Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Krystian Madej, 09.04.2024

1. Treść zadania

Dla funkcji $e^{-k \cdot sin(mx)}$, $k = m = 3$, na przedziale $[a = -2\pi; b = \pi]$ wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi

Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

2. Środowisko obliczeń

Obliczenia zostały wykonane przy pomocy języka **C++20** na systemie **Windows 11**, kompilacja 22631.3447, procesorze **64-bitowym** Intel Core i5-11400H 2.70GHz, kod kompilowany kompilatorem **MSVC** (wersja 19.39).

3. Użyte biblioteki i programy pomocnicze

Do utworzenia map cieplnych wykorzystano program **GnuPlot**.

Do instalacji bibliotek **C++** użyto programu **conan**, wersja 2.1.

Najważniejsze użyte biblioteki:

- <format> - łatwe formatowanie
- <numbers> - stałe matematyczne
- CvPlot – tworzenie wykresów
- <future> - obiekty std::future oraz std::async
- <ranges> - operacje na obiektach iterowalnych

4. Sposób obliczeń

4.1.1 Wielomian uogólniony

Mając dane:

- $n+1$ węzłów: $\left(x_i, y_i = F(x_i)\right), \quad i = 0,1,\dots,n$
- układ $m+1$ funkcji bazowych: $\phi_j(x), \quad j = 0,1,\dots m$

Szukamy wielomianu uogólnionego:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j\,\phi_j(x)$$

czyli szukamy $\{a_j\}_{j=0}^{m}$, dla których:

$$\min\left|\left|F(x) - f(x)\right|\right| = \min \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\,\phi_j(x_i)\right]^2$$

gdzie:

$\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\,\phi_j(x_i)\right]^2$ - odchylenie

$w(x_i)$ - waga danego węzła, $w(x) \geq 0$
zwykle $w(x_i) \approx \frac{1}{[\text{błąd}\,F(x_i)]^2}$ lub $w(x) = 1$

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\,\phi_j(x_i)\right]^2 = H(a_0, a_1, \dots, a_m)$$

4.1.2 Współczynniki $\{a_j\}$

Współczynniki $\{a_j\}$ znajdujemy z warunku:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0,1,\dots,m$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\,\phi_j(x_i)\right]\phi_k(x_i) = 0; \quad k = 0,1,\dots,m$$

co daje układ $m+1$ równań liniowych z $m+1$ niewiadomymi,
układ ten jest zwany układem normalnym.

4.1.3 Aproksymacja wielomianowa

Dane:
funkcje bazowe $\longrightarrow$ ciąg jednomianów $\phi_j(x) = x^j, \quad j = 0,1,\dots,m$

funkcja aproksymująca: $f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j\, \phi_j(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j\, x^j$

$F(x)$ – zadana na zbiorze dyskretnym $\{x_i\}, \quad i = 0,1,\dots,n$

Wtedy otrzymujemy:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\, \phi_j(x_i) \right] x_i^k = 0; \quad k = 0,1,\dots,m$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(w(x_i) x_i^k \sum_{j=0}^{m} a_j\, x_i^j \right) = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) x_i^k\,; \quad k = 0,1,\dots,m$$

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^{j+k} \right) a_j = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) x_i^k$$

gdzie:

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^{j+k} = g_{j,k}$$
$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) x_i^k = b_k$$

W postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \Sigma\, w_i & \Sigma\, w_i x_i & \Sigma\, w_i x_i^2 & \dots & \Sigma\, w_i x_i^m \\ \Sigma\, w_i x_i & \Sigma\, w_i x_i^2 & \Sigma\, w_i x_i^3 & \dots & \Sigma\, w_i x_i^{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma\, w_i x_i^m & \Sigma\, w_i x_i^{m+1} & \Sigma\, w_i x_i^{m+2} & \dots & \Sigma\, w_i x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma\, w_i F_i \\ \Sigma\, w_i F_i x_i \\ \dots \\ \Sigma\, w_i F_i x_i^M \end{bmatrix}$$

$$\underline{G \cdot A = B}$$

Jeżeli $x_0, x_1, \dots, x_n$ są różne i $m \le n$ to $\det G \neq 0 \longrightarrow$ układ ma jedno rozwiązanie.

4.2 Ocena dokładności

Dokładność interpolacji można ocenić porównując następujące wartości:

- Błąd bezwględny
  $|F(x) - f(x)|$

- Błąd maksymalny
  $max_i\{|F(x_i) - f(x_i)|\}$
- Suma kwadratów
  $$\sum_{i=0}^{n}\left(F(x_i) - f(x_i)\right)^2$$

5.1. Implementacja obliczeń

Wszystkie obliczenia były wykonywane przy użyciu 64-bitowego typu zmiennoprzecinkowego **double** (w kodzie zaliasowany jako **flt**)

W celu wygenerowania węzłów użyto funkcji generującej, zaimplementowanej w poprzednim ćwiczeniu:

> nodes::uniform (węzły równoodległe), korzystającą ze wzoru
> $$x_i = a + \frac{b-a}{n-1}i$$

Następnie zaimplementowano funkcje approx::_least_square(), przyjmującą tablicę wartości $F(x_i)$, tablicę z węzłami x_i, wartość m oraz tablicę wag $w(x_i)$, a zwracającą obiekt wywoływalny, odpowiadający funkcji aproksymującej.

Istnieje też funkcja approx::least_square(), przyjmująca funkcję $F(x)$, funkcję generującą węzły, liczbę węzłów, wartość m, tablicę wag $w(x_i)$, oraz przedział aproksymacji. Generuje dane i przekazuje je do approx::_least_square(), zwracając jej rezultat.

Układy równań rozwiązuje funkcja matrix::solve(), przyjmująca macierz układu równań i prawy wektor, zwracająca krotkę zawierającą wektor wyliczonych wartości, przekształconą macierz i przekształcony prawy wektor. Korzysta ona z funkcji pomocniczych matrix::gauss_elim() i matrix::back_subst().
matrix::gauss_elim() przyjmuje to samo co matrix::solve(), a zwraca krotkę z przekształconą macierzą i wektorem prawym. Wykonuje ona eliminację gaussa, zoptymalizowaną partial pivotingiem w celu zwiększenia stabilności numerycznej.
Funkcja matrix::back_subst() przyjmuje i zwraca to samo co matrix::solve(). Wykonuje operację podstawienia wstecznego, sprowadzając macierz wejściową do postaci jednostkowej. Wszystkie operacje wykonywane na macierzy przez funkcje pomocnicze wykonują się też na prawym wektorze.

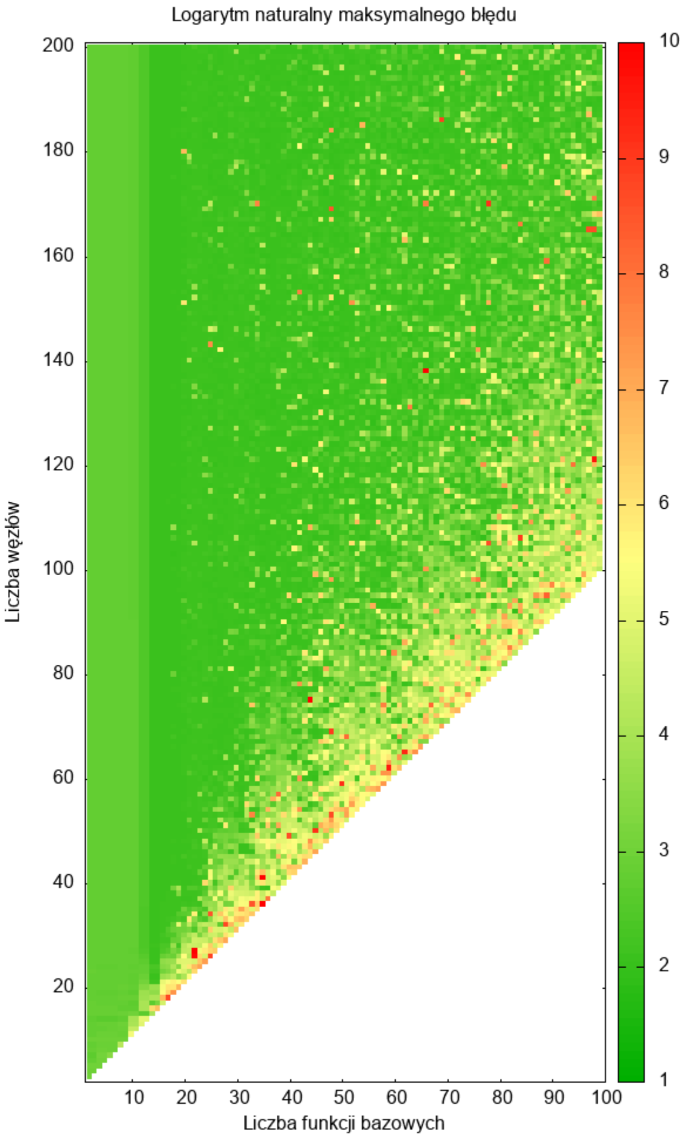
Użyto też funkcje obliczające błędy interpolacji, zaimplementowane w poprzednim ćwiczeniu:

- error::abs – przyjmująca funkcję interpolowaną, wielomian interpolujący i tablicę węzłów, zwracająca tablicę błędów bezwzględnych
- error::max – w 2 wersjach: pierwsza, przyjmująca funkcję interpolowaną, wielomian interpolujący i tablicę węzłów i obliczająca wcześniej błąd bezwzględny, i druga, przyjmująca tablicę błędów bezwzględnych, obie zwracają wartość maksymalną z tablicy błędów bezwzględnych
- error::sum_squared – w 2 wersjach: pierwsza, przyjmująca funkcję interpolowaną, wielomian interpolujący i tablicę węzłów i obliczająca wcześniej błąd bezwzględny, i druga, przyjmująca tablicę błędów bezwzględnych, obie zwracają sumę kwadratów błędów bezwzględnych

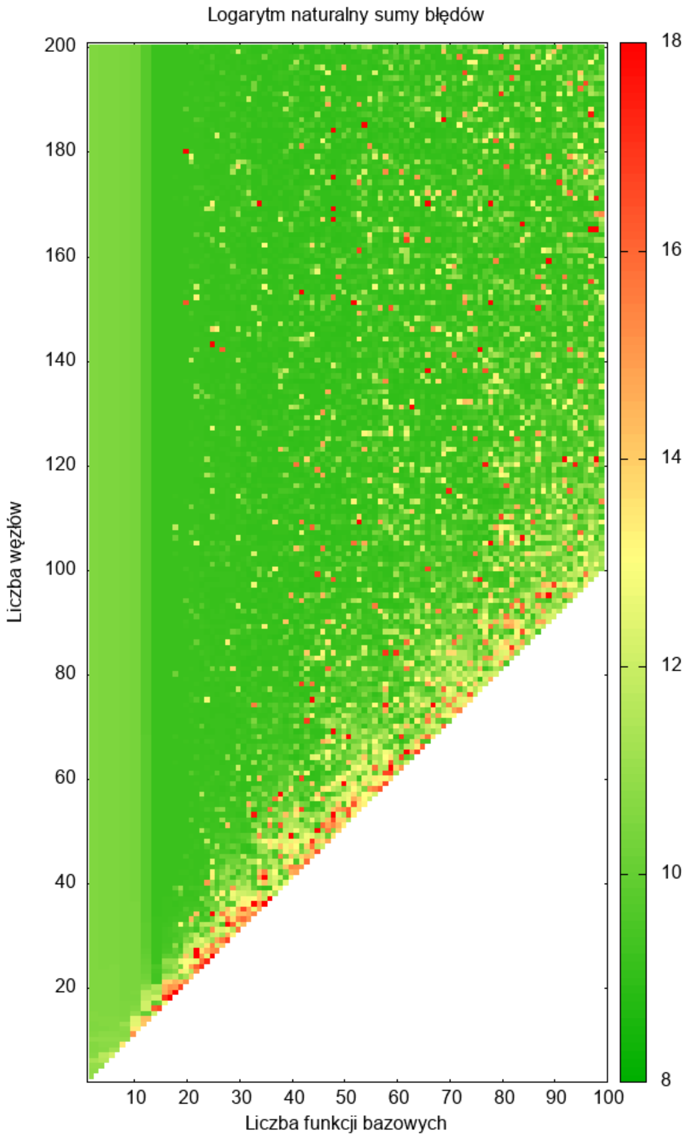
W funkcji main prowadzone są obliczenia dla kolejnych ilości węzłów.
Wartości funkcji interpolowanej, jak i interpolacji są zapisywane w plikach approximation_results/result_<m>_<ilość węzłów>.txt
Wartości błędów bezwzględnych w plikach approximation_results/error_<m>_<ilość węzłów>.txt
Wartości maksymalne błędów bezwzględnych w pliku approximation_results/__ls_max_abs.txt
Sumy kwadratów błędów bezwzględnych w pliku approximation_results/__ls_sum_squared.txt
Logarytm naturalny wartości maksymalnych błędów bezwzględnych w pliku approximation_results/__ls_max_abs.txt
Logarytm sum kwadratów błędów bezwzględnych w pliku approximation_results/__ls_sum_squared.txt
W folderze approximation_images/ są zapisywane wykresy funkcji interpolowanej, interpolacji i wartości błędów.
Ze względu na dużą liczbę kombinacji n i m, domyślnie wyłączono zapisywanie wyników i wykresów dla indywidualnych aproksymacji.
W funkcji main() istnieje zbiór save_whitelist, zawierający pary $\{m,\ n\}$. Program zapisze indywidualne wyniki tylko tych aproksymacji, które znajdują się w tym zbiorze.

6. Wyniki obliczeń

Wykonano obliczenia błędów dla liczby funkcji bazowych $m = 2, \dots, n-1$ (ograniczone do 99), (wielomianów stopnia $m+1$) i dla liczby węzłów $n = 3, \dots, 200$. Poniżej znajdują się mapy cieplne, przedstawiające błędy maksymalne oraz sumy błędów.



