1

Grundlagen der Maßtheorie

Kenntnisse der Maßtheorie bilden eine unverzichtbare Grundlage für jede systematische Darstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie, ebenso wie für andere mathematische Disziplinen. Darüber hinaus ist die Maßtheorie selbst ein interessantes Studienobjekt, zu dem es ein breites Angebot an Literatur gibt. Wir haben versucht, eine kurze, aber für unsere Zwecke dennoch vollständige Einführung in diejenigen Ideen und Resultate der Maßtheorie zu geben, die im weiteren Verlauf benötigt werden. Für eine ausführliche und exzellente Darstellung dieses Gebiets empfehlen wir das Buch von Elstrodt [Els02].

1.1 Das Maßproblem

Dieser erste Abschnitt dient nur der Motivation für die Entwicklung der Maßtheorie. Die systematische Darstellung beginnt mit dem nächsten Abschnitt.

Unsere Intuition

Die Begriffe Fläche und Volumen scheinen uns auf den ersten Blick vertraut. Jeder von uns hat eine intuitive, im Alltag bewährte Vorstellung davon, was man unter einer Fläche bzw. dem Volumen eines Körpers zu verstehen hat. Dies ging den Mathematikern Jahrhunderte lang nicht anders. Daher ist es nicht verwunderlich, dass eine präzise Formulierung erst verhältnismäßig spät, etwa zu Beginn des 20. Jahrhunderts, entstanden ist. Wichtige Beiträge kamen insbesondere von den Mathematikern Borel und Lebesgue, deren Namen wir daher an den entscheidenden Stellen der Maß- und Integrationstheorie wiederfinden werden. Was sind natürliche Forderungen, die wir an eine sinnvolle Verwendung des Begriffs Volumen stellen würden? Wir notieren diese:

(i) Einem 3-dimensionalen Gebilde wird eine nichtnegative Zahl zugeordnet, sein Volumen.

(ii) Zwei „kongruente“, also ohne Verformung aufeinander passende Gebilde haben das gleiche Volumen.
(iii) Besteht ein Gebilde aus mehreren Einzelgebilden, so ist das Volumen des Gebildes gerade die Summe der Volumina der Einzelgebilde.

Formalisierung

Wir wollen diese intuitiven Forderungen formalisieren, d.h. mathematisch präzise beschreiben. Die Gebilde fassen wir als Teilmengen der $\mathbb{R}^3$ auf, die Potenzmenge bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3) = \{A : A \subset \mathbb{R}^3\}$. Forderung (i) bedeutet, dass wir eine Funktion

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) &\to [0, \infty], \\ A &\mapsto \iota(A) \end{aligned}$$

suchen, die einer Teilmenge A ihr Volumen $\iota(A)$ zuordnet. Um z.B. den Flächeninhalt einer Fläche gleich mit zu behandeln, betrachten wir das Problem in allen Dimensionen $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) &\to [0, \infty], \\ A &\mapsto \iota(A). \end{aligned}$$

Um die zweite Forderung zu formalisieren, müssen wir den Begriff der Kongruenz definieren:

Definition 1.1 (Kongruenz). *Zwei Mengen $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ heißen kongruent, falls es eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass mit*

$$U(A) + v := \{Ux + v : \ x \in A\}$$

gilt:

$$B = U(A) + v.$$

Die orthogonale Matrix U bewirkt dabei eine Drehung, der Vektor v eine Verschiebung der Menge A. Zusammen bewegen sie die Menge A durch den Raum $\mathbb{R}^n$, wie in Abbildung 1.1 veranschaulicht.

Mit dieser Definition können wir Forderung (ii) für die Funktion $\iota : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ formulieren:

$$\iota(A) = \iota(B), \text{ falls } A \text{ und } B \text{ kongruent sind.}$$

Diese Eigenschaft heißt nahe liegender Weise Bewegungsinvarianz. Für die Formalisierung der dritten Forderung erinnern wir daran, dass zwei Teilmengen A und B disjunkt heißen, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt. Damit erhalten wir als weitere Forderung an unsere Funktion:

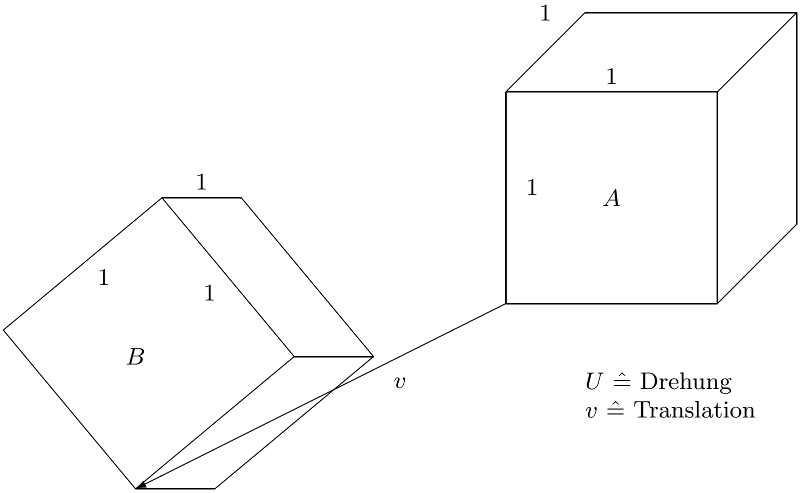

Abbildung 1.1. Kongruente Teilmengen A und B

$$\iota(A \cup B) = \iota(A) + \iota(B), \text{ falls } A \text{ und } B \text{ disjunkt sind.}$$

Formal genügt die Nullfunktion $\iota(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ all unseren Anforderungen. Um diese auszuschließen, fügen wir eine letzte Forderung hinzu: Das Einheitsintervall $[0, 1]$ soll die Länge 1 haben, das Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ die Fläche 1, etc.:

$$\iota([0, 1]^n) = 1.$$

Das Inhaltsproblem

Fassen wir das Ergebnis unserer Formalisierungen zusammen, so erhalten wir folgende Fragestellung, die als klassisches Inhaltsproblem bekannt ist:

Problem 1.2 (Inhaltsproblem). Gesucht ist eine „Inhaltsfunktion" $\iota : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) *Endliche Additivität*: Sind $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ disjunkt, so ist $\iota(A \cup B) = \iota(A) + \iota(B)$.
(ii) *Bewegungsinvarianz*: Sind $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ kongruent, so ist $\iota(A) = \iota(B)$.
(iii) *Normiertheit*: $\iota([0, 1]^n) = 1$.

