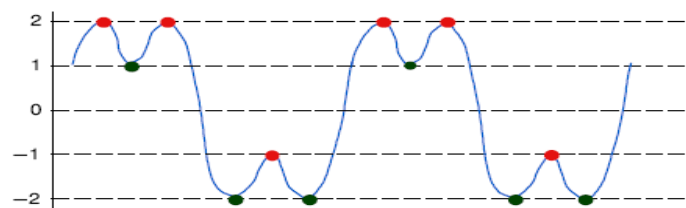


图 14-3 峰-谷计数

然后，让某（信号或载荷）量级上事件发生的次数作为该量级的函数，以直方图的形式表示它们的分布。按照上述三种类型的计数方法，对图 14-3 所示数据迹线的峰谷作统计归纳后，得到的直方图如图 14-4 所示。

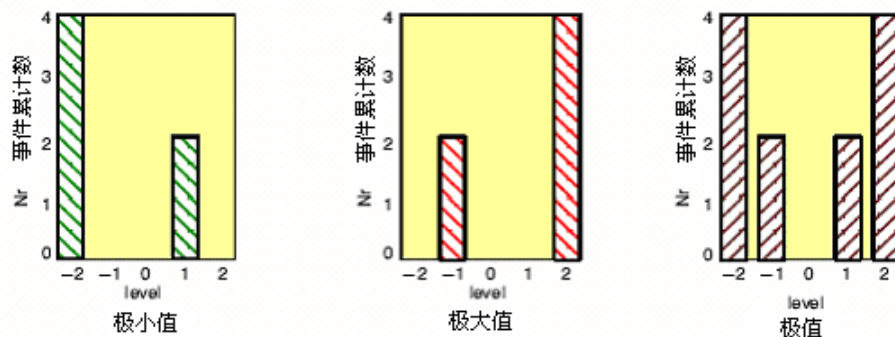


图 14-4 峰(极大值)、谷(极小值)和峰/谷(极值)的直方图

### 14.2.2 跨越量级计数法

这一步骤是统计信号幅值跨越不同量级的次数。可区分为向上（正向）跨越和向下（负向）跨越，如下图所示。你可以选择统计正向（升）跨越、负向（降）跨越或双向跨越三种不同类型。

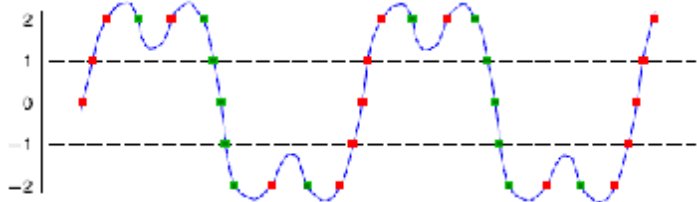


图 14-5 跨越量级计数

峰计数和跨越量级计数有密切的关系。正向跨越某一量级的次数就等于高于该量级的峰个数减去高于该量级的谷个数。这意味着跨量级计数可以从峰-谷计数结果中导出。

跨量级计数一般通过给定一计数栅顶线来初始化，而该顶线则取决于信号测量的设定量程。计数栅可以按纵坐标的物理单位给出标尺，也可以按纵坐标物理量设定量程的百分比给定标尺。

对图 14-5 所示数据迹线按照升、降和双向跨越三种方式进行计数，所得到的直方图如图 14-6 所示。



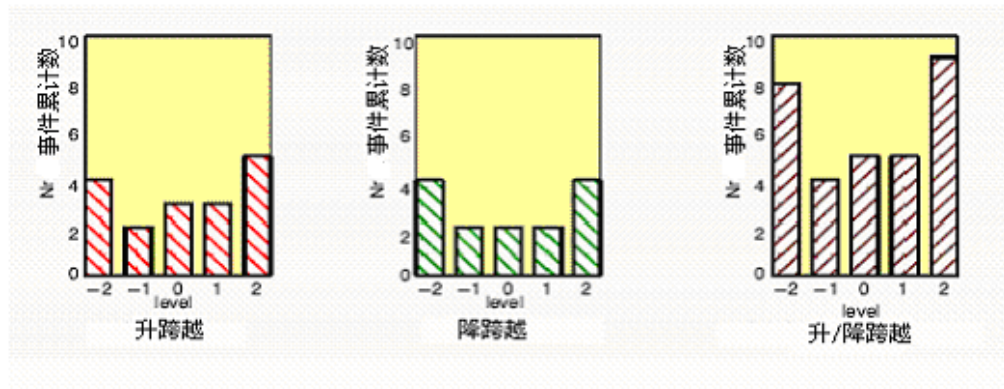


图 14-6 跨越量级计数直方图

### 14.2.3 值域计数法

值域计数法是观察连续峰谷序列间幅值之差，统计出符合规定值域变化量的次数。

#### 单值域计数

考察连续峰谷之间的差值（值域），如顺序升值则值域取为正；如顺序贬值，则值域取为负。

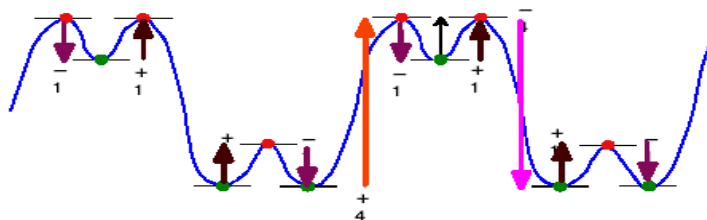


图 14-7 单峰—谷值域计数

作为值域的函数，生成出现次数直方图。

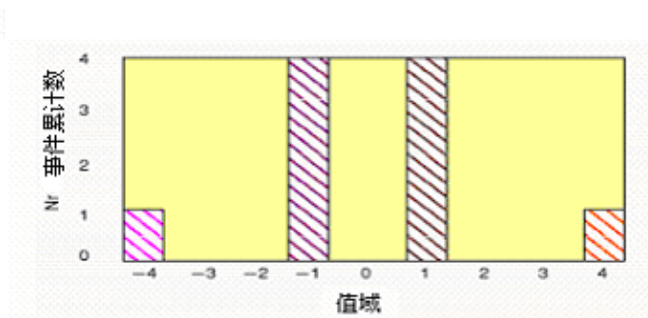


图 14-8 单峰—谷值域直方图

## 值域对计数

单值域计数（通常指的值域计数）简单而直截了当，但它对信号的小变化很敏感。因此，在分析如图 14-9 中左边所示信号时，单值域计数得到的结果是在相对小的值域上得到很大的统计次数。

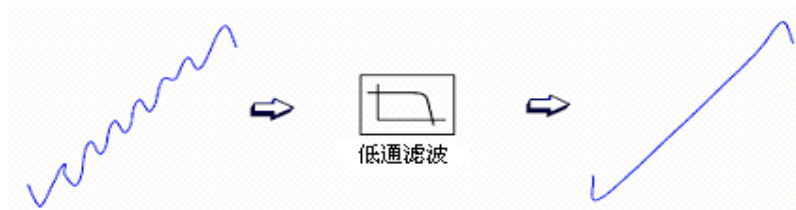


图 14-9 单值域计数对信号的小变化极敏感

如果让该信号通过一个滤波器，排除掉载荷的小变化，得到的信号将呈现在很大的值域上仅有一次统计次数。结论是，两种分析结果完全不同，而单值计数法对信号的小变化十分敏感。

值域对计数法可以克服这种敏感性。宁可不把信号分解为连续的许多值域，而将其理解为由一个“主体”信号变化（或主值域）与一个小的循环（值域对）相叠加。如果一对极值分隔的值域小于感兴趣的规定值域（ $R$ ），则将它们从值域计数中“剔除”。



图 14-10 值域对计数

## 14.3 二维计数法

到目前为止，讨论的计数方法，只考虑单一事件的出现率，而把它和可能影响该事件的任何其它事件完全分隔开。然而，考虑并存事件的不同统计方法也是有意义的，这就是本节将讨论的“二维计数法”。

### 14.3.1 “From—to” 计数 （“自…至…” 计数）

像  $j$  量级的峰伴随  $i$  量级的谷这样的“成对”事件是可能出现的。作为例子

我们来讨论图 14-11 中 A 量级谷与 C 量级峰的组合。

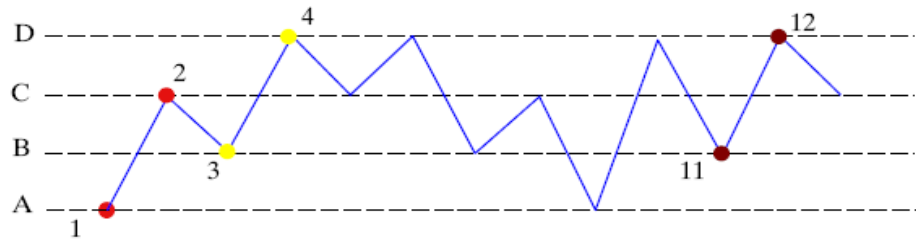


图 14-11 From—to 计数

在这个例子中，“From—to”序（1→2）、序（3→4）和序（11→12）是分别计数的，虽然它们的值域是等同的（ $C-A=D-B$ ）。

这样的“From—to”计数结果可以放入所谓马可夫矩阵  $A[i, j]$ 。元素  $a_{ij}$  给定  $j$  量级峰伴随  $i$  量级谷的次数。对图 14-11 中的事件作“From—to”计数，结果表示如下：

		From j			
		A	B	C	D
To i	A	X	0	1	0
	B	0	X	1	2
	C	1	1	X	2
	D	1	2	1	X

X
0
2
4

峰
  

1
3
2
0

谷

马可夫矩阵的左下三角部分纳入的是正向“From—to”事件，右上三角部分是负向转变的统计。左右两个附加列分别写入特定量级上峰和谷的计数结果。利用马可夫矩阵的上、下三角很容易得出这种峰、谷计数结果。

### 14.3.2 “Range-mean”（值域—均值）计数

二维计数法的另一例子是生成所谓“Range-mean”矩阵。变化量或值域（ $i-j$ ）和对应的平均值  $(i+j)/2$  结伴。

取代考虑 A 和 C 的实际量值，“Range-mean”计数法考虑的是  $C \rightarrow A$  的值（即值域 Range）和 B（ $= (A+C)/2$  即均值 mean），见下图。

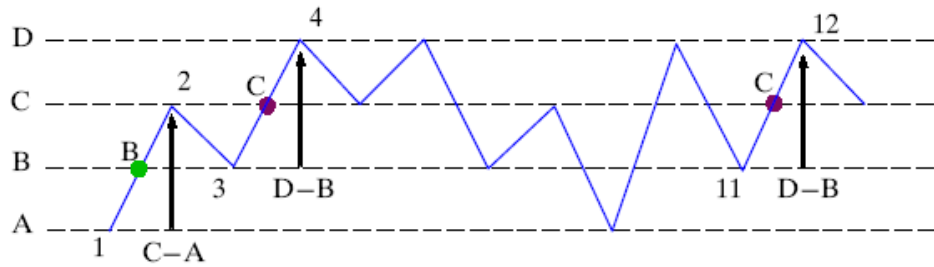


图 14-12 Range-mean 计数

Range、mean 和出现的次数之间的关系，可以用图 14-13 所示的三维形式的直方图来表示。

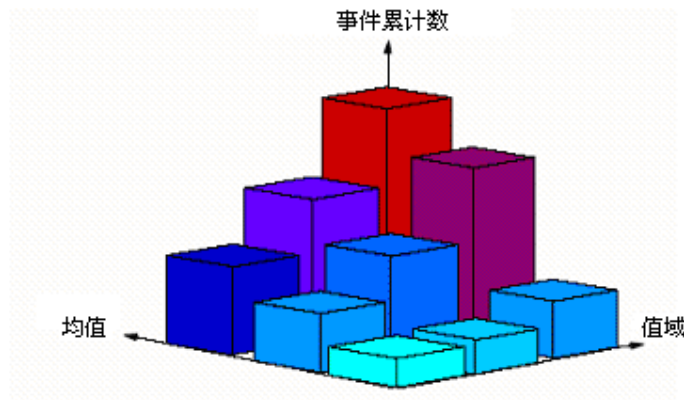


图 14-13 Range-mean 计数直方图

### 14.3.3 “值域对—值域”或“雨流”（Rainflow）计数法

“值域对—值域”计数法是一种特别受重视的二维计数法，尤其在疲劳损伤计算中更有重要意义。这一方法，也在日本得到同时和独立的开发，这就是所谓“雨流法”。这两种方法得到完全相同的结果，即它们都是通过将值域对计数原理和单值域计数原理相结合的方法，从信号中提取一样的值域对和值域。进一步的细节可参阅本章末列出的参考文献。

本质上，信号被分解为有一特定幅值（或值域）和特定均值的各个循环。所得结果可直接用于按照 Miner 准则做累计疲劳损伤计数，并用于做简单的裂纹扩展计算。整个过程涉及到三个步骤：

1. 将载荷的时间历程转换为峰-谷序列。

计数过程只考虑连续峰、谷的值，所有信号首先被压缩为峰-谷序列。做这一步时，通常加一个特定的“值域滤波器”或设置一“门坎”。对于尺寸为  $R$  的

值域滤波器而言，只有下面所述条件下的某值的峰（或谷）才被认可，这就是当信号从前一峰（或谷）值降低（或上升）至低于（或高于） $R$  给定的域值时。

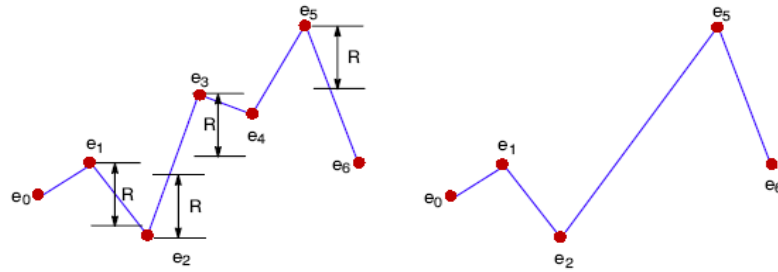


图 14-14 载荷历程转换为峰-谷序列

在图 14-14 所示例子中， $e_1$  作为一个峰被计数，因为在该峰的后面，信号的降低量超出值域滤波器尺寸  $R$ 。

在计入第一个峰后，下一步就是寻找有效的谷，图示情况下，就是  $e_2$ 。这一点作为谷的有效性在于信号此后上升到  $e_3$  的上升量超过值域  $R$ 。算法的下一步是搜索下一个有效的峰。首先碰到的峰是  $e_3$ ，但它不能作为一个有效的峰进入计数，因为在达到下一个极值点（ $e_4$ ）时信号的下降量不够充分。所以这一算法要求伴随出现的峰都要检验其是否是有效的峰。峰  $e_5$  认为是有效的，因为随后的信号幅值下降量大于值域  $R$ 。

在这个例子中，值域滤波器剔除了峰-谷序列中小的信号变化（ $e_3$  和  $e_4$ ）。

注意到增大值域滤波器的尺寸，只是从直方图上去掉那些幅值小于新的  $R$  值的转折点。这一点对于疲劳计算来说是重要的，因为它证明这种滤波对于值域滤波器的尺寸并不是很敏感的。

## 2. 全信号值域对扫描

计数步骤的这一阶段是取一组四个连续点，检验其是否含有一个“值域对”。如果没有，则通过向前移过一个数据点，连续搜索峰-谷序列。一旦检索出一个“值域对”，该“对”即被计数，并将其从序列中清除，此后，通过最靠近已经扫描过的点的两个新点，加上清除值域对后保留下的两个点，组成下一个新的四点组。事实上，早先扫描过的点被再次考虑，这清楚地区别出值域对-值域计数与单值域计数之间的不同。

### 3. 考虑“残数”(Residue)

在第二阶段的末尾，峰和谷的“残数”被舍去，而它们将根据单值域原理参与分析。实际表明，这些“残数”有其特定的形态，即一发散部分伴随一收敛部分。

#### 举例

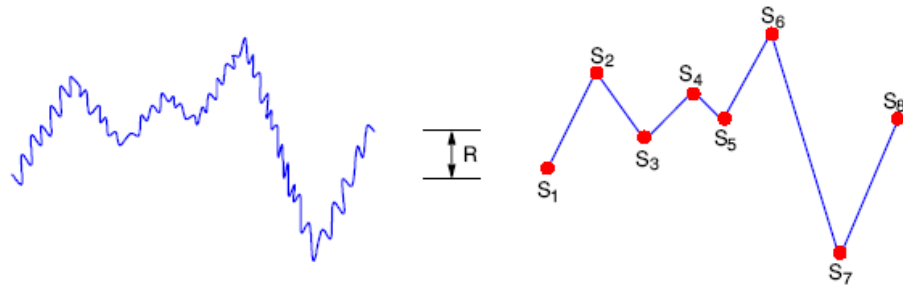
下面的例子说明值域对-值域法是如何操作的。

考虑的时间信号如下图所示

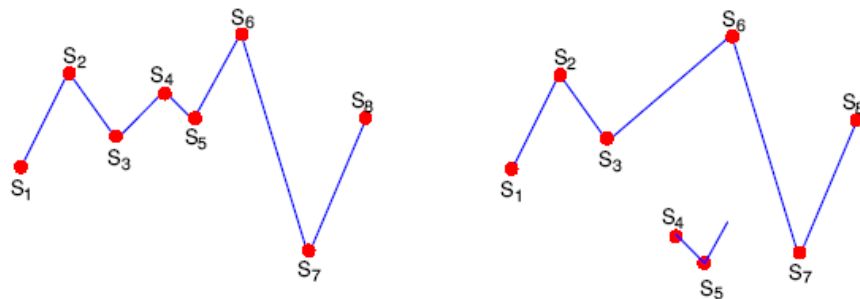
用一尺寸为  $R$  的值域滤

波器压缩峰-谷序列，得到的

峰-谷序列如下图所示



第二阶段（扫描值域对的存在），通过考察前 4 个极值开始。在第一组的四个点（ $s_1$ 、 $s_2$ 、 $s_3$ 和 $s_4$ ），如果两个内极值（ $s_2$ 、 $s_3$ ）落入被两个外极值（ $s_1$ 和 $s_4$ ）所覆盖的值域内，则计算一个“对”。如果不是这样（如同本例），那么算法朝前移动一步，即考虑极值  $s_2$ 、 $s_3$ 、 $s_4$ 和 $s_5$ 。考察结果还是不满这条件，则再考察 $s_3$ 、 $s_4$ 、 $s_5$ 和 $s_6$ ，这才计入一个值域对。



对于剩下的四个极值来说，已没有可以去掉的“对”了。这就形成所谓残数，它们被进一步作为单个“from-to-range”计数。

---

## 更多的考虑

值域对-值域计数结果依赖于一次分析数据记录的长度。因为最大的计数值域在最低谷与最高峰之间。最大变化通常称为“半截荷循环”。如果最低谷发生在接近非常长的载荷循环的起端,而最高峰则接近其末端,那么你应当考虑一下:从物理意义上看,是否应该将这样的事件组合在一起,使得一个循环有这样长的时间。

这种计数法对所加值域滤波器的尺寸不敏感。仅当值域滤波器尺寸从  $R$  增至  $3R$  时才有作用,例如,在一次 From-to 计数中,对于  $|from - to| < 3 * R$  情况,所有元素变为零。换句话说,值域滤波器尺寸的选择并非是关键性的。

## 14.4 参考文献

- [1] Fatigue load monitoring of tactical aircraft, de Jonghe J.B., 29th Meeting of the AGARD SMP, Istanbul, September 1969.
- [2] The monitoring of fatigue loads, de Jonghe J.B., IACS-Congress, Rome, September 1970 .
- [3] Statistical load data processing, van Dijk C.M, 6th ICAF Symposium Miami, Florida USA, May 1971 .
- [4] Fatigue of Metals subjected to varying stress, Matsuisaki M. & Endo T., Kyushu district meeting, Japan Society of Mechanical Engineers, March 1968 .
- [5] Cycle counting and fatigue damage, Watson P., SEE Symposium of 12th February 1975, Journal of Society of Environmental Engineers, September 1976.



## 第四篇 分析与设计

### 第十五章 模态参数估计

本章讨论模态参数估计的基本原理。内容包括：

- ☐ 模态参数的定义及其获取
- ☐ 模态参数估计应注意的因素
- ☐ 各种参数估计技术
- ☐ 静态补偿模态计算

#### 15.1 模态参数估计

通过模态分析，提供一组表征结构动力特性的模态参数。这些模态参数可用以建立所谓模态模型。图 15-1 示意地说明了获取模态参数的方法和步骤。

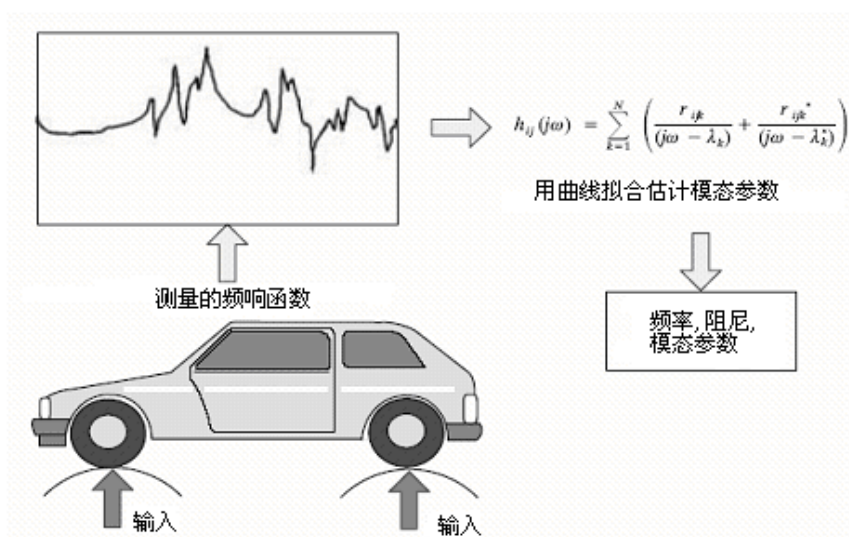


图 15-1 模态参数的获取

如果结构是现有的，并允许对它进行测试，则可以给定一个参数模型来描述测试数据。而作为出发点的测试数据，通常是频响函数（**FRF**），或者它在时域上的等价函数—冲激响应（**IR**）。**IR** 的测量值与模态参数之间的关系，由下式表示：



$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N \left( r_{ijk} e^{\lambda_k t} + r_{ijk}^* e^{\lambda_k^* t} \right) \quad \text{Eqn 15-1}$$

相应地，**FRF** 的测量值与模态参数之间的关系式则为：

$$h_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^N \left[ \frac{r_{ijk}}{(j\omega - \lambda_k)} + \frac{r_{ijk}^*}{(j\omega - \lambda_k^*)} \right] \quad \text{Eqn 15-2}$$

其中，

$h_{ij}(t)$  为响应（输出）自由度  $i$  与参考（输入）自由度  $j$  之间的 **IR**

$h_{ij}(j\omega)$  为响应自由度  $i$  与参考自由度  $j$  之间的 **FRF**

$N$  影响分析频带内结构动力响应的振动模态数

$r_{ijk}$  第  $k$  阶模态的留数

$\lambda_k$  第  $k$  阶模态的极点

符号 “\*” 表示复共轭。

极点的值可表示为 15-3 和 15-4 的形式：

$$\lambda_k = \delta_k + j\omega_{dk} \quad \text{Eqn 15-3}$$

其中，

$\omega_{dk}$  第  $k$  阶模态的有阻尼固有频率

$\delta_k$  第  $k$  阶模态的阻尼因子

或

$$\lambda_k = -\zeta_k \omega_{nk} + j\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} \quad \text{Eqn 15-4}$$

其中，

$\omega_{nk}$  第  $k$  阶模态的无阻尼固有频率

$\zeta_k$  模态阻尼比

可以证明，留数可表为下式那样三个量的积：

$$r_{ijk} = a_k v_{ik} v_{jk} \quad \text{Eqn 15-5}$$

---

其中,

$u_{ik}$  响应自由度  $i$  的第  $k$  阶模态振型系数

$u_{jk}$  参考自由度  $j$  的第  $k$  阶模态振型系数

$a_k$  复数比例常数, 其值取决于模态振型的标尺

请注意, 模态振型系数可以是实数 (实模态), 也可能是复数 (复模态)。如果是实数, 则比例常数  $a_k$  可表示为:

$$a_k = \frac{1}{2jm_k\omega_{dk}} \quad \text{Eqn 15-6}$$

其中,  $m_k$  为第  $k$  阶模态的模态质量。

极点、固有频率 (有阻尼和无阻尼)、阻尼因子或阻尼比、模态振型和留数, 这些参数就是通常所谓的模态参数 (即用于描述结构模态的参数)。

参数估计的基本问题是调整 (估计) 模型的参数, 以便由模型所预估的数据尽可能紧密地逼近 (通过曲线拟合) 测量数据。有多种模态参数估计技术可供选用, 这些技术将在下文逐步讨论。

### 关于单位的说明

频率和阻尼因子的量纲都是时间量纲的倒数, 因此它们都以 Hz 为单位。

出现在式 15-1 和 15-2 中的留数与测量数据有相同的量纲。千万请注意! 留数是有量纲的, 这一点极重要。留数等于模态振型系数的积与比例常数的组合 (式 15-5), 而模态振型系数本身却是无量纲的, 不是绝对 (即带标尺的) 幅值。因此, 留数的量纲或单位应视为由比例常数赋予的。

最后, 在多输入分析法中, 留数表示为模态振型与模态参预因子的积。该积是有量纲的, 是一种绝对幅值。而由于模态振型系数认为是无量纲的, 因此, 模态参预因子的单位也是与留数的单位相同。

## 15.2 分析方法的分类

本节讨论模态分析的一般原理。内容包括:

- 单自由度与多自由度方法, 15.2.1 节。

- 局部估计和整体估计方法，15.2.2 节。
- 多输入分析法，15.2.3 节。
- 时域分析和频域分析方法，15.2.4 节。
- 声振分析的特殊情况，15.2.5 节。

模态参数估计的技术细节放在 15.3 节叙述。

### 15.2.1 单自由度和多自由度方法

如果在给定的分析频带内，可认为仅有一个模态是主要的，那么这个模态的参数可以单独地求出。这样的假定称为单自由度（SDOF）假定。

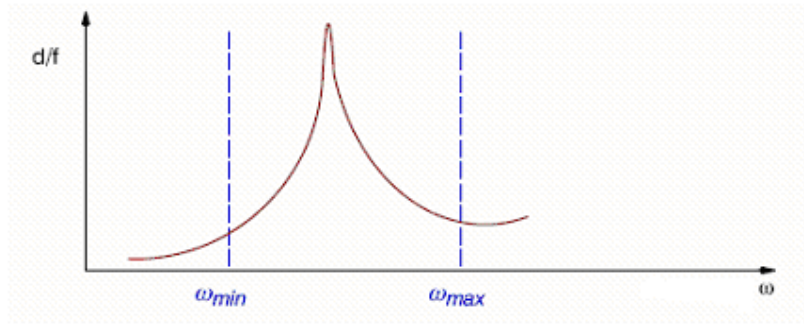


图 15-2 单自由度假定

在 SDOF 假定下，式 15-2 表示的 FRF 可简化为式 15-7。这里，我们假定 FRF 数据具有位移除以力的量纲：

$$h_{ij} = \frac{r_{ijk}}{(j\omega - \lambda_k)} + \frac{r_{ijk}^*}{(j\omega - \lambda_k^*)} \quad \text{Eqn 15-7}$$

$$\omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max}$$

通过在式中引进所谓上、下残余项，可补偿分析频带以外的邻近模态对 FRF 数据的影响：

$$h_{ij} = \frac{r_{ijk}}{(j\omega - \lambda_k)} + \frac{r_{ijk}^*}{(j\omega - \lambda_k^*)} + ur_{ij} - \frac{lr_{ij}}{\omega^2} \quad \text{Eqn 15-8}$$

其中，

$ur_{ij}$  上残余项（残余刚度），用于近似地反映频率高于  $\omega_{max}$  的模态影响

$lr_{ij}$  下残余项（残余质量），用于近似地反映频率低于  $\omega_{min}$  的模态影响

上、下残余项的意义可参看图 15-3。

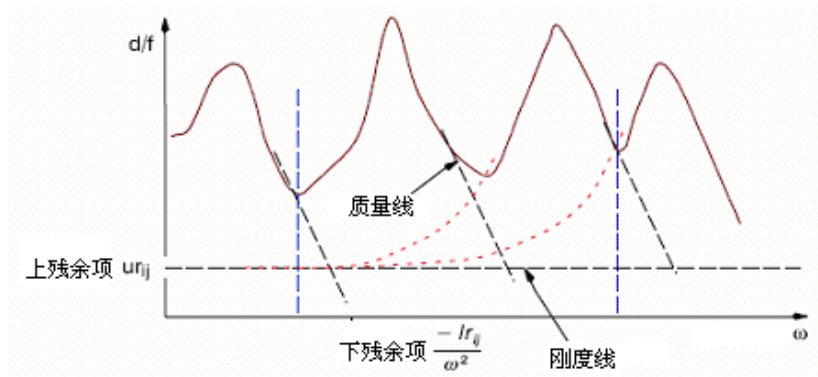


图 15-3 上、下残余项示意

式 15-7 可通过忽略复共轭项作进一步的简化，即变为：

$$h_{ij} = \frac{r_{ijk}}{(j\omega - \lambda_k)} \quad \text{Eqn 15-9}$$

### 单自由度法

单自由度的假定，成为诸如峰检出，模态检出和圆拟合等模态参数估计技术的基础。

### 多自由度法

单自由度假定仅当系统的模态明显地无耦合时才是有效的。而一般的情况并非如此。这时需要采用包含有若干个模态的数学模型去逼近测量数据，这“若干个”模态的参数，用多自由度法同时作出估计。

## 15.2.2 局部估计和整体估计

重新写出模态参数与测量函数的时域关系：

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N (r_{ijk} e^{\lambda_k t} + r_{ijk}^* e^{\lambda_k^* t}) \quad \text{Eqn 15-10}$$

可以看出，极点 $\lambda_k$ 的值与响应自由度和参考自由度二者都有关系。也就是说，极点 $\lambda_k$ 的值是系统的特性，应该可以从结构上测量出的任意函数求出。在施展模态参数估计技术时，有两种策略可供选择：一是作局部估计，二是作整体估计。

下面对这两种方法的不同之处给出比较。

### 局部估计

每一数据记录 $h_{ij}$ 单独地进行分析，各自找出的 $\lambda_k$ 值估计可能有些差别。

对每一极点给出对应不同数据记录的多个估计。然后听任使用者判断哪一个估计最佳，或者设法求出所有估计的最佳平均。

峰值法和圆拟合法是计算极点局部估计的技术。

### 整体估计

所有的数据记录同时进行分析，以求得结构特性的总体估计。

得到的是 $\lambda_k$ 值的一致估计。因此，这样的估计称为整体估计。

最小二乘复指数法（LSCE）、复模态指示函数法（CMIF）和频域直接识别法（FDPI）等，都可用以获得结构特性的整体估计。

### 15.2.3 多输入分析

假定可以获得 $N_i$ 个输入自由度和 $N_o$ 个输出自由度之间的 **IR** 测量数据。每一个别数据记录之间的表示式 15-10 可以改换成纳入所有数据记录的矩阵式：

$$[H] = \sum_{k=1}^N ([R_k] e^{\lambda_k t} + [R_k^*] e^{\lambda_k^* t}) \quad \text{Eqn 15-11}$$