Wykres 1. Logarytm błędów maksymalnych aproksymacji



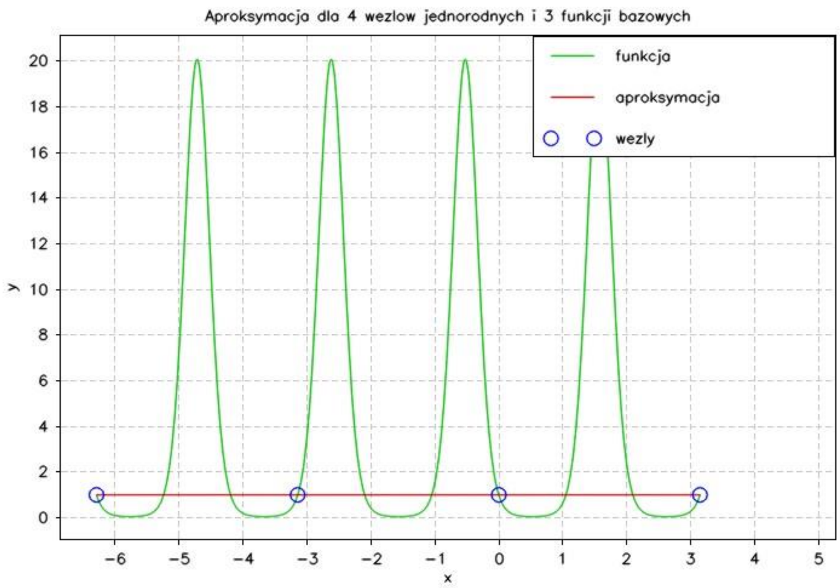
Wykres 2. Logarytm sum błędów aproksymacji

Jak widać na mapach cieplnych, największe błędy powstają gdy n i m są sobie bliskie. Wtedy też występuje największe zagęszczenie błędów o większej wartościach. Do około 15 funkcji bazowych widać obszaj w którym niezależnie od liczby węzłów, wartości błędów mają podobne, niższe wartości. Jest to prawdą także gdy n i m są sobie bliskie. Następnie dla większej ilości funkcji bazowych widać spadek w wartościach błędów. Jednocześnie zaczynają się pojawiać, na pierwszy rzut oka losowe miejsca, gdzie wartości błędów nagle wzrastają, by potem znowu opaść. W miarę zbliżania się do siebie n i m, częstotliwośc takich przypadków rośnie.

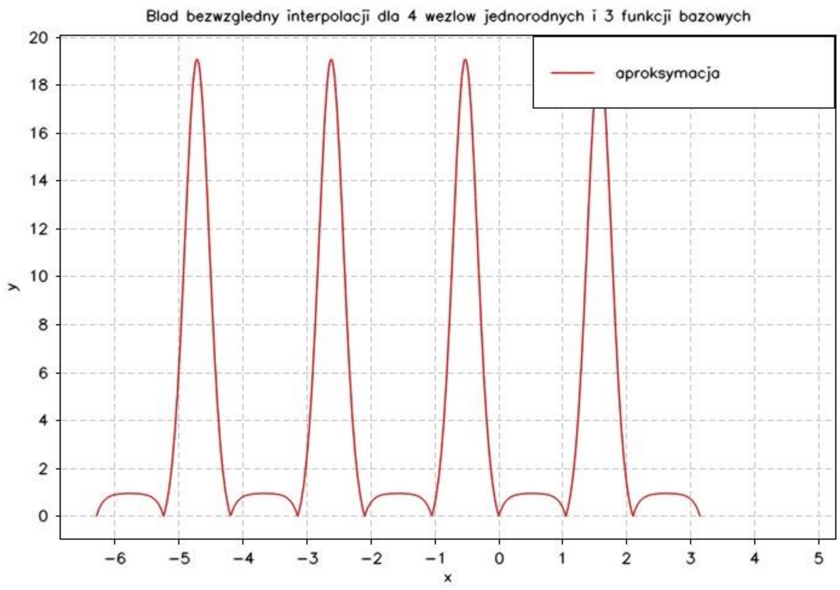
6.1 Porównanie wielomianów o tej samej ilości funkcji bazowych m.

6.1.1 $m = 3$

6.1.1.1 $n = 4$



Wykres 3.



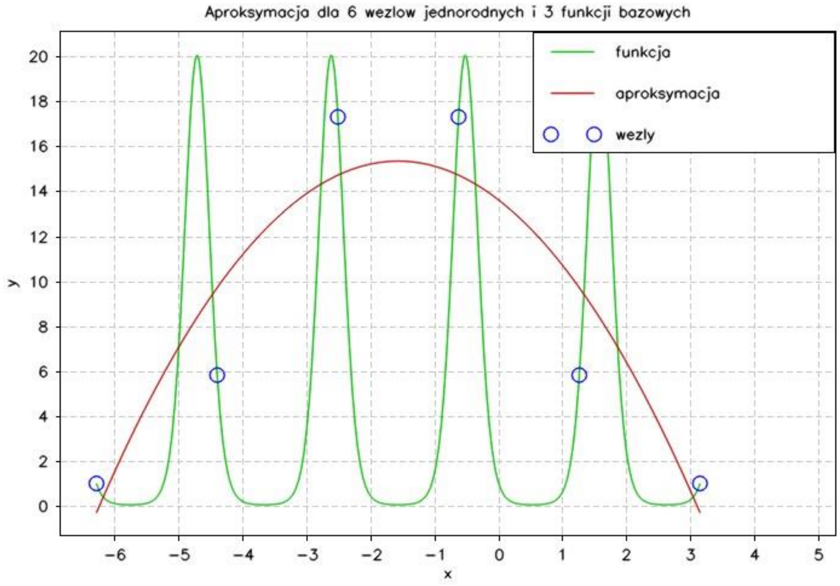
Wykres 4.

Błąd maksymalny	19.08549057
Suma kwadratów błędów	49053.6982

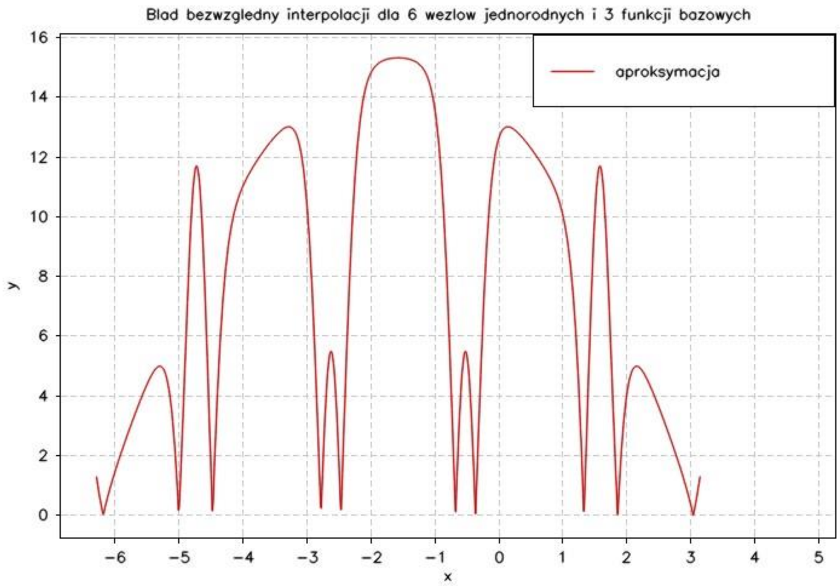
Tabela 1. Wartości błędów dla m = 3 i n = 4.

Dla $n = 4$ aproksymacja przyjęła postać prostej linii. Osiąga w węzłach równe wartości.

6.1.1.2 $n = 6$



Wykres 5.



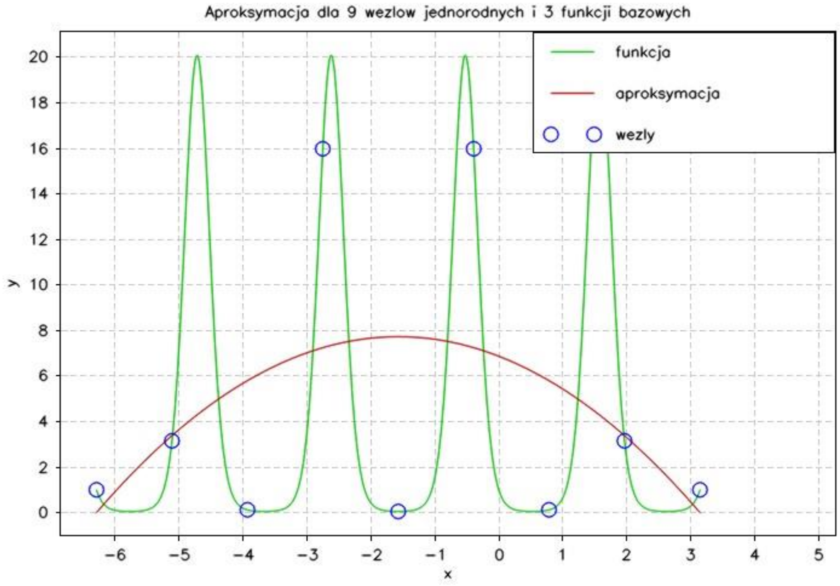
Wykres 6.

Błąd maksymalny	15.32119168
Suma kwadratów błędów	80155.86914

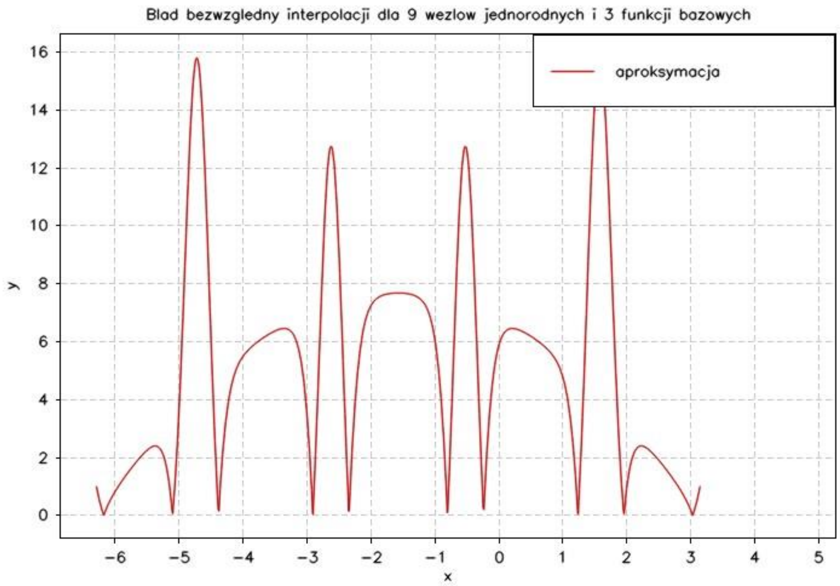
Tabela 2. Wartości błędów dla m = 3 i n = 6.

Dla $n = 6$ aproksymacja wybrzuszyła się do góry. Błąd maksymalny zmniejszył się, jednak suma zwiększyła się prawie dwukrotnie.

6.1.1.3 $n = 9$



Wykres 7.



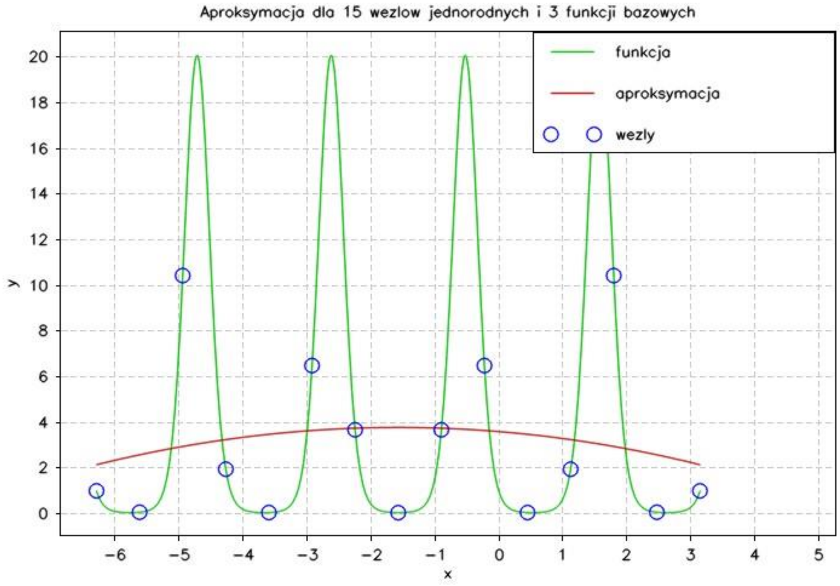
Wykres 8.

Błąd maksymalny	15.79651987
Suma kwadratów błędów	38881.13246

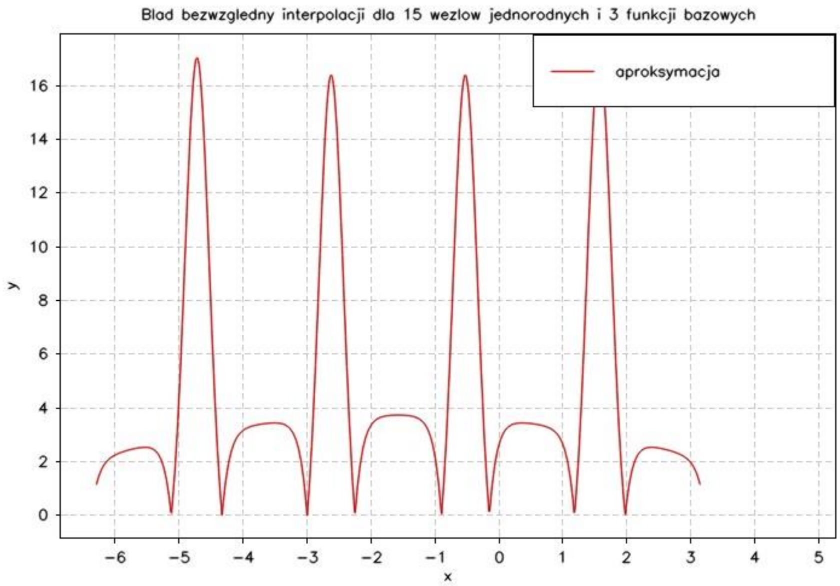
Tabela 3. Wartości błędów dla m = 3 i n = 9.

Dla $n = 9$ aproksymacja nieco się wypłaszczyła. Błąd maksymalny lekko zwiększył się, jednak suma zminiejszyła się ponad dwukrotnie.

6.1.1.4 $n = 15$



Wykres 9.



Wykres 10.

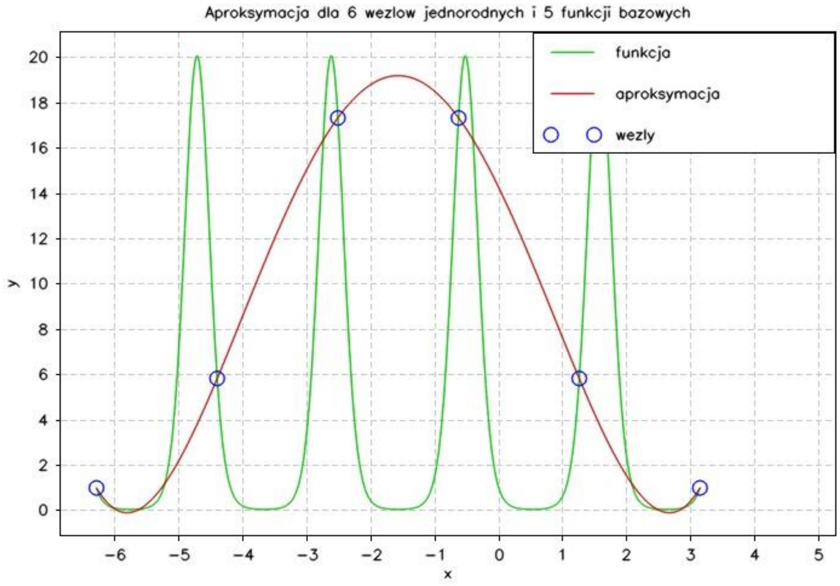
Błąd maksymalny	17.02934911
Suma kwadratów błędów	38731.88079

Tabela 4. Wartości błędów dla m = 3 i n = 15.

