Kapitel 1

Einführung in die Maßtheorie und das Lebesgue-Integral

1.1 Ringe und Algebren von Mengen - σ-Algebren

Definition 1.1.1. *Sei $\Omega \neq \emptyset$ (diese Bedingung werden wir in diesem Kapitel generell stellen, ohne dies jedesmal explizit zu erwähnen) eine beliebige Menge und $\mathcal{M}$ ein nichtleeres System von Teilmengen der Menge Ω, das heißt $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.*

1. *Das Mengensystem $\mathcal{M}$ heißt* **(Mengen)-Ring** *über Ω, wenn gilt*
   (a) *aus $A, B \in \mathcal{M}$ folgt $A \cup B \in \mathcal{M}$, und*
   (b) *zu jedem Paar $A, B \in \mathcal{M}$ ist auch $A \setminus B \in \mathcal{M}$.*

   Ein Mengenring $\mathcal{M}$ heißt eine **(Mengen)-Algebra** *falls er die Grundmenge Ω enthält ($\Omega \in \mathcal{M}$).*

2. *Ein (Mengen-) Ring bzw. eine Mengen-Algebra $\mathcal{M}$ heißt* σ**-Ring** *bzw.* σ**-Algebra**, *wenn für $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, die abzählbare Vereinigung wieder in $\mathcal{M}$ enthalten ist,*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}. \tag{1.1}$$

Proposition 1.1.2. *1. Sei $\mathcal{M}$ ein Mengen-Ring über Ω, und $A, B \in \mathcal{M}$. Dann gilt*

$$A \cap B \in \mathcal{M} .$$

2. Sei $\mathcal{M}$ ein σ-Ring über Ω, und $A_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M} .$$

Beweis. 1.

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) .$$

2.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k = A_1 \setminus (A_1 \setminus \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k) = A_1 \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_k) .$$

□

Proposition 1.1.3. *Ein (nichtleeres) System $\mathcal{M}$ von Teilmengen der Menge Ω ist genau dann eine*

1. *(Mengen)-Algebra über Ω, falls*
   (a) *$\Omega \in \mathcal{M}$,*
   (b) *zu jedem $A \in \mathcal{M}$ auch die Komplementärmenge $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{M}$ ist,*
   (c) *aus $A, B \in \mathcal{M}$ folgt $A \cup B \in \mathcal{M}$, und*
2. *eine σ-Algebra, falls*
   (a) *$\Omega \in \mathcal{M}$*
   (b) *zu jedem $A \in \mathcal{M}$ auch die Komplementärmenge $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{M}$ ist*
   (c) *aus $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ folgt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$,*

Beweis. Es genügt 1) zu zeigen.

($\Rightarrow$) Wir wählen $B = \Omega$.

($\Leftarrow$) Wir zeigen für $A, B \in \mathcal{M}$ mit den de Morganschen Regeln zuerst

$$\begin{aligned} A \cap B &= \Omega \setminus (\Omega \setminus (A \cap B)) \\ &= \Omega \setminus (A^c \cup B^c) \in \mathcal{M} . \end{aligned}$$

Damit ist dann auch $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B) \in \mathcal{M}$. □

Beispiel 1.1.4. 1. *Es sei $\Omega = \mathbb{R}$, dann ist die* endliche Vereinigung $\mathcal{M} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{I}_k$ *von Elementarintervallen*

$$\mathcal{I}_k = \{(a,b], [a,b), (a,b), [a,b] : a < b \textit{ beliebig reell}\}$$

ein Mengen-Ring.

2. *Es sei $\Omega = \mathbb{R}^n$, dann ist die* endliche Vereinigung $\mathcal{M} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{I}_k$ *von Elementar-Quadern (Zellen)*

$$\mathcal{I}_k = \{\Pi_{i=1}^{n}(a_i,b_i], [a_i,b_i), (a_i,b_i), [a_i,b_i] : a_i|leqb_i \textit{ beliebig reell}\}$$

ein Mengen-Ring.

3. *Sei Ω eine (unendliche) Menge und*

$$\mathcal{M} = \{A \subset \Omega : A \textit{ oder } \Omega \setminus A \textit{ endlich}\},$$

so ist $\mathcal{M}$ eine Mengen-Algebra.

4. *Sei Ω eine (überabzählbare) Menge, dann ist*

$$\mathcal{M} = \{A \subset \Omega : A \textit{ oder } \Omega \setminus A \textit{ höchstens abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra.

Dabei zeigt man die Beziehung (1.1) *wie folgt. Seien $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, beliebige Mengen aus $\mathcal{M}$. Sind alle A_n höchstens abzählbar, so folgt, dass auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ höchstens abzählbar ist. Sei nun etwa A_1 überabzählbar, so ist $\Omega \setminus A_1$ höchstens abzählbar. Aus*

$$A := \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_n) \subset \Omega \setminus A_1.$$

ergibt sich, dass A höchstens abzählbar ist und weiterhin $\Omega \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Satz 1.1.5. 1. *Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ einer Menge Ω ist eine σ-Algebra*

2. *Der beliebige Durchschnitt von σ-Ringen, bzw. σ-Algebren ist wieder ein σ-Ring, bzw. σ-Algebra.*

Beweis. Klar. □

Definition 1.1.6. 1. *Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges System von Teilmengen. Der bezüglich der Inklusion kleinste σ-Ring, bzw. die kleinste σ-Algebra, die das Mengensystem $\mathcal{M}$ umfasst heißt der von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Ring $\mathcal{R}(\mathcal{M})$, bzw. σ-Algebra $\sigma(\mathcal{M})$. (Dies ist der Schnitt aller $\mathcal{M}$ umfassenden Ringe, bzw. σ-Algebren.) Die von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{M})$ wird auch* Borelsche Erweiterung $\sigma(\mathcal{M})$ *von $\mathcal{M}$ genannt.*

2. *Die von*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\text{endlich}} \{\Pi_{i=1}^n (a_i, b_i], [a_i, b_i), (a_i, b_i), [a_i, b_i] : a_i < b_i \text{ beliebig reell}\} \cup \{\emptyset\}$$

erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}$ heisst die Menge der Borel-Lebesgueschen Teilmengen (Borel-Lebesgue Mengen) Die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}$ ist die kleinste σ-Algebra, die die Menge aller offenen, bzw. abgeschlossenen Mengen enthält.

Lemma 1.1.7. *Jede offene Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich schreiben als abzählbare Vereinigungen offener (als auch abgeschlossener) n-Zellen I_k^n, $k \in \mathbb{N}$, der Form*

$$I^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i\} = \bigotimes_{i=1}^n (a_i, b_i).$$

Beweis. Ist $G \subset \Omega$ offen, so existiert zu jedem Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in G \cap \mathbb{Q}$ ein $r_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, n$ und $m \in \mathbb{N}$, so dass die n-Zelle

$$I_{\mathbf{x}}^n = \left\{\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : r_i - \frac{1}{m} < y_i < r_i + \frac{1}{m} \ \forall 1 \leq i \leq n\right\} \subset G$$

den Punkt $\mathbf{x}$ enthält. (Wir bemerken, dass wir die $I_{\mathbf{x}}^n$ auch als abgeschlossene n-Zellen wählen können.) Dabei ist die Gesamtheit aller n-Zellen $I_{\mathbf{x}}^n$ abzählbar. Wegen $I_{\mathbf{x}}^n \subset G$ gilt einerseits $\bigcup_{\mathbf{x} \in G \cap \mathbb{Q}} I_{\mathbf{x}}^n \subset G$, und andererseits existiert zu jedem $\mathbf{x} \in G$ eine n-Zelle $I_{\mathbf{x}_i}^n$ mit $\mathbf{x} \in I_{\mathbf{x_i}}^n$, und daher auch $G \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in G} I_{\mathbf{x}}^n$. Dies bedeutet wegen der Abzählbarkeit von $G \cap \mathbb{Q}$

$$G = \bigcup_{\mathbf{x} \in G \cap \mathbb{Q}} I_{\mathbf{x}}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{\mathbf{x}_i}^n$$

mit gewissen $\mathbf{x}_i \in G \cap \mathbb{Q}$. □

Korollar 1.1.8. *Jede offene sowie jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist eine Borel-Lebesgue-Menge.*

Definition 1.1.9. *Sei Ω eine beliebige nichtleere Menge und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra. Dann heißt $(\Omega, \mathcal{M})$* **messbarer Raum** *über Ω. Desweiteren heißt die Menge $A \subset \Omega$ genau dann* **messbar**, *falls sie in der σ-Algebra enthalten ist, d.h. $A \in \mathcal{M}$.*

1.2 Mengenfunktionen und Maße

Definition 1.2.1. *Sei $\mathcal{M}$ ein nichtleeres Mengensystem von Teilmengen der Menge $\Omega \neq \emptyset$.*

1. *Eine eindeutige Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty]$ heißt eine auf $\mathcal{M}$ definierte (nichtnegative)* **Mengenfunktion**. *Wir wollen verlangen, dass ein $E | in \mathcal{M}$ existiert mit $\mu(E) < \infty$.*

2. *Die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ heißt* **additiv** *oder* **Inhalt** *auf $\mathcal{M}$, wenn aus $A, B, A \cup B \in \mathcal{M}$ mit $A \cap B = \emptyset$ stets folgt*
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{1.2}$$

3. *Die additive Mengenfunktion $\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ heißt σ-***additiv***, (oder auch* **volladditiv** *oder* **abzählbar additiv***,) wenn aus $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ folgt*
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{1.3}$$

4. *Eine σ-additive Mengenfunktion $\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ auf einem Mengen-Ring $\mathcal{M}$ heißt ein Prämaß, falls $\mathcal{M}$ ein σ-Ring ist.*

5. *Wir sprechen von einem* **Maß***, falls $\mathcal{M}$ sogar eine* σ**-Algebra** *ist. In diesem Fall heißt das Tripel $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein* **Maßraum**.

6. *Ein Maß μ heißt* **endlich***, falls $\mu(\Omega) < \infty$ ist.*

7. *Ein Maß μ heißt ein* **Wahrscheinlichkeitsmaß** *falls $\mu(\Omega) = 1$ ist.*

8. *Ein Maßraum heißt σ-***endlich***, falls $A_n \in \mathcal{M}$ existieren mit $\mu(A_i) < \infty$ und $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$.*

9. *Eine Teilmenge $A \in \mathcal{M}$ heißt eine μ-***Nullmenge***, (oder auch* **Menge vom** μ **Maß** 0*), falls $\mu(A) = 0$ ist.*

Proposition 1.2.2. *Für (Prä)-Maße gelten folgende hilfreiche Beziehungen*

1. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

2. $A \subset B \;\Rightarrow\; \mu(B \setminus A) + \mu(A) = \mu(B) \;\Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ *(Monotonie).*

3. $\mu(\emptyset) = 0$.

4. $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ *(Subadditivität).*

Beweis Übung.

Beispiel 1.2.3. *Sei* $Q = \Pi_{i=1}^n I_i \subset \mathbb{R}^n$, $I_i = (a_i, b_i); (a_i, b_i]; [a_i, b_i); [a_i, b_i]$, $a_i \leq b_i$, *ein* n*-Quader (bzw.* n*-Zelle), so ist sein Volumen (elementargeometrischer Inhalt)*

$$\mu(Q) := \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i) \ . \tag{1.4}$$

Lemma 1.2.4. *Das oben definierte Volumen ist ein Prämaß, d.h.* σ*-additiv, auf dem von* n*-Quadern endlich erzeugten Mengen-Ring* $\mathcal{M}$ *(endliche Vereinigung von (disjunkten) Quadern).*

Beweis. Seien A_k, $k = 1, \ldots, n$ paarweise disjunkte Quader $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, und $A := \bigcup_{i=1}^n A_i$. Durch Fortsetzung von μ auf endliche Vereinigungen paarweise disjunkter Quader gilt folgende Additivität

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \mu(A) \ .$$

Da dies für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^n (A_i) \leq \mu(A) \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Somit gilt für $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, dass $\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) \leq \mu(A)$. Wir zeigen nun die umgekehrte Abschätzung $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.

Sei G_k mit $A_k \subset G_k$ offen mit $\mu(G_k) \leq \mu(A_k) + \epsilon 2^{-k}$ und F eine abgeschlossene Teilmenge von A mit $\mu(A) \leq \mu(F) + \epsilon$. Dann ist, da $A \in \mathcal{M}$ dass A beschränkt ist und auch F beschränkt und damit kompakt ist. $F \subset \bigcup_{k=1}^n G_k$ und daher folgt

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\leq \mu(F) + \epsilon \\
&\leq \mu(\bigcup_{k=1}^n G_k) + \epsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^n \mu(G_k) + \epsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^n (\mu(A_k) + \epsilon 2^{-k}) + \epsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + 2\epsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k) + 2\epsilon \ , \forall \epsilon > 0 \ .
\end{aligned}$$

□

Satz 1.2.5. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, und $A_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$ dann gilt*

1. *Falls $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ und $A_k \subset A_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.*
2. *Falls $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$ und $A_{k+1} \subset A_k$, $k \in \mathbb{N}$, und es existiert A_j mit $\mu(A_j) < \infty$, dann konvergiert $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.*
3. *Die abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen ist wieder eine μ-Nullmenge.*

Beweis. 1.) Wir setzen $B_1 := A_1$ und $B_k := A_k \setminus A_{k-1}$; $k = 2, \dots,$. Dann gelten

$$\begin{aligned} B_j \cap B_k &= \emptyset\ ,\ j \neq k\ , \\ A_n &= \bigcup_{k=1}^{n} B_k\ ,\ n \in \mathbb{N}\ , \text{und} \\ A &= \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\ . \end{aligned}$$

Wegen der σ-Additivität des Maßes μ folgt

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \ \text{ sowie} \\ \mu(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)\ . \end{aligned}$$

Der Beweis der restlichen Behauptungen ist Übung. □

1.3 Messbare Funktionen

Im Folgenden werden wir immer einen Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ zugrunde legen, auch wenn dies nicht immer explizit angegeben wird. In diesem Abschnitt benötigen wir aber vorerst noch kein konkretes Maß.

Definition 1.3.1 (Messbare Funktionen)**.**

1. *Seien $(X, \mathcal{M})$ und $(Y, \mathcal{N})$ zwei messbare Räume, dann heißt eine Funktion*

$$f : X \to Y$$

*genau dann $X - Y$***-messbar***, kurz* **messbar***, falls für alle $B \in \mathcal{N}$ gilt*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M} \ ,$$

dies bedeutet, das Urbild jeder in Y messbaren Menge ist in X messbar.

2. *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, dann heißt f Borel-messbar, falls die Menge*

$$X(f > a) := \{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}((a, \infty])$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ messbar ist.

Proposition 1.3.2. *Seien $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N}), (Z, \mathcal{A})$ messbare Räume, und $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ messbar, dann ist auch die Komposition $h := f \circ g : X \to Z$ messbar. D.h. für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt*

$$h^{-1}(A) = (f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{M} \ .$$

Definition 1.3.3. *Sei $X \neq \emptyset$ und $(Y, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum, und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Mit $\sigma(f)$ bezeichnen wir die von f induzierte, d.h. erzeugte, σ-Algebra über X, definiert als die kleinste σ-Algebra über X, für die $f : X \to Y$ messbar ist.*

Lemma 1.3.4. *Seien $(X, \mathcal{M}); (Y, \mathcal{N})$ messbare Räume, $f : X \to Y$ und sei $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{C})$ eine von $\mathcal{C}$ erzeugte σ-Algebra. Falls $f^{-1}(C) \in \mathcal{M}$ für alle $C \in \mathcal{C}$ ist, dann ist f eine $X - Y$-messbare Funktion, d.h. $\sigma(f) = \sigma\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{M}\}$.*

Beweis. Es gelte $f^{-1}(C) \in \mathcal{M}$ für alle $C \in \mathcal{C} \subset \mathcal{N}$, Sei

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{N} : f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\} \ ,$$

dann ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra. Denn es gilt u.a.

$$f^{-1}(\bigcup_n C_n) = \bigcup_n f^{-1}(C_n) \in \mathcal{M} \ , \ f^{-1}(Y \setminus C_n) = X \setminus f^{-1}(C_n) \in \mathcal{M} \ ,$$

und $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Die σ-Algebra $\mathcal{N}$ ist nach Voraussetzung und Definition

$$\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{T} \text{ist } \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{C} \subset \mathcal{T}} \mathcal{T} \subset \mathcal{F} ,$$

da $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ ist. Somit ist $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$, und wegen $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$ gilt letztendlich $\mathcal{F} = \mathcal{N}$. Aus $A \in \mathcal{N}$ folgt daher $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$. □

Legt man für $\mathbb{R}$ die Lebesgue-Borel-Algebra zugrunde, d.h. $(Y, \mathcal{N}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, dann ist $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann messbar, wenn es Borel-messbar ist. Wir werden im Rest dieses Kapitels ausschließlich diesen Fall betrachten, und sprechen hier kurz von messbaren Funktionen.

Beispiel 1.3.5. *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

ist messbar bezüglich der Borel-Lebesgue σ-Algebra, die von Intervallen erzeugt wird.