Die Frage nach der Lösbarkeit des Inhaltsproblems hat zu höchst merkwürdig erscheinenden Resultaten geführt. Die Antwort ist zunächst die folgende:

Satz 1.3. *Das Inhaltsproblem 1.2 ist für $n = 1$ und $n = 2$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, und für $n \geq 3$ unlösbar.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man bei [Wag85]. Im Klartext bedeutet dies, dass unsere ganz natürlich erscheinenden Forderungen an eine Volumenfunktion bereits zu einem unlösbaren Problem geführt haben. Am deutlichsten kommt die Unlösbarkeit des Inhaltsproblems für den $\mathbb{R}^3$ in dem folgenden Paradoxon zum Vorschein:

Satz 1.4 (Banach-Tarski-Paradoxon, 1924). *Seien A und B beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ und das Innere von A sowie das Innere von B nicht leer, so existieren eine natürliche Zahl m und paarweise disjunkte Mengen $A_i \subset \mathbb{R}^3, i = 1, \ldots, m$ sowie paarweise disjunkte Mengen $B_i \subset \mathbb{R}^3, i = 1, \ldots, m$, so dass gilt:*

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i,$$
$$\text{und } A_i \text{ ist kongruent zu } B_i \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, m.$$

Einen Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons findet man ebenfalls in [Wag85]. Diese Aussage verdient wahrlich die Bezeichnung Paradoxon, erscheint sie auf den ersten Blick doch völlig absurd. Es wird darin behauptet, man könne eine Kugel vom Radius 1 so in endlich viele Stücke zerlegen und diese wieder zusammen legen, dass dabei 1000 Kugeln vom Radius 1000 entstehen. Die einzelnen Teile sind jedoch nicht konstruktiv bestimmbar, man kann nur ihre Existenz aus dem Auswahlaxiom ableiten. Paradoxien dieser Art entstehen durch die Betrachtung von Mengen mit unendlich vielen Elementen. Eine vergleichbare Situation entsteht bei der Untersuchung von Mächtigkeiten. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind gleich mächtig, obwohl $\mathbb{N}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist und die Differenz $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ wiederum die Mächtigkeit von $\mathbb{Z}$ besitzt.

Das Maßproblem

Obwohl es zunächst sinnlos erscheint, da bereits das Inhaltsproblem nicht lösbar ist, wollen wir eine unserer Forderungen noch verschärfen. Es wird sich in der späteren Theorie herausstellen, dass diese Verschärfung nicht zu echten Einschränkungen führt, für den Aufbau einer starken Theorie jedoch unabdingbar ist. Wir bringen dazu den Gedanken der Approximation ins Spiel. Nehmen wir an, wir wollten den Flächeninhalt einer krummlinig begrenzten Fläche bestimmen. Eine Möglichkeit besteht darin, den Flächeninhalt durch disjunkte Rechtecke A_i zu approximieren, wie in Abbildung 1.2 dargestellt. Nehmen wir immer mehr Rechtecke, die immer feiner die gegebene Fläche abdecken, so sagt uns unsere Intuition, dass die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke immer näher am gesuchten Flächeninhalt sein wird. Der Grenzwert der Partialsummen, mit anderen Worten die Reihe über die Flächeninhalte der Rechtecke, sollte genau den gesuchten Flächeninhalt ergeben. Um diesen Gedanken zu formalisieren, müssen wir die endliche Additivität erweitern zu

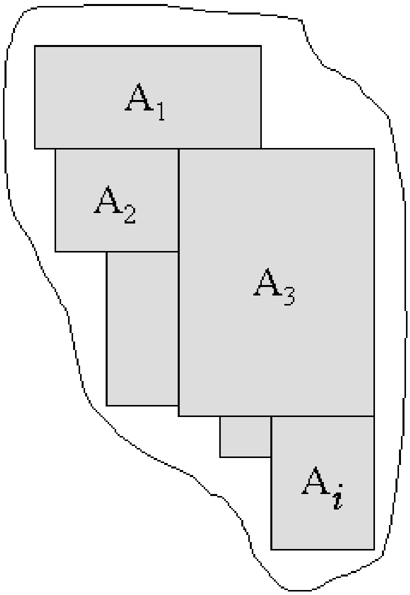

Abbildung 1.2. Approximation durch Rechtecke

einer abzählbaren Additivität, die als σ-Additivität bezeichnet wird. Ersetzen wir im Inhaltsproblem 1.2 die endliche Additivität durch die σ-Additivität, so gelangen wir zu folgender Fragestellung, die als Maßproblem bekannt ist:

Problem 1.5 (Maßproblem). Gesucht ist eine „Maßfunktion“ $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) *σ-Additivität*: Ist $A_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), i \in \mathbb{N}$, eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen, so ist:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(ii) *Bewegungsinvarianz*: Sind $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ kongruent, so ist $\mu(A) = \mu(B)$.

(iii) *Normiertheit*: $\mu([0,1]^n) = 1$.

Aus der Unlösbarkeit des Inhaltsproblems für $n \geq 3$ folgt dasselbe für das Maßproblem, es gilt sogar:

Satz 1.6. *Das Maßproblem 1.5 ist für alle $n \in \mathbb{N}$ unlösbar.*

Beweis. Wir beginnen mit dem eindimensionalen Fall $n = 1$ und führen einen Widerspruchsbeweis. Sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ eine Funktion mit den Eigenschaften (i) - (iii) aus dem Maßproblem. Wir betrachten die Quotientengruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$

und ein Repräsentantensystem R der Nebenklassen, von dem wir ohne Einschränkung $R \subset [0,1]$ annehmen können (Für die Existenz von R benötigen wir das Auswahlaxiom!). Wir erhalten die abzählbare disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + R).$$

Ist $\mu(R) = 0$, so folgt aus der σ-Additivität und der Bewegungsinvarianz:

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(q + R) = 0.$$

Da aus der σ-Additivität $\mu(A) \leq \mu(B)$ für $A \subset B$ folgt, gilt $\mu([0,1]) = 0$ im Widerspruch zu (iii). Ist hingegen $\mu(R) > 0$, so ist mit der Translationsinvarianz von μ

$$\infty = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \mu(q + R) \leq \mu([0,2]) \leq \mu([0,1]) + \mu([1,2]) = 2,$$

so dass wir wiederum einen Widerspruch erhalten. Den Fall $n > 1$ beweist man völlig analog mit Hilfe der Quotientengruppe $\mathbb{R}^n / \mathbb{Q}^n$. □

Unsere naiven Ansätze, den Begriff des Volumens mathematisch zu formalisieren, sind also vorerst gescheitert. Welcher Ausweg bleibt uns, um unser Ziel, einen möglichst treffenden Volumenbegriff zu definieren, zu erreichen? Prinzipiell eröffnen sich drei Möglichkeiten:

(i) Es fällt auf, dass wir im Beweis der Unlösbarkeit des Maßproblems das Auswahlaxiom benötigt haben. In der Tat kann das Banach-Tarski-Paradoxon ohne Auswahlaxiom, nur mit den Axiomen der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre, nicht bewiesen werden (siehe [Wag85]). Daher könnte man das Auswahlaxiom als Axiom der Mengenlehre ablehnen. Aber das Auswahlaxiom sowie die äquivalenten Aussagen des Wohlordnungssatzes und des Zornschen Lemmas besitzen in der Mathematik eine derart bedeutende Stellung, dass eine Ablehnung des Auswahlaxioms nicht in Frage kommt.

(ii) Wir könnten versuchen, Abstriche bei den Forderungen an unsere Volumenfunktion zu machen. Die Forderung der Bewegungsinvarianz und der Additivität sind jedoch so elementar für unsere Vorstellung eines Volumens, dass wir daran festhalten werden. Die Normiertheit dient lediglich dazu, die Nullfunktion, die wir nicht als Volumenfunktion zulassen wollen, auszuschließen. Schreibt man für den Einheitswürfel irgendein anderes Volumen $a > 0$ vor, bleiben die Probleme genauso unlösbar.