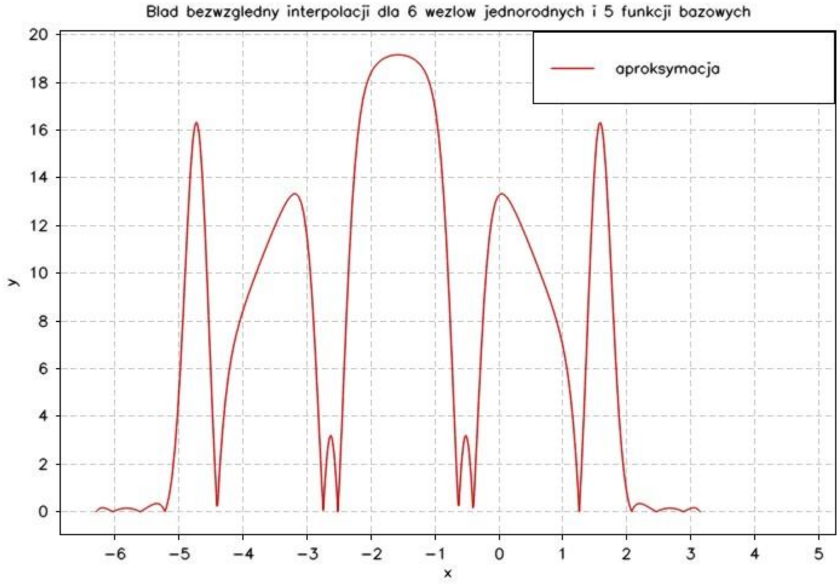
Dla $n = 15$ aproksymacja wypłaszczyła się jeszcze bardziej. Błąd maksymalny zwiększył się, a suma się lekko zminiejszyła ponad dwukrotnie.

6.1.2 $m = 5$

6.1.2.1 $n = 6$



Wykres 11.



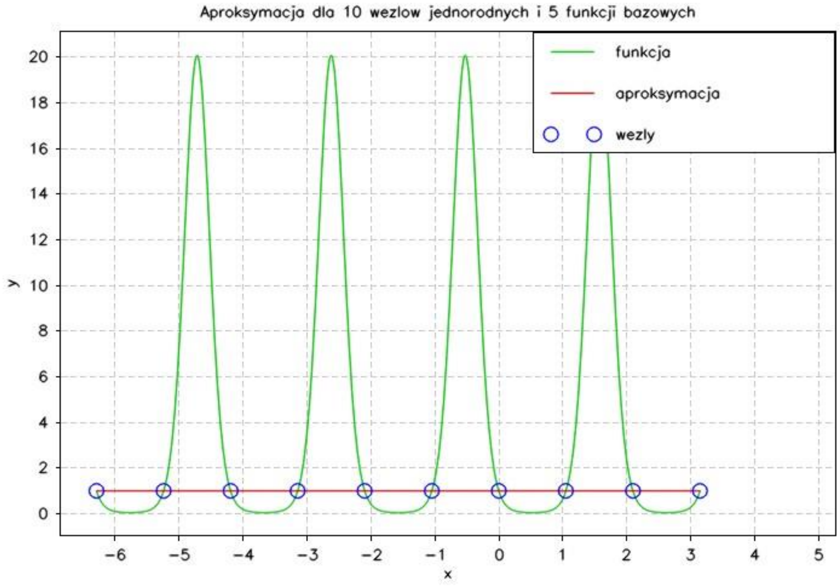
Wykres 12.

Błąd maksymalny	19.15801012
Suma kwadratów błędów	98225.00605

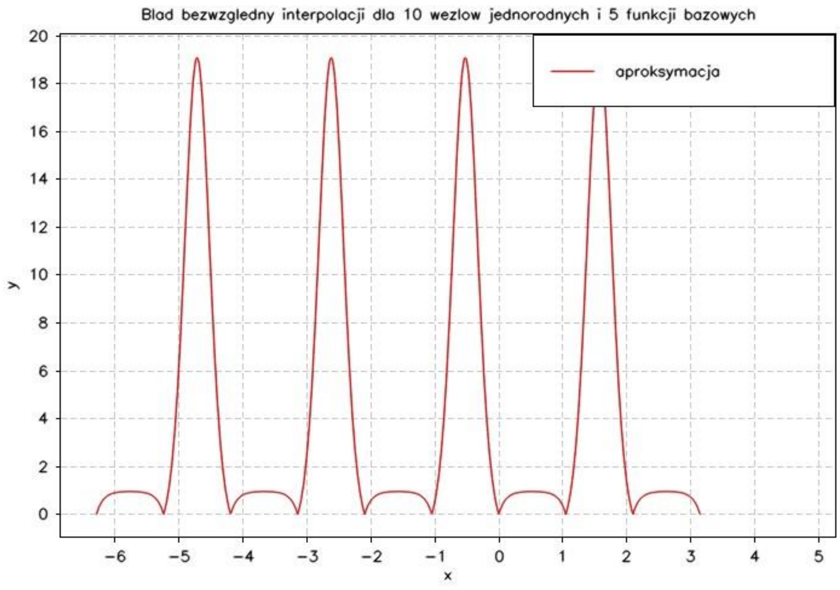
Tabela 5. Wartości błędów dla m = 5 i n = 6.

Funkcja przyjęła kształt podobny do rozkładu standardowego.
Przybliżenie jest dość dobre na krańcach przedziału aproksymacji.

6.1.2.2 $n = 10$



Wykres 13.



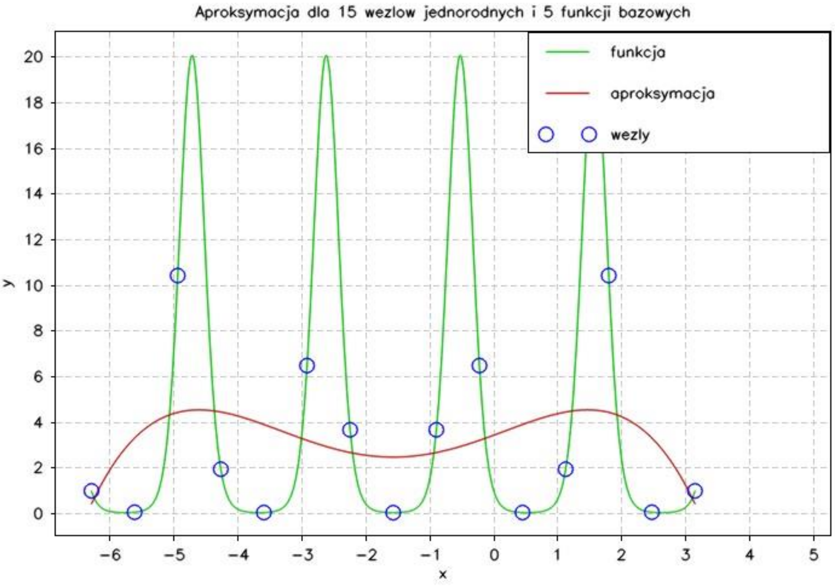
Wykres 14.

Błąd maksymalny	19.08549057
Suma kwadratów błędów	49053.6982

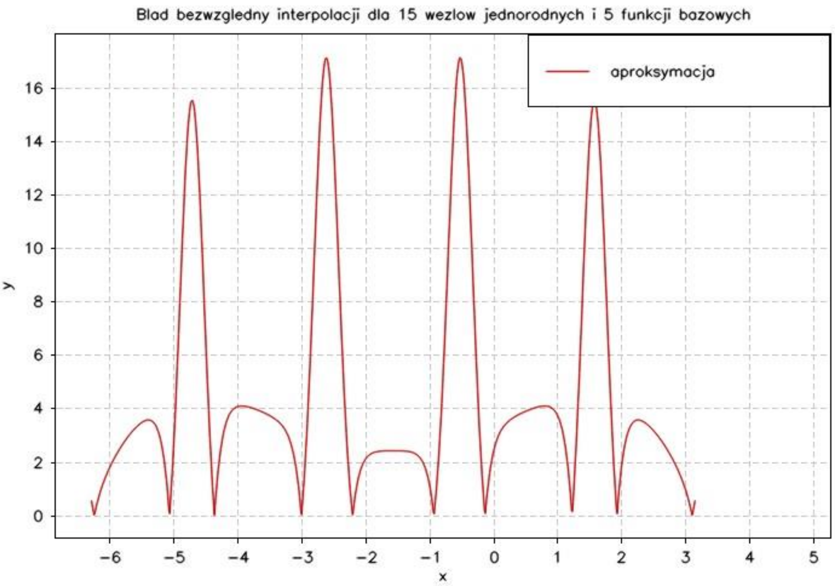
Tabela 6. Wartości błędów dla m = 5 i n = 10.

Dla $n = 10$ funkcja przyjęła kształt prostej linii. Wartości błędów są identyczne do tych w tabeli 1.

6.1.2.3 $n = 15$



Wykres 15.



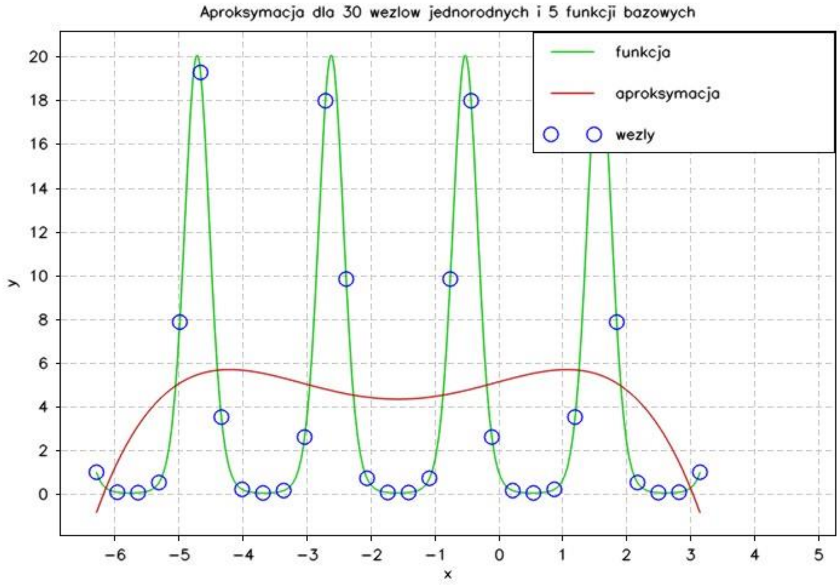
Wykres 16.

Błąd maksymalny	17.13859294
Suma kwadratów błędów	37523.91682

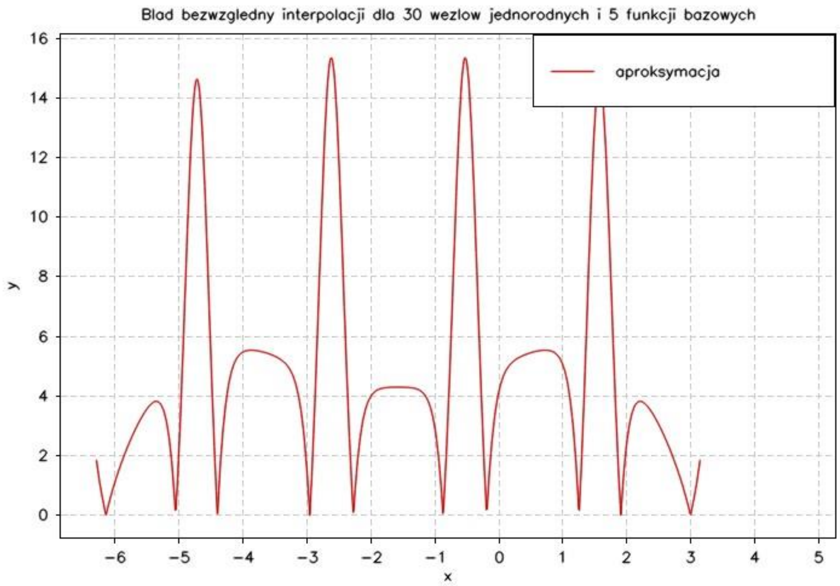
Tabela 7. Wartości błędów dla m = 5 i n = 15.

Dla $n = 15$ funkcja nieco się wygięła. Wartości błędów zmniejszyły się.

6.1.2.4 $n = 30$



Wykres 17.



Wykres 18.

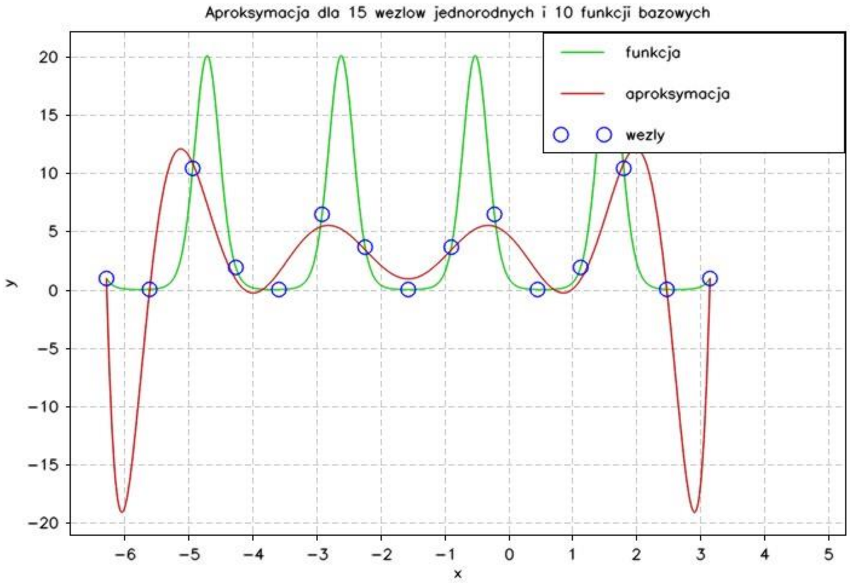
Błąd maksymalny	15.34603878
Suma kwadratów błędów	35531.57861

Tabela 8. Wartości błędów dla m = 5 i n = 30.

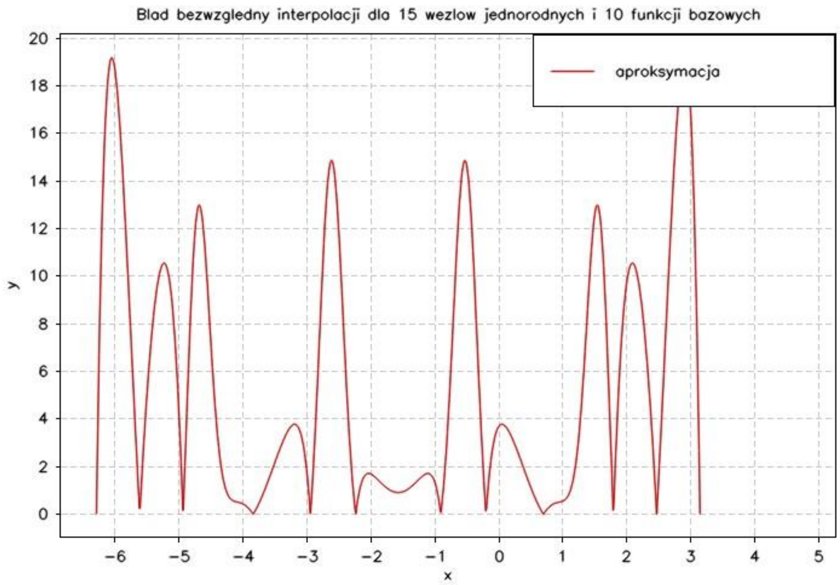
Dla $n = 30$ funkcja nieco się podniosła. Wartości błędów ponownie się zmniejszyły.