Korollar 1.3.6. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und $X = \mathbb{R}^n$. Sei weiterhin $\mathcal{M}$ die σ-Algebra der Borel-Lebesgue-messbaren Mengen, dann ist f messbar.*

Satz 1.3.7. *Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$, dann ist f genau dann messbar, falls eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:*

1. *Die Mengen $X(f \geq a) := \{x : f(x) \geq a\} := \{x \in X : f(x) \geq a\}$ sind für alle $a \in \mathbb{R}$ messbar.*
2. *Die Mengen $X(f < a) := \{x : f(x) < a\}$ sind für alle $a \in \mathbb{R}$ messbar.*
3. *Die Mengen $X(f \leq a) := \{x : f(x) \leq a\}$ sind für alle $a \in \mathbb{R}$ messbar.*

Beweis. Die Menge $X(f \geq a) := \{x : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X(f > a - \frac{1}{n}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x : f(x) > a - \frac{1}{n}\}$ ist messbar. Die Menge $X(f \leq a) := \{x : f(x) \leq a\} = X \setminus \{x : f(x) > a\}$ ist ebenfalls messbar. Daraus ergibt sich einfach der Rest des Beweises. □

Satz 1.3.8. *Sei f messbar, dann ist auch die Funktion $|f|$ messbar.*

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$X(|f| > a) = X(f > a) \cup X(f < -a).$$

Da f messbar ist, sind die beiden letzten Mengen messbar, das heißt sie sind in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthalten. Da $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist, ist auch $X(|f| > a) \in \mathcal{M}$. □

Bemerkung 1.3.9. *Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen nicht, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt: Für $A \subset X$ mit $A \notin \mathcal{M}$, d.h. A ist nicht messbar, definieren wir*

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \notin A, \\ +1, & x \in A. \end{cases}$$

Dann gilt $|f(x)| = 1$, also ist die Menge $X(|f| > a)$ für alle $a \geq 0$ messbar, jedoch ist $X(f > 0) = A$ nach Voraussetzung nicht messbar.

Satz 1.3.10. *Seien für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind auch die Funktionen $g, h : X \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$g(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \qquad h(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x),$$

sowie die Funktionen $p, q : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$p(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \qquad q(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x),$$

messbar.

Beweis. Es gilt

$$X(g > a) = \{x \in X : g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X(f_n > a).$$

Aus der Messbarkeit der Funktionen f_n folgt $X(f_n > a) \in \mathcal{M}$. Da $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist, ist die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} X(f_n > a)$ ebenfalls in $\mathcal{M}$. Folglich ist g messbar. Analog zeigt man, dass h messbar ist.

Aus

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x)$$

folgt die Messbarkeit von p analog zum obigen Beweis aus der Messbarkeit von g und h. Analog zeigt man für

$$q(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x)$$

die Messbarkeit. □

Satz 1.3.11. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen. Ist die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist die Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ definiert vermittels $h(x) := F\big(f(x), g(x)\big)$ ebenfalls messbar.*

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$G_a := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : F(u, v) > a\}, \qquad H_a := X(h > a) = \{x \in X : h(x) > a\}.$$

Da das Intervall (a, ∞) offen ist, folgt aus der Stetigkeit von $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dass $G_a = F^{-1}\big((a, \infty)\big)$ ebenfalls offen ist. Nach dem Lemma 1.1.7 existieren folglich Zweizellen

$$I_k^2 = (a_k, b_k) \otimes (c_k, d_k) = \{(u, v) : a_k < u < b_k,\ c_k < v < d_k\}$$

mit $G_a = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^2$.

Nun ist $\big(f(x), g(x)\big) \in I_k$ genau dann, wenn $a_k < f(x) < b_k$ und $c_k < g(x) < d_k$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
H_a &= \big\{x \in X : \big(f(x), g(x)\big) \in G_a\big\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \big\{x \in X : \big(f(x), g(x)\big) \in I_k\big\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : a_k < f(x) < b_k,\ c_k < g(x) < d_k\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \big[X\big(f(x) > a_k\big) \cap X\big(f(x) < b_k\big) \cap X\big(g(x) > c_k\big) \cap X\big(g(x) < d_k\big)\big] \in \mathcal{M}.
\end{aligned}$$

□

Korollar 1.3.12. *Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen, dann sind die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und $c \cdot f$ für jedes $c \in \mathbb{R}$, sowie*

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}, \tag{1.5}$$

ebenfalls messbar.

Beweis. Die Behauptung ist im Falle $c \cdot f$ trivial, während die Messbarkeit von $f + g$ aus dem vorhergehenden Satz mit $F(u, v) = u + v$ folgt. Analog zeigt man auch die Messbarkeit von $f \cdot g$. Die Messbarkeit von $f_+(x)$ bzw. $f_-(x)$ ergibt sich unmittelbar aus der Identität $f_+(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + |f(x)|\big)$ bzw. $f_-(x) = \frac{1}{2}\big(|f(x)| - f(x)\big)$. □

Bemerkung 1.3.13. *Es gilt* $f_+(x), f_-(x) \geq 0$ *und* $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ *für alle* $x \in X$. *Die Funktion* f_+ *heißt* **positiver Anteil** *von* f *während* f_- **negativer Anteil** *von* f *gennant wird.*

Definition 1.3.14. *Eine Aussage* $A(x)$, *die von* $x \in E \in \mathcal{M}$ *abhängt, heißt* **fast überall auf** E *oder* **für fast alle** $x \in E$ *gültig, falls eine messsbare Teilmenge* $B \in \mathcal{M}$ *existiert, mit* $\mu(B) = 0$, *so dass die Aussage* $A(x)$ *gültig ist für alle* $x \in E \setminus B$.

1.4 Das Lebesgue-Integral - abstrakte Integrationstheorie

Wir legen im Folgenden den messbaren Raum $(X, \mathcal{M})$ und die Kenntnis eines zugehörigen Maßes μ, d.h. einen Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ zugrunde. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare (nichtnegative) Funktion, dann wollen wir, sofern möglich, das Integral

$$\mu(f) := \langle f, \mu \rangle := \int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x)$$

definieren.

Wir werden dies zuerst auf *Treppenfunktionen*, bzw. *einfachen Funktionen* tun, um daraus das allgemeine Integral zu definieren. Wie beim Regelintegral übertragen sich etliche elementare Eigenschaften sofort.

Definition 1.4.1.

1. *Sei* $E \subset X$, *dann heißt die Funktion* $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases}$$

die **charakteristische Funktion** *von* E.

2. *Funktionen* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *der Form*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x), \qquad x \in X \ ,$$

mit den paarweise verschiedenen Funktionswerten $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *und disjunkten Teilmengen* $E_i \subset X$ *mit*

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \qquad i \neq j,$$

heißen **Treppenfunktionen** *oder auch* einfache Funktionen

Proposition 1.4.2. *Eine Treppenfunktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$$

ist genau dann eine messbare Funktion, falls für alle $i = 1, \ldots, n$ die Mengen E_i messbar sind, d.h. $E_i \in \mathcal{M}$.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte $-\infty < c_i < c_{i+1} < \infty$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Falls $c_1 \leq \alpha < c_n$, dann gibt es einen Index $1 \leq j \leq n-1$, so dass $c_j < \alpha \leq c_{j+1}$. Folglich ist

$$X(\varphi < \alpha) = \bigcup_{i=1}^{j} E_i$$

genau dann messbar, falls $E_i \in \mathcal{M}$ für alle $i = 1, \ldots, j$. Für $\alpha < c_1$ ist $X(\varphi < \alpha) = \emptyset$ und für $\alpha \geq c_n$ ist $X(\varphi < \alpha) = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. $\square$

Definition 1.4.3. *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\varphi : E \in \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Treppenfunktion. Desweiteren sei*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i \cap E} \, , \; c_i \in [0, \infty) \, , \; E_i \in \mathcal{M} \tag{1.6}$$

Dann heißt

$$\mu(\varphi) := \int_E \varphi d\mu := \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)$$

das **Lebesgue-Integral** *der Treppenfunktion φ auf E.*

Die folgende Eigenschaft ist entscheidend für die Definition des allgemeinen Integrales

Satz 1.4.4. *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion, dann existiert eine Folge von messbaren Treppenfunktionen φ_n, $n \in \mathbb{N}$, derart, dass $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$. (Falls $f(x) = \pm\infty$ soll dies bedeuten $g_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, ist monoton und unbeschränkt!)*
Falls gilt $f(x) \geq 0$ für ein $x \in X$, dann kann die Folge $\big(\varphi_n(x)\big)$ so gewählt werden, dass sie monoton nicht fallend. Ist f beschränkt, so konvergiert die Folge (φ_n) sogar gleichmäßig gegen f.

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$E_n^{(i)} := \left\{ x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \qquad i = 1, \dots, n \cdot 2^n,$$

und

$$F_n = \{ x \in X : f(x) \geq n \} \, .$$

Dies sind wegen Satz 1.3.7 alles messbare Mengen.

Aufgrund der Zerlegung $f = f_+ - f_-$ mit $f_+, f_- \geq 0$, können wir nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f \geq 0$. Wegen der Messbarkeit von f sind dann die Mengen $E_n^{(i)}$ und F_n alle messbar und für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$X = F_n \cup \bigcup_{i=1}^{n \cdot 2^n} E_n^{(i)}.$$

Wir definieren die Treppenfunktion φ_n gemäß

$$\varphi_n(x) := \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_n^{(i)}}(x) + n \chi_{F_n}(x).$$

Nach dem vorhergehenden Satz sind die Funktionen φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar.

Wir zeigen nun die punktweise Konvergenz. Sei $x \in X$ mit $f(x) = \infty$, dann ist $x \in F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \infty$. Sei $x \in X$ mit $f(x) < \infty$, dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils ein Index $1 \leq i \leq n \cdot 2^n$ mit

$$f(x) - \frac{i-1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \frac{i}{2^n} - f(x) < \frac{1}{2^n}. \tag{1.7}$$

Hieraus folgt schließlich die punktweise Konvergenz

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Die Monotonie der Folge $\big(\varphi_n(x)\big)$ für festes $x \in X$ ist klar.

Sei f nun beschränkt und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so, dass sowohl $f(x) < n$, $\forall x$, als auch $1/2^n < \varepsilon$ gilt. Wir bemerken, dass dann $F_n = \emptyset$ gilt. Folglich existiert zu jedem $x \in X$ ein Index $1 \leq i \leq n \cdot 2^n$ mit $x \in E_n^{(i)}$ und es folgt

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

das heißt φ_n konvergiert gleichmäßig gegen f. □

Definition 1.4.5. *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f : X \subset \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{M}$, eine messbare nichtnegative Funktion. Desweiteren sei*

$$T_f = \left\{ \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} : n \in \mathbb{N},\ c_i \in \mathbb{R}_0^+,\ E_i \in \mathcal{M} \textit{ mit } \varphi \leq f \right\} \tag{1.8}$$

(die E_i können paarweise disjunkt vorausgesetzt werden) die Menge aller Treppenfunktionen, die punktweise kleiner oder gleich der Funktion f sind. Dann heißt

$$\int_E f d\mu := \sup_{\varphi \in T_f} \int_E \varphi d\mu = \sup_{\varphi \in T_f} \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)$$

das **Lebesgue-Integral** *der Funktion f auf E.*

Bemerkung 1.4.6. *Das Lebesgue-Integral einer Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f \geq 0$ kann den Wert $+\infty$ annehmen.*

Definition 1.4.7. *Sei $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, dann definieren wir, falls $\int_E f_+ d\mu < \infty$ oder $\int_E f_- d\mu < \infty$,*

$$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu,$$

wobei $f_\pm$ definiert ist gemäß (1.5). *Falls beide Integrale endlich sind, das heißt $\int_E f_+ d\mu < \infty$ und $\int_E f_- d\mu < \infty$, dann nennen wir f* **integrierbar**, *oder auch* **summierbar**, *auf E bezüglich μ.*
Die Menge der integrierbaren Funktionen auf E bezüglich μ bezeichnen wir mit $L(E, \mu)$.

In der Literatur bezeichnet man auch oft die Menge aller messbaren Funktionen für die das obige Lebesgue-Integral existiert (d.h. auch $\pm\infty$ sein kann) als integrierbar.

Die folgenden Eigenschaften gelten trivialerweise für Treppenfunktionen (siehe Analysis II Kapitel über das Regelintegral), und sie lassen sich unmittelbar durch bilden des Supremums auf den allgemeinen Fall übertragen. Die leichten Beweise verbleiben dem Leser als Übung.

Satz 1.4.8 (Eigenschaften des Lebesgue-Integrals). *Seien $f, g \in L(E,\mu)$ und $c \in \mathbb{R}$, dann ist*

1. *$f+g, cf \in L(E,\mu)$ und es gilt*
$$\int_E (f+g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu, \qquad \int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu.$$
2. *Sei $A \subset E$ messbar, dann folgt für $f \geq 0$*
$$\int_A f d\mu \leq \int_E f d\mu.$$
3. *Aus $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in E$ folgt*
$$0 \leq \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$
4. *Gilt $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in E$, dann folgt*
$$m\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq M\mu(E).$$
5. *Ist $\mu(E) = 0$ so gilt*
$$\int_E f d\mu = 0$$

Beweis. Übung! □

Satz 1.4.9. *Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes gilt die folgende Aussage. Ist $f \geq 0$, so gilt $\int_E f d\mu = 0$ genau dann wenn $f(x) = 0$ fast überall auf E ist.*

Beweis. Sei $\int_E f d\mu = 0$, wir definieren $F := \{x \in E : f(x) > 0\}$ und für $n \in \mathbb{N}$
$$E_n := \left\{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{M}.$$
Dann gilt $E_n \subset E_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$. Wegen der Monotonie von μ folgen hieraus die Beziehungen $\mu(E_n) \leq \mu(E_{n+1}) \leq \mu(F)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(F)$. Nehmen wir $\mu(F) > 0$ an, so existiert zu $\mu(F) > \varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(F) > \mu(E_n) > \varepsilon$.

Aufgrund von $f(x) > 1/n$ für alle $x \in E_n$ folgt hieraus

$$0 = \int_E f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq \frac{1}{n}\varepsilon > 0.$$

Dieser Widerspruch bedeutet, dass $\mu(F) = 0$ gelten muss. Die Umkehrung der Aussage ist trivial, so dass die Äquivalenz bewiesen ist. □

Satz 1.4.10. *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.*

1. *Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f \geq 0$ auf X, dann ist die Mengenfunktion $\nu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert durch*
$$\nu(A) := \int_A f d\mu, \qquad A \in \mathcal{M},$$
σ-additiv. Zudem gilt
$$\forall A \in \mathcal{M} : \mu(A) = 0 \;\Rightarrow \nu(A) = 0\,. \tag{1.9}$$
ν ist ein Maß auf $(X, \mathcal{M})$.

2. *Falls $f \in L(X, \mu)$, dann ist $A \mapsto \nu(A)$ ebenfalls σ-additiv im Sinne von (1.3).*

Beweis. 1. Nach Voraussetzung ist $\nu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{M}$. Sei $A \in \mathcal{M}$ beliebig und seien A_n, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Wir wollen nun die σ-Additivität zeigen. Wir bemerken zuerst, dass diese Eigenschaft falls $f = \varphi$ eine Treppenfunktion ist, leicht gezeigt werden kann.

In allgemeinen Fall gilt für alle $\varphi \in T_f$ gemäß (1.8) dass

$$\begin{aligned}\int_A \varphi d\mu &= \int_A \Big(\sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}\Big) d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^n c_i \mu\Big(\bigcup_{m=1}^\infty (A_m \cap E_i)\Big) \\ &= \sum_{m=1}^\infty \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_m \cap E_i) = \sum_{m=1}^\infty \int_{A_m} \varphi d\mu \leq \sum_{m=1}^\infty \int_{A_m} f d\mu.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Nehmen wir das Supremum über alle $\varphi \in T_f$, so erhalten wir

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \leq \sum_{m=1}^\infty \int_{A_m} f d\mu = \sum_{m=1}^\infty \nu(A_m).$$

Die obige Überlegung impliziert $\nu(A_1 \cup A_2) \leq \nu(A_1) + \nu(A_2)$. Wir zeigen nun, dass aus $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ folgt

$$\nu(A_1 \cup A_2) = \int_{A_1 \cup A_2} f d\mu \geq \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu = \nu(A_1) + \nu(A_2).$$

Es existieren aber auch zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Treppenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in T_f$ mit

$$\int_{A_1} f d\mu \leq \int_{A_1} \varphi_1 d\mu + \varepsilon, \qquad \int_{A_2} f d\mu \leq \int_{A_2} \varphi_2 d\mu + \varepsilon.$$

Nun sei $\varphi(x) = \max\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$, dann ist $\varphi \in T_f$ messbar. Nach (1.10) gilt

$$\begin{aligned} \nu(A_1) + \nu(A_2) &\leq \int_{A_1} \varphi d\mu + \int_{A_2} \varphi d\mu + 2\varepsilon = \int_{A_1 \cup A_2} \varphi d\mu + 2\varepsilon \\ &\leq \int_{A_1 \cup A_2} f d\mu + 2\varepsilon = \nu(A_1 \cup A_2) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ bedeutet dies

$$\nu(A_1) + \nu(A_2) \leq \nu(A_1 \cup A_2)$$

beziehungsweise zusammengefasst

$$\nu(A_1 \cup A_2) = \nu(A_1) + \nu(A_2) \ ,$$

und ferner gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{m} \nu(A_k) \leq \nu(\bigcup_{k=1}^{m} A_k) \leq \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \nu(A), \forall m \in \mathbb{N} \ .$$

Hieraus folgt die Behauptung.

2. Wir zerlegen $f = f_+ - f_-$, dann gilt wegen $f \in L(X, \mu)$ $\int_E f_\pm d\mu < \infty$ für alle $E \in \mathcal{M}$. Somit folgt die Behauptung aus der vorherigen Aussage. □

Die umgekehrte Fragestellung ob zu zwei Massen μ und ν auf $\mathcal{M}$ mit der Eigenschaft (1.9) eine messbare Funktion f existiert, so dass $\nu(A) = \int_A f d\mu$ beantwortet der Satz von Radon-Nikodym.