其中，  $[H]$  以  $h_{ij}$  为元素的  $N_o * N_i$  维 **IR** 矩阵

$[R_k]$  以  $r_{ijk}$  为元素的  $N_o * N_i$  维留数矩阵

根据式 15-5，可将留数矩阵表为下面形式：

$$[R_k] = a_k \{V\}_k [V_r]_k \quad \text{Eqn 15-12}$$

其中，  $\{V\}_k$  表示输出自由度模态振型系数的  $N_o$  维列向量

$[V_r]_k$  表示输入自由度模态振型系数的  $N_i$  维行向量

如果  $i$  和  $j$  二者都可以是输出和输入的自由度，那么，在上式中，Maxwell Betti 互易原理成立，即：

$$r_{ijk} = r_{jik} \quad \text{Eqn 15-13}$$

这一假定不是最本质的，由于留数矩阵可表示成更简单的形式：

$$[R_k] = \{V\}_k [L]_k \quad \text{Eqn 15-14}$$

其中,  $[L]_k$  为带  $N_i$  个系数的行向量, 它表示不同输入自由度对相应数据中第  $k$  阶模态的参预。这些系数就称为模态参预因子。请注意, 如果互易原理成立, 则模态参预因子将正比于输入自由度的模态振型系数。

留数矩阵以式 15-14 代换后, 式 15-11 可改写为:

$$[H] = \sum_{k=1}^N \left( \{V\}_k [L]_k e^{\lambda_k t} + \{V^*\}_k [L^*]_k e^{\lambda_k^* t} \right) \quad \text{Eqn 15-15}$$

如果仅考虑任一输出自由度与所有输入自由度之间的测量数据, 则有

$$[H]_i = \sum_{k=1}^N \left( v_{ik} [L]_k e^{\lambda_k t} + v_{ik}^* [L^*]_k e^{\lambda_k^* t} \right) \quad \text{Eqn 15-16}$$

其中,  $[H]_i$  为输出自由度  $i$  与所有输入自由度之间数据的  $N_i$  维行向量。

式 15-16 所示数学模型的基本出发点, 是极点和模态参预因子与输出自由度无关。也就是说, 在这种表示方式中, 特征量变成:

$$[L]_k e^{\lambda_k t} \quad \text{Eqn 15-17}$$

多输入模态参数估计技术, 就是以同时分析对应几个输入的数据, 来估计由式 15-17 表示的特征量 (包含极点和模态参预因子二者)。这种技术的基础就是由式 15-16 表示的数学模型。

模态参预因子的识别是对强耦合乃至重根模态作解耦的基础。为了说明这一观点, 我们来讨论有两个彼此非常密集的极点  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的结构。忽略其它模态和忽略共轭项后, 相对于输入自由度  $j$  的响应数据可表示为:

$$\{H\}_i = \dots \{V\}_1 l_{1j} e^{\lambda_1 t} + \{V\}_2 l_{2j} e^{\lambda_2 t} \dots \quad \text{Eqn 15-18}$$

或者, 由于

$$\lambda_1 \cong \lambda_2 = \lambda$$

$$\{H\}_i = \dots \left( \{V\}_1 l_{1j} + \{V\}_2 l_{2j} \right) e^{\lambda t} \dots \quad \text{Eqn 15-19}$$

这后一个式子表示相对于输入自由度  $j$  的响应数据, 视为耦合模态的线性组合, 而不是独立的模态。不同模态的组合系数就是模态参预因子  $h_j$  和  $l_j$ 。

相对于其它输入自由度  $l$  的响应数据，表示为类似于式 15-19 的形式：

$$\{H\}_i = \dots \left( \{V\}_1 l_{1l} + \{V\}_2 l_{2l} \right) e^{j\omega t} \dots \quad \text{Eqn 15-20}$$

与式 15-19 比较，所不同的只有模态参预因子  $l_{1l}$  和  $l_{2l}$ 。如果对于输入  $j$  而言他们是线性独立的模态参预因子，那么对应输入  $l$  的响应数据而言，各个模态将表现为不同的线性组合。用多输入参数估计技术，同时分析相对于多个输入的响应数据时，模态参预因子被识别出来，从而有可能检索出高度密集乃至重根的模式。

#### 15.2.4 时域分析和频域分析

采用数字信号处理的方法，需要对连续函数进行采样。对于模态参数估计而言，常用的采样数据是测量的 **FRF**。一般情况下，谱线之间是等间隔的。但象步进正弦激励这样的试验技术，也允许谱线之间出现不等间隔。

用频域的测量数据进行模态参数估计时，建议对采样的自然数据应用由下式表示的数学模型：

$$h_{ij,n}(j\omega) = \sum_{k=1}^N \left[ \frac{r_{ijk}}{(j\omega_n - \lambda_k)} + \frac{r_{ijk}^*}{(j\omega_n - \lambda_k^*)} \right] \quad \text{Eqn 15-21}$$

其中， $h_{ij,n}$  为测量范围内的数据取样

$\omega_n$  为测量范围内的频率取样

频域参数估计法直接利用频域数据来估计模态参数，因而它与谱线是否等间隔无关紧要。方法直接建立在式 15-21 表示的数学模型基础上。

如果数据是按照谱线等间隔抽样的，那么 **FRF** 可以逆转换至时域，得到相应的冲激响应 (**IR**)。快速傅里叶变换 (**FFT**) 算法被用于作这种变换，但谱线数等于 2 的幂的限制（即 32、64、128……）不再有效。变换结果，得到的是冲激响应函数的一串等间隔抽样。时域参数估计技术可分析这一等间隔时域抽样，从中估计出模态参数。

实际上，条件的变化，使分析数据涵盖的频带通常会小于整个测量频带。图 15-4 说明了这一点。图中，分析频带只包含三个模态，而测量频带内却包含有五个模态。如果数据从频域再转换至时域，那么新取样的时间增量将取决于分析

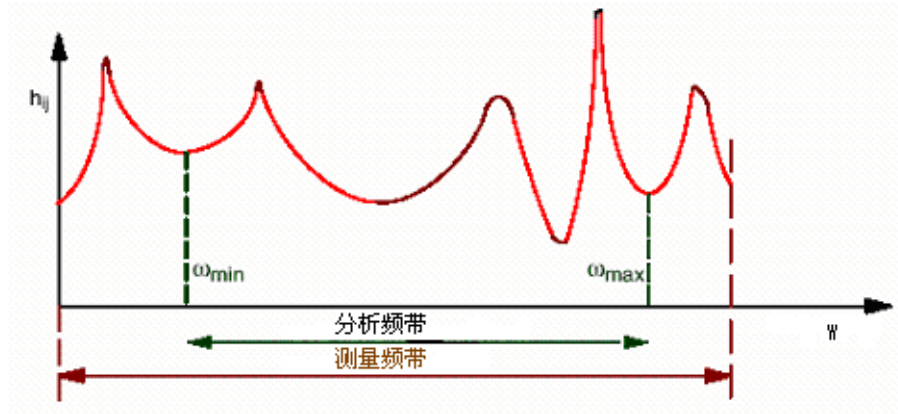


图 15-4 分析频带与测量频带示意

频带，而不是取决于测量频带。如果分析频带的上、下限分别为  $\omega_{max}$  和  $\omega_{min}$ ，则时间增量  $\Delta t$  由下式决定：

$$\Delta t = \frac{2\pi}{2(\omega_{max} - \omega_{min})} \quad Eqn 15-22$$

用这样得出的取样时间代替连续时间后，得到

$$h_{ij,n}(t) = \sum_{k=1}^N \left( r_{ijk} e^{\lambda_k n \Delta t} + r_{ijk}^* e^{\lambda_k^* n \Delta t} \right) \quad Eqn 15-23$$

或者写作

$$h_{ij,n} = \sum_{k=1}^N \left( r_{ijk} z_k^n + r_{ijk}^* z_k^{*n} \right) \quad Eqn 15-24$$

其中，  $z_k = e^{\lambda_k \Delta t} \quad Eqn 15-25$

时域参数估计方法就是建立在式 15-24 所定义的数学模型基础上的。先通过对  $h_{ij,n}$  的分析得到  $z_k$ ，再由式 15-25 求得  $\lambda_k$ 。然而，注意到这一计算结果是非单值的，因为

$$z_k = e^{(\lambda_k + jm2\pi/\Delta t)\Delta t} = e^{\lambda_k \Delta t} \quad Eqn 15-26$$

这意味着不可能识别出超越频带  $2\pi / \Delta t$  的极点。也就是说，采用时域参数识别方法，所有被估计的极点都在分析频带  $(\omega_{min}, \omega_{max})$  内找出。如果分析频带的数

据受到带外模态的严重影响（残余效应）时，这样估计的模态参数可能会有一些



问题。由于采用频域法时， $\lambda_k$  是直接估计出来的，不存在这样的局限性。因此，在分析有严重残余效应的窄频带数据时，频域技术有时或许比时域技术能得到更可靠的结果。

### 15.2.5 声振模态分析

系统的结构动力特性和它内部的声学特性之间相互耦合，对于许多应用来说，可能有重要的影响作用。以声激励或结构激励情况下的声振测量为基础，可以实施混合的声振分析。

有限元运动方程被用来导出描述声振特性的方程：

$$[-\omega^2 M^S - j\omega C^S + K^S]\{x\} = \{f\} + \{l_p\} \quad \text{Eqn 15-27}$$

其中，

$M^S, C^S, K^S$  结构的质量矩阵、阻尼矩阵和测度矩阵，

$\{f\}$  系统外部作用力向量

$\{l_p\}$  声压载荷向量

在流体中，由非直接的声学方程可得出：

$$[-\omega^2 M^f - j\omega C^f + K^f]\{p\} = \rho\{\dot{q}\} + \omega^2\{l_f\} \quad \text{Eqn 15-28}$$

其中，

$M^f, C^f, K^f$  描述声压-体积加速度的矩阵

$\omega^2\{l_f\}$  声压载荷向量

这些方程与下面两个关系式相结合：

$$\{l_p\} = \int_{S_b} p \, dS \quad \text{Eqn 15-29}$$

$$\{l_f\} = \int_{S_b} \rho x_N \, dS \quad \text{Eqn 15-30}$$

重写方程，得到描述声振耦合系统特性的方程为：

$$\begin{bmatrix} K_S - K^c \\ 0 & K^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ p \end{Bmatrix} - \mathbf{j}\omega \begin{bmatrix} C^S & 0 \\ 0 & C^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ p \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^S & 0 \\ M^C & M^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ \rho \dot{q} \end{Bmatrix} \quad \text{Eqn 15-31}$$

这就是描述声振特性的二阶模型，它明显地有不对称性。

上面的方程也反映出声振作用的互易原理，它可以表示为：

$$\left. \frac{p_i}{\dot{f}_j} \right|_{\dot{q}_i=0} = - \left. \frac{\ddot{x}_j}{\dot{q}_i} \right|_{f_i=0} \quad \text{Eqn 15-32}$$

多数多输入-多输入模态参数估计算法并不要求对称性。所以，这种非对称的基本方程组，以及由此对模态的描述，对于得到有效的模态频率、阻尼因子和模态振型这些参数，都不会造成任何问题。

结构激励可以用声激励来代替。两种激励情况得到的模态模型是一致的，但每一模态的比例因子却不相同，这是由于方程组的不对称性造成的。

从结构方程过渡到声学方程，要求比例因子为相应模态特征值的平方。有关这方面的充分解释可参看 K. Wyckaert 和 F. Auguesztinovicz 的论著：“Vibro-acoustical Modal Analysis: Reciprocity, Model Symmetry and Model Validity”。

### 15.3 参数估计方法

各种方法及其用处汇总如表 15.1。

表 15.1 参数估计方法分类

方法	可识别参数	自由度	域	估计	输入
峰检索	频率，阻尼	单	频域	局部	单
模态检出	模态振型	单	频域	局部	单
圆拟合法	频率 阻尼 模态振型	单	频域	局部	单
复模态指示函数法 (CMIF)	频率 阻尼 模态振型	多	频域	整体	单或多

最小二乘复指数法 (LSCE)	频率 阻尼 模态参预因子	多	时域	整体	单或多
最小二乘频域法 (LSFD)	模态振型	多	频域	整体	单或多
频域直接识别法 (FDPI)	频率 阻尼 模态参预因子	多	频域	整体	单或多

## 方法的选择

下面给出参数估计方法的选用指南。所有方法的细节在随后几节逐步介绍。

### 单自由度 (SDOF) 法

单自由度曲线拟合法是一种粗略的、简便的方法，它可以使你快速地获得影响试验结构的最主要的模态（频域、阻尼和模态振型）。它可用以检查测量设置，并帮助评估下述几个方面是否存在问题：

- 是否所有传感器都正常工作并正确定标
- 是否对所有加速度计都正确地标记出它们所安装的结点和方位
- 是否所有结点都安装了测量装置

为此，建议用此方法识别实模态，因为它最容易解释和显示。

在所有单自由度技术中，圆拟合法给出最精确的估计，但是在模态振型的节点附近，仍可能产生大的误差。

### CMIF 法

该方法同样可作为一种 SDOF 技术，给出对最占优势模态的概念性了解，并用于检查试验设置。它具有能利用多输入 **FRF** 的优点，模态振型估计具有高质量。它可以获得特定频带内最占优势模态的模态模型。

### 时域 MDOF 法

这是一种最常用的参数估计技术，很可能成为模态分析的标准工具。从 **MIMO FRF** 出发，它可以获得完整的、精确的模态模型。它的弱势主要在于不太适合于阻尼比大于 5% 以上的强阻尼系统，而象全内饰车就属于这种情况。

## 频域 MDOF 法

频域直接参数识别 (FDPI) 技术可获得与上述时域技术相似的结果, 只是在精度上通常会稍为逊色些。它的弱点是不适合轻阻尼系统(阻尼比低于 3% 时), 好在它特别适合于强阻尼系统, 因此它可以和其它 MDOF 技术起到互补作用。由于它的分析是在频域进行的, 可分析在频率轴上非等间隔抽样的 **FRF**。

### 15.3.1 峰检索

峰检索是一种作频率和阻尼局部估计的 SDOF 法。该方法基于考察系统的共振, 即考察靠近固有频率处的 **FRF** 极值。

例如, 在固有频率附近, **FRF** 的实部接近于零 (同相分量极小), **FRF** 的虚部为极大 (正交分量峰点), 而 **FRF** 的幅值也是极大 (幅值峰点)。这种观察到的极值所对应的频率称为共振频率  $\omega_r$ , 对于弱阻尼系统来说,  $\omega_r$  是模态固有频率  $\omega_{nk}$  的良好估计。

相应的阻尼比估计可以用 3dB 法则求出。从 **FRF** 幅频特性峰值左右两边找出幅值下降 3dB 的频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$ , 即可由下面的式 15-33 求出模态阻尼比  $\zeta$ , 见图 15-5。这  $\omega_1$  和  $\omega_2$  也称为半功率点 (信号幅值下降 3dB 对应信号功率下降一半)

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_r} \quad \text{Eqn 15-33}$$

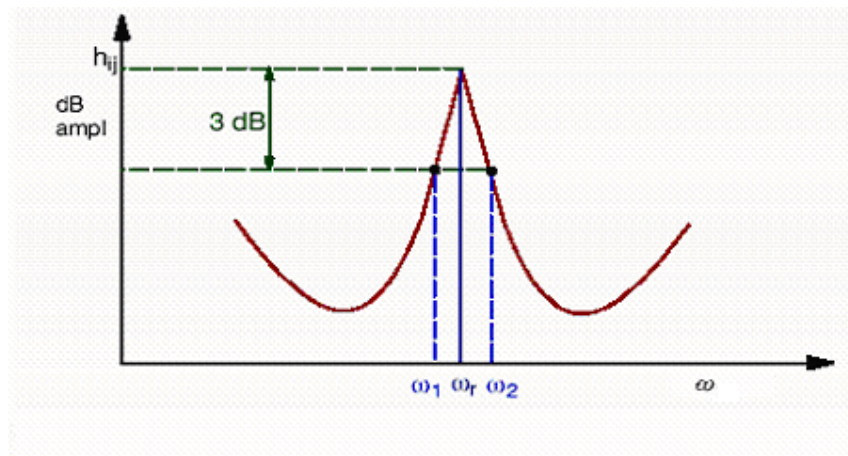


图 15-5 阻尼比估计的半功率 (3dB) 带宽法

由于这种曲线拟合法是以一条谱线来定出共振频率的, 如果 **FRF** 具有低的频率分辨率, **FRF** 真实的峰应该在两条谱线之间, 那么共振频率和阻尼比的估

计都会存在大的误差。一种补偿办法是对峰值检出谱线两边的 **FRF** 曲线斜率作外推，以求得较精确的 **FRF** 峰值。

也可能碰到半功率点之一找不到的情况，这可能发生在一个模态的频率与另一个模态的频率非常靠近的情况下，或者模态频率靠近测量频带两端的情况。

注意！峰检索是一种 **SDOF** 法，它只适合于研究模态之间分隔很疏散的情况。

由于这种方法给出的是局部估计，只需一个数据记录便可得到所有模态的频率和阻尼。当利用多个数据记录时，可能对不同的记录会得出不完全相符的模态参数。

### 15.3.2 模态检出法

如果能肯定模态之间无耦合，且具有弱阻尼，那么模态的幅值可以从 **FRF** 的虚频峰值或幅频峰值求出。这种情况下，共振频率附近的数据可以用下式逼近（参看式 15-7）：

$$h_{ijn} \cong \frac{r_{ijk}}{(j\omega_n - \lambda_k)} \quad \text{Eqn 15-34}$$

在共振频率处，幅值最大。而对于弱阻尼模态而言，共振频率、无阻尼固有频率和有阻尼固有频率三者几乎是一样的。因此共振峰或模态幅值是在  $\omega = \omega_n$  处找到的，而  $\omega_n$  也就等于  $\omega_{dk}$ 。

在式 15-34 中，以  $\omega_n$  代替  $\omega_{dk}$ ，则模态幅值由下式给出：

$$- \frac{r_{ijk}}{\delta_k} \quad \text{Eqn 15-35}$$

据此，由模态的幅值倍乘模态阻尼因子，就可以求得留数以及模态振型的估计。

采用模态检出法，必须先有  $\omega_{dk}$  的估计。这一估计可由峰检索（见 15.3.1 节）或其它技术得出。

很明显，模态检出法对于数据的频率偏移是非常敏感的。例如，如果一个数据的模态共振频率与认定的模态共振频率间偏差几条谱线的话，模态幅值就会不正确地被检出。为应对出现频率偏移的现实情况，需要给定一个共振频率  $\omega_{dk}$  的许可偏移量，以便计算模态幅值。与其在一个确定的共振频率处检出模态幅值，还不如对每一数据记录，在每一模态频率附近作扫描，取带内的最大幅值作为模

态幅值，并以此计算模态振型系数。

模态检出法可以非常快地得到模态模型。然而该模型的精度取决于方法的假定与所应用的数据是不是很好地相符合。

### 15.3.3 圆拟合法

圆拟合法是基于选定模态所在频带内，数据点处于复平面一个圆上的认识。该方法最早是由肯尼迪（Kennedy）和班茨（Pancu）提出的，该方法适合于弱阻尼系统和单自由度的假定。在模态频率附近，数据可近似地由下式表述：

$$h_{ijn} = \frac{r_{ijk}}{j\omega_n - \lambda_k} + \frac{r_{ijk}^*}{j\omega_n - \lambda_k^*} \quad \text{Eqn 15-36}$$

去掉脚标  $i, j$  和  $k$ ，将复留数  $r_{ijk}$  表示为  $U + jV$ ，将复共轭项用一复常数  $R + jI$  来近似，则式 15-36 变换为：

$$h_n = \frac{U + jV}{-\delta + j(\omega_n - \omega_d)} + R + jI \quad \text{Eqn 15-37}$$

可以证明，这一表示式中的模态参数，可以从复平面上拟合测量数据的一个圆的参数求出。见图 15-6 所示。

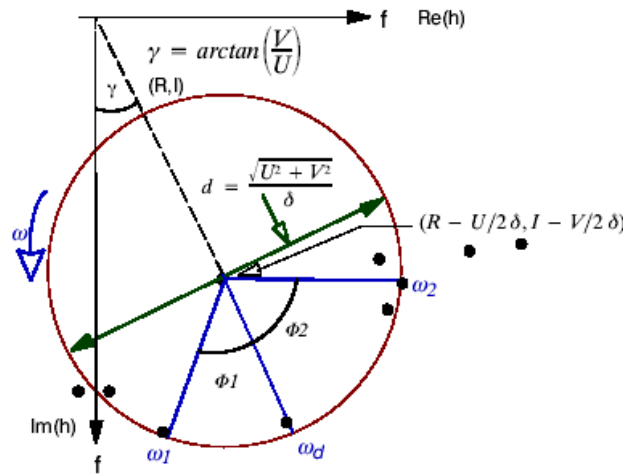


图 15-6 拟合圆参数与模态参数间的关系

固有频率用最大角度间距法定出。即认定：在固有频率所在点，复平面上数据点之间拟合圆圆心角变化率最大。

确定了固有频率，假定系统具有弱阻尼，则阻尼比可由下式求出：

$$\delta = \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_d} \right) \left( \frac{2}{\tan(\Phi_1/2) + \tan(\Phi_2/2)} \right) \quad \text{Eqn 15-38}$$

复留数  $U + jV$  取决于拟合圆的半径  $d$ ，其相位角  $\gamma$  的意义如图 15-6 所示。

$$d = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\delta} \quad \text{Eqn 15-39}$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{V}{U}\right) \quad \text{Eqn 15-40}$$

圆拟合法也是基于 SDOF 的参数估计方法，可得到频率、阻尼和模态振型估计。这种方法速度快，但应该使拟合圆与数据点之间真正做到良好拟合，才能得到好的结果。

#### 15.3.4 复模态指示函数（CMIF）法

复模态指示函数法以多参考 **FRF** 测量为基础，用以识别机械系统的模态模型。该方法可快捷、简便地确定系统的模态数，并检索出重根的存在。尔后，这些信息可作为更完善的多输入技术的基础，诸如 LSCE 法或 FDPI 法等。而在模态得到良好激励、模态响应显著的情况下，CMIF 法也足于直接得到精确的模态参数估计。

有  $N_o$  个输出自由度和  $N_i$  个输出自由度的系统，其 **FRF** 矩阵可表为：

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^{2N} \{ \Phi \}_r \frac{Q_r}{\omega - \lambda_r} \{ L \}_r^T \quad \text{Eqn 15-41}$$

或记作：

$$[H(\omega)] = [\Phi] \left[ \frac{Q_r}{\omega - \lambda_r} \right] [L]^T \quad \text{Eqn 15-42}$$

其中，

$[H(\omega)]$       **FRF** 矩阵，其维数为  $N_o * N_i$

$[\Phi]$       模态振型矩阵，其维数为  $N_o * 2N$

$Q_r$       第  $r$  阶模态的比例因子

$\lambda_r$  第  $r$  阶模态的系统极点

$[L]^T$  模态参预因子矩阵的转置，其维数为  $2N_i \times N_i$

对每一谱线的 **FRF** 矩阵作奇异值分解，得

$$[H] = [U][S][V]^H \quad \text{Eqn 15-43}$$

其中，

$[U]$  左奇异值矩阵，对应于模态振型向量矩阵

$[S]$  对角线型奇异值矩阵

$[V]$  右奇异值矩阵，对应于模态参预因子向量矩阵

比较式 15-42 和 15-43 可知，通过奇异值分解，式 15-42 中的模态振型向量和模态参预因子向量化为单位标尺向量。另假定式 15-43 的质量矩阵为  $m$ （单位）矩阵，这样，模态向量之间的正交性仍然是满足的。

对于任一模态而言，固有频率就发生在奇异值最大的频率点。复模态指示函数定义为正则矩阵（normal matrix）的特征值解，正则矩阵为 **FRF** 矩阵左乘其共轭转置后得到的  $N_i \times N_i$  方阵，即  $[H]^H [H]$ ，对应每一谱线，有：

$$[H]^H [H] = [V][S]^2 [V]^H \quad \text{Eqn 15-44}$$

$$CMIF_k(\omega) = \mu_k(\omega) = s_k(\omega)^2 \quad k = 1, 2, \dots, N_i \quad \text{Eqn 15-45}$$

其中，

$\mu_k(\omega)$  在频率为  $\omega$  时，正则 **FRF** 矩阵的第  $k$  个特征值

$s_k(\omega)$  在频率为  $\omega$  时，**FRF** 矩阵的第  $k$  个奇异值

$N_i$  输入自由度数

实际上，对  $[H]^H [H]$  矩阵式按照每一谱线进行计算来求得特征值的。这些 CMIF 值作为频率的函数取对数标尺绘成曲线图形。可得到与参考（输入）自由度同样数目的 CMIF 曲线。清晰的峰指示出模态，其相应的频率，即是模态的有阻尼固有频率。参看图 15-7。

相关的软件可自动地搜索 CMIF 的峰，并按一定的计数准则消除由于噪声和



测量误差引起的虚假（寄生）峰。

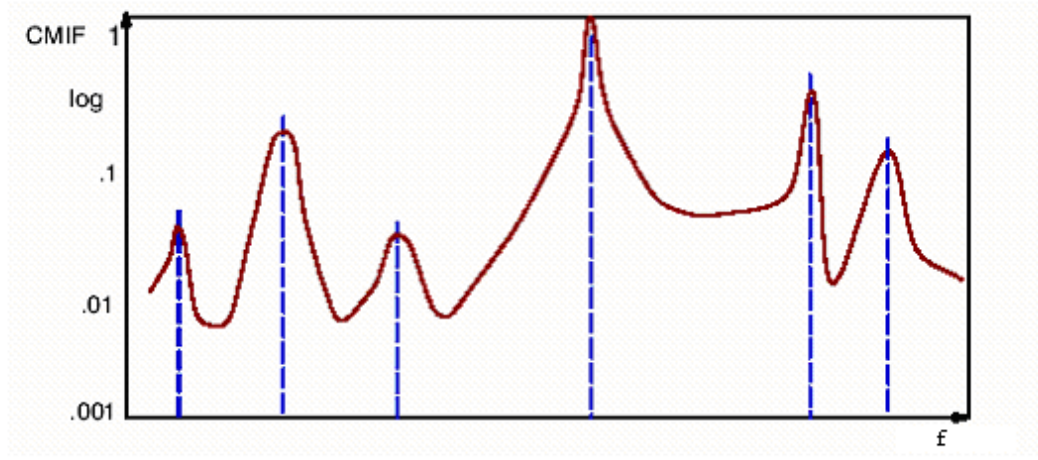


图 15-7 由 CMIF 曲线选择模态频率举例

在模态频率选定之后，由式 15-43 和 15-44，可得出模态参预因子矩阵 $[V]$ 的复共轭，以及尚无标尺的模态振型向量 $[U]$ 。

无标尺的模态振型向量和模态参预因子用于生成一个对应每一模态（ $r$ ）的增强 **FRF**，其定义为：

$$H_r^E(\omega) = \{U\}_r^H [H(\omega)] \{V\}_r \quad \text{Eqn 15-46}$$

由于模态振型向量和模态参预因子都通过奇异值分解正则化为单位标尺向量，增强的 **FRF** 实际上是解耦的单模态频响函数：

$$H_r^E(\omega) = \frac{Q_r}{\omega - \lambda_r} \quad \text{Eqn 15-47}$$

现在可以用 **SDOF** 法（譬如圆拟合法）改善固有频率估计的精度，并进一步求得阻尼比和模态振型的比例因子。

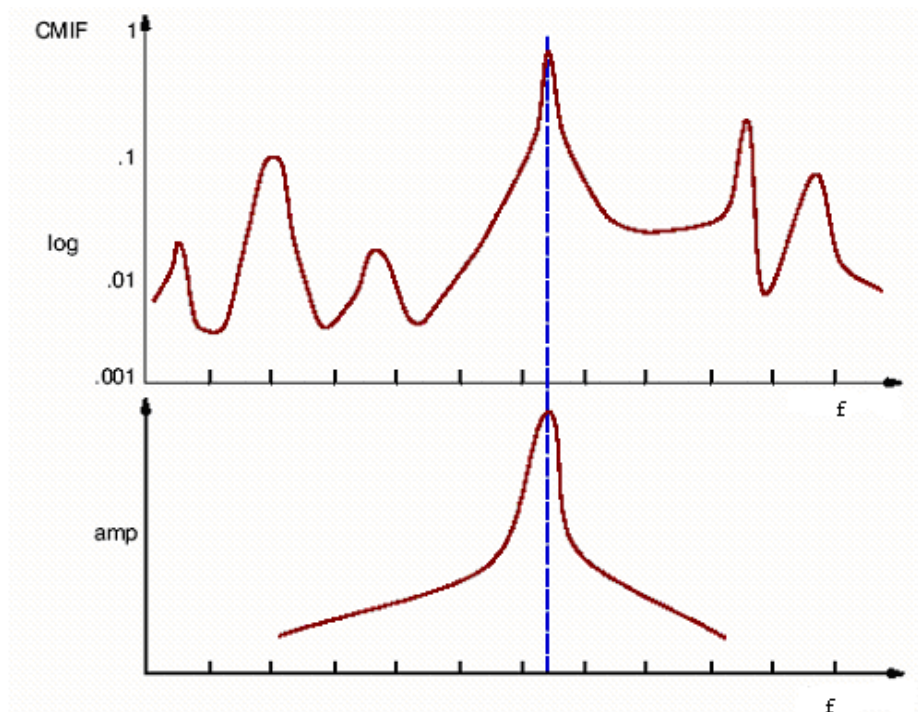


图 15-8 CMIF 及相应的增强 **FRF** 举例

对于每一参考自由度，都可以求出一 **CMIF**。它们可以依据特征值幅值分拣出来，并作为频率的函数绘制在同一图上，如图 15-9 所示。

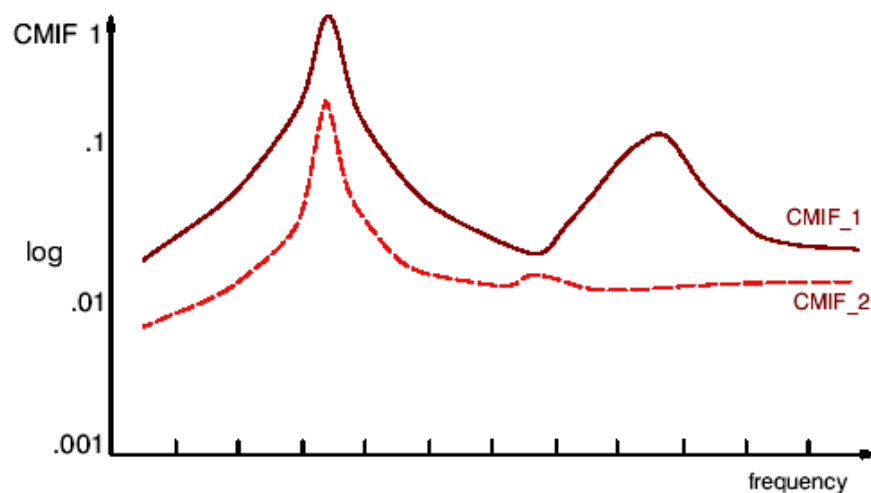


图 15-9 一阶和二阶 **CMIF** 举例

### 交叉检验和跟踪

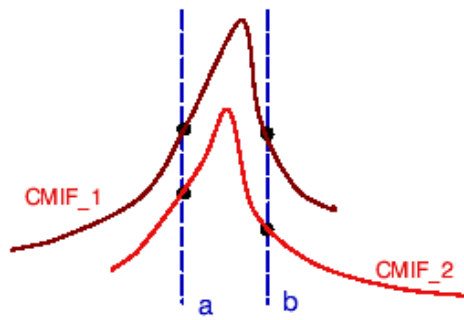
在任一频率处，这些 **CMIF** 将指明发生多少个显然是独立的现象，且它们都比较重要。在一共振点，即对应每一个 **CMIF** 的峰，至少有一个模态在起作用。

