Prof. Dr. Christian Bender
Philip Oberacker

Universität des Saarlandes, Sommersemester 2014
29. April 2014

Stochastik I

Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zwei Freunde verbringen ein Wochenende mit intensivem Würfelspiel, wobei immer drei faire Würfel geworfen werden. Nebenbei notieren sie sich die Augensumme jedes Wurfes. Bei der statistischen Auswertung des Wochenendes fällt auf, dass die Augensumme 10 häufiger eintrat als die Augensumme 9. Es entbrennt eine Diskussion, warum dies möglich sei, da doch beide Augensummen auf 6 Arten eintreten könnten:

$$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4$$
$$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$$

Beantworten Sie die Frage, indem Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für das Würfelexperiment angeben und obige Wahrscheinlichkeiten berechnen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei μ_0 ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$. Wir betrachten die folgenden Aussagen:

(a) μ_0 ist ein Prämaß.

(b) *Stetigkeit von unten*: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} \mu_0(A_n) = \mu_0(A).$$

(c) *Stetigkeit von oben*: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \supset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mu_0(A_1) < \infty$ und $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} \mu_0(A_n) = \mu_0(A).$$

(d) *Stetigkeit von oben in $\emptyset$*: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \supset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mu_0(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} \mu_0(A_n) = 0.$$

Zeigen Sie, dass gilt
$$\text{(a)} \Leftrightarrow \text{(b)} \Rightarrow \text{(c)} \Leftrightarrow \text{(d)}.$$

Zeigen Sie weiter, dass unter der zusätzlichen Bedingung $\mu_0(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$ auch (c) $\Rightarrow$ (b) gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{R} = 2^\Omega$. Wir betrachten die Abbildung $\mu_0 : 2^\Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, die gegeben ist durch

$$\mu_0(A) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } |A| \text{ endlich,} \\ \infty & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) μ_0 ist ein Inhalt auf $\mathcal{R}$.

(b) μ_0 ist stetig von oben in $\emptyset$.

(c) μ_0 ist nicht σ-additiv. Was folgt daraus für die Implikation (c) $\Rightarrow$ (b) in Aufgabe 1?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \mu)$, wobei μ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}^1$, der σ-Algebra der Borelmengen auf $\mathbb{R}$, ist. Weiter sei F_μ die zu μ gehörende Verteilungsfunktion, d.h.

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x])$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Mit der Notation $F_\mu(x^-) := \lim_{t \nearrow x} F_\mu(t), x \in \mathbb{R}$, gilt

$$\mu(\{x\}) = F_\mu(x) - F_\mu(x^-).$$

(b) Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

  (i) F_μ ist stetig.

  (ii) $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.