6.1.3 $m = 10$

6.1.3.1 $n = 15$



Wykres 19.



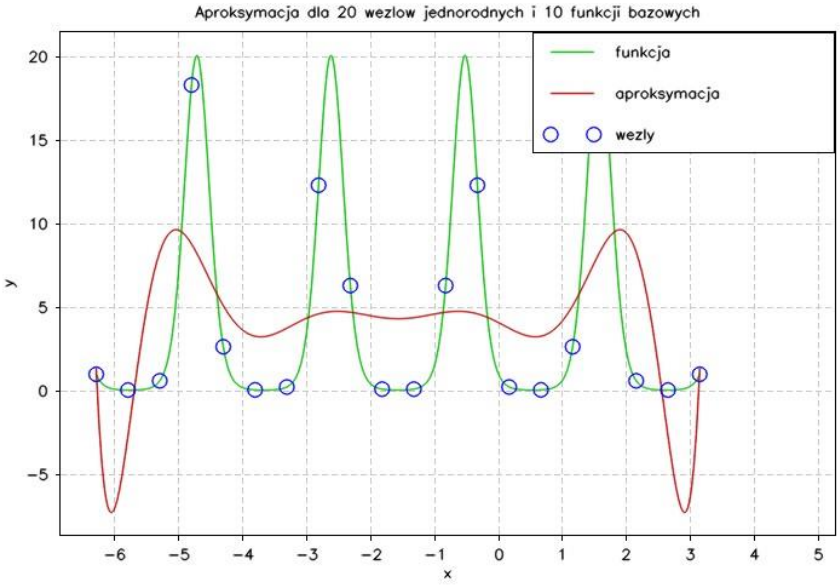
Wykres 20.

Błąd maksymalny	19.17630977
Suma kwadratów błędów	55276.07428

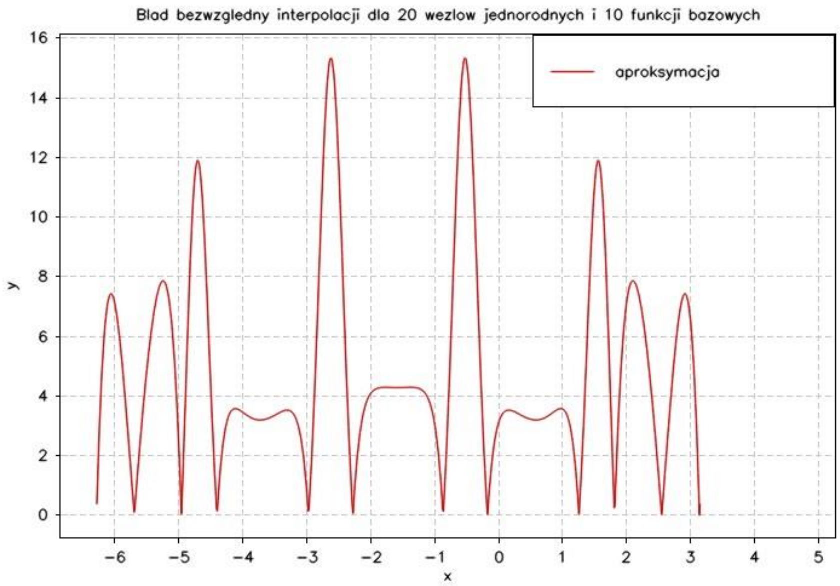
Tabela 9. Wartości błędów dla m = 10 i n = 15.

Dla $m = 10$ i $n = 15$ funkcja przyjęła kształt bardziej zbliżony do pierwotnego niż poprzednie aproksymacje. Na krańcach przedziału widoczny niewielki efekt Runge'go.

6.1.3.2 $n = 20$



Wykres 21.



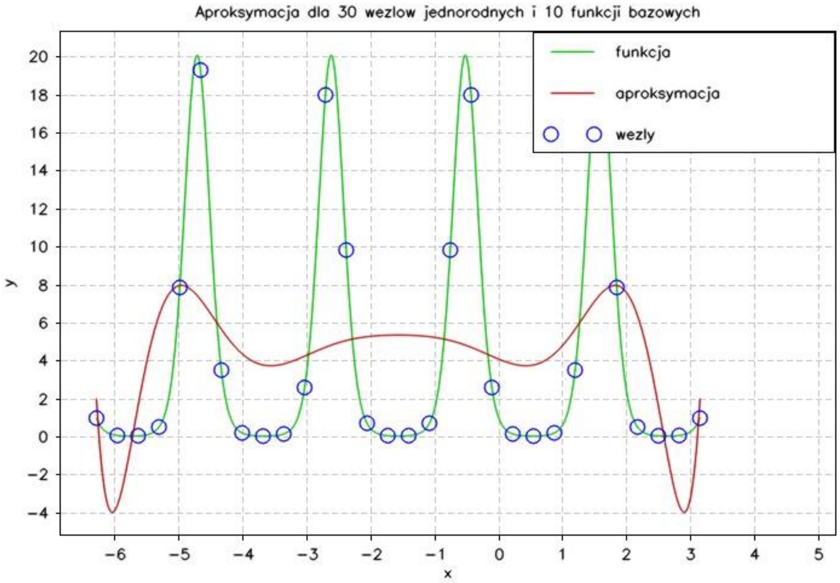
Wykres 22.

Błąd maksymalny	15.33371645
Suma kwadratów błędów	33353.38043

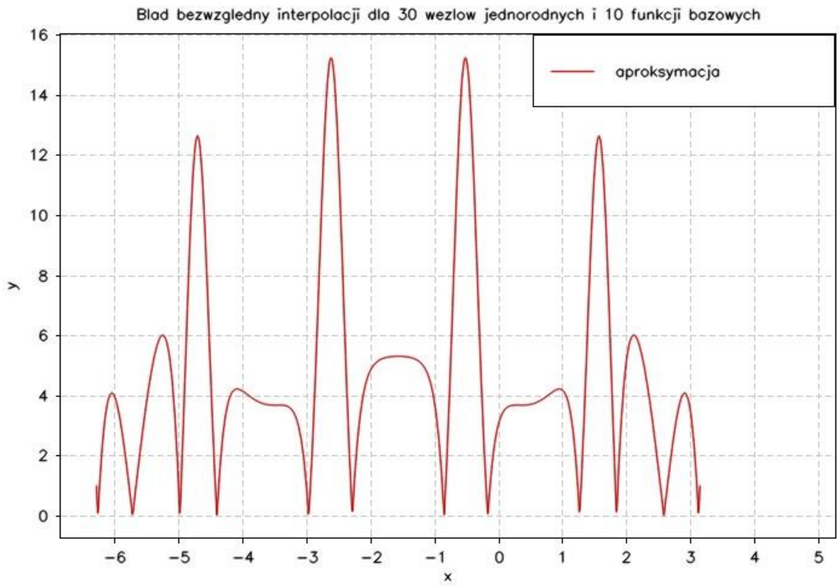
Tabela 10. Wartości błędów dla m = 10 i n = 20.

Dla $n = 20$ efekt Runge'go zmniejszył się. Podobnie zmniejszył się błąd maksymalny i suma kwadratów błędów. Widać lekkie wypłaszczenie aproksymacji w okolicach środka przedziału.

6.1.3.3 $n = 30$



Wykres 23.



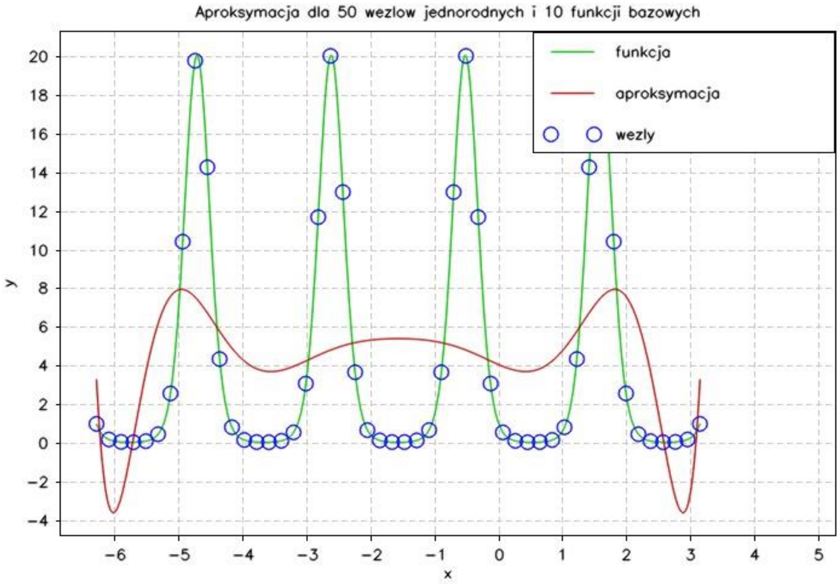
Wykres 24.

Błąd maksymalny	15.24994725
Suma kwadratów błędów	31753.0865

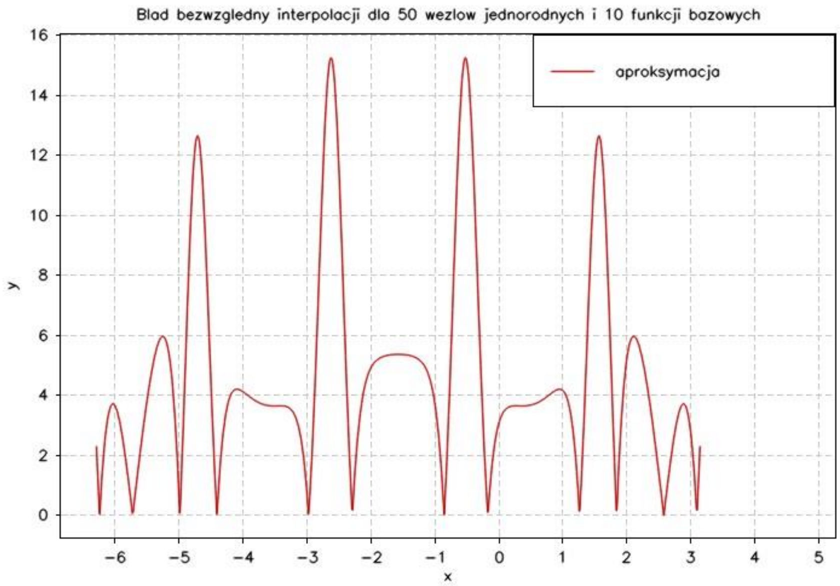
Tabela 11. Wartości błędów dla m = 10 i n = 30.

Dla $n = 30$ efekt Runge'go dalej zmniejsza się. Podobnie widać lekkie zmniejszenie błędu maksymalny i sumy kwadratów błędów.

6.1.3.4 $n = 50$



Wykres 25.



Wykres 26.

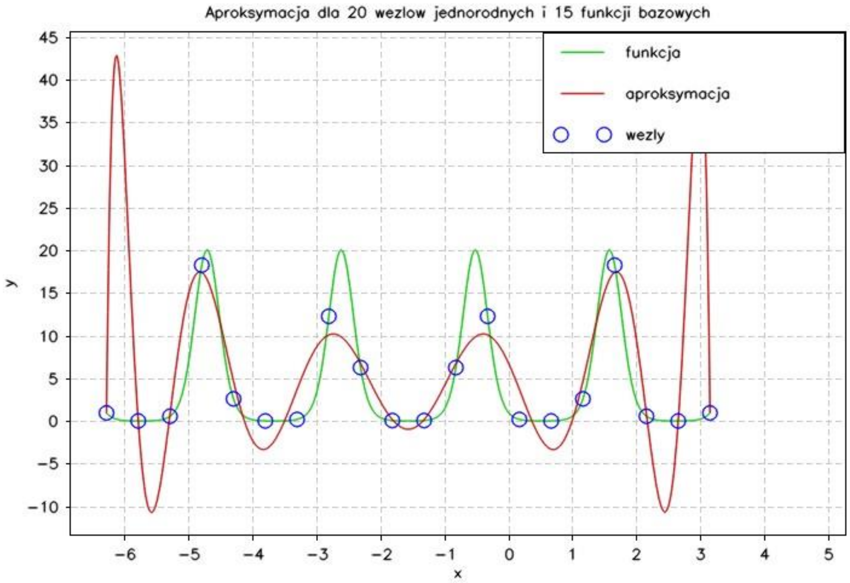
Błąd maksymalny	15.97739197
Suma kwadratów błędów	32488.11965

Tabela 12. Wartości błędów dla m = 10 i n = 50.

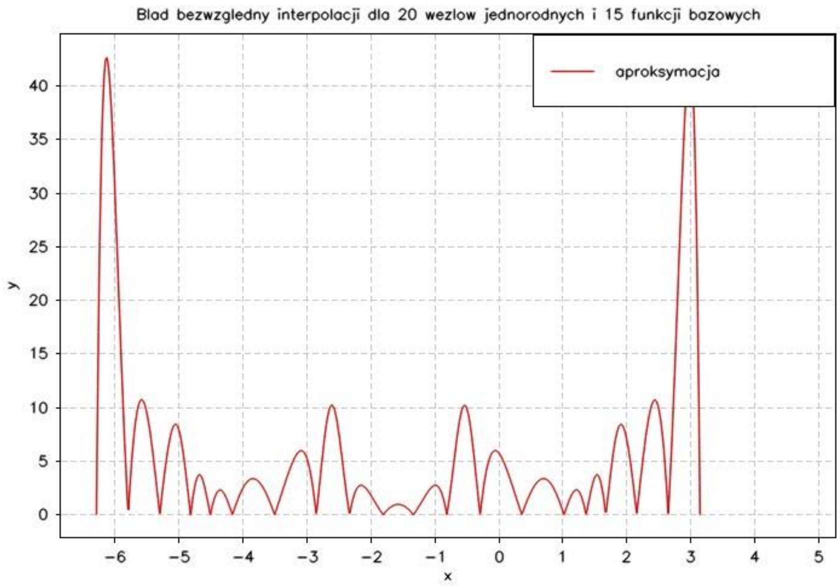
Zwiększając n do 50 nie widać znaczącej zmiany w wykresie aproksymacji. Jedynie można zauważyć niewielkie zmiany na krańcach przedziału. Podobnie wartości błędów są bliskie poprzednim.

6.1.4 $m = 15$

6.1.4.1 $n = 20$



Wykres 27.



