Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Jan Swoboda

29. März 2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das vorliegende Skriptum ist aus der Vorlesung *Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen* entstanden, die ich im Wintersemester 2012/13 an der LMU München gehalten habe. Eine erste Version hiervon wurde von den Studenten Kilian Lieret und Marcel Schaub erstellt, denen ich an dieser Stelle für ihre Mühe danken möchte. Für vielfältige Hinweise, Anregungen und Verbesserungsvorschläge bin ich Herrn Dipl.-Math. Robert Schmidt, der als Assistent die Vorlesung betreut hat, zu großem Dank verpflichtet. Schließlich gilt mein herzlicher Dank Herrn Privatdozent Dr. Hartmut Weiss für die freundliche Überlassung der Aufzeichnungen zu seiner Vorlesung *Analysis III*.

Stanford, den 23. Mai 2013
Jan Swoboda

1 Maßtheorie

Grundlegende Fragestellung

Gegeben sei eine beliebige Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist es möglich, A ein „n-dimensionales Volumen“ $\mu(A) \in [0,\infty]$ zuzuordnen? Vernünftige Forderungen an einen solchen „Inhalt“$\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$:

(i) endliche Additivität: Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \cap B = \emptyset$ ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(ii) Bewegungsinvarianz[1] : Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, d.h. $\varphi(x) = Tx + b$, mit $T \in O(n)^2, b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mu(\varphi(A)) = \mu(A)$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(iii) Normiertheit: $\mu([0,1]^n) = 1$.

Maßproblem

Gibt es ein $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ mit den Eigenschaften (i)-(iii)? Hausdorff hat 1914 gezeigt, dass es ein solches μ für $n \geq 3$ nicht geben kann. Banach konnte 1923 die Existenz für $n = 1, 2$ nachweisen, allerdings ist sie nicht eindeutig. Eine Verschärfung des Inhaltsproblems macht die Ersetzung von (i) zu (i') nötig:

(i') σ-Additivität: Seien $A_j \subseteq \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, so ist

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Dieses Problem entwickelte sich zum *Maßproblem*: Gibt es ein „Maß “$\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ mit (i'), (ii), (iii)? Die Antwort von Vitali 1905 lautet nein für $n = 1$. Banach und Tarski zeigten 1924 für beliebiges n:

Satz 1.1 *Seien $n \geq 1$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathring{A}, \mathring{B} \neq \emptyset$. Dann existieren $C_j \subseteq \mathbb{R}^n$ und Bewegungen $\varphi_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$, sodass*

$$A = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} C_j \qquad \textit{und} \qquad B = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j(C_j).$$

Konsequenz

Versuche, $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ mit Eigenschaften (i'), (ii), (iii) nur für geeignete Teilmengensysteme $\mathcal{A} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ zu konstruieren.

1.1 Messbare Räume und messbare Abbildungen

Im folgenden sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X.

Definition 1.2 Ein Teilmengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *σ-Algebra über X*, falls

[1] Eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *(euklidische) Isometrie*, falls gilt:

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x,y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist $d(x,y) := \big(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\big)^{\frac{1}{2}}$ der euklidische Abstand zwischen x und y. Man kann zeigen (Übung): φ ist eine Isometrie genau dann, wenn φ eine Bewegung wie in (ii) ist.

[2] Hierbei bezeichnet

$$\mathrm{O}(n) = \{g \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid gg^\top = \mathbb{1}\} = \{g \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \langle gv, gw\rangle = \langle v, w\rangle \ \forall v, w \in \mathbb{R}^n\}$$

die *orthogonale Gruppe*.

(i) $X \in \mathcal{A}$;
(ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$;
(iii) sind $A_j \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N}$, so folgt $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ über X heißt das Paar $(X, \mathcal{A})$ *messbarer Raum*, die Mengen $A \in \mathcal{A}$ *messbare Mengen*.

Beispiel. Sei X eine Menge.
(1) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra.
(2) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ ist eine σ-Algebra.

Erinnerung: Regeln von De Morgan. Für jede Familie A_i, $i \in I$ (I beliebige Indexmenge), ist

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \qquad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Lemma 1.3 *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Dann gilt:*
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$;
(iii) $A_j \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Beweis.
(i) Folgt wegen $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$ aus Definition 1.2.
(ii) Es ist $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$.
(iii) Es gilt $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j^c)^c \in \mathcal{A}$.

□

Lemma 1.4 *Seien $\mathcal{A}_i, i \in I$ (I beliebige Indexmenge), σ-Algebren über X. Dann ist auch*

$$\mathcal{A} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i = \{A \subseteq X \mid A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I\}$$

eine σ-Algebra über X.

Beweis. Übung. □

Definition 1.5 Für ein Teilmengensystem $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt

$$\mathcal{A}_\sigma(S) := \bigcap_{\substack{S\subseteq\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X),\\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{A}$$

die *von S erzeugte σ-Algebra.*

Bemerkung.
(i) $\mathcal{A}_\sigma(S)$ ist eine σ-Algebra (die kleinste σ-Algebra, die S enthält).
(ii) S ist eine σ-Algebra genau dann, wenn $\mathcal{A}_\sigma(S) = S$ gilt.
(iii) $S \subseteq T \Longrightarrow \mathcal{A}_\sigma(S) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(T)$.
(iv) $S = \{\emptyset\} \Longrightarrow \mathcal{A}_\sigma(S) = \{\emptyset, X\}$.
(v) $S = \{A\} \Longrightarrow \mathcal{A}_\sigma(S) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.

Erinnerung: Ein Teilmengensystem $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Topologie* (auf X), falls gilt:
(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(ii) für $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$ (I beliebige Indexmenge), gilt: $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$;
(iii) für $U, V \in \mathcal{T}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum*, die Mengen $U \in \mathcal{T}$ heißen *offen*.

Definition 1.6 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die von $\mathcal{T}$ erzeugte σ-Algebra

$$\mathcal{B}(X) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T})$$

heißt *Borelsche σ-Algebra*, die Mengen in $\mathcal{B}(X)$ heißen Borel-messbar.

Im Falle des topologischen Raumes $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{std}})$ schreiben wir auch $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Für eine Abbildung $f\colon X \to X'$ und $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(X')$ bezeichne

$$f^{-1}(\mathcal{A}') := \{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}.$$

Ist $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra (auf X'), so ist $f^{-1}(\mathcal{A}')$ eine σ-Algebra (auf X): das *Urbild von S' unter f*. Ist umgekehrt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, so auch

$$f_*(\mathcal{A}) := \{A' \subseteq X' \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{P}(X')$$

das *direkte Bild von $\mathcal{A}$ unter f*. Beweis: Übung.

Definition 1.7 Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ messbare Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to X'$ heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar, falls für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ (d.h. f heißt messbar genau dann, wenn „Urbilder messbarer Mengen messbar" sind).

Lemma 1.8 *(i) Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ messbare Räume. Ist $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_\sigma(S')$ für ein Teilmengensystem $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{P}(X')$, so ist $f\colon X \to X'$ bereits dann $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar, falls $f^{-1}(S') \subseteq \mathcal{A}$.*
(ii) Sind $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ topologische Räume und $f\colon X \to X'$ stetig, so ist f $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(X'))$-messbar (man sagt dann: f sei Borel-messbar*).*

Beweis. Übung. □

1.2 Maße und Maßräume

Definition 1.9 Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Teilmengensystem mit $\emptyset \in \mathcal{S}$. Eine Abbildung

$$\mu\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$$

mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt eine *Mengenfunktion*. Eine Mengenfunktion μ auf $\mathcal{S}$ heißt
(i) *subadditiv*, falls aus $A, B \in \mathcal{S}, A \cup B \in \mathcal{S}$ folgt: $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$;
(ii) *additiv*, falls gilt: $A, B \in \mathcal{S}, A \cup B \in \mathcal{S},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
(iii) *σ-subadditiv*, falls gilt: sind $A_j \in \mathcal{S}, j \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{S}$, so folgt

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j).$$

(iv) *σ-additiv*, falls gilt: sind $A_j \in \mathcal{S}, j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{S}$, so folgt

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Weiterhin heißt die Mengenfunktion μ *endlich*, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{S}$ ist, und σ-*endlich*, falls $A_j \in \mathcal{S}, j \in \mathbb{N}$, existieren mit $\mu(A_j) < \infty$ und $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$.

Bemerkung. Ist μ σ-subadditiv (σ-additiv), so ist μ bereits subadditiv (additiv). Dies folgt wegen $\emptyset \in \mathcal{S}$ und der Annahme $\mu(\emptyset) = 0$.

Definition 1.10 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine σ-additive Mengenfunktion

$$\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

heißt *Maß* auf $(X, \mathcal{A})$. Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *Maßraum*. Ferner nennt man μ ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls $\mu(X) = 1$ ist.

Beispiel. Sei X eine Menge.

(1) Für $x \in X$ sei

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A. \end{cases}$$

Dies definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(X)$, das *Dirac-Maß* (in x).

(2) Die Mengenfunktion

$$\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty],\ \mu(A) := \begin{cases} \#A = |A|, & A \text{ endlich}, \\ \infty, & A \text{ unendlich}. \end{cases}$$

ist ein Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$. Es ist endlich genau dann, wenn X endlich ist, und σ-endlich genau dann, wenn X abzählbar ist.

Lemma 1.11 *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt:*

(i) Seien $A, B \in \mathcal{A}$, dann ist $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$.

*(ii) Für $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B$ ist $\mu(A) \leq \mu(B)$ (*Isotonie*).*

*(iii) Seien $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B, \mu(A) < \infty$. Dann gilt $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$ (*Subtraktivität*).*

(iv) Für jede Folge A_j, $j \in \mathbb{N}$, in $\mathcal{A}$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) \qquad (\sigma\text{-Subadditivität}).$$

Beweis.