而在其它频率点，可能有另一个模态在增强其影响，并对响应做出重要贡献。在两个共振点之间，可能出现一个交叉点，在此处，两个模态的贡献相等。由此可能导致高阶 CMIF 出现一个小的峰，如图 15-9 所示。原因是，一 CMIF 呈现下降的同时，较低阶的 CMIF 正趋向于另一个峰。

检验二阶 CMIF 的峰可帮助做出判断：它们是由于交叉效应所引起的呢？还是一真实的二阶极点？用感兴趣频率两边的数据计算 MAC 矩阵，即可做出这种判断。

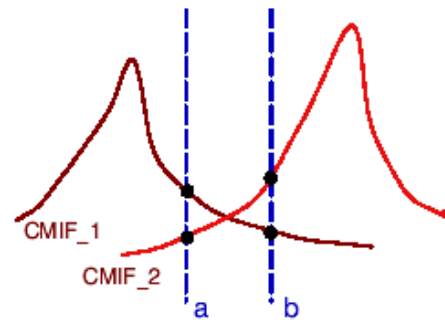
$$\begin{bmatrix} \text{MAC}(1a,1b) & \text{MAC}(2a,1b) \\ \text{MAC}(1a,2b) & \text{MAC}(2a,2b) \end{bmatrix}$$

其中，a、b 表示频率点，而 1、2 则表示 CMIF 的阶次。CMIF1 有较大的值，CMIF2 有较小的值。



当 MAC 矩阵接近于幺矩阵时，CMIF2 的峰代表一共振峰。模态在频率 a、b 之间不变。

$$\begin{bmatrix} \cong 1 & \cong 0 \\ \cong 0 & \cong 1 \end{bmatrix}$$



当 MAC 矩阵为反对角阵时，则 CMIF2 的峰代表一交叉点。模态在频率 a、b 之间发生变换。

$$\begin{bmatrix} \cong 0 & \cong 1 \\ \cong 1 & \cong 0 \end{bmatrix}$$

利用 CMIF 跟踪，可使峰检索变得更简便。交替显示不同阶次的 CMIF，当两个 CMIF 代表的模态振型发生变换时，CMIF 也作出变换。这可由上述交叉检验作出判断。

图 15-9 所示 CMIF 跟踪方式的例子如下面的图 15-10 所示。

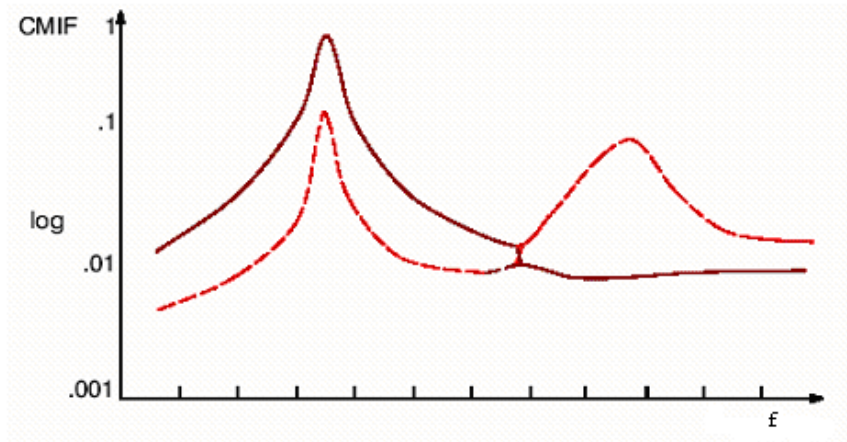


图 15-10 跟踪一阶和二阶 CMIF 举例

### 15.3.5 最小二乘复指数 (LSCE) 法

LSCE 法允许同时估计出几个模态的模态频率和阻尼因子。由于所有的数据都同时被分析，因而得到的是整体估计。

为了帮助了解这种方法是怎样做的，重写出冲激响应 (**IR**) 的表示式：

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N \left( r_{ijk} e^{\lambda_k t} + r_{ijk}^* e^{\lambda_k^* t} \right) \quad \text{Eqn 15-48}$$

从这一表示式可以看出，极点  $\lambda_k$  并非是特定响应 (输出) 自由度或参考 (输入) 自由度的函数。即是说，极点乃是结构的总体 (而非局部) 特性。对于结构上任何 **FRF** 来说，它们都应该是一样的。因此，应当尽可能地利用结构上所有可得到的测量数据，统一进行总体估计。

这种方法，在单输入和多输入情况下均可采用。

#### 连续数据模型

通过式 15-48 来实现上述目标，存在一个特殊问题是式中的留数  $r_{ijk}$  是与响应自由度和参考自由度有关的。因此这种方法的核心是对  $h_{ij}$  定义另一种参数模型，在这种模型中，系数与响应自由度和参考自由度无关，而能够利用它识别出  $\lambda_k$  的估计。可以证明，这样的模型取实常系数  $2N$  阶线性微分方程的形式：

$$(d/dt)^{2N}h_{ij} + a_1(d/dt)^{2N-1}h_{ij} + \dots + a_{2N}h_{ij} = 0 \quad \text{Eqn 15-49}$$

事实上，式 15-48 就是把数据表示为一组存在复共轭对的  $2N$  个有阻尼复指数的线性组合形式。这些复指数可视为一实常系数线性微分方程的特征解，即

$$(d/dt)^{2N}f(t) + a_1(d/dt)^{2N-1}f(t) + \dots + a_{2N}f(t) = 0 \quad \text{Eqn 15-50}$$

冲激响应，作为特征解的线性组合，其本身也是一特征解。因此，如果系数之间满足下式的话，式 15-49 就是成立的：

$$\begin{aligned} \lambda^{2N} + a_1\lambda^{2N-1} + \dots + a_{2N} &= 0 \\ \lambda &= \lambda_k, \lambda = \lambda_k^*, k = 1 \dots N \end{aligned} \quad \text{Eqn 15-51}$$

由此推理，首先是力图利用所有可得到的数据，估计出方程 15-49 中的系数  $a_1, \dots, a_{2N}$ 。然后再通过求解方程 15-51，得到复指数系数  $\lambda_k$  的估计。

### 抽样数据模型

对非连续性测量数据抽样，与其用式 15-48，倒不如用下式：

$$\begin{aligned} h_{ijn} &= \sum_{k=1}^N (r_{ijk} z_k^n + r_{ijk}^* z_k^{*n}) \\ z_k &= e^{\lambda_k \Delta t} \end{aligned} \quad \text{Eqn 15-52}$$

取代有阻尼复指数，现在用基函数  $z_k$  的幂级数来表征。

基于上文对连续数据解释的类似理由，可对抽样数据提出一种带实常系数的  $2n$  阶线性有限差分方程（取代连续数据的微分方程）：

$$h_{ijn} + a_1 h_{ijn-1} + \dots + a_{2N} h_{ijn-2N} = 0 \quad \text{Eqn 15-53}$$

特征值  $z_k$ ，以及由它得出的极点  $\lambda_k$ ，可通过求解下面方程来得到：

$$z_k^{2N} + a_1 z_k^{2N-1} + \dots + a_{2N} = 0 \quad \text{Eqn 15-54}$$

### 方法的具体实施

LSCE 法的出发点，是利用测量数据代入方程 15-53 求得系数  $a_1, \dots, a_{2N}$  的估计。

原则上，可以利用任何一个数据记录  $h_{ij:n}$ 。一次只利用单一数据记录的方法，

将产生极点的局部估计。

对所有可能的时间点及所有可能的响应自由度和参考自由度,在最小二乘意义上求得方程 15-53 中各个系数的估计,就是求解方程组 15-55。这一方程组应是强超定的。要想通过常规方程的求解技术得到该超定方程的最小二乘解,可利用由二次方系数矩阵构成的压缩方程,即求解方程 15-56 来算出最终的解。方程 15-56 的系数矩阵称为协方差矩阵。

$$\begin{bmatrix} h_{11,2N-1} & \cdots & h_{11,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{11,N_t-1} & \cdots & h_{11,N_t-2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{ij,n-1} & \cdots & h_{ij,n-2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N_0 N_t N_t-1} & \cdots & h_{N_0 N_t N_t-2N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s - h_{11,2N} \\ \vdots \\ -h_{11,N_t} \\ \vdots \\ -h_{ij,n} \\ \vdots \\ -h_{N_0 N_t N_t} \end{Bmatrix} \quad \text{Eqn 15-55}$$

其中,

$Nt$  最终可取得时间抽样

$N_0$  响应自由度数

$N_i$  输入自由度数

我们可以将它写成更简炼的形式:

$$\begin{bmatrix} r_{1,1} & sr_{1,2} & \cdots & r_{1,2N} \\ \cdot & r_{2,2} & \cdots & r_{2,2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & r_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_{1,0} \\ -r_{2,0} \\ \vdots \\ -r_{2N,0} \end{Bmatrix} \quad \text{Eqn 15-56}$$

其中,协方差矩阵中的系数定义为

$$r_{k,l} = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{n=1}^{N_t} (h_{ijn-k} h_{ijn-l}) \quad \text{Eqn 15-57}$$

构建协方差矩阵,是应用 LSCE 法的首先一步。这一步通常是最费时的,需要利用所有可能的数据去构建由式 15-57 所表示的内积。

注意,求解出方程 15-56 之后,下一步要做的就是将估计出的系数代入方程 15-54,求解出  $\hat{\mathbf{A}}$ ,并进一步求得模态频率和阻尼因子的估计。

## 最佳模态数的确定

求解方程 15-56，得到由方程 15-53 表示的数学模型中所有系数的最小二乘估计。由此还可求出相应的最小二乘误差。这一误差对于确定数据中的最佳模态数来说是十分重要的。

在前面的讨论中，假定数据存在  $N$  个模态。然而，数据所包含的模态数实际上却是未知的。最好能由方法本身来确定。采用 LSCE 法，这可以通过考察方程 15-56 解的最小二乘误差随假定模态数的增减而演变的情况来判定。

为此，在初始建立如 15-56 的方程时，假定有足够大的模态数  $N$ 。这种用于求解模型系数的方程一个子集就是表述仅有一个模态的情况：

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ \cdot & r_{2,2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_{1,0} \\ -r_{2,0} \end{Bmatrix}$$

相应的最小二乘误差用  $\epsilon_1$  表示

当假定数据包含两个模态时，被求解的子集为：

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & r_{1,4} \\ \cdot & r_{2,2} & r_{2,3} & r_{2,4} \\ \cdot & \cdot & r_{3,3} & r_{3,4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & r_{4,4} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_{1,0} \\ -r_{2,0} \\ -r_{3,0} \\ -r_{4,0} \end{Bmatrix}$$

其相应的最小二乘误差为  $\epsilon_2$ 。如此类推。如果一模型被假定的模态数恰好等于数据中实际存在的模态数，则相应的最小二乘误差应该比假定有较少模态数时的误差显著地变小。

将最小二乘误差随假定模态数增加而变化的情况绘成图形，就称为**最小二乘误差图**。图 15-11 所示就是一典型的最小二乘误差图，它表明被分析的系统有 4 个模态（即从被分析数据可观察到 4 个模态）。

当数据中存在噪声时，误差图仍会在增至某一假定模态数时表现明显跌落。随着假定模态数的增加，误差将持续缩小。现在的问题是，要判定需要用多少附加模态（或称计算模态）去补偿数据中的噪声，以便能得到模态频率和阻尼因子的最佳估计。这个问题也表示在图 15-11 中。



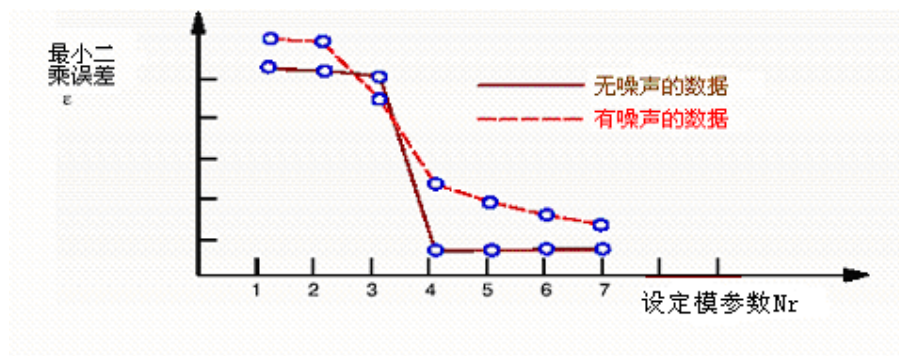


图 15-11 最小二乘误差图，有 4 个模态的系统

为了确定出最佳的模态数，你还可以对有不同模态数的模型所估计的频率和阻尼作比较。凭直觉你会断定，对真实的结构模态，其频率和阻尼估计不应随假定模态数的增减而发生明显的变化，而计算模态则不然。表示模态频率和阻尼随假定模态数的增加而变化的图形，称为**稳态图**。最佳模态数可通过考察这种稳态图而确定，其依据是物理模态的频率和阻尼值不随模态数的增减出现明显的变化。即是说，它们是稳定的。

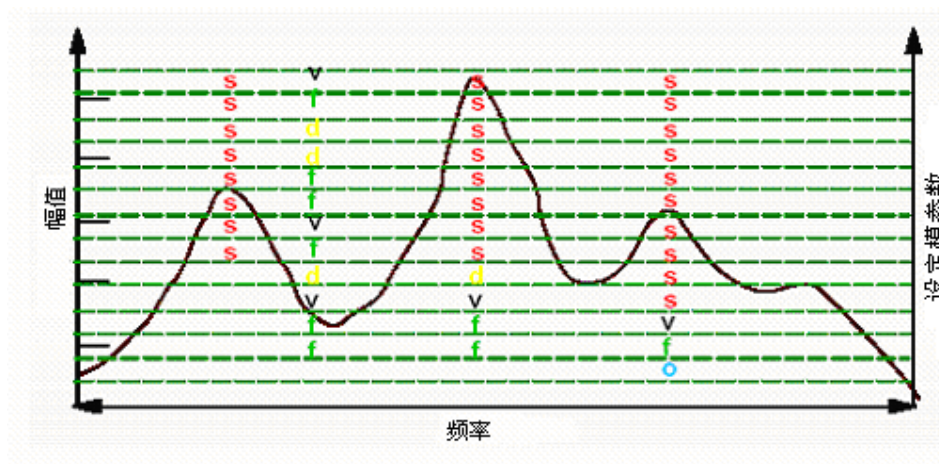


图 15-12 稳态图



## 举例

假定一系统两个测量的数据记录如图 15-13 所示。

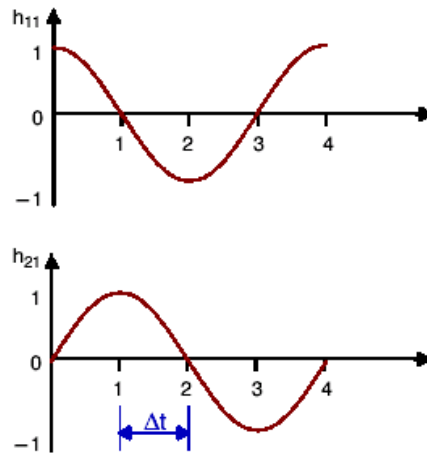


图 15-13 LSCE 法举例

序号 0~3 的两个测量，各 4 个抽样数据列表如下：

n	$h_{11}$	$h_{21}$
0	1	0
1	0	1
2	-1	0
3	0	-1

考虑只有一个模态 ( $N=1$ ) 的模型。方程 15-55 和 15-56 分别为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & s1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

方程的解为  $a_1=0, a_2=1$ 。现在用方程 15-54 计算  $z_k$  和  $\lambda_k$ ，有

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z = \pm j$$

频率和阻尼值随之求出如下：

$$z = e^{\lambda \Delta t}$$

$$z = +j, \lambda = 0 + j\frac{\pi}{2\Delta t}$$

$$z = -j, \lambda = 0 - j\frac{\pi}{2\Delta t}$$

计算结果表明，此模态的周期为  $4\Delta t$ ，阻尼为零。这与图 15-13 的标示是一致的。

#### 15.3.5.1 多输入最小二乘复指数法

将上面介绍的局部估计 LSCE 法应用于结构上的所有测量数据，可得到模态频率和阻尼的总体估计。原则上可以利用相对于几个参考自由度的所有数据，然而这种做法，在应用上面讨论的模型时并不能得到特别的好处。

多输入（或多参考）最小二乘复指数法，是将前面讨论的 LSCE 法扩展为能对相对于几个参考自由度的数据同时作综合分析。该方法对模态频率和阻尼乃至模态参预因子得出总体的估计。模态参预因子作为一术语，它表示在系统响应中，各个模态的参预（贡献）量作为参考（输入）自由度的函数（参看第 15.2.3 节）。同时估计出频率、阻尼和模态参预因子，意味着那些高度密集的模式，乃至重根模态都可以被识别出来。

多输入 LSCE 法的基础是 15.2.3 节中方程 15-16 表示的数据模型。

$$[H]_i = \sum_{k=1}^N \left( v_{ik} [L]_k e^{\lambda_k \Delta t} + v_{ik}^* [L^*]_k e^{\lambda_k^* \Delta t} \right) \quad \text{Eqn 15-58}$$

其中，

$[H]_i$  输出自由度  $i$  与所有输入自由度之间冲激响应（IR）的  $N_i$  维行向量

$[L]_k$  第  $k$  阶模态的模态参预因子向量，如果参考自由度数为  $N_i$ ，则  $[L]_k$  就是  $N_i$  维行向量

请注意，按照这一模型，频率、阻尼和模态参预因子只取决于特定的响应自由度。当然，要想同时地利用所有可能的测量数据来估计这些参数也是能做到的。

## 抽样数据模型

式 15-58 表示的模型不适宜直接用于频率、阻尼和模态参预因子的总体估计，因其仍含有模态振型系数，该系数与响应自由度有关。因此，必须导出一更适当的模型。

首先给出抽样数据的自然属性，式 15-58 重写成：

$$[H_n]_i = \sum_{k=1}^N \left( v_{ik} [L]_k z_k^n + v_{ik}^* [L^*]_k z_k^{*n} \right) \quad \text{Eqn 15-59}$$
$$z_k = e^{\lambda_k \Delta t}$$

可证明，如果数据可由式 15-59 描述，则它们也可由下面模型来描述：

$$[H_n]_i + [H_{n-1}]A_1 \dots + [H_{n-p}]A_p = 0 \quad \text{Eqn 15-60}$$

条件是满足下列关系：

$$[L_k][z_k^p + z_k^{p-1}A_1 \dots + A_p] = 0 \quad \text{Eqn 15-61}$$

$$pN_i \geq 2N \quad \text{Eqn 15-62}$$

（其推证方法可追溯 15.3.5 节所述 LSCE 法相同途径）。

方程 15-60 是以矩阵形式表示的  $N_i$  个互相有耦合的常系数有限差分方程组。

其中，系数  $A_1 \dots A_p$  均为  $N_i \times N_i$  维矩阵。

方程 15-61 所表示的条件，说明  $[L_k]$  和  $z_k^n$  是这一有限差分方程组的特征解。由于等式 15-59 右边由  $2N$  项相加而成，一个基本点是，此方程组特征解的个数至少应等于  $2N$ ，如式 15-62。

注意！如果对每个参考自由度的数据作分别处理的话，即  $N_i = 1$ ，则方程 15-60 和 15-61 就简化为 15-53 和 15-54。因此，LSCE 法乃是多输入最小二乘复指数法的特殊情况。

## 方法的具体实施

方程 15-60 中各个系数的最小二乘估计，是对所有可能的时间抽样点，和所有可能的响应自由度同时地求解出的，如方程 15-63 所表明。一种求最小二乘解的办法是用方程 15-65 那样的常规方程。此方程的系数矩阵也是取协方差矩阵的形式。

$$\begin{bmatrix} [H_{p-1}]_1 & \dots & [H_0]_1 \\ \vdots & & \vdots \\ [H_{N_t-1}]_1 & \dots & [H_{N_t-p}]_1 \\ \vdots & & \vdots \\ [H_{n-1}]_i & \dots & [H_{n-p}]_i \\ \vdots & & \vdots \\ [H_{N_t-1}]_{N_0} & \dots & [H_{N_t-p}]_{N_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[H_p]_1 \\ \vdots \\ -[H_{N_t}]_1 \\ \vdots \\ -[H_n]_i \\ \vdots \\ -[H_{N_t}]_{N_0} \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 15-63}$$

其中,

$N_t$  最末一个时间抽样序号

$N_0$  响应自由度数

令

$$R_{kl} = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{n=p}^{N_t} ([H_{n-k}]_i^t [H_{n-l}]_i) \quad \text{Eqn 15-64}$$

则有

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \dots & R_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{1,0} \\ -R_{2,0} \\ \vdots \\ -R_{p,0} \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 15-65}$$

有限差分方程的阶次  $p$  与数据的模态数有关, 服从于式 15-62。更可取的是由方法本身去确定。对有限差分方程的系数按最小二乘法求解时, 考察最小二乘误差随假设阶次增减而变化的状况。当这一数学模型所取的阶次增加到足于描述数据存在的物理模态数时, 最小二乘误差应该明显地突然变小。

由式 15-62 表示的条件表明, 在足于描述数据的模态数与数学模型阶次之间具有非线性关系。模态数 ( $N$ )、模型阶次 ( $p$ ) 及参考自由度数 ( $N_t$ ) 三者之间的关系见表 15.2。可看出, 8 阶的模型可描述 11 个或 12 个模态, 如果有 3 个输入数据被同时作分析的话。在误差图上, 对应 11 个或 12 个模态, 表明有同样的最小二乘误差。

表 15.2 模型阶次  $p$  (表内数据)、模态数  $N$  和参考自由度数  $N_i$  之间的关系

N	$N_i=1$	$N_i=2$	$N_i=3$	$N_i=4$	$N_i=5$	$N_i=6$
1	2	1	1	1	1	1
2	4	2	2	1	1	1
3	6	3	2	2	2	1
4	8	4	3	2	2	2
5	10	5	4	3	2	2
6	12	6	4	3	3	2
7	14	7	5	4	3	3
8	16	8	6	4	4	3
9	18	9	6	5	4	3
10	20	10	7	5	4	4
11	22	11	8	6	5	4
12	24	12	8	6	5	4
13	26	13	9	7	6	5
14	28	14	10	7	6	5
15	30	15	10	8	6	5
16	32	16	11	8	7	6
17	34	17	12	9	7	6
18	36	18	12	9	8	6
19	38	19	13	10	8	7
20	40	20	14	10	8	7
21	42	21	14	11	9	7
22	44	22	15	11	9	8
23	46	23	16	12	10	8
24	48	24	16	12	10	8
25	51	25	17	13	10	9
26	52	26	18	13	11	9
27	54	27	18	14	11	9
28	56	28	19	14	12	10
29	58	29	20	15	12	10
30	60	30	20	15	12	10
31	62	31	21	16	13	11
32	64	32	22	16	13	11

如同局部估计的 LSCE 法, 仍旧可以建立稳态图来确定最佳模态数。除了比较由连续改变模型阶次而算出的频率和阻尼之外, 还可以比较模态参预因子的稳定性。15.2.3 节指出, 模态参预因子与参考自由度的模态振型系数成比例。因此, 当模型阶次增加时, 与结构模态相对应的模态参预因子的值也应该是稳定的。增加这一附加判据, 要求稳态图必须是清晰的, 从中能明确区分出计算模态和物理模态。

另外, 模态参预因子本身可用于识别物理模态。如果按最大值作规一(正则)化, 对于结构模态而言, 所有的模态振型系数应该接近于实数, 即它们或者同相, 或者反相。

## 举例

为了弄清楚这一方法，让我们再次来考虑前面第 192 页讨论过的例子。假定例子所代表的系统满足互易原理，即  $\bar{h}_{12}$  等于  $\bar{h}_{21}$ ，而向量  $[h_{12} \ h_{21}]$  则代表了响应自由度 1 与参考自由度 1 和 2 之间的 **IR** 数据。

考虑仅有一个模态的模型（当  $N_i=2$  时，取  $P=1$ ），方程 15-55 和 15-56 分别变为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

因此，得到的矩阵多项式为：

$$([l_1 \ l_2]) \begin{pmatrix} z & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此特征值问题的解为：

$$z = \pm j, \lambda = 0 \pm j \frac{\pi}{2\Delta t}$$

$$[L] = [\pm j, 1]$$

注意到所得频率和阻尼的解与前面局部估计 LSCE 法的结果是一样的（见第 192 页），但增加了模态参预因子的估计。本例中，系统对参考自由度 1 和 2 之间的响应有  $90^\circ$  的相位差，这是因为  $h_{11}$  是余弦函数， $h_{12}$  为正弦函数。所得到的估计看来是对的。

### 15.3.6 最小二乘频域（LSFD）法

LSFD 是用来估计留数或模态振型系数的多自由度方法。该方法要求频率和阻尼值已经先估计出来。这种方法既适用于单输入情况，也适用于多输入情况。

考虑式 15-66 表示的数学模型：

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N \left( r_{ijk} e^{\lambda_k t} + r_{ijk}^* e^{\lambda_k^* t} \right) \quad \text{Eqn 15-66}$$

如果模态频率和阻尼的估计已获得，那么，作为这一数学模型中未知数的留数，表现上是线性的。

为了估计出留数，方程 15-66 被转换回频域。由此，假定抽样数据表示为：

$$h_{ijp} = \sum_{k=1}^N \left[ \frac{r_{ijk}}{j\omega_p - \lambda_k} + \frac{r_{ijk}^*}{j\omega_p - \lambda_k^*} \right] + ur_{ij} - \frac{lr_{ij}}{\omega_p^2} \quad \text{Eqn 15-67}$$

其中，

$ur_{ij}$  为上残余项，用于逼近频率高出  $\omega_{\max}$  的模态对  $h_{ijp}$  的影响

$lr_{ij}$  为下残余项，用于逼近频率低于  $\omega_{\min}$  的模态对  $h_{ijp}$  的影响

这些项的意义均在图 15-3 中有所说明。应该注意的是，留数也好，上、下残余项也好，都是局部特性，即它们取决于特定的响应自由度和参考自由度。

LSFD 法的基础是方程 15-67 所表示的数学模型。留数和上、下残余项的最小二乘估计是通过分析选定频带内所有数据的值而求得的。

#### 15.3.6.1 多输入最小二乘频域法

多输入最小二乘频域法是一种估计模态振型的多自由度方法。该方法对有关几个参考自由度的数据作同时的分析，以估计出依赖于参考自由度的模态振型系数。

考虑由方程 15-58 表示的数学模型：

$$[H]_i = \sum_{k=1}^N \left( v_{ik} [L]_k e^{\lambda_k t} + v_{ik}^* [L^*]_k e^{\lambda_k^* t} \right) \quad \text{Eqn 15-68}$$

如果模态频率、阻尼和模态参预因子的估计已经获得，那么作为这一数学模型中唯一未知的模态振型系数表现上是线性的。进而，它们仅取决于响应自由度（而不取决于参考自由度），这样，对于几个参考自由度的数据便可同时地作分析。

为了估计出模态振型系数，将方程 15-16 转换回频域。附加上、下残余项后，假定抽样数据表示如下式：

$$[H_p]_i = \sum_{k=1}^N \left( \frac{v_{ik} [L]_k}{j\omega_p - \lambda_k} + \frac{v_{ik}^* [L^*]_k}{j\omega_p - \lambda_k^*} \right) - \frac{[LR]_i}{\omega_p^2} + [UR]_i \quad \text{Eqn 15-69}$$

其中，

$[UR]_i$  为响应自由度  $i$  与所有参考自由度之间的上残余,  $N_i$  维行向量

$[LR]_i$  为响应自由度  $i$  与所有参考自由度之间的下残余,  $N_i$  维行向量

多输入 LSFD 法就是以方程 15-69 为基础的方法。

### 15.3.7 频域直接参数识别 (FDPI) 法

用 FDPI 法可以同时估计出固有频率、阻尼和多个模态的模态振型。如果有相对于多个参考的数据, 一种多输入分析法也可以萃取出模态参预因子的值。在这种情况下, FDPI 技术呈现出与 LSCE 时域法有同等的功效。

#### 理论背景

FDPI 法的基础是机械结构的二阶微分方程:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t) \quad \text{Eqn 15-70}$$

将方程转换至频域, 重新解释为与测量频响应函数相关的关系式:

$$[-\omega^2 I + j\omega A_1 + A_0][H(\omega)] = j\omega B_1 + B_0 \quad \text{Eqn 15-71}$$

其中,  $\omega$  频率变量

$A_1 = M^{-1}C$ , 经质量修正的阻尼矩阵,  $N_0 * N_0$  维

$A_0 = M^{-1}K$ , 经质量修正的刚度矩阵,  $N_0 * N_0$  维

$H(\omega)$  频响应函数矩阵,  $N_0 * N_i$  维

$B_0, B_1$  激振力分布矩阵,  $N_0 * N_i$  维

注意, 在单输入情况下,  $H(\omega)$  矩阵变为对应于某一频率的 **FRF** 列向量。

方程 15-71 对于每一离散频率值  $\omega$  都是成立的。在多输入多输出情况下, 对所有获得的 **FRF**, 都列出这样的方程, 则未知的矩阵系数  $A_0, A_1, B_0$  和  $B_1$  就可以由测量的  $H(\omega)$  数据估计出来。因此, 方程 15-71 意味着测量的  $H(\omega)$  数据可以用常矩阵系数二阶线性模型来描述。在识别出这些矩阵系数后, 系统的极点和模态振型就可以通过下列系统矩阵的特征值分解而得出:

$$\begin{bmatrix} -A_1 - A_0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 15-72}$$



---

由特征值分解可得到由极点组成的对角线矩阵 $[\Lambda]$ 和特征向量矩阵 $\Psi$ 。下面一节将解释清楚，所得到的矩阵 $\Psi$ 并非就是模态振型矩阵，但与其有关。

在最后一步，模态参预因子可利用得到的 $[\Lambda]$ 和 $\Psi$ 矩阵，通过另一最小二乘问题估计出来。

### 数据压缩

在估计系统矩阵时，对所有可得到的数据，通过将其映射到其主分量上的方法加以压缩。为此，首先要求出对应所有响应测量的最大主分量数，然后再进行分析。得到的矩阵 $\Psi$ 代表了这种虚拟的响应测量点组的模态矩阵。

数据压缩具有下列优点：

- 估计模型参数的计算时间可大大缩短。这一点对于获取最小二乘误差图和稳态图来说尤为重要。
- 起作用的模态数，更容易通过奇异值分析予以确定。

### 残余量修正项

FDPI 技术直接对频域数据作运算分析。因此可以考虑分析频带带外模态的影响。当低于或高于选定频带的模态对被分析的数据有影响时，这种考虑可以明显地改善分析结果。在考虑到模型包含有上残余项和下残余项之后，方程 15-71 变为：

$$[-\omega^2 I + j\omega A_1 + A_0] H(\omega) = \omega^{-2} C_{-2} + \omega^{-1} C_{-1} + C_0 + \omega C_1 + \omega^2 C_2 \quad \text{Eqn 15-73}$$