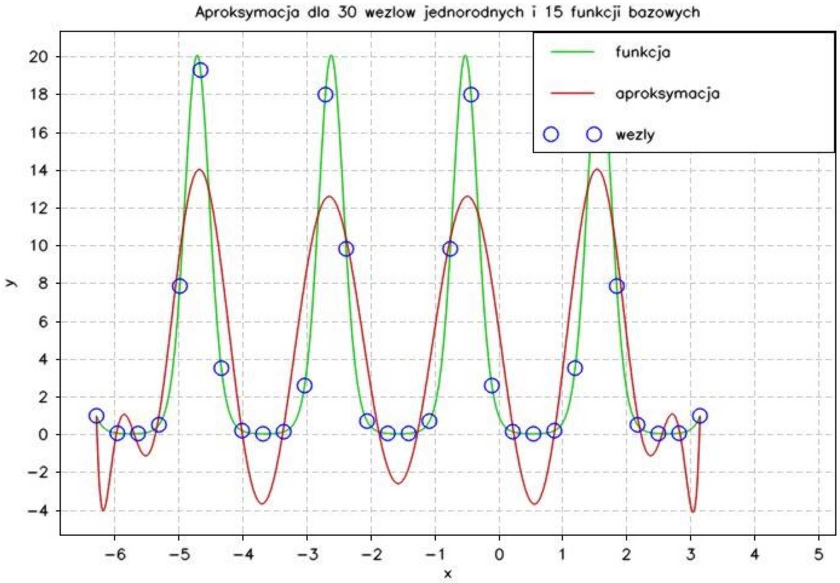
Wykres 28.

Błąd maksymalny	42.47779825
Suma kwadratów błędów	100076.2622

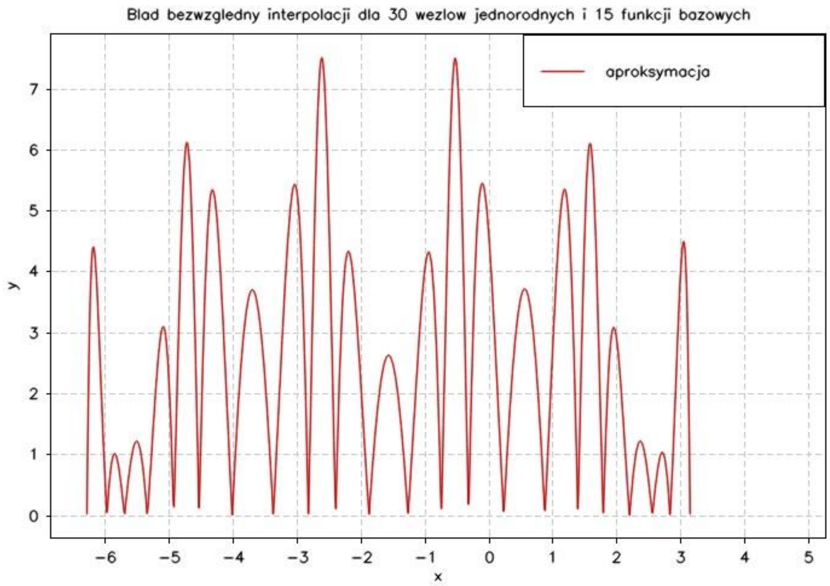
Tabela 13. Wartości błędów dla m = 15 i n = 20.

Dla $m = 15$ i $n = 20$ funkcja ponownie przyjęła kształt zbliżony do pierwotnego. Na krańcach przedziału ponownie widać , tym razem większy, efekt Runge'go.

6.1.4.2 $n = 30$



Wykres 29.



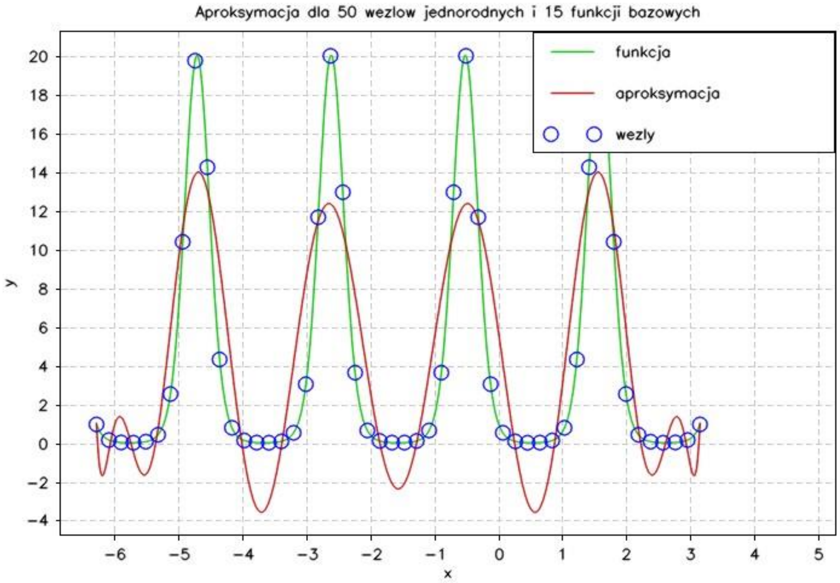
Wykres 30.

Błąd maksymalny	7.509455576
Suma kwadratów błędów	9833.076368

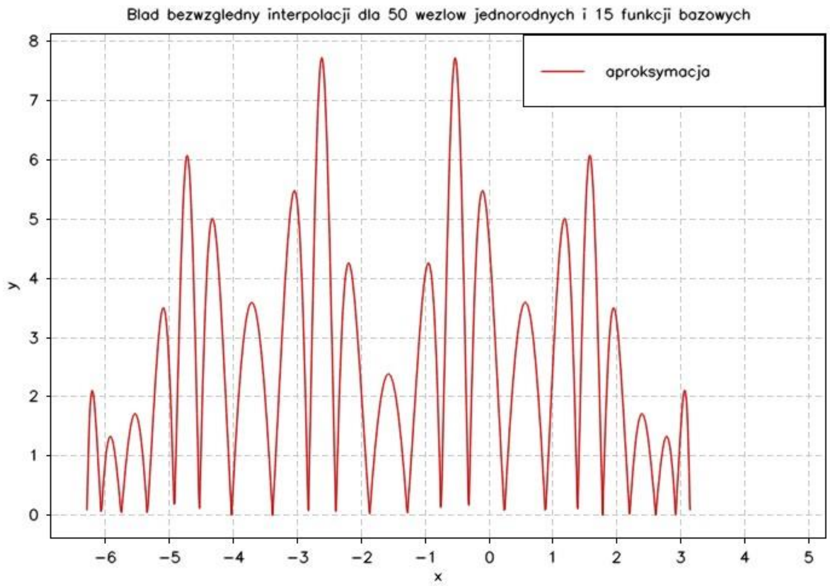
Tabela 14. Wartości błędów dla m = 15 i n = 30.

Dla $n = 30$ efekt Runge'go istotnie się zmniejszył. Podobnie widać zmiany w błędzie maksymalnym i sumie kwadratów błędów. Aproksymacja jest bardzo podobna do funkcji pierwotnej.

6.1.4.3 $n = 50$



Wykres 31.



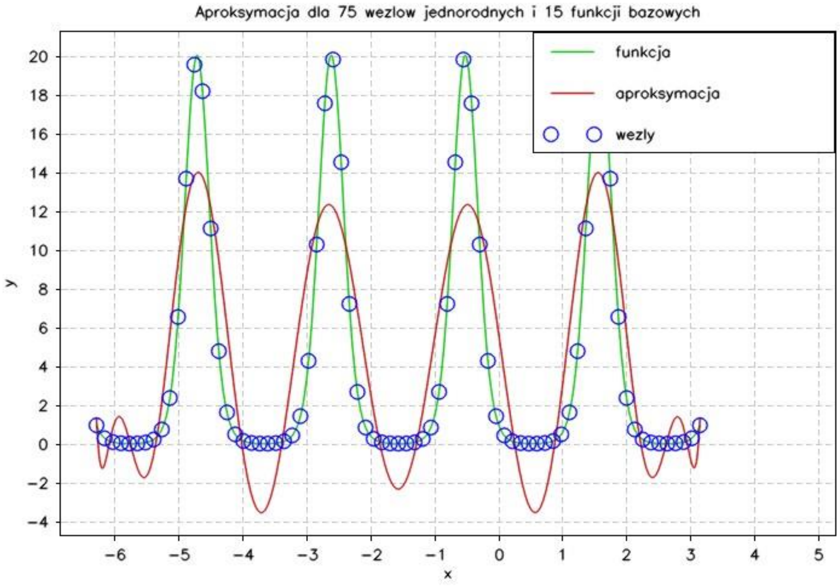
Wykres 32.

Błąd maksymalny	7.714692102
Suma kwadratów błędów	9394.002639

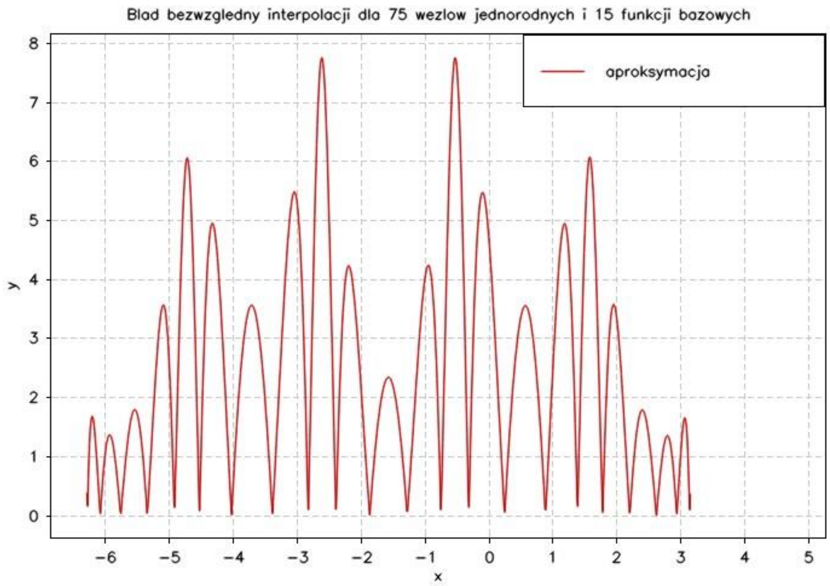
Tabela 15. Wartości błędów dla m = 15 i n = 50.

Dla $n = 50$ nie widać efektu Runge'go. Błąd maksymalny lekko się zwiększył, a suma kwadratów zmniejszyła się.

6.1.4.4 $n = 75$



Wykres 33.



Wykres 34.

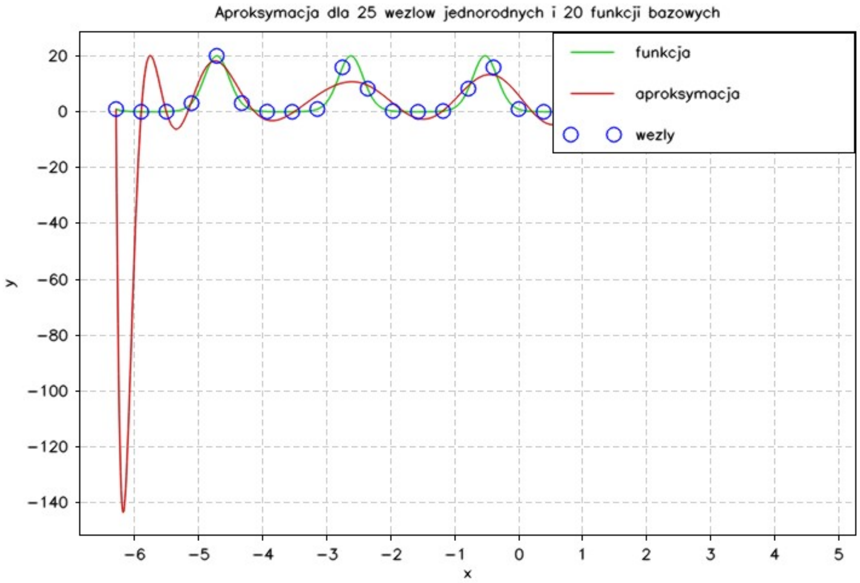
Błąd maksymalny	7.755036965
Suma kwadratów błędów	9371.53623

Tabela 16. Wartości błędów dla m = 15 i n = 75.

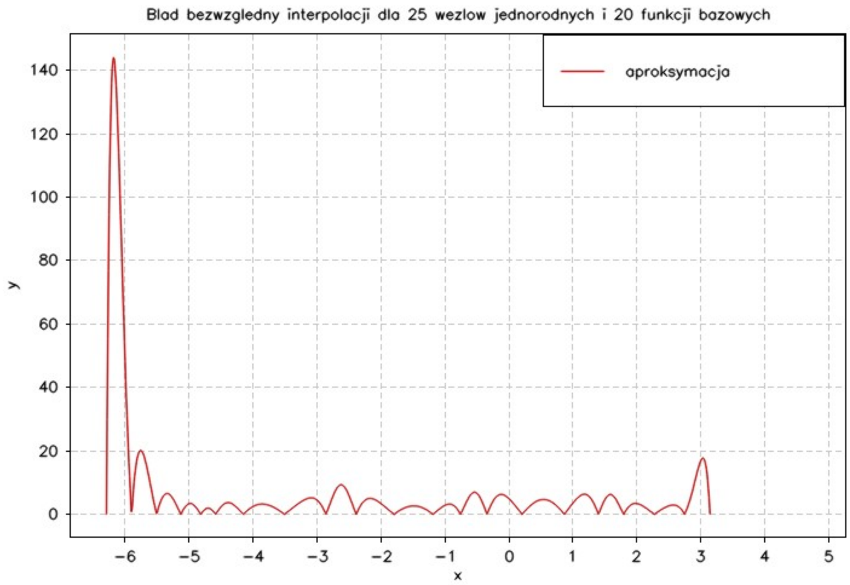
Dla $n = 75$ nie widać znaczącej różnicy od $n = 50$. Jedyne co widać to niewielkie zmiany na krańcach przedziału.

6.1.5 $m = 20$

6.1.5.1 $n = 25$



Wykres 35.



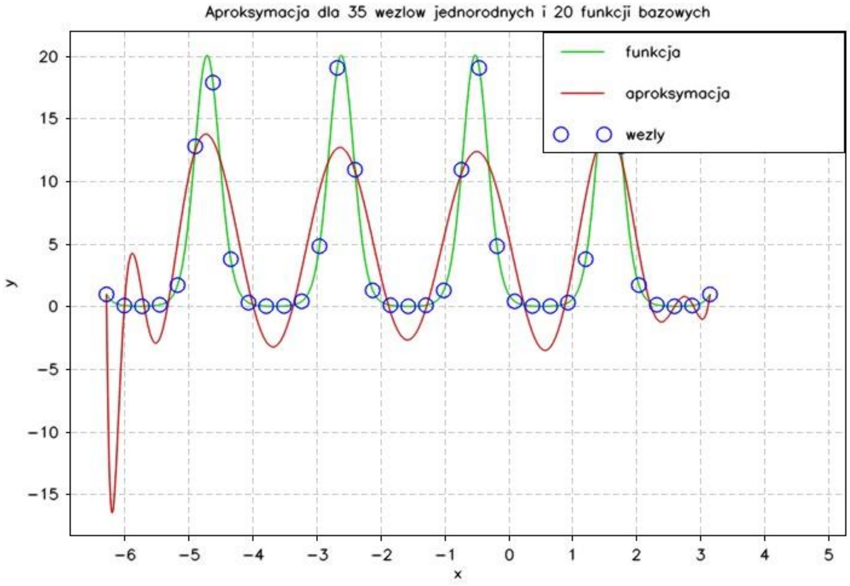
Wykres 36.