Korollar 1.4.11. *Seien $A, B \in \mathcal{M}$ mit $B \subset A$ und $\mu(A \setminus B) = 0$ und $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Gilt für eines der Integrale $\int_A f d\mu < \infty$ oder $\int_B f d\mu < \infty$, so gilt dies auch für das zweite Integral und es folgt*

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu < \infty.$$

Beweis. Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $f \geq 0$, dann folgt aus der oben gezeigten Additivität und $\mu(A \setminus B) = 0$ die Behauptung

$$\int_A f d\mu = \nu(A) = \nu(B) + \nu(A \setminus B) = \int_B f d\mu + \int_{A \setminus B} f d\mu = \int_B f d\mu,$$

da Integrale über Nullmengen immer Null sind. □

Definition 1.4.12. *Seien $E \in \mathcal{M}$ und $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, dann schreiben wir $f \overset{E}{\sim} g$, falls $\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, das heißt f und g stimmen fast überall auf E überein.*

Bemerkung 1.4.13.

1. *Die Relation "$\overset{E}{\sim}$" ist eine Äquivalenzrelation*

2. *Falls $f, g \in L(E, \mu)$ und $f \overset{E}{\sim} g$, so gilt*

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

3. *Falls $f \in L(E, \mu)$, dann ist f fast überall endlich.*

Satz 1.4.14. *Seien $g, h : E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $E \in \mathcal{M}$ mit $|g(x)| \leq h(x)$ für alle $x \in E$. Falls $h \in L(E, \mu)$, so ist auch $g \in L(E, \mu)$ und es gilt*

$$\int_E g d\mu \leq \int_E h d\mu.$$

Beweis. Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $g \geq 0$, dann folgt die Behauptung sofort aus $T_g \subset T_h$. □

Satz 1.4.15. *Für eine messbare Funktion f gilt $f \in L(E, \mu)$ genau dann, wenn $|f| \in L(E, \mu)$.*

Beweis. Wir zerlegen $f = f_+ - f_-$, dann gilt

$$|f|(x) = f_+(x) + f_-(x) = \begin{cases} f_+(x), & x \in A, \\ f_-(x), & x \in E \setminus A, \end{cases}$$

mit $A := \{x \in E : f(x) \geq 0\}$. Aufgrund von Satz 1.4.10 folgt, dass

$$\int_E |f| d\mu = \int_A f_+ d\mu + \int_{E \setminus A} f_- d\mu = \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu$$

genau dann definiert und endlich ist, falls $f_\pm \in L(E, \mu)$ bzw. $f \in L(E, \mu)$. □

1.5 Konvergenzsätze

Satz 1.5.1 (Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz.). *Sei $E \in \mathcal{M}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen mit $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ für alle $x \in E$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu,$$

mit $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\int_E f_n d\mu \leq C < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sei definiert vermittels $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in E$. Sie erfüllt $f \geq 0$ und ist nach Satz 1.3.10 messbar. Setzen wir $\alpha_n := \int_E f_n d\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq C$. Demnach existiert $\alpha := \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ und ist endlich. Wegen $f_n(x) \leq f(x)$ für alle $x \in E$ folgt

$$\alpha \leq \int_E f d\mu.$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, definieren wir für beliebige aber feste $c \in (0,1)$ und $\varphi \in T_f$ die Mengen

$$E_n = E_n(\varphi, c) := \{x \in E : f_n(x) > c\varphi(x)\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $E_n \in \mathcal{M}$ und $E_n \subset E_{n+1} \subseteq E$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $f \geq \varphi$ auf E, existiert zu jedem $x \in E$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) \geq c\varphi(x)$. Hieraus folgt

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \;, \tag{1.11}$$

und wir schließen wegen $E_n \subset E$,

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} \varphi d\mu \;.$$

Lassen wir $n \to \infty$ streben so ergibt sich aus (1.11)

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq c \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi d\mu = c \int_E \varphi d\mu.$$

(Der Beweis des letzten Schrittes $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi d\mu = \int_E \varphi d\mu$ ist Übungsaufgabe!) Für $c \to 1$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq \int_E \varphi d\mu.$$

Bilden wir nun das Supremum über alle $\varphi \in T_f$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq \int_E f d\mu.$$

□

Satz 1.5.2 (Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz)**.** *Sei $E \in \mathcal{M}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen mit $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ für alle $x \in E$. Gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f_m \in L(E, \mu)$, und sei $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für fast alle $x \in E$, dann ist f messbar, und es gilt*

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $m = 1$, das heißt $f_1 \in L(E, \mu)$. Wir definieren die Funktionen $x \mapsto g_n(x) := f_n(x) - f_1(x)$ für alle $x \in E$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist g_n messbar mit $0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$, $x \in E$ und g_n messbar. Sei $g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$, dann können wir eine messbare Funktion $\widetilde{f}$ finden mit $\widetilde{f} \overset{E}{\sim} f$ und $g(x) = \widetilde{f}(x) - f_1(x)$, $x \in E$. Aus dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\begin{aligned}
\int_E (f - f_1) d\mu &= \int_E g d\mu \\
&= \int_E \lim_{n\to\infty} g_n d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_E f_n d\mu \right) - \int_E f_1 d\mu,
\end{aligned}$$

dies ist die Behauptung. □

Korollar 1.5.3. *Sei $E \in \mathcal{M}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $0 \leq f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen mit dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu \,.$$

Satz 1.5.4 (Lemma von Fatou). *Sei $E \in \mathcal{M}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen.*

1. *Falls $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

2. *falls $f_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Beweis. Zur Erinnerung bemerken wir dass für $a_n \in \mathbb{R}$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$!

Wir zeigen nur die erste Aussage, da der Beweis der zweiten vollkommen analog geführt wird. Definieren wir $g_n(x) := \inf_{k\geq n} f_k(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann sind die Funktionen g_n messbar, und es gilt $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$. Ferner schließen wir $g_n \leq f_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \geq n$ und somit

$$\int_E g_n d\mu \leq \int_E f_k d\mu \; \forall k \geq n,$$

beziehungsweise für $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Wenden wir nun auf die Folge (g_n) den Satz von Beppo Levi an, so ergibt sich wegen

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

die Behauptung

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

$\square$

Satz 1.5.5 (Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz)**.** *Seien (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_n \to f$ (fast überall) auf E. Falls eine Funktion $g \in L(E, \mu)$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für (fast) alle $x \in E$ gilt $|f_n(x)| \leq g(x)$, dann ist $f \in L(E, \mu)$ mit*

$$\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu \leq \int_E g d\mu$$

und

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Beweis. (O.B.d.A. können wir annehmen, dass die Voraussetzungen überall statt fast überall gelten.)

Offenbar gilt wegen $0 \leq |f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als auch $0 \leq |f| \leq g$, so dass aus Satz 1.4.14 folgt $f, f_n \in L(E, \mu)$. Nach dem Lemma von Fatou gelten

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu - \int_E g d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int_E (f_n - g) d\mu \leq \int_E \limsup_{n\to\infty} (f_n - g) d\mu = \int_E (f - g) d\mu$$

und umgekehrt

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E \liminf_{n\to\infty} (f_n + g) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E (f_n + g) d\mu = \int_E g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Zusammengefasst folgt hieraus

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

bzw.

$$\int_E f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

□

1.6 L^p-Räume

Definition 1.6.1. *Sei $f \in L(X, \mu)$. Wir bezeichnen mit $[f] := \{g : g \overset{X}{\sim} f\}$ die Restklassen zu f bezüglich der Äquivalenzrelation "$\overset{X}{\sim}$".*

Bemerkung 1.6.2. *1. Es gilt* $[g] = [f]$ *genau dann, wenn* $f = g$ *fast überall auf* X, *d.h.* $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

2. *Das Infimum über alle Nullmengen* A *des Supremum der Menge* $\{|f(x)| \in \overline{\mathbb{R}} : x \in X \setminus A\,, \mu(A) = 0\}$, *bezeichnen wir mit* $\operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|$. *Es wird das* **essentielle Supremum** *genannt,*

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| := \inf_{a\in\mathcal{M},\mu(A)=0} \sup_{x\in X\setminus A} |f(x)|\ .$$

Definition 1.6.3. *Wir definieren für* $1 \leq p \leq \infty$ *vermittels*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p(x)d\mu\right)^{1/p}\ ,\ 1 \leq p < \infty\ ,$$

bzw. $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|$, *die Funktionenräume*

$$L^p(X,\mu) := \{[f] : f \textit{ messbar} \|f\|_p < \infty\}.$$

Lemma 1.6.4. *Seien* $a, b > 0$, *dann gilt für* $1 < p, q < \infty$ *mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

die Ungleichung

$$a^{1/p} \cdot b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Siehe Analyis I.

Beweis als Ergänzung. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t := a/b \geq 1$. Wir können die obige Ungleichung vermittels Division durch b umformen in

$$t^{1/p} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{q}.$$

Setzen wir

$$g(t) := t^{1/p}, \qquad h(t) := \frac{t}{p} + \frac{1}{q},$$

so müssen wir zeigen $g(t) \leq h(t)$ für alle $t \geq 1$. Für $t = 1$ folgt $g(1) = 1 = h(1)$. Weiter gilt für alle $t \geq 1$ dass $t^{-1/q} \leq 1$ und somit

$$g'(t) = \frac{1}{p} \cdot t^{1/p-1} = \frac{1}{p} t^{-1/q} \leq h'(t) = \frac{1}{p}$$

Hieraus folgt in der Tat $g(t) \leq h(t)$ für alle $t \geq 1$, das heißt die Behauptung □

Satz 1.6.5. *Es sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p+1/q = 1$, wobei $p = 1$ und $q = \infty$ ebenfalls zugelassen sei.*

1. *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $\|f\|_p, \|g\|_q < \infty$, dann gilt die Hölder-Ungleichung*

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

   Insbesondere folgt $f \cdot g \in L(X, \mu)$.

2. *Seien $\|f\|_p, \|g\|_p \leq \infty$, dann ist $[|f + g|] \in L^p(X, \mu)$ und es gilt die Minkowski-Ungleichung*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q.$$

Beweis. 1. Zuerst betrachten wir den Fall $1 < p, q < \infty$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$, denn anderenfalls ist $f(x) \cdot g(x) = 0$ fast überall auf X. Wir setzen

$$a := \big(|f(x)|/\|f\|_p\big)^p, \qquad b := \big(|g(x)|^q/\|g\|_q\big)^q,$$

dann folgt aus dem vorhergehenden Lemma

$$0 \leq a^{1/p} \cdot b^{1/q} = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q$$

für alle $x \in X$. Wir integrieren nun über X

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \int_X |f \cdot g| d\mu &\leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int_X |g|^q d\mu \\
&\leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \|g\|_q^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Hölder-Ungleichung.

Im Falle $p = 1$ und $q = \infty$ ergibt sich die Hölder-Ungleichung aus der Abschätzung

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| \int_X |g| d\mu = \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

2. Es sei $p > 1$, dann gilt für alle $x \in X$ die Abschätzung

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)| \cdot |(f + g)(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |(f + g)(x)|^{p-1}.$$

Integration über X liefert

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu$$

Hieraus ergibt sich für $q = p/(p-1)$ mit Hilfe der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &\leq \|f\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int_X |f+g|^{p} d\mu\right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p/q} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1},
\end{aligned}$$

das heißt $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Der Fall $p = 1$ und $q = \infty$ verbleibt dem Leser als Übung. □

Satz 1.6.6. *Für $1 \leq p \leq \infty$ bildet die Menge $L^p(X, \mu)$ einen linearen Raum, d.h. einen Vektorraum, mit der Norm $\|\cdot\|_p$.*

Beweis. Seien $[f], [g] \in L^p(X, \mu)$, das heißt für Representanten f, g dass $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$, dann folgt mit der Minkowski-Ingleichung $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p < \infty$, das heißt $[f+g] \in L^p(X, \mu)$.

Für alle $[f] \in L^p(X, \mu)$, das heißt $\|f\|_p < \infty$, und für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\alpha \cdot f\|_p^p = \int_X |\alpha \cdot f|^p d\mu = |\alpha|^p \|f\|_p^p, \tag{1.12}$$

dies bedeutet $\|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \|f\|_p < \infty$ und somit $[\alpha \cdot f] \in L^p(X, \mu)$. Damit ist $L^p(X, \mu)$ ein Vektorraum.

Wir müssen noch zeigen, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm definiert. Offensichtlich gilt $\|f\|_p \geq 0$ für alle $[f] \in L^p(X, \mu)$, wobei aus $\|f\|_p = 0$ folgt $\int_X |f|^p d\mu = 0$, das heißt $|f(x)| = 0$ bzw. $f(x) = 0$ fast überall auf X und folglich $f \overset{X}{\sim} 0$, d.h. $[f] = [0]$. Die Homogenität von Homogenität $\|\cdot\|_p$ haben wir in (1.12) gezeigt. Schließlich entspricht die Dreiecksungleichung der Minkowski-Ungleichung. □

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir, wenn im Kontext keine Missverständnisse entstehen, im Folgenden immer $f \in L^p(X, \mu)$ anstatt $[f] \imath n L^p(X, \mu)$ schreiben. Dabei tritt dann sowohl f als Reprs̈entant, d.h. als Funktion auf, als auch synonym für die ganze Restklassse, und die konkrete Bedeutung ist im Kontext ersichtlich. Dies ist in der mathematischen Literatur allgemein üblich.

Satz 1.6.7. *Die normierten Räume $L^p(X,\mu)$, $1 \le p \le \infty$, sind vollständig und folglich Banachräume.*

Beweis. Sei $f_n \in L^p(X,\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in $L^p(X,\mu)$, das heißt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_k - f_m\|_p^p \le \frac{1}{2^{2n}} =: \varepsilon$$

für alle $k, m \ge N$. Wir definieren via $g_n := f_N$ die Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen $g := \lim_{n\to\infty} g_n \in L^p(X,\mu)$. Für $Y_n = \{x \in X : |g_{n+1}(x) - g_n(x)|^p \ge 2^{-n}\}$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mu(Y_n)}{2^n} &= \int_{Y_n} \frac{1}{2^n} d\mu \le \int_{Y_n} |g_{n+1}(x) - g_n(x)|^p d\mu \le \int_X |g_{n+1}(x) - g_n(x)|^p d\mu \\ &= \|g_{n+1} - g_n\|_p^p \le \frac{1}{2^{2n}},\end{aligned}$$

das heißt $\mu(Y_n) \le 2^{-n}$. Setzen wir nun $Z_n = \bigcup_{k=n}^\infty Y_k$, so folgt $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \ldots$ und weiter

$$\mu(Z_n) = \mu\left(\bigcup_{k=n}^\infty Y_k\right) \le \sum_{k=n}^\infty \mu(Y_k) \le \sum_{k=n}^\infty 2^{-k} \le 2^{-(n-1)}.$$

Somit ergibt sich für $Z = \bigcap_{n=1}^\infty Z_n$ dass

$$\mu(Z) = \lim_{n\to\infty} \mu(Z_n) = 0,$$

dies bedeutet, Z ist eine Menge vom Maß Null. Wir setzen nun

$$g(x) := \begin{cases} g_1(x) + \sum_{n=1}^\infty \big(g_{n+1}(x) - g_n(x)\big), & x \in X \setminus Z, \\ 0, & x \in Z. \end{cases}$$

Aufgrund der Tatsache, dass für alle $x \in X \setminus Z_n$ gilt

$$|g_{k+1}(x) - g_k(x)|^p \le \frac{1}{2^k}, \qquad k \ge n,$$

folgt aus der Identität

$$g_{m+1}(x) = g_1(x) + \sum_{n=1}^m \big(g_{n+1}(x) - g_n(x)\big),$$

dass

$$\sup_{x\in X\setminus Z_n} |g(x)-g_m(x)|^p \le \sum_{n=m}^{\infty} |g_{n+1}-g_n|^p \le \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m-1}} \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Folglich konvergiert die Folge $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig und absolut gegen g auf $X\setminus Z_n$ für jedes $n\in\mathbb{N}$, und somit konvergiert $g_m(x)\to g(x)$ auf $X\setminus Z$, d.h. fast überall. Betrachten wir auf $X\setminus Z$ die Funktion $G(x) := |g_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left|g_{n+1}(x)-g_n(x)\right|$, so ist $|g|\le G$, und nach Beppo Levi, bzw. dem Satz über monotone Konvergenz 1.5.1 gilt

$$\int_X G^p d\mu = \int_X |g_1|^p d\mu + \sum_{n=1}^{\infty}\int_X |g_{n+1}-g_n|^p d\mu \le \|g_1\|_p^p + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2n} < \infty.$$

Aus dem Lebesgue'schen Satz über dominante Konvergenz 1.5.5 folgt die Messbarkeit von g und $|g|^p\in L(X,\mu)$, und wegen

$$\|g-g_m\|_p \le \limsup_{k\to\infty} \|g_k-g_m\|_p \le \frac{1}{2^{2n/p}} < \infty,$$

gilt $\lim_{m\to\infty}\|g-g_m\|_p = 0$. Aus $g_m\in L^p(X,\mu)$ folgt nach Satz 1.6.6, dass $g\in L^p(X,\mu)$ und $g_m\to g$ für $n\to\infty$ in $L^p(X,\mu)$.

Der Fall $p=\infty$ verbleibt als Übung. □

Satz 1.6.8. *Im Falle $p=2$ induziert die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : L^2(X,\mu)\times L^2(X,\mu)\to\mathbb{R}$ gegeben durch*

$$\langle f,g\rangle := \int_X fg d\mu, \qquad f,g\in L^2(X,\mu),$$

ein Skalarprodukt. Es gilt

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}.$$

Der Raum $L^2(X,\mu)$ versehen mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bildet einen Hilbertraum.