(iii) Als letzter Ausweg bleibt uns noch die Einschränkung des Definitionsbereichs. Bisher haben wir Funktionen betrachtet, die auf der ganzen Potenzmenge der gegebenen Grundmenge definiert waren. Wir wollten *jeder* Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ein Volumen zuordnen. Dieses Ziel war zu ehrgeizig. Wir könnten zunächst versuchen, nur bestimmten Teilmengen, die wir besonders gut beschreiben können, ein Maß zuzuordnen. Wir wissen auf Grund der Überlegungen in diesem Abschnitt, dass es uns nicht gelingen wird, ein Maß auf der ganzen Potenzmenge zu finden. Aber wir werden sehen, dass das Mengensystem, auf dem wir ein Maß erhalten, groß genug sein wird, um alle „anschaulichen“ Mengen zu enthalten und um sowohl in der Maß- als auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie vernünftig damit arbeiten zu können.

1.2 Mengensysteme

Wir haben bei der Schilderung des Maßproblems im vorherigen Abschnitt gesehen, dass wir uns zur Definition eines Volumenbegriffes auf bestimmte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ beschränken müssen. Dabei macht es für unsere Begriffsbildung keinen Unterschied, ob wir den $\mathbb{R}^3$, den $\mathbb{R}^n$ oder irgendeine andere Grundmenge betrachten. Daher bezeichnen wir mit

$$\Omega \text{ eine nichtleere Basismenge.}$$

Jede Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ der Potenzmenge von Ω heißt Mengensystem über Ω. Mengensysteme unterscheidet man nach ihrem Verhalten bei elementaren Mengenoperationen. Ist z.B. ein Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ durchschnittsstabil, d.h. gilt

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F},$$

so nennt man $\mathcal{F}$ ein π-System.

σ-Algebren

Das zentrale Mengensystem der Maßtheorie ist die σ-Algebra. Der griechische Buchstabe σ findet in der Maßtheorie immer dort Verwendung, wo eine Eigenschaft für abzählbar viele und nicht nur für endlich viele Elemente gilt:

Definition 1.7 (σ-Algebra). *Ein Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*
(S1) $\Omega \in \mathcal{F}$.
(S2) *Aus* $A \in \mathcal{F}$ *folgt* $A^c := \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$.
(S3) *Aus* $A_i \in \mathcal{F},\ i \in \mathbb{N}$, *folgt* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Beispiel 1.8 (Kleinste und größte σ-Algebra). Zu jeder Grundmenge Ω gibt es eine kleinste σ-Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$ und eine größte σ-Algebra $\mathcal{P}(\Omega)$, die Potenzmenge von Ω. $\Diamond$

Beispiel 1.9. Sei Ω eine überabzählbare Menge und $A \in \mathcal{F}$ genau dann, wenn A oder A^c abzählbar ist. Dann ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra. ◊

Beispiel 1.10 (von A erzeugte σ-Algebra). Ist $A \subset \Omega$, so ist die Menge $\sigma(A) := \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ eine σ-Algebra. Sie heißt die von A erzeugte σ-Algebra und ist die kleinste σ-Algebra, die A enthält. ◊

Erzeugung

Wir wollen das letzte Beispiel verallgemeinern. Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ gegeben, gibt es dann eine kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält? Bevor wir die Antwort geben, zeigen wir folgende Eigenschaft von σ-Algebren:

Satz 1.11. *Sei I eine beliebige nichtleere Menge und $\mathcal{F}_i$ für jedes $i \in I$ eine σ-Algebra über Ω, so ist auch*

$$\mathcal{F} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

eine σ-Algebra über Ω.

Beweis. Ist z.B. $A \in \mathcal{F}$, so gilt $A \in \mathcal{F}_i$ für alle $i \in I$, und da $\mathcal{F}_i$ für jedes $i \in I$ eine σ-Algebra ist, gilt auch $A^c \in \mathcal{F}_i$ für alle $i \in I$. Daraus folgt wiederum $A^c \in \mathcal{F}$, womit wir Eigenschaft (S2) nachgewiesen haben. Die Eigenschaften (S1) und (S3) folgen nach dem gleichen Schema. □

Die Durchschnittsstabilität ermöglicht uns, von erzeugten σ-Algebren zu sprechen und obige Frage zu beantworten.

Definition 1.12 (Erzeugung, Erzeuger). *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem und Σ die Menge aller σ-Algebren über Ω, die $\mathcal{E}$ enthalten. Dann wird die σ-Algebra*

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{F} \in \Sigma} \mathcal{F}$$

als die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ bezeichnet. Gilt umgekehrt für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$

$$\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A},$$

so heißt $\mathcal{E}$ Erzeuger von $\mathcal{A}$.

Ist $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}' \subset \mathcal{A}$, so ist auch $\mathcal{E}'$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}$. Insbesondere erzeugt sich jede σ-Algebra selbst.

Die Borelschen Mengen

Für unsere Zwecke ist das wichtigste Beispiel einer σ-Algebra die σ-Algebra der Borelschen Mengen über dem $\mathbb{R}^n$:

Definition 1.13 (Borelsche σ-Algebra). *Sei Ω ein topologischer Raum und $\mathcal{O}$ das System der offenen Teilmengen von Ω. Dann heißt*

$$\mathcal{B}(\Omega) := \sigma(\mathcal{O})$$

die Borelsche σ-Algebra über Ω, ihre Elemente $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ heißen Borelsche Mengen. Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ setzen wir $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, im Fall $n = 1$ ist $\mathcal{B} := \mathcal{B}^1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Es ist oft nützlich, weitere Erzeuger für die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ über dem $\mathbb{R}^n$ zu kennen. Dazu führen wir für zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ die folgende Schreibweise für ein Intervall im $\mathbb{R}^n$ ein:

$$[a, b] := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

Entsprechend sind $]a, b]$, $[a, b[$ und $]a, b[$ erklärt.

Satz 1.14. *Jedes der folgenden Mengensysteme ist ein Erzeuger der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}^n$:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^n &:= \{U \subset \mathbb{R}^n : U \textit{ offen}\}, \\
\mathcal{C}^n &:= \{A \subset \mathbb{R}^n : A \textit{ abgeschlossen}\}, \\
\mathcal{I}^n &:= \{]a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \leq b\}, \\
\mathcal{I}^n_\infty &:= \{]-\infty, c] : c \in \mathbb{R}^n\},
\end{aligned}$$

wobei $]-\infty, c] :=]-\infty, c_1] \times \ldots \times]-\infty, c_n] \subset \mathbb{R}^n$ für $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ ist.