(i) Aus der endlichen Additivität folgt:

$$\begin{cases} \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B), \\ \mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A \cup B) \iff \mu(A \setminus B) = \mu(A \cup B) - \mu(B), \\ \mu(B \setminus A) + \mu(A) = \mu(A \cup B) \iff \mu(B \setminus A) = \mu(A \cup B) - \mu(A). \end{cases}$$

Durch Kombination der Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} &\mu(A \cup B) - \mu(B) + \mu(A \cup B) - \mu(A) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B) \\ &\qquad \iff \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

(ii) Das folgt aus (i), denn für $A \subseteq B$ ist $A \cup B = B$ und weiter:

$$\mu(B \setminus A) + \mu(A) = \mu(A \cup B) \implies \mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A) \leq \mu(B).$$

(iii) Wegen $A \subseteq B$ ist $(B \setminus A) \cup A = B$ und weiter nach (i):

$$\mu(B \setminus A) = \mu((B \setminus A) \cup A) + \mu((B \setminus A) \cap A) - \mu(A) = \mu(B) - \mu(A).$$

(iv) Übung.

$\square$

1.3 Konstruktion von Maßen – Prämaße

Ziel: Wir möchten auf einem Teilmengensystem $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Mengenfunktion geeignet vorschreiben und diese dann zu einem Maß auf der von $\mathcal{S}$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})$ fortsetzen.

Definition 1.12 Ein Teilmengensystem $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Ring über X*, falls
(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$;
(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$;
(iii) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$.

Bemerkung.
(i) Jede σ-Algebra ist gleichzeitig ein Ring.
(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$, denn

$$A \cap B = A \setminus \underbrace{(A \setminus B)}_{\in \mathcal{R}}.$$

Definition 1.13 Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring. Eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt *Prämaß*, falls μ σ-additiv ist, d.h. für $A_j \in \mathcal{R}$, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Falls μ nur additiv ist, so nennen wir μ einen *Inhalt*.

Sei $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq X$ eine aufsteigende Folge von Mengen in X. Wir schreiben $A_j \uparrow A$, falls $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Analog schreiben wir $A_j \downarrow A$ für eine absteigende Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, falls $A = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$ ist.

Lemma 1.14 (Charakterisierung des Prämaßes) *Für einen Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ betrachte man folgende Eigenschaften:*
(i) μ ist ein Prämaß.
(ii) μ ist stetig von unten: Für jede aufsteigende Folge $A_j, j \in \mathbb{N}$, in $\mathcal{R}$ mit $A_j \uparrow A \in \mathcal{R}$ gilt

$$\mu(A) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

(iii) μ ist stetig von oben: Für jede absteigende Folge $A_j \in \mathcal{R}, j \in \mathbb{N}$, mit $A_j \downarrow A \in \mathcal{R}$ und $\mu(A_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu(A) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

(iv) μ ist $\emptyset$-stetig: Für jede absteigende Folge $A_j \in \mathcal{R}, j \in \mathbb{N}$, mit $\mu(A_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $A_j \downarrow \emptyset$ gilt:

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = 0.$$

Dann gilt:

$$\text{(i)} \Longleftrightarrow \text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)} \Longleftrightarrow \text{(iv)}.$$

Für einen endlichen Inhalt μ auf $\mathcal{R}$ (d.h. $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$) folgt sogar *(iii)* $\Longrightarrow$ *(ii),*

d.h. in diesem Fall sind (i)-(iv) äquivalent.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Wir setzen $A_0 := \emptyset$. Dann sind die Mengen $B_j := A_j \setminus A_{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt und in $\mathcal{R}$ enthalten. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n \qquad \text{und} \qquad A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j.$$

Somit folgt aus der σ-Additivität von μ:

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Seien $A_j \in \mathcal{R}$, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$. Mit $B_n := A_1 \cup \cdots \cup A_n$ gilt $B_n \uparrow A$ und daher $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$. Da μ endlich-additiv ist, folgt $\mu(B_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$, mithin

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

wie behauptet.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Aus $A_j \downarrow A$ folgt $(A_1 \setminus A_j) \uparrow (A_1 \setminus A)$ und alle auftretenden Mengen liegen in $\mathcal{R}$. Nach (ii) und aufgrund der Subtraktivität ($\mu(A_j) < \infty$) ist somit

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \setminus A) &= \lim_{j\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_j) \\ &= \lim_{j\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_j)) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(A_j). \end{aligned}$$

Damit folgt wegen $\mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$ die Behauptung.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) ist klar, denn (iv) ist ein Spezialfall von (iii).

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Aus $A_j \downarrow A$ folgt $(A_j \setminus A) \downarrow \emptyset$. Aus der Isotonie folgt

$$\mu(A_j \setminus A) \le \mu(A_j) < \infty \qquad \text{und} \qquad \mu(A) \le \mu(A_j) < \infty.$$

Wegen (iv) gilt dann

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j \setminus A) = 0.$$

Da $\mu(A_j \setminus A) = \mu(A_j) - \mu(A)$ ist, zeigt dies

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu(A),$$

wie behauptet.

Es sei nun μ ein endlicher Inhalt. Wir zeigen (iv) $\Rightarrow$ (ii). Sei $A_j \in \mathcal{R}$, $j \in \mathbb{N}$, $A_j \uparrow A \in \mathcal{R}$. Dann folgt $(A \setminus A_j) \downarrow \emptyset$. Da μ endlich ist, folgt hieraus

$$0 = \lim_{j\to\infty} \mu(A \setminus A_j) = \mu(A) - \lim_{j\to\infty} \mu(A_j),$$

und es folgt (ii). $\square$

Im folgenden sei $X = \mathbb{R}^n$. Für $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ verwenden wir die Konvention

$$\begin{aligned} a < b \quad &:\Longleftrightarrow \quad a_i < b_i \quad \text{für alle } 1 \le i \le n, \\ a \le b \quad &:\Longleftrightarrow \quad a_i \le b_i \quad \text{für alle } 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Wir nennen die Mengen $[a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \le x < b\}$ (nach rechts halboffene) *Intervalle* im $\mathbb{R}^n$. Beachte: $[a, b) \neq \emptyset$ nur, falls $a < b$ ist. Falls $a \le b$ ist, nennt man die nichtnegative Zahl

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

den *n-dimensionalen Elementarinhalt von* $[a, b)$. Die Menge aller nach rechts halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{I}^n$, und mit $\mathcal{F}^n$ das System der endlichen Vereinigung von Intervallen in $\mathcal{I}^n$. Die Elemente von $\mathcal{F}^n$ heißen *n-dimensionale Figuren.*

Lemma 1.15 *Für je zwei Intervalle $I, J \in \mathcal{I}^n$ gilt $I \cap J \in \mathcal{I}^n$ sowie $J \setminus I \in \mathcal{F}^n$. Jede Figur ist die Vereinigung endlich vieler, paarweise disjunkter Intervalle.*

Beweis. Übung. □

Satz 1.16 *$\mathcal{F}^n$ ist ein Ring über $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Noch zu zeigen: $A, B \in \mathcal{F}^n \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}^n$. Definitionsgemäß existieren Intervalle $I_1, \ldots, I_m, I'_1, \ldots, I'_n$ mit

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} I_j, \qquad B = \bigcup_{k=1}^{n} I'_k.$$

Damit ist

$$A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{m} \left(\bigcap_{k=1}^{n} I_j \setminus I'_k \right)$$

und es bleibt zu zeigen, dass jede der Mengen $\bigcap_{k=1}^{n} I_j \setminus I'_k$ eine Figur ist. Dies folgt, wenn gezeigt ist, dass der Schnitt zweier Figuren

$$C = \bigcup_{j=1}^{l} I''_j, \qquad D = \bigcup_{k=1}^{l'} I'''_k$$

eine Figur ist. Es gilt

$$C \cap D = \bigcup_{\substack{1 \le j \le l \\ 1 \le k \le l'}} (I''_j \cap I'''_k)$$

woraus die Behauptung aus Lemma 1.15 folgt. □

Satz 1.17 *Es existiert genau ein Inhalt λ auf $\mathcal{F}^n$ derart, dass $\lambda(I)$ für jedes $I \in \mathcal{I}^n$ gleich dem Elementarinhalt von I ist.*

Beweis. Nach Lemma 1.15 besitzt jede Figur $A \in \mathcal{F}^n$ eine Darstellung $A = \bigcup_{j=1}^{m} I_j$ mit paarweise disjunkten Intervallen $I_j \in \mathcal{I}^n$. Eindeutigkeit folgt damit aus der Additivität des Inhalts. Es bleibt die Existenz von λ zu zeigen.

Schritt 1 Sei $I \in \mathcal{I}^n$. Zerlegt man I durch endlich viele Hyperebenen, die parallel zu einer der Koordinatenhyperebenen sind, in paarweise disjunkte Intervalle $I_1, \ldots, I_k$, so folgt aus der Definition des Elementarinhalts, dass

$$\lambda(I) = \lambda(I_1) + \cdots + \lambda(I_k).$$

Schritt 2 Seien $F = I_1 \cup \cdots \cup I_k = I'_1 \cup \cdots \cup I'_l$ zwei Darstellungen von $F \in \mathcal{F}^n$ als Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle. Dann gilt:

$$\lambda(I_1) + \cdots + \lambda(I_k) = \lambda(I'_1) + \cdots + \lambda(I'_l). \tag{1}$$

Für jedes $1 \leq j \leq k$ ist nämlich

$$I_j = \bigcup_{i=1}^{l} (I_j \cap I'_i).$$

Somit (weil die $I_j \cap I'_i$ paarweise disjunkte Intervalls sind) folgt aus Schritt 1, dass

$$\lambda(I_j) = \sum_{i=1}^{l} \lambda(I_j \cap I'_i).$$

Analog (durch Vertauschen der Rollen von i und j) folgt für jedes $1 \leq i \leq l$, dass

$$\lambda(I'_i) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I'_i \cap I_j).$$

Beide Gleichungen zusammen liefern (1).