1.7 ZUSATZ (Einschub): etwas Hilbertraumtheorie

dieser Teil wird später an die entsprechende Stelle in dem Ana II Skript in Zusammenhang mit Fourierreihen angehängt werden

Satz 1.7.1. *Sei $(H, \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und Norm $\|.\|_H$, und $V \subset H$, $V \neq \{0\}$, ein abgeschlossener Unterraum, dann existiert eine lineare Abbildung $P : H \to V$ mit folgenden Eigenschaften*

1. *zu jedem $y \in H$ existiert genau ein $x = Py \in V$ mit*
$$\|y - Py\|_H = \inf\{\|y - v\|_H : v \in V\} \tag{1.13}$$
2. *Es gilt $\langle y - Py, v \rangle = 0 \; \forall v \in V$.*
3. *für $x \in V$ ist $Px = x$ und es gilt $P^2 = P$.*
4. $$\|y\|_H^2 = \|Py\|_H^2 + \|(I - P)y\|_H^2 \;\; \forall y \in H \; ,$$
und damit gilt in der Operatornorm $\|P\| = 1$, bzw. $\|Py\|_H \leq \|y\|_H$, $y \in H$.

P heißt der **orthogonale Projektor** *und Py die orthogonale Projektion von y auf V.*

Beweis. Wir betrachten zu gegebenem $y \in H$ das Funktional $J : V \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$J(x) := \|x - y\|_H^2 = \langle x - y, x - y \rangle \geq 0 \; , \; x \in V \; .$$
Dann ist wie man leicht sieht, der Hessian (2. Ableitung) $J^{(2)}(x) = I$, und daher ist für alle $x, v \in V$, $t \in [0,1]$,
$$J(tx - (1-t)v) \leq tJ(x) + (1-t)J(v)$$
d.h. dieses Funktional ist konvex mit $J(x) \to \infty$ für $\|x\|_H \to \infty$. Nach Satz **??** (Analysis II) existiert genau ein Minimierer $x =: Py \in V$ dieses konvexen Funktionals, zunächst auf der konvexen Mengen $V \cap B_R(0)$ für beliebig großes R, und dieses Minimum ist dann auch, wie man sofort sieht, das globale Minimum. Damit ist die erste Behauptung gezeigt.

An der Minimalstelle $x = Py$ gilt für jede Richtungsableitung in Richtung von $v \in V$
$$J'(Py)v = 2\langle Py - y, v \rangle = 0 \;\; \forall v \in V \; .$$
Dieses Problem hat ebenfalls genau eine Lösung, nämlich Py, die zudem linear von $y \in H$ abhängt.

Falls $y \in V$ ist $Py = y$ die Minimalstelle, da $J(y) = 0$.

Insbesondere gilt $\langle Py - y, Py \rangle = 0$ mit dem Satz von Phytagoras folgt
$$\|y\|_H^2 = \|Py - Py + y\|_H^2 = \|Py\|_H^2 + \|(I - P)y\|_H^2 \; ,$$
da immer $\|(I - P)y\|_H^2 \geq 0$ folgt $\|Py\|_H \leq \|y\|_H$ für alle $y \in H$, und somit $\|P\| \leq 1$. Andererseits folgt aus $\|P^2\| \leq \|P\|^2$, dass für nichttriviale Projektoren $\|P\| \geq 1$ ist. $\square$

Satz 1.7.2. *Sei $(H, \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und Norm $\|.\|_H$. Zu jedem linearen beschränkten Funktional $L : H \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $\|L\| = \sup_{\|h\|_H=1} |Lh| \leq C < \infty$. existiert genau ein $g \in H$ mit*

$$Lh = \langle g, h \rangle \ \forall h \in H \text{ , und } \|g\|_H = \|L\| \ .$$

(Das Skalarprodukt ist hier linear in der zweiten Komponente)

Beweis. O.B.d.A. sei L nichttrivial. Sei $X := \mathrm{ker} L = \{x \in H : Lx = 0\}$, dann ist $X \subset H$ eine abgeschlossener Teilraum und $X^\perp := \{y \in H : \langle y, x \rangle = 0 : x \in X\}$ der orthogonale Komplementärraum ebenso. Da $x \in H$ existiert mit $Lx \neq 0$ ist $X^\perp \neq \emptyset$, und es existiert ein $u \in X^\perp$ mit $\|u\|_H = 1$. Sei $\alpha = \overline{Lu} \in \mathbb{C}$ dann ist für beliebiges $x \in H$

$$L(uLx - xLu) = LuLx - LxLu = 0 \ , \ x \in H$$

und weiter für $g := \alpha x \in H$

$$\begin{aligned} \langle \alpha x, u \rangle &= \langle x, u \rangle Lu = \langle x, uLu \rangle \\ &= \langle x, (uLu + uLx - xLu) \rangle \\ &= \langle u, uLx \rangle = \langle u, u \rangle Lx = Lx \ . \end{aligned}$$

Umgekehrt definiert jedes $g \in H$ ein lineares Funktional auf H. Mit Cauchy-Schwarz gilt

$$|\langle g, x \rangle| \leq \|g\|_H \|x\|_H = \|g\|_H \ \ \forall \|x\|_H = 1$$

und falls $g \neq 0$, für $x = \frac{g}{\|g\|_H}$ folgt

$$\langle g, x \rangle = \frac{\langle g, g \rangle}{\|g\| - h} \|g\|_H \ ,$$

daher gilt

$$\sup_{\|x\|_H=1} |\langle g, x \rangle| = \|g\| - H$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit seien $g_1, g_2 \in H$ mit den gewünschten Eigenschaften. Dann folgt daraus $0 = Lx = \langle g_1 - g_2, x \rangle$, $\forall x \in H$, und somit

$$\|g_1 - g_2\|_H = \sup_{\|x\|_H=1} |\langle g_1 - g_2, x \rangle| = 0 \ \Rightarrow \ g_1 - g_2 = 0 \ .$$

□

1.8 Konstruktion positiver Maße

Wir bilden auf einer Mengenalgebra ein Prämaß, oder nehmen ein solches als gegeben an. Nun wollen wir dieses zu einem Maß auf der davon erzeugten $\sigma-$Algebra fortsetzen. Wir wollen in diesem Kapitel die folgenden Voraussetzungen treffen.

Definition 1.8.1. *Im Folgenden sei $\mathcal{M}_0$ eine Mengen-Algebra über Ω. Und $\mu_0 : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ eine nichtnegative σ-additive Mengenfunktion.*

Wir benötigen zuerst folgende Hilfskonstruktion.

Definition 1.8.2. *Sei $\mathcal{G}$ eine Mengen-Algebra über Ω, und $\lambda : \mathcal{G} \to [0, \infty]$ eine nichtnegative Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. $L \in \mathcal{G}$ heißt eine* λ**-Menge** *falls*

$$\lambda(L \cap G) + \lambda(L^c \cap G) = \lambda(G) \; \forall G \in \mathcal{G}$$

gilt.

Man beachte $L^c \cap G = G \setminus L$.

Lemma 1.8.3. *Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller λ-Mengen im Sinne der obigen Definition. Dann ist $\mathcal{L}$ eine Mengen-Algebra und λ ein Inhalt auf $\mathcal{L}$, d.h. λ ist additiv. Zudem gilt für paarweise disjunkte $L_1, \ldots, L_n \in \mathcal{G}$,*

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} (L_k \cap G)\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(L_k \cap G) \;\; \forall G \in \mathcal{G} \,.$$

Proof. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{L}$ eine Mengen-Algebra ist.

- Man sieht sofort, dass $\Omega \in \mathcal{L}$ ist. Denn für alle $G \in \mathcal{G}$ gilt

  $$\lambda(\Omega \cap G) + \lambda(\Omega^c \cap G) = \lambda(G) + \lambda(\emptyset) = \lambda(G) \,.$$

- Ebenfalls folgt aus $A \in \mathcal{L}$ auch $A^c \in \mathcal{L}$.

- Seien $A, B \in \mathcal{L}$ und $L := A \cap B$. Wir bemerken dass

  $$L^c \cap B = (A^c \cup B^c) \cap B = A^c \cap B$$

  und

  $$L^c \cap B^c = (A^c \cup B^c) \cap B^c = B^c \,,$$

und für beliebiges $G \in \mathcal{G}$ ist $L \in \mathcal{G}$ sowie auch $L^c \cap G \in \mathcal{G}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\lambda(L^c \cap G) &= \lambda(B \cap (L^c \cap G)) + \lambda(B^c \cap (L^c \cap G)) \\ &= \lambda(B \cap A^c \cap G) + \lambda(B^c \cap G) \\ &= \lambda(B \cap A^c \cap G) - \lambda(B \cap G) + \lambda(G) \;.\end{aligned}$$

Da A eine λ-Menge ist und $B \cap G \in \mathcal{G}$ folgt

$$\lambda(L \cap G) = \lambda(A \cap B \cap G) = \lambda(B \cap G) - \lambda(A^c \cap B \cap G) \;.$$

Die Addition der beiden Resultate ergibt

$$\lambda(A \cap B \cap G) + \lambda((A \cap B)^c \cap G) = \lambda(G)$$

Seien $A, B \in \mathcal{L}$ disjunkte λ-Mengen und $G \in \mathcal{G}$, dann gilt

$$(A \cup B) \cap A = A \;\;,\;\; (A \cup B) \cap A^c = B \;.$$

Hieraus folgt, da $((A \cup B) \cap G) \in \mathcal{G}$ ist,

$$\begin{aligned}\lambda\big((A \cap G) \cup (B \cap G)\big) &= \lambda\big((A \cup B) \cap G\big) \\ &= \lambda(A \cap ((A \cup B) \cap G)) + \lambda(A^c \cap ((A \cup B) \cap G)) \\ &= \lambda(A \cap G) + \lambda(B \cap G) \;.\end{aligned}$$

Die Additivität von λ folgt unmittelbar, wenn man $B := \Omega$ wählt, da $\lambda(\emptyset) = 0$ vorausgesetzt wurde. □

Definition 1.8.4. *Seien $(\Omega; \mathcal{M})$ ein messbarer Raum und $\mu^* : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine nichtnegative Mengenfunktion. Dann heißt μ^* ein* **äußeres Maß**, *falls folgende Aussagen gelten:*

1. *Es gilt $\mu^\star(\emptyset) = 0$.*

2. *Die Mengenfunktion $\mu^\star$ ist* **monoton**, *das heißt aus $A \subset B \in \mathcal{M}$ folgt $\mu^*(A) \leq \mu^\star(B)$.*

3. *μ ist* **abzählbar subadditiv**, *d.h. für $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, erfüllt die Mengenfunktion μ^* die Ungleichung*
$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{1.14}$$

Lemma 1.8.5 (Caratheodory)**.** *Sei μ^* ein äußeres Maß auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{M})$. Dann bilden die μ^*-Mengen eine σ-Algebra $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$, auf der μ^* σ-additiv ist, d.h. $(\Omega, \mathcal{L}, \mu^*)$ ist ein Maßraum.*

Beweis. In Lemma 1.8.3 haben wir schon gezeigt, dass $\mathcal{L}$ eine Mengen-Algebra bildet. Es bleibt nun noch die σ-Eigenschaften zu zeigen. Seien $L_i \in \mathcal{L}$, $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Mengen, wir zeigen nun dass dann auch

$$L := \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k \in \mathcal{L} \text{ und } \mu^*(L) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(L_k)$$

gilt.

Sei $E \in \mathcal{M}$ dann gilt wegen $E = (L \cap E) \cup (L^c \cap E)$ und (1.14)

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(L \cap E) + \mu^*(L^c \cap E) \ . \tag{1.15}$$

Das Lemma 1.8.3 sichert dass $M_n := \bigcup_{k=1}^{n} L_k \in \mathcal{L}$ und

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap M_n) + \mu^*(E \cap M_n^c) \ .$$

Wegen $L^c \subset M_n^c$ folgt mit der Monotonie

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap M_n) + \mu^*(E \cap L^c) \ ,$$

und somit

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(L^c \cap E) + \sum_{k=1}^{n} \mu^*(L_k \cap E) \ .$$

Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt erhalten wir

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(L^c \cap E) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(L_k \cap E)$$

und infolge der abzählbaren Subadditivität (1.14)

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(L^c \cap E) + \mu^*(L \cap E) \ ,$$

und zusammen mit (1.15) und der gezeigten oberen Abschätzung

$$\mu^*(E) = \mu^*(L^c \cap E) + \mu^*(L \cap E) \ .$$

Dies beweist dass $L \in \mathcal{L}$.

Wählen wir $E := L$, so zeigt der obige Beweis auch, dass

$$\mu^*(L) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(L_k) \ .$$

$\square$

Lemma 1.8.6. *Sei $\mathcal{M}_0$ eine Mengen-Algebra und $\mu_0 : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ ein Prämaß, d.h. σ-additiv, und $\mu(\emptyset) = 0$. Zu jeder Menge $E \subset \Omega$ bezeichne*

$$\mathcal{U}_E := \left\{ \{E_n : n \in \mathbb{N}\} : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ und } E_n \in \mathcal{M}_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.16}$$

die Menge aller Überdeckungen von E. Die Mengenfunktion

$$\mu^*(E) = \inf \big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) : \{E_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}_E \big\}, \tag{1.17}$$

definiert ein **äußeres Maß** *von E.*

Beweis. Man beachte, da $\Omega \in \mathcal{M}_0$ ist, eine solche Überdeckung immer existiert, und damit μ^* wohldefiniert ist. Für $A, B \subset \Omega$ zeigt man leicht die Beziehungen

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \text{ Monotonie , (wegen } \mathcal{U}_B \subset \mathcal{U}_B \text{) .}$$

Um die abzählbare Subadditivität (1.14) zu zeigen, nehmen wir eine Folge von Mengen $G_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, von der wir o.B.d.A. annehmen können, dass für alle $\mu^*(G_n) < \infty$ ist. Denn sonst ist $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) = \infty$ und wir sind fertig.

Seien $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann existieren Mengen nach Definition (1.17) $F_{n,k} \in \mathcal{M}_0$, $k \in \mathbb{N}$, mit

$$\begin{aligned} G_n &\subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_{n,k} \text{ , und} \\ \mu^*(G_n) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(F_{n,k}) \leq \mu^*(G_n) + \epsilon 2^{-n} \text{ .} \end{aligned}$$

Da $G := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_{n,k}$ erhalten wir

$$\mu^*(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(F_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(G_n) + \epsilon 2^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(G_n) + \epsilon \text{ ,}$$

für jedes $\epsilon > 0$. Womit die obige Behauptung bewiesen ist. □

Bemerkung: Die obige Aussage gilt auch für Mengenringe $\mathcal{M}$, wenn man für den Fall, dass es für $A \subset \Omega$ keine Überdeckung gibt, $\mu^*(A) := +\infty$ festlegt.

Lemma 1.8.7. *Unter den Voraussetzungen des obigen Lemmas 1.8.6 gilt*

$$\mu^*(A) = \mu_0(A) \ \ \forall A \in \mathcal{M}_0 \ .$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{M}_0$ dann gilt , da trivialerweise $A \subset A \in \mathcal{M}_0$, dass $\mu^*(A) \leq \mu_0(A)$ ist. Sei $A_n \in \mathcal{M}_0$, $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige abzählbare Überdeckung von A, d.h. $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Dann können wir paarweise disjunkte Mengen $E_n \in \mathcal{M}_0$, $n \in \mathbb{N}$, finden mit

$$E_1 := A_1 \ \ , \ \ E_n = A_n \cap \left(\bigcup_{k<n} A_k\right)^c \ .$$

Für diese gelten $E_n \subset A_n$ und $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Unter Verwendung der σ-Additivität von μ_0 auf $\mathcal{M}_0$ schließen wir

$$\mu_0(A) = \mu_0\big(\bigcup_{n=1}^\infty (A \cap E_n)\big) = \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A \cap E_n) \ ,$$

und aus der Monotonie $\mu_0(A \cap E_n) \leq \mu_0(E_n)$ und weiter

$$\mu_0(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_0(E_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n) \ .$$

Bilden wir das Infimum über alle möglichen Folgen $A_k \in \mathcal{M}_0$, $k \in \mathbb{N}$ mit $A = \bigcup_k A_k$ so erhalten wir die fehlende Ungleichung

$$\mu_0(A) \leq \inf \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n) = \mu^*(A) \ .$$

□

Lemma 1.8.8. *Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 1.8.6. Sei $\mathcal{L}$ die σ-Algebra der μ^*-Mengen bzgl. $\mathcal{G} := \mathcal{P}(\Omega)$, dann enthält diese bereits $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{L}$.*

Beweis. Sei $E \in \mathcal{M}_0$ und $G \in \mathcal{G} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge $F_n \in \mathcal{M}_0$, $n \in \mathbb{N}$, die G überdeckt $G \subset \bigcup_n F_n$ und zudem gilt

$$\sum_n \mu_0(F_n) \leq \mu^*(G) + \epsilon \ .$$

Aufgrund der Definition von μ^* gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E \cap F_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E^c \cap F_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap F_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E^c \cap F_n) \\
&\geq \mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap F_n)\big) + \mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E^c \cap F_n)\big) \\
&\geq \mu^*(E \cap G) + \mu^*(E^c \cap G),
\end{aligned}$$

wegen $E \cap G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap F_n)$ sowie $E^c \cap G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(E^c \cap F_n)$. Da dies jedoch für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt, folgt

$$\mu^*(G) \geq \mu^*(E \cap G) + \mu^*(E^c \cap G).$$

Andererseits ist aber μ^* als äusseres Maß subadditiv

$$\mu^*(G) \leq \mu^*(E \cap G) + \mu^*(E^c \cap G).$$

D.h. für $E \in \mathcal{M}_0$ gilt

$$\mu^*(G) = \mu^*(E \cap G) + \mu^*(E^c \cap G) \ \ \forall G \in \mathcal{G} = \mathcal{P}(\Omega) \ ,$$

und damit $E \in \mathcal{L}$, was zu beweisen war. $\square$

Satz 1.8.9 (Fortsetzungssatz von Caratheodory)**.** *Sei $\mathcal{M}_0$ eine Mengen-Algebra über Ω, und $\mu_0 : \mathcal{M}_0 \to [0, \infty]$ eine σ-additive Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{M}_0)$ sei die von $\mathcal{M}_0$ erzeugte σ-Algebra. Dann existiert ein Maß μ auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{M})$ mit $\mu = \mu_0$ auf $\mathcal{M}_0$. Wir nennen μ eine Fortsetzung von μ_0 auf $\mathcal{M}$.*

Beweis. Wir wählen $\mu := \mu^*$. Dann ist μ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{L}$ der μ^*-Mengen bzgl. $\mathcal{P}(\Omega)$. Da $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{L}$ ist auch $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{M}_0) \subset \mathcal{L}$ eine Teilalgebra, und μ ist ein Maß auf $\mathcal{M}$. $\square$

Definition 1.8.10. *Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ heißt* **vollständig***, falls zu jeder μ-Nullmenge $N \in \mathcal{M}$ auch jede Teilmenge $M \subset N$ messbar ist d.h. $M \in \mathcal{M}$.*

Zu jedem Maßraum $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ lässt sich ein vollständiger Maßraum $(\Omega, \mathcal{M}^*, \overline{\mu})$ definieren, mit $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$ und $\mu(A) = \overline{\mu}(A)$, $A \in \mathcal{M}$, den man die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ nennt.