模型中残余项的引进，会影响到频率、阻尼和模态振型的估计（对于多输入分析来说，同样影响到模态参预因子的估计）。

### 最佳模态数的确定

如同 LSCE 法，也可建立一最小二乘误差图，用以确定选定频带内的最佳模态数。因为数据是映射到主分量上的，这种误差图看起来会有些不一样。对于小的模型，只利用第一（最重要）主分量数据，而总体误差将显著缩小。当利用越来越多的主分量，以估计更多的模态时，最小二乘误差图有可能失真，它们的信息将变得不那么有价值。

---

对于 FDPI 技术来说, 估计最佳模态数更为可靠的工具是奇异值图。这种奇异值图不仅用于替换最小二乘误差图, 在一定程度上甚至代替稳态图, 因为可以利用它来确定 LSCE 法中协方差矩阵的秩。矩阵的秩是被分析数据所含最佳模态数的一个良好指数。矩阵的秩可以由奇异值分解而得出。表示正则化的奇异值随阶次升高而变化的图象称为奇异值图。矩阵的秩取决于奇异值图上某奇异值与前面的奇异值相比较显著地变小的那一点。

用 LSCE 法建立稳态图时, 对相同的数据通过不断增加模型的阶次予以描述。实施奇异值图这一革新的步骤, 可节省计算时间。

### 贗自由度

由于识别算法本身的原因, FDPI 技术只能估计出与测量自由度数同等的模态数。这意味着, 一般地说

$$N_m \leq N_0$$

然而, 采用一种类似于时域 LSCE 法的途径, 可以利用得到测量建立所谓“贗”自由度, 从而产生足够的“新”测量, 以便在利用少到哪怕只有一个测量的情况下, 也能识别出全部模态。

### 模态振型的估计

利用由主响应得到的、压缩的模态振型矩阵  $\Psi$ , 以及主响应与物理响应之间的传递矩阵, 通过扩展被压缩的  $\Psi$  矩阵, FDPI 算法可以识别出完整的模态振型。

模态振型扩展方法有下列优点:

- 速度非常快 (无须像 LSFD 法那样求最小二乘解)。
- 按模态空间的普通方位识别模态振型向量, 而不是彼此独立地求解最小二乘问题, 一个接一个地估计其元素。

如果不采用模态振型扩展方法, 那么可以用 LSFD 法估计模态振型。

### 正则模态

借助于矩阵  $[A_0]$ 、 $[A_1]$  和式 15-72 的特征值分解, 可以估计出有阻尼的模态振型  $\Psi$  (通常为复数), 或无阻尼正则化的实模态。

用 FDPI 技术, 可以只对压缩的质量矩阵和刚度矩阵解特征值问题识别出正则模态:

$$M_{-1}K\Psi_n = \Psi_n\Lambda^2$$

Eqn 15-74

特征值问题大多数属于用 FEM（有限元）软件包去求解忽略阻尼影响的系统。而用 LSFD 技术去估计实模态则采取完全不同的途径。LSFD 技术在识别实值模态振型系数时，采用的是最优最小二乘意义上（根据比例阻尼的假定）对数据组的曲线拟合，而 FDPI 法采用的是类似于 FEM 的途径。

阻尼值是通过增强对增强的 **FRF**，按每个模态分别采用圆拟合法求得的。而增强的 **FRF** 则是通过将主 **FRF** 投影到缩减的模态振型上解算出来的。

## 15.4 最大似然法

多变量频域最大似然（ML）估计被用于和它们的置信区间放在一起识别模态参数。其求解器对非参数噪声模型的误差具有鲁棒性，且能应付动态范围很大的测量。

虽然 LSCE—LSFD 联合应用在求解众多振动问题中被证明是有效的，但该方法似有一些不足之处：

- 当参考（输入）自由度大于 3 时，多参考 LSCE 估计并非总能做得很好
- 频率间隔必须是均匀的
- 该方法不能完好地对付有严重干扰的测量，这种情况下稳态图有可能不清晰
- 这种方法不能提供模态参数估计的置信区间

### 15.4.1 理论综述

所采用的是一种带标尺的矩阵分式描述，也就是大家熟知的公分母模型。输出  $o$  与输入  $i$  之间的频响函数模型化为：

$$\hat{H}_{oi}(w_k) = \frac{N_{oi}(w_k)}{D(w_k)} \quad \text{Eqn 15-75}$$

$$i=1, \dots, N_i ; \quad o=1, \dots, N_o$$

$$\text{取} \quad N_{oi}(\mathbf{w}_k) = \sum_{r=0}^p \Omega_r(\mathbf{w}_k) A_r$$

称之为输出  $o$  与输入  $i$  之间的分子多项式。而

$$D(\mathbf{w}_k) = \sum_{r=0}^p \Omega_r(\mathbf{w}_k) B_{oir}$$

则称为公分母多项式。令

$$\Omega_r(\mathbf{w}_k) = e^{-j\mathbf{w}_k \Delta t \cdot r}$$

称之为离散时间模型的基函数。 $\Delta t$  为采样时间间隔。复值系数  $A_r$  和  $B_{oir}$  为待估计的参数。这一方法被用于优化计算速度和存储要求，首先被解释为最小二乘求解器，然后其结果被外推至 ML 估计。

### 最小二乘求解器

方程 15-75 表示的、测量的 **FRF**  $\hat{H}_{oi}(\mathbf{w}_k)$  的数学模型，在乘以分母多项式和移项后，变为：

$$\sum_{r=0}^p \Omega_r(\mathbf{w}_k) B_{oir} - \sum_{r=0}^p \Omega_r(\mathbf{w}_k) H_{oi}(\mathbf{w}_k) A_r = 0 \quad \text{Eqn 15-76}$$

$$i=1, \dots, N_i ; \quad o=1, \dots, N_o ; \quad k=1, \dots, N_k$$

注意到方程 15-76 可以用一权函数  $W_{oi}(\mathbf{w}_k)$  倍乘，因而估计出的参数通常也可以用一个适当的权函数来修正。

方程中的待定参数属线性参数，它们可以改写成下面形式：

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 & Y_1 \\ 0 & X_2 & & 0 & Y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & X_{N_o N_i} & Y_{N_o N_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{N_o N_i} \\ A \end{bmatrix} \approx 0$$

其中，

$$B_k = \begin{bmatrix} B_{oi0} \\ B_{oi1} \\ \mathbf{M} \\ B_{oip} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \mathbf{M} \\ A_p \end{bmatrix},$$

$$X_n(w_k) = W_{oi}(w_k) [\Omega_0(w_k), \Omega_1(w_k), \Lambda, \Omega_p(w_k)]$$

$$Y_n(w_k) = -X_n(w_k) \cdot H_{oi}(w_k) \quad n=1, \dots, N_o N_i$$

这一最小二乘问题的复数雅可毕（Jacobian）矩阵  $J$

$$J = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 & Y_1 \\ 0 & X_2 & & 0 & Y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & X_{N_o N_i} & Y_{N_o N_i} \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 15-77}$$

有  $N_k N_o N_i$  行和  $(P+1)(N_o N_i + 1)$  列（其中  $N_K \gg P$ ， $n$  为多项式的阶次）。由于方程 15-76 每个元素已经过  $W_{oi}(w_k)$  的加权，方程 15-77 中的  $X_k$  可能完全不同。

### ML 求解器

为了更容易获得整体估计，所采用的参考测量（即 **FRF** 数据），最好是将传感器逐一移过实验结构上各规定测点得到的测量（实验模态分析通常就是这样做的）。因此，所采用的原始数据乃是 **FRF**，而不是输入谱和输出谱（即非参考数据）。不过，应该小心避免 **FRF** 受系统误差的污染。

### ML 方程

假定不同 **FRF** 彼此不相关，（负的） $\log$  似然函数压缩为：

$$l_{ML}(q) = \sum_{o=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{K=1}^{N_K} \frac{|H_{oi}(q, w_k) - H_{oi}(w_k)|^2}{\text{var}\{H_{oi}(w_k)\}} \quad \text{Eqn 15-78}$$

$q = [B_1^T, \Lambda, B_{N_o N_i}^T, A^T]^T$  的 ML 估计由方程 15-78 的极小化给出。这可以通过所谓高斯—牛顿优化算法来做到，该算法利用评价函数 15-78 的二次形式。高斯—牛顿迭代由下列步骤完成：

(a) 对  $\delta_m$  求解  $J_m^H J_m \delta_m = -j_m^H r_m$

(b) 设  $\theta_{m+1} = \theta_m + \delta_m$

取  $r_m = r(\theta_m)$ ,  $J_m = \partial r(\theta) / \partial \theta|_{\theta_m}$  及

$$r(q) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{H_{11}(q, w_1) - H_{11}(w_1)}{\sqrt{\text{var}\{H_{11}(w_1)\}}} \\ \vdots \\ \frac{H_{11}(q, w_{N_K}) - H_{11}(w_{N_K})}{\sqrt{\text{var}\{H_{11}(w_{N_K})\}}} \\ \vdots \\ \frac{H_{12}(q, w_1) - H_{12}(w_1)}{\sqrt{\text{var}\{H_{12}(w_1)\}}} \\ \vdots \\ \frac{H_{N_o N_i}(q, w_{N_K}) - H_{N_o N_i}(w_{N_K})}{\sqrt{\text{var}\{H_{N_o N_i}(w_{N_K})\}}} \end{array} \right\}$$

导出置信区间

ML 估计  $\hat{\theta}_{ML}$  的协方差矩阵通常接近于相应的 **Cramér-Ray** 下边界 (CRLB), 即  $\text{cov}\{\hat{\theta}_{ML}\} \geq \text{CRLB}$ 。CRLB 的良好近似由下式给出:

$$\text{CRLB} \cong [J_m^H J_m]^{-1} \quad \text{Eqn 15-79}$$

在高斯—牛顿算法的最后反演步骤中, 以  $J_m$  对雅可毕矩阵作出评估。当主要是关心共振频率和阻尼比的不确定性时, 事实上只要求有分母系数的协方差矩阵。因此, 无需对全矩阵求逆来得出极点的不确定性 (或共振频率和阻尼比的不确定性)。

## 15.5 静态补偿模态的计算

模态综合法可用以在低频区域内将若干子结构组合在一起。而每一个子结构的模态模型, 必须是彼此分离即无耦合项的。不过, 由于模态截断误差的原因, 组合的结果可能不是最恰当。而截断误差的上升只是由于只记入有限个模态数。

为了改善子结构组合的结果, 可引进一静态补偿项和一动态补偿项如下:

$$[H^C(\omega)] \approx [H^R(\omega)] + [H^0] + \omega^2 [H^1] \quad \text{Eqn 15-80}$$

$\uparrow$   
 设想的精  
确 FRF

$\uparrow$   
 模 态  
FRF

$\uparrow$   
 静 态 补  
偿 项

$\uparrow$   
 动 态 补  
偿 项

截断误差可通过一个台劳展开式的二次式函数来近似。实际表明，真实的截断误差与二次式估计之间有良好的 consistency。

静态补偿项可由起控制作用的（驱动点）**FRF** 导出。这些静态补偿项由上残余项求出，而上残余项则是对子结构连接点的 **FRF** 矩阵（含驱动点 **FRF** 和跨点 **FRF**）作曲线拟合而求得。借助于奇异值校正将上残余项转换为规一化的模态振型和模态参预因子。这样的模态振型和模态参预因子，日后可作为模态子结构，集成至两个子结构的规一化模态中。

### 静态补偿模态的频率

静态补偿模态的频率  $\omega_0$  必须大大高于在子结构组合中取作计算的所有模态牵涉的频带。模态子结构的频带上限，被定义为上残余频率，采用符号  $w_{\text{上残余}}$ 。一般取

$$w_0 = 10.0 w_{\text{上残余}}$$

### 奇异值分解（SVD）

为了求出静态补偿项，需要对上残余项矩阵作奇异值分解。这是通过将所有的上残余项一起放在一个大矩阵内来得到的。即

$$R_{\text{上残余}} = U \Sigma V^T$$

静态补偿模态的模态振型值  $\psi_j$ ，取决于左奇异值向量  $U_j$ ，特征值  $\sigma_j$  以及频率  $\omega_0$ ：

$$\psi_j = U_j \sqrt{\sigma_j} \omega_0$$

模态参预因子的值  $L_j$  可由模态振型的值  $\psi_j$  由下式求出：

$$L_j = -\frac{j}{2 m_r \omega_0} \psi_j$$

其中， $m_r = \|V\| / \|U\|$

由此，有

$$L_j = -\frac{j}{2 \omega_0} \sqrt{\sigma_j} \omega_0 V_j$$

---

## 第十六章 工作模态分析

本章讨论工作模态分析的理论和技术背景。内容包括：

- ☐ 实施工作模态分析的理由
- ☐ 理论基础

### 16.1 为什么要做工作模态分析

经典的模态模型识别方法，是基于在试验室内进行试验，对结构施加人为的动力激励并进行频响函数（**FRF**）测量。然而，结构承受的真实载荷，与其在试验室试验中施加的载荷之间，常有很大的差别。由于现实的系统总是存在某种程度的非线性因素，真实载荷作用下得到的模型，是在典型工作点作线性化处理的结果。也就是说，环境对系统特性的影响（如支承的预应力，载荷使刚度增加及气动弹性影响等）将被计入。

在许多情况下，如海洋平台受到微扰动，建筑结构受车流和风力激励等，对他们进行人工激励试验是很困难的，不说不可能吧，至少用常规的试验设备是难于进行的。在这种场合，工作状态下的数据常常是唯一可供利用的数据。

另一些情况是，为了做产品质量鉴定，或工况下的状态分析，或其他目的，已经通过多种途径测量出巨量的工作数据组。那么，把经典的工作数据分析过程扩展到进行模态参数识别，就有可能得到对这些数据更胜一筹的诠释。

最后，依据工作状态建立模型的有效性，开拓了以模态分析为基础的现场故障诊断和危险监测的途径。因此，从工作数据中萃取确切的模态参数非常有意义。

#### 工作数据的传统处理

在工程界，一种公认的工作模态分析方法，是基于对测点响应的自功率谱和互功率谱进行峰值检索，这样的处理，被称为“运行模态分析（Running Modal Analysis）”。通过选择谱峰，近似估计共振频率，并得到所谓“ODS”（Operational Deflection Shape）。这种“ODS”，可以被比较或者进一步分解为与试验室模态试验相互对应的结果。

将工作状态的数据组和实验室测量得到的模态数据库进行比较，可以评价特定工作条件下的优势模态。在特殊的、存在相关输入情况下（例如道路试验），



---

“主分量技术”（Principal Component Technique）被用来分解多输入问题，使之成为单输入问题的子集，各子集可以并行分析。这种分解的数据组可以馈入动画显示程序，诠释对应每一主分量的工作变形，使之作为频率的函数。

自谱和互谱峰检索法，要求有好的工程技巧，筛选出相应于系统共振的峰。此外，它无法获得模态阻尼的信息，而且在密集模态情况下，由 ODS 也难于导出确切的模态振型。因此，从试验室的频响函数测量中获得模态模型的基本认识，对于成功地实施工作模态分析往往仍是不可缺少的。

曲线拟合技术，可直接从工作数据中萃取模态参数，是工程师们最喜欢采用的技术。用这种技术可以识别出工作状态下激励出的优势模态，而且这些信息甚至可用来改进某些在试验室进行的 **FRF** 试验。

### 采用工作模态分析

分析的目的，在于从工作状态下取得的数据中，萃取出模态频率、阻尼和模态振型。出发点是，结构受到自然激励的作用，如：结构周围的气流（风力透平、飞机、直升飞机等），道路不平输入（车辆），流体流动（管道），车流（桥梁），以及内部激励（旋转机械）等等。

理论上，如果在工作状态下，输入力可以被测量出来，那么，传统的、以 **FRF** 测量为基础的模态分析技术就可以被采用。然而，工作模态分析瞄准的是输入不可能被测量的特殊应用。分析工作只能中对响应信号，例如加速度信号来做。理想的情况下，输入具有白谱性质。

这里提出的三种方法，都是利用时域相关函数进行分析。自相关函数和互相关函数，可以直接用时域数据计算，也可以从测量到的自功率谱和互功率谱，通过逆 **FFT** 得出。

## 16.2 理论基础

本节论述利用工作数据识别模态参数的数学背景。

近年来，关于仅仅从输出数据萃取模态参数的技术受到人们的重视，已提出许多种方法，其中包括：

- 自回归移动平均模型（ARMA）
- 自然激励技术（NExT）
- 随机子空间法（Stochastic Subspace Methods）

## 自然激励技术 (NExT)

NExT 技术的基本法则是，响应之间的相关函数可以表示为衰减正弦分量之和。每个衰减正弦分量包含一个有阻尼固有频率和一个阻尼比参数，等效于一个相应的结构模态。从而，那些常用的模态参数识别技术，譬如多参考最小二乘复指数法 (LSCE) 等，也可以用来在仅有输出的情况下进行系统识别。

## 随机子空间法

用子空间法，首先求出压缩的系统状态组，然后识别出状态空间模型。再由状态空间模型，求出模态参数。“子空间”这一术语，来自控制理论——它是群论 (group methods) 中的一个族名 (family name)，识别过程采用奇异值分解方法。

下文将提及两种子空间技术，BR (Balanced Realization) 法和 CVA (Canonical Variate Analysis) 法，即均衡实现法和正则变量分析法。

### 16.2.1 随机子状态识别法

讨论随机离散时间状态空间模型：

$$\begin{aligned}\{x_{k+1}\} &= [A] \{x_k\} + \{w_k\} \\ \{y_k\} &= [C] \{x_k\} + \{v_k\}\end{aligned}\quad \text{Eqn 16-1}$$

其中， $\{x_k\}$      $n$  维状态向量

$\{y_k\}$      $N_{resp}$  维输出向量 (“resp”指响应)

$\{w_k\}$ 、 $\{v_k\}$     零均值、白噪声向量序列，分别代表处理噪声和测量噪声。

对于足够大的  $p$  值和  $q$  值，矩阵  $[A]$  和  $[C]$  表示状态空间矩阵和输出矩阵。

就这一数学模型而言， $p$  阶能观测矩阵  $[O_p]$  和  $q$  阶能控制矩阵  $[C_q]$  定义为

$$[O_p] = \begin{bmatrix} [C] \\ [C][A] \\ \vdots \\ [C][A]^{p-1} \end{bmatrix}; [C_q] = [ [G] \ [A][G] \dots [A]^{q-1}[G] ] \quad \text{Eqn 16-2}$$

其中,  $[G] = E\left[\begin{Bmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \end{Bmatrix}^T\right]$ ,  $E[\bullet]$  则代表数学期望值。假定矩阵  $[O_p]$  和  $[C_q]$  的秩均为  $2N_m$ , 其中  $N_m$  为系统的模态数。

系统的动态特性被矩阵  $[A]$  的特征值和特征向量的能观测部分完全表征。

$[A]$  的特征值分解给出下式

$$[A] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^{-1} \quad \text{Eqn 16-3}$$

式 16-3 的复特征向量和复特征值通常以共轭复数形式成对出现。矩阵  $[\Lambda]$  对角线上的离散型特征值  $I_r$  可以通过下面式子转换成连续型的特征值或者系统极点  $m_r$  :

$$I_r = e^{m_r \Delta t} \Rightarrow m_r = s_r + jw_{dr} = \frac{1}{\Delta t} \ln(I_r) \quad \text{Eqn 16-4}$$

其中,  $s_r$  和  $w_{dr}$  分别为第  $r$  阶模态的阻尼因子和有阻尼固有频率, 而第  $r$  阶模态的阻尼比  $z_r$  则由下式求出:

$$z_r = -\frac{s_r}{\sqrt{w_{dr}^2 + s_r^2}} \quad \text{Eqn 16-5}$$

各传感器安装部位的第  $r$  阶模态振型  $\{y\}_r$ , 就是  $[\Phi]$  中系统特征向量  $\{f\}_r$  的能观测部分, 由下式给出:

$$\{y\}_r = [C]\{f\}_r \quad \text{Eqn 16-6}$$

所萃取的模态振型, 不能被质量正则化, 因为该正则化需要有输入力的测量。

### 随机实现问题

这里的问题是, 仅仅用输出测量  $\{y_k\}$ , 做相似变换, 要得到式 16-2 中矩阵  $[A]$  和  $[C]$  的估计。这就是大家熟知的随机实现问题, 许多从事控制理论和统计学研究的人都是这样称呼这一命题的。【4】、【5】、【6】

下面简单讨论两种相关—从动子空间算法, 即均衡实现 (BR) 法和正则变量分析 (CVA) 法。

给定一个相关序列：

$$[R_k] = E\left(\{y_{k+m}\}\{y_m\}_{ref}^T\right) \quad \text{Eqn 16-7}$$

其中  $\{y_k\}_{ref}$  为包含  $N_{ref}$  个参考输出的向量， $m$  为抽样序号。

对于  $p \geq q$  情况，令  $[H_{p,q}]$  代表下面的长方块 Hankel 矩阵：

$$[H_{p,q}] = \begin{bmatrix} [R_1] & [R_2] & \cdots & [R_q] \\ [R_2] & [R_3] & \cdots & [R_{q+1}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [R_p] & [R_{p+1}] & \cdots & [R_{p+q-1}] \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 16-8}$$

从模型方程直接计算  $[R_k]$  导致下面的因子分解属性：

$$[H_{p,q}] = [O_p][C_q] \quad \text{Eqn 16-9}$$

令  $[W_1]$  和  $[W_2]$  为用户定义的两个可逆加权矩阵，其维数分别为

$p \times N_{resp}$  和  $q \times N_{resp}$ 。用  $[W_1]$  和  $[W_2]$  左乘和右乘 Hankel 矩阵，并对加权 Hankel

矩阵进行奇异值分解，给出下式：

$$[W_1][H_{p,q}][W_2]^T = [U_1] [U_2] \begin{bmatrix} [S_1] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V_1]^T \\ [V_2]^T \end{bmatrix} = [U_1] [S_1] [V_1]^T \quad \text{Eqn 16-10}$$

其中  $[S_1]$  包含降阶的  $n$  个非零奇异值， $[U_1]$  的  $n$  列为相应的左奇异值向量， $[V_1]$  的  $n$  列为相应的右奇异值向量。

另一方面，加权 Hankel 矩阵的因子分解属性导致

$$[W_1][H_{p,q}][W_2]^T = [W_1][O_p][C_q][W_2]^T \quad \text{Eqn 16-11}$$

从式 16-10 和 16-11，可以容易地看出，能观测矩阵可以通过一相似变换得出，即

$$[O_p] = [W_1]^{-1}[U_1][S_1]^{1/2} \quad \text{Eqn 16-12}$$

然后，通过对  $[O_p]$  的移位结构作相似变换，得到系统矩阵的估计，即

$$[C] = \{[O_p] \text{ 的第一子块行 } [O_p]\} \quad \text{Eqn 16-13}$$

而  $[A]$  则按下式来解算：

$$[o_{p-1}^\uparrow] = [o_{p-1}][A] \quad \text{Eqn 16-14}$$

其中  $[o_{p-1}]$  是从  $[o_p]$  中删除最后一个子块行后得到的矩阵，而  $[o_{p-1}^\uparrow]$  则是一个子块行的上移位矩阵。

选择不同的权，导致不同的随机子空间识别方法。两种特殊的权矩阵选择，得到均衡现实法和正则变量分析法。

#### 均衡实现 (BR) 法

$$[W_1] = [I], \quad \text{且} \quad [W_2] = [I] \quad \text{Eqn 16-15}$$

也就是说，不作任何加权。

#### 正则变量分析 (CVA) 法

**CVA** 要求所有响应数据都用作参考，即  $\{y_k\} = \{y_k\}_{ref}$ 。从而，式 16-7

定义的相关矩阵  $[R_k]$  做自乘。然后由下式定义 Toeplitz 矩阵：

$$[\mathfrak{R}^+] = \begin{bmatrix} [R_0] & [R_1]^T & [R_{p-1}]^T \\ [R_1] & [R_0] & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [R_{p-1}] & [R_{p-2}] & [R_0] \end{bmatrix}; \quad [\mathfrak{R}^-] = \begin{bmatrix} [R_0] & [R_1] & [R_{p-1}] \\ [R_1]^T & [R_0] & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [R_{p-1}]^T & [R_{p-2}]^T & [R_0]^T \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 16-16}$$

对  $[\mathfrak{R}^+]$  和  $[\mathfrak{R}^-]$  作满秩分解

$$[\mathfrak{R}^+] = [L^+][L^+]^T; [\mathfrak{R}^-] = [L^-][L^-]^T \quad \text{Eqn 16-17}$$

在 **CVA** 情况下，权矩阵选取如下：

$$[W_1] = [L^+]^{-1} \quad \text{and} \quad [W_2] = [L^-]^{-1} \quad \text{Eqn 16-18}$$

采用这一加权后，式 16-10 的奇异值相当于所谓“正则角”。**CVA** 加权的物理效应是系统的各阶模态在能量上得到均衡。那些在工作状态下没有得到很好激励的模态，用这种方法仍可能得到较好的识别。

#### 相关—驱动随机子空间法的有效实施

式 16-10 只保留“理想的”子块—Hankel 矩阵，并且视其为有限阶次系统。

实际上，系统有更大的阶次，甚至有无限大的阶次，而式 16-8 的 Hankel 矩阵和式 16-16 的 Toeplitz 矩阵则填满试验得来的相关值，该相关值由下式计算：

$$[\hat{R}_k] = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^M \{y_{m+k}\} \{y_m\}_{ref}^T \quad Eqn 16-19$$

其中  $M$  是利用的采样数据总数。

虽然式 16-19 是相关函数的较佳估计，它不存在泄漏误差问题，还可用于非平稳数据分析，但是式 16-19 在时域内赋值，在计算工作上却无法做到高效率。相关函数的快速估计，可以通过自功率谱和互功率谱的逆 FFT 来实现，自功率谱和互功率谱则是以 FFT 为基础，加上分段平均而求得的。这时，平稳信号的假定和时域加窗（例如汉宁窗）对于避免泄漏来说是必要的。

加权实验值 Hankel 矩阵的奇异值分解表示为：

$$[W_1][\hat{H}_{p,q}][W_2] = [\hat{U}_1 \quad \hat{U}_2] \begin{bmatrix} [\hat{S}_1] & [0] \\ [0] & [\hat{S}_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\hat{V}_1]^T \\ [\hat{V}_2]^T \end{bmatrix} = [\hat{U}_1][\hat{S}_1][\hat{V}_1]^T + [\hat{U}_2][\hat{S}_2][\hat{V}_2]^T \quad Eqn 16-20$$

而

$$\begin{aligned} [\hat{S}_1] &= diag(\sigma_1 \cdots \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \cdots \sigma_n \geq 0 \\ [\hat{S}_2] &= diag(\sigma_{n+1} \cdots \sigma_{pR_{exp}}), \quad \sigma_{n+1} \geq \sigma_{n+2} \cdots \sigma_{pR_{exp}} \geq 0 \end{aligned} \quad Eqn 16-21$$

$n$  阶模态的识别，通过截取奇异值，即保留  $[S_1]$  来获得。然后，由下式近似得到能观测矩阵

$$[\hat{O}_p] = [W_1]^{-1} [\hat{U}_1][\hat{S}_1]^{1/2} \quad Eqn 16-22$$

模态的阶数一般是未知的，观察奇异值可帮助选定  $n$  值，这就是依据  $\sigma_n \gg \sigma_{n+1}$  这一特征。事实上，这个准则并非总是能用，有时可能看不出有显著的奇异值跌落。这时，需用其他技术，例如用稳态图来寻找出准确的模态阶数。

计算步骤与式 16-11 至 16-18 所描述的步骤是相似的，只是其中的理论值被实验值所代替罢了。

## 16.2.2 自然激励技术 (NExT)

### 多参考最小二乘复指数法 (LSCE) 应用于自相关和互相关函数

多参考 **LSCE** 应用于冲激响应函数，是一种良好的、大家熟知的常规模态分析技术，它可以得出极点和模态参预因子的总体估计[7]。前已指出，在系统受平稳白噪声激励的前提下，响应信号之间的相关函数，也可以表示成衰减正弦分量之和的形式[8]。

每个衰减正弦分量包含一个有阻尼固有频率和一个阻尼比，他们对应一个结构模态。从而，那些以冲激响应函数作为输入的经典模态参数识别技术，如多参考 **LSCE**、特征系统实现算法 (**ERA**) 和 Ibrahim 时域法等，也适合于用来在工作状态下，从仅仅测量到的响应数据中萃取模态参数。这一技术也称为 **NExT**，即自然激励技术。有意思的是，**ERA** 法应用于用相关函数取代冲激响应函数，本质上与 **BR** 法是一样的。

在数学上，多参考 **LSCE** 法把相关函数分解为衰减正弦分量之和，即

$$[R_k] = \sum_{r=1}^{Nm} \{Y\}_r e^{m_r k \Delta t} \{L\}_r^T + \{Y\}_r^* e^{m_r^* k \Delta t} \{L\}_r^{T*}$$

$$\text{或} \quad [R_k] = \sum_{r=1}^{Nm} \{Y\}_r I_r^k \{L\}_r^T + \{Y\}_r^* I_r^{k*} \{L\}_r^{T*} \quad \text{Eqn 16-23}$$

其中， $I_r = e^{m_r \Delta t}$ ，而  $\{L\}_r$  为有  $N_{ref}$  个常量乘数的列向量，对应第  $r$  阶模态来说，对所有测量点的响应，这些系数是不变的。

(注：对于传统的模态分析来说，这些常量乘数，就是模态参预因子。)

将复指数和常量乘数合在一起， $I_r \{L\}_r^T$  或  $I_r^* \{L\}_r^{T*}$  就是下面矩阵形式的  $r$  阶有限差分方程的解：

$$I_r^k \{L\}_r^T [I] + I_r^{k-1} \{L\}_r^T [F_1] + \Lambda + I_r^{k-t} \{L\}_r^T [F_t] = \{o\}^T \quad \text{Eqn 16-24}$$

其中， $[F_1] \Lambda [F_t]$  为  $N_{ref} \times N_{ref}$  维系数矩阵。

在系统有  $N_m$  个物理模态情况下，式 16-24 中的阶次  $t$  在理论上应等于  $2N_m$  或  $N_{ref}$ ，以便找出  $2N_m$  个特征极点。而事实上，要求设定超量的模态阶数。

由于相关函数为方程 16-24 特征解的线性组合，即  $I_r \{L\}_r^T$  或  $I_r^* \{L\}_r^{T*}$  的线



性组合，因此，相关函数本身也可以作为方程的解，即

$$[R_k][I] + [R_{k-1}][F_1] + \cdots + [R_{k-l}][F_l] = 0 \quad \text{Eqn 16-25}$$

方程 16-25 同时利用了所有响应测量，使得可能对系数矩阵  $[F_1] \Lambda [F_l] \Lambda$  进行整体最小二乘估计。超定可通过考虑所有可获得的响应或选择时间间隔来达到。一旦系数矩阵已知，即可重新列出式 16-24，使之成为一般特征值问题，得出  $N_{ref}$  个特征值  $\lambda_r$ ，产生系统极点  $m_r$  和相应的左特征向量  $\{L\}_r^T$  的估计。