Schritt 3 Durch die Festsetzung $\lambda(F) := \sum_{k=1}^{k} \lambda(I_j)$ für eine Figur $F = I_1 \cup \cdots \cup I_k \in \mathcal{F}^n$ wie oben wird λ nach Schritt 2 zu einer wohldefinierten, additiven Mengenfunktion auf $\mathcal{F}^n$ fortgesetzt.

$\square$

Satz 1.18 *Der Inhalt λ auf $\mathcal{F}^n$ ist ein Prämaß.*

Beweis. Da der Inhalt λ endlich ist, genügt es nach Lemma 1.14, die $\emptyset$-Stetigkeit von λ nachzuweisen. Wir führen den Beweis durch Kontraposition. Sei $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ eine absteigende Folge von Figuren im $\mathcal{F}^n$. Es wird nun gezeigt, dass aus der Annahme

$$\delta := \lim_{j\to\infty} \lambda(F_j) = \liminf_{j\to\infty} \lambda(F_j) > 0$$

folgt, dass

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_j \neq \emptyset. \tag{2}$$

Da jede Figur $F_j \in \mathcal{F}^n$ als endliche Vereinigung paarweiser disjunkter Intervalle $I_i \in \mathcal{I}^n$ darstellbar ist, findet man durch geeignetes Verkleinern der I_i eine Figur $G_j \in \mathcal{F}^n$ mit

$$\overline{G}_j \subseteq F_j \text{ und } \lambda(F_j) - \lambda(G_j) \leq 2^{-j}\delta.$$

Das Entscheidende and dieser Verkleinerung ist, dass wir nun mit *abgeschlossenen* Mengen $\overline{G}_j$ arbeiten können. Setze $H_j := G_1 \cap \cdots \cap G_j \in \mathcal{F}^n$. Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist dann $H_{j+1} \subseteq H_j$ und $\overline{H}_j \subseteq \overline{G}_j \subseteq F_j$ und damit auch

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overline{H}_j \subseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_j. \tag{3}$$

Es genügt also zu zeigen, dass der Schnitt der $\overline{H}_j$ nicht leer ist, um (2) zu erhalten. Da F_j beschränkt ist, ist $\overline{H}_j$ kompakt[1], also ist $\overline{H}_1 \supseteq \overline{H}_2 \supseteq \cdots$ eine absteigende Folge kompakter Mengen. Angenommen, es ist $\overline{H}_j \neq \emptyset$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Nach bekannten Aussagen aus der Analysis[2] folgt dann $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overline{H}_j \neq \emptyset$, also wegen (3) auch $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_j \neq \emptyset$, wie behauptet. Es bleibt, diese Annahme zu zeigen. Dafür genügt es, die folgende Abschätzung zu beweisen:

$$\lambda(H_j) \geq \lambda(F_j) - \delta(1 - 2^{-j}) \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

woraus wie gewünscht $\lambda(H_j) \geq \delta - \frac{1}{2}\delta > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ folgt. Beweis von (4) mittels vollständiger Induktion: Für $j = 1$ ist (4) richtig, denn $H_1 = G_1$ und $\lambda(F_1) - \lambda(G_1) \leq \frac{1}{2}\delta$. Sei (4) bereits bewiesen für ein festes $j \in \mathbb{N}$. Wir zeigen (4) für $j+1$. Da $H_{j+1} = G_{j+1} \cap H_j$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
\lambda(H_{j+1}) &= \underbrace{\lambda(G_{j+1})}_{\geq \lambda(F_{j+1}) - 2^{-j-1}\delta} + \underbrace{\lambda(H_j)}_{\overset{(4)}{\geq} \lambda(F_j) - \delta(1-2^{-j})} - \underbrace{\lambda(G_{j+1} \cup H_j)}_{\leq \lambda(F_j)\ (\text{da } G_{j+1} \cup H_j \subseteq F_j)} \\
&\geq \underbrace{\lambda(F_{j+1})}_{\geq \delta} - \delta(1 - 2^{-j-1}) \\
&\geq 2^{-j-1}\delta,
\end{aligned}$$

also (4) für $j+1$. Damit ist die Annahme bewiesen, der Beweis also vollständig. $\square$

Definition 1.19 Das Prämaß λ aus Satz 1.18 heißt *Lebesgue-Prämaß* (in $\mathbb{R}^n$).

1.4 Fortsetzung eines Prämaßes zu einem Maß

Im Hinblick auf Satz 1.18 stellt sich die Frage, ob sich das Lebesgue-Prämaß λ zu einem Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ fortsetzen läßt. Wir wollen dieses Problem gleich allgemeiner betrachten und fragen nach der Fortsetzbarkeit eines Prämaßes auf einem Ring $\mathcal{R}$ (über einer Menge X) zu einem Maß auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$.

Definition 1.20 Eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ heißt *äußeres Maß*, falls gilt:
(i) $\mu(\emptyset) = 0$ (d.h. μ ist eine Mengenfunktion);
(ii) für $A \subseteq B$ folgt $\mu(A) \leq \mu(B)$ (Isotonie);
(iii) $\mu\big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\big) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$ (σ-Subadditivität).
Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *μ-messbar*, falls gilt:
(iv) $\mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(B) \qquad \forall B \subseteq X.$

Bemerkung.

[1] Auf $\mathbb{R}^n$ ist kompakt gleichbedeutend mit beschränkt und abgeschlossen.

[2] Zum Beispiel wie folgt: Man wähle $x_i \in \overline{H}_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{H}_j$ (funktioniert wegen $\overline{H}_j \neq \emptyset$ und betrachte die Folge (x_i), die nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge (x_{i_j}) besitzt, d.h. $\lim_{j\to\infty} x_{i_j} = x$. Aber wegen $(x_{i_j})_{j\geq k} \subseteq A_k$ und A_k kompakt, muss auch $x \in A_k$ sein (Folgenkompaktheit). Da dies aber für alle k gilt, ist auch $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$.

(i) Die Eigenschaften (i) und (ii) implizieren, dass $\mu \geq 0$ ist.
(ii) Wegen (iii) gilt sogar „=“ in (iv).

Satz 1.21 *Sei μ ein äußeres Maß auf X. Dann ist das System $\mathcal{A}^*$ aller μ-messbaren Mengen $A \subseteq X$ eine σ-Algebra über X. Ferner ist die Einschränkung von μ auf $\mathcal{A}^*$ ein Maß.*

Beweis. Aus Eigenschaften (i) und (iv) eines äußeren Maßes folgt $X \in \mathcal{A}^*$. Wegen Symmetrie von A und A^c in (iv) ist mit $A \in \mathcal{A}^*$ auch $A^c \in \mathcal{A}^*$. Wir zeigen, dass mit $A, B \in \mathcal{A}^*$ auch $A \cup B \in \mathcal{A}^*$ gilt. Mit (iv) gilt für alle $Q \subseteq X$

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c).$$

Wir wenden nun (iv) an auf $Q' = Q \cap A$ und $Q'' = Q \cap A^c$. Es folgt $\mu(Q') = \mu(Q' \cap B) + \mu(Q' \cap B^c)$ und analog für $\mu(Q'')$. Dies ergibt eingesetzt:

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A \cap B) + \mu(Q \cap A \cap B^c) + \mu(Q \cap A^c \cap B) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c)$$

für alle $Q \subseteq X$. Ersetzt man hierin Q durch $Q \cap (A \cup B)$, so erhält man:

$$\mu(Q \cap (A \cup B)) = \mu(Q \cap A \cap B) + \mu(Q \cap A \cap B^c) + \mu(Q \cap A^c \cap B). \tag{5}$$

Beide Gleichungen zusammen liefern

$$\begin{aligned} \mu(Q) &= \mu(Q \cap (A \cup B)) + \mu(Q \cap (A \cup B)^c \\ &= \mu(Q \cap (A \cup B)) + \mu(Q \setminus (A \cup B)). \end{aligned}$$

Somit erfüllt $A \cup B$ die Bedingung (iv), d.h. $A \cup B \in \mathcal{A}^*$. Sei $A, B \in \mathcal{A}^*$. Dann folgt $A^c, B^c \in \mathcal{A}^*$ also

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}^*.$$

Wir zeigen nun, dass mit jeder Folge $A_j, j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}^*$ auch

$$A \coloneqq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}^*$$

gilt. Aus (5) unter Beachtung von $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ folgt für alle $Q \subseteq X$:

$$\mu(Q \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu(Q \cap A_1) + \mu(Q \cap A_2).$$

Per Induktion folgt hieraus für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\mu(Q \cap (\underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_n}_{=: B_n \in \mathcal{A}^*})) = \sum_{j=1}^{n} \mu(Q \cap A_j).$$

Damit gilt

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap B_n) + \mu(Q \setminus B_n) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu(Q \cap A_j) + \mu(Q \setminus A).$$

Nach Grenzübergang $n \to \infty$ folgt wegen (iii):

$$\mu(Q) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q \cap A_j) + \mu(Q \setminus A) \overset{\text{(iii)}}{\geq} \mu(Q \cap A) + \mu(Q \setminus A). \tag{6}$$

Dies zeigt $A \in \mathcal{A}^*$. Es folgt, dass $\mathcal{A}^*$ eine σ-Algebra ist, wegen (6) und der Stabilität unter endlichen Schnitten (vgl. Übung). Da in (6) sogar Gleichheit gilt, folgt mit Wahl von $Q = A$, dass

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

also die σ-Additivität von μ. $\square$

Satz 1.22 (Fortsetzungssatz von Carathéodory) *Jedes Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ kann auf mindestens eine Weise zu einem Maß auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra $A_\sigma(\mathcal{R})$ fortgesetzt werden.*

Beweis. Für $Q \in \mathcal{P}(X)$ bezeichne $U(Q)$ die Menge aller Folgen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$, welche Q überdecken, also

$$Q \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$$

erfüllen. Wir definieren nun die Mengenfunktion $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ durch

$$\mu^*(Q) = \begin{cases} \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \mid (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in U(Q)\right\}, & \text{falls } U(Q) \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{falls } U(Q) = \emptyset. \end{cases}$$

Schritt 1 $\mu^*(Q)$ ist ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$.