Beweis. Nach Definition gilt $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{O}^n)$. Da die abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ gerade die Komplemente der offenen Teilmengen sind, folgt $\sigma(\mathcal{C}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n) = \mathcal{B}^n$. Jedes halboffene Intervall $]a, b]$ lässt sich als abzählbarer Durchschnitt offener Intervalle darstellen:

$$]a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]a, b + \frac{1}{n}\right[\ \in \sigma(\mathcal{O}^n).$$

Daher ist $\mathcal{I}^n \subset \sigma(\mathcal{O}^n)$ und damit $\sigma(\mathcal{I}^n) \subset \mathcal{B}^n$. Umgekehrt gilt für jedes offene Intervall

$$]a, b[= \bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q} \\ a \leq r \leq s < b}}]r, s] \ \in \sigma(\mathcal{I}^n),$$

und jede offene Menge $U \in \mathcal{O}^n$ ist als abzählbare Vereinigung offener Intervalle darstellbar:

$$U = \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ ]a,b[\subset U}}]a,b[\; .$$

Insgesamt folgt $\mathcal{O}^n \subset \sigma(\mathcal{I}^n)$, also $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{I}^n)$. Schließlich ist $\mathcal{I}^n_\infty \subset \mathcal{C}^n$, also $\sigma(\mathcal{I}^n_\infty) \subset \mathcal{B}^n$. Andererseits gilt für jedes $]a,b] \in \mathcal{I}^n$

$$]a,b] =]-\infty, b] \setminus \,]-\infty, a] \in \sigma(\mathcal{I}^n_\infty),$$

und damit $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{I}^n) \subset \sigma(\mathcal{I}^n_\infty)$. □

Produkt-σ-Algebra

Alternativ hätten wir $\mathcal{B}^n$ auch als n-faches Produkt der σ-Algebra $\mathcal{B}$ definieren können. Um dies zu zeigen, sei etwas allgemeiner für eine nichtleere Indexmenge I

$$\mathcal{F}_i \text{ eine } \sigma\text{-Algebra über } \Omega_i, \; i \in I.$$

Wir betrachten die Projektionen des kartesischen Produkts $\Omega := \prod_{i \in I} \Omega_i$:

$$p_j : \prod_{i \in I} \Omega_i \longrightarrow \Omega_j, \quad (\omega_i)_{i \in I} \mapsto \omega_j, \quad j \in I.$$

Die Urbilder

$$p_j^{-1}(A), \; A \in \mathcal{F}_j, \; j \in I, \text{ heißen Zylindermengen.}$$

Für endliches $I = \{1, \dots, n\}$ haben die Zylindermengen die Darstellung

$$p_j^{-1}(A) = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1} \times A \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_n,$$

die ihren Namen erklärt. Sind die $\Omega_i, \; i \in I$, topologische Räume, so ist die Produkttopologie auf Ω bekanntlich die gröbste Topologie auf Ω, für die alle Projektionen $p_j, \; j \in I$, stetig sind. Analog definiert man die Produkt-σ-Algebra:

Definition 1.15 (Produkt-σ-Algebra). *Sei $\mathcal{F}_i$ eine σ-Algebra über Ω_i, $i \in I \neq \emptyset$, und $p_j : \prod_{i \in I} \Omega_i \longrightarrow \Omega_j$ die Projektion auf die j-te Komponente, $j \in I$. Dann heißt*

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i := \sigma(\{p_j^{-1}(A_j) : A_j \in \mathcal{F}_j, \; j \in I\})$$

Produkt-σ-Algebra über $\Omega := \prod_{i \in I} \Omega_i$. Ist $(\Omega, \mathcal{F}) = (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ für alle $i \in I$, so verwenden wir die Notation $\mathcal{F}^{\otimes I} := \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

Die Produkt-σ-Algebra auf Ω wird also von den Zylindermengen erzeugt. Bezeichnen wir mit $\mathcal{O}$ die offenen Mengen in der Produkttopologie von Ω, so können wir alternativ die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{O})$ über Ω betrachten. Das Verhältnis dieser beiden σ-Algebren über Ω beschreibt der folgende Satz. Wir erinnern daran, dass ein topologischer Raum Ω_i eine abzählbare Basis besitzt, wenn es eine abzählbare Menge $\mathcal{U}_i$ offener Teilmengen gibt, so dass jede offene Menge als abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{U}_i$ dargestellt werden kann.

Satz 1.16. *Sei $(\Omega, \mathcal{O})$ das topologische Produkt der topologischen Räume $(\Omega_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$. Dann gilt:*

(i) $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(\Omega_i) \subset \mathcal{B}(\Omega)$.

(ii) *Ist $I = \mathbb{N}$ abzählbar und hat jedes Ω_i eine abzählbare Basis $\mathcal{U}_i$, $i \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

$$\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}(\Omega_i) = \mathcal{B}(\Omega).$$

Beweis. (i) Da die Projektionen $p_j : \Omega \longrightarrow \Omega_j$, $j \in I$, nach Definition der Produkttopologie stetig sind, gilt $p_j^{-1}(A_j) \in \mathcal{B}(\Omega)$ für alle offenen Mengen $A_j \in \mathcal{B}(\Omega_j)$, $j \in I$. Dann gilt aber sogar $p_j^{-1}(A_j) \in \mathcal{B}(\Omega)$ für alle $A_j \in \mathcal{B}(\Omega_j)$, $j \in I$. Diese Eigenschaft, die so genannte Messbarkeit der Projektionen p_j, werden wir in Kürze für alle stetigen Abbildungen zeigen, siehe Beispiel 1.25. Daraus folgt sofort $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(\Omega_i) \subset \mathcal{B}(\Omega)$.

(ii) Das Mengensystem

$$\mathcal{U} := \{p_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \ldots \cap p_{j_n}^{-1}(U_{j_n}) : n \in \mathbb{N},\ U_{j_k} \in \mathcal{U}_{j_k},\ j_k \in I,\ k = 1, \ldots, n\}$$

bildet eine abzählbare Basis von Ω. Daher ist $\mathcal{U} \subset \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}(\Omega_i)$ und jede offene Menge von Ω abzählbare Vereinigung von Mengen in $\mathcal{U}$. Insgesamt folgt $\mathcal{B}(\Omega) \subset \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}(\Omega_i)$ und mit Teil (i) die Behauptung.

Da $\mathbb{R}$ eine abzählbare Basis besitzt (z.B. die Menge der offenen Intervalle mit rationalen Randpunkten), erhalten wir unmittelbar als Korollar:

Korollar 1.17. *Auf dem $\mathbb{R}^n$ stimmen die σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ und die n-fache Produkt-σ-Algebra von $\mathcal{B}$ überein:*

$$\mathcal{B}^n = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}.$$

Borelschen Mengen auf $\bar{\mathbb{R}}$

In der Maßtheorie ist es hilfreich, den Wert „$+\infty$“ als Funktionswert, z.B. für die Länge einer Halbgeraden, zuzulassen. Um dies zu ermöglichen, erweitern wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ um die zwei Symbole „$+\infty$“ und „$-\infty$“: $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. „$+\infty$“ und „$-\infty$“ sind *keine* reellen Zahlen, es werden jedoch folgende Regeln vereinbart: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $-\infty < a < +\infty$,
(ii) $a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty, \quad (\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty$,
(iii) $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & \text{für } a > 0, \\ 0, & \text{für } a = 0, \\ \mp\infty, & \text{für } a < 0, \end{cases}$
(iv) $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty, \quad (\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0.$

