Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2018

23. Mai 2018

Stochastik I

7. Übung

Aufgabe 1 **(4 Punkte)** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine Zufallsvariable und $(B_n)_{n=1,\dots,N}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω, so dass $P(B_n) > 0$ für alle $n = 1, \dots, N$. Zeigen Sie: X ist genau dann P-integrierbar, wenn X für alle $n = 1, \dots, N$ P_{B_n}-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$E[X] = \sum_{n=1}^{N} E^{P_{B_n}}[X] P(B_n),$$

wobei

$$E^{P_{B_n}}[\cdot] = \int \cdot \, dP_{B_n}$$

den Erwartungswert unter dem Maß P_{B_n} bezeichnet.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)** Es werde wiederholt ein fairer Würfel geworfen. Solange keine 6 auftritt, werden die erzielten Augenzahlen addiert. Das Spiel kann jederzeit gestoppt werden, der erzielte Punktestand ist dann der Gewinn. Würfelt man eine 6, so endet das Spiel mit einem Gewinn von 0.

(i) Wir betrachten die Strategie, bei der für ein $k \in \mathbb{N}$ k-mal gewürfelt und dann gestoppt wird, falls vorher keine 6 auftritt. Berechnen Sie in Abhängigkeit von k den Erwartungswert des Spielgewinns G_k bei dieser Strategie und ermitteln Sie den Wert für k, welcher $E[G_k]$ maximiert.

(ii) Wir betrachten die Strategie, bei der das Spiel gestoppt wird, sobald der aktuelle Punktestand mindestens $K \in \mathbb{N}$ ist. Berechnen Sie den Wert K, bei dem man das Spiel stoppen sollte, damit der erwartete Gewinn maximal wird. Bestimmen Sie hierfür dasjenige K, ab welchem der erwartete Zuwachs beim Weiterspielen nicht mehr positiv ist.

Aufgabe 3 **(7 Punkte)** Sei Ω eine nicht-leere Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring auf Ω und μ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{R}$. Weiter sei für eine Funktion

$$X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

in $\mathcal{E}$ mit paarweise disjunkten Mengen $A_i \in \mathcal{R}$ $(i = 1, \dots, m)$, $\bigcup_{i=1}^m A_i = \Omega$ und $\alpha_i \geq 0$ das Integral

$$\int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega) := \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i)$$

definiert. Dieses Integral ist wohldefiniert, was man mit den gleichen Methoden wie im Fall, dass $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra und μ ein Maß ist, zeigen kann. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) μ ist ein Prämaß.

(ii) Für alle nichtsteigenden Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$ mit $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ gilt

$$\int_\Omega X_n d\mu \to 0.$$

(iii) Für alle $X \in \mathcal{E}$ gilt

$$\int_\Omega X d\mu = \inf\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega Y_n d\mu : \ (Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist nichtfallende Folge in } \mathcal{E} \text{ mit } \sup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \geq X_n\right\}.$$