Eigenschaft (i) eines äußeren Maßes ist klar. Wegen $U(Q_1) \supseteq U(Q_2)$ für $Q_1 \subseteq Q_2$ folgt (ii). Zum Beweis von (iii) können wir $\mu^*(Q_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen, d.h. $U(Q_n) \neq \emptyset$ (denn für $\mu^*(Q_n) = \infty$ für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ ist (iii) trivial). Zu $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Folge $(A_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ in $U(Q_n)$ mit

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) \leq \mu^*(Q_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

Da die Doppelfolge $(A_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ in $U(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n)$ enthalten ist (d.h. die Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ überdeckt), gilt nach Definition von μ^*:

$$\mu^*\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\big) \leq \sum_{m,n=1}^{\infty} \mu(A_{n,m}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt hieraus Eigenschaft (iii) eines äußeren Maßes.

Schritt 2 Jede Menge $A \in \mathcal{R}$ ist μ^*-messbar, d.h.

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \tag{7}$$

für alle $Q \subseteq X$. Die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen umfaßt somit den Ring $\mathcal{R}$.

Sei $A \in \mathcal{R}$ und $Q \subseteq X$. Wir können wieder $U(Q) \neq \emptyset$ annehmen. Sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ eine Folge in $U(Q)$, also $Q \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Dann liegt $(A_j \cap A)_{j\in\mathbb{N}}$ in $U(Q \cap A)$ und $(A_j \setminus A)_{j\in\mathbb{N}}$ in $U(Q \setminus A)$. Hieraus folgt aus der Definition von μ^*:

$$\mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Diese Ungleichung wird von jeder Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in U(Q)$ erfüllt. Damit folgt (7) aus

$$\mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q\backslash A) \leq \inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) \mid (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in U(Q)\Big\} = \mu^*(Q).$$

Schritt 3 $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

Sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $U(A)$, also $A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Da μ ein Prämaß ist, gilt (vgl. Übungsblatt 2 Aufgabe 2)

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

woraus $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ folgt. Mit Wahl der trivialen Folge $A_1 = A$ und $A_j = \emptyset$ für $j \geq 2$ (man beachte, dass $A_j \in \mathcal{R}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ ist) folgt jedoch auch die umgekehrte Abschätzung

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \mu(A),$$

also die behauptete Gleichheit.

Schritt 4 Abschluß des Beweises.

Nach Satz 1.21 bildet die Menge der μ^*-messbaren Mengen eine σ-Algebra, die aufgrund der Aussage von Schritt 2 den Ring $\mathcal{R}$ enthält. Damit ist aber auch die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ in der σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen enthalten. Gleichzeitig ist nach Schritt 3 $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$, mithin μ^* eine Fortsetzung des Prämasses μ auf $\mathcal{R}$ zu einem Maß auf $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$. $\square$

Es stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit der in Satz 1.22 konstruierten Fortsetzung des Prämaßes μ.

Beispiel. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{R} := \{\emptyset\}$, versehen mit dem Prämaß $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$, $\mu(\emptyset) = 0$. Dann lässt sich μ auf viele verschiedene Weisen zu einem Maß $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}) = \{\emptyset, X\}$ fortsetzen, zum Beispiel durch $\tilde{\mu}(X) = 0$ oder $\tilde{\mu}(X) = 1$, etc. Im Beweis von Satz 1.22 ist $\mu^*(X) = \infty$, da $U(X) = \emptyset$.

Erinnerung (an Definition 1.9): Eine Mengenfunktion $\mu\colon S \to [0,\infty]$ heißt σ-endlich, falls es eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in S gibt mit $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ und $\mu(A_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Beispiel. Das Lebeguesche Prämaß λ^n auf dem Ring $\mathcal{F}^n$ der Figuren ist σ-endlich, denn $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ für geeignete Intervalle I_j.

Satz 1.23 *Jedes σ-endliche Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ kann auf genau eine Weise zu einem Maß auf die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ fortgesetzt werden.*

Beweis. Übung $\square$

1.5 Lebesgue-Borel-Maß

Wie in Abschnitt 1.3 sei nun $\mathcal{I}^n$ die Menge der nach rechts halboffenen Intervalle im $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}^n$ der Ring der n-dimensionalen Figuren, λ^n das Lebesgue-Prämaß.

Definition 1.24 Die von $\mathcal{F}^n$ (bzw. gleichwertig damit, $\mathcal{I}^n$) erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ heißt *Borel-σ-Algebra* von $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. Wir werden bald sehen (vgl. Satz 1.26 unten), dass diese Definition mit Definition 1.6 konsistent ist.

Satz 1.25 *Es gibt genau ein Maß λ^n auf $\mathcal{B}^n$, welches jedem Intervall $I \in \mathcal{I}^n$ seinen n-dimensionalen Elementarinhalt zuordnet. Das Maß λ^n nennen wir Lebesgue-Borel-Maß (auf $\mathbb{R}^n$).*

Beweis. Da λ^n auf $\mathcal{F}^n$ ein Prämaß ist, existiert nach Satz 1.22 eine Fortsetzung von λ^n zu einem Maß auf $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}^n) = \mathcal{B}^n$. Wegen Satz 1.17 setzt λ^n den n-dimensionalen Elementarinhalt eindeutig zum Lebesgue-Prämaß auf $\mathcal{F}^n$ fort. Die Eindeutigkeit des Maßes λ^n auf $\mathcal{B}^n$ folgt nun aus Satz 1.23 und der σ-Endlichkeit des Lebesgue-Prämaßes. $\square$

Bemerkung. Das Lebesgue-Borel-Maß λ^n ist σ-endlich, da bereits das Lebesgue-Prämaß σ-endlich ist. Ferner gilt für jede beschränkte Borel-Menge $B \in \mathcal{B}^n$, dass $\lambda^n(B) < \infty$. Denn: $B \subseteq I$ für ein geeignetes Intervall $I \in \mathcal{I}^n$ und $\lambda^n(B) \leq \lambda^n(I) < \infty$.

Satz 1.26 *Es bezeichne $\mathcal{O}^n$, $\mathcal{C}^n$ bzw. $\mathcal{K}^n$ das System der offenen, abgeschlossenen bzw. kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}^n) = \mathcal{B}^n.$$

Beweis. Wegen $\mathcal{K}^n \subseteq \mathcal{C}^n$ gilt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}^n) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C}^n)$. Da umgekehrt jede abgeschlossene Menge die Vereinigung einer Folge von kompakten Mengen ist, gilt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C}^n) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}^n)$. Ferner sind die offenen Mengen die Komplemente der abgeschlossenen Mengen, woraus $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C}^n)$ folgt. Wir zeigen nun $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}^n) = \mathcal{B}^n$. Wähle hierzu ein halboffenes Intervall $[a,b) \subseteq \mathbb{R}^n$. Für eine geeignete Folge $(a_j, b), j \in \mathbb{N}$ offener Intervalle ist

$$[a,b) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} (a_j, b).$$

Das zeigt $[a,b) \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}^n)$, also $\mathcal{I}^n \subseteq A_\sigma(\mathcal{O}^n)$. Es folgt $B^n = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{I}^n) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}^n)$. Schließlich ist jede offene Menge die Vereinigung abzählbar vieler offener und beschränkter Intervalle (etwa solcher mit lauter rationalen Eckpunkten). Nun ist jedes beschränkte offene Intervall (a,b) die Vereinigung

$$(a,b) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} [a_j, b)$$

für geeignete a_j. Dies zeigt $\mathcal{O}^n \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{I}^n) = \mathcal{B}^n$, also die Behauptung. $\square$

1.6 Bildmaße

Erinnerung (an Definition 1.7): Seien $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ messbare Räume. Dann heißt $f\colon X \to X'$ messbar, falls $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ ist, für alle $A' \in \mathcal{A}'$.

Satz und Definition 1.27 *Es sei $f\colon X \to X'$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar. Dann wird für jedes Maß μ auf $\mathcal{A}$ durch*

$$\mu'(A') := \mu(f^{-1}(A'))\ \forall A' \in \mathcal{A}'$$

ein Maß μ' auf $\mathcal{A}'$ erklärt. Dieses nennen wir Bildmaß *von μ unter der Abbildung f. Wir schreiben hierfür $\mu' = f(\mu)$.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Mengenfunktion μ' σ-additiv ist. Dazu wählen wir eine Folge $A'_j, j \in \mathbb{N}$, von paarweise disjunkten Mengen in $\mathcal{A}'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu\Bigg(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A'_j\Bigg) &= \mu\Bigg(f^{-1}\Bigg(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A'_j\Bigg)\Bigg) \\
&= \mu\Bigg(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} f^{-1}(A'_j)\Bigg) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(A'_j)) \qquad \text{(da } f^{-1}(A_j) \text{ paarweise disjunkt)} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu'(A'_j),
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Bemerkung. Sei $f\colon X \to X'$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar und $f'\colon X' \to X''$ $(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$-messbar. Dann ist $f' \circ f\colon X \to X''$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')$-messbar und für jedes Maß μ auf $(X, \mathcal{A})$ gilt

$$(f' \circ f)(\mu) = f'(f(\mu)).$$

Beispiel.