Die Terme

$$(\pm\infty) - (\pm\infty),\ (\pm\infty) + (\mp\infty),\ \frac{\pm\infty}{+\infty} \text{ und } \frac{\pm\infty}{-\infty} \text{ sind } \textit{nicht} \text{ definiert.}$$

Somit ist $\bar{\mathbb{R}}$ kein Körper. Die Bedeutung der Konvention

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$$

wird in der Integrationstheorie deutlich. Vorsicht ist allerdings bei den Grenzwertsätzen geboten:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) \neq (+\infty) \cdot 0 = 0.$$

Wir schreiben einfacher ∞ für $+\infty$. Die σ-Algebra $\bar{\mathcal{B}}$ über $\bar{\mathbb{R}}$ ist durch

$$\bar{\mathcal{B}} := \sigma(\mathcal{B} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\})$$

definiert. Alternativ erhalten wir aus dieser Definition die Darstellung

$$\bar{\mathcal{B}} = \{A \cup B : A \in \mathcal{B}, B \subset \{\infty, -\infty\}\}.$$

Die σ-Algebra $\bar{\mathcal{B}}$ heißt Borelsche σ-Algebra über $\bar{\mathbb{R}}$, ihre Elemente $A \in \bar{\mathcal{B}}$ heißen Borelsche Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$. Da $\mathcal{I} = \{]-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}$ ist, folgt, dass

$$\bar{\mathcal{I}} := \{[-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\} \text{ ein Erzeuger von } \bar{\mathcal{B}} \text{ ist.} \tag{1.1}$$

Das π-λ-Lemma

Ein Beweisprinzip in der Maßtheorie besteht darin, dass man eine Eigenschaft für ein Mengensystem $\mathcal{E}$ nachweisen kann (oder voraussetzt) und diese dann auf $\sigma(\mathcal{E})$ „hochzieht“. Ein häufiges Hilfsmittel für solche Argumente ist das folgende π-λ-Lemma.Wir erinnern daran, dass ein π-System ein durchschnittsstabiles Mengensystem ist. Ein λ-System haben wir noch nicht definiert:

Definition 1.18 (λ-System). *Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt λ-System über Ω, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*
(L1) $\Omega \in \mathcal{D}$.
(L2) *Aus $A, B \in \mathcal{D}$ und $A \subset B$ folgt $B \backslash A \in \mathcal{D}$.*
(L3) *Aus $A_i \in \mathcal{D}$, $i \in \mathbb{N}$, $A_i \uparrow A$, folgt $A \in \mathcal{D}$.*

Zur Vorbereitung des nachfolgenden Theorems zeigen wir:

Lemma 1.19. *Ist $\mathcal{D}$ ein durchschnittsstabiles λ-System, so ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra.*

Beweis. Die Stabilität gegenüber Komplementbildung folgt aus (L1) und (L2). Es bleibt die Abgeschlossenheit gegenüber abzählbaren Vereinigungen zu zeigen. Sind $A, B \in \mathcal{D}$, so auch $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{D}$, da nach Voraussetzung $\mathcal{D}$ durchschnittsstabil ist. Ist $A_i \in \mathcal{D}, i \in \mathbb{N}$, so ist nach dem gerade gezeigten $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{D}$, und es gilt $B_n \uparrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Aus (L3) folgt, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$. □

Theorem 1.20 (π-λ-Lemma). *Sei $\mathcal{E}$ ein π-System und $\mathcal{D}$ ein λ-System mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$. Dann gilt:*

$$\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}.$$

Beweis. Da der Durchschnitt von zwei λ-Systemen wieder ein λ-System ist, können wir ganz analog zu σ-Algebren auch von erzeugten λ-Systemen sprechen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir daher an, dass $\mathcal{D} = \lambda(\mathcal{E})$ gilt, wobei wir mit $\lambda(\mathcal{E})$ das von $\mathcal{E}$ erzeugte λ-System bezeichnen. Es genügt zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ durchschnittsstabil ist. Dann ist $\mathcal{D}$ nach Lemma 1.19 eine σ-Algebra, die nach Voraussetzung $\mathcal{E}$ und somit auch $\sigma(\mathcal{E})$ enthält.

Um die Durchschnittsstabilität von $\mathcal{D}$ zu zeigen, gehen wir in zwei Schritten vor. Setzen wir

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{D} : A \cap B \in \mathcal{D} \text{ für alle } B \in \mathcal{E}\},$$

so gilt, da $\mathcal{E}$ ein π-System ist, $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_1$. Da $\mathcal{D}$ schon ein λ-System ist, prüft man leicht nach, dass auch $\mathcal{D}_1$ ein λ-System ist. Damit gilt $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} = \lambda(\mathcal{E})$. Im zweiten Schritt setzen wir

$$\mathcal{D}_2 := \{A \in \mathcal{D} : A \cap B \in \mathcal{D} \text{ für alle } B \in \mathcal{D}\}.$$

Aus $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$ folgt $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_2$. Da $\mathcal{D}_2$ wiederum ein λ-System ist, folgt diesmal $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$ und damit die Behauptung. □

Induzierte σ-Algebra und Spur-σ-Algebra

Ist $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung, so ist das Bild einer Menge $A \subset \Omega_1$

$$f(A) := \{f(\omega) \in \Omega_2 : \omega \in A\}$$

und das Urbild einer Menge $B \subset \Omega_2$

$$f^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega_1 : f(\omega) \in B\}.$$

Die Urbildfunktion f^{-1} auf $\mathcal{P}(\Omega_2)$ ist operationstreu, d.h. für beliebige $B, B_i \subset \Omega_2, i \in I$, gilt:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \tag{1.2}$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i), \tag{1.3}$$

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c. \tag{1.4}$$

Für ein Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ schreiben wir kurz

$$f^{-1}(\mathcal{F}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}.$$

Das Urbild erhält die Struktur einer σ-Algebra, und zwar in beide Richtungen:

Satz 1.21. *Sei $\mathcal{F}_1$ eine σ-Algebra über Ω_1 und $\mathcal{F}_2$ eine σ-Algebra über Ω_2. Ist $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung, so ist $f^{-1}(\mathcal{F}_2)$ eine σ-Algebra über Ω_1 und $\{B \subset \Omega_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1\}$ eine σ-Algebra über Ω_2.*

Beweis. Die nachzuweisenden Eigenschaften (S1) bis (S3) aus Definition 1.7 folgen unmittelbar aus der Operationstreue von f^{-1}. Ein Beispiel: Ist $A \in f^{-1}(\mathcal{F}_2)$, so ist $A = f^{-1}(B), B \in \mathcal{F}_2$. Daraus folgt $B^c \in \mathcal{F}_2$ und $A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\mathcal{F}_2)$. □

Beispiel 1.22 (Spur-σ-Algebra). Ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra über Ω und $A \subset \Omega$, so können wir obigen Satz auf die Inklusion $i : A \to \Omega, a \mapsto a$, anwenden. Die σ-Algebra $i^{-1}(\mathcal{F}) = \{A \cap B : B \in \mathcal{F}\}$ heißt Spur-σ-Algebra von A und wird mit $\mathcal{F}|A$ bezeichnet. ◊