在选择某些输出作为参考函数时，应当选取那些包含所有有关的模态信息的输出。事实上选择输出参考通道，类似于在作传统的模态试验时选择输入参考点。

### 模态振型的萃取和模态认证

与随机子空间法不同点在于，多参考 **LSCE** 法不能得出模态振型。所以，作为第二步，需要利用已识别出的模态频率和模态阻尼比来萃取模态振型。在只有输出数据的情况下，如文献[9]指出的，可通过拟合响应之间的自功率和互功率函数来做到，用作参考的关系式为：

$$X_{mn}(j\omega) = \sum_{r=1}^{N_m} \left( \frac{A_r^{mn}}{j\omega - \mu_r} + \frac{A_r^{mn*}}{j\omega - \mu_r^*} + \frac{B_r^{mn}}{-j\omega - \mu_r} + \frac{B_r^{mn*}}{-j\omega - \mu_r^*} \right) \quad \text{Eqn 16-26}$$

其中， $X_{mn}(j\omega)$  为用作参考的第  $m$  个响应点与第  $n$  个响应点之间的互功率谱。

在自功率谱的情况下， $m=n$ ， $A_r^{mn}$  等于  $B_r^{mn}$ 。留数  $A_r^{mn}$  正比于模态振型  $\{y\}_r$  的第  $m$  个元素，而留数  $B_r^{mn}$  则正比于模态振型  $\{y\}_r$  的第  $n$  个元素。从而，通过拟合所有响应点与某一个参考点之间的互功率谱，完整的模态振型就可以得出。

这种功率谱拟合步骤的优点在于，在时域参数萃取流程中不需要包括所有响应，而大量响应点的模态振型则容易通过顺序拟合功率谱的处理得到。另外，可以通过将真实试验数据与人工的综合数据重叠在一起进行图形的品质检验。与模态的 FRF 综合相比较，从式 16-26 可看出，正确的综合应当包括两个  $j\omega$  函数的附加项，而自功率谱和互功率谱均假定是以 FFT 和分段平均为基础得到的估计。如果  $X_{mn}(j\omega)$  不是用 FFT 和分段平均途径求得的，而是通过对响应  $m$  和响



---

应  $n$  之间按式 16-19 估计的相关函数进行 FFT 得到的，那么，式 16-26 的后面两项可以忽略。

### 16.2.3 模态识别方法的选择

有三种方法可供选择：

#### LSCE-LSFD 法

这种经典的最小二乘复指数法，现在用自相关和互相关代替 FRF 或冲激响应函数。

一个响应函数的子集被选择作为计算互功率谱的参考。选作参考的响应，应该包含所有有关的模态信息，正如传统的模态试验要求有输入参考点一样。

模态振型的识别，作为第二步的处理，采用最小二乘频域法求得。此方法的理论背景见 16.2.2 节。

#### BR（均衡实现）法

这是“子空间”技术之一，可识别频率、阻尼和模态振型。将响应函数的一个子集选作参考，这对于从原始时域数据计算互功率谱是必要的。

这种方法用于识别工作状态下最占优势的模态是有效的。

#### CVA（正则变量分析）法

这是第二种“子空间”技术，用以识别频率、阻尼和模态振型。

在这种情况下，所有的响应函数都必须选作参考，用以从原始时域数据计算互功率谱。因此，这种方法需要更多的计算工作量，而这种算法视所有模态都“同等重要”，可以识别出那些在工作状态下没有得到良好激励的模态。

子空间法的理论背景见 16.2.1 节。

---

## 16.3 参考文献

- [1] LMS CADA—X Running modes manual, 1997.
- [2] Otte D., Development and Evaluation of Singular Value Analysis Methodologies for Studying Multivariate Noise and Vibration Problems, PhD K.U.Leuven, 1994.
- [3] Otte D., Van de Ponsele P., Leuridan J., Operational Deflection Shapes in Multisource Environments, Proc. 8<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, p. 413–421, Florida, 1990.
- [4] Abdelghani M., Basseville M., Benveniste A., “In—operation Damage Monitoring and Diagnostics of Vibrating Structures, with Applications to Offshore Structures and Rotating Machinery”, Proc. of IMAC XV, Orlando, 1997.
- [5] Desai U.B., Debajyoti P., Kirkpatrick R.D., “A realization approach to stochastic model reduction”, Int. J. Control, Vol. 42, No. 4, pp. 821–838, 1985.
- [6] Kung S., “A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition”, Proc. 12th Asilomar Conf. Circuits, Systems and Computers, pp. 705–714, Pacific Groves, 1978.
- [7] Brown D., Allemang R., Zimmerman R., and Mergeay, M., “Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis”, SAE Paper 790221, pp. 19, 1979.
- [8] James G.H. III, Carne T.G., and Laufer J.P., “The Natural Excitation Technique (NExT) for Modal Parameter Extraction from Operating Structures, the international Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis”, Vol. 10, no 4, pp. 260–277, 1995.
- [9] Hermans L., Van der Auweraer H., “On the Use of Auto—and Cross—correlation functions to extract modal parameters from output—only data, Proc. of the 6<sup>th</sup> International conference on Recent Advances in Structural Dynamics, Work in progress Paper, 1997.
- [10] Van der Auweraer H., Wyckaert K., Hendricx W., “From Sound Quality to the Engineering of Solutions for NVH Problems: Case Studies”, Acustica/Acta Acustica, Vol. 83, N° 5, pp. 796–804, 1997.
- [11] Wyckaert K., Van der Auweraer H., Hendricx W., “Correlation of Acoustical Modal Analysis with Operating Data for Road Noise Problems”, Proc. 3<sup>rd</sup> International Congress on Air— and Structure—Borne Sound and Vibration, Montreal (CND), June 13–15, 1994, pp. 931–940, 1994.
- [12] Wyckaert K., Hendricx W., “Transmission Path Analysis in View of Active Cancellation of Road Induced Noise in Automotive Vehicles”, 3<sup>rd</sup> International Congress on Air— and Structure—Borne Sound and Vibration, Montreal (CND), June 13–15, 1994, pp. 1437–1445, 1994.

---

[13] Van der Auweraer H., Ishaque K., Leuridan J., “Signal Processing and System Identification Techniques for Flutter Test Data Analysis”, Proc. 15th Int. Seminar of Modal Analysis, K.U.Leuven, pp. 517–538, Leuven, 1990.

[14] Van der Auweraer H., Guillaume P., “A Maximum Likelihood Parameter Estimation Technique to Analyse Multiple Input/Multiple Output Flutter Test Data”, AGARD Structures and Materials Panel Specialists’ Meeting on Advanced Aeroelastic Testing and Data Analysis, Paper no 12, May, 1995.

[15] Van der Auweraer H., Leuridan J., Pintelon R., Schoukens J., “A Frequency Domain Maximum Likelihood Identification Scheme with application to Flight Flutter Data Analysis”, Proc. 8–th IMAC, pp. 1252–1261, Kissimmee, 1990.

## 第十七章 运行模态（ODS）分析

本章阐述运行模态分析的基本原理。内容包括：

- ☐ 运行模态分析的定义
- ☐ 运行模态分析要求的测量数据类型
- ☐ 运行模态的识别和定标尺
- ☐ 运行模态的诠释和验证

### 17.1 运行模态分析

模态分析的目标在于识别出描述系统动力特性的模态模型。识别的依据为系统上任意两个自由度之间测量的传递函数。

模态分析的成果是估计出的系统模态参数，即固有频率  $\omega_n$ ，阻尼比  $d$  和带标尺的模态振型  $V_{ik}$ 。

模态参数估计最为常用的方法，是以一个或多个输入（参考）自由度与所有感兴趣的响应自由度之间 **FRF** 测量为基础的。这种测量是在严格的规定和控制状态下进行的，所有的输入和输出信号都被测量出来，再没有其他未知的力（包括外力和内力）作用于系统。

在任何环境下，模态模型都是经得起检验的，无论作用力有怎样的频率成分、量级和其它属性。这使得模态分析成为一种强有力的工具，所识别出的模态模型，可用于故障诊断，强迫响应预测，灵敏度分析或结构修改预测等等。

由于某些原因，或许无法实施完好的模态分析。这些情况，包括如试验设备费用太高，测量对象（样机）不允许被长时间占用来做模态试验，或者找不出简单办法来隔离其它作用力，以求仅仅施加人为的、可测量的激振力等。

在这种情况下，可考虑在工作状态下对系统进行测量。当系统工作在稳定状况下时，测量出若干个响应自由度的输出信号。将时域信号转换至频域后，得到一组测量为  $\bar{X}_i(\omega)$ 。其中， $i$  为响应自由度序号， $\bar{X}_i(\omega)$  可以是位移、加速度、电压、角位移或角加速度等任何物理量的测量值。不过，这种测量是在特定工况下，作用力或输入的量级和属性都是不知道的情况下进行的。

如果你只是对某一给定频率处的特殊现象感兴趣，最有用的是观察每一测量自由度在该频率点的响应量级。譬如说，你可能想要知道第 13 号测量点，在 85.6Hz 处，以怎样的加速度量级作简谐振动。以每一个测量自由度的测量值为元素，集成成向量  $\{X\}$ 。

对系统的几何骨架线模型作动画显示，可帮助更好地理解现象。即以循环往复的方式，表现出各响应自由度之间相对位移（或加速度）的幅值关系。由于向量  $\{X\}$  与模态振型向量  $\{V\}$  二者的动画显示方式在表观上的相似性，将向量  $\{X\}$  称为运行模态（Running mode）或 **ODS**（Operation deflection shape）。

**ODS** 与模态振型是完全不同的概念，**ODS** 反映的只是在特定工况下，对应于特定频率，各测量自由度之间的往复运动形态。利用位移/力的频响函数  $\{H\}$  为基础的模态模型，位移 **ODS**  $\{X\}$  可用下式来描述：

$$\{X_i(\omega_p)\} = \{H_{i1}(\omega_p)\}F_1(\omega_p) + \{H_{i2}(\omega_p)\}F_2(\omega_p) + \dots + \{H_{im}(\omega_p)\}F_m(\omega_p) \quad \text{Eqn 17-1}$$

或

$$= \left[ \sum_{k=1}^{2N} \frac{V_{ik}V_{1k}}{j\omega_p - \lambda_k} \right] F_1(\omega_p) + \dots + \left[ \sum_{k=1}^{2N} \frac{V_{ik}V_{mk}}{j\omega_p - \lambda_k} \right] F_m(\omega_p) \quad \text{Eqn 17-2}$$

其中，  $i$  测量自由度序号

$\omega_p$  特定的角频率

$F_j(\omega)$   $j$  自由度激振力（输入）的线性谱

$m$  激振力总数

---

上面两个式子清楚地说明了 **ODS** 的重要性质：

- **ODS** 对应于任何给定的测量频率。而模态模型则具有确定的固有频率，它取决于系统的结构特性（质量、几何尺寸、弹性模量等）。
- **ODS** 与作用力本身的量级和属性有关。
- **ODS** 与系统的结构特性也有关，即与 **FRF** 性质有关。
- **ODS** 与每一个作用力的频率成份有关。如果  $F_3(\omega)$  在  $\omega = \omega_p$  处的值为零，则  $F_3(\omega)$  对 **ODS**  $\{X(\omega_p)\}$  没有任何贡献。
- 在结构的共振点 ( $\omega_p \approx I_K$ )，**ODS** 的值显著占优；而在作用力的谱峰频率点，**ODS** 的值也显著占优。

## 17.2 ODS 的测量

**ODS** 分析要求在下述几种理想状态下测量所有的响应谱：

- 结构作简谐振动
- 一定的短时间内，试验对象的工作状态保持不变
- 信号具有高信噪比，因而无需作平均处理

实际上，由于受到测量系统中采集通道数量的限制，可能无法同时测量所有的响应信号，从而必须在不同的测量周期内，取得不同的响应组合。另外，如果信号中存在有较高量级的噪声时，在采集信号过程中，有必要作平均处理。

由于工况变化，通常选择一指定的响应自由度作为参考自由度，然后相对该参考自由度来测量所有响应。如果从某一次测量到下一次测量，工作状态只是稍微有些变化，那么由于所有的响应信号受到相同程度的工况变化影响，有理由期望基于作相对测量的原因，这些影响可以被消除掉。这样的处理也确保了不同响应信号之间固定的相位关系，因为采用了参考信号的相位作为所有信号的相位参考。

有两种测量的函数可用于进行 **ODS** 分析：一个是所谓传导函数，另一个是互功率谱。

### 17.2.1 传导函数

各个测点响应信号的线性谱简单地除于参考测点线性谱,就得到所谓传导函数  $T$ :

$$T_{ij}(\omega) = \frac{X_i(\omega)}{X_j(\omega)} \quad \text{Eqn 17-3}$$

其中,  $j$  为参考测点序号。

如果允许进行平均处理话,传导函数也可以由测量的互功率谱和自功率谱求出:

$$T_{ij}(\omega) = \frac{G_{ij}(\omega)}{G_{jj}(\omega)} \quad \text{Eqn 17-4}$$

传导函数代表两个谱之间的复数(含幅值和相位)比。它的峰可能是由于作为分子的互功率谱存在峰(由于结构共振或激励谱在该频率点有峰)而引起,也可能是由于作为分母的自功率谱存在零点(反共振点)而引起。对于共振峰而言,互功率谱和自功率谱在同一频率处有峰;而反共振则不然,由于分母的值接近于零,会引起更高的  $T_{ij}$  峰。共振峰则趋向于分子分母的约分而相互抵消,  $T_{ij}$  的值反而并不很大。

对频响函数(加速度响应对激振力)作不同估计( $H_1$ 、 $H_2$ 和 $H_V$ 估计)的方法,照样可用以本节所述的传导函数估计。实际上,如果相干函数的值很高的话(接近 100%),不同估计得到  $T_{ij}(\omega)$  差别很小。利用式 17-4 估计传导函数时,也可利用下式来计算相干函数  $g$ :

$$\gamma_{ij}^2(\omega) = \frac{|G_{ij}(\omega)|^2}{G_{ii}(\omega) \cdot G_{jj}(\omega)} \quad \text{Eqn 17-5}$$

这里相干函数表示被测试的系统中两个响应信号之间的线性关系。由于两个响应是由相同激励源引起的,有理由期望相干函数具有高值。而实际上,有可能其值偏小,原因与 **FRF** 测量相同,即由于一个或两个信号的信噪比偏低,或信号调理的性能不良等。



两个测量信号之间相干函数值偏低的其它原因之一，可能是因为用 17-3 代替了式 17-1 所致。线性关系（从而相干函数）将作为加权因子  $F_j(\omega)$  的函数而变化，在平均过程中由于工况变化会出现这种情况。在某一频率段内相干函数有高值，意味着测量信号有高品质且工况稳定这二者并存。

**ODS** 系数的绝对标尺，可通过传导函数倍乘于参考自功率谱的有效值得得：

$$\{X_i(\omega)\} = T_{ij}(\omega) \cdot \sqrt{G_{jj}(\omega)} \quad \text{Eqn 17-6}$$

当测量的自功率谱有位移平方的量纲时，**ODS** 的标尺与位移有相同的单位（米或英寸），如果传导函数本身是无量纲的话。

位移 **ODS** 可通过简单地乘于  $j\omega$  或  $(j\omega)^2$  转换为速度 **ODS** 或加速度

**ODS**。对于某一确定的  $\omega$  值（设为  $\omega_0$ ），存在下列关系：

$$\{X_i(\omega_0)\} = T_{ij}(\omega_0) \cdot \sqrt{G_{jj}(\omega_0)} \quad [m] \quad \text{Eqn 17-7}$$

$$\{\dot{X}_i(\omega_0)\} = \{X_i(\omega_0)\} \cdot j(\omega_0) \quad [m/s] \quad \text{Eqn 17-8}$$

$$\{\ddot{X}_i(\omega_0)\} = \{\dot{X}_i(\omega_0)\} \cdot j(\omega_0) \quad [m/s^2] \quad \text{Eqn 17-9}$$

### 17.2.2 互功率谱

如果能肯定所有的响应信号都是在工况没有发生变化的条件下测得的，那么也可以仅仅测量每个响应自由度  $i$  和一个确定的参考自由度  $j$  之间的互功率谱，即

$$G_{ij}(\omega) = X_i(\omega) X_j^*(\omega) \quad \text{Eqn 17-10}$$

其中，“\*”号表示复共轭。

与传导函数相比较而言，互功率谱有一个优点，这就是它的峰更明确地标示出高响应级的频率（仍然可能是由于结构共振，或由于激励的力谱在该频率点有峰）。这一技术特别适合于采用一多通道测量系统对所有的响应信号同时进行测量的情况。在这种情况下，对于所有的响应自由度而言，工况确实是一样的。

---

在这种情况下，带绝对标尺的 **ODS**，仍然可通过测量参考自由度  $j$  的自功率谱由下式求得：

$$\{X_i(\omega)\} = \frac{G_{ij}(\omega)}{\sqrt{G_{jj}(\omega)}} \quad \text{Eqn 17-11}$$

如果测量的是位移，则 **ODS** 系数具有位移的量纲。可利用式 17-8 和 17-9 导出速度 **ODS** 和加速度 **ODS**。

### 17.3 ODS 的识别和给定标尺

类似于模态振型，**ODS** 可以按测量谱中任意一个频率点给出。

相应于所有测量谱在同一频率点的谱线，抽取其样值，定出标尺，然后以列表的方式集成 **ODS** 向量，再对测量对象的三维骨架线模型作动画式显示。对一有 1024 点的测量数据块，得到 512 条谱线，从而可以识别出 512 个 **ODS**，甚至通过在谱线之间插值的办法得到更多的 **ODS**。

**注意！** 对于 **ODS** 说，不可能给定阻尼值。**ODS** 分析也不能给出类似的其它模态参数，譬如留数或模态参预因子等。

#### 17.3.1 ODS 的标尺

有可能在“绝对”意义上给出被识别的 **ODS** 的标尺。

**ODS** 系数的标尺可利用峰检索法给定，它取决于测量数据的属性（即采用的是传导函数呢？还是自功率谱？）。

给定 **ODS** 标尺的几种情况综述如下：

- 如果测量的是传导函数，可利用参考自功率谱实施 **ODS** 的定标尺，见式 17-6。
- 如果测量的是互功率谱，可用式 17-11 给 **ODS** 定标尺，这时仍然要利用参考自功率谱。
- 可以在位移、速度、和加速度的 **ODS** 之间互相转换，应用的关系式是 17-7、17-8 和 17-9，也就是进行一次或二次积分或微分。
- 可以人为地给多个 **ODS** 定标尺，办法是键入一复数的比例因子。对每一个别的 **ODS**，其所有系数都乘于这一比例因子。



- 最后，一种经常用的办法是通过给“谱”加比例尺来对多个 **ODS** 定标尺。即通过对某一“谱块”倍乘一复数因子来实现，此“谱块”中的谱线与所要分析的特定 **ODS** 频率相对应。

上述任一方法都可能改变和影响到 **ODS** 的单位。比例因子的单位应该与模态振型系数的单位相一致，它的“源头”在于测量数据。

## 17.4 对 **ODS** 分析结果的诠释

下面介绍的一些函数（或功能），是用来评价或验证模态的。包括：模态比例因子，模态置信判据和模态分解。

### 模态比例因子（**MSF**）和模态置信判据（**MAC**）

**MSF** 和 **MAC** 是用来比较两个等长度（维数）向量的数学工具。它们可以用来比较 **ODS** 和模态振型的有关信息。

用矩阵  $[V_K]$  表示一组多个模态振型（或 **ODS**）， $\{V_{jk}\}$ 、 $\{V_{lk}\}$  表示其  $j$  列和  $l$  列向量。模态比例因子  $MSF_{jlk}$  表示了这两个向量的比率。虽说这个比率是与行指数  $i$ （响应测点）有关的，但是通过最小二乘估计得到多于一个响应测点的比率估计也是可能的，下式得到的就是这种估计：

$$MSF_{jlk} = \frac{\{V_{jk}\}^H \{V_{lk}\}}{\{V_{jk}\}^H \{V_{jk}\}} \quad \text{Eqn 17-12}$$

其中指数“H”代表共轭转置。

相对应的模态置信判据  $MAC_{jlk}$  表示计算的可信程度，其值由下式求出：

$$MAC_{jlk} = \frac{(\{V_{jk}\}^H \{V_{lk}\})^2}{(\{V_{jk}\}^H \{V_{jk}\})(\{V_{lk}\}^H \{V_{lk}\})} \quad \text{Eqn 17-13}$$

如果两个列向量  $\{V_{jk}\}$  和  $\{V_{lk}\}$  之间存在线性关系，那么 **MSF** 即是它们之间的比例常数，而 **MAC** 的值将会接近于 1。如果它们是彼此无关的，那么 **MAC** 的值会很小（接近于零），而 **MSF** 的值没有什么意义。

**MSF** 和 **MAC** 可用于比较已获得的模态振型和被认可的 **ODS**。**ODS** 与模态振型彼此对应时，**MAC** 的值应当接近于 100%，两个向量之间的 **MSF** 值应该接近于整数。当利用多个输入时，可以对每一输入求出 **MSF**，所有情况下，得到

---

的 MAC 值应该是一样的。

### 模态分解

如果模态模型与 **ODS** 有相同的自由度数，那么可以通过对它们的比较来追踪共振现象，共振可引至某特定的 **ODS** 变得突出。所谓模态分解，就是将每一个 **ODS** 分解为模态振型的线性组合，这样可以搞清楚是否主要源于某一 **ODS** 而形成共振现象。

模态振型构成所谓模态“基”群。模态分解就是将 **ODS** 分解为群的组合。也就是应用下面公式：

$$\{X_i(\omega_0)\} = a_1\{V_1\} + a_2\{V_2\} + \dots + a_n\{V_n\} + Rest \quad Eqn 17-14$$

其中，

$X_i$  被分解的第  $i$  个 **ODS**

$V_i$  模态“基”群中的第  $i$  个模态振型

$a_i$  满足该方程的比例系数

以比例系数  $a_i$  的最大值  $a_{\max}$  为基准，得到相对标尺的系数，则式 17-14 变为

$$\{X_i(\omega_0)\} = \frac{a_{\max}}{100\%} \left[ \frac{a_1}{a_{\max}} \cdot 100\% \{V_1\} + \dots + \frac{a_n}{a_{\max}} \cdot 100\% \{V_n\} + \right] + Rest \quad Eqn 17-15$$

“Rest”表示相对误差：

$$Rest = \frac{\| \{X_i(\omega_0)\} - [a_1\{V_1\} + \dots + a_n\{V_n\}] \|}{\| \{X_i(\omega_0)\} \|} \cdot 100\% \quad Eqn 17-16$$

**注意！** 在诠释 **ODS** 时请注意，有时 **ODS** 与模态振型的相似纯粹是巧合。一个频率为 56Hz 的 **ODS** 与一个固有频率为 200Hz 的模态振型不存在任何关联，尽管有可能它们之间看起来很相近。

---

## 第十八章 模态验证

本章介绍用于验证模态模型真实性的数学工具。包括：

- ☐ 模态比例因子和模态置信判据
- ☐ 模态参预
- ☐ 互易性
- ☐ 标尺
- ☐ 模态共线性和平均相位偏差
- ☐ 模态模型的比较
- ☐ 模态指示函数
- ☐ **FRF** 累加
- ☐ **FRF** 综合

### 18.1 引言

有多种手段可供验证模态模型的精度。模态模型的参数包括：固有频率、阻尼比、模态振型和模态参预因子。验证工具包括：

- 模态比例因子（MCF）和模态置信判据（MAC）
- 输入与输出之间的互易性
- 广义模态参数（定标尺）
- 模态复杂性
- 模态共线性和平均相位偏差
- 模态模型的比较
- 模态指示函数
- **FRF** 累加
- **FRF** 综合

某些验证过程允许将复数的模态振型向量转变为正则化模态振型向量。所谓正则化模态振型，是取复数模态振型系数，令其在复平面上代表的相量，旋转至所有系数的加权平均幅角处而得出。

## 18.2 MSF 和 MAC

结构上输入  $j$  和输出  $i$  之间的 FRF 可表为分部分式形式:

$$h_{ijn} = \sum_{k=1}^N \left( \frac{r_{ijk}}{j\omega_n - \lambda_k} + \frac{r_{ijk}^*}{j\omega_n - \lambda_k^*} \right) \quad \text{Eqn 18-1}$$

FRF 矩阵则表为:

$$[H] = \sum_{k=1}^N \left( \frac{[R_k]}{j\omega_n - \lambda_k} + \frac{[R_k]^*}{j\omega_n - \lambda_k^*} \right) \quad \text{Eqn 18-2}$$

其中,  $[R_k]$  为留数矩阵。如果试验结构符合 Maxwell 互易原理的话, 留数矩阵应为对称阵, 且下面关系:

$$R_k = a_k \{V_k\} \{V_k\}^t \quad \text{Eqn 18-3}$$

留数矩阵  $[R_k]$  中同一行 ( $i$  行) 不同列 ( $j$  和  $l$  列) 的两个元素之比为:

$$\frac{r_{ijk}}{r_{ilk}} = \frac{v_{jk}}{v_{lk}} = MSF_{jlk} \quad \text{Eqn 18-4}$$

$MSF_{jlk}$  称为  $k$  阶模态  $j$  列和  $l$  列之间的模态比例因子。虽然这个比值应该与行指数 (响应自由度)  $i$  有关, 但利用多于一个响应自由度的留数系数求出 MSF 的最小二乘解是可以做到的。这时有:

$$MSF_{jlk} = \frac{\{R_{jk}\}^t \{R_{lk}\}}{\{R_{jk}\}^t \{R_{jk}\}} \quad \text{Eqn 18-5}$$

其中,  $\{R_{jk}\}$  表示  $[R_k]$  的第  $j$  列。“ $t^*$ ” 表示复共轭转置。

响应的模态置信判据 MAC 表示模态的可信程度, 其算式为:

$$MAC_{jlk} = \frac{(\{R_{jk}\}^t \{R_{lk}\})^2}{(\{R_{jk}\}^t \{R_{jk}\}) (\{R_{lk}\}^t \{R_{lk}\})} \quad \text{Eqn 18-6}$$

如果复向量  $\{R_{jk}\}$  与  $\{R_{lk}\}$  之间存在线性相关, 则 MSF 对应于二者的比例常数, 而 MAC 的值则接近于 1。如果二者是线性独立的, 则 MAC 的值将会很小 (接近于零), 且 MSF 没有什么意义。

---

在更一般的意义上，MAC 的概念可施加于两个任意的复向量。即用于比较两个有任意标尺的模态振型向量，相似的模态振型具有高值的 MAC。

MSF 和 MAC 可用于比较以相同试验数据按不同的模态参数估计方法得到的模态振型。对于两相对应的模态而言，MAC 的值应接近于 100%，而相应的留数向量，及通过模态参预因子给定标尺的模态振型之间的 MSF 值应该是非常一致的。采用多输入情况下，可对应于每一个输入分别计算 MSF 值，结果相应的 MAC 值应该全都是一样的。

MAC 的第二个应用是检验模态振型被质量矩阵加权时的正交性，即

$$\begin{aligned}\{V_k\}^T [M] \{V_l\} &= m_k, k = l \\ &= 0, \quad l \neq k\end{aligned}\quad \text{Eqn 18-7}$$

其中， $m_k$  表示第  $k$  阶模态的模态质量。

甚至在质量矩阵不知道的情况下，式 18-7 也是可利用的，通常假定其为有大致相等元素的对角线矩阵。在这一前提下，计算两个不同模态之间的 MAC 值，也就等于近似地检验它们之间的正交性。

关于用 MSF 和 MAC 作为诠释 ODS 分析结果的工具，可参阅第 17.4 节。

### 18.3 模态参预

用模态参预的概念可考察某频带内，不同模态的相对占优程度。对于某一模态，对应特定参考（输入）的所有留数值之和，代表了该模态对响应的贡献量。这种求和可对应所有参考（输入）作累加，以评估每一模态的相对占优程度。

注意！这种评估仅当对于所有模态，都有相同的响应自由度和参考自由度时才有意义。

就一个模态而言，对应不同参考点的留数分别求和作比较，可评估不同参考点的输入对该模态的作用效果。留数求和值最大的参考点，就是这一模态的最佳激励点。

最后，可以对所有模态进行留数求和，比较不同输入之间的这种求和结果，从总体意义上评估选择的参考点对全体模态的影响大小。

## 18.4 输入与输出之间的互易性

互易性是模态分析理论的基本假定之一。本节讨论 FRF 的互易性及模态模型的互易性。

### FRF 的互易性

FRF 互易性的意义为：测量在  $j$  自由度激励下  $i$  自由度响应得到的 FRF，与测量在  $i$  自由度激励下  $j$  自由度的响应得到的 FRF 是一样的。数学上表示为：

$$h_{ij}(\omega) = h_{ji}(\omega) \quad \text{Eqn 18-8}$$

这意味着 FRF 矩阵为对称阵。这一性质是实施锤击法模态试验时测量 FRF 或 IR 的前提假定。

### 模态模型的互易性

根据 FRF 矩阵模态模型

$$[H] = \sum_{k=1}^N \left[ \frac{\{V\}_k [L]_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\{V\}_k^* [L]_k^*}{j\omega - \lambda_k^*} \right] \quad \text{Eqn 18-9}$$

由于  $[H]$  为对称阵，显然，模态振型向量和模态参预因子扮演的角色是可以互相换位的。由于留数是有绝对标尺的，这一性质意味着：对于一满足互易性原理的试验结构，模态参预因子应正比于参考（输入）点的模态振型系数。

利用模态振型与模态参预因子的正比性，可对每一个模态，检验互易性是否成立。这要求用作模态参数估计的数据，必须是多于一个输入条件下得到的。

如果互易性是成立的，则有可能正确地综合出任意一对响应自由度和参考自由度之间的传递函数。这就是在驱动点的模态振型和模态参预因子之间计入一比例因子。以同一比例因子作参考，由得到的模态振型系数导出所需要的参预因子。

如果互易性不满足，那么实际上只有测量的响应自由度和参考自由度之间的传递函数可以正确地综合出。如果必须强加给模型予互易性的话，那么在计算比例因子时有如下几种可供选择的方案：

1. 对应每个模态各选择一个驱动点。最佳的选择是对应该模态的驱动点留数值最大，因为从输入自由度看，能达到最佳激励。
2. 对所有模态共同选择一特定的驱动点。定标尺时其它的模态参预因子不予考虑。

3. 对所有驱动点数据，利用最小二乘平均，得出互易性比例因子（RSF），在有  $n$  个驱动点的情况下，其定义由下式给出：

$$RSF = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^* l_i}{\sum_{i=1}^n v_i^* v_i}}$$

其中， $v_i$  模态振型系数

$l_i$  模态参预因子

## 18.5 广义模态参数

本节讨论模态振型的标尺与广义参数（主要是模态质量）。

测点  $i, j$  之间第  $k$  阶模的留数  $r_{ijk}$ ，可写成比例因子  $a_k$ （与测点无关）及  $i, j$  两测点的模态振型系数  $v_{ik}$ 、 $v_{jk}$  三者的乘积。如果结构具有比例阻尼，则模态振型向量就是实数向量，而留数则为纯虚数。作为推论，比例因子  $a_k$  也应该是纯虚数。

$$\begin{aligned} r_{ijk} &= a_k v_{ik} v_{jk} \\ a_k &= \frac{1}{2j\omega_{dk} m_k} \end{aligned} \quad \text{Eqn 18-10}$$