(1) Es sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ die Borelsche σ-Algebra und λ^n das Lebesgue-Borel-Maß. Betrachte zu $a \in \mathbb{R}^n$ die Translationsabbildung $T_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + a$. T_a ist stetig und damit messbar. Es gilt $T_a(\lambda^n) = \lambda^n$ (Übung). Dies zeigt die Translationsinvarianz des Lebesgue-Borel-Maßes.

(2) Zu $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $1 \le i \le n$ sei

$$D^i_\gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, \gamma x_i, \ldots, x_n).$$

Dann gilt $D^i_\gamma(\lambda^n) = |\gamma|^{-1}\lambda^n$ (Übung). Für die Homothetie $D_\gamma = D^1_\gamma \circ \cdots \circ D^n_\gamma$, $x \mapsto \gamma x$ folgt

$$\begin{aligned}
D_\gamma(\lambda^n) &= D^1_\gamma(D^2_\gamma(\ldots(D^n_\gamma\lambda^n)\ldots)) \\
&= |\gamma|^{-n}\lambda^n
\end{aligned}$$

(3) Für eine lineare Abbildung $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt allgemeiner $T(\lambda^n) = |\det T|^{-1}\lambda^n$.

Bemerkung.

(1) Aus Beispielen (1) und (3) oben folgt die Invarianz von λ^n unter Bewegungen

$$x \longmapsto Tx + a$$

wobei $T \in O_n(\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist. Allgemeiner ist λ^n invariant unter affin-linearen Translationen $x \mapsto Tx + a$, d.h. $T \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}^n$.

(2) Das Lebesgue-Borel-Maß λ^n ist durch folgenden Satz charakterisiert: λ^n ist das einzige translationsinvariante Maß μ auf $\mathcal{B}^n$ mit $\mu([0,1)^n) = 1$.

(3) Ein analoges Maß existiert auf jeder lokalkompakten, hausdorffschen topologischen Gruppe. Hierbei heißt eine Gruppe G *topologisch*, falls G eine Topologie trägt, sodass die Abbildungen

$$i\colon G \to G, \quad g \mapsto g^{-1} \qquad \text{und} \qquad m\colon G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto gh$$

stetig sind. (Hierbei sei $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen). Die topologische Gruppe G heißt *lokalkompakt*, falls das Einselement $e \in G$ (und damit jedes $g \in G$) eine kompakte Umgebung besitzt. Insbesondere ist $(\mathbb{R}^n, +)$ eine lokalkompakte abelsche Gruppe. Ein Maß μ auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(G)$ heißt *linksinvariant*, falls für alle Mengen $A \in \mathcal{B}(G)$ und alle $g \in G$ gilt:

$$\mu(gA) = \mu(A).$$

Analog erklären wir *rechtsinvariante* Maße. Man kann zeigen, dass jede lokalkompakte, hausforffsche topologische Gruppe ein linksinvariantes Maß trägt. Dieses Maß heißt *Haarsches Maß* und ist bis auf einen Normierungsfaktor eindeutig bestimmt.

Zum Abschluß zeigen wir noch, dass nicht jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel-messbar ist.

Satz 1.28 *Es gilt $\mathcal{B}^n \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir zeigen die Existenz einer nicht-Borelschen Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Hierzu betrachte die Untergruppe $\mathbb{Q}^n$ von $\mathbb{R}^n$. Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y\colon \iff x - y \in \mathbb{Q}^n.$$

(D.h. die Äquivalenzklassen sind die Nebenklassen von $\mathbb{R}^n$ modulo $\mathbb{Q}^n$). Jede Äquivalenzklasse $x + \mathbb{Q}^n$ besitzt einen Repräsentanten in $[0,1)^n$. Es gibt also eine Menge $K \subseteq [0,1)^n$ so, dass K mit jeder Äquivalenzklasse genau ein Element gemeinsam hat. Es folgt

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in K} (k + \mathbb{Q}^n) = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}^n} (K + y).$$

Ferner ist für $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}^n$, $y_1 \neq y_2$,

$$(K + y_1) \cap (K + y_2) = \emptyset. \tag{8}$$

Angenommen $K \in \mathcal{B}^n$. Wegen der σ-Additivität von λ^n gilt

$$\sum_{y \in \mathbb{Q}^n} \lambda^n(K + y) = \lambda^n(\mathbb{R}^n) = \infty.$$

Aufgrund der Translationsinvarianz von λ^n gilt $\lambda^n(K+y) = \lambda^n(K)$. Dies zeigt, dass $\lambda^n(K) > 0$. Andererseits gilt $K \subseteq [0,1)^n$, also

$$\bigcup_{y \in [0,1)^n \cap \mathbb{Q}^n} (K + y) \subseteq [0,1)^n.$$

Aus der σ-Additivität und (8) folgt

$$\sum_{y \in [0,1)^n \cap \mathbb{Q}^n} \lambda^n(K+y) \leq \lambda^n([0,2)^n) = 2^n.$$

Dies zeigt (wegen $\lambda^n(K+y) = \lambda^n(K)$), dass $\lambda^n(K) = 0$. Widerspruch. Damit kann K nicht in $\mathcal{B}^n$ enthalten sein. $\square$

2 Integrationstheorie

2.1 Messbare numerische Funktionen

Im folgenden verwenden wir die folgenden Konventionen. Es sei $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ Borelsch, falls $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Eine Menge $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ ist damit Borelsch genau dann, wenn es eine Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gibt mit

$$A = B, \qquad A = B \cup \{-\infty\}, \qquad A = B \cup \{\infty\} \qquad \text{oder} \qquad A = B \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Für einen messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$ und eine Funktion $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ ist somit die $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-Messbarkeit erklärt. Solche Funktionen nennen wir $\mathcal{A}$-*messbare numerische Funktionen.*

Beispiel. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $A \subseteq X$. Die numerische Funktion

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A, \end{cases}$$

heißt *charakteristische Funktion* von A. Es ist 1_A genau dann eine $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktion, wenn $A \in \mathcal{A}$ gilt.

Lemma 2.1 *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine numerische Funktion f auf X ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn gilt:*

$$\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \qquad \textit{für alle} \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Beweis. Sei f $\mathcal{A}$-messbar. Da die Intervalle $[\alpha, \infty]$ in $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ enthalten sind, folgt (9). Nach Lemma 1.8 genügt es, die Eigenschaft $f^{-1}(E) \subseteq \mathcal{A}$ für ein Mengensystem E mit $\mathcal{A}_\sigma(E) = \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ nachzuweisen. Das System E der Mengen $[\alpha, \infty]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, besitzt diese Eigenschaft. Denn: Wegen $[\alpha, \infty] \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ folgt $\mathcal{A}_\sigma(E) \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Da diese Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugen, folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_\sigma(E) \cap \mathbb{R}$. Da auch die Mengen $\{\infty\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} [j, \infty]$ und $\{-\infty\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} [-j, \infty]^c$ in $\mathcal{A}_\sigma(E)$ liegen, folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 2.2 *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Gleichwertig mit $\mathcal{A}$-Messbarkeit einer Funktion $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ ist jede der folgenden Eigenschaften:*

(i) $\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$,
(ii) $\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$,
(iii) $\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$,
(iv) $\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. Übung. $\square$

Lemma 2.3 *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Mit $f, g\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ sind auch die Funktionen $f \pm g$ (falls überhaupt definiert) und fg $\mathcal{A}$-messbar.*

Beweis. Übung. □

Lemma 2.4 *Sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen. Dann ist jede der folgenden Funktionen $\mathcal{A}$-messbar:*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j, \qquad \inf_{j\in\mathbb{N}} f_j, \qquad \limsup_{j\to\infty} f_j, \qquad \liminf_{j\to\infty} f_j.$$

Beweis. Sei $g \coloneqq \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$. Dann ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\{g \le \alpha\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \{f_j \le \alpha\} \in \mathcal{A},$$

also g messbar. Dann ist aber auch $\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j = -\sup_{j\in\mathbb{N}}(-f_j)$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion. Dies folgt schließlich auch für

$$\limsup_{j\to\infty} f_j = \inf_{j\in\mathbb{N}} \sup_{k\ge j} f_k \qquad \text{und} \qquad \liminf_{j\to\infty} f_j = \sup_{j\in\mathbb{N}} \inf_{k\ge j} f_k,$$

wie zu zeigen war. □

Bemerkung. Aus Lemma 2.4 folgt, dass die Grenzfunktion $f = \lim_{j\to\infty} f_j$ einer punktweise konvergenten Folge messbarer Funktionen messbar ist. Ferner folgt aus Lemmata 2.3 und 2.4 die $\mathcal{A}$-Messbarkeit der Funktionen $|f|$, f^+ und f^-, falls f messbar ist. Hierbei ist

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0, \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \ge 0, \\ f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

2.2 Integral von Elementarfunktionen

Definition 2.5 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *Elementarfunktion* (bzw. *Treppenfunktion*), falls gilt:
(i) $f \ge 0$,
(ii) f ist $\mathcal{A}$-messbar,
(iii) f nimmt nur endlich viele Werte an.
Wir bezeichnen mit $E = E(X, \mathcal{A})$ die Menge der Elementarfunktionen auf X.

Ist $f \in E$ eine Elementarfunktion mit Werten $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, so sind die Mengen

$$A_j \coloneqq f^{-1}(\alpha_j) \in \mathcal{A},\ 1 \le j \le n,$$

paarweise disjunkt und es gilt:

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}. \tag{10}$$

Die Darstellung (10) von f nennen wir (eine) Normaldarstellung[1]. Umgekehrt definiert die rechte Seite von (10) zu jeder endlichen Mengen $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ mit $\alpha_j \ge 0$ und paarweise disjunkten $A_j \in \mathcal{A}$ eine Funktion $f \in E(X, \mathcal{A})$. Sei nun $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

[1] Diese Darstellung ist natürlich nicht eindeutig, da einzelne „Stufen“ der Treppenfunktion „aufgespaltet“ werden können.

