Intro. au Calcul Scientifique

Warm up

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1. Dans un fichier nommé `produit.py`, écrivez une fonction `produit(x, y)` qui prend en argument deux ensembles `x` et `y`, représentés comme des listes, et retourne le produit cartésien `x` × `y` (aussi représenté comme une liste). L'ordre des éléments n'est pas spécifié et les doublons dans les listes initiales sont considérés comme des éléments distincts.

Dans ce même fichier, ajoutez une fonction `power_set` qui prend en argument un ensemble `x` et retourne l'ensemble des parties de `x`, $2^{\mathtt{x}}$.

Les ensembles `x` et `y` sont des ensembles finis quelconques : votre code doit donc marcher quels qu'ils soient. Idéalement vous typerez votre code génériquement (la cohérence de vos types peut être montrée dans votre éditeur grâce, par exemple, à `pylint`).

Vous ajouterez des *tests unitaires* en utilisant `pytest`.

La question suivante nécessite d'avoir installé `matplotlib`.

Question 2. On considère la fonction $f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto b^2(e^x + x^3) - x^2 - 4x$.

(a) Sur un même graphique, pour diverses valeurs de $b \geqslant 0$, tracez le graphe de f_b.

(b) En vous inspirant des caractéristiques que vous constatez sur ce graphique, prouvez que f_b possède une unique racine dans $]-\infty, 0[$?

Le second point ci-dessus permet de définir une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \,]-\infty, 0[\,: b \mapsto \varphi(b)$ par la propriété suivante :

$$\varphi(b) = x \quad\iff\quad f_b(x) = 0 \text{ et } x \in \,]-\infty, 0[. \tag{1}$$

(c) Prouvez que la fonction φ est de classe C^1. Pour ce faire, une façon de procéder[1] est de considérer la fonction $\varphi^{-1}(x)$ (qui est ici explicite) et de transférer ses caractéristiques sur φ (voir les résultats sur les fonctions réciproques dans le syllabus d'Analyse Mathématique I).

(d) À partir des graphiques produits au point (a) et des éléments analytiques simples, conjecturez la limite de $\varphi(b)$ lorsque $b \to +\infty$.

(e) Prouvez rigoureusement ce que vous avez conjecturé au point précédent.

Aide : esquissez, à la main, le graphe de φ (à partir des graphes du point (a)), établissez une stratégie de preuve, et prouvez ensuite les éléments dont vous avez besoin. En particulier, pour connaître le signe de $\partial_x \varphi^{-1}(x)$ pour $x \in [-4, 0[$, des graphiques supplémentaires d'expressions algébriques pertinentes peuvent vous être utiles.

[1] Une autre est d'utiliser le théorèmes des fonctions implicites.