Błąd maksymalny	131.23796
Suma kwadratów błędów	311948.2265

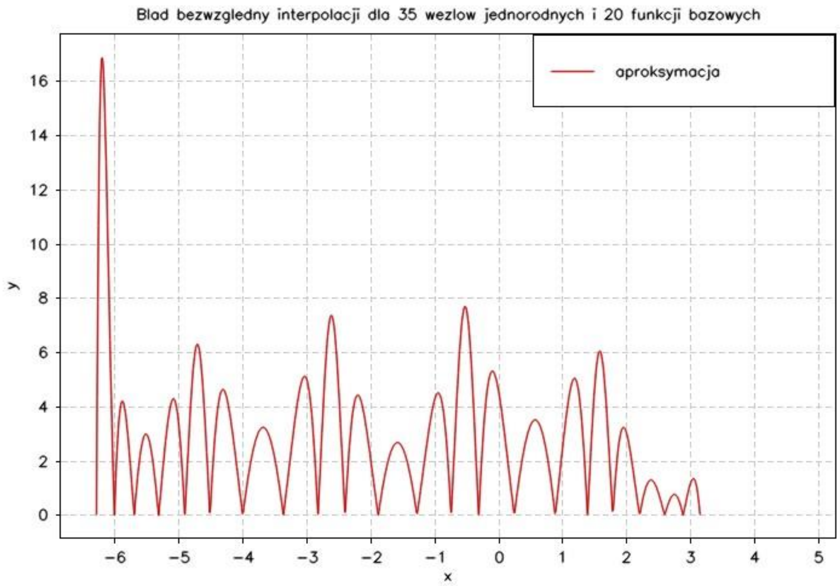
Tabela 17. Wartości błędów dla m = 20 i n = 25.

Dla $m = 20$ i $n = 25$ funkcja ma spory efekt Runge’go na początku przedziału aproksymacji.

6.1.5.2 $n = 35$



Wykres 37.



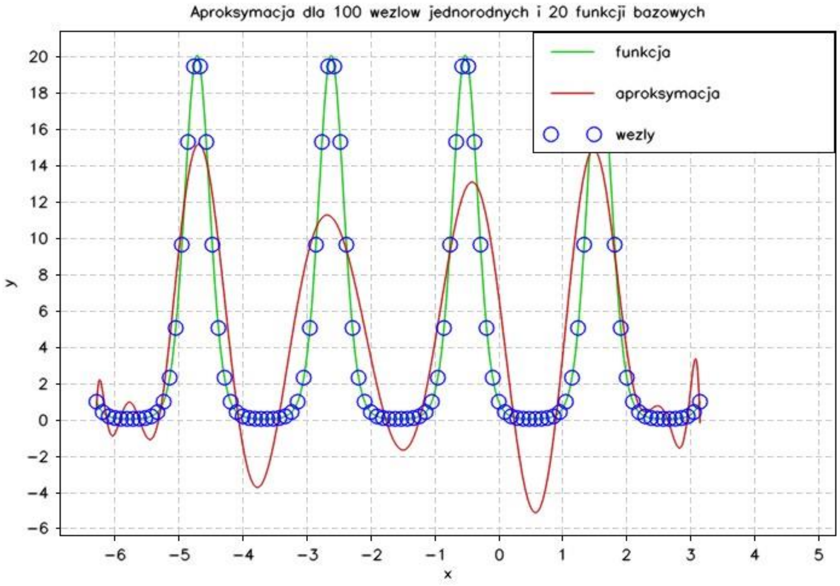
Wykres 38.

Błąd maksymalny	7.968558048
Suma kwadratów błędów	9847.180654

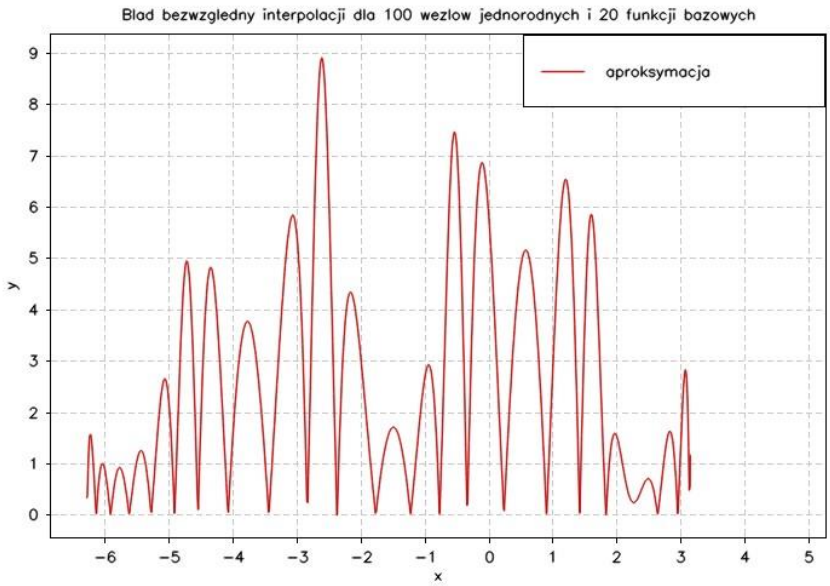
Tabela 18. Wartości błędów dla m = 20 i n = 35.

Dla $n = 35$ efekt Runge'go istotnie się zmniejszył. Podobnie widać zmiany w błędzie maksymalnym i sumie kwadratów błędów. Aproksymacja jest w miarę podobna do funkcji pierwotnej.

6.1.5.3 $n = 100$



Wykres 39.



Wykres 40.

Błąd maksymalny	7.675449355
Suma kwadratów błędów	9384.290206

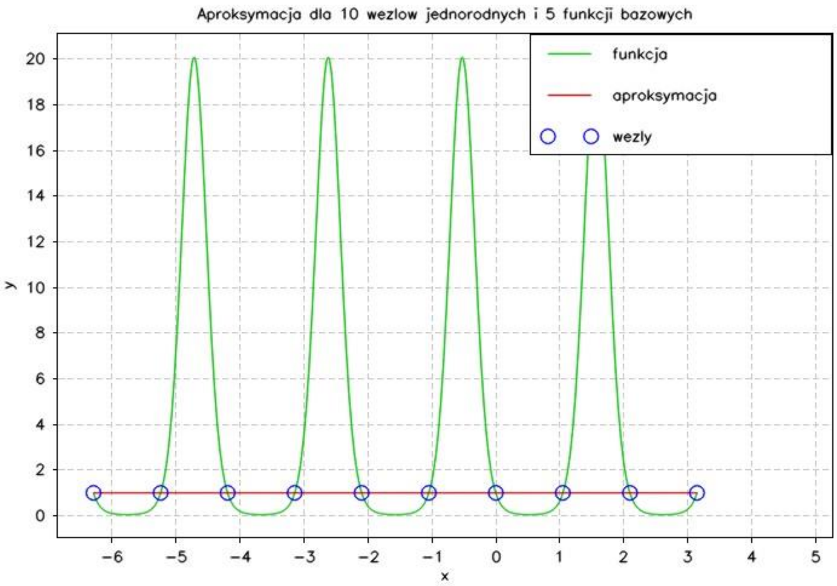
Tabela 19. Wartości błędów dla m = 20 i n = 100.

Dla $n = 100$ nie widać efektu Runge'go. Błąd maksymalny i suma kwadratów błędów lekko się zmniejszyły.

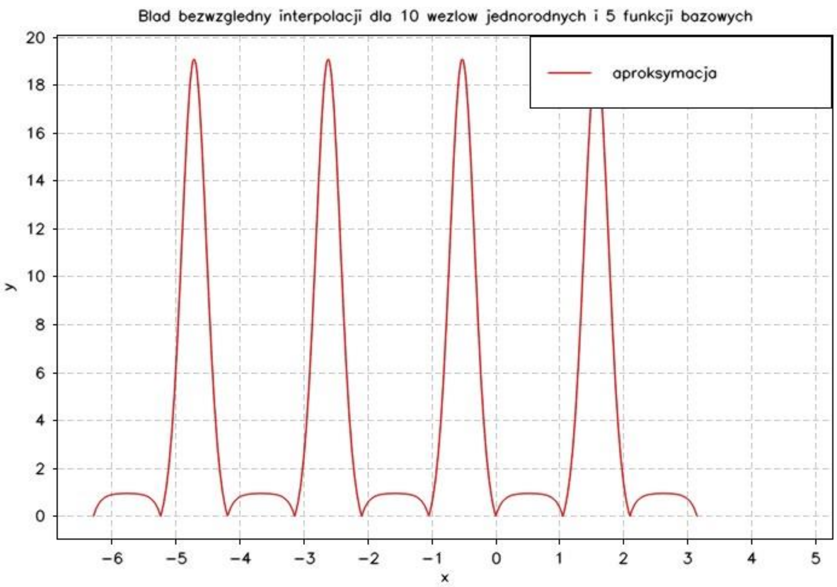
6.2 Porównanie wielomianów o tej samej ilości funkcji bazowych n.

6.2.1 $n = 10$

6.2.1.1 $m = 5$



Wykres 41.



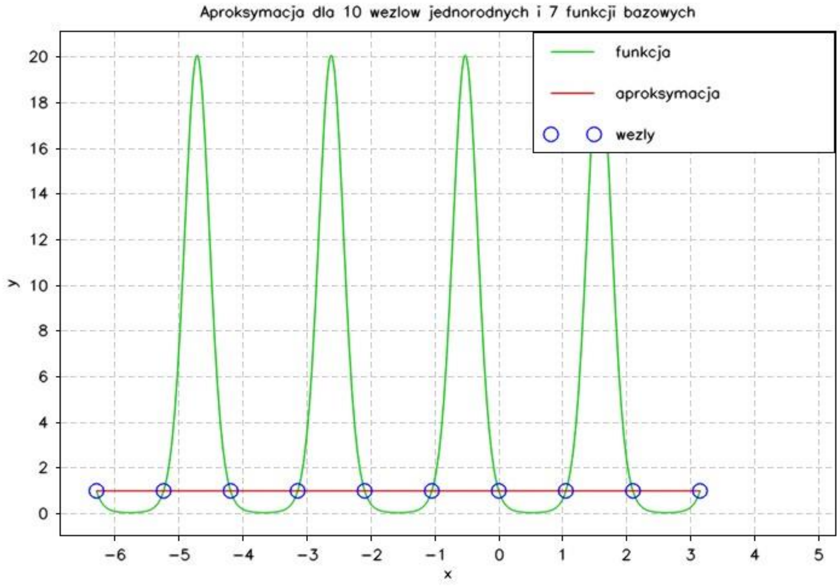
Wykres 42.

Błąd maksymalny	19.08549057
Suma kwadratów błędów	49053.6982

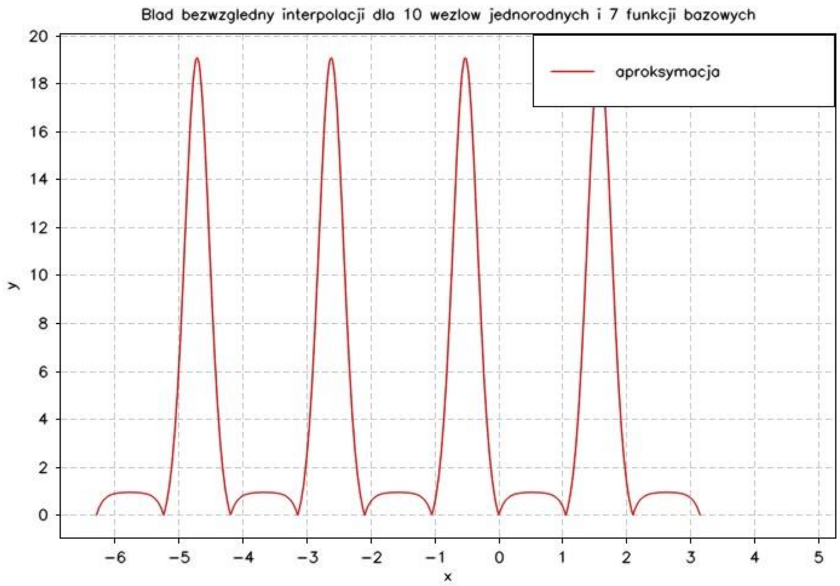
Tabela 20. Wartości błędów dla m = 5 i n = 10.

Dla $m = 5$ aproksymacja przyjęła postać prostej linii. Osiąga w węzłach równe wartości.

6.2.1.2 $m = 7$



Wykres 43.



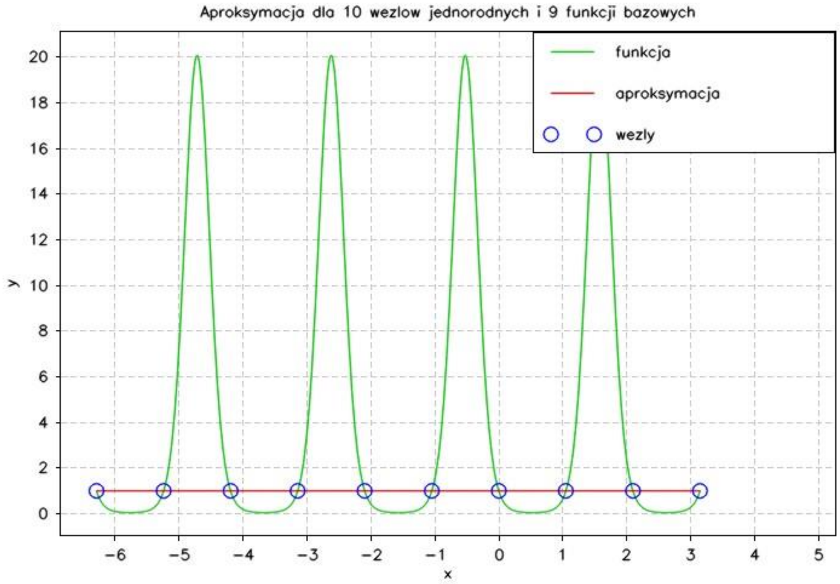
Wykres 44.