Satz 1.8.11. *Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra mit dem Maß μ, dann ist das Mengensystem*

$$\mathcal{M}^* := \{A \cup N : A \in \mathcal{M} \text{ und } N \subseteq \Omega \text{ ist Teilmenge einer Menge } B \text{ vom Maße } \mu(B) = 0\}$$

eine vollständige σ-Algebra mit dem Maß

$$\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A).$$

Dabei wird $\overline{\mu}$ Vervollständigung von μ genannt.

Beweis. Man zeigt leicht dass $\mathcal{M}^*$ eine σ-Algebra ist. Sei $A \in \mathcal{M}^*$ mit $\overline{\mu}(A) = 0$. Für beliebiges $B \subseteq A$ gilt dann gilt wegen der Monotonie

$$0 \leq \overline{\mu}(B) \leq \overline{\mu}(A) = 0\ .$$

D.h. $\overline{\mu}(B) = 0$, und hieraus folgt dass B $\overline{\mu}$-messbar ist und dies bedeutet $B \in \mathcal{M}^*$. $\square$

Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Borel-Lebesguesche σ-Algebra, dann nennen wir deren Vervollständigung $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^n)$ die σ-Algebra der Lebesgue messbaren Mengen.

1.9 Eindeutigkeit von Maßen und Erzeugendensysteme

Definition 1.9.1. 1. *Ein System von Teilmengen $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt ein π-***System** *oder* **durchschnittstabil** *falls*

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow I_1 \cap I_2 \in \mathcal{I} \, .$$

2. *Ein System von Teilmengen $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt ein d-***System** *falls*

   (a) $\Omega \in \mathcal{D}$,

   (b) falls $A, B \in \mathcal{D}$ und $A \subset B$ dann ist $B \setminus A \in \mathcal{D}$,

   (c) falls $A_k \in \mathcal{D}$, $A_k \subset A_{k+1}$, dann ist auch $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$.

3. *Ein System von Teilmengen $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt ein* **Dynkin-System** *falls*

   (a) $\Omega \in \mathcal{D}$,

   (b) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{D}$,

   (c) für Folgen paarweise disjunkter Mengen $A_k \in \mathcal{D}$, $A_k \cap A_j = \emptyset$, $k \neq j$, dann auch $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$ ist.

Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Das kleinste Dynkin-System, das $\mathcal{I}$ enthält heißt das von $\mathcal{I}$ erzeugte Dynkin-System $D(\mathcal{I})$. Analog ist $d(\mathcal{I})$ das kleinste d-System, das $\mathcal{I}$ enthällt, (d.h. das von diesem erzeugte d-System ist der Durchschnitt aller d-Systeme, die $\mathcal{I}$ enthalten.)

Bemerkung 1.9.2.

- *Da der Schnitt von Dynkinsystemen (d-Systemen) wieder ein Dynkin-System (d-System) ist, macht die letzte Definition Sinn. Man vergleiche mit der analogen Konstruktion der von $\mathcal{I}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{I})$.*

- *Jede σ Algebra ist sowohl ein Dynkin-System als auch ein d-System (aber nicht notwendigerweise umgekehrt).*

Satz 1.9.3. *Ein System von Teilmengen $\mathcal{M}$ ist genau dann eine σ-Algebra, falls $\mathcal{M}$ sowohl ein π-System als auch ein Dynkin-System (oder ein d-System) ist.*

Beweis. Jede σ-Algebra ist sowohl ein π-,d- wie auch ein Dynkin-System.

Umgekehrt, sei $\mathcal{D}$ ein durchschnittsstabiles Dynkin-System, und seien $A, B \in \mathcal{D}$ beliebig, dann ist ebenfalls

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{D} \, .$$

Für jede Folge von Teilmengen $A_k \in \mathcal{D}$, $k \in \mathbb{N}$, bilden wir die paarweise disjunkte Mengen

$$B_1 := A_1\ ,\ B_k := A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i = A_k \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c\Big) \in \mathcal{D}\ ,\ k \geq 2\ .$$

Dann gilt $B_k \in \mathcal{D}$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$.

Der Beweis der Aussage für d-Systeme verbleibt dem Leser als Übung. □

Satz 1.9.4 (Dynkin-Lemma)**.** *Wird ein Dynkin-System $\mathcal{D}$ von einem π-System $\mathcal{I}$ erzeugt, d.h. $\mathcal{D} = D(\mathcal{I})$, so ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra, und es gilt*

$$\mathcal{D} = D(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I})\ .$$

Die analoge Aussage gilt für d-Systeme.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass zu gegebenem $B \in \mathcal{D}$ die Menge

$$\mathcal{D}(B) := \{A \in \mathcal{D} : A \cap B \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{D}$$

selbst wieder ein Dynkin-System ist.

Denn sei $A \in \mathcal{D}(B)$, dann ist

$$\begin{aligned} A^c \cap B &= (A^c \cup B^c) \cap B \\ &= (A \cap B)^c \cap B \\ &= ((A \cap B) \cup B^c)^c\ . \end{aligned}$$

Aus $A \cap B \in \mathcal{D}$ und $B^c \in \mathcal{D}$ folgt $A^c \cap B \in \mathcal{D}$ und $A^c \in \mathcal{D}(B)$.

Für jede Folge disjunkter Mengen $A_k \in \mathcal{D}(B)$, $k \in \mathbb{N}$, ist auch

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B) \in \mathcal{D}\ ,$$

und damit auch $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}(B)$. Also ist $\mathcal{D}(B)$ ein Dynkin-System.

Ist $B \in \mathcal{I}$, so gilt für alle $A \in \mathcal{I}$ nach Voraussetzung $A \cap B \in \mathcal{I} \subset \mathcal{D}$, d.h. $A \in \mathcal{D}(B)$ und damit $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}(B)$ ein Dynkin-System ist, und $\mathcal{D}$ das kleinste Dynkin-System das $\mathcal{I}$ beinhaltet, so folgt $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}$ für $B \in \mathcal{I}$.

Für alle $A \in \mathcal{D}$ und $B \in \mathcal{I}$, sowie umgekehrt $A \in \mathcal{I}$ und $B \in \mathcal{D}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{D}$. Dies bedeutet, dass für alle $B \in \mathcal{D}$ ist $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}(B)$ und daher gilt generell $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}$ und $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$. Daraus folgt $\sigma(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}$. Umgekehrt ist $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{I})$ klar, da $\sigma(\mathcal{I})$ ebenfalls ein Dynkin-System ist.

Der Beweis für d-Systeme verbleibt dem Leser als Übung. □

Satz 1.9.5 (Eindeutigkeit des Maßes). *Seien μ_1, μ_2 beide Maße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{M})$, und sei $\mathcal{I}$ ein π-System das $\mathcal{M}$ erzeugt, d.h. $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{M}$, mit der Eigenschaft, dass eine Folge von Mengen $E_k \in \mathcal{I}$ existiert, mit $\mu_1(E_k) < \infty$ und $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Falls $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ für alle $E \in \mathcal{I}$ gilt, d.h. die Maße auf dem π-System übereinstimmen, dann stimmen sie auf der gesamten σ-Algebra $\mathcal{M}$ überein,*

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) \; \forall A \in \mathcal{M} \; .$$

Beweis. Wir betrachten zunächst $E \in \mathcal{I}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$ und

$$\mathcal{D}(E) := \{A \in \mathcal{M} : \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)\} \subset \mathcal{M} \; .$$

Es gilt u.a.

$$\begin{aligned} \mu_1\big((\Omega \setminus A) \cap E\big) + \mu_1(A \cap E) &= \mu_1\Big(\big((\Omega \setminus A) \cap E\big) \cup (A \cap E)\Big) = \mu_1(E) \\ &= \mu_2(E) = \mu_2\big((\Omega \setminus A) \cap E\big) + \mu_2(A \cap E) \; . \end{aligned}$$

Also ist

$$\mu_1\big((\Omega \setminus A) \cap E\big) = \mu_2\big((\Omega \setminus A) \cap E\big)$$

d.h. $A^c \in \mathcal{D}(E)$. Auf analoge Art und Weise zeigt man die verbleibenden Eigenschaften eines Dynkin-Systems.

Da $\mathcal{I}$ ein erzeugendes π-System ist folgt für das von $\mathcal{I}$ erzeugte Dynkinsystem $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}(E)$. Nach Satz 1.9.4 ist $\mathcal{D}(E)$ eine σ-Algebra. Da $\mathcal{M}$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{I}$ umfasst, ist, gilt

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{D}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}(E) \subset \mathcal{M} \; ,$$

und somit $\mathcal{D}(E) = \mathcal{M}$, und damit gilt für alle $A \in \mathcal{M}$

$$\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E) \; .$$

Bilden $E_k \in \mathcal{I}$, $\mu_1(E_k) = \mu_2(E_k) < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Ω ausschöpfenden Mengen, d.h. $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Wir bilden

$$B_1 := E_1 \; , \; B_k := E_k \setminus \big(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\big) \; , \; k > 1 \; .$$

Dann gilt für $k > 1$,

$$\begin{aligned} \mu_1(A \cap B_k) &= \mu_1\Big(A \cap \big(E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\big)\Big) \\ &= \mu_1\Big(A \cap (\bigcap_{j=1}^{k-1} E_j^c) \cap E_k\Big) \\ &= \mu_1\Big(A \setminus (\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j) \cap E_k\Big) \\ &= \mu_2\Big(A \setminus (\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j) \cap E_k\Big) = \mu_2(A \cap B_k)\ . \end{aligned}$$

Für $k = 1$ gilt $\mu_1(A \cap B_1) = \mu_2(A \cap B_1)$.

Da die B_k paarweise disjunkt sind und $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \Omega$ gilt, so folgt für jede Menge $A \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &= \mu_1\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A \cap B_k)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A \cap B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(A \cap B_k) = \mu_2(A)\ . \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Falls $\mu_1(\Omega) < \infty$ ist, ist die Eigenschaft (E) trivialerweise erfüllt. Für Quader in $\mathbb{R}^n$ und die Borelsche Lesbesgue σ-Algebra, erfüllt das unten definierte Borel-Lebesgue-Maß ebenfalls diese Eigenschaft.

Achtung: Allerdings gibt es Situationen, in denen es nicht genügt, das Maß auf einem Erzeugendensystem zu kennen!

Das Lebesgue-Borel-Maß in $\mathbb{R}$ bzw. im $\mathbb{R}^n$

Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{I} := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$, dann ist $\mathcal{I}$ ein π-System, und $d(\mathcal{I}) = \mathcal{D}(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I})$ die Lebesgue-Borel-σ- Algebra.

Im $\mathbb{R}^n$ betrachten wir n-Quader (n-Zellen) Q und das zugehörige Volumen $\mu_0(Q)$. Auf dem Mengen-Ring $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{B}$ der geometrischen Elementarfiguren ist die Fortsetzung von μ_0 eine σ-additive nichtnegative Mengenfunktion, mit $\mu(\emptyset) = 0$, wie wir in Lemma 1.2.4 gezeigt haben. Nach dem Fortsetzungssatz von Caratheodory gibt es eine Fortsetzung μ dieses Maßes auf die Borel-Algebra $\mathcal{B}$. Dieses Maß ist σ-endlich, und dieses Maß ist wegen des Eindeutigkeitssatzes eindeutig, und heißt das **Lebesgue-Borel-Maß**. Dieses Maß können wir noch zu einem vollständigen Maß vervollständigen.

Satz 1.9.6. *Es es existiert zu $\Omega = \mathbb{R}^n$ eine σ-Algebra $\mathcal{M}$ und ein vollständiges Maß $\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ mit den folgenden Eigenschaften*

1. *auf n-Quadern stimmt es mit dem Volumen überein.*

2. *$\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, d.h. $\mathcal{M}$ enthält alle Borel-Mengen.*

3. *μ ist* **translationsinvariant**, *d.h. zu allen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $E \in \mathcal{M}$ gilt für $\mathbf{x} + E := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{y} \in E\}$.*
$$\mu(\mathbf{x} + E) = \mu(E) \; .$$

Sei $\lambda : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ ebenfalls ein translationsinvariantes Maß. Dann existiert $c > 0$ mit

$$\mu(E) = c\lambda(E) \;\forall E \in \mathcal{B} \; .$$

Beweis. Der erste Teil ist schon gezeigt.

Der Beweis der letzten Behauptung ist Übung! □

Bemerkung 1.9.7. *Wie man unschwer zeigt, sind alle Regelfunktionen über z.B. dem Einheitsintervall $[0,1]$ Lebesgue messbar. Und für Regelfunktionen stimmt das Regelintegral mit dem Lebesgueintegral überein $\int_0^1 f(x)dx = \int_{[0,1]} f d\mu$.*

1.10 Produktmaße

Das folgende Theorem ist mitunter sehr hilfreich.

Satz 1.10.1 (Monotone-Klassen-Theorem)**.** *Sei H eine Klasse reellwertiger Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ auf der Grundmenge Ω, mit den folgenden Eigenschaften*

1. *H ist ein linearer Raum über $\mathbb{R}$,*

2. *Die konstante Funktion $x \mapsto f(x) := 1$, $x \in \Omega$, ist in H,*

3. *Falls $f_n \in H$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$, $x \in \Omega$, dann ist $f \in H$.*

Sei $\mathcal{I}$ ein π-System. Falls H alle charakteristischen Funktionen χ_E mit $E \in \mathcal{I}$ beinhaltet, d.h. $\chi_E \in H$ für alle $E \in \mathcal{I}$, dann sind alle beschränkte und $\sigma(\mathcal{I})$-messbare Funktionen in H enthalten.

Die ersten 3 Bedingungen bedeuten, grob gesprochen, dass man jede beschränkte Funktion in H von unten durch Treppenfunktionen approximieren kann.

Beweis. Sei $\mathcal{D} := \{A \subset \Omega : \chi_A \in H\}$ dann ist nach Voraussetzung $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$. Desweiteren ist $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System (bzw. ein d-System). Denn $\chi_\Omega = 1$, d.h. $\Omega \in \mathcal{D}$. Mit $A \in \mathcal{D}$ ist $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A \in H$, und somit $A^c \in \mathcal{D}$. Für paarweise disjunkte $A_k \in \mathcal{D}$ und $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ gilt $\chi_A = \sum_{k=1}^\infty \chi_{A_k} \in H$. Wegen Satz 1.9.4 ist somit

$$\sigma(\mathcal{I}) = D(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}\,. \tag{1.18}$$

Sei nun o.B.d.A. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\sigma(\mathcal{I})$ messbare Funktion mit $0 \le f(x) \le K$, $x \in \Omega$ mit geeignetem $K \in \mathbb{R}$. (Anderenfalls ersetzen wir f durch $f + C$, mit $C := \inf_{x\in\Omega} f(x)$.) Wir definieren dazu die folgenden Treppenfunktionen

$$x \mapsto f_n(x) := \sum_{k=0}^{K2^n} k2^{-n}\chi_{A_{n,k}}\ ,$$

wobei

$$A_{n,k} := \{x \in \Omega : f(x) \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})\} = f^{-1}\big([k2^{-n}, (k+1)2^{-n})\big)\ .$$

Da f bzgl. $\sigma(\mathcal{I})$-messbar ist, sind alle $A_{n,k} \in \sigma(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}$. Wegen der Voraussetzung und (1.18) gilt für die dazu gehörigen charakteristischen Funktionen $\chi_{A_{n,k}} \in H$, und damit auch $f_n \in H$, $n, k \in \mathbb{N}$. Da diese Funktionen f_n die Funktion f von unten approximieren, folgt, dass $f \in H$ ist. $\square$

Definition 1.10.2. *Sei $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ das kartesische Produkt zweier Grundmengen Ω_1, Ω_2 und $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ zugehörigen Mengen-Algebren. Wir definieren die Rechtecke*

$$R := A \times B \subset \Omega : A \in \mathcal{M}_1, B = \mathcal{M}_2\ .$$

Das Mengensystem $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega)$ soll aus endlichen Vereinigungen paarweise disjunkter Rechtecke $M = \cup_{k=1}^n R_k$ bestehen.
Seien $\mathcal{M}_i$, $i = 1, 2$, zwei σ-Algebren, dann heißt die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ enthält, die **Produkt-σ-Algebra**

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 := \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)\ .$$

Lemma 1.10.3. *Seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ Mengen-Algebren über Ω_1, Ω_2, dann ist $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ eine Mengen-Algebra über Ω.*

Beweis. Die leere Menge ist in $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$. Zu $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_1$, und $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_2$ ist

$$\begin{aligned} (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) &= (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \\ (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) &= \big((A_1 \setminus A_2) \times B_1\big) \cup \big((A_1 \cap A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)\big) \ \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \end{aligned}$$

denn letzteres ist die disjunkte Vereinigung zweier Rechtecke.