于是，式 18-1 可改写为：

$$H_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2j\omega_{dk} m_k} \left[ \frac{v_{ik} v_{jk}}{j\omega_n - \lambda_k} + \frac{v_{ik}^* v_{jk}^*}{j\omega_n - \lambda_k^*} \right] \quad \text{Eqn 18-11}$$

其中， $m_k$  表示第  $k$  阶模态的模态质量，而

$$\omega_{dk} = \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} \quad \text{第 } k \text{ 阶模态有阻尼固有频率}$$

$\zeta_k$  第  $k$  阶模态的阻尼比

$\omega_{nk}$  第  $k$  阶模态无阻尼固有频率

需要指出的是，与式 18-1 相比，式 18-11 中多出  $N$  个参数，即每个模态多

出一个参数。这是因为事实上留数是带标尺的量，而模态振型向量则取决于唯一的一个比例因子。在式 18-11 中，模态质量扮演比例常数的角色。很显然，模态质量的值取决于标尺的设定，该标尺用于得到模态向量模的值。

当具有比例阻尼的结构，所有留数都是已知时，式 18-10 和 18-11 可用于计算模态质量和模态振型向量的值，而首先要决定的是标尺的取法。实际上，留数、模态向量和模态质量三者之间的关系取决于下式：

$$r_{ijk} = \frac{v_{ik} v_{jk}}{2j\omega_d m_k} \quad \text{Eqn 18-12}$$

就一个给定的输入点  $j$  而论，由一组留数求一个模态向量各元素的值和相应的模态质量，尚需有一个附加方程，因为对应所有的输出点  $i$  按式 18-12 列出的方程组其解是不确定的。即  $N$  个方程需求出  $N+1$  个未知数。这一附加的方程，实际上是用来确定模态向量标尺的。

请注意，特征向量只确定状态空间的方位，其幅值是无绝对标尺的，而留数则具有幅值和相位上的意义。给特征向量定标尺也就确定了模态质量。模态刚度则通过模态质量倍乘于固有频率的平方而得出。模态阻尼等于模态质量倍乘固有频率和阻尼比后，再倍乘 2。

给模态振型和模态参预因子定标尺有如下几种办法：

- 质量规一法。式 18-12 中取模态质量  $m_k$  等于 1。
- 刚度规一法。取模态刚度  $k_k = m_k \omega_k^2$  等于 1。
- 比例因子规一法。取比例因子  $a_k$  等于 1，该比例因子与自由度无关。
- 模态向量长度规一法。取模态向量各元素的平方和等于 1，即

$$\sum_{i=1}^{N_0} v_{ik}^2 = 1$$

- 最大元素规一法。取模态向量元素  $v_{ik}$  等于 1， $i$  为模态振型系数最大的自由度序号
- 任意元素归一法。取模态向量元素  $v_{ik}$  等于 1， $i$  为用户任选的自由度序号。



## 18.6 模态超复性

在某一测点给结构附加一质量，会降低所有模态的有阻尼固有频率。这一理论特性构成评价模态振型向量的一个判据。

对于每一测点而言，各固有频率对该测点质量增加的灵敏度是可以求出的，且应该是负值。对应某一阶模态（ $k$ ）的所谓“模态超复性” **MOV** 定义为在该测点附加质量后，固有频率确实降低的这种测点所占的加权百分比，即

$$MOV_k = \frac{\sum_{i=0}^{N_0} w_i a_{ik}}{\sum_{i=0}^{N_0} w_i} \times 100\% \quad \text{Eqn 18-13}$$

其中， $w_i$  加权因子，取  $w_i = 1$ （不加权）或  $w_i = |v_{ik}|^2$ ；

$a_{ik} = 1$ ，如果对于第  $k$  阶模态而言，在测点  $i$  附加质量的固有频率灵敏度为负值的话；

$a_{ik} = 0$ ，否则的话。

对于高质量的模态，**MOV** 指数应当有高值（接近 100%）。如果该指数偏低，则认为该模态或者只是一个计算模态（非物理模态），或者是有毛病的估计。之所以称为“超复性”（Overcomplex），是因为它意味着某些模态振型系数的相位角超越了一个合理的界限。

然而，如果对于一特定的输入点而言，所有模态的 **MOV** 指数都很低的话（譬如说，低于 10%），则有可能是由于在测量对应该输入点的 **FRF** 时，把激振力的方向输入错了。这种失误可通过改变所有模态对应该特定输入的模态参预因子的正负号予以校正过来。

## 18.7 模态相位共线性

对于弱阻尼结构或比例阻尼结构，估计出的模态振型应该是完全“正则”（normal）的。即同一模态各个复数的模态振型系数（对应与不同测点）之间要

---

么同相（相位差  $0^\circ$ ），要么反相（相位差  $180^\circ$  或  $-180^\circ$ ）。一个称为“模态相位共线性”（MPC）的指数表达出无标尺模态振型向量各元素的实部与虚部之间的线性关系。

对于实正则模态，MPC 指数应有高值（接近于 100%）。MPC 指数有低值，表明在一定程度上是复模态，其原因或是试验结构上存在局部的阻尼元件，或是有不良的测量或者不良的分析处理。

### 平均相位偏差

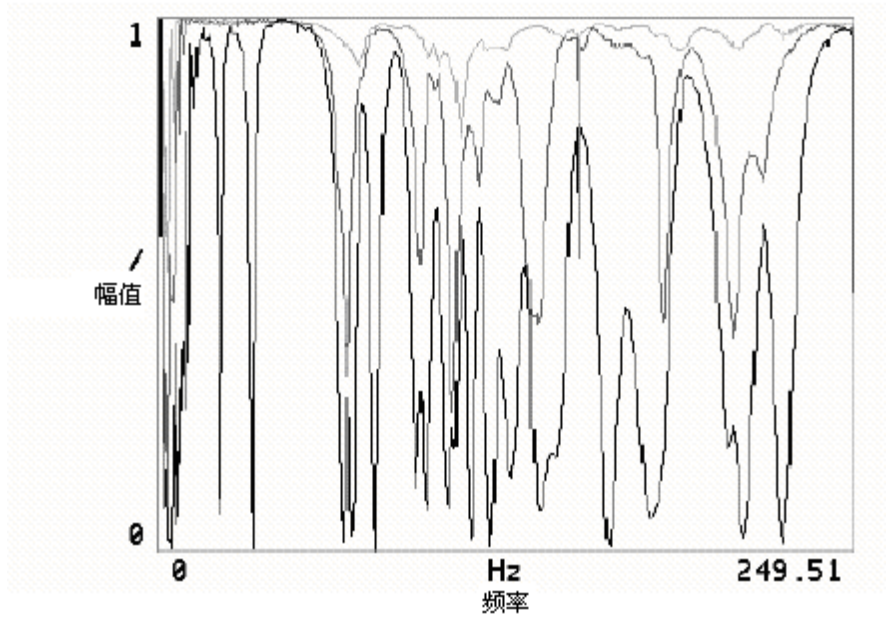
无标尺模态振型向量复杂性的另一指标是平均相位偏差（MPD）。该指数是为模态振型各个系数的相位角对其平均值的统计偏差，它指示出模态振型在相位上的分散程度。对于实正则模态，MPD 的值应该很小（接近与 0 度）。

## 18.8 模型的比较

如果你拥有表征同一模态空间的两组模态参数，那么可以对它们进行比较。比较中最关心的是两组参数中的有阻尼固有频率、阻尼比，模态相位共线性和 MAC 的值。这对于比较从同样数据组由不同参数估计技术得到的模态组来说，是一种较常用的办法。

## 18.9 模态指示函数

模态指示函数（MIF）属于频域函数，其特征是在模态的固有频率处，函数的值会呈现局域的极小化。对于给定的数据组可以算出多个 MIF，其数量等于能有的输入自由度数。对于所谓第一 MIF 而言，在结构的任一固有频率处，都呈现局域的极小化。而对于第二 MIF 而言，仅当存在重根时，才会有局域的极小化。依赖于能有的输入自由度数，可计算高阶的 MIF，以确定有无更多次的重根。因此，如果存在四重根，那么第一、二、三、四阶 MIF 都会在重根所在频率处呈现局域极小化。参看下图。



给定表述结构输入—输出特性的 FRF 矩阵[H]，以及激振力向量{F}，就可以利用下式计算输出或响应{X}：

$$\{X\} = H\{F\} \quad \text{Eqn 18-14}$$

省略表示矩阵的括号，将式 18-14 分解为实部和虚部，有：

$$X_r + jX_i = (H_r + jH_i) (F_r + jF_i) \quad \text{Eqn 18-15}$$

对于实正则模态，结构响应必定在相位上落后于激振力 90 度。因此，当结构上的激励找准某一模态时（通过微调），响应向量实部的总长度必定变得极小。在数学上可将其公式化为下面给出的极（小）值问题：

$$\min_{|FF|} \equiv 1 \left( \frac{X_r^T X_r}{X_r^T X_r + X_i^T X_i} \right) \quad \text{Eqn 18-16}$$

将式 18-5 代入式 18-16，得到：

$$\min_{|FF|} \equiv 1 \left( \frac{FH_r^T H_r F}{F^T (H_r^T H_r + H_i^T H_i) F} \right) \quad \text{Eqn 18-17}$$

求解方程 18-7，简化为找频率函数的极小值问题，这可以通过解特征值问题来实现。对应每一谱线，得到一特征值问题的关系式如下：

$$H_r^T H_r F = \lambda (H_r^T H_r + H_i^T H_i) F \quad \text{Eqn 18-18}$$

方阵  $H_r^t H_r$  和  $H_i^t H_i$  的行数和列数，等于输入（或参考）自由度数，即等于测量得到的 FRF 矩阵的列数。第一 MIF 是由对应每一谱线的式 18-18 的最小特征值组成的，当某一频率存在实的纯模态时，它将有明显地呈现出局域的极小值。第二 MIF 则是由对应每一谱线的式 18-8 的第二最小特征值所组成，如果结构有重根模态的话，它也会包含有明显的局域极小化。这一论点同样适用于式 18-18 的所有其它特征值。可组成的 MIF 阶数，等于特征值的个数，也等于输入自由度数。由此，你可以确定对每一个模态最多有几个重根模态。

## 18.10 FRF 累加

固有频率估计精度的一个重要迹象，是它们是否与测量的 FRF 共振峰相吻合。通过对所有得到的数据累加可以增强这些共振峰。办法是对各个 FRF 的实部和虚部的绝对值分别求和，再合成累加的 FRF。

利用显示模块，可以用图形方式对 FRF 累加的共振频率与估计出的各个固有频率相互比较。诸如丢失模态，有毛病的频率估计，或由于传感器附加质量引起共振频率偏移等方面的问题，都可以通过这种途径轻易发现出来。

## 18.11 FRF 综合

由得到的模态模型可有多种途径综合出 FRF。必须有对应至少一个输入自由度的带标尺的模态振型（即模态振型及模态参预因子），且其中还必须有输入自由度的模态振型系数，利用 Maxwell-Betti 互易原理（见 18.4 节），可以计算出输入和输出两个测点间交互的 FRF。

### 相关和误差

可以对测量的 FRF 和综合的 FRF 评估其相关性和误差量。

相关性是对综合的和测量的 FRF 值复共轭乘积的规一化，即

$$correlation = \frac{|\sum_i (S_i x M_i^*)|^2}{\left[ \sum_i (S_i x S_i^*) \right] \left[ \sum_i (M_i x M_i^*) \right]} \quad Eqn 18-19$$

---

其中,  $S_i$  综合的 FRF 在谱线  $i$  的复值

$M_i$  测量的 FRF 在谱线  $i$  的复值。

以 LS error 表示最小方差对综合值的规一化, 则:

$$LS\ error = \frac{\sum_i (S_i - M_i) x (S_i - M_i)^*}{\sum_i (S_i x S_i^*)} \quad Eqn\ 18-20$$

对各个 **FRF**, 列出相关低于某规定百分比的 **FRF**, 和误差高于某规定百分比的 **FRF**, 对于评价综合的 FRF 的质量能提供有效的信息。

## 第十九章 刚体模态

本章讨论作为刚体的结构特性。内容包括:

- ☐ 由测量的 **FRF** 计算结构的刚体属性
- ☐ 由刚体分析确定刚体模态

### 19.1 计算刚体属性

本节讨论计算刚体属性的理论基础。由测量的频响函数 (**FRF**) 可导出结构的刚体模态和系统的惯性属性。该属性包括: 转动惯量、惯量积和主转动惯量。

通常有两类方法可供选用:

1. 第一类, 利用由试验数据得到的刚体模态振型来确定惯量特性。这就是参考文献【1】介绍的模态模型法。
2. 第二类, 以频响函数的质量线为出发点, 质量线反映的是具有柔性支承结构的惯性制约力。将质量线的数据代入一组运动学方程和动力学方程, 就可以求出刚体的基本属性 (包括质量、质心、转动惯量、惯量主轴和主轴方向等)。【2】 这类方法有时还用来求出结构的支承刚度, 如果系统的质量及其分布事先就已知的话。【3】下面将对这第二类方法作更详细的介绍。

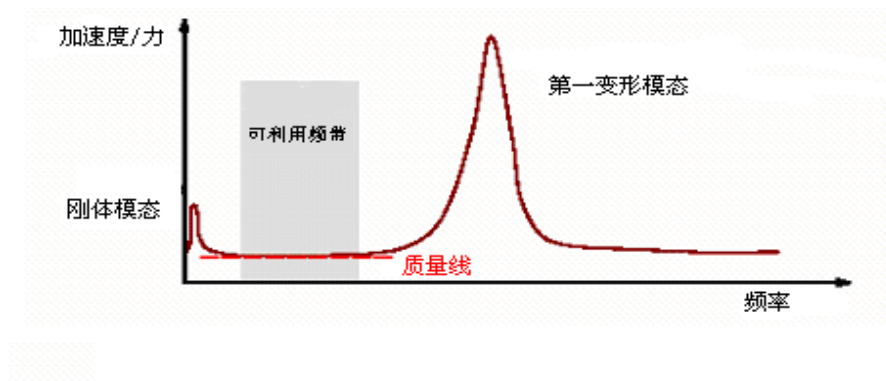


图 19-1 刚体模态

## 由测量的 FRF 推算出刚体属性

### 输入数据

需要有测量的 **FRF** 来求得刚体属性。**FRF** 数据应该是在激励和响应分别为力和加速度的情况下得到的，即 **FRF** 幅值的单位为  $ms^{-2}/N$  (或  $g/N$ )，否则应该能作转换。转角参数或其它无标尺参数不可以用作刚体属性计算。

在理论上，计算刚体属性要求有两个激励和 6 个响应。实践表明，要想获得良好的计算结果，至少应测量 6 个激励（2 个点各三个方向）和 12 个响应。

### 参考坐标系

所有的刚体属性都是相对于一个参考坐标系而得出的。给定一个参考坐标系，需确定其原点在惯性（总）坐标系中的三个坐标，以及相对于总坐标的三个旋转欧拉角。

### 频带的规定

刚体属性是在一规定频带内按总体最小二乘意义求出的，这一规定频带应该在最高频率刚体模态和最低频率变形模态中间区段内选取。参看图 19-1。

### 质量线的值

计算所需的质量线值，可由测量的 **FRF**，经由三种途径求得。

- 1) 如果刚体模态和变形模之间在频率上有足够的间距，则可以直接利用原始的、无需变换的、测量的 **FRF** 幅值（取其带+、-符号的实部值）。在这种情况下，作刚体模态分析时无需考虑变形模态的影响。
- 2) 如果刚体模态和变形模态之间的频率间距不够大，则对 **FRF** 要作修

---

正。要是变形模态的影响显著的话，应将其从原本的 FRF 中扣除。  
这种情况下可以用综合的 FRF 幅值（带符号的实部）参与计算。

- 3) 如果在刚好高出刚体模态的频段内不可能得到精确的测量 FRF 的话，那么可以利用存在第一变形模态影响频段的下残余项。该残余项可以在模态分析过程中求得，下残余项代表低于变形模态的那些模态的影响，因而实际上代表了刚体模态。

## 计算刚体属性

### 1. 计算参考加速度矩阵

#### 1.1. 坐标变换

如果与响应自由度对应的结点不是按照总坐标作几何定位的话，或者给定的参考坐标与总坐标不相一致的话，那么对测量的加速度从总坐标到参考坐标作转换是必要的。

需要三个正交方向（+x, +y, +z）的数据。对于输出测点“O”上的三个测量的（局部坐标）加速度来说，有：

$$\{\ddot{X}\}_g = [T]_o^{-1} \{\ddot{X}\}_l \quad \text{Eqn 19-1}$$

其中，  $\{\ddot{X}\}_g$  总坐标的加速度向量

$\{\ddot{X}\}_l$  局部坐标的加速度向量

$[T]_o^{-1}$  对结点 O 由总体坐标到局部坐标的转移矩阵

在给定一参考坐标系，且其与总坐标不一致的情况下，输出结点“O”上的三个测量加速度也可转换到参考坐标系上：

$$\{\ddot{X}\}_r = ([T]_o^{-1} [T]_r) \{\ddot{X}\}_l \quad \text{Eqn 19-2}$$

其中，  $[T]_r$  为结点“r”由总坐标到局部坐标的转移矩阵。

#### 1.2. 运动学方程组

对选定频带内所有谱线，对所有响应测量点 P、Q、…，对所有被考虑的输入 1, 2, …，有下面给出的矩阵形式的运动学关系：



$$\begin{bmatrix} \ddot{X}_{1P_x} & \ddot{X}_{2P_x} & \cdots \\ \ddot{X}_{1P_y} & \ddot{X}_{2P_y} & \cdots \\ \ddot{X}_{1P_z} & \ddot{X}_{2P_z} & \cdots \\ \ddot{X}_{1Q_x} & \ddot{X}_{2Q_x} & \cdots \\ \ddot{X}_{1Q_y} & \ddot{X}_{2Q_y} & \cdots \\ \ddot{X}_{1Q_z} & \ddot{X}_{2Q_z} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Z_P & -Y_P \\ 0 & 1 & 0 & -Z_P & 0 & X_P \\ 0 & 0 & 1 & Y_P & -X_P & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & Z_Q & -Y_Q \\ 0 & 1 & 0 & -Z_Q & 0 & X_Q \\ 0 & 0 & 1 & Y_Q & -X_Q & -0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_{1g_x} & \ddot{X}_{2g_x} & \cdots \\ \ddot{X}_{1g_y} & \ddot{X}_{2g_y} & \cdots \\ \ddot{X}_{1g_z} & \ddot{X}_{2g_z} & \cdots \\ \ddot{a}_{1g_x} & \ddot{a}_{2g_x} & \cdots \\ \ddot{a}_{1g_y} & \ddot{a}_{2g_y} & \cdots \\ \ddot{a}_{1g_z} & \ddot{a}_{2g_z} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 19-3}$$

对应于输入1的总坐标系加速度分量

其中,  $X_P$ 、 $Y_P$ 和 $Z_P$ 为测点P在总坐标系中的坐标(或对于给定的参考坐标)。

对应于每一谱线建立的超定方程组(输入自由度数大于或等于6)以最小二乘法求解。即针对每一谱线,求出参考加速度矩阵。进一步再计算出涵盖全部频带的参考加速度矩阵综合解,即求出包括所有输出和所有谱线的总体方程组的最小二乘解。

## 2. 计算参考力矩阵

### 2.1 坐标变换

当结点“i”在局部坐标x方向上有输入1时,有

$$\{F_1\} = [T]_i^{-1} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad \text{Eqn 19-4}$$

其中,  $[T]_i^{-1}$ 为结点“i”(由总坐标到局部坐标)的转移矩阵

当参考坐标“r”与总坐标不一致时,有

$$\{F_1\} = ([T]_r [T]_i^{-1}) \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad \text{Eqn 19-5}$$

其中,  $[T]_r^{-1}$ 为参考坐标“r”到总坐标的转移矩阵。

当y方向或z方向有输入时,可得到类似的转换关系式。

### 2.2 方程组

对于所有的输入1, 2, ..., 可得到:



$$\begin{Bmatrix} F_{1gx} \\ F_{1gy} \\ F_{1gz} \\ M_{1gx} \\ M_{1gy} \\ M_{1gz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -Z_1 & Y_1 \\ Z_1 & 0 & -X_1 \\ -Y_1 & X_1 & 0 \end{bmatrix} \{F_1\} \quad \text{Eqn 19-6}$$

对应于输入1在总坐标系中作用力的力和力矩分量

其中,  $\{F_1\}$  为输入 1 的作用力

$X_1$ 、 $Y_1$ 和 $Z_1$ 为输入 1 作用点的总坐标分.

### 3. 计算质心坐标, 转动惯量及惯量积

对于 (i) 每一输入每一谱线

(ii) 每一输入全体被考虑的频带

可列出方程组:

$$\begin{Bmatrix} F_{gx} - m \cdot a_{gx} \\ F_{gy} - m \cdot a_{gy} \\ F_{gz} - m \cdot a_{gz} \\ M_{gx} \\ M_{gy} \\ M_{gz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -ma_z & ma_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ma_z & 0 & -ma_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ma_y & ma_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{gz} & -F_{gy} & a_x & 0 & 0 & -a_y & 0 & -a_z \\ -F_{gz} & 0 & F_{gx} & 0 & a_y & 0 & -a_x & -a_z & 0 \\ F_{gy} & -mF_{gx} & 0 & 0 & 0 & a_z & 0 & -a_y & -a_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{cog} \\ Y_{cog} \\ Z_{cog} \\ I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{xy} \\ I_{yz} \\ I_{xz} \end{Bmatrix}$$

Eqn 19-7

$X_{cog}$ 、 $Y_{cog}$ 和 $Z_{cog}$ 为质心在总坐标上的坐标分量;

$I_{xx}$ 、 $I_{yy}$ 和 $I_{zz}$ 为刚体对总坐标各坐标轴的轴转动惯量;

$I_{xy}$ 、 $I_{yz}$ 和 $I_{xz}$ 为刚体在总坐标系中的惯量积。

方程组 19-7 可分两步来求解。首先, 由前三个方程求解出质心坐标。然后, 将求得的质心坐标代入后面几个方程, 求得轴转动惯量和惯量积。

第一步:

对于每一输入每一谱线及

对于每一输入全体被考虑的频带，有

$$\begin{Bmatrix} F_{g_x} - m.a_{g_x} \\ F_{g_y} - m.a_{g_y} \\ F_{g_z} - m.a_{g_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -ma_z & ma_y \\ ma_z & 0 & -ma_x \\ -ma_y & ma_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{cog} \\ y_{cog} \\ z_{cog} \end{Bmatrix} \quad Eqn 19-8$$

第二步：

对于每一输入每一谱线及

对于每一输入全体被考虑的频带，有

$$\begin{Bmatrix} M_{g_x} - y_{cog} F_{g_z} + z_{cog} F_{g_y} \\ M_{g_y} + x_{cog} F_{g_z} - z_{cog} F_{g_x} \\ M_{g_z} - x_{cog} F_{g_y} + y_{cog} F_{g_x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 & -a_y & 0 & -a_z \\ 0 & a_y & 0 & -a_x & -a_z & 0 \\ 0 & 0 & a_z & 0 & -a_y & -a_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{xy} \\ I_{yz} \\ I_{xz} \end{Bmatrix} \quad Eqn 19-9$$

对应每一谱线这些超定方程组（输入数多于或等于 2）可采用最小二乘法求解。同样可求得涵盖全体被考虑频带的刚体属性综合解，办法时先求得涵盖全体频带的总体加速度矩阵（参看方程 19-3）。

如果质心坐标预先知道，并由用户给定，那么也可以只求解第二组方程，得到轴转动惯量和惯量积。

#### 4. 计算主转动惯量和惯量主轴方向

一般地，有：

$$\{L_g\} = [A]\{\omega_g\}$$

$$\begin{Bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad Eqn 19-10$$

其中，  $\{L_g\}$  刚体对总体坐标系各个轴的动量矩

$[A]$  惯量矩阵（对称阵）

$\{\omega_g\}$  角速度向量

---

这是一个特征值问题，其中：

特征值  $I_1$ 、 $I_2$  和  $I_3$  为三个主转动惯量

特征向量  $\{e_1\}$ ,  $\{e_2\}$ ,  $\{e_3\}$ ，代表三个惯量主轴的方向余弦。

## 19.2 刚体模态分析

刚体指本身不发生变形的结构（或其部件），但可以作为整体以某一频率作周期性运动。

刚体模态的模态参数，不是由结构本身的动力特性求得的，而是由结构的边界条件（支承刚度和阻尼）决定的。影响刚体模态的因素包括刚体四周的支承元件刚度和阻尼特性，以及刚体本身的质量等等。刚体的振动可以和一个简单的振动系统相类比，该系统有一质量，并在其某部位附加有弹簧和阻尼器元件。

刚体有六个振动模态，即沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的移动模态和绕这三个轴的转动模态。该系统的任一测量模态乃是这六个模态的线性组合。

19.1 节讨论了怎样以 FRF 测量为基础，求出结构的惯量属性。即计算出质心、轴转动惯量、惯量积、主转动惯量和主轴方向等，这些参数可用作刚体模态的综合。

本节介绍确定刚体模态的两种方法，包括：

- 从测量模态中分离出刚体模态
- 基于几何数据，综合出刚体模态

### 刚体模态分析的应用

作为模态分析的应用，在某一频率以下，结构可认为是刚体这一事实有不同方面的应用。

#### 1. 调整测量设置

当 FRF 测量的频率范围涵盖整个结构在柔性支承（弹性软绳或气囊）上作刚体运动的频率时，刚体模态可用于检验测量设置。在这种情况下，最简单的峰检索法和所得模态的动画显示会指明测点是否有不合理的运动。刚体运动的这种“不合理”，可能由于下列原因所引起：

- 
- 某些结点没有测量（完全无运动）
  - 响应点标示出错（运动偏离合理）
  - 响应指向出错（往相反方向运动）
  - 传感器出毛病，或标定值出错（幅值不对）
  - 其它测量误差

由前四个原因引起的明显失误，很容易通过结构刚体模态的曲线拟合检查出来。

## 2. 补充非测量自由度

非测量结点或非测量方向的模态振型系数，可以在假定变形模态振型仍是刚体的基础上求出。这可以通过首先从测量数据中求出结构六个刚体运动中任一运动的计权系数，然后将同样的权加到非测量自由度应有的运动上。这样做，计及了几何约束，因而维持了结构的刚体运动。这一性质可用于补充对刚体部件的稀疏测量，改善几何骨架线模型的动画显示。

## 3. 校正测量误差

用上文 2 所述同样方法重算测量自由度的模态振型系数，将重算值与实际测量值相比较，用于评价测量中的各种失误（如上文 1 所指出）和测量噪声。甚至可以用计算数据替换测量数据以平滑模态振型，获得良好的结构（或构件）刚体运动。

## 4. 以结构几何参数为基础的模态综合

以结构的质量，转动惯量，边界条件和用户给定的频率和阻尼值为基础，可以计算出结构的刚体模态。作为例子，这可用于将两个模态参数已分别得到的子结构耦合在一起。

### 19.2.1 从测量模态中分离出刚体模态

分离出刚体模态是简单的事，涉及下述步骤：

1. 用几何数据构建结构的 6 种刚体运动。
2. 将给定的模态振型分解为这 6 种模式的刚体运动。这涉及到求解线性方程组，且仅当可建立足够的方程时才能进行求解。这意味着至少必须得到 6 个测量自由度的数据，而且这些方程必须是线性独立的。举个例子，如果在  $z$  轴上有两个测点，那么根本不可能从这两点的测量数据中求出刚体绕  $z$  轴旋转的成分，

---

哪怕在这两个测点上各自都有三个自由度的测量。

3. 基于几何数据和 6 个计权系数，计算要求的各个自由度的模态振型系数。

局限性：

计算结构部件（作为单件）的刚体运动有时会觉得有些为难。部件确实可做刚体运动，但它不能搁置在结构上并受到连接的约束。以飞机的尾翼作为例子，试验时尾翼可能绕通过翼中的水平轴作旋转运动，而不再是连接到机身上并以机身为基础。同样的情况可能发生在让车辆发动机作刚体运动时，可能需要将发动机从它的悬架上拆下来。

### 19.2.2 刚体模态基于几何数据的综合

“自由—自由”结构刚体模态的综合，是建立在刚体相对它的三个惯量主轴作平移和旋转基础上的。计算刚体模态，要求知道刚体的质量、质心，通过质心的三个惯量主轴方位，以及相对于这些主轴的主转动惯量。阻尼和频率由用户给定。留数由下面关系式求出：

$$R_{\text{平动}} = \frac{1}{2mW}$$
$$R_{\text{转动}} = \frac{r_f r_x}{2Iw}$$

其中， $m$  总质量

$W$  用户给定的有阻尼固有频率

$r_f$  由参考自由度到相关的惯量主轴的垂直距离

$r_x$  由响应自由度到相关的惯量主轴的垂直距离

$I$  刚体对相关惯量主轴的转动惯量

刚体模态可用于完善结构的模态模型，该模型可用于结构修改目的。

---

## 19.3 参考文献

- [1] Toivola, J. and Nuutila, O.  
*Comparison of three Methods for Determining Rigid Body Inertia Properties from Frequency Response Functions*  
Tampere University of Technology, P.O. Box 589, SF-33101 Tampere, Finland,
- [2] Okuzumi, H.  
*Identification of the Rigid Body Characteristics of a Powerplant by Using Experimental Obtained Transfer Functions*  
Central Engineering Laboratories, Nissan Motor Co., Ltd., Jun 1991
- [3] Lemaire, G. and Gielen, L.  
*Het bepalen van de inertie-parameters van een star lichaam door middel van transfertfuncties*  
Eindwerk katholieke hogeschool Brugge-Oostende dep. industriële wetenschappen en technologie, 1995-1996
- [4] LMS International  
*LMS CADA-X Modal Analysis Manual Revision 3.4*  
LMS International, Leuven, Belgium, pp 2.6-2.7, pp 3.24-3.32, 1996
- [5] LMS International  
*How to Add Rigid Body Modes to an Existing Modal Model in CADA-X*  
LMS International Consulting reports, Ref. DVDB/sh/911295, Leuven, Belgium, 22 pp, 1991

## 第二十章 设计

本章讨论三种类型的分析, 由这些分析可以确定改变结构模态特性的设计效果。包括:

- ☐ 灵敏度分析
- ☐ 修改预测
- ☐ 强迫响应分析

### 20.1 利用模态模型实施模态设计

要想正确运用下面介绍的设计步骤, 带有正确标尺的模态振型必须是预知的。

如果对应每个模态  $k$  的极点  $I_k$ , 其每一对响应自由度和参考自由度  $i, j$  的

留数  $r_{ijk}$  都已知道的话，结构的动力特性就可以得到完整的描述，并建立起结构的模态振型。

然而，在实际建立模态模型时，通常只有极点（含固有频率和阻尼因子）和相应于一个或少数几个参考点  $j$  的留数。现在的问题是如何利用这种局部、尚不完整的模态模型去预测强迫响应，假如激振力是作用在留数非预先得到的某自由度上的话。实际上，待求的任意两个自由度之间的留数可以用下文所述方法导出。

