Prof. Dr. H. Zähle
M.Sc. C. Gärtner

Universität des Saarlandes, SS 2015

30. April 2015

Stochastik I

2. Übung

Aufgabe 5 (4,5 Punkte)

Beispiel 1.3.4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für einen Ring $\mathcal{R}$ auf einer nicht-leeren Menge Ω und ein $\omega_0 \in \Omega$ definiert die folgende Vorschrift ein Prä-Maß δ_{ω_0} auf $\mathcal{R}$ (genannt das *Lebesgue'sche Prä-Maß mit Atom* ω_0):

$$\delta_{\omega_0}(A) := \begin{cases} 1 & , \quad \omega_0 \in A \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}, \qquad A \in \mathcal{R}.$$

(ii) Seien Ω eine abzählbar-unendliche Menge und $\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega : A \text{ oder} A^{\mathsf{c}} \text{ endlich}\}$ die Algebra auf Ω aus Aufgabe 4 (iii). (Als Algebra ist $\mathcal{A}$ gemäß Proposition 1.1.13 insbesondere ein Ring auf Ω). Dann definiert die folgende Vorschrift einen Inhalt, aber kein Prä-Maß auf $\mathcal{A}$:

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & , \quad A^{\mathsf{c}} \text{ endlich} \\ 0 & , \quad A \text{ endlich} \end{cases}, \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Aufgabe 6 (4,5 Punkte)

Seien Ω eine *abzählbare*, nicht-leere Menge und $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω. Für jedes $\omega \in \Omega$ bezeichne δ_ω das in Beispiel 1.3.4 (i) eingeführte Dirac-Maß auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ mit Atom ω. Ferner bezeichne $\#A$ die Kardinalität einer (abzählbaren) Menge $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$: Im Falle einer endlichen Menge A spezifiziert $\#A$ die Anzahl der Elemente in A — insbesondere gilt $\#\emptyset = 0$, und im Falle einer abzählbar-unendlichen Menge A gilt $\#A = \infty$. Zudem verwende man die Konvention $\sum_{i \in I} \infty = \infty$ für jede abzählbare, nicht-leere Menge I. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Durch die Vorschrift $\zeta(A) := \#A$, $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$, ist ein Maß ζ auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ definiert. Man nennt dieses das *Zählmaß auf* $\mathfrak{P}(\Omega)$.

(ii) Es gilt $\zeta(\cdot) = \sum_{\omega \in \Omega} \delta_\omega(\cdot)$.

(iii) Jedes Maß μ auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist von der Form $\mu(\cdot) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \delta_\omega(\cdot)$ mit $p_\omega := \mu(\{\omega\})$.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Proposition 1.3.6. Seien $\mathcal{R}$ ein Ring auf einer nicht-leeren Menge Ω, μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ und $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, falls $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty$.

(ii) Es gilt $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$, falls $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt sind und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Proposition 1.3.8. Seien $\mathcal{R}$ ein Ring auf einer nicht-leeren Menge Ω und μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Beweisen Sie für die folgenden Aussagen die Implikationen „(ii)$\Rightarrow$(i)“ und „(iv)$\Rightarrow$(iii)“:

(i) μ ist ein Prä-Maß.

(ii) μ ist stetig von unten.

(iii) μ ist stetig von oben.

(iv) μ ist $\emptyset$-stetig.