Prof. Dr. Christian Bender
Philip Oberacker

Universität des Saarlandes, Sommersemester 2014

24. Juni 2014

Stochastik I

Blatt 10

Aufgabe 1 (2+3=5 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen in $L^2(\mathbb{P})$ mit $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ und $\sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1] > 0$. Wir betrachten die empirische Varianz

$$\Sigma_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2\right],$$

wobei $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{E}[\Sigma_n^2] = \sigma^2$.

(b) $\Sigma_n^2 \to \sigma^2$ fast sicher. (*Hinweis*: Betrachten Sie die Folge von Zufallsvariablen $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $Y_i := (X_i - \mu)^2$)

Aufgabe 2 (2,5+2,5=5 Punkte)

Für eine Partei ist bekannt, dass sie in der Wählergunst zwischen 25% und 35% liegt. Die Parteichefin will bei der anstehenden Wahl nur dann als Spitzenkandidatin antreten, wenn ihre Partei mit mindestens 30% der Stimmen (aller Wahlberechtigten) rechnen kann. Um genauer zu ermitteln, wie populär ihre Partei ist, lässt sie eine Umfrage durchführen, bei der eine repräsentative Auswahl an Personen nach ihrem voraussichtlichen Abstimmungsverhalten gefragt wird. Von Interesse ist dabei, wie groß die Anzahl n_0 der Teilnehmer an der Umfrage mindestens sein muss, damit die relative Häufigkeit an Stimmen für die Partei bei der Umfrage mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% um höchstens 1% von der Wählergunst abweicht.

(a) Bestimmen Sie unter Benutzung der Tschebyscheff-Markov-Ungleichung eine möglichst kleine obere Schranke für n_0.

(b) Bestimmen Sie n_0 approximativ mit dem zentralen Grenzwertsatz.

Hinweis: Tabellen mit den Werten der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung findet man in vielen Lehrbüchern zur Wahrscheinlichkeitstheorie.

Aufgabe 3 (2+1+1=4 Punkte)

Seien X, Y und X_n, Y_n, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie:

(a) Ist $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so gilt

$$X_n \to c \text{ in Wahrscheinlichkeit } \Leftrightarrow X_n \to c \text{ in Verteilung.}$$

(b) Aus $X_n \to X$ in Verteilung und $Y_n \to Y$ in Verteilung folgt im Allgemeinen nicht $X_n + Y_n \to X + Y$ in Verteilung.

(c) Gilt $X_n \to X$ in Verteilung und ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so folgt $g(X_n) \to g(X)$ in Verteilung. Folgern Sie insbesondere, dass also für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $aX_n + b \to aX + b$ in Verteilung.

Aufgabe 4 (3+3=6 Punkte)

Seien X und X_n, Y_n, Z_n, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $Z_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit und $X_n \to X$ in Verteilung, so folgt

(i) $X_n + Z_n \to X$ in Verteilung.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$

$$\{X_n \leq x - \epsilon\} \cap \{|Z_n| \leq \epsilon\} \subset \{X_n + Z_n \leq x\} \subset \{X_n \leq x + \epsilon\} \cup \{|Z_n| \geq \epsilon\}.$$

(ii) $X_n Z_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit.
Hinweis: Sie können verwenden, dass für $M, \epsilon > 0$

$$\{|X_n Z_n| \geq \epsilon\} = \left\{|X_n Z_n| \geq \epsilon \wedge |Z_n| \leq \frac{\epsilon}{M}\right\} \cup \left\{|X_n Z_n| \geq \epsilon \wedge |Z_n| > \frac{\epsilon}{M}\right\}.$$

(b) Gilt $X_n \to X$ in Verteilung und $Y_n \to c$ in Wahrscheinlichkeit, so folgt

(i) $X_n + Y_n \to X + c$ in Verteilung.

(ii) $X_n Y_n \to cX$ in Verteilung.