

1 Motivation

2 Inhalte, Prämaße, Elementarintegrale

Präring

Inhalt

Prämaß

Maßerzeugende Funktion

Verteilungsfunktion

$\mathcal{R}(\mathcal{S})$

Ring

Nicht-negative elementare Funktionen $\varepsilon^+(\mathcal{S})$

Elementarintegrale

I_μ

Satz: Fortsetzung eines Inhalts

Satz: Charakterisierung von Prämaßen oder Beppo Levi für das Elementarintegral

3 Maßräume und Wahrscheinlichkeitsräume

σ -Algebra

Messraum

Maßraum und Maß

Wahrscheinlichkeitsmaß und -raum

von \mathcal{M} erzeugte σ -Algebra

Satz: Maßfortsetzungssatz, Caratheodory + **Beweis**

endliches/ σ -endliches Prämaß

Satz: Maßeindeutigkeitssatz und Folgerung

Satz: Charakterisierung der W-Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Dynkin-System

Dynkin Lemma

4 Einige wichtige Verteilungen

Binomial(n, p)-Verteilung

Binomialapproximation der hypergeometrischen Verteilung

Dichte von P_F

Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ also:

- Gleichverteilung
- Exponentialverteilung
- Normalverteilung und Standardnormalverteilung

5 Unabhängigkeit

(a) **Unabhängigkeit von Ereignissen und bedingte Wahrscheinlichkeiten**

Unabhängigkeit zweier Ereignisse/Familie von Ereignissen

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

Bayes-Formel

(b) **Unabhängigkeit von σ -Algebren**

Definition Unabhängigkeit von σ -Algebren

6 Zufallsvariablen

Messbare Abbildungen/Zufallsvariablen

\mathbb{R}^D -wertige Zva, numerische Zva

Satz: Abbildung \mathcal{A}/\mathcal{A}' -messbar

Verteilung von X

von X erzeugte σ -Algebra

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Satz: Äquivalenz für Unabhängigkeit

7 Maßintegrale und Erwartungswerte

(a) **Konstruktion des Maßintegrals**

Approximierende Folge

Maßintegral

μ -integrierbar

μ -quasi-integrierbar

Erwartungswert

Einige wichtige Eigenschaften des Maßintegrals

(b) **Konvergenzsätze und \mathcal{L}^p -Räume**

Satz: Integration und Nullmengen

Satz: Beppo-Levi + **Beweis**

μ -fast sicher

Lemma von Fatou

Satz: Lebesgue

$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

(c) **Integration bzgl Produktmaßen**

Satz: Fubini

8 Methoden zur Berechnung von Maßintegralen u. Erwartungswerten

Satz: Partielle Integration

Satz: Methode zur Berechnung des Erwartungswertes einer Zva

Maße mit Dichten Definition

9 Varianz, Co-Varianz und Faltung

Varianz, Covarianz, Korrelation, n -tes Absolutmoment, n -tes Moment

Identitäten (Linearität etc) zu Varianz, Covarianz, Erwartungswerten

Satz: Bienaymé

Faltung

10 Konvergenz von Zufallsvariablen

Konvergenz in Wahrscheinlichkeit

Fast sichere Konvergenz

Konvergenz im p -ten Mittel

Satz: Über eine Implikation zwischen den Konvergenzbegriffen

Satz: Borel-Cantelli + **Beweisidee**

Satz: Äquivalenz mit Teilfolgen und mit Cauchy-Kriterium

Markov-Ungleichung und Tschebyscheff-Ungleichung

Satz: Alle Implikationen des Kapitels + **Beweis ausführlich**

Konvergenz von Reihen unabhängiger Zva:

Satz: Lévy + **Beweisidee**

Satz: Zwei-Reihenkriterium + **Beweisidee**

11 Die Gesetze der großen Zahlen

Motivation

Definition erfüllt starkes/schwaches GGZ

Schwaches GGZ +hinreichende Bedingungen +**Beweis**

Kronecker

Starkes GGZ +**Beweis**

Beispiele!!!

12 Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Schwache Konvergenz

Wesentliche Konvergenz

Konvergenz in Verteilung

Satz: Portmanteau Theorem + **Beweis**

Satz: Helly Bray (+**Beweis**)

Satz: Implikation von Konvergenz von Z_n auf separablem Raum
relativ kompakt

straff

Prohorov

13 Charakteristische Funktionen

Definition Char. Funktion

Satz: Entwicklung"

Satz: Umkehrformel

Satz: Stetigkeitssatz, Levy + **Beweis**

14 Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy

Satz: Lindeberg Levy + **Beweis**

Beispiel Monte-Carlo

15 Multivariate Normalverteilung

Multivariate Normalverteilung Definition W-Maß und Zva
Cramer-Word-Device + **Beweis**

16 Der Kolmogorovsche Erweiterungssatz