Seien $P, Q \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, dann ist $P \setminus Q \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ und wegen

$$P \cup Q = (P \setminus Q) \cup Q \ , \ \ (P \setminus Q) \cap Q = \emptyset \ ,$$

ist $P \cup Q \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$. □

Lemma 1.10.4. *Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$\sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) = \sigma(\mathcal{M}_1) \otimes \sigma(\mathcal{M}_2) \ .$$

Beweis. Da

$$\sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) \subset \sigma\big(\sigma(\mathcal{M}_1) \times \sigma(\mathcal{M}_2)\big) = \sigma(\mathcal{M}_1) \otimes \sigma(\mathcal{M}_2)$$

ist, genügt es die umgekehrte Inklusion zu zeigen.

Sei $B \in \mathcal{M}_2$ beliebig, und $\mathcal{A}_B := \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{M}_1\})$, dann gilt $\mathcal{A}_B \subset \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$. Daher ist

$$\sigma(\mathcal{M}_1) \times \{B\} \subset \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) \, \forall B \in \mathcal{M}_2 \ .$$

Das gleiche gilt mit vertauschten Rollen von A und B, woraus folgt

$$\sigma(\mathcal{M}_1) \times \sigma(\mathcal{M}_2) \subset \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) \ \ \Rightarrow \ \sigma(\mathcal{M}_1) \otimes \sigma(\mathcal{M}_2) \subset \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) \ ,$$

was zu zeigen war. □

Definition 1.10.5. *Seien im Folgenden* $(\Omega_1, \mathcal{M}_1), (\Omega_2, \mathcal{M}_2)$ *zwei messbare Räume und* $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ *das kartesische Produkt der Grundmengen* Ω_1, Ω_2*. Wir definieren die* **Koordinatenprojektionen**

$$\rho_1 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_1 \ , \rho_1(x_1, x_2) := x_1 \ , \ \rho_2 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_2 \ , \ \rho_2(x_1, x_2) := x_2 \ .$$

Proposition 1.10.6. *Sei* $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$*, dann ist* $\mathcal{I} := \{E_1 \times E_2 : E_i \in \mathcal{M}_i, i = 1, 2\}$ *ein die* σ*-Algebra* $\mathcal{M}$ *erzeugendes* π*-System, d.h.* $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{M}$.

Lemma 1.10.7. *Die* **Produkt-σ-Algebra** $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ *ist die kleinste σ-Algebra, für die die beiden Koordinatenprojektionen ρ_1, ρ_2 beides messbare Funktionen sind.*

Beweis. Übung! □

Lemma 1.10.8. *Seien $(\Omega_1, \mathcal{M}_1)$, $(\Omega_2 \mathcal{M}_2)$ messbare Räume und $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ und $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$. Sei zudem $H \subset \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f$ messbar bzgl. $\mathcal{M}\}$ die Menge aller beschränkten messbaren Funktionen mit den Eigenschaften*

- $\forall x_1 \in \Omega_1$ *ist die Abbildung $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ messbar bzgl. $\mathcal{M}_2$,*
- $\forall x_2 \in \Omega_2$ *ist die Abbildung $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ messbar bzgl. $\mathcal{M}_1$.*

Dann enthält H alle beschränkten messbaren Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{M})$, kurz $H := B(\mathcal{M})$.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{I} := \{E_1 \times E_2 : E_i \in \mathcal{M}_i, i = 1, 2\}$, dann ist auch $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ in der Menge H. Die Bedingungen des Monotonen Klassen Theorems 1.10.1 sind, alle erfüllt:

Man sieht leicht, dass H ist ein linearer Raum ist, der die konstanten Funktionen beiinhaltet. Mit jeder monoton wachsenden Folge $f_n(x) \to f(x) \in H$, $\forall x \in \Omega$, sind auch $f_n(., x_2), f_n(x_1, .)$ monoton wachsend und konvergieren zu messbaren Funktionen $f(., x_2)$ bzw. $f(x_1, .)$. Da f z.B. nach Satz 1.3.10 selbst messbar ist, ist $f \in H$.

Wegen $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{I})$ folgt die Behauptung aus diesem Satz 1.10.1. □

Seien μ_1, μ_2 beide **endliche Maße** auf $(\Omega_1, \mathcal{M}_1)$, bzw. $(\Omega_2, \mathcal{M}_2)$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beschränkte messbare Funktion. Wir definieren die beiden Funktionen

$$x_1 \mapsto I_1^f(x_1) := \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \ , \ x_2 \mapsto I_2^f(x_2) := \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \ . \tag{1.19}$$

Lemma 1.10.9. *Sei $H = B(\mathcal{M})$, $\mu_i(\Omega_i) < \infty$, $i = 1, 2$, und $f \in H$, dann gelten*

$$I_1^f \in B(\mathcal{M}_1) \ , \ I_2^f \in B(\mathcal{M}_2) \ ,$$

und

$$\int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} f d\mu_2 \Big) d\mu_1 = \int_{\Omega_1} I_1^f d\mu_1 = \int_{\Omega_2} I_2^f d\mu_2 = \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} f d\mu_1 \Big) d\mu_2 \ .$$

Beweis. Sei $H' \subset B(\mathcal{M})$ mit den obigen Eigenschaften, d.h. $H' := \{f \in B(\mathcal{M}) : I_1^f \in B(\mathcal{M}_1), I_2^f \in B(\mathcal{M}_2), \int_{\Omega_1} I_1^f(x_1)d\mu_1 = \int_{\Omega_2} I_2^f(x_2)d\mu_2\}$ dann ist H' ein linearer Raum, denn

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |I_1^f(x_1)|d\mu_1(x_1) &= \int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} |f(x_1,x_2)|d\mu_2(x_2)\big)d\mu_1(x_1) \\
&\leq \int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} d\mu_2(x_2)\big)d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{\Omega_2} \big(\int_{\Omega_1} d\mu_1(x_1)\big)d\mu_2(x_2) = \mu(\Omega_1)\int_{\Omega_2} |d\mu_2(x_2) = \mu(\Omega_1)\mu(\Omega_2) < \infty \, .
\end{aligned}$$

sowie umgekehrt, insbesondere ist $\chi_\Omega \in H'$. Dann sind für alle $A \in \mathcal{I} = \{E_1 \times E_2 : E_i \in \mathcal{M}_i \ , \ i = 1,2\}$, die charakteristischen Funktionen alle in H' und analog wie im Beweis zu Lemma 1.10.8 zeigt man $H' = H = B(\mathcal{M})$, und damit die letzte Aussage mit dem Satz 1.10.1. (Man beachte: im Fall $\mu_i(\Omega_i) = \infty$ ist $\int_{\Omega_i} \chi_{\Omega_i} d\mu_i = \infty$. Dann lässt sich diese Argumentation nicht anwenden!) □

Definition 1.10.10. 1. *Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, kurz ein Maß μ, heißt σ-***endlich***, falls eine Folge (paarweise disjunkter) Mengen $E_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$, existiert mit $\mu(E_k) < \infty$ und $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$.*

2. *Sei $E \in \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, dann definieren wir*

$$I_1(x_1) := \int_{\Omega_2} \chi_E(x_1,x_2)d\mu_2(x_2) \ , \ I_2(x_2) := \int_{\Omega_1} \chi_E(x_1,x_2)d\mu_1(x_1) \, .$$

Zu zwei σ-endlichen Maßen μ_1, μ_2 (wie oben) definieren wir die nichtnegative Mengenfunktion

$$\mu(E) = \mu_1 \otimes \mu_2(E) := \int_{\Omega_1} I_1(x_1)d\mu_1(x_1) = \int_{\Omega_2} I_2(x_2)d\mu_2(x_2) \, . \tag{1.20}$$

Die obige Definition macht zunächst nur Sinn für Mengen mit endlichem Maß, für die I_1 und I_2 beschränkte messbare Funktionen sind, denn hierfür läßt sich Lemma 1.10.9 anwenden. Da die Maßräume $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ beide σ-endlich vorausgesetzt werden, läßt sich aber das Maß auch auf $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, und damit auch auf $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, wie folgt definieren. Seien $A_k \in \mathcal{M}_1$, $B_n \in \mathcal{M}_2$, $k, n \in \mathbb{N}$, jeweils paarweise disjunkte Mengen mit $\mu_1(A_k) < \infty$, $\mu_2(B_n) < \infty$ und $\Omega_1 = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, $\Omega_2 = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$. Dann definieren wir für allgemeines $E \in \mathcal{M}$

$$\mu(E) := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \mu\big(E \cap (A_k \times B_n)\big) \, .$$

Da $\mu(E \cap (A_k \times B_k)) < \infty$ ein endliches Maß mit 1.20 ist, gilt

$$\begin{aligned}\mu\big(E \cap (A_k \times B_n)\big) &= \int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} \chi_{E \cap (A_k \times B_n)}(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)\big) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \big(\int_{\Omega_1} \chi_{E \cap (A_k \times B_n)}(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)\big) d\mu_2(x_2) \,.\end{aligned}$$

und $\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \chi_{E \cap (A_k \times B_n)}$ approximiert für $N \to \infty$ die charakteristische Funktion χ_E von unten. Aus dem Satz über die Monotone Konvergenz folgt, dass sich die Integrationsreihenfolge vertauschen lässt, und das Maß μ auf $\mathcal{M}$ wohldefiniert ist.

Der folgende zentrale Satz garantiert, dass μ ein Maß auf der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{M}$ ist. Dabei kann nicht auf die Voraussetzung der σ-Endlichkeit von $\mu_{1/2}$ verzichtet werden! (Gegenbeispiel: Übung oder Fachliteratur!)

Satz 1.10.11 (Fubini)**.** *Seien μ_i auf den σ-Algebren $\mathcal{M}_i$, $i = 1, 2$, σ-endliche Maße. Dann definiert die Mengenfuntion $\mu : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ definiert in (1.20) ein eindeutiges Mass $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$ auf der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, für das gilt*

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)\ \forall E_i \in \mathcal{M}_i\ ,\ i = 1, 2\ .$$

Für alle Funktionen $f \in L^1(\Omega, \mu)$ auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{M})$ gilt darüber hinaus $I_i^f \in L^1(\Omega_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$,

$$\mu(f) = \int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_1} I_1^f(x_1) d\mu_1(x_1) = \int_{\Omega_2} I_2^f(x_2) d\mu_2(x_2)\ . \tag{1.21}$$

Beweis. Um die Existenz eines solchen Maßes zu zeigen, genügt es nun noch die σ-Additivität auf der Mengenalgebra $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ zu untersuchen. Sei $E \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ die abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter $E_k \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ und χ_E, χ_{E_k} die zugehörigen charakteristischen Funktionen. Dann sind $\chi_E, \chi_{E_k} \in B(\mathcal{M})$. Mit Lemma 1.10.9, zusammen mit dem Satz über Monotone Konvergenz (Beppo Levi) folgt

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} \chi_E d\mu_1 \Big) d\mu_2 \\
&= \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k} d\mu_1 \Big) d\mu_2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k} d\mu_1 \Big) d\mu_2 \quad (BeppoLevi) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} \chi_{E_k} d\mu_1 \Big) d\mu_2 \quad (Lemma 1.10.9) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \; .
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Existenz mittels des Fortsetzungssatzes von Carathéodory 1.8.9. Da μ eine σ-endliche Mengenfunktion ist, und $\mathcal{I}$ aus Proposition 1.10.6 ein π-System ist, garantiert der Eindeutigkeitssatz 1.9.5 die Eindeutigkeit.

Zu Beweis der letzten Aussage nehmen wir o.B.d.A. an dass $f \geq 0$ (Anderenfalls zerlegen wir $f = f_+ - f_-$.) In diesem Fall lässt sich f durch eine aufsteigende Folge beschränkter Funktionen $f_n \in B(\mathcal{M})$, mit $f_n(x) = 0$ auf $\Omega \setminus E_n$ mit geeigneten messbaren Mengen $E_n = A_n \times B_n \in \mathcal{M}$, $\mu(E_n), \mu_1(A_n), \mu_2(B_n) < \infty$, (punktweise) approximieren. Die Gleichheit (1.21) folgt nun aus dem Satz über Monotone Konvergenz und Lemma 1.10.9

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} I_1^f(x_1) d\mu_1 &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_1} I_1^{f_n}(x_1) d\mu_1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_2} I_2^{f_n}(x_2) d\mu_2 \\
&= \int_{\Omega_2} I_2^f(x_2) d\mu_2 \; .
\end{aligned}$$

□

Korollar 1.10.12. *Die vollständige Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}^2$ ist die Vervollständigung der Produkt-σ-Algebra der vollständigen Borel-σ-Algebren über $\mathbb{R}$. Das Lebesgue Maß im $\mathbb{R}^2$ ist das Produktmaß der Lebesgue-Maße über $\mathbb{R}$.*

Definition 1.10.13. *Im eindimensionalen Fall ist eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ ein* **Normalbereich***, falls $D = [a, b]$ ein kompaktes Intervall ist. Im höherdimensionalen Fall, das heißt $n > 1$, nennen wir eine kompakte Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Normalbereich bezüglich der x_n-Achse, falls ein Normalbereich $E \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ (bezüglich der x_{n-1}-Achse) und zwei stetige Funktionen $G, H : E \to \mathbb{R}$ derart existieren, so dass gilt*

$$D = \left\{ \mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{x}' \\ x_n \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^n : G(\mathbf{x}') \leq x_n \leq H(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}' \in E \right\}.$$

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Normalbereich bezüglich aller Achsen, so sprechen wir kurz von einem Normalbereich im $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 1.10.14.

1. *Der Einheitskreis*

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$

ist ein Normalbereich im $\mathbb{R}^2$, denn es gilt sowohl

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2},\ -1 \leq x \leq 1 \right\}.$$

als auch

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2},\ -1 \leq y \leq 1 \right\}.$$

2. *Die Menge*

$$\triangle^n := \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\ \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \right\}$$

ist ein Normalbereich im $\mathbb{R}^n$. Die Menge $\triangle^n$ wird (Referenz-) n-Simplex genannt.

Satz 1.10.15. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich, das heißt wir haben*

$$D = \left\{ \mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{x}' \\ x_n \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^n : G(\mathbf{x}') \leq x_n \leq H(\mathbf{x}'),\ \mathbf{x}' \in E \right\}$$

mit einem Normalbereich $E \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und zwei stetigen Funktionen $G, H : E \to \mathbb{R}$. Dann ist das Integral einer stetigen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ über D gegeben durch

$$\int_D f\, d\mu = \int_E \left[\int_{G(\mathbf{x}')}^{H(\mathbf{x}')} f(\mathbf{x}', x_n)\, d\mu_n(x_n) \right] d\mu'(\mathbf{x}').$$

mit $\mu = \mu' \otimes \mu_n$, μ_n ist das Lebesgue-Maß über $\mathbb{R}$ in der n-ten Variablen, μ' über $\mathbb{R}^{n-1}$.

Beweis. Wir betrachten $\Omega := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ versehen mit dem Lebesgue-Maß, und $D \subset \Omega$ ein Normalbereich. Wir betrachten die Funktion $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})\chi_D(\mathbf{x})$, dann ist D eine messbare Menge und g eine integrable Funktion. Die Anwendung des Satzes von Fubini liefert uns das Ergebnis. □

Beispiel 1.10.16. *Sei der Normalbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch*

$$D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1\}$$

und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 1$. Dann ist

$$\int_D f\ d\mu = \int_D 1\ d\mu(x,y) = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x 1\ d\mu(y)\right] d\mu(x) = \int_0^1 \left[y\big|_{x^2}^x\right] d\mu(x) = \int_0^1 (x - x^2)\ d\mu(x) = \frac{1}{6}.$$

Es sei angemerkt, dass diese Größe dem Flächeninhalt von D entspricht.

1.11 Absolutstetige Maße und der Satz von Radon-Nikodym

Lemma 1.11.1. *Sei $g \in L^1(\Omega, \mu)$, $E \in \mathcal{M}$ mit*

$$0 \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A g d\mu \leq 1 \ \ \forall A \in \mathcal{M}\ ,\ A \subset E\ .$$

Dann gilt $0 \leq g(x) \leq 1$ fast überall (bzgl. des Maßes μ) in E.