Błąd maksymalny	19.08549057
Suma kwadratów błędów	49053.6982

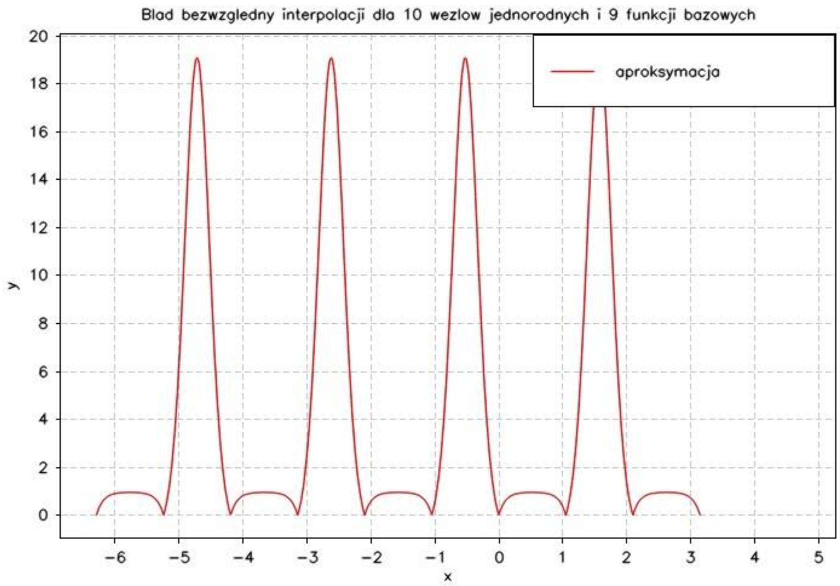
Tabela 21. Wartości błędów dla m = 7 i n = 10.

Dla $m = 7$ aproksymacja nie zmieniła postaci. W dalszym ciągu jest prostą linią.

6.2.1.3 $m = 9$



Wykres 45.



Wykres 46.

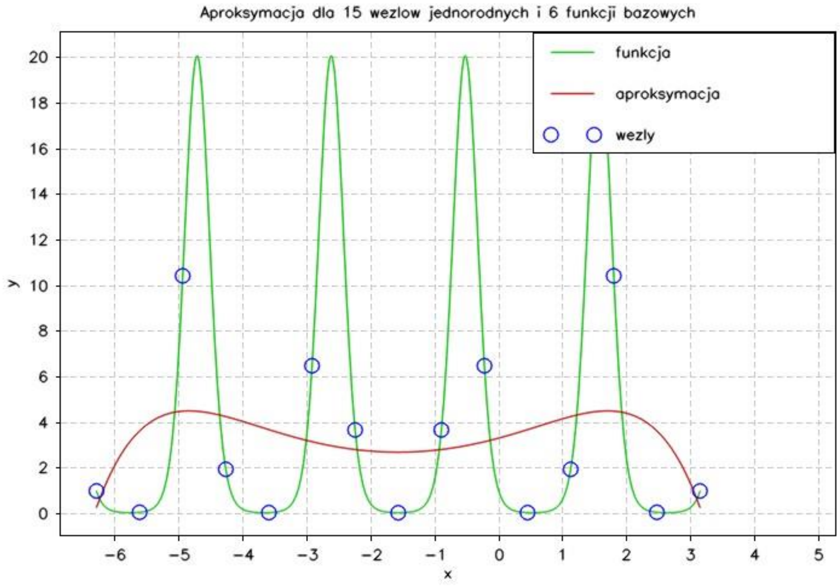
Błąd maksymalny	19.08549057
Suma kwadratów błędów	49053.6982

Tabela 22. Wartości błędów dla m = 9 i n = 10.

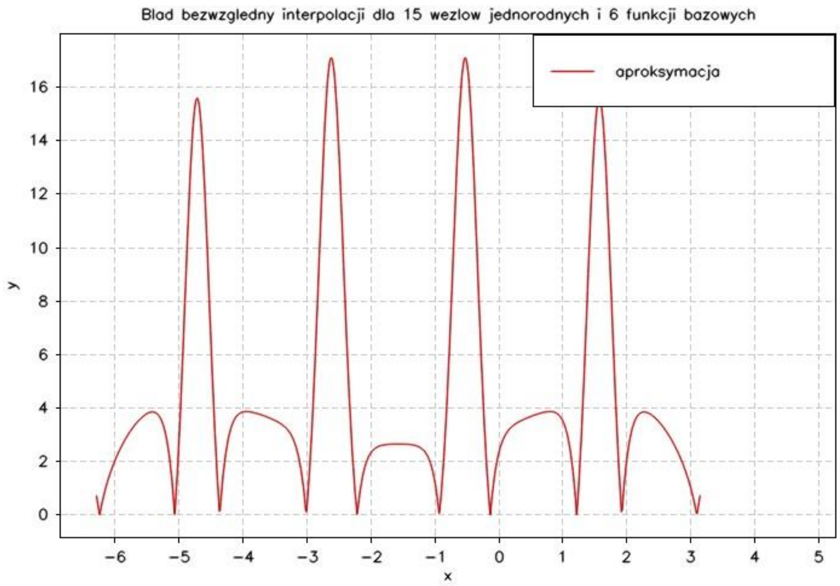
Dla $m = 9$ aproksymacja nie zmieniła postaci. W dalszym ciągu jest prostą linią.

6.2.2 $n = 15$

6.2.2.1 $m = 6$



Wykres 47.



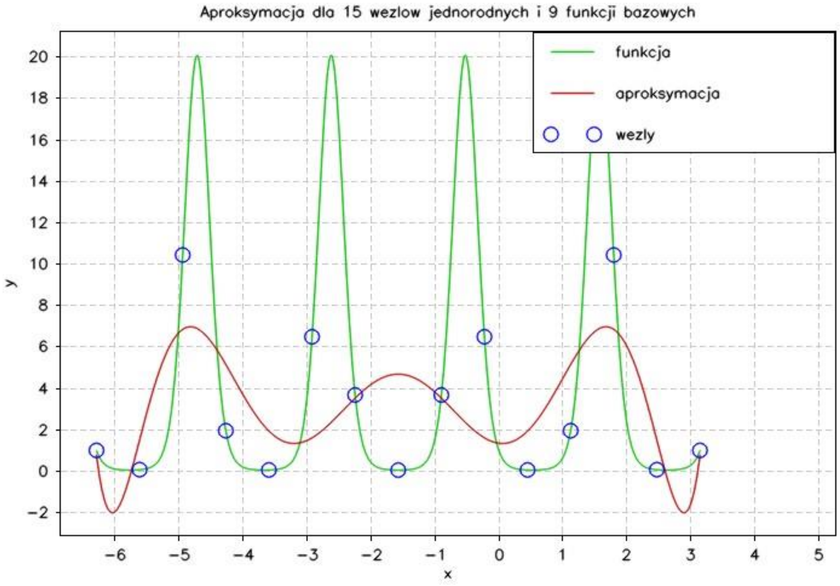
Wykres 48.

Błąd maksymalny	17.13859294
Suma kwadratów błędów	37523.91682

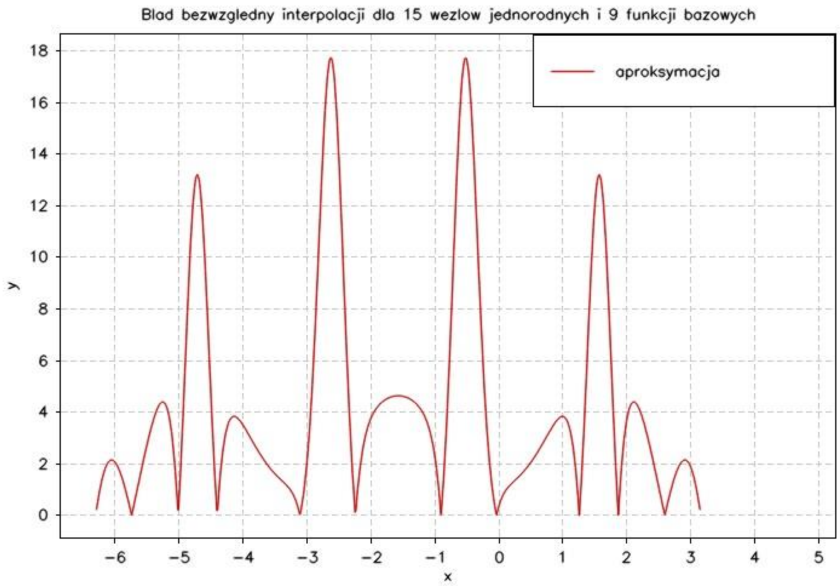
Tabela 23. Wartości błędów dla m = 6 i n = 15.

Dla $n = 15$ i $\mathrm{m} = 6$ aproksymacja jest lekko wygięta, lecz nie przypomina funkcji pierwotnej.

6.2.2.2 $m = 9$



Wykres 49.



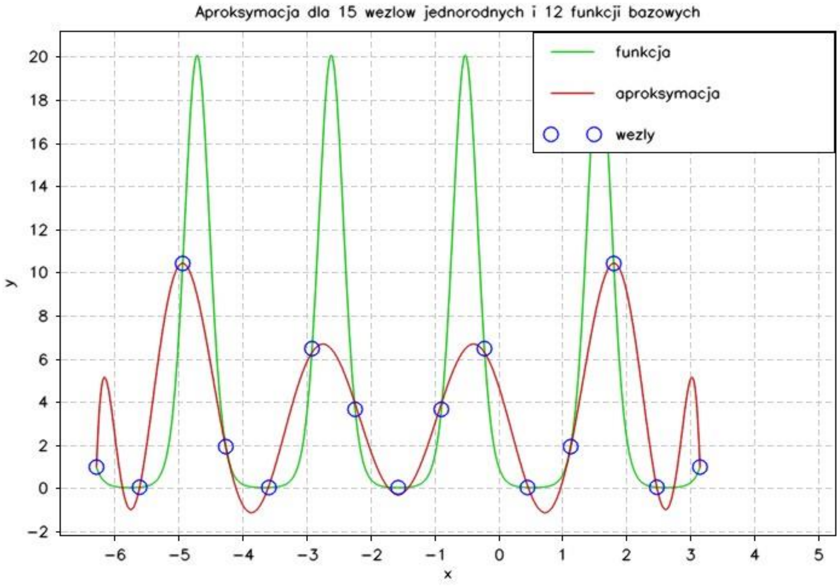
Wykres 50.

Błąd maksymalny	17.7378379
Suma kwadratów błędów	34290.93279

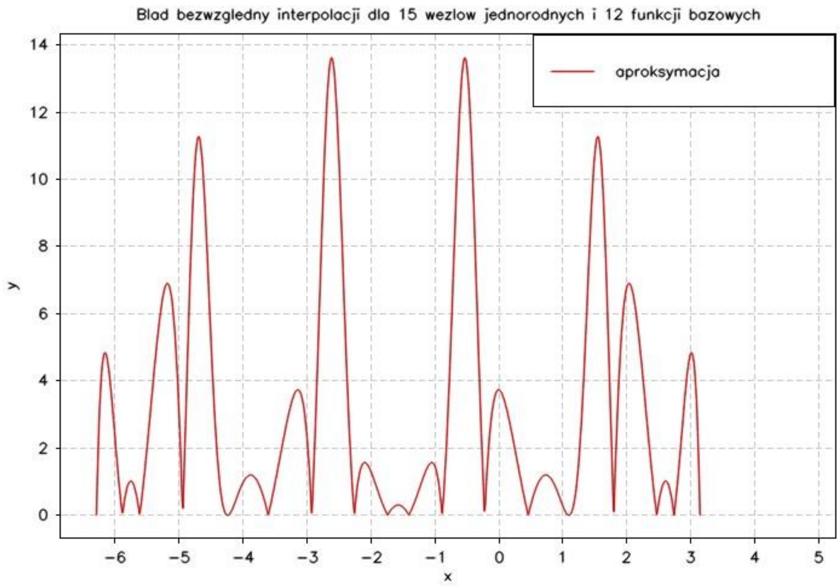
Tabela 24. Wartości błędów dla m = 9 i n = 15.

Dla $\mathrm{m} = 9$ aproksymacja lepiej przypomina funkcję pierwotną.

6.2.2.3 $m = 12$



Wykres 51.



Wykres 52.

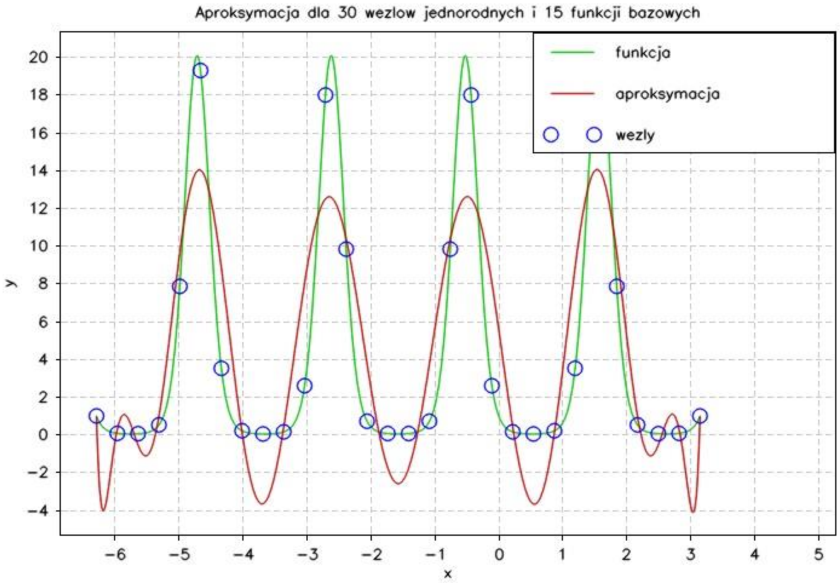
Błąd maksymalny	13.61111885
Suma kwadratów błędów	21659.50414

Tabela 25. Wartości błędów dla m = 12 i n = 15.

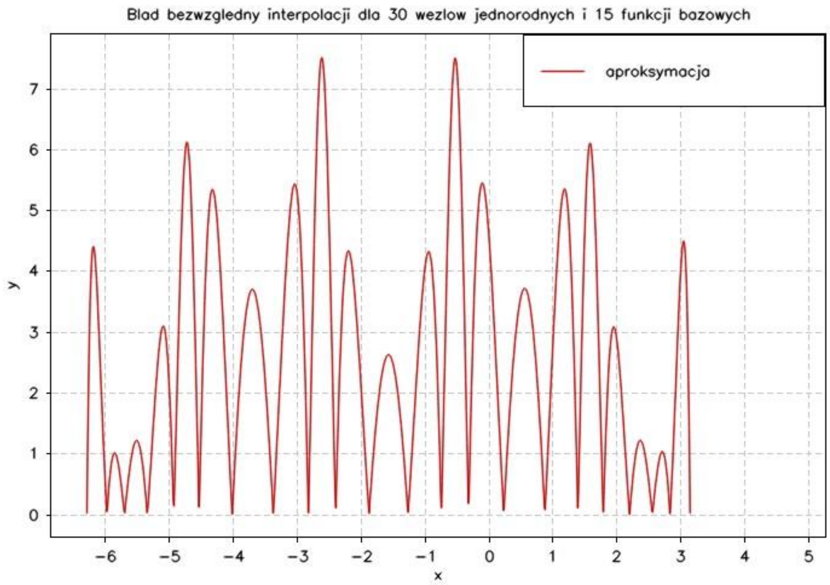
Dla $m = 12$ aproksymacja lepiej przypomina funkcję pierwotną. Przybliżenie jest lepsze od poprzedniego.