1.3 Messbare Abbildungen

Messräume und Messbarkeit

Ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra über Ω, so heißt das Tupel

$$(\Omega, \mathcal{F}) \text{ Messraum.}$$

Typische Messräume sind $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ oder $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$. Wie sehen Abbildungen zwischen Messräumen aus? Wie in anderen Teilgebieten der Mathematik sollen die Abbildungen die gegebene Struktur erhalten. So betrachtet man z.B. in der Topologie stetige Abbildungen, bei denen definitionsgemäß das Urbild einer offenen Menge offen ist. Ganz analog geht man auch bei Messräumen vor:

Definition 1.23 (messbare Abbildung). *Seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ zwei Messräume. Eine Abbildung $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt $\mathcal{F}_1$-$\mathcal{F}_2$-messbar, falls*

$$f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1.$$

In der Regel verstehen sich bei einer messbaren Abbildung $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ die zugehörigen σ-Algebren von selbst, so dass wir einfach von messbaren Abbildungen statt z.B. von $\mathcal{F}_1$-$\mathcal{F}_2$-Messbarkeit sprechen. Insbesondere für reellwertige Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bzw. $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ bezieht sich die Messbarkeit stets auf die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}$ bzw. $\bar{\mathcal{B}}$. Der folgende Satz zeigt, dass es zur Überprüfung der Messbarkeit genügt, sich auf ein Erzeugendensystem zu beschränken.

Satz 1.24. *Seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ zwei Messräume, wobei $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{E})$ von einem Mengensystem $\mathcal{E}$ erzeugt ist. Die Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ ist genau dann $\mathcal{F}_1$-$\mathcal{F}_2$-messbar, wenn*

$$f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}_1.$$

Beweis. Aus Satz 1.21 wissen wir, dass

$$\{B \subset \Omega_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1\}$$

eine σ-Algebra ist. Nach Voraussetzung enthält sie $\mathcal{E}$ und damit auch $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{E})$. □

Ist $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum, so ist z.B. eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann messbar, wenn $f^{-1}(]-\infty, c]) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \le c\} \in \mathcal{F}$ für alle $c \in \mathbb{R}$, denn nach Satz 1.14 bilden diese Intervalle ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}$. Weitere Beispiele sind:

Beispiel 1.25 (Stetige Abbildungen). Ist $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, so ist f ($\mathcal{B}(\Omega_1)$-$\mathcal{B}(\Omega_2)$-)messbar. Denn nach Definition der Stetigkeit sind Urbilder offener Mengen offen, und die offenen Mengen sind ein Erzeuger der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\Omega_2)$. ◊

Beispiel 1.26 (Indikatorfunktion). Die Indikatorfunktion einer Teilmenge $A \subset \Omega$ ist definiert als

$$I_A: \ \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto I_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie zeigt an, ob ω Element der Menge A ist oder nicht. Alle möglichen Urbilder von I_A sind $\emptyset, A, A^c, \Omega$. Diese sind genau dann in $\mathcal{F}$ enthalten, wenn $A \in \mathcal{F}$ gilt. Also ist die Indikatorfunktion I_A genau dann messbar, wenn $A \in \mathcal{F}$. Deshalb spricht man auch von einer messbaren Menge A, wenn $A \in \mathcal{F}$ ist. $\Diamond$

Die Abgeschlossenheit der Messbarkeit

Elementare Operationen, z.B. die Addition zweier messbarer Funktionen, sollen uns nicht aus der Klasse der messbaren Funktionen herausführen. Am einfachsten folgt dies für die Komposition:

Satz 1.27. *Sind $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ und $(\Omega_3, \mathcal{F}_3)$ Messräume und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ sowie $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ messbar, so auch $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1$ und $g^{-1}(\mathcal{F}_3) \subset \mathcal{F}_2$, damit folgt $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{F}_3) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{F}_3)) \subset \mathcal{F}_1$. $\square$

Genau wie bei der Stetigkeit (und im Prinzip aus dem gleichen Grund) folgt die Messbarkeit einer Funktion in den $\mathbb{R}^n$ aus der Messbarkeit ihrer Koordinatenfunktionen:

Satz 1.28. *Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum und $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Dann ist f genau dann $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}^n$-messbar, wenn*

$$f_i : \Omega \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mathcal{F}\text{-}\mathcal{B}\text{-}\textit{messbar sind.}$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, die Projektion auf die i-te Komponente. Diese sind nach Definition der Produkt-σ-Algebra (und Korollar 1.17) $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}$-messbar. Ist f messbar, so folgt nach Satz 1.27, dass $f_i = p_i \circ f$, $i = 1, \dots, n$, messbar ist. Für die Umkehrung sei $Z = p_i^{-1}(A),\ A \in \mathcal{B}$, eine Zylindermenge. Da die Zylindermengen $\mathcal{B}^n$ erzeugen, genügt es nach Satz 1.24, $f^{-1}(Z) \in \mathcal{F}$ nachzuweisen. Nun gilt aber auf Grund der Messbarkeit der f_i:

$$f^{-1}(Z) = f^{-1}(p_i^{-1}(A)) = (p_i \circ f)^{-1}(A) = f_i^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

$\square$

Mit den letzten beiden Sätzen können wir die Messbarkeit der elementaren arithmetischen Operationen zeigen:

Satz 1.29. *Es seien $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) *$\alpha f + \beta g$ ist messbar.*
(ii) *$f \cdot g$ ist messbar.*
(iii) *$\frac{f}{g}$ ist messbar, falls $g(\omega) \neq 0$ für alle $\omega \in \Omega$.*

Beweis. Aus der Messbarkeit von f und g folgt nach Satz 1.28 die Messbarkeit von

$$\begin{aligned}\Psi : \Omega &\to \mathbb{R}^2,\\ \omega &\mapsto (f(\omega), g(\omega)).\end{aligned}$$

Definieren wir

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R},\\ (x,y) &\mapsto \alpha x + \beta y,\end{aligned}$$

so ist Φ stetig und damit messbar. Daraus folgt mit Satz 1.27 die Messbarkeit von $\Phi \circ \Psi = \alpha f + \beta g$. Die übrigen Aussagen ergeben sich analog mit den Funktionen $\Phi(x,y) = xy$ bzw. $\Phi(x,y) = \frac{x}{y}$ auf $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$. □

Zur Unterscheidung von reellwertigen Funktionen heißt eine Funktion mit Wertebereich $\bar{\mathbb{R}}$

$$f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} \text{ numerische Funktion.}$$

Ist $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum, so heißt eine numerische Funktion messbar, falls sie $\mathcal{F}$-$\bar{\mathcal{B}}$-messbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq c\} \in \mathcal{F} \text{ für alle } c \in \mathbb{R},$$

da $\bar{\mathcal{I}} = \{[-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeuger von $\bar{\mathcal{B}}$ ist, vgl. (1.1). Mengen der Gestalt $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq c\}$ werden in Zukunft sehr oft vorkommen. Wir verwenden daher die intuitive Schreibweise

$$\begin{aligned}\{f \leq c\} &:= \{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq c\},\\ \{f = c\} &:= \{\omega \in \Omega : f(\omega) = c\},\\ \{f > c\} &:= \{\omega \in \Omega : f(\omega) > c\} \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Satz 1.30. *Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer, numerischer Funktionen $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann sind*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \ \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \ \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \ \textit{und} \ \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \ \textit{messbar.}$$