Proposition 2.6 *Für je zwei Normaldarstellungen $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^n \beta_j 1_{B_j}$ einer Funktion $f \in E$ gilt:*

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j).$$

Beweis. Aus $X = A_1 \cup \cdots \cup A_m = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ (disjunkte Vereinigungen) folgt

$$A_i = \bigcup_{j=1}^n (A_i \cap B_j) \quad \text{und} \quad B_j = \bigcap_{i=1}^m (B_j \cap A_i)$$

mit paarweise disjunkten Mengen $A_i \cap B_j$. Damit folgt:

$$\mu(A_i) = \sum_{j=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \qquad \text{und} \qquad \mu(B_j) = \sum_{i=1}^m \mu(B_j \cap A_i),$$

und somit

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j) = \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j).$$

Hieraus folgt die Behauptung, denn $\alpha_i = \beta_j$ für alle i, j mit $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. $\square$

Definition 2.7 Sei $f \in E(X, \mathcal{A})$. Dann heißt die nach Proposition 2.6 von der speziell gewählten Normaldarstellung $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i 1_{A_i}$ unabhängige Zahl

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) =: \int f \, \mathrm{d}\mu$$

das μ-Integral von f über X. Das μ-Integral ist somit eine Abbildung $g \colon E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ (und $g \colon E \to \mathbb{R}^+$ genau dann, wenn das Maß μ endlich ist).

Diese Abbildung besitzt die folgenden Eigenschaften (Übungsaufgabe):

(i) $\int 1_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$;

(ii) Homogenität: $\int \alpha f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int f \, \mathrm{d}\mu$ für alle $f \in E$ und $\alpha \geq 0$;

(iii) Additivität: $\int (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu$ für alle $f, g \in E$;

(iv) Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$ für alle $f, g \in E$.

Aus (i)-(iii) folgt, dass für eine beliebige Darstellung $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j} \in E$, wobei $A_j \in \mathcal{A}$ nicht notwendigerweise paarweise disjunkt sind, ebenfalls gilt:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j).$$

2.3 Integral nichtnegativer messbarer Funktionen

Sei wie bisher $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Satz 2.8 *Es sei $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge von Funktionen $f_j \in E(X, \mathcal{A})$ sowie $f \in E(X, \mathcal{A})$. Dann gilt:*

$$f \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \int f_j \, \mathrm{d}\mu\,.$$

D.h. das Supremum darf in diesem Fall vor das Integral gezogen werden.

Beweis. Sei $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ eine Normaldarstellung von f und $\alpha \in (0,1)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann die Menge $\mathcal{B}_n := \{f_n \geq \alpha f\}$ in $\mathcal{A}$ enthalten. Wegen $f_n \geq \alpha f 1_{\mathcal{B}_n}$ gilt

$$\int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \alpha \int f \, 1_{\mathcal{B}_n} \, \mathrm{d}\mu \tag{11}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner ist

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap \mathcal{B}_n) = \lim_{n\to\infty} \int f \, 1_{\mathcal{B}_n} \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Hierbei folgt die zweite Gleichheit aus der Stetigkeit von μ von unten und der Eigenschaft $A_i \cap \mathcal{B}_n \uparrow A_i$ für $n \to \infty$. Zusammen mit (11) folgt jetzt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha \int f \, 1_{\mathcal{B}_n} \, \mathrm{d}\mu = \alpha \lim_{n\to\infty} \int f \, 1_{\mathcal{B}_n} \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Weil $\alpha \in (0,1)$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung nach Grenzübergang $\alpha \to 1$. □

Korollar 2.9 *Für je zwei monoton steigende Folgen $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus E gilt:*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j = \sup_{j\in\mathbb{N}} g_j \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{j\in\mathbb{N}} \int f_j \, \mathrm{d}\mu = \sup_{j\in\mathbb{N}} \int g_j \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $g_i \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ und $f_i \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} g_j$. Nach Satz 2.8 gilt deshalb

$$\int g_i \, \mathrm{d}\mu \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \int f_j \, \mathrm{d}\mu \quad \text{und} \quad \int f_i \, \mathrm{d}\mu \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \int g_j \, \mathrm{d}\mu$$

Die Behauptung folgt damit nach Übergang zum Supremum über i. □

Im folgenden bezeichnen wir mit $E^* = E^*(X, \mathcal{A})$ die Menge der Funktionen $f \colon X \to \mathbb{R}_0^+$, zu welchen eine monoton steigende Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Elementarfunktionen existiert mit

$$f = \limsup_{j\to\infty} f_j . \tag{12}$$

Definition 2.10 Es sei $f \in E^*$ mit $f = \limsup_{j\to\infty} f_j$ wie in (12). Dann heißt

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sup_{j\in\mathbb{N}} \int f_j \, \mathrm{d}\mu$$

das *(μ-)Integral von* f (über X). Nach Korollar 2.9 ist dieses unabhängig von der Darstellung (12) von f.

Bemerkung. Es ist $E(X, \mathcal{A}) \subseteq E^*(X, \mathcal{A})$, und das Integral aus Definition 2.10 setzt das über Elementarfunktionen fort. Dabei bleiben die bekannten Eigenschaften (wie Additivität, Homogenität, Monotonie) erhalten.

Satz 2.11 (Satz von der monotonen Konvergenz) *Für jede monoton steigende Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in E^* ist*

$$f := \lim_{j\to\infty} f_j \in E^* \qquad \textit{und} \qquad \int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int f_j \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert nach Definition von E^* eine monoton steigende Folge $(u_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in E mit

$$f_j = \sup_{i\to\infty} u_{ij}.$$

Es sei v_i definiert durch

$$v_i(x) := \max\{u_{i1}(x), \ldots, u_{ii}(x)\}.$$

Es ist $v_i \in E$ und $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ebenfalls monoton steigend. Aus der Monotonie der Folge der f_j folgt $v_i \le f_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und damit $\sup_{i\in\mathbb{N}} v_i \le f$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ folgt wegen $u_{ij} \le v_i$ für alle $i \ge j$, dass

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} u_{ij} = f_j \le \sup_{i\in\mathbb{N}} v_i.$$

Somit ist $f = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j \le \sup_{i\in\mathbb{N}} v_i$, also insgesamt $f = \sup_{i\in\mathbb{N}} v_i$. Dies zeigt, dass $f \in E^*$ ist, sowie (per Definition des Integrals)

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{i\in\mathbb{N}} \int v_i \, \mathrm{d}\mu\,.$$

Da außerdem $v_i \le f_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, d.h. $\int v_i \, \mathrm{d}\mu \le \int f_i \, \mathrm{d}\mu$ ist, folgt

$$\int f \, \mathrm{d}\mu \le \sup_{i\in\mathbb{N}} \int f_i \, \mathrm{d}\mu\,.$$

Umgekehrt ist wegen $f_i \le f$ auch $\int f_i \, \mathrm{d}\mu \le \int f \, \mathrm{d}\mu$, d.h. $\sup_{i\in\mathbb{N}} \int f_i \, \mathrm{d}\mu \le \int f \, \mathrm{d}\mu$, also insgesamt

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{i\in\mathbb{N}} \int f_i \, \mathrm{d}\mu,$$

wie behauptet. □

check $d\mu$

Korollar 2.12 *Für jede Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in E^* ist*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j \in E^* \qquad \textit{und} \qquad \int \Big(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\Big) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j \, \mathrm{d}\mu\,.$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 2.11, angewandt auf die Folge $(f_1 + \cdots + f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigender Funktionen. □

Bemerkung. Wir werden bald Funktionen betrachten, die nicht mehr unbedingt nur positive Funktionswerte annehmen. Dann ist der Satz von der monotonen Konvergenz nicht mehr ohne weiteres anwendbar und zunächst keine Aussage über die Grenzfunktion und deren Integral möglich.

Beispiel.

(1) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $x \in X$, sowie das Dirac-Maß $\mu = \delta_x$ definiert durch durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

(vgl. das Beispiel nach Definition 1.10). Dann gilt für jedes $f \in E^*$:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = f(x).$$

Es sei zunächst $f \in E$ eine Elementarfunktionen, d.h. für $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j}$ mit paarweise disjunkten Mengen $A_j \in \mathcal{A}$ so, dass $\bigcup_{j=1}^m A_j = X$ ist. Es folgt

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \alpha_k = f(x),$$

wobei $A_k \in \{A_1, \dots, A_m\}$ diejenige Menge ist, die x enthält. Für eine allgemeine Funktion $f = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j \in E^*$, $f_j \in E$, folgt nun

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{j\in\mathbb{N}} \int f_j \, \mathrm{d}\mu = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) = f(x).$$

(2) Sei $X = \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Durch die Wahl einer Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,\infty]$ und der Fortsetzung von $\mu(\{n\}) = \alpha_n$ per σ-Additivität wird ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ erklärt. Dabei besteht die Menge E^* aus allen Funktionen nichtnegativen Funktionen $f \geq 0$. Denn: Sei $f \geq 0$ und $f_n := f(n) 1_{\{n\}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $f_n \in E^*$ (sogar in E, falls $f(n) < \infty$). Wegen $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ folgt $f \in E^*$ und es gilt

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_j \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n f(n).$$

Hierbei haben wir Korollar 2.12 verwendet.

Es stellt sich die Frage, welche Funktionen die Menge E^* umfasst.