6.2.3 $n = 30$

6.2.3.1 $m = 15$



Wykres 53.



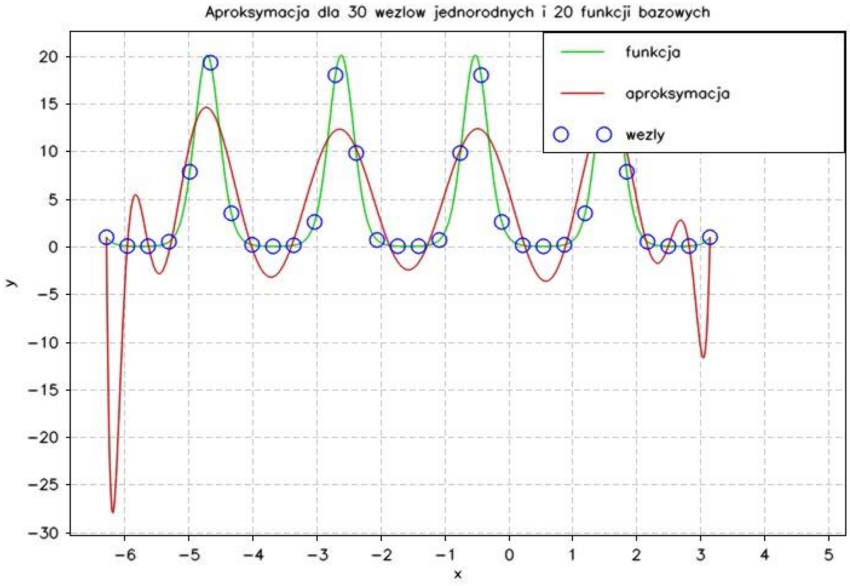
Wykres 54.

Błąd maksymalny	7.512429619
Suma kwadratów błędów	9833.367269

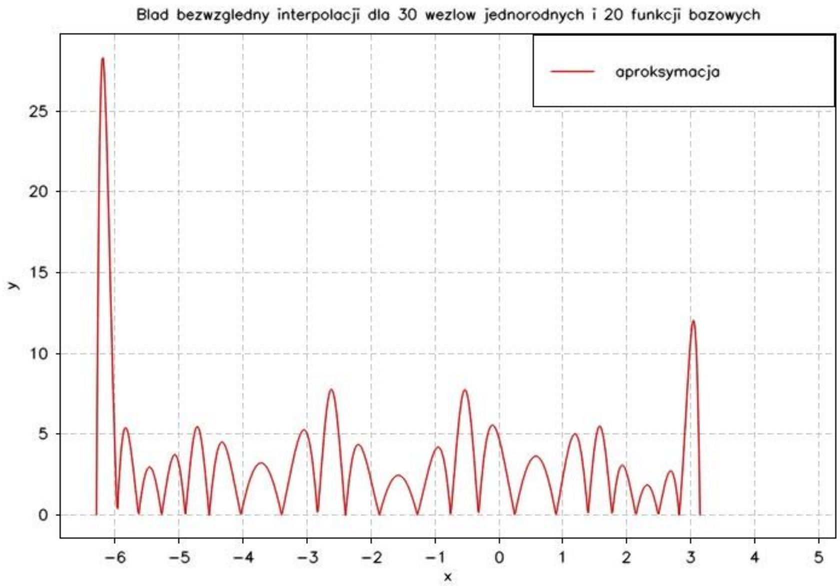
Tabela 26. Wartości błędów dla m = 15 i n = 30.

Dla $\mathrm{m} = 15$ aproksymacja całkiem dobrze przybliża funkcję pierwotną.

6.2.3.2 $m = 20$



Wykres 55.



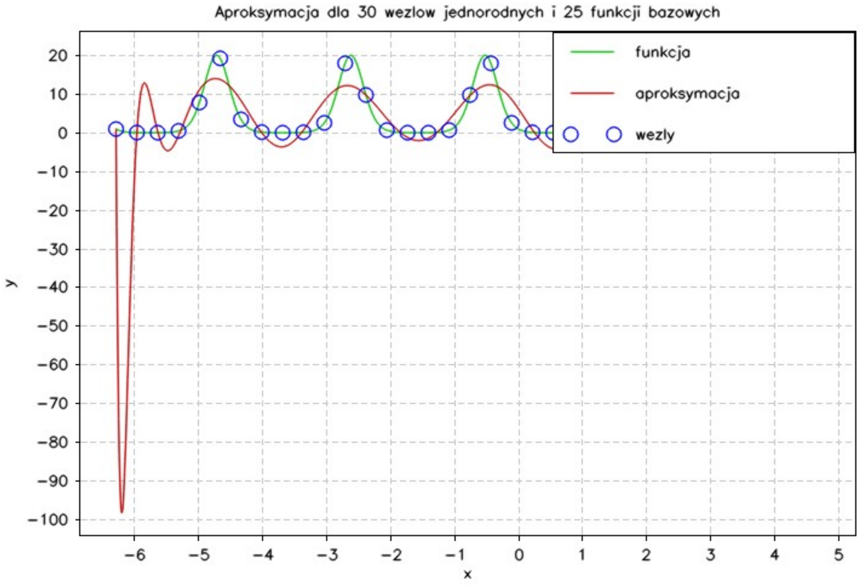
Wykres 56.

Błąd maksymalny	28.28989655
Suma kwadratów błędów	24119.42204

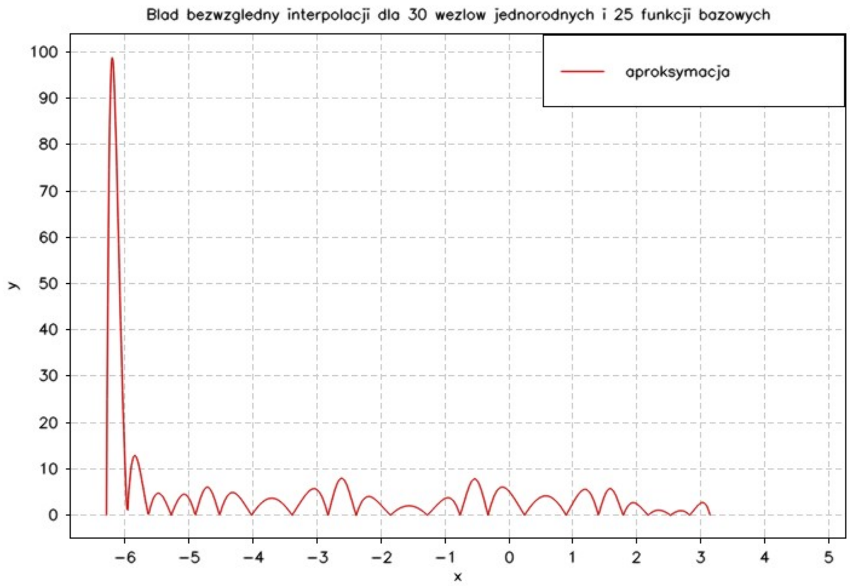
Tabela 27. Wartości błędów dla m = 20 i n = 30.

Dla $m = 20$ widać efekt Runge'go na obu krańcach przedziału, przy czym na początku przedziału jest większy.

6.2.3.3 $m = 25$



Wykres 57.



Wykres 58.

Błąd maksymalny	98.71957675
Suma kwadratów błędów	146971.0967

Tabela 28. Wartości błędów dla m = 25 i n = 30.

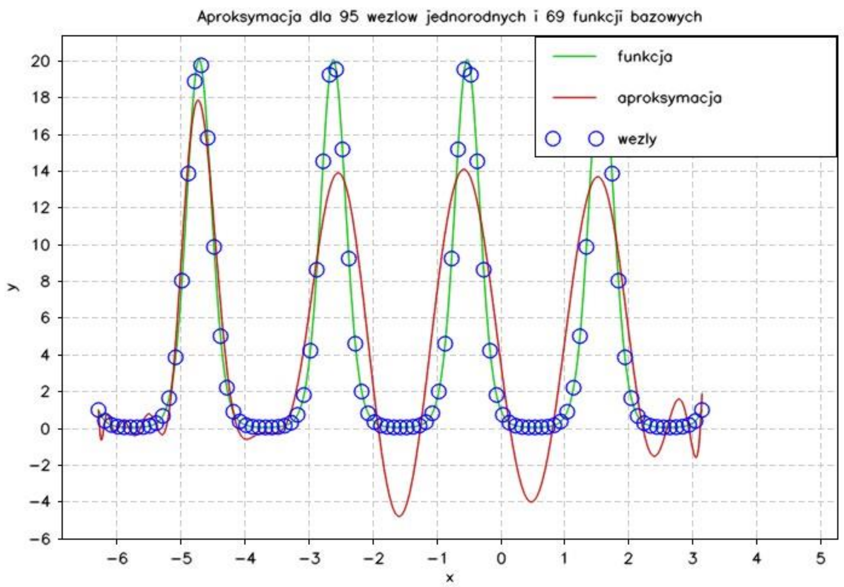
Dla $m = 25$ widać spory efekt Runge'go na początku przedziału aproksymacji.

6.3 Najlepiej przybliżający wielomian

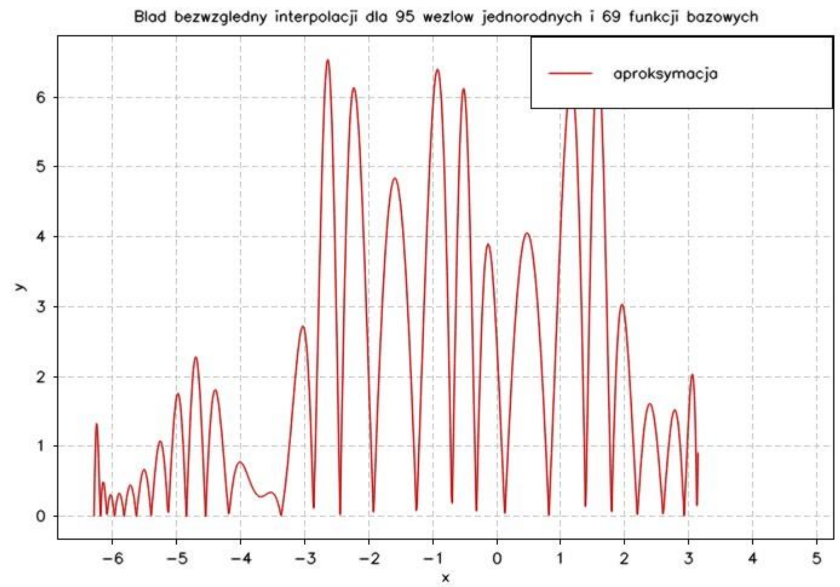
Aby znaleźć najlepiej przybliżający wielomian należy znaleźć wielomian, który ma najmniejszy błąd maksymalny oraz który ma najmniejszą sumę kwadratów błędów.

W tym celu obliczono te wartości dla $m = 2, \dots, 99$ i $n = 3, \dots, 200$.

Najmniejszy błąd maksymalny osiągnęła aproksymacja dla $m = 69$ i $n = 95$ (6.535190296).

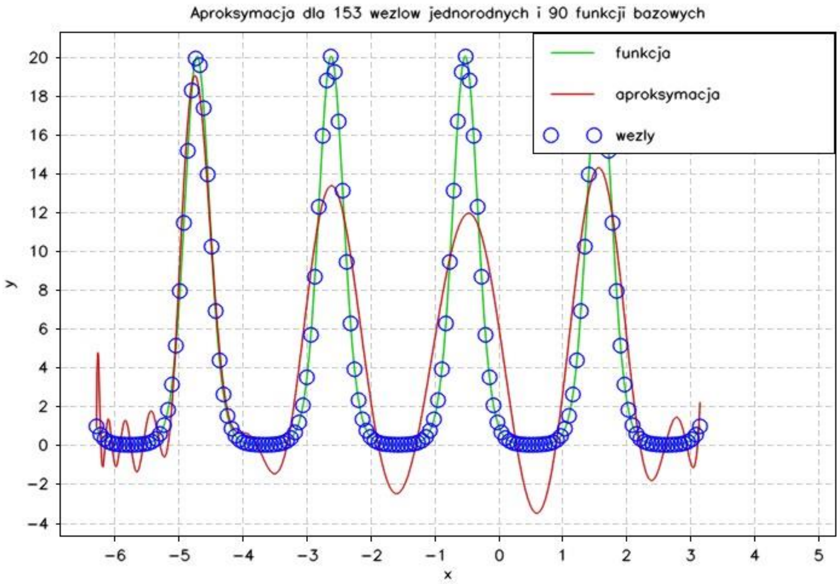


Wykres 59.

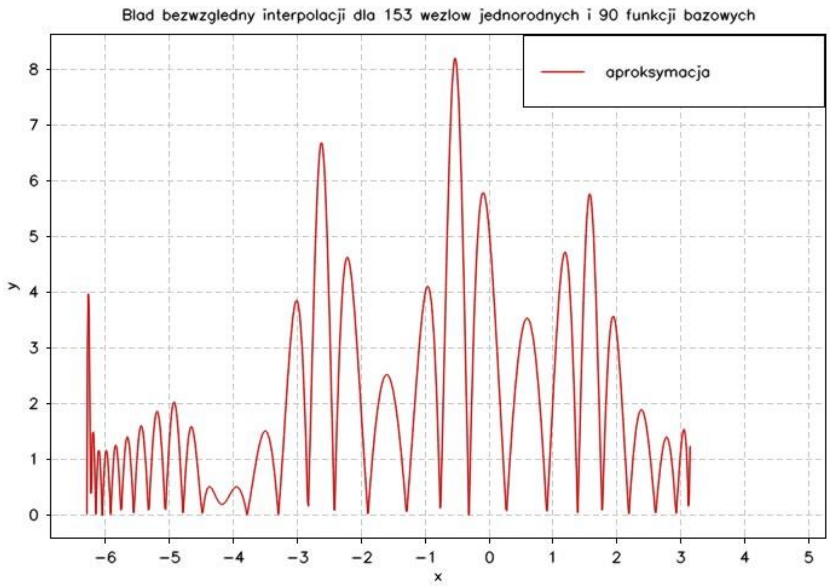


Wykres 60.

Natomiast najmniejszą sumę kwadratów błędów osiągnęła aproksymacja dla $m = 90$ i $n = 153$ (6994.894863).



Wykres 61.



Wykres 62.

6.4 Limit obliczeń

Ekperyment wykazał, że dla $m \geq 194$ aproksymacja nie jest możliwa. Próba uzyskania wielomianu kończy się uzyskaniem wartości NaN.

7. Wnioski

Zwiększanie liczby węzłów prawie zawsze zwiększa dokładność aproksymacji.

W miarę zwiększania liczby funkcji bazowych, coraz łatwiej jest uzyskać gorszą aproksymację, niezależnie od liczby węzłów.

Nie opłaca się zwiększać stopnia wielomianu w nieskończonośc, przy $m \geq 194$ jakiekolwiek obliczenia dają wynik Not-a-Number.