Beweis. Die Funktion $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ist messbar, da für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq c\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq c\} \in \mathcal{F}.$$

Die Messbarkeit von $\inf_n f_n$ folgt nun unmittelbar aus der Gleichung $\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$. Damit ergibt sich die Messbarkeit der übrigen beiden Funktionen aus der Darstellung:

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} f_k\right), \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} f_k\right).$$

□

Für jede numerische Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ sind der

$$\text{Positivteil } f^+ := f \vee 0$$

und der

$$\text{Negativteil } f^- := (-f) \vee 0 \quad (\geq 0)$$

erklärt. Aus der Definition folgt sofort:

$$f = f^+ - f^- \text{ und } |f| = f^+ + f^-.$$

Satz 1.31. *Ist $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum und $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine messbare numerische Funktion, so sind auch $|f|, f^+$ und f^- messbar.*

Beweis. Betrachten wir die Funktionenfolge $(f_n) = (0, f, f, f, \ldots)$, so ist nach Satz 1.30 die Funktion $\sup_n f_n = 0 \vee f = f^+$ und analog mit der Folge $(0, -f, -f, -f, \ldots)$ auch f^- messbar. Nach Satz 1.29 ist damit auch $|f| = f^+ + f^-$ messbar. □

1.4 Maße

Maße und Maßräume

In diesem Abschnitt betrachten wir spezielle Funktionen auf Mengensystemen.

Definition 1.32 ((σ-endliches) Maß). *Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum. Eine Funktion $\mu : \mathcal{F} \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt Maß auf $\mathcal{F}$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*
(M1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(M2) $\mu(A) \geq 0$ *für alle* $A \in \mathcal{F}$,
(M3) *für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunkter Mengen aus $\mathcal{F}$ gilt:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-}\mathit{Additivität}).$$

Gibt es eine Folge (A_n) von Mengen aus $\mathcal{F}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt μ σ-endlich.

Ist $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum und $\mu : \mathcal{F} \to \bar{\mathbb{R}}$ ein Maß, so heißt das Tripel

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \text{ Maßraum.}$$

Beispiel 1.33 (Dirac-Maß). Das einfachste Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ über Ω ist für ein fest gewähltes $\omega \in \Omega$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta_\omega &: \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \\ A &\mapsto \delta_\omega(A) := I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in A, \\ 0 & \text{für } \omega \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

$\Diamond$

Beispiel 1.34 (Zählmaß). Ist A eine Menge, so bezeichnen wir mit $|A|$ die Mächtigkeit von A, für endliches A ist $|A|$ demnach die Anzahl der Elemente. Damit können wir auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ über Ω folgende Funktion definieren:

$$\begin{aligned} \mu_Z &: \mathcal{F} \to \bar{\mathbb{R}}, \\ A &\mapsto \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ \infty & \text{sonst}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dadurch wird $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_Z)$ ein Maßraum. μ_Z heißt Zählmaß. $\Diamond$

Beispiel 1.35. Ist Ω überabzählbar und $A \in \mathcal{F}$ genau dann, wenn A oder A^c abzählbar ist (vgl. Beispiel 1.9), so definieren wir:

$$\begin{aligned} \mu &: \mathcal{F} \to \bar{\mathbb{R}}, \\ A &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar}, \\ 1 & \text{sonst}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist μ ein Maß und $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. $\Diamond$

Elementare Eigenschaften von Maßen

Aus der Eigenschaft (M3) eines Maßes, der so genannten σ-Additivität, ergeben sich unmittelbar weitere Eigenschaften, die wir in einem Satz zusammenfassen:

Satz 1.36. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B, A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(i) endliche Additivität: *Sind A und B disjunkt, so gilt:*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(ii) Subtraktivität: *Ist $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$, so gilt: $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.*
(iii) Monotonie: *Ist $A \subset B$, so gilt: $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
(iv) Sub-σ-Additivität:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Beweis. Betrachtet man die Folge $A, B, \emptyset, \emptyset, \ldots$, so folgt aus der σ-Additivität die endliche Additivität. Ist $A \subset B$, so ist $A \cup (B \backslash A) = B$ eine disjunkte Vereinigung und aus der Additivität sowie der Nichtnegativität von μ folgt

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A),$$

womit die Monotonie und für den Fall $\mu(A) < \infty$ die Subtraktivität gezeigt ist. Schließlich ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right),$$

wobei auf der rechten Seite eine disjunkte Vereinigung steht. Daher gilt wegen σ-Additivität und Monotonie

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

□

Folgende Form der Stetigkeit gilt für jedes Maß:

Satz 1.37. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $A, A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(i) Stetigkeit von unten: *Aus $A_n \uparrow A$ folgt $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.*
(ii) Stetigkeit von oben: *Aus $A_n \downarrow A$ und $\mu(A_1) < \infty$ folgt $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.*

Beweis. Wir setzen $A_0 := \emptyset$. Aus $A_n \uparrow A$ folgt, dass $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \backslash A_{n-1}$ eine disjunkte Vereinigung ist. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \backslash A_{k-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \backslash A_{k-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

Damit ist die Stetigkeit von unten gezeigt. Für die Stetigkeit von oben bemerken wir zunächst, dass aus $A \subset A_n \subset A_1$ auch $\mu(A) < \infty$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Aus $A_n \downarrow A$ erhalten wir $A_1 \backslash A_n \uparrow A_1 \backslash A$, so dass aus der Stetigkeit von unten und der Subtraktivität folgt:

$$\mu(A_1) - \mu(A_n) = \mu(A_1 \backslash A_n) \uparrow \mu(A_1 \backslash A) = \mu(A_1) - \mu(A),$$

woraus sich

$$\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$$

ergibt. □

Eindeutigkeit von Maßen

Ein endliches Maß, das wir auf einem durchschnittsstabilen Erzeuger angeben, ist dadurch schon eindeutig festgelegt. Der Beweis dieses oft nützlichen Resultats ist eine klassische Anwendung des π-λ-Lemmas 1.20. Wir zeigen eine etwas allgemeinere Aussage für σ-endliche Maße.

Theorem 1.38 (Maßeindeutigkeitssatz). *Es seien μ und ν zwei Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$ und $\mathcal{E}$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathcal{F}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\mu(E) = \nu(E)$ *für alle* $E \in \mathcal{E}$.
(ii) *Es gibt eine Folge* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *disjunkter Mengen aus* $\mathcal{E}$ *mit*

$$\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty \quad \textit{und} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega.$$

Dann folgt $\mu = \nu$.