Satz 2.13 *E^* ist die Menge der numerischen, $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $f \geq 0$ auf X.*

Beweis. Da jede Elementarfunktion $\mathcal{A}$-messbar ist, überträgt sich diese Eigenschaft nach Lemma 2.4 auf die Funktionen aus E^*. Sei jetzt $f \geq 0$ eine $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktion. check
Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Mengen proof

$$A_{jn} := \begin{cases} \{f \geq 2^{-n} j\} \cap \{f < 2^{-n}(j+1)\}, & j = 0, \dots, 2^n n - 1, \\ \{f \geq n\}, & j = 2^n n. \end{cases}$$

Die Mengen A_{jn} sind paarweise disjunkt und messbar. Damit ist

$$\mu_n := \sum_{j=1}^{2^n n} j 2^{-n} 1_{A_{jn}} \in E.$$

Man stellt fest, dass die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist. Ferner gilt für jedes $x \in X$ entweder

$$f(x) = \infty = \lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} \mu_n(x)$$

oder

$$\mu_n(x) \leq f(x) < \mu_n(x) + 2^{-n} \quad \forall n > f(x),$$

also auch hier $f(x) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(x)$. Damit ist f der punktweise Grenzwert der monoton steigenden Folge $(\mu_n)_n$, also $f \in E^*$. □

Beispiel. Es sei X eine überabzählbare Menge, $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Mengen A, für die entweder A oder A^c abzählbar ist. Wir betrachten auf $(X, \mathcal{A})$ das Maß μ mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & A^c \text{ abzählbar,} \\ 0 & A \text{ abzählbar.} \end{cases}.$$

Eine numerische Funktion f auf X ist genau dann messbar, wenn f konstant ist auf dem Komplement einer höchstens abzählbare Menge $A \subseteq X$.

Zum Beweis betrachte eine solche Funktion f. Wir wählen eine abzählbare Menge $A \subseteq X$ so, dass $f(x) = \alpha$ für alle $x \in A^c$ gilt. Diese Konstante α hängt dabei nicht von A ab, da $A^c \cap B^c \neq \emptyset$ für jede abzählbare Menge $B \subseteq X$ ist. Es folgt, dass für $\beta \in \mathbb{R}$ stets

$$\{f \geq \beta\} \subseteq A \text{ (falls } \beta > \alpha) \qquad \text{oder} \qquad A^c \subseteq \{f \geq \beta\} \text{ (falls } \beta \leq \alpha)$$

gilt. Damit ist $\{f \geq \beta\} \in \mathcal{A}$, da entweder $\{f \geq \beta\}$ oder $\{f \geq \beta\}^c$ abzählbar ist. Die Meßbarkeit von f folgt nun aus Lemma 2.1. Um die Umkehrung zu zeigen, sei $f \geq 0$ zunächst eine Elementarfunktion, also $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j f 1_{A_j}$ mit $A_j \in \mathcal{A}$ für alle $j = 1, \ldots, m$. Nicht alle der Mengen A_j können abzählbar sein. Somit ist f konstant auf dem Komplement einer höchstens abzählbaren Menge. Sei jetzt $f \in E^*$ beliebig, also $f_j \uparrow f$ für eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in E^*. Jede Funktion f_j ist konstant auf dem Komplement einer höchstens abzählbaren Menge A_j mit Wert α_j. Es folgt

$$f(x) = \sup_{j\to\infty} f_j(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j^c = \Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big)^c,$$

weshalb f konstant ist mit Wert $\alpha = \sup_{j\to\infty} \alpha_j$ auf dem Komplement der höchstens abzählbaren Menge $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, wie behauptet.

Nun können wir noch $\int f \, \mathrm{d}\mu$ für $f \in E^*$ bestimmen. Für $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j} \in E$ ist

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \alpha_j \qquad \text{(mit der Konstanten } \alpha_j \text{ wie oben).}$$

Für allgemeines $f \in E^*$ wie oben gilt ebenso

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \qquad \text{(mit } \alpha = \sup_{j\to\infty} \alpha_j \text{ wie oben).}$$

2.4 Integrierbarkeit

Bislang haben wir das Integral $\int f \, \mathrm{d}\mu$ nur für *nichtnegative* $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktionen $f \geq 0$ eingeführt. Ab jetzt sei allgemeiner f eine Funktion mit Werten in $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Wie bisher sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Lemma 2.14 *Eine numerische Funktion f auf X ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn sowohl*

$$f^+ := \max\{f, 0\} \qquad \text{als auch} \qquad f^- := (-f)^+$$

$\mathcal{A}$-messbar sind. Falls f $\mathcal{A}$-messbar ist, so auch die Funktion $|f|$.

Beweis. Übung. $\square$

Definition 2.15 Eine numerische Funktion f auf X heißt *μ-integrierbar* (kurz: *integrierbar*), falls sie $\mathcal{A}$-messbar ist und die Integrale $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$ und $\int f^- \,\mathrm{d}\mu$ endlich sind. Dann heißt

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu$$

das *μ-Integral von f über X*. Diese Definition von $\int f \,\mathrm{d}\mu$ ist verträglich mit der früheren Definition des Integrals über Funktionen aus $E^*(\mathcal{A}, \mu)$. Allerdings ist $f \in E^*$ nur dann integrierbar (im Sinne dieser Definition), falls $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ gilt. Im Fall $\mu = \lambda^n$ nennt man $\int f \,\mathrm{d}\lambda^n$ das *Lebesgue-Integral von f* (und falls es existiert, so nennt man f *Lebesgue-integrierbar*).

Wir werden später auf den Zusammenhang mit dem aus der Vorlesung Analysis I bekannten Riemann-Integral eingehen.

Beispiel.
(1) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein beliebiger messbarer Raum und wie in vorigen Beispielen $\mu = \delta_x$ das Dirac-Maß in $x \in X$. Dann sind genau diejenigen $\mathcal{A}$-messbaren numerischen Funktionen f μ-integrierbar, für die $f(x) \neq \pm\infty$ ist. In diesem Fall ist $\int f \,\mathrm{d}\mu = f(x)$.
(2) Es sei $X = \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Wie in einem früheren Beispiel wird durch jede Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $[0, \infty]$ ein Maß definiert, indem wir $\mu(\{j\}) = a_j$ erklären. Genau diejenigen Funktionen $f : \mathbb{N} \to \bar{\mathbb{R}}$ sind μ-integrierbar, für die $\sum_{j=1}^{\infty} a_j |f(j)| < \infty$ ist.
(3) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum (d.h. $\mu(X) < \infty$). Dann ist jede konstante reellwertige Funktion, und allgemeiner jede beschränkte μ-messbare Funktion μ-integrierbar.

Lemma 2.16 *Seien f, g integrierbar. Dann sind auch die Funktionen αf ($\alpha \in \mathbb{R}$) und $f + g$ (sofern definiert) integrierbar. Es gilt:*

$$\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{(Homogenität)},$$

$$\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{(Additivität)}.$$

Ebenso sind die Funktionen $\max\{f, g\}$ *und* $\min\{f, g\}$ *integrierbar. Gilt $f \le g$, so ist $\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$. Ferner ist*

$$\Big| \int f \,\mathrm{d}\mu \Big| \le \int |f| \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Beweis. Die Homogenität folgt für $\alpha \ge 0$ aus $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ bzw. für $\alpha < 0$ aus $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ und $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. Die Additivität folgt aus

$$f + g = \underbrace{f^+ + g^+}_{\text{integrierbar}} - \underbrace{(f^- + g^-)}_{\text{integrierbar}}.$$

Die Integrierbarkeit der messbaren Funktionen $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ folgt mit der Ungleichung $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \le |f| + |g|$ aus folgender Behauptung: Eine messbare Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn es eine integrierbare Funktion g gibt mit $|f| \le g$ (Beweis: Übung). Seien $f \le g$ integrierbar. Dann gilt $f^+ \le g^+$, $f^- \ge g^-$, also $\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$ aufgrund der Monotonie des Integrals auf E^*. Mit $g = |f|$ (d.h. $f \le g$) und $\left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| = \max\{\pm \int f \,\mathrm{d}\mu\}$ folgt hieraus auch $\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int |f| \,\mathrm{d}\mu$. $\square$

Häufig möchte man nur reellwertige integrierbare Funktionen betrachten (also die Funktionswerte $\pm\infty$ ausschließen). Hierzu definieren wir

$$L^1(\mu) \coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}\}.$$

Aus Lemma 2.16 folgt, dass $L^1(\mu)$ ein Vektorraum ist. Ferner ist die Abbildung $f \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu$ ein lineares Funktional auf $L^1(\mu)$.

2.5 Fast überall bestehende Eigenschaften

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ heißt *μ-Nullmenge*, falls $\mu(N) = 0$. Es folgt, dass jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist. Ebenso ist jede messbare Teilmenge einer Nullmenge wieder eine Nullmenge. Wir verwenden die Sprechweise $f = g$ (μ)-fast überall bzw. $|f| < \infty$ (μ)-fast überall etc., falls diese Eigenschaften auf dem Komplement einer μ-Nullmenge gelten.

