

# 1 Motivation

## 2 Inhalte, Prämaße, Elementarintegrale

Präring

Inhalt

Prämaß

Maßerzeugende Funktion

Verteilungsfunktion

$\mathcal{R}(\mathcal{S})$

Ring

Nicht-negative elementare Funktionen  $\varepsilon^+(\mathcal{S})$

Elementarintegrale

$I_\mu$

Satz: Fortsetzung eines Inhalts

Satz: Charakterisierung von Prämaßen oder Beppo Levi für das Elementarintegral

# 3 Maßräume und Wahrscheinlichkeitsräume

$\sigma$ -Algebra

Messraum

Maßraum und Maß

Wahrscheinlichkeitsmaß und -raum

von  $\mathcal{M}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra

Satz: Maßfortsetzungssatz, Caratheodory + **Beweis**

endliches/ $\sigma$ -endliches Prämaß

Satz: Maßeindeutigkeitssatz und Folgerung

Satz: Charakterisierung der W-Maße auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Dynkin-System

Dynkin Lemma

# 4 Einige wichtige Verteilungen

Binomial( $n, p$ )-Verteilung

Binomialapproximation der hypergeometrischen Verteilung

Dichte von  $P_F$

Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  also:

- Gleichverteilung
- Exponentialverteilung
- Normalverteilung und Standardnormalverteilung

# 5 Unabhängigkeit

(a) **Unabhängigkeit von Ereignissen und bedingte Wahrscheinlichkeiten**

Unabhängigkeit zweier Ereignisse/Familie von Ereignissen

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

Bayes-Formel

(b) **Unabhängigkeit von  $\sigma$ -Algebren**

Definition Unabhängigkeit von  $\sigma$ -Algebren

# 6 Zufallsvariablen

Messbare Abbildungen/Zufallsvariablen

$\mathbb{R}^D$ -wertige Zva, numerische Zva

Satz: Abbildung  $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ -messbar

Verteilung von  $X$

von  $X$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Satz: Äquivalenz für Unabhängigkeit

# 7 Maßintegrale und Erwartungswerte

## (a) **Konstruktion des Maßintegrals**

Approximierende Folge

Maßintegral

$\mu$ -integrierbar

$\mu$ -quasi-integrierbar

Erwartungswert

Einige wichtige Eigenschaften des Maßintegrals

## (b) **Konvergenzsätze und $\mathcal{L}^p$ -Räume**

Satz: Integration und Nullmengen

Satz: Beppo-Levi + **Beweis**

$\mu$ -fast sicher

Lemma von Fatou

Satz: Lebesgue

$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

## (c) **Integration bzgl Produktmaßen**

Satz: Fubini

# 8 Methoden zur Berechnung von Maßintegralen u. Erwartungswerten

Satz: Partielle Integration

Satz: Methode zur Berechnung des Erwartungswertes einer Zva

Maße mit Dichten Definition



## 9 Varianz, Co-Varianz und Faltung

Varianz, Covarianz, Korrelation,  $n$ -tes Absolutmoment,  $n$ -tes Moment

Identitäten (Linearität etc) zu Varianz, Covarianz, Erwartungswerten

Satz: Bienaymé

Faltung

# 10 Konvergenz von Zufallsvariablen

Konvergenz in Wahrscheinlichkeit

Fast sichere Konvergenz

Konvergenz im  $p$ -ten Mittel

Satz: Über eine Implikation zwischen den Konvergenzbegriffen + **Beweis** von (i) nach (ii) nach (iv)

Satz: Borel-Cantelli + **Beweis**

Satz: Äquivalenz mit Teilfolgen und mit Cauchy-Kriterium + **Beweis**

Markov-Ungleichung und Tschebyscheff-Ungleichung

Satz: Alle Implikationen des Kapitels + **Beweis ausführlich**

**Konvergenz von Reihen unabhängiger Zva:**

Satz: Lévy

Satz: Zwei-Reihenkriterium

# 11 Die Gesetze der großen Zahlen

Motivation

Definition erfüllt starkes/schwaches GGZ

Schwaches GGZ +hinreichende Bedingungen +**Beweis**

Kronecker

Starkes GGZ +**Beweis**

Beispiele!!!

# 12 Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Schwache Konvergenz

Wesentliche Konvergenz

Satz: Portmanteau Theorem + **Beweis**

Satz: Helly Bray (+**Beweis**)

Satz: Implikation von Konvergenz von  $Z_n$  auf separablem Raum  
relativ kompakt

straff

Prohorov

# 13 Charakteristische Funktionen

Definition Char. Funktion

Satz: Umkehrformel

Satz: Stetigkeitssatz, Levy

# 14 Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy

Satz: Lindeberg Levy + **Beweis**

Beispiel Monte-Carlo

# 15 Multivariate Normalverteilung

# **16 Der Kolmogorovsche Erweiterungssatz**