Beweis. Wir betrachten zu jedem E_n, $n \in \mathbb{N}$, das Mengensystem

$$\mathcal{D}(E_n) := \{A \subset \mathcal{F} : \mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n)\}.$$

Da μ und ν Maße sind und $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$, ist $\mathcal{D}(E_n)$ ein λ-System mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}(E_n)$. Da $\mathcal{E}$ durchschnittsstabil ist, folgt nach dem π-λ-Lemma 1.20

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(E_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

d.h.

$$\mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n) \text{ für alle } A \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}.$$

Nun ist $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap E_i)$ für jedes $A \in \mathcal{F}$ eine disjunkte Zerlegung von A, so dass aus der σ-Additivität von μ und ν die Behauptung folgt. □

Wir werden dieses Theorem typischerweise auf endliche Maße μ und ν, also $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) < \infty$ anwenden. Dann folgt nach obigem Theorem $\mu = \nu$ bereits, wenn μ und ν auf einem durchschnittsstabilen Erzeuger übereinstimmen.

Vervollständigung

Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{F}$ mit

$$\mu(A) = 0, \text{ so heißt } A \text{ } (\mu\text{-})\text{Nullmenge}.$$

Es ist nahe liegend, einer Teilmenge $B \subset A$ einer μ-Nullmenge ebenfalls das Maß 0 zuzuordnen. Allerdings muss man vorher sicherstellen, dass auch B zu $\mathcal{F}$ gehört:

Definition 1.39 (vollständiges Maß, Vervollständigung). *Es sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *ein Maßraum. Ein Maß* μ *heißt vollständig, wenn gilt:*

$$\textit{Ist } A \in \mathcal{F}, \mu(A) = 0 \textit{ und } B \subset A, \textit{ so folgt } B \in \mathcal{F}.$$

Die σ*-Algebra* $\mathcal{F}_0 := \{A \cup N : A \in \mathcal{F},\ N \text{ Teilmenge einer } \mu\text{-Nullmenge}\}$ *heißt Vervollständigung von* $\mathcal{F}$.

Man überlegt sich leicht die Wohldefiniertheit und Eindeutigkeit der Fortsetzung des Maßes μ auf die Vervollständigung $\mathcal{F}_0$, die gegeben ist durch

$$\mu_0(A \cup N) := \mu(A),\ A \cup N \in \mathcal{F}_0.$$

So entsteht ein neuer Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mu_0)$ mit einem vollständigen Maß μ_0.

Das Lebesgue-Maß

Wir haben bei der Formulierung des Maßproblems 1.5 gefordert, dass dem Einheitswürfel das Maß 1, also sein Volumen, zugeordnet wird. Allgemeiner wird man einem n-dimensionalen Intervall $]a, b] =]a_1, b_1] \times \ldots \times]a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ das Volumen

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

zuordnen. Das so genannte Lebesgue-Maß, dessen Existenz als eines der Hauptresultate der klassischen Maßtheorie angesehen werden kann, erfüllt diese Anforderung.

Theorem 1.40 (Existenz und Eindeutigkeit des Lebesgue-Maßes). *In jeder Dimension* $n \in \mathbb{N}$ *gibt es genau ein Maß*

$$\lambda^n : \mathcal{B}^n \to [0, \infty],$$

so dass für jedes n*-dimensionale Intervall* $]a, b] =]a_1, b_1] \times \ldots \times]a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ *gilt:*

$$\lambda^n(]a, b]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

λ^n *heißt (*n*-dimensionales) Lebesgue-Maß. Weiterhin gibt es zu jeder rechtsseitig stetigen, monoton wachsenden Funktion* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *genau ein Maß* $\lambda_F : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}$ *, so dass für alle* $]a, b] \subset \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\lambda_F(]a, b]) = F(b) - F(a).$$

λ_F *heißt Lebesgue-Stieltjes-Maß von* F.

Beweis. Den umfangreichen Beweis dieses Satzes führen wir in Anhang A, Abschnitt A.1. □

Für das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ schreiben wir $\lambda := \lambda^1$. Ist $x \in \mathbb{R}$ ein Punkt, so gilt mit der Stetigkeit von oben $\lambda(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(]x - \frac{1}{n}, x]) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Auf Grund der σ-Additivität folgt damit:

$$\lambda(A) = 0 \text{ für jede abzählbare Teilmenge } A \subset \mathbb{R}, \text{ z.B. } \lambda(\mathbb{Q}) = 0. \tag{1.5}$$

Das Lebesgue-Maß ist kein endliches Maß, denn aus der Monotonie folgt $\lambda(\mathbb{R}) \geq \lambda(]0, n]) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit

$$\lambda(\mathbb{R}) = \infty. \tag{1.6}$$

Das Lebesgue-Maß λ erfüllt eine weitere Forderung aus dem Maßproblem 1.5, die Bewegungsinvarianz:

Satz 1.41. *Das Lebesgue-Maß λ^n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ist bewegungsinvariant:*

$$\lambda^n(A) = \lambda^n(B), \text{ falls } A, B \in \mathcal{B}^n, A, B \text{ kongruent.}$$

Beweis. Siehe Anhang A, Satz A.10. □

Zusammenfassend können wir sagen, dass das Lebesgue-Maß „fast“ die Lösung des Maßproblems 1.5 ist. Wir müssen nur den kleineren Definitionsbereich $\mathcal{B}^n$ statt der ganzen Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ in Kauf nehmen. Diese Einschränkung ist jedoch nicht tragisch, da die Borel-Mengen alle für die Praxis relevanten Teilmengen enthalten.

Das Bildmaß

Abschließend stellen wir eine Möglichkeit vor, aus einem Maß mittels einer messbaren Abbildung ein neues Maß zu gewinnen. Dazu betrachten wir einen Maßraum $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu)$ sowie einen Messraum $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ und eine messbare Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Ist $B \in \mathcal{F}_2$, so ist nach Definition der Messbarkeit $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$, und wir können

$$\mu(f^{-1}(B))$$

bestimmen. Führen wir dies für jedes $B \in \mathcal{F}_2$ durch, erhalten wir ein Maß auf Ω_2:

Definition 1.42 (Bildmaß). *Ist $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ ein Messraum und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ messbar, so heißt*

$$\begin{aligned} \mu_f : \mathcal{F}_2 &\to [0, \infty], \\ B &\mapsto \mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

Bildmaß μ_f von μ unter f.

Aus der Operationstreue der Urbildfunktion folgt unmittelbar, dass das Bildmaß tatsächlich ein Maß ist. Entscheidend ist die Messbarkeit der Abbildung f, die sicherstellt, dass die Urbilder in der σ-Algebra $\mathcal{F}_1$ liegen. Durch eine messbare Abbildung kann folglich ein Maß vom Definitionsbereich auf den Wertebereich transportiert werden.

Beispiel 1.43. Betrachten wir $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so erhalten wir durch die stetige und daher messbare Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x + a, \end{aligned}$$

ein Bildmaß λ_f auf $\mathbb{R}$. Für eine Menge $A \in \mathcal{B}$ ist $f^{-1}(A) = A - a$, und daher

$$\lambda_f(A) = \lambda(f^{-1}(A)) = \lambda(A - a) = \lambda(A), \;\; A \in \mathcal{B},$$

da das Lebesgue-Maß nach Satz 1.41 bewegungsinvariant ist. $\Diamond$

http://www.springer.com/978-3-540-21676-6

Stochastik
Theorie und Anwendungen
Meintrup, D.; Schäffler, S.
2005, XIV, 610 S., Softcover
ISBN: 978-3-540-21676-6