Prof. Dr. H. Zähle
M.Sc. C. Gärtner

Universität des Saarlandes, SS 2015
16. Juli 2015

Stochastik I

13. Übung

Aufgabe 49 (3 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}[X_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_n = 0] = p_n \in (0,1)$. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen jeweils eine äquivalente Bedingung an die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an:

(i) $X_n \xrightarrow{\mathsf{p}} 0$.

(ii) $X_n \xrightarrow{L^p} 0$.

(iii) $X_n \xrightarrow{\mathsf{f.s.}} 0$.

Aufgabe 50 (4 Punkte)

Es seien (E,d) und (E',d') zwei metrische Räume und $f : E \to E'$ eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie, dass die Menge $D_f := \{x \in E : f \text{ ist unstetig in } x\}$ in der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$ liegt.

Hinweis: Man zeige zunächst, dass für $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ die Menge

$$D_f^{\varepsilon,\delta} := \big\{x \in E : \text{ es gibt } y, z \in E \text{ mit } d(x,y) < \delta,\ d(x,z) < \delta \text{ und } d'(f(y), f(z)) \geq \varepsilon\big\}$$

offen ist und konstruiere dann D_f aus solchen Mengen.

Aufgabe 51 (5 Punkte)

Es seien $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ und F_μ dessen Verteilungsfunktion. Die linksstetige Inverse $F_\mu^{\leftarrow} : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ von F_μ ist definiert durch $F_\mu^{\leftarrow}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_\mu(x) \geq t\}$ unter Verwendung der Konventionen $\inf \mathbb{R} := -\infty$ und $\inf \emptyset := \infty$.

(i) Zeigen Sie, dass $F_\mu(F_\mu^{\leftarrow}(t)) \geq t$ und $F_\mu^{\leftarrow}(F_\mu(x)) \leq x$ für alle $t \in (0,1)$ und $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie, dass für $t \in (0,1)$ und $x \in \mathbb{R}$ genau dann $F_\mu^{\leftarrow}(t) \leq x$ gilt, wenn $t \leq F_\mu(x)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mu_n \xrightarrow{\mathsf{w}} \mu$, wobei $\mu_n(\cdot) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{F_\mu^{\leftarrow}(i/(n+1))}(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Spezifizieren Sie μ_n aus Teil (iii) für das Lebesgue-Maß $\mu := \ell|_{[0,1]}$ auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$.

Hinweis für (ii): Sie können Teil (i) verwenden.
Hinweis für (iii): Sie können Bemerkung 3.10.14 und Teil (ii) verwenden.

Aufgabe 52 (4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit der Eigenschaft, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$. Prüfen Sie, ob die folgenden Familien $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ straff sind:

(i) $\mathcal{M} := \{\mathbb{P}_{X_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $\mathcal{M} := \{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(iii) $\mathcal{M} := \{\mathrm{GL}_{[0,n]} : n \in \mathbb{N}\}$.