Beweis. Übungsaufgabe! □

Definition 1.11.2. *Ein Maß λ heißt* **absolut stetig** *bzgl. eines weiteren Maßes μ, kurz $\lambda \ll \mu$, falls für alle $A \in \mathcal{M}$ aus $\mu(A) = 0$ folgt $\lambda(A) = 0$.*

Satz 1.11.3 (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Seien λ ein (positives) endliches Maß und μ ein (positives) σ-endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{M}$ über einer Grundmenge Ω, $\mu(\Omega), \lambda(\Omega) < \infty$ mit $\lambda \ll \mu$. Dann existiert genau eine Funktion $h \in L^1(\Omega, \mu)$ mit*

$$\lambda(E) = \int_E h d\mu \ \ \forall E \in \mathcal{M}\ . \tag{1.22}$$

Beweis. Wir beweisen zuerst den Fall dass μ ein endliches Maß ist, d.h. $\mu(\Omega) < \infty$:

Sei $\phi := \lambda + \mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}_+}$, d.h. $\phi(A) = \mu(A) + \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{M}$ dann gilt ebenfalls $\phi(\Omega) < \infty$. Es gilt für beliebige $E \in \mathcal{M}$ und $f := \chi_E$ die charakteristische Funktion auf E

$$\int_\Omega f d\phi = \int_\Omega \chi_E d\phi = \phi(E) = \lambda(E) + \mu(E) = \int_\Omega f d\lambda + \int_\Omega f d\mu \, . \tag{1.23}$$

Daher gilt obige Beziehung (1.23) auch für alle Treppenfunktionen, und weiter auch für alle messbaren Funktionen mit $f \geq 0$. Falls zudem f eine beliebige messbare Funktion mit $f \in L^2(\Omega, \phi)$ ist, folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, wegen $\phi(\Omega) < \infty$ dass

$$|\int_\Omega f d\lambda| \leq \int_\Omega |f| d\lambda \leq \int_\Omega |f| d\phi = \int_\Omega 1 \cdot |f| d\phi \leq \big(\int_\Omega |f|^2 d\phi \big)^{1/2} \big(\phi(\Omega) \big)^{1/2} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega,\phi)} \, .$$

Dies bedeutet, dass

$$f \mapsto \int_\Omega f d\lambda : L^2(\Omega, \phi) \to \mathbb{R}$$

ein beschränktes, und damit stetiges, lineares Funktional auf dem Hilbertraum $H = L^2(\Omega, \phi)$ ist. Dann existiert nach dem Darstellungs-Satz 1.7.2 zu einem solchen Funktional eine Funktion $g \in H = L^2(\Omega, \phi)$ mit

$$\int_\Omega f d\lambda = \langle f, g \rangle = \int_\Omega f g d\phi \;\; \forall f \in L^2(\Omega, \phi) \, . \tag{1.24}$$

Sei $A \in \mathcal{M}$ mit $\phi(A) > 0$, $f := \chi_A \in L^2(\Omega, \phi)$. Wegen $0 \leq \lambda \leq \phi$ und

$$\phi(A) \geq \lambda(A) = \int_\Omega \chi_A d\lambda = \int_A g d\phi \, ,$$

gilt

$$0 \leq \frac{1}{\phi(A)} \int_A g d\phi \leq 1 \, .$$

Nach Lemma 1.11.1 folgt hieraus, dass fast überall bzgl. ϕ, d.h. bis auf eine (Null)-Menge N mit $\phi(N) = 0$, gilt $0 \leq g(x) \leq 1$ $x \in \Omega \setminus N$.

Wir nehmen daher o.B.d.A. an, dass $0 \leq g(x) \leq 1$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Wir definieren zwei disjunkte Mengen

$$E := \{x : 0 \leq g(x) < 1\} \;\; , \;\; C := \{x : g(x) = 1\} = E^c \, ,$$

und für beliebige $A \in \mathcal{M}$

$$\lambda_a(A) := \lambda(A \cap E) \;\; , \;\; \lambda_s(A) := \lambda(A \cap C) \, .$$

Wegen $\mu = \phi - \lambda$ erhalten wir aus (1.23) und (1.24)

$$\int_\Omega (1-g) f d\lambda = \int_\Omega f g d\mu \ , \ \forall f \in L^2(\Omega, \phi) \ . \tag{1.25}$$

Wählen wir $f := \chi_C$, dann folgt $(1-g(x))\chi_C(x) = 0$, $x \in \Omega$, und daher

$$\mu(C) = \int_C d\mu = \int_C g d\mu = \int_\Omega g \chi_C d\mu = \int_\Omega (1-g)\chi_C d\lambda = 0.$$

Für die Wahl $A := C$ so ist $\mu(C) = 0$ und nach Voraussetzung der Absolutstetigkeit $\lambda(C) = \lambda_s(C) = 0$ und damit $0 \le \lambda_s(B) = \lambda(B \cap C) \le \lambda(C) = 0$, sowie $\lambda_a(B) = \lambda(B)$ für alle $B \in \mathcal{M}$.

(In der Tat definiert im allgemeinen Fall λ_s ebenfalls ein (positives) und endliches Maß, ein sogenanntes singuläres Maß.)

Sei $A \in \mathcal{M}$, und betrachten wir

$$\sum_{k=0}^n g^k(x) \chi_{A\cap E}(x) = \frac{1 - g^{n+1}(x)}{1 - g(x)} \ , \text{ für } \ x \in E \ \text{ und } \ f(x) = 0 \text{ sonst} \ .$$

so folgt aus (1.25)

$$\int_A ((1 - g^{n+1}) d\lambda = \int_{A\cap E} (1-g) \sum_{k=0}^n g^k d\lambda = \int_A (1-g) \sum_{k=0}^n g^k d\lambda = \int_A \sum_{k=0}^n g^{k+1} d\mu \ . \tag{1.26}$$

Denn falls $x \in C$, d.h. nach Definition $g(x) = 1$ ist, gilt $1 - g^{n+1}(x) = 0$. Für $x \in E$ ist $1 > g^n(x) \ge g^{n+1}(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Daher folgt mit Beppo Levi

$$\int_A (1 - g^n) d\lambda \le \int_A (1 - g^{n+1}) d\lambda \to \lambda(A \cap E) = \lambda(A) < \infty \ , \ n \to \infty \ .$$

Wir wenden nun das Monotone Konvergenztheorem 1.5.1 an, und erhalten dass der Integrand auf der rechten Seite

$$\sum_{k=1}^n g^k(x) \to h(x) \ge 0 \ , \ n \to \infty \ ,$$

monoton gegen eine messbare Funktion h konvergiert. Mit (**??**) folgt

$$\int_A \sum_{k=0}^n g^{k+1} d\mu = \int_A (1-g) \sum_{k=0}^n g^k d\lambda = \int_A (1 - g^{n+1}) d\lambda \ < \int_\Omega d\lambda = \lambda(\Omega) < \infty \ ,$$

und mit Satz 1.5.1

$$\int_A h d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=0}^n g^{k+1} d\mu \le \lambda(\Omega) < \infty$$

und damit $h \in L^1(\Omega, \mu)$. Für A mit

$$\mu(A) = 0 \quad \text{folgt} \quad \lambda(A) = \int_{E\cap A} h d\mu \leq \int_A h d\mu = 0 \,,$$

d.h. λ ist absolut-stetig bzgl.μ, kurz $\lambda_a = \lambda \ll \mu$.

Zum Beweis der Eindeutigkeit seien $h_1, h_2 \in L^1(\Omega, \mu)$, so folgt aus

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(A) - \lambda(A) = \int_A h_1 d\mu - \int_A h_2 d\mu \\ &= \int_A (h_1 - h_2) d\mu \ \ \forall A \in \mathcal{M} \,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt analog zu Lemma 1.11.1, dass h_1, h_2 bezgl. μ fast überall übereinstimmen, d.h. $h_1 = h_2 \in L^1(\Omega, \mu)$.

Im allgemeinen Fall σ-endlicher Maße existiert eine Folge paarweise disjunkter Mengen E_k, $\mu(E_k) < \infty$ mit $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. Somit gibt es messbare Funktionen h_k, mit $h_k \in L^1(E_k, \mu)$, und $h := \sum_{k=1}^\infty h_k \chi_{E_k}$, so dass gilt

$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^\infty \lambda(E \cap E_k) = \sum_{k=1}^\infty \int_{E\cap E_k} h_k d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_\Omega h_k \chi_{E_k \cap E} d\mu = \int_E h d\mu \,.$$

Da $\int_\Omega h d\mu = \lambda(\Omega) < \infty$ ist gilt $h \in L^1(\Omega, \mu)$. □

Bemerkung 1.11.4.

- *Verzichtet man auf die Forderung $\lambda \ll \mu$, so existiert eine sogenannte Lebesgue Zerlegung $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ in ein singuläres Maß λ_s und ein absolutstetiges Maß $\lambda_a \ll \mu$.*

- *Die Funktion $h \in L^1(\Omega, \mu)$ mit $\lambda(A) = \int_A h d\mu$ heißt auch die* **Radon-Nikodym Ableitung** *von λ nach μ, kurz $h = \frac{d\lambda}{d\mu}$ oder $d\lambda = h d\mu$.*

- *Die Voraussetzung der σ-Endlichkeit der Maße kann nicht weiter abgeschwächt werden, wie Gegenbeispiele zeigen (siehe Fach-Literatur).*

1.12 Die Transformationsformel - Substitutionsregel im $\mathbb{R}^n$

Im Folgenden sei $\|.\|$ die Euklidsche Norm im $\mathbb{R}^n$ und μ bezeichnet das (Borel-)Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ und $\{B\}$ die Borel-σ-Algebra.

Lemma 1.12.1. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und erfülle $f : A \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzbedingung auf A, d.h. es existiert $L > 0$ mit*

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ .$$

Falls A eine μ-Nullmenge (kurz Nullemenge) ist, d.h. $\mu(A) = 0$, dann ist die Bildmenge ebenfalls eine Nullmenge, d.h. $\mu\big(f(A)\big) = 0$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, dann existieren nach Lemma 1.1.7 n-dimensionale Würfel Q_k, $k \in \mathbb{N}$, der Seitenlänge $d_k > 0$, die A überdecken $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Q_k) \leq \mu(A) + \epsilon = \epsilon$.

Dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein Würfel R_k mit der Seitenlänge $r_k \leq 2Ld_k$ mit $f(A \cap Q_k) \subset R_k$, da

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq L\mathrm{diam} Q_k \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A \cap Q_k \ .$$

Somit gilt $\mu(R_k) \leq (2L)^n \mu(Q_k)$ und

$$\mu\big(f(A)\big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) \leq (2L)^n \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Q_k) \leq (2L)^n \epsilon \ , \forall \epsilon > 0 \ .$$

□

Korollar 1.12.2. *Sei $A \subset \mathbb{R}^m$ und erfülle $f : A \to \mathbb{R}^n$, $m < n$, eine Lipschitzbedingung, dann ist $\mu\big(f(A)\big) = 0$.*

Beweis. Da $m < n$ gilt für das Lebesgue Maß im $\mathbb{R}^n$ dass $\mu(A) = 0$ und mit dem vorigen Lemma folgt $\mu(f(A)) = 0$. □

Bemerkung: Es genügt nicht lediglich die Stetigkeit von f zu fordern, wie das Beispiel der raumfüllenden bijektiven Hilbertkurve $f : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$ zeigt.

Lemma 1.12.3. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, d.h. $f \in C^1(U)$. Falls $N \subset U$ eine Nullmengen ist, d.h. $\mu(N) = 0$, dann ist auch $f(N)$ eine Nullmenge*

$$\mu\big(f(A)\big) = 0 \ .$$

Beweis. Die offene Menge U läßt sich nach Lemma 1.1.7 durch abzählbar viele abgeschlossene Würfel (n-Zellen) Q_k, $k \in \mathbb{N}$ überdecken. Da $Q_k = \overline{Q}_k$ alle beschränkt und somit kompakte

Mengen sind, erfüllt $f : U \cap Q_k \to \mathbb{R}^n$ auf jedem dieser Würfel eine Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstanten L_k . Daher folgt aus Lemma 1.12.1 dass $\mu\big(f(N \cap Q_k)\big) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, und somit

$$\mu\big(f(N)\big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\big(f(N \cap Q_k)\big) = 0\ .$$

□

Lemma 1.12.4. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offenene Mengen und $\Phi : U \to V$ stetig differenzierbar, d.h. $\Phi \in C^1(U)$, und bijektiv mit $\det \Phi'(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in U$. Seien $A \subset V$, $B \subset U$ Borelmengen in $\mathbb{R}^n$, d.h. $A, B \in \mathcal{B}$. dann sind auch die Urbildmenge von A und die Bildmenge von B*

$$\Phi^{-1}(A) \in \mathcal{B}\ \ ,\ \ \Phi(B) \in \mathcal{B}\ ,$$

beides Borelmengen.

Beweis. Da $\Phi : U \to V$ stetig ist nach Corollar 1.3.6 $\Phi : U \to V$ messbar. (Genauer gesagt messbar in bzgl. der Spur-σ-Algebren $\mathcal{B}|_U; \mathcal{B}|_V$.) Nach Definition der Messbarkeit von Funktionen ist $\Phi^{-1}(A)$ messbar.

Aus der Bedingung $\Phi'(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in U$, und er Bijektivität folgt mit dem Satz über Inverse Funktionen **??** (Analysis II), dass die Inverse Abbildung $\Phi^{-1} : \Phi(U) \to U$ ebenfalls stetig differenzierbar ist. (Wir sagen dazu $\Phi : U \to \Phi(U) \subset V$ ist eine Diffeomorphismus.) Wir wenden z.B. die obige Argumentation auf $\Phi^{-1} : \Phi(U) \to U$ an, und erhalten dass die Urbildmenge

$$\big(\Phi^{-1}\big)^{-1}(B) = \Phi(B) \in \mathcal{B}$$

messbar ist. Der Rest des Beweises folgt analog. □

Satz 1.12.5. *[Lemma von Sard] Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to \mathbb{R}^n \in C^1(U)$, d.h. stetig differenzierbar, dann ist die Bildmenge $\Phi(S)$ der Menge*

$$S := \{\mathbf{x} \in U : \det \Phi'(\mathbf{x}) = 0\}$$

eine Borelmenge vom Lebesgue-Maß 0, d.h. $\mu(\Phi(S)) = 0$.

Beweis. Sei $Q \subset U$ ein abgeschlossener Würfel der Kantenlänge $r > 0$. Da $\Phi' : U \to \mathbb{R}^n$ stetig ist, ist $S \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $S \cap Q \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann existiert $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, so daß

$$Q \cap S \subset \bigcup_{k=1}^{N^n} Q_k \ ,$$

eine Überdeckung druch Würfel Q_k der Kantenlänge $\frac{r}{N}$ liefert, und dass zudem

$$\|\Phi(\mathbf{x}) + \Phi'(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \epsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \epsilon \frac{d\sqrt{n}}{N} \ , \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q_k \ ,$$

gilt. Sei $Q_k \cap S \neq \emptyset$, und $x \in S \cap Q_k$, dann ist wegen $\det \Phi'(\mathbf{x}) = 0$, die Menge

$$\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) + \Phi'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \ , \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\} \ ,$$

ein affiner Teilraum der Dimension $\leq n - 1$.

Daraus folgt für $Q_k \cap S \neq \emptyset$, dass $\Phi(Q_k)$ in einem n-dimensionalen Zylinder mit einer kugelförmigen Basis mit Radius $R = \frac{Lr\sqrt{n}}{N}$ und einer Höhe von $h = \frac{\epsilon r\sqrt{n}}{N}$ enthalten ist. Daher gilt für das n-dimensionale Lebesgue Maß von $\Phi(Q_k)$, dass eine Konstante $C = C(L, n) > 0$ existiert mit

$$\mu\big(\Phi(Q_k \cap S)\big) \leq C\epsilon \frac{r^n}{N^n} \ , \forall k \ .$$

Durch Aufsummieren all dieser Inhalte, und mit $\epsilon \to 0$ folgt daher

$$\mu(\Phi(Q \cap S)) = 0 \ .$$

Da sich U als abzählbare Vereinigung $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ abgeschlossener Würfel darstellen läßt, ist

$$\mu(\Phi(S)) = \mu\big[\Phi\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Q_n \cap S)\big)\big] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n \cap S) = 0 \ .$$

□

Wir betrachten zuerst lineare bzw. affine Abbildung $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, bzw. $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Zur Darstellung wählen wir die Basis aus kanonischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Lemma 1.12.6. *Sei $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ und seien $\mathbf{a}_k$, $k = 1, \ldots, n$ die Spalten von $\mathbf{A}$. Für jede Borelmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist dann das Lebesguemaß*

$$\mu(\Phi(E)) = |\det(\mathbf{A})|\mu(E) \tag{1.27}$$

Sei

$$\mathbf{G} := (g_{i,j}) \ \ mit \ \ g_{i,j} := \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j} \ ,$$

dann gilt für (1.29) die Darstellung

$$\mu(\Phi(E)) = \sqrt{\det(\mathbf{G})}\mu(E) \ . \tag{1.28}$$

Beweis. Sei zunächst $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Wir behandeln zuerst drei spezielle Transformationen

1. $\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1$, und $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_i$, $i = 2, \ldots, n$,
2. Sei $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ eine Matrix, die eine Koordinatenpermutation $\mathbf{P}$ beschreibt.
3. Sei $\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, und $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \alpha\mathbf{e}_i$, $i = 2, \ldots, n$.

Die drei obigen Fälle beschreiben Elementarumforumgen von Matrizen in der linearen Algebra und Diagonalmatrizen.

Wir erinnern, das Volumen des Einheitswürfels ist $\mu(Q) = 1$.

1. Sei $Q = [0,1]^n$ der Einheitswürfel, und o.B.d.A. $\alpha \geq 0$, dann gilt im ersten Fall dass

   $$\mu(\mathbf{A}Q) = \int_0^\alpha d\mu_1 \prod_{k=2}^{n} \int_0^1 d\mu_k = |\alpha| = |\det(\mathbf{A})|\mu(Q) \ .$$

   Diese Formel gilt, wie man durch Zerlegung in kleine Quader leicht sieht, dann auch für beliebige n-Zellen (Quader), geometrische Elementarfiguren und somit für alle μ messbaren Mengen $E \in \mathcal{M}$.

