Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2018

2. Mai 2018

Stochastik I

4. Übung

Aufgabe 1 **(3 Punkte)** Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Zeigen Sie, dass f genau dann $\mathcal{A}/\overline{\mathcal{B}}$-messbar ist, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f \geq a\}$ in $\mathcal{A}$ liegt.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)** Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f, g : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zwei $\mathcal{A}/\overline{\mathcal{B}}$-messbare, numerische Funktionen. Beweisen Sie:

(i) Die Mengen $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$ und $\{f \neq g\}$ liegen in $\mathcal{A}$.

(ii) Die Funktionen $f + g$ und $f - g$ sind $\mathcal{A}/\overline{\mathcal{B}}$-messbar, falls sie überall auf Ω definiert sind.

(iii) Die Funktion $f \cdot g$ ist $\mathcal{A}/\overline{\mathcal{B}}$-messbar.

Aufgabe 3 **(3 Punkte)** Sei Ω eine nicht-leere Menge, $\emptyset \neq \Omega' \subset \Omega$ und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{A}|_{\Omega'} := \{A \cap \Omega' : A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra auf Ω' ist.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)** Wir betrachten den Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{[0,1)}$ und P die Gleichverteilung auf $[0, 1)$ ist. Gegeben sei das System von Mengen

$$A_n := \left[0, \frac{1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{2^n - 2}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie die Unabhängigkeit der Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.