对于输入和输出之间服从 Maxwell-Betti 互易原理的线性结构，自由度  $i$ 、 $j$  二者之间的 FRF，既可以在结构的自由度  $j$  激励，在自由度  $i$  测量响应而得出；也可以在结构的自由度  $i$  激励，在自由度  $j$  测量响应而得出。即：

$$H_{ij}(\omega) = H_{ji}(\omega) \quad \text{Eqn 20-1}$$

也就是说，这种结构的 FRF 矩阵是对称阵。

居于 FRF 矩阵为对称阵的事实，每一模态  $k$  两个响应自由度  $m$ 、 $n$  之间留数  $r_{mnk}$ ，可由  $m$ 、 $n$  与参考自由度  $j$  之间已求得留数  $r_{mjk}$ 、 $r_{nj k}$  及  $r_{j j k}$  算出。因

$$r_{mjk} = a_k v_{mk} v_{jk} \quad \text{Eqn 20-2}$$

$$r_{nj k} = a_k v_{nk} v_{jk} \quad \text{Eqn 20-3}$$

其中，

$r_{mjk}$  自由度  $m$ 、 $j$  间的留数，已知

$r_{nj k}$  自由度  $n$ 、 $j$  间的留数，已知

$n_{mk}$  响应自由度  $m$  的模态振型系数，未知

$n_{nk}$  响应自由度  $n$  的模态振型系数，未知

$n_{jk}$  响应自由度  $j$  的模态振型系数，未知

由此，得

$$r_{mnk} = a_k v_{mk} v_{nk} = a_k \frac{v_{mk} v_{jk}}{v_{jk}} a_k \frac{v_{nk} v_{jk}}{a_k v_{jk}} = \frac{r_{mjk} r_{nj k}}{r_{j j k}} \quad \text{Eqn 20-4}$$

其中， $r_{j j k}$  为驱动点留数，已知。

获得拟进行修改的结构模态模型,或者拟进行组合的每个子结构的模态模型,乃是着手模态综合的出发点。

然而,有一些条件是重要的:

- 为了对所涉及的模态振型,给出正确的标尺,必须计及驱动点系数。
- 只需得到对结构改变有影响的自由度的模态振型系数。

用于得出标尺的信息有:无标尺的模态振型和对应几个参考点的模态参预因子。由这些信息按下述步骤求得所需的带标尺的模态振型系数:

当  $N_i$  个驱动(参考)点的输入和输出数据都可以获得时,就可以对应每个模态  $k$  建立一复数的模态参预因子向量:

$$[L]_k = [L_1 L_2 \dots L_{N_i}]_k \quad \text{Eqn 20-5}$$

同时求出相应的无标尺模态振型系数  $W_{ik}$ , 将其集合为一个列向量  $\{W\}_k$ :

$$\{W\}_k = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{N_i} \end{Bmatrix}_k \quad \text{Eqn 20-6}$$

留数  $R_k$  由模态振型与模态参预因子的积求得:

$$[R]_k = \{W\}_k [L]_k \quad \text{Eqn 20-7}$$

根据前文讨论过的理论关系,带标尺的模态振型  $\{V\}_k$ ,可由无标尺模态振型  $\{W\}_k$

给定一复数的比例因子  $a_k$  而得出:

$$\{V\}_k = a_k \{W\}_k \quad \text{Eqn 20-8}$$

根据留数的定义,这种带标尺的模态振型与留数矩阵之间的关系为:

$$R_k = \{W\}_k [L]_k = \{V\}_k \{V\}_k^t \quad \text{Eqn 20-9}$$

而由式 20-8, 有

$$a_k = \sqrt{\frac{W_{1k}^* L_{1k} + W_{2k}^* L_{2k} + \dots + W_{N_i k}^* L_{N_i k}}{W_{1k}^* W_{1k} + W_{2k}^* W_{2k} + \dots + W_{N_i k}^* W_{N_i k}}} \quad \text{Eqn 20-10}$$



---

特殊情况下，只考虑一个输入，即只得到一组留数，则比例因子变为：

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{L_{1k}}{W_{1k}}} \quad \text{Eqn 20-11}$$

在式 20-8 中引进比例因子  $\alpha_k$ ，其作用实际上是将模态振型向量  $\{\mathbf{W}\}_k$  和模态参预因子  $[L]_k$  构建的一般性模态模型，转换为带标尺模态振型向量  $\{\mathbf{V}\}_k$  的模态振型，在这一模型中，模态参预因子经由式 20-10 被“吸收”掉了。这个模型由于去掉了比例因子，从而丧失了部分信息，所得到的模型仅对具有对称的  $\mathbf{FRF}$  矩阵的结构才有效。实际上，与其用式 20-10 计算比例因子  $\alpha_k$ ，最好还是用最小二乘法去逼近不满足互易原理的模态模型，重构出认为满足互易原理的模型。

## 20.2 灵敏度分析

通过对结构的试验模态分析，可获得以模态参数来表述的动力学模型。该模型所蕴涵的信息，可用于辨识某些动力学问题。譬如由模态振型的动画显示，结合物理上的见识和实践的经验，就可以为解决某特定的动力学问题，提出对结构作修改的建议。

对于有复杂动力特性的结构，要想直接预测物理上的改动对模态参数的影响，通常是很困难的——不说不可能的话。如果对结构的动力特性检测出或感觉到不满意的话，设计者可以用试凑法对机构作某些修改，但不能担保这样的努力都能获得令人满意的效果。而采用数字技术，则可以利用模态试验得到的结果，对结构改变的效果作出较可靠的评估。

所谓结构改变，就是对结构的物理特性作出一些修改，被修改的物理量包括质量、刚度和阻尼。灵敏度分析可以使你观察到这些结构改变，对于特定的模态，在结构上某些点会产生怎样的影响。计算的只是模态模型对结构作虚拟改变的灵敏度，并不涉及到实际施加任何改变。灵敏度分析帮助你确定在哪个部位作修改最有效。

### 20.2.1 灵敏度分析的数学背景

在数学意义上，求某一自由度对各个参数的灵敏度，涉及到评估一矩阵的本

征属性对这些参数的偏导数。

模态参数与 **FRF** 之间的关系如下式：

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{r_{ijk}}{j\omega - \lambda_k} \right) \quad \text{Eqn 20-12}$$

此关系式对物理参数  $P$  取偏导数，得

$$\frac{\delta H_{ij}}{\delta P} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{j\omega - \lambda_k} \frac{\delta r_{ijk}}{\delta P} + \sum_{k=1}^{2N} \frac{r_{ijk}}{(j\omega - \lambda_k)^2} \frac{\delta \lambda_k}{\delta P} \quad \text{Eqn 20-13}$$

$P$  可以是某一自由度的质量，或某一对自由度之间的阻尼或刚度。

动刚度矩阵  $Q$  为：

$$Q = -\omega^2 M_{cc} + j\omega C_{cc} + K_{cc} \quad \text{Eqn 20-14}$$

其中，  $M$  质量矩阵

$C$  阻尼矩阵

$K$  刚度矩阵

$c$  脚标，标示矩阵中只包括受到  $P$  改变影响的元素

利用式 20-14 并考虑伴随矩阵数学关系，式 20-13 可改写成

$$\frac{\delta H_{ij}}{\delta P} = \{H_{ic}\}^t \frac{\delta Q}{\delta P} \{H_{cj}\} \quad \text{Eqn 20-15}$$

利用式 20-12，式 20-15 改写为

$$\frac{\delta H_{ij}}{\delta P} = \left\{ \sum_{k=1}^{2N} \frac{r_{ick}}{j\omega - \lambda_k} \right\}^t \frac{\delta Q}{\delta P} \left\{ \sum_{k=1}^{2N} \frac{r_{cjk}}{(j\omega - \lambda_k)} \right\} \quad \text{Eqn 20-16}$$

将式 20-16 分解为分部分式，区别出相应于式 20-13 的项，则对应于频率和模态振型的灵敏度可分别表示为 20-17 和 20-18。

$$\frac{\delta \lambda_k}{\delta P} = \frac{-1}{r_{ijk}} \{r_{ick}\}^t \left[ \frac{\delta Q}{\delta P} \right]_{j\omega=j\omega_{dk}} \{r_{cjk}\} \quad \text{Eqn 20-17}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta r_{ijk}}{\delta P} = & -\{r_{ick}\}^t \frac{\delta}{\delta j\omega} \left[ \frac{\delta Q}{\delta P} \right]_{j\omega=j\omega_{ik}} \{r_{cjk}\} + \sum_{m=1}^{2N} \{r_{ick}\}^t \left[ \frac{\delta Q}{\delta P} \right]_{j\omega=j\omega_{ik}} \left\{ \frac{r_{cjm}}{\lambda_m - \lambda_k} \right\} \\ & + \sum_{m=1}^{2N} \left\{ \frac{r_{ick}}{\lambda_m - \lambda_k} \right\}^t \left[ \frac{\delta Q}{\delta P} \right]_{j\omega=j\omega_{ik}} \{r_{cjm}\} \end{aligned} \quad Eqn\ 20-18$$

由式 20-17 和 20-18 可知，为了计算结构改变的灵敏度，需要有对结构改变有影响的各自由度  $c$  的留数  $r_{ick}$  和  $r_{cjk}$ 。如果不是所有留数都已得出的话，可利用 Maxwell-Betti 互易原理求出所需要的留数。如果任意参考自由度  $j$  的驱动点留数  $r_{jjk}$  已知，自由度  $i$ 、 $c$  对自由度  $j$  的留数也已知，就可以求出自由度  $i$ 、 $c$  的留数  $r_{ick}$ 。实际上，要想对模态振型给出正确的标尺，驱动点留数是必不可少的。

由式 20-18 所给的一般性公式，可以计算当结构改变时，自由度  $i$  的模态振型系数的灵敏度。结构参数  $P$  的改变，涉及自由度  $a$  和  $b$ 。对于模态模型中的每个模态，要求有带标尺的模态振型系数。由动刚度矩阵  $Q$  的定义，可知  $P$  代表三种特定的参量，这就是质量、线性弹簧刚度和粘性阻尼系数。

### 质量

当  $P$  代表在指定自由度  $a$  上的质量时，式 20-17 和 20-18 可简化为：

$$\frac{\delta \lambda_k}{\delta m_a} = -\lambda_k^2 v_{ak}^2 \quad Eqn\ 20-19$$

$$\frac{\delta v_{ik}}{\delta m_a} = -\lambda_k v_{ak}^2 v_{ik} - v_{ak} \sum_{m=1}^{2N} \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k - \lambda_m} v_{am} v_{im} \quad Eqn\ 20-20$$

### 刚度

当  $P$  代表在自由度  $a$ 、 $b$  之间的线性弹簧刚度时，式 20-17 和 20-18 可简化为：

$$\frac{\delta \lambda_k}{\delta k_{ab}} = - (v_{ak} - v_{bk})^2 \quad \text{Eqn 20-21}$$

$$\frac{\delta v_{ik}}{\delta k_{ab}} = - (v_{ak} - v_{bk}) \sum_{m=1}^{2N} \frac{(v_{am} - v_{bm})v_{im}}{\lambda_k - \lambda_m} \quad \text{Eqn 20-22}$$

注意，若  $b$  为一固定点（即接地），则有  $v_{bm} = v_{bk} = 0$ 。

## 阻尼

当  $P$  代表自由度  $a$ 、 $b$  之间的粘性阻尼时，式 20-17 和 20-18 变为：

$$\frac{\delta \lambda_k}{\delta c_{ab}} = - \lambda_k (v_{ak} - v_{bk})^2 \quad \text{Eqn 20-23}$$

$$\frac{\delta v_{ik}}{\delta c_{ab}} = - \frac{(v_{ak} - v_{bk})^2}{2} v_{ik} - (v_{ak} - v_{bk}) \sum_{m=1}^{2N} \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_m} (v_{am} - v_{bm}) v_{im} \quad \text{Eqn 20-24}$$

式 20-19、20-21 和 20-23 的虚部代表有阻尼固有频率的灵敏度，而它们的实部则代表阻尼因子或指数衰减率的灵敏度。

## 20.3 修改预测

本节讨论如何利用动力修改原理，去预测结构修改对机械结构模态参数的影响。这些修改可以取附加以局部质量、局部刚度和局部阻尼的形式，或者在有限元分析中，诸如用杆、桁架、梁和板对结构进行补强等方式。对于这些局部修改，一种子结构集成理论可以让你能预测出由子结构集成的结构的模态模型。

修改预测能允许你作出下列评估：

- 结构修改的影响
- 任意数量子结构之间，以任意数量和各种方式连接产生的影响
- 缩比模型的动力学，基于集总的质量—弹簧—阻尼器元件

这样的分析可以避免试试、改改造成时间上的浪费。包括去修改样机，做机械结构的缩比模型，对样机或模型做动力特性的测量和分析，以及对修改的效果作出评估等。

### 20.3.1 数学背景

结构修改和子结构理论的出发点，是第 15.1 节所讨论的模式模型。

理论背景的第一部分将研究子结构的耦合和修改，通常是采用柔性连接并附加粘性阻尼。随后再讨论刚性耦合及带比例阻尼的柔性耦合情况。

#### 柔性耦合加粘性阻尼的子结构集成的模式模型

##### 子结构的模式模型

讨论两个结构，1 和 2。它们遵从下面列出的拉普拉斯域运动方程：

$$s^2 M_1 \{x_1\} + sC_1 \{x_1\} + K_1 \{x_1\} = \{f_1\} \quad \text{Eqn 20-25}$$

$$s^2 M_2 \{x_2\} + sC_2 \{x_2\} + K_2 \{x_2\} = \{f_2\} \quad \text{Eqn 20-26}$$

其中， $M_i$ 、 $C_i$  和  $K_i$  分别为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，下标  $i$  与结构 1 或 2 相对应。一般按粘性阻尼考虑，系统矩阵为对称阵。 $\{x_1\}$  和  $\{x_2\}$  代表位移向量， $\{f_1\}$  和  $\{f_2\}$  代表力向量。

子结构 1 的模式参数可以用常规方法得出，对于子结构 2，可以用相同的方法或不尽相同的方法得出。

为了运动方程的解耦，可引进一伪方程组（邓肯法）：

$$s M_1 \{x_1\} - s M_1 \{x_1\} = \{0\} \quad \text{Eqn 20-27}$$

于是，子结构 1 的系统方程变为：

$$sA_1 \{y_1\} + B_1 \{y_1\} = \{p_1\} \quad \text{Eqn 20-28}$$

其中，

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & M_1 \\ M_1 & C_1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -M_1 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix}$$
$$\{y_1\} = \begin{Bmatrix} sx_1 \\ x_1 \end{Bmatrix} \quad \{p_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1 \end{Bmatrix}$$

矩阵  $A_1$  和  $B_1$  通过右乘特征向量矩阵  $V_1$  和左乘其转置  $V_1^T$  而实现对角线化：

$$V_1^T A_1 V_1 = [a_1] \quad \text{Eqn 20-29}$$

$$V_1^T B_1 V_1 = [b_1] \quad \text{Eqn 20-30}$$

利用特征向量矩阵将物理坐标  $\{y_1\}$  转换到模态坐标上, 这一坐标变换的定义式为:

$$\{y_1\} = V_1 \{q_1\} \quad \text{Eqn 20-31}$$

以式 20-31 代入方程 20-28, 并左乘  $V_1$  的转置, 再代入 20-29 和 20-30, 就得到对应模态坐标的子结构 1 的运动方程:

$$s [a_1] \{q_1\} + [b_1] \{q_1\} = V_1^T \{p_1\} \quad \text{Eqn 20-32}$$

可见, 在模态空间内, 运动方程是无耦合的。

同样过程可对子结构 2 重复, 产生对角线特征值矩阵  $[A_2]$  和特征向量矩阵  $V_2$ 。

由特征向量矩阵  $V_2$  定义物理坐标  $\{y_2\}$  到模态坐标  $\{q_2\}$  的转换。在模态空间内子结构 2 的运动方程为:

$$s [a_2] \{q_2\} + [b_2] \{q_2\} = V_2^T \{p_2\} \quad \text{Eqn 20-33}$$

### 子结构的集成

两个子结构的系统矩阵可以整合在一起, 得到由两个在动力学上彼此独立的子结构所集成结构的系统矩阵。这样集成的子结构很容易导出它的模态参数, 因为它们实际上是原样的, 只不过把它们放进同一个特征值矩阵和同一个特征向量矩阵罢了。

更确切地说, 这样的子结构集成后产生下面的系统矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 20-34}$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

而运动方程则为：

$$sA \{y\} + B \{y\} = [p] \quad \text{Eqn 20-35}$$

可以证明，方程中的矩阵可经由集成的特征向量矩阵  $V$  使其对角化。

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 20-36}$$

集成的特征值对角阵为：

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 20-37}$$

从物理坐标到模态坐标的转换关系为：

$$\{y\} = V[q] \quad \text{Eqn 20-38}$$

$$[q] = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

其中，

用特征向量矩阵和特征值矩阵表示类似于 20-33 的方程，得

$$s[a][q] + [b][q] = V^t[p] \quad \text{Eqn 20-39}$$

仔细观察此特征向量矩阵  $V$ ，两个子结构在动力学上仍旧是彼此独立的。确实，作用在一个子结构上任意点的任何力都不会引起另一结构的任意点作任何运动。

现在让两个子结构作柔性连接，连接元件为弹簧和阻尼器。引进连接矩阵  $K_c$  和  $C_c$  后，方程 20-35 变为：

$$s(A + A_c) \{y\} + (B + B_c) \{y\} = [p] \quad \text{Eqn 20-40}$$

其中，

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_c & 0 & -C_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_c & 0 & C_c \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_c & 0 & -K_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_c & 0 & K_c \end{bmatrix}$$

子结构相互联接后的系统矩阵，不再像未联接时那样被转移矩阵  $V$  所对角线化。这是由于联接刚度和联接阻尼介入的缘故。

## 结构修改

在相互联接的子结构的运动方程被解耦之前,可以对各子结构先作出某些修改。结构修改集中到修改下列矩阵:

$$M_1, C_1, K_1 \text{ and } M_2, C_2, K_2 \quad \text{Eqn 20-41}$$

这些改变造成系统矩阵的修改:

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & \Delta M_1 & 0 & 0 \\ \Delta M_1 & \Delta C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta M_2 \\ 0 & 0 & \Delta M_2 & \Delta C_2 \end{bmatrix} \quad \Delta B = \begin{bmatrix} \Delta M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta K_2 \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 20-42}$$

上面所表示的矩阵是对无耦合子结构的修改,即仅仅对各子结构各自进行修改。

将式 20-42 表示的修改加进 20-40 表示的集成结构的系统方程,就得到最终的物理坐标方程:

$$s(A + A_c + \Delta A)\{y\} + (B + B_c + \Delta B)\{y\} = \{p\} \quad \text{Eqn 20-43}$$

## 无耦合的运动方程

对原有未联接的子结构(以方程 20-36 表示)作坐标变换,并左乘  $V^T$ ,得到对应模态坐标的一组新方程:

$$sA_m[q] + B_m[q] = V^T[p] \quad \text{Eqn 20-44}$$

其中,

$$A_m = [a] + V^T A_c V + V^T \Delta A V$$

$$B_m = [b] + V^T B_c V + V^T \Delta B V$$

对于修改后的结构,矩阵  $A_m$  和  $B_m$  可再次通过一般的特征值分解予以对角化。新的特征值和特征向量分别以  $\lambda'$  和  $W$  表示,有:

$$W^T A_m W = [a']$$

$$W^T B_m W = [b']$$

考虑作坐标变换:

$$[q] = W[q'] \quad \text{Eqn 20-45}$$



代入方程 20-44，并左乘  $W^T$ ，得

$$s[a'] [q'] + [b'] [q'] = W^T V^T [p] \quad \text{Eqn 20-46}$$

转换矩阵  $V$  和  $W$  可以结合成一个矩阵  $V'$ ：

$$V' = VW \quad \text{Eqn 20-47}$$

再给定下面转换关系：

$$\{y\} = V' [q'] \quad \text{Eqn 20-48}$$

式 20-48 即表示经联接和修改后的子结构，其物理坐标与模态坐标之间的转换关系。随坐标变换得到得无耦合运动方程为：

$$s[a'] [q'] + [b'] [q'] = V'^T [p] \quad \text{Eqn 20-49}$$

$[A]$  中特征值的虚部和实部分别代表固有频率和阻尼因子。矩阵  $V'$  的各列即为模态振型。

### 比例阻尼情况的柔性耦合

上面的讨论涉及一般粘性阻尼下的柔性耦合，本节将讨论零阻尼和比例阻尼的情况。

重写出一般粘性阻尼下的运动方程：

$$(s^2[M] + s[C] + [K]) \{X\} = \{F\} \quad \text{Eqn 20-50}$$

### 零阻尼情况

无阻尼情况下， $[C] = [0]$ ，求解下式表示的特征值问题：

$$(s^2[M] + [K])\{X\} = \{0\} \quad \text{Eqn 20-51}$$

便可得到特征值  $-\omega_r^2$  和特征向量  $\{\psi\}_r$ 。实际上，这时系统的极点为纯虚数，以共轭复数对形式出现为：

$$\lambda_1 = j\omega_1, \dots, \lambda_N = j\omega_N \quad \text{Eqn 20-52}$$

$$\lambda_1^* = -j\omega_1, \dots, \lambda_N^* = -j\omega_N \quad \text{Eqn 20-53}$$

而特征向量，即模态向量为实数向量，称为正则模态（各个系数的相位关系为

+/- 180°)。

基于模态向量的正交性，运动方程可以实现对角化。转换到模态坐标上，就可得到解耦的运动方程，该方程上出现的是称为模态质量和模态刚度的对角线型系统矩阵：

$$[\psi] = [\{\psi_1\} \dots \{\psi_N\}] \quad \text{Eqn 20-54}$$

$$[\psi]^T [M] [\psi] = [m] \quad [\psi]^T [K] [\psi] = [k] \quad \text{Eqn 20-55}$$

$$\{X\} = [\psi]\{q\} \quad \text{Eqn 20-56}$$

$$(-\omega^2 [m] + [k])\{q\} = \{0\} \quad \text{Eqn 20-57}$$

$$\text{其中} : [k] = [m] [\omega_r^2] \quad \text{Eqn 20-58}$$

#### 比例阻尼情况

比例阻尼情况下，阻尼矩阵表示为质量矩阵和刚度矩阵的线性组合：

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad \text{Eqn 20-59}$$

其时，运动方程为：

$$((\frac{s^2 + s\alpha}{s\beta + 1})[M] + [K])\{X\} = \{0\} \quad \text{Eqn 20-60}$$

特征值 $-\omega_r^2$ 与复数极点 $I_r$ 的关系为：

$$\frac{\lambda_r^2 + \lambda_r \alpha}{\lambda_r \beta + 1} = -\omega_r^2 \quad \text{Eqn 20-61}$$

复数极点的值与实数特征值 $-\omega_r^2$ 和阻尼因子 $\alpha$ 、 $\beta$ 有关。在计及两个以上模态的情况下（实际上总是这样），阻尼因子 $\alpha$ 、 $\beta$ 可由模态质量、模态刚度和模态阻尼比按最小二乘法求得。

#### 模态综合

只施加质量和刚度的耦合修改，而不作阻尼的耦合修改情况下，耦合系统的运动方程为：

$$(s^2([M] + [\Delta M]) + [K] + [\Delta K])\{X\} = \{0\} \quad \text{Eqn 20-62}$$

在模态空间内为：

$$(-\omega^2([m] + [\Delta m]) + [k] + [\Delta k])\{q\} = \{0\} \quad \text{Eqn 20-63}$$

其中：

$$[\psi]_m = [\psi][q_r]_m \quad \text{Eqn 20-64}$$

$$[\Delta m] = [V][\Delta M][V] \text{ and } [\Delta k] = [V][\Delta K][V] \quad \text{Eqn 20-65}$$

这一方程的特征值和特征向量，从模态空间返回到物理空间时，就是耦合系统的模态参数。

在比例阻尼情况下，复数极点可由特征值和比例阻尼因子  $\alpha$  和  $\beta$  求出。

作模态预测时，规定采用比例阻尼的方案。在处理需做大的修改，且模态振型有众多自由度的大型结构时，这一方案可节省很多计算时间。为了确定  $\alpha$  和  $\beta$ ，至少必须利用两个原始的模式。

### 刚性耦合

上述理论中对的是柔性耦合，但也可以在相联接的子结构的某些自由度上设置约束，建立起它们之间的刚性耦合，或者在单一自由度上加约束，使其刚性地固结到“地”上。后一种情况下，约束自由度保持零位移。

物理自由度上的约束方程为：

$$[R]\{Y\} = \{0\} \quad \text{Eqn 20-66}$$

实施模态转换

$$\{Y\} = [\psi]\{q\} \quad \text{Eqn 20-67}$$

得到模态空间的约束方程

$$[R][\psi]\{q\} = [T]\{q\} = \{0\} \quad \text{Eqn 20-68}$$

将模态坐标剖分为相关联的模态坐标  $q_d$  和不相关联的模态坐标  $q_i$ 。约束矩阵[T]也

也同样剖分为二：

$$[[T_d][T_i]] \begin{Bmatrix} q_d \\ q_i \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \text{Eqn 20-69}$$

$$\begin{Bmatrix} \{q_d\} \\ \{q_i\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[T_d]^{-1} & [T_i] \\ & [I] \end{bmatrix} \{q_i\} = [T']\{q_i\} \quad \text{Eqn 20-70}$$

---

在选择相关联的模态坐标时，必须保证  $[Ta]$  的非奇异性。

由此，导出一新的特征值问题：

$$(s[T']^T[a][T'] + [T']^T[b][T'])\{q_i\} = \{0\} \quad \text{Eqn 20-71}$$

求出包含不相关联模态坐标的特征值和特征向量，相关联模态坐标的特征向量也就求出了。最后一步是通过逆模态变换，得到物理坐标的模态振型。

用同样方法可定义其它结构修改情况下的约束方程。

### 20.3.2 修改预测的实施

本节将讨论实施修改预测中更加切合实际的某些课题。通过这一流程，你可以求出被修改结构的固有频率、阻尼因子和带标尺的模态振型。该结构可以由若干个子结构组装起来的总成。

#### 20.3.2.1 模态模型的修正

应用模态综合法的出发点，是已获得拟修改结构的模态模型，或者拟进行集成的所有各个子结构的模态模型。

在计算作业中，所有模态参数（固有频率、阻尼因子、以及带标尺的模态振型）都必须先具备。而最重要的是下面提到的一些条件应该得到满足：

##### 1. 驱动点系数

为了能正确地给定所有模态振型的标尺，必须保证有驱动点系数。这意味着对于至少有一个模态参预因子表的记录来说，激振力输入（参考）标识应该与同一模态的一个模态振型表记录相一致，而它们中的任何一个都不应等于零。注意，对于所涉及的各个不同模态而言，驱动点的自由度序号也可以是不一样的。

##### 2. 模态自由度与修改自由度的匹配

只是对那些会受到结构改变影响的自由度，其模态振型系数才是必要的。这意味着只针对这些自由度，讨论质量、刚度和阻尼的修改，或者讨论附加某种构件所造成的影响。而且，完全可以采用非完整的模态振型向量，即忽略掉一些无关紧要的自由度。

为了求得修正的结果，模态模型应包含所有的结构模态，以便精确描述在感兴趣频带内的动力响应。明确这一点十分重要，特别是当模态模型是从仅仅一个参考点的 FRF 组中萃取出来的话，结构的某些模态可能实际上未被激励出来。

---

这起因于该参考点正好位于、或接近于这些模态的节点处。该情况下，模态模型虽足以很好地描述所测量出的频响函数，却不足以描述该结构的动力特性。

类似的问题可能来自带外模态的影响，即高于或低于试验模态参数估计的分析频带的那些模态的影响。某些模态振型估计的频域法，允许引进修正项（残余质量和残余柔度）来补偿带外模态的影响。这样的修正常常可以相当精确地拟合测量数据。遗憾的是，这样的残余项不可能按比例去修正先前按其它参考点得到的模态振型系数。因此，有必要采用足够大的模态模型，其中，至少应包含分别低于和高于感兴趣频带各一个模态。

在采用有限频带的模态模型时，作较大的结构修改有可能产生固有频率超出该频带的模态。由于原有的模态模型对于该频率而言是非有效的，因而预测的结果也不会可靠。妥帖的办法是，或者事先考虑到包括修改后模态模型所在频率全部频带内的所有模态，或者使结构修改量缩小到不至于出现上述问题。在任何情况下，你都不应过于相信那些固有频率超出原有模态模型所在频带的新出现模态。

模态振型的标尺应予修正。为得到修正后的带标尺的模态振型，原有的模态振型应按统一的单位制给定标尺，遵守各物理量之间的一致性：极点，单位电压对应的响应工程单位，等等。正确地标定测量传感器及采集设备，对于所得结果附加以某绝对标尺来说是完全必要的。

### **20.3.3 模型修改的定义**

在模态模型所具有的各个自由度上，你可以定义在一个或多个部位作修改，以影响、改变机械结构的动力特性，也可以通过附加若干个完整的子结构对结构进行修改，这些子结构的模态模型是预知的，采用刚性的联接约束。

#### **20.3.3.1 质量修改**

点质量可加到结构的结点上。进行质量修改时，你只需简单地规定结点和质量。

#### **20.3.3.2 刚度修改**

附加的刚度（弹簧）可连结在结构的任意两个自由度上。

进行刚度修改时，你必须规定附加刚度的两个自由度及刚度值。

---

也可通过附加一桁架或杆件对结构进行刚度（带质量）修改。

#### 20.3.3.3 阻尼修改

阻尼元件（缓冲器）可加在结构上任意两个自由度之间。

施加阻尼修改时，必须给定加阻尼到哪几个自由度之间，并给定阻尼系数。

也可通过在结构上附加一个可调谐动力消振器的方式作阻尼修改。

#### 20.3.3.4 桁架元件

桁架元件可视为两端铰接的杆件。作用在桁架元件端部的力（结点力）指向杆件的轴线。由于桁架被模型化为端部铰接，它们不承受横向的力。弯矩和扭矩不能从一个元件传递到另一元件。

该元件的作用是在两联接点之间附加一刚度和一质量，要求已知元件的物理性质。

加桁架元件需给定其固定于哪两个结点，并给定其物理性质。性质包括：

——横截面面积  $A$

——材料的弹性模量  $E$

——质量密度  $\rho$

这些参数均应按统一的单位制来表示。

两结点间的桁架元件解释为简单的质量修改和刚度修改。轴向刚度牵涉到一个  $6 \times 6$  的刚度矩阵，对应于 6 个自由度（每个结点 3 个自由度）。通过将轴向刚度投影到三个坐标轴得到该矩阵。