2. Unter Vertauschungen von Variablen bleibt das Volumen von Quadern konstant $\mu(\mathbf{P}Q) = \mu(Q)$. Diese Formel überträgt sich (wie oben) auch auf alle $E \in \mathcal{M}$. Andererseits ist die Determinante $\det(\mathbf{P}) = \pm 1$, und daher gilt für $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ dass

   $$\mu(\mathbf{A}E) = \mu(E) = |\det(\mathbf{A})|\mu(E) \ , \ E \in \mathcal{M}.$$

3. Sei
$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \ , \ \ \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \ , \ 2 \le j \le n$$
dann ist $\det(\mathbf{A}) = 1$. Es folgt mit dem Satz von Fubini für den Einheitswürfel Q
$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{A}Q) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\mathbf{A}Q) d\mu \\ &= \Big[\int_0^1 \Big(\int_{x_1}^{1+x_1} d\mu_2(x_2) \Big) d\mu_1(x_1) \Big] \prod_{k=3}^{n} \int_0^1 d\mu_k \\ &= 1 = \mu(Q) = |\det \mathbf{A}| \mu(Q) \ . \end{aligned}$$
(Man bemerke, im $\mathbb{R}^2$ ist $\mathbf{A}Q$ das von $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ aufgespannte Parallelogramm. Dies hat den Flächeninhalt 1.) Wiederum zeigt man daraus, dass obige Formel auch für allgemeine messbare Mengen $E \in \mathcal{M}$ gilt.

Sei nun $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ beliebig. Aus der linearen Algebra wissen wir, das wir $\mathbf{A}$ als Komposition von Elementarumformungen schreiben können $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_l$. Dabei gilt $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_1 \det \mathbf{A}_2 \ldots \det \mathbf{A}_l$. Durch Anwenden der oben gefundenen Regeln erhalten wir schließlich
$$\mu(\mathbf{A}E) = |\det(\mathbf{A}_1)|\mu(\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_l E) = |\det \mathbf{A}_1||\det \mathbf{A}_2| \ldots |\det \mathbf{A}_l|\mu(E) = |\det(\mathbf{A})|\mu(E) \ .$$

Es bleibt noch der Fall $\det(\mathbf{A}) = 0$ zu untersuchen. Hierhat aber $\mathbf{A}$ nicht vollen Rang, und mit Korollar 1.12.2 folgt in diesem Fall $\mu(\mathbf{A}E) = 0 = |\det(\mathbf{A})|\mu(E)$.

Wir bemerken abschließend, dass eine Translation $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{b}$ das Maß unverändert lässt $\mu(\Phi(E)) = \mu(E)$.

Es gilt $\mathbf{G} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ und damit folgt $\det(\mathbf{G}) = \det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = |\det(\mathbf{A})|^2$.

□

Korollar 1.12.7. *Sei* $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, *mit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *und seien* $\mathbf{a}_k$, $k = 1, \ldots, n$ *die Spalten von* $\mathbf{A}$. *Sei* $Q := [0,1]^n$ *der n-dimensionale Einheitswürfel. Dann ist* $\Phi(Q)$ *ein* **Parallelepiped** *mit einem Lebesguemaß (Volumen)*
$$\mu(\Phi(Q)) = |\det(\mathbf{A})| \tag{1.29}$$
Sei
$$\mathbf{G} := (g_{i,j}) \ \ mit \ \ g_{i,j} := \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} \ ,$$
dann gilt für (1.29) die Darstellung
$$\mu(\Phi(Q)) = \sqrt{\det(\mathbf{G})} \ . \tag{1.30}$$

Lemma 1.12.8. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offenene Mengen und $\Phi : U \to V$ stetig differenzierbar, d.h. $\Phi \in C^1(U)$ und* **bijektiv** *mit $\det \Phi'(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in U$. Dann gilt für alle abgeschlossenen n-Zellen (Quader) $R \subset U$ dass*

$$\lambda(R) := \mu\big(\Phi(R)\big) = \int_R |\det(\Phi'(\mathbf{x})| d\mu \; . \tag{1.31}$$

Beweis. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung von R in abgeschlossene Würfel Q_k mit Kantenlänge ϵ, deren Inneres paarweise disjunkt ist, d.h.

$$R = \bigcup_{k=1}^{N(\epsilon)} Q_k \; , \; \mathrm{diam} Q_k \leq 2\epsilon \; .$$

Wir bemerken zuerst, dass die Bildmengen $\Phi(Q_k)$ von Würfeln Q_k alles messbare Mengen sind. Da die Ränder der einzelnen Würfel ∂Q_k Nullmengen sind, ist auch der Schnitt von Bildmengen zweier nichtidentischer Würfel eine Nullmengen $\mu(\Phi(Q_k) \cap \Phi(Q_j)) = 0$. Und damit gilt

$$\lambda(R) = \sum_{k=1}^{N(\epsilon)} \mu\big(\Phi(Q_k)\big) \; \forall \epsilon > 0.$$

Für den Grenzfall $\epsilon \to 0$, bzw. $N(\epsilon) \to \infty$ bleibt die obige Gleichung erhalten.

Sei $\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) := \Phi'(\mathbf{x}_0)\Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in U$, dann ist $\tilde{\Phi}'(\mathbf{x}_0) = I$. Es gilt nach Lemma 1.12.6

$$\mu\big(\tilde{\Phi}(Q_k)\big) = |\det(\Phi'(\mathbf{x}_0))| \mu\big(\Phi(Q_k)\big) \; .$$

Da R eine kompakte Menge ist, ist Φ' auf R gleichmässig stetig, und daher existiert eine Konstante $C > 0$, so dass zu jedem Würfel Q_k mit Mittelpunkt $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x} \in Q_k$ gilt

$$\big[\Phi'(\mathbf{x}_k)\big]^{-1}\big(\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}_k)\big) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \; , \text{ mit } \|\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)\| \leq C(\epsilon)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \; , \; C(\epsilon) \to 0 \; , \; \epsilon \to 0.$$

Die Mengen $Q(\mathbf{z}, r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_\infty \leq r\}$ seien abgeschlossene Würfel mit Mittelpunkt $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ und $0 < r \leq \epsilon$. Falls $Q(\mathbf{z}, r) \subset K$, dann folgt aus $\mathbf{x} \in Q(\mathbf{z}, r)$ dass $\|\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) - \tilde{\Phi}(\mathbf{z})\|_\infty \leq (1 + 2C(\epsilon))r$, und daraus dass $\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) \in Q(\tilde{\Phi}(\mathbf{z}), (1 + 2C(\epsilon))r)$. Woraus wir die Beziehung

$$\tilde{\Phi}(Q(\mathbf{z}, r)) \subset Q(\tilde{\Phi}(\mathbf{z}), (1 + 2C(\epsilon))r)$$

folgern.

Nun verwenden wir wieder den Satz über Inverse Funktionen (bzw. über Implizite Funktionen). Und zeigen damit für $\mathbf{y} \in Q(\tilde{\Phi}(\mathbf{z}), (1 - 2C(\epsilon))r)$ gibt es ein $\mathbf{x} \in K$ mit $\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, dazu muss

$r \leq \epsilon$ hinreichend klein gewählt sein. Dies bedeutet $\|\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) - \tilde{\Phi}(\mathbf{z})\|_\infty \leq (1 - 2C(\epsilon))r$ und wir erhalten die Inklusion

$$Q(\tilde{\Phi}(\mathbf{z}), (1-\epsilon)r) \subset \tilde{\Phi}(Q(\mathbf{z}, r)) \ .$$

Fassen wir zusammen, für alle Würfel $Q(\mathbf{z}, r)$ mit hinreichend kleiner Kantenlänge $2r$ ist

$$Q(\tilde{\Phi}(\mathbf{z}), (1-2C(\epsilon))r) \subset \tilde{\Phi}(Q(\mathbf{z}, r)) \subset Q(\tilde{\Phi}(\mathbf{z}), (1+2C(\epsilon))r)$$

Somit gilt für $\mu\big(\tilde{\Phi}(Q_k)\big) = \frac{\Phi(Q_k)}{\left|\det\left(\Phi(\mathbf{x}_k)\right)\right|}$ dass

$$\begin{aligned} \left|\det\left(\Phi'(\mathbf{x}_k)\right)\right|\mu(Q_k)(1-2C(\epsilon)^n &\leq \\ \mu\big(\Phi(Q_k)\big) &\leq \left|\det\left(\Phi'(\mathbf{x}_k)\right)\right|\mu(Q_k)(1+2C(\epsilon)^n \ , \ \forall \epsilon > 0 \ . \end{aligned}$$

Wir erhalten durch Summation über alle $Q_k = Q_k(\epsilon)$ und dem Grenzübergang $\epsilon \to 0$, da für $\epsilon \to 0$ dann auch $C(\epsilon) \to 0$ geht, das behauptete Resultat. □

Satz 1.12.9. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offenene Mengen und $\Phi : U \to V$ stetig differenzierbar, d.h. $\Phi \in C^1(U)$ und* **bijektiv**. *Dann gilt für alle $g \in L^1(\Phi(U), \mu)$, dass für $\mathbf{x} \mapsto |\det(\Phi'(\mathbf{x}))| g(\Phi(\mathbf{x})) =: f(\mathbf{x})$, $f \in L^1(U, \mu)$ und*

$$\int_{\Phi(E)} g d\mu = \int_E g \circ \Phi |\det(\Phi')| d\mu \ , \ \forall E \in \mathcal{M} \text{ mit } E \subset U \ . \tag{1.32}$$

Proof. Sei zunächst $\det(\Phi'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$, d.h die Determinante der Jakobimatrix verschwinde nirgends.

Wir bemerken, dass $E \mapsto \lambda(E) := \mu(\Phi(E))$ ein σ-endliches Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{M}$ ist. Denn nach Voraussetzung existiert wegen des Satzes über Inverse Funktionen eine stetig (differenzierbare) Umkehrfunktion$\Psi : \Phi(U) \to U$. Diese Funktion ist daher messbar, und das zugehörige Bildmaß ist $E \mapsto \mu(\Psi^{-1}(E)) = \mu(\Phi(E)) = \lambda(E)$. Ebenso definiert $E \mapsto \lambda'(E) := \int_E |\det(\Phi'(\mathbf{x}))| d\mu$ ein Maß. Die Menge der n-Quader R in $\mathbb{R}^n$ ist ein π-System, auf dem nach Lemma 1.12.8 die beiden Maße übereinstimmen

$$\lambda(R) = \lambda'(R) \, \forall R \ - \ n - \text{Quader}$$

Der Eindeutigkeitssatz 1.9.5 sichert die Identität auf der gesamten σ-Algebra

$$\mu(\Phi(E)) = \lambda(E) = \lambda'(R) = \int_E |\det(\Phi'(\mathbf{x}))| d\mu \, \forall E \in \mathcal{M}.$$

Man ersieht aus dieser Darstellung, dass für $\mu(\Phi(U)) < \infty$ gilt $\lambda << \mu$ absolutstetig bzgl. μ ist, und $\frac{d\lambda}{\mu} = |\det(\Phi'(\mathbf{x}))|$ ist die zugehörige Radon-Nikodym-Ableitung, mit $|\det(\Phi'(.))| \in L^1(U, \mu)$, Wir zeigen nun, dass $f = \big|\det(\Phi'(.))\big| \, \big(g \circ \Phi\big) \in L^1(U, \mu)$ ist. O.B.d.A. sei $0 \leq g$, dann approximieren wir $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n$ durch eine aufsteigende Folge $g_n \leq g_{n+1} \in L^1(\Phi(U), \mu)$ beschränkter Funktionen. Es gilt daher $|\det(\Phi'(.))|(g_n \circ \Phi) \in L^1(U, \mu)$ falls $\mu(\Phi(U)) < \infty$. Wir integrieren auf $E \in \mathcal{M}$, $E \subset U$, $\mu(\Phi(E)) < \infty$,

$$\int_E (g_n \circ \Phi) d\lambda = \int_E (g_n \circ \Phi)|\det(\Phi'(.))| d\mu = \int_{\Phi(E)} g_n d\mu \; n \in \mathbb{N} \, .$$

und

$$\int_{\Phi(U)} g_n d\mu \leq \int_{\Phi(U)} g d\mu < \infty$$

folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz, dass

$$\int_{\Phi(U)} g d\mu = \int_U g \circ \Phi |\det(\Phi'(.))| d\mu < \infty \, ,$$

und im gleichen Atemzug mit dem Monotone Konvergenzsatz (Beppo Levi) die Transformationsformel (1.32) für $\mu(E) < \infty$, zunächst für $g \geq 0$ aber durch Zerlegung $g = g_+ - g_-$ für alle $g \in L^1(\Phi(U), \mu)$.

Wir verwenden die σ-Endlichkeit. Es gibt eine Folge paarweise disjunkter Mengen $E_k \subset U$, mit endlichen Maßes $\lambda(E_k) = \mu(\Phi(E_k)) < \infty$ mit $U = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. Wegen der Invertierbarkeit von $\Phi : U \to \Phi(U)$, sieht man dass die $\Phi(E_k)$ eine paarweise disjunkte Zerlegung von $\Phi(U) = \bigcup_{k=1}^\infty \Phi(E_k)$ darstellen. Dann gilt für allgemeine $E \in \mathcal{M}$, $E \subset U$,

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(E)} g d\mu &= \sum_{k=1}^\infty \int_{\Phi(E)\cap\Phi(E_k)} g d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_{\Phi(E\cap E_k)} g d\mu \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_{E\cap E_k} g \circ \Phi d\lambda = \int_E g \circ \Phi |\det(\Phi')| d\mu \, . \end{aligned}$$

Wir lassen nun die Voraussetzung nichtverschwindender Jakobideterminante fallen. Hierfür zerlegen wir $U = S \cup U^o$, mit $S := \{\mathbf{x} \in U : \det(\Phi'(\mathbf{x}))| = 0\}$ und $U^o := U \setminus S$. Wegen der Stetigkeit von Φ', ist damit auch $F(.) := \big|\det(\Phi'(.))\big| : U \to \mathbb{R}$ stetig, und daher ist $S = F^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Somit $U^o = U \cap S^c$ eine offene Menge, auf der die Jakobideterminante nicht verschwindet $\det(\Phi'(\mathbf{x})) \neq 0$, $\forall \mathbf{x} \in U^o$. Für U^o sind alle Behauptungen schon bewiesen. Aber wir bemerken, dass nach dem Lemma von Sard 1.12.5 $\Phi(S)$ eine Nullmenge ist, d.h. $\mu(\Phi(A)) = 0$. Was den allgemeinen Satz beweist. □

Korollar 1.12.10. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offenene Mengen und $\Phi : U \to V$ stetig differenzierbar, d.h. $\Phi \in C^1(U)$, und sei $E \in \mathcal{B}$, $E^o := E \setminus \partial E \subset U$, mit $\mu(\partial E) = 0$, und im Inneren sei $\Phi : E^o \to \Phi(E^o)$ injektiv. Dann gilt für alle $g \in L^1(\Phi(E), \mu)$, dass für $\mathbf{x} \mapsto |\det(\Phi'(\mathbf{x}))| g(\Phi(\mathbf{x})) =: f(\mathbf{x})$, $f \in L^1(E, \mu)$ und*

$$\int_{\Phi(E)} g d\mu = \int_E g \circ \Phi |\det(\Phi')| d\mu \ . \tag{1.33}$$

Beweis. Die Zerlegung ist disjunkt. Für E^o ist die Formel (1.33) bereits bewiesen. Wegen Lemma 1.12.3 ist $\mu\big(\Phi(\partial E)\big) = 0$. □

Beispiel 1.12.11. 1. *Zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ definieren ein Parallelogramm E via*

$$E = \{\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} : 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\},$$

dessen Fäche $V(E)$ gegeben ist durch

$$V(E) = \int_E d\mathbf{x} = |\det([\mathbf{u}, \mathbf{v}])|.$$

2. *Für drei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ definiert*

$$E = \{\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1\}$$

einen Spat. Sein Volumen $V(E)$ ist gegeben durch

$$V(E) = \int_E d\mathbf{x} = |\det([\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}])|.$$

3. *Wir betrachten* **Polarkoordinaten** *in $\mathbb{R}^2$, das heißt $\mathbf{\Phi}$ ist definiert durch*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(r, \varphi)$$

mit $0 \leq r < \infty$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Wie man leicht nachrechnet gilt

$$\det \mathbf{\Phi}(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

für alle $0 \leq r < \infty$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Allerdings ist die Abbildung $\Phi(r, \phi)$ nicht mehr injektiv für $r = 0$, da $\Phi(0, \phi) \equiv 0$. Ferner gilt auch $\Phi(r, 0) = \Phi(r, 2\pi)$ für alle $0 \leq r < \infty$.

Sei

$$D = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

dann ist

$$E := \mathbf{\Phi}(D) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

die Kreisscheibe mit Radius R.

Nach der Substitutionsregel im $\mathbb{R}^n$ ergibt sich

$$\begin{aligned} V(E) &= \int_E d\mathbf{x} = \int_D |\det \mathbf{\Phi}'(r,\varphi)| \; dr \; d\varphi \\ &= \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} |\det \mathbf{\Phi}'(r,\varphi) \; d\varphi| \right] dr \\ &= \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} r \; d\varphi \right] dr \\ &= \int_0^R \left[r\varphi \Big|_0^{2\pi} \right] dr \\ &= \int_0^R 2\pi r \; dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_\varepsilon^R = \pi R^2. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.12.12. *Man beachte die Gleichheit*

$$\int_D f\big(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\big) |\det \mathbf{\Phi}'(\mathbf{x})| d\mu(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{\Phi}(D)} f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \; .$$