#### 20.3.3.5 杆元件

杆元件可加到结构上任意两个分离的结点上。杆模型化为端部铰接，这样杆端部的作用力沿杆的轴向。弯矩和扭矩不能从一个元件传到另一个元件上。

事实上，它提供在两结点间附加一刚度和质量，当然，该刚度和质量应是已知的。

加杆元件必须给定它所固定的结点，并给它其物理性质。该性质包含：

——轴向刚度  $K_{ij}$

——质量  $M$

轴向刚度牵涉到一个  $6 \times 6$  的刚度矩阵，对应于 6 个自由度（每个结点 3 个自

由度)。通过将轴向刚度投影到三个坐标轴得到该矩阵。

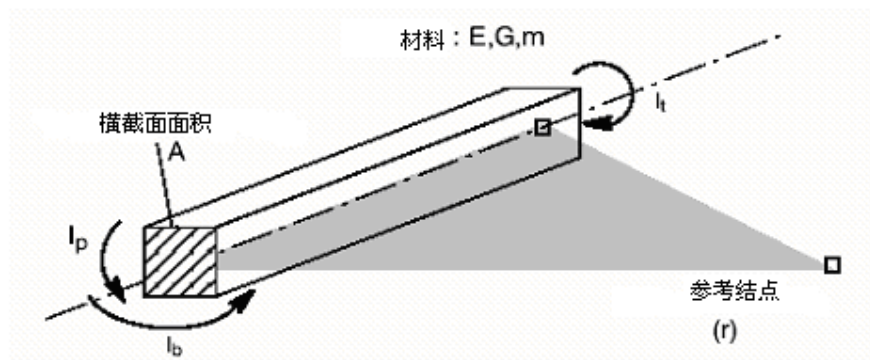
质量等分为二，分别加在杆的两端。

### 20.3.3.6 梁元件

梁元件是可传递横向力，弯矩和扭矩的元件。

加一梁元件必须给定下列参数：

- n 两端结点 (n1、n2)
- n 梁的横截面面积 (A)
- n 材料的杨氏弹性模量 (E)
- n 材料的质量密度 (m)
- n 材料的剪切弹性模量 (G)
- n 两正交平面内的弯曲惯性矩 ( $I_p$ 、 $I_b$ )
- n 扭转惯性矩 ( $I_t$ )
- n 定义弯曲惯性矩方位的参考结点 (r)



由参考结点和梁两端结点确定所谓参考平面。两个方位的弯曲惯性矩定义为：

$I_b$  对应于参考平面内的弯曲

$I_p$  对应于与参考平面正交的平面内的弯曲。在两端结点，每一结点有 6 个自由度：3 个线位移自由度和 3 个角位移自由度。因此，梁元件之间可传递六个力分量：沿三个轴向的分力和对应三个轴的分力矩。在端部结点未连接其它梁



时，可以只传递轴向力而不传递力矩，例如简支梁情况。在某些联接方式中，处于同一轴线的梁（共线梁）之间不受扭矩作用。

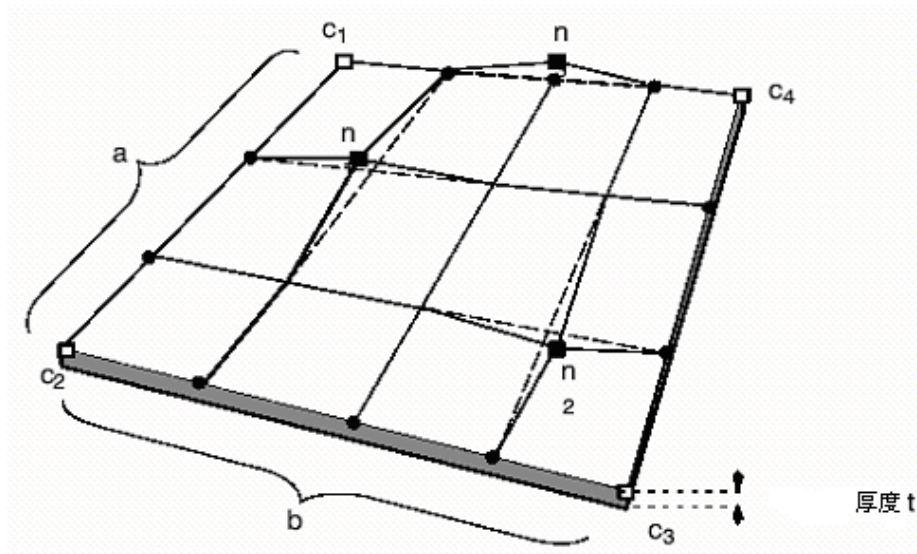
#### 20.3.3.7 平板型薄膜元件

平板型薄膜或称薄板元件为一二维四边形元件，可传递挠曲力（与薄板平面正交）和薄膜力（在薄板平面内）二者。

添加一薄板元件，必须给定下列参数并参看图示说明：

- n 薄板名称
- n 薄板四角结点  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$  和  $c_4$
- n 板厚 (t)，以适当的用户单位标示
- n 沿第一边线  $\overline{c_1c_2}$  划分为多少个等分结点 (a)
- n 沿第二边线  $\overline{c_2c_3}$  划分为多少个等分结点 (b)
- n 连接结点  $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3 \dots$
- n 薄板材料性质，即杨氏模量 (E)，波桑比 ( $\gamma$ ) 和质量密度 (m)

所有这些参数应当以适当的单位来表示。



当薄板两个边各分为 a 等分和 b 等分时，建立出 a\*b 的矩形网格，如上图所示。在四角的结点已有情况下，意味着生成  $((a+1) \cdot (b+1) - 4)$  个新的结点。



如果已经规定好连接结点,那么凡是紧靠连接结点的网格交叉点就由结点替换。

这样定义的薄板,应遵从下列条件<sup>(1)</sup>:

- n 网格元件不应过分偏离矩形。即每个棱角均应  $\approx 90^\circ$ 。
- n 网格元件应接近于正方形。即每个网格的长、宽比应  $\approx 1$ 。
- n 板不宜太厚。即长、厚比应  $>5$ 。

网格元件的每一棱角结点有 6 个自由度—3 个线位移, 3 个角位移。这样, 该结点可传递给另外的网格元件以 6 个力分量。这样的情况也符合不同的薄板元件相连接的情况, 它们可以是棱线相连接, 也可以是有共同的结点。

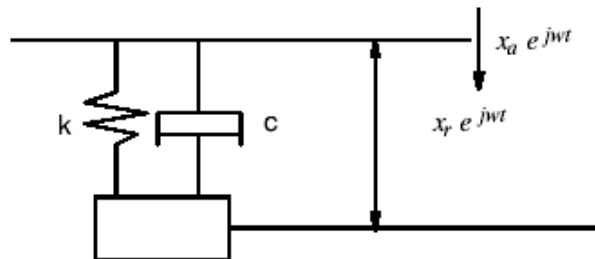
注 (1): 这里所述薄板的质量矩阵和刚度矩阵的算法, 依据 Mindlin 的板理论。

#### 20.3.3.8 调谐式消振器

调谐式消振器是一个单自由度振动系统, 由一个刚性质量通过一个弹簧和一个阻尼器连接到一较复杂的结构上。



这一单自由度系统的参数  $m$ 、 $k$  和  $c$  按这样的原则来设计, 就是使得耦合点在该消振器方向的运动对于某一频率来说尽可能地缩小 (阻尼掉), 此频率通常指结构的共振频率。



耦合点在消振器方向的运动以  $x_a$  表示, 待消振的频率为  $f$  ( $= \omega/2\pi$ ), 消振器

质量与附着点之间的相对位移用  $x_r$  表示，则质量  $m$  的运动方程可写成：

$$(kx_r + cj\omega x_r) e^{j\omega t} = m(x_a + x_r) \omega^2 e^{j\omega t} \quad \text{Eqn 20-72}$$

对  $x_r$  求解方程得

$$x_r = \frac{m\omega^2 x_a}{-m\omega^2 + jc\omega + k} \quad \text{Eqn 20-73}$$

作用在消振器附着点的力为：

$$F e^{j\omega t} = (k + jc\omega) x_r e^{j\omega t} \quad \text{Eqn 20-74}$$

由方程 20-73 和 20-74 可得

$$F = \frac{(k + jc\omega)m}{-m\omega^2 + jc\omega + k} \omega^2 x_a \quad \text{Eqn 20-75}$$

这个力可以假想为一等效质量  $m_{eq}$  产生的惯性力，该质量被刚性地固结在附着点。由此，

$$F = m_{eq} \omega^2 x_a \quad \text{Eqn 20-76}$$

$$m_{eq} = \frac{(k + jc\omega)m}{-m\omega^2 + jc\omega + k} \quad \text{Eqn 20-77}$$

可以证明，如果没有阻尼作用 ( $c=0$ )，那么适当设计质量和刚度匹配，可以使附着点的振动被完全消除掉 ( $x_a = 0$ )。如果消振器的固有频率就等于强迫振动频率  $\omega$  的话，就会出现这一情况。

调谐式消振器最切实的应用，是缩减共振频率  $\omega_n$  处的振级。这种情况下，消振器本身的固有频率最佳是调谐到

$$\omega_{na} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega_n}{1 + \mu} \quad \text{Eqn 20-78}$$

其中， $\mu$  等于消振器质量与消振器系统在结构共振点的“等效”质量之比值。即

$$\mu = \frac{m}{m_{eq}} \quad \text{Eqn 20-79}$$

而消振器的最佳阻尼比则由下式表示：

$$\xi_{opt} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad \text{Eqn 20-80}$$

由式 20-78、20-79 和 20-80 即可求得消振器的物理参数  $m$ 、 $c$  和  $k$ ，只是需要预先知道下面几个量：

$m_{eq}$  等效质量

$\omega_n$  调谐的目标频率，即被调谐的模式固有频率

$m$  消振器质量，由用户给定

系统对应某一模式的等效质量可用下式计算：

$$m_{eq} = \frac{1}{\|V_i^2 \cdot 2j\omega_d\|} \quad \text{Eqn 20-81}$$

其中，

$V_i$  被调谐模式在附着点的带标尺模式振型系数

$\omega_d$  被调谐模式的有阻尼固有频率

#### 20.3.3.9 加约束

物理约束可以规定在各别的自由度之间，或在一个自由度本身。在两个各别自由度给定的约束通常是让它们刚性地联结；在一个自由度上加约束实质上就是将它与“地”相固结。

#### 20.3.4 修改预测

一旦预修改要求确定下来，修改预测工作即可启动。

对于有两个子结构的简单情况，对其可能要进行修改（记作  $\Delta$ ）和彼此连接（用下标  $c$  表示），集成结构的模态模型预测包括下述步骤：

1. 调出每个子结构的模态模型。构建极点的对角线矩阵  $[A_1]$  和  $[A_2]$ ，以及带标尺的模态振型矩阵（其系数可能是复数或实数） $V_1$  和  $V_2$ 。
2. 将两个模态模型结合为总成矩阵  $[A]$ （式 20-37）和  $V$ （式 20-36）。
3. 给定两个子结构之间的连接件（弹簧和阻尼器）。由此产生矩阵  $A_c$  和  $B_c$ （式 20-40）。
4. 给定需要的修改，由该修改产生矩阵  $\Delta A$  和  $\Delta B$ （式 20-42）。
5. 利用模态矩阵  $V$ ，将连接和修改的矩阵转换至模态空间。

6. 将对角线矩阵添加进模态空间（式 20-44），产生集成结构的系统矩阵。
7. 通过对集成系统矩阵的特征值和特征向量分解，求得集成结构的模态模型。即获得其复数极点（含固有频率和阻尼因子）和模态振型。

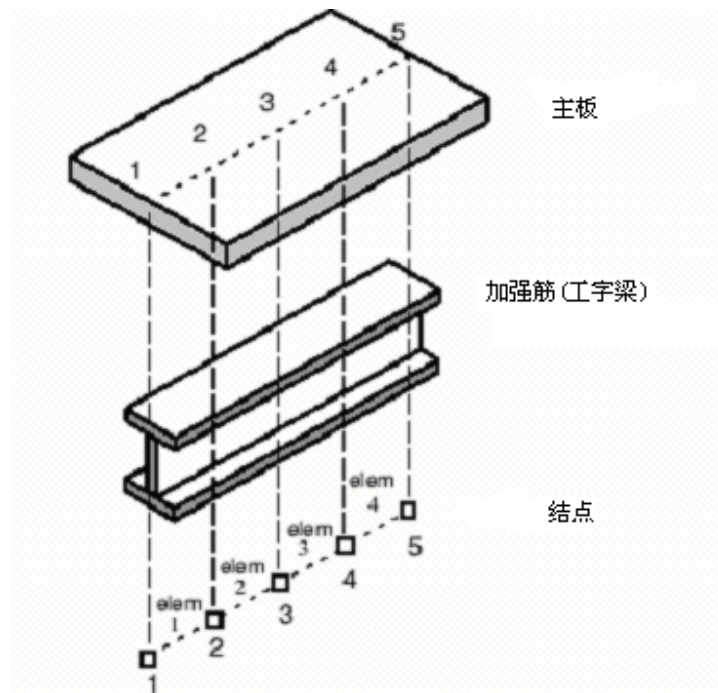
### 数值分析问题

上面所述，实际上是求解修改后系统的特征值问题，这可能会碰到数值分析中的某些问题。其中两个原因可能使问题复杂化，这就是：

- n 存在不均衡的结构修改。如引进大的刚度以仿真定位，引进局部的强阻尼等。
- n 原有的固有频率范围太宽。尤其是，当从有限元计算输入的自由—自由系统刚体模态（其频率接近于 0 Hz），与高频率的弹性模态混合在一起时，更可能出现这一问题。准确地说，这一问题相关因素是最高固有频率与最低固有频率的比值。

### 梁元件应用举例

下面举例说明步骤。假定一均质平板的动力特性受到固定在平板上的加强肋的影响，如下图所示。



步骤如下：

1. 将加强肋离散化为 4 个梁元件，它们与主平板分别在 5 个结点相连接，这 5 个结点与试验分析的测量点对应。

2. 给定或由实物计算出下列物理参数：

A 梁的横截面面积

$I_t$  截面的扭转惯性矩

$I_b$  参考平面内的弯曲惯性矩，即由结点  $n_1$ 、 $n_2$  和  $r$  所决定的平面（见图 20-1）

E 杨氏弹性模量

G 扭转弹性模量

L 梁长

1、2、3 局部的梁参考坐标系在总坐标系中三个坐标的方位指数。该信息由结点  $n_1$ 、 $n_2$  和  $r$  的位置导出，如图 20-1 示。

m 材料的质量密度

根据梁的几何尺寸，可计算出它的横截面面积和各类惯性矩。将这些参数列成表，以便查找。

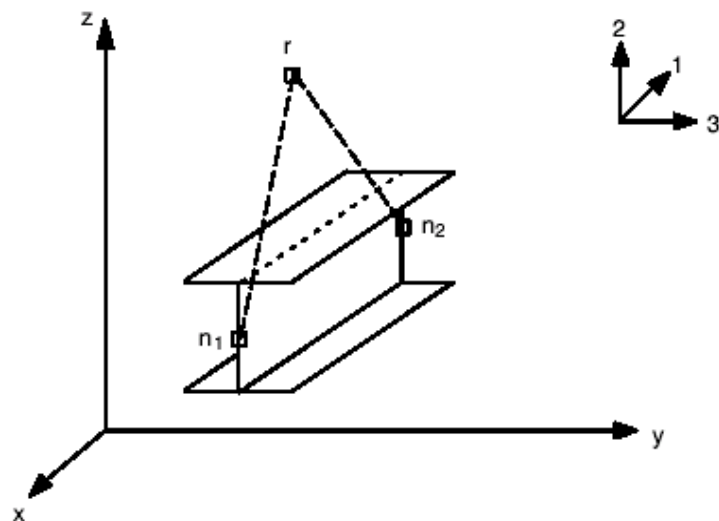


图 20-1 加强肋的局部坐标系与方位（坐标轴 1、2 和 3）

3. 构建每个梁元件的元件矩阵

由元件每一端结点的六个力分量和六个自由度（对结点 1 为  $U_1, V_1, W_1, \phi_1, \theta_1$ ，和

$\psi_1$ ，对结点 2 为  $u_2, v_2, w_2, \phi_2, \theta_2$  和  $\psi_2$ ）之间的关系，可构建出一元件的刚度矩阵（满阵）和质量矩阵（对角阵）。

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{Bmatrix} = T_1 \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{Bmatrix} = T_2 \quad T \Rightarrow \text{translation}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \theta_1 \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = R_1 \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \theta_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = R_2 \quad T \Rightarrow \text{rotation}$$

$T_1^t$	$R_1^t$	$T_2^t$	$R_2^t$

$T_1$
$R_1$
$T_2$
$R_2$

图 20-2 结点 1、2 的元件矩阵

4. 将元件矩阵集成如图 20-3 所示

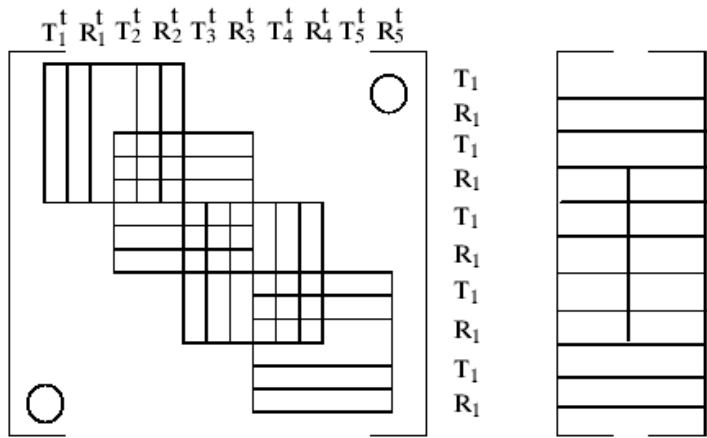


图 20-3 元件矩阵的集成

5. 实施旋转自由度的静凝聚（详见下文）
6. 将凝聚矩阵加进系统矩阵内，并继续进行其它（集总的）修改计算步骤。

备考：

- n 在凝聚并加进系统矩阵之前，梁模型的元件矩阵必需先集成，以便允许不同元件之间传递力矩。
- n 在对梁作弯曲分析时，记住一个基本假定很重要，这就是在梁的变形过程中，原本与中性轴正交的截面始终保持为平面。这一假定在梁长与梁高的比值大于 2 的情况下是真实符合的。此外，剪切效应不反映到刚度矩阵的元素上。
- n 要特别注意惯性矩的取值。在上面所述例子中，板的轴线和梁的轴线

之间的距离必须考虑进去。

### 静凝聚 (Static condensation)

在动力学分析中，静凝聚是基于这样的假定，就是某些自由度的质量可以被忽略，在感兴趣的频率范围内动力学模型的精度不至于造成显著的损失。明白地说，对于梁元件感兴趣的应用而言，可认为旋转自由度不具有质量。从而整个梁集成的质量矩阵和刚度矩阵可划分为下面的形式：

$$\begin{bmatrix} [K_{TT}] & [K_{TR}] \\ [K_{RT}] & [K_{RR}] \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} [M_{TT}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 20-82}$$

其中， T 指线位移自由度

R 指角位移自由度

描述该结构动力特性的模态参数可通过求解下列特征值问题而得出：

$$\begin{bmatrix} [K_{TT}] & [K_{TR}] \\ [K_{RT}] & [K_{RR}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_T \\ V_R \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} [M_{TT}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_T \\ V_R \end{bmatrix} \quad \text{Eqn 20-83}$$

由方程 (20-83) 的下半部分，可导出线位移自由度与角位移自由度之间的关系式：

$$[K_{RT}] \{V_T\} + [K_{RR}] \{V_R\} = \{0\} \quad \text{Eqn 20-84}$$

由此可得出以线位移自由度表示角位移自由度的关系式：

$$\{V_R\} = - [K_{RR}]^{-1} [K_{RT}] \{V_T\} \quad \text{Eqn 20-85}$$

将式 (20-85) 代入式 20-83 得出：

$$[K_T] \{V_T\} = \lambda^2 [M_{TT}] \{V_T\} \quad \text{Eqn 20-86}$$

其中

$$[K_T] = [K_{TT}] - [K_{TR}] [K_{RR}]^{-1} [K_{RT}] \quad \text{Eqn 20-87}$$

方程 20-86 中的矩阵  $[K_T]$  和  $[M_{TT}]$  用于梁结构的动力学模型。只有在质量对旋转自由度的影响可忽略的频率范围内，这一模型才有效。质量对动力特性的影响，只在共振附近和超过共振时才变得明显，在该区域，质量能储蓄需要加以考虑的运动能量。

---

注意！式 20-87 中的  $[K_T]$ ，仅当  $[K_{RR}]$  为非奇异阵时才可求得。如果可发生刚体运动的话，刚度矩阵就是奇异的。梁沿其纵轴运动的刚体模态，不会因限制其三个线位移自由度而自然消失，从而通常会导致一阶奇异。对应这一情形，梁不可能储蓄扭转变形能，从而使集成的刚度矩阵中所有非对角线元素均可忽略不计，而对角线元素的值也相对较小。按这样考虑，矩阵将变为可求逆的。而预测出的动力特性也将反映出梁无能力储蓄扭转变形能。然而，当梁按二维或三维作分析时，这样的运算则是无必要的。这样的情况下，刚体绕某一轴的转动已不可能。

## 20.4 强迫响应

试验模态分析得到结构的动力学模型。该模型由有阻尼固有频率，指数衰减率和带标尺的模态振型（或留数）描述。这些模态参数提供了对结构动力特性的重要认识。某些疑问可通过模态振型的动画显示加以判断，并通过比较其幅值，评价模态振型的相对重要性。

然而，在多数情况下，设计者对于动力特性本身并无兴趣，他们希望知道结构在正常工作状态下具有怎样的特性。主要是明确下述几点：

- n 在动力载荷作用下，会出现什么问题
- n 哪个（或哪些）固有频率对响应产生大的影响
- n 结构上哪些点会出现大的应变（或应力）
- n 在某些特定频率下，结构会产生怎样的形变或损伤

振动模态的固有频率看似模态模型最重要的参数，然而当某模态没有得到充分激励的状态下，响应信号中该频率分量就不会明显地占有优势。

强迫响应求解功能，帮助你确定模态模型对已知力谱的响应。

### 20.4.1 强迫响应的数学背景

从输入和动力响应关系计算出的结构模态模型，是强迫响应分析的出发点。

线性时不变机械系统的运动方程，在频域上表为下面形式：

$$[X(\omega)] = [H(\omega)][F(\omega)] \quad \text{Eqn 20-88}$$



其中,

$\{X(\omega)\}$  响应谱向量 ( $N_0 \times 1$ )

$[H(\omega)]$  频响函数矩阵 ( $N_0 \times N_0$ )

$\{F(\omega)\}$  外加力的力谱向量 ( $N_0 \times 1$ )

这些量都是频率变量  $\omega$  的复值函数。当这些函数关系已知时, 它们对于每一  $\omega$  值都是有效的。

对于某一给定的自由度 (DOF), 譬如说 DOF  $i$ , 上述方程变为:

$$X_i(\omega) = \sum_{j=1}^{N_0} H_{ij}(\omega) F_j(\omega) \quad \text{Eqn 20-89}$$

这意味着, DOF  $i$  的响应可表为外加力的线性组合, 该组合的每一权值相应地等于输入 DOF  $j$  和输出 DOF  $i$  之间的 FRF 值。这些与频率相关的计权因子, 表述了机械结构两个自由度  $i$  和  $j$  之间的动态柔度。

当结构的模态模型已从模态试验或有限元分析中获取时, 频响函数可构建如下式:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{r_{ijk}}{j\omega - \lambda_k} \right) \quad \text{Eqn 20-90}$$

这样, 当结构同时受到多个载荷同时作用时, 就可以利用式 20-89 预测自由度  $i$  的动力响应。在模态模型中也可以采用带标尺的模态振型系数 (即留数), 由此用下式求  $X_i(\omega)$ :

$$X_i(\omega) = \sum_{j=1}^{N_0} \left[ \sum_{k=1}^{2N} \frac{v_{ik} v_{jk}}{j\omega - \lambda_k} \right] F_j(\omega) \quad \text{Eqn 20-91}$$

即便不是所有留数都已获取, 还可以利用 Maxwell—Betti 互易原理补算其它需要的留数。只要某驱动点  $j$  的留数  $r_{jck}$  是已知的, 则根据式 20-4 即可求得留数  $r_{ick}$ 。实际上, 如果能让模态振型按标尺来校正的话, 驱动点留数也是必不可少的。

式 20-91 表示任意自由度对所有外加力的响应, 包含了这些力对所有模态的贡献。其中, 每一模态的贡献量由下面两个式子求出:

$$\begin{aligned} \text{对 } k=1, \cdots N; \quad f_k(\omega) &= \frac{1}{j\omega - \lambda_k} \sum_{j=1}^{N_0} v_{jk} F_j(\omega) = p_k(\omega) \sum_{j=1}^{N_0} v_{jk} F_j(\omega) \\ \text{对 } k=N+1, \cdots 2N \quad f_k(\omega) &= \frac{1}{j\omega - \lambda_k^*} \sum_{j=1}^{N_0} v_{jk}^* F_j(\omega) = p_k(\omega) \sum_{j=1}^{N_0} v_{jk}^* F_j(\omega) \end{aligned} \quad \text{Eqn 20-92}$$

“\*”号表示复共轭

这样，每一自由度的响应，可视为每一模态贡献量的线性组合，即

$$X_i(\omega) = \sum_{k=1}^N v_{ik} f_k(\omega) + \sum_{k=N}^{2N} v_{ik}^* f_k(\omega) \quad \text{Eqn 20-93}$$

## 第二十一章 结构的几何骨架

本章讨论有关建立结构几何骨架的基本概念。包括：

- ☐ 试验结构的几何骨架
- ☐ 结点的给定

### 21.1 试验结构的几何骨架

试验结构的几何表示，对于模态振型的动画显示，以及实施设计、修改来说，都是十分必要的。本章讨论从几何上定义试验结构模型的相关基础。

几何模型中最重要的是“结点”（node）。规定的结点，就是要在结构上进行测量的点，也是要计算模态振型信息的点。通常还要在特定的结点之间加上连接线或筋条（edge），构成结构的骨架模型。还可以通过着色来表示某些表面，帮助观察所代表的结构。

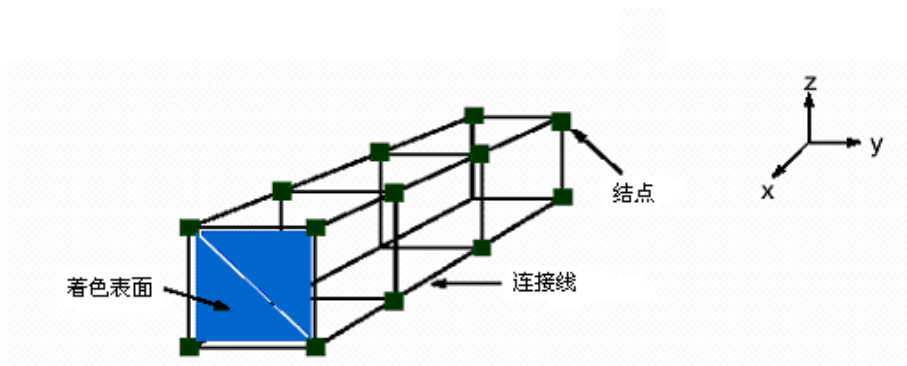


图 21-1 结构的骨架模型

请注意，在声学测量中定义的结点和网格，已在本资料的“声学”部分中叙述过。

## 21.2 结点

结点由它的位置和方位给定。

### 位置

在三维空间，结点的位置由一组三个实数即所谓坐标值确定。坐标值通常都是指相对于一参考坐标系的值。

参考坐标系应当和结构的骨架模型在显示窗内一起表示出来。总坐标系的原点即是包含试验结构的三维空间的原点，当结构存在总体上的对称点时，应考虑将总坐标系的原点选在该对称点。

参考坐标系可以是直角坐标系，也可以是柱坐标系或球坐标系。

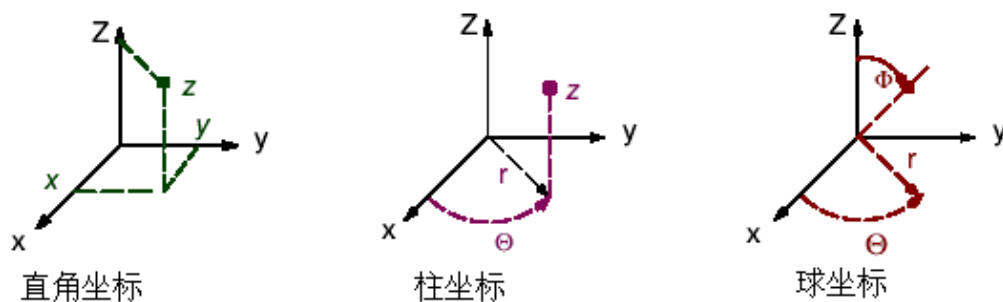


图 21-2 坐标系

作为一个例子，某结点在三种坐标系中的坐标值如下表示：

直角坐标	X	Y	Z	1	1	1
柱坐标	r	$\Theta$	Z	$\sqrt{2}$	$45^\circ$	1
球坐标	r	$\Theta$	$\Phi$	$\sqrt{3}$	$45^\circ$	$55^\circ$

方位

结点的方位用直角坐标表示。在大多数应用中，结点的方位规定与测量方向一致。结点坐标系的原点与结点位置相重合。如果结点坐标系的坐标轴与测量方向不一致，包括正负指向不一致，那么它们之间的区别必须用欧拉角来给定。

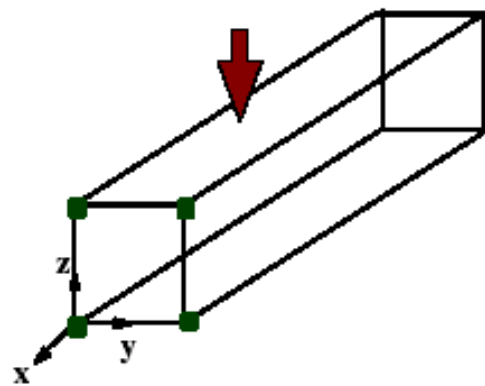


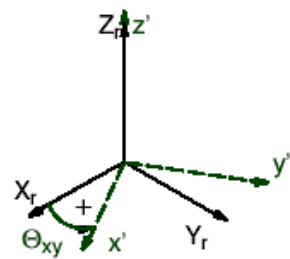
图 21-3 结点坐标系

欧拉角

三个欧拉角，被用来确定一坐标系相对于有相同原点的参考坐标系的方位。

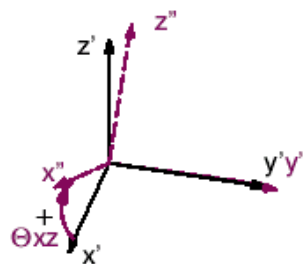
$q_{xy}$

第一欧拉角  $\Theta_{xy}$  指坐标系绕参考坐标系  $Z_r$  轴的转角。(其正向转角从  $X_r$  轴转向  $Y_r$  轴)。这一旋转产生的第一个中间坐标系在坐标轴标号上加 “’” 表示。



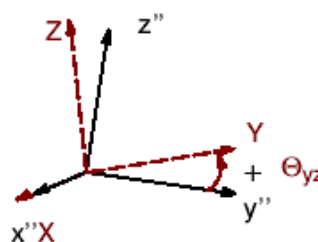
## $\Theta_{xz}$

第二欧拉角  $\Theta_{xz}$  指绕第一中间坐标系中  $y'$  轴的旋转。（其正向转角从  $x'$  轴转向  $z'$  轴）。这一旋转产生的第二中间坐标系在坐标轴标号上加“”表示。



## $\Theta_{yz}$

最后一个即第三欧拉角  $\Theta_{yz}$  指绕第二中间坐标系中  $x''$  轴的旋转。（其正向转角从  $y''$  轴转向  $z''$  轴）。这最终方位，就是希望的新坐标系的方位



## 自由度（DOF）

一结点的自由度表示结点自由地移动的方向。因此，每一结点最多可有七个自由度，即三个线位移自由度，三个角位移自由度和一个标尺（scalar）自由度  $S_c$ 。

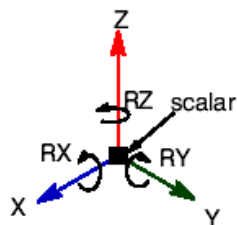


图 21-4 自由度