Satz 2.17 *Es sei $f \in E^*(X, \mathcal{A})$ und μ ein Maß auf X. Dann gilt $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ μ-fast überall ist.*

Beweis. Da f messbar ist, gilt $N \coloneqq \{f \neq 0\} = \{f > 0\} \in \mathcal{A}$. Zu zeigen ist also

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(N) = 0.$$

Sei $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge $A_j \coloneqq \{f \geq \frac{1}{j}\} \in \mathcal{A}$. Es gilt $A_j \uparrow N$. Es ist $\mu(A_j) = 0$ für alle j, denn aus $f \geq \frac{1}{j} 1_{A_j}$ folgt $0 = \int f \, \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{j}\mu(A_j)$, also $\mu(A_j) = 0$. Damit ist $\mu(N) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_j) = 0$, da $A_j \uparrow N$. Es sei umgekehrt $\mu(N) = 0$. Für jede der Funktionen $\mu_j \coloneqq 1_N j$, $j \in \mathbb{N}$, gilt $\mu_j \in E(X, \mathcal{A})$ und $\int \mu_j \, \mathrm{d}\mu = j\mu(N) = 0$. Es sei $g \coloneqq \lim_{j\to\infty} \mu_j \in E^*(X, \mathcal{A})$. Dann folgt

$$\int g \, \mathrm{d}\mu = \sup_{j\in\mathbb{N}} \int \mu_j \, \mathrm{d}\mu = 0$$

per Definition des Integrals. Da $0 \leq f \leq g$ ist, folgt $0 \leq \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu = 0$, also die Behauptung. $\square$

Satz 2.18 *Seien f, g messbare numerische Funktionen und $f = g$ μ-fast überall. Dann gilt:*
- *(i) $\int f \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu$, falls $f, g \geq 0$ erfüllt ist;*
- *(ii) die Funktion f ist integrierbar genau dann, wenn g integrierbar ist. In diesem Fall ist $\int f \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu$.*

Beweis. Übung. $\square$

2.6 Die Räume $\mathcal{L}^p(\mu)$

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Erinnerung: Seien f, g μ-messbare numerische Funktionen. Dann ist fg nach Lemma 2.3 ebenfalls μ-messbar. Im Gegensatz dazu ist aber fg nicht notwendigerweise integrierbar, wenn f, g integrierbar sind. Denn f und g sind integrierbar genau dann, wenn $\int f^{\pm} \, \mathrm{d}\mu \neq \infty$ und $\int g^{\pm} \, \mathrm{d}\mu \neq \infty$ gilt, und diese Eigenschaft setzt sich nicht notwendig auf das Produkt fort.

Beispiel. (Vgl. mit Beispiel (2) nach Definition 2.15). Sei $X = \mathbb{N}$, $\mu(\{n\}) = n^{-3}$. Dann ist die Funktion $f\colon N \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n$, μ-integrierbar mit

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

nicht aber die Funktion $f^2\colon n \mapsto n^2$, denn $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \cdot n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Ab jetzt sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl. Ist f eine messbare numerische Funktion, so sind auch $|f|$ und $|f|^p$ messbare Funktionen; letzteres da für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{x \in X \mid |f(x)|^p \geq \alpha\} = \begin{cases} X, & \alpha \leq 0, \\ \{|f| \geq \alpha^{\frac{1}{p}}\}, & \alpha > 0, \end{cases}$$

messbar ist.

Satz 2.19 (Höldersche Ungleichung) *Sei $p > 1$ und $q > 1$ (der* zu p duale Exponent*) definiert durch*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dann gilt für je zwei messbare numerische Funktionen f und g auf X:

$$\int |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $f, g \geq 0$ annehmen. Es sei $a := (\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}}$, $b := (\int |f|^q \, \mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}}$. Wir nehmen noch an, dass $a, b > 0$ ist, denn andernfalls folgt die Behauptung sofort. Für $t \geq 0$ gilt die Bernoullische Ungleichung

$$(1+t)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{t}{p} + 1,$$

woraus für $s := t + 1 \geq 1$ folgt:

$$s^{\frac{1}{p}} \leq \frac{s-1}{p} + 1 = \frac{s}{p} - \frac{1}{p} + 1 = \frac{s}{p} + \frac{1}{q}.$$

Seien $x, y > 0$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $s := xy^{-1} \geq 1$ (andernfalls vertausche die Rollen von x und y). Es folgt

$$x^{\frac{1}{p}} y^{-\frac{1}{p}} \leq \frac{xy^{-1}}{p} + \frac{1}{q},$$

also wegen $y^{-\frac{1}{p}} = y^{\frac{1}{q}-1} = y^{\frac{1}{q}} y^{-1}$

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Sei $z \in X$ mit $f(z), g(z) < \infty$. Wegen $f, g \geq 0$ ist $f(z), g(z) \geq 0$ und ohne Einschränkung nehmen wir $f(z), g(z) > 0$ an. Mit $x := \left(\frac{f(z)}{a}\right)^p$, $y := \left(\frac{g(z)}{b}\right)^q$ folgt nun

$$\frac{1}{ab} f(z) g(z) \leq \frac{f(z)^p}{a^p p} + \frac{g(z)^q}{b^q q}.$$

Nach Integration erhalten wir

$$\frac{1}{ab} \int fg \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und das ist genau die Behauptung. □

Im Falle $p = q = 2$ reduziert sich die Höldersche Ungleichung auf die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung. Diese zeigt, dass das Produkt zweier quadratintegrierbarer Funktionen integrierbar ist.

Satz 2.20 (Minkowskische Ungleichung) *Seien f, g messbare Funktionen und $f + g$ überall definiert. Dann gilt für jedes $p \geq 1$ die Minkowskische Ungleichung*

$$\left(\int |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis. Da $|f+g| \leq |f| + |g|$ gilt, genügt es, die Ungleichung

$$\left(\int (|f|+|g|)^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

zu zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Menge der Punkte $x \in X$ mit $f(x) > 0$ und $g(x) > 0$ positives Maß hat (also keine μ-Nullmenge ist), da andernfalls die behauptete Ungleichung in trivialer Weise erfüllt ist. Unter dieser Annahme folgt $\int f \,\mathrm{d}\mu > 0$ und $\int g \,\mathrm{d}\mu > 0$. Weiterhin können wir annehmen, dass f^p und g^p integrierbar sind. Dann ist auch $(f+g)^p$ integrierbar, denn aus $f, g \leq \max\{f, g\}$ folgt

$$\begin{aligned}(f+g)^p \leq \big(2\max\{|f|,|g|\}\big)^p &= \begin{cases} 2^p|f|^p, & |f| = \max\{|f|,|g|\} \\ 2^p|g|^p, & |g| = \max\{|f|,|g|\}\end{cases} \\ &\leq 2^p(|f|^p + |g|^p).\end{aligned}$$

Es sei $q > 1$ durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ definiert. Mittels der Hölderschen Ungleichung folgt nun

$$\begin{aligned}\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu &= \int f(f+g)^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int g(f+g)^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \Big(\int f^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int (f+g)^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\int g^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int (f+g)^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also $\frac{p}{q} = p - 1$ bzw. $q(p-1) = p$ folgt

$$\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\Big(\int f^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int g^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Mit $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ folgt die Behauptung, indem wir auf beiden Seiten durch

$$0 < \Big(\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

dividieren. □

Definition 2.21 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Funktion $f\colon Y \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt *integrierbar von der Ordnung p* (bzw. *p-fach integrierbar*), wenn sie messbar ist und wenn die Funktion $|f|^p$ μ-integrierbar ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^p(\mu)$ die Menge der *reellen* p-fach integrierbaren Funktionen.

Satz 2.22 *$\mathcal{L}^p(\mu)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sind $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so ist $fg \in L^1(\mu)$. Falls das Maß μ endlich ist, so gilt für je zwei Zahlen $1 \leq p_1 \leq p_2$ die Inklusion $L^{p_2}(\mu) \subseteq L^{p_1}(\mu)$.*

Beweis. Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}^p(\mu)$ unter Addition folgt aus der Minkowskischen Ungleichung (Satz 2.20). Die übrigen Vektorraumaxiome sind klar. Sind $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, so folgt aus der Hölderschen Ungleichung (Satz 2.19), dass

$$\int |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \Big(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int |g|^q \, \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

und damit $fg \in L^1(\mu)$. Ist schließlich das Maß μ endlich, so folgt mittels der Hölderschen Ungleichung aus der Annahme $1 \leq p_1 \leq p_2$, dass

$$\begin{aligned}
\int |f|^{p_1} \, \mathrm{d}\mu &= \int |f|^{p_1} \cdot 1 \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \Big(\int |f|^{p_2} \, \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{p_1}{p_2}} \Big(\int 1^{\frac{p_2}{p_2 - p_1}} \, \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}} \\
&\leq \mu(X)^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}} \cdot \Big(\int |f|^{p_2} \, \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{p_1}{p_2}} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Definition 2.23 Es sei V ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine *Norm* ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| \colon V \to \mathbb{R}_0^+$$

mit den Eigenschaften
(i) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\alpha \in \mathbb{C}$);
(ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$;
(iii) $\|v\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$.
Falls nur die Eigenschaften (i) und (ii) gelten, so nennt man $\| \cdot \|$ eine *Halbnorm.*

Aus Satz 2.20 und 2.22 folgt, dass durch

$$\| \cdot \|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \colon \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathbb{R}_0^+, \quad f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = \Big(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{1}{p}}$$

eine Halbnorm erklärt wird. Man nennt $\| \cdot \|_{\mathcal{L}^p(\mu)}$ die $\mathcal{L}^p(\mu)$-*Halbnorm.* Im allgemeinen ist dies jedoch keine Norm, da aus $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = 0$ nur $f = 0$ μ-fast überall folgt, vgl. Satz 2.17. Ist $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^p(\mu)$ und $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, so heißt $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^p(\mu)$-*konvergent gegen* f, falls

$$\lim_{j \to \infty} \|f_j - f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = 0 \tag{13}$$

gilt. Warnung: Der Grenzwert ist nicht eindeutig bestimmt. Konvergiert f_j gegen f, so auch gegen jede Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(\mu)$, die mit f μ-fast überall übereinstimmt.

In Ergänzung zu den Räumen $\mathcal{L}^p(\mu)$ mit $1 \leq p < \infty$ führen wir noch den Raum $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ein. Hierzu definieren wir:

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) \coloneqq \{f \colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und } \mu\text{-fast überall beschränkt}\}.$$

Durch

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \coloneqq \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ \mid |f| \leq \alpha \ \mu\text{-fast überall}\}$$

ist auf $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ebenfalls eine Halbnorm definiert. Wir nennen $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)}$ auch das *essentielle Supremum von* f. Konvergenz in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ist analog zu 13 erklärt.

2.7 Konvergenzsätze

Im folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Konvergenzsät
für $p = \infty$

Lemma 2.24 (Lemma von Fatou) *Für jede Folge $(f_j)_j$ in $E^*(X, \mathcal{A})$ (also von $\mathcal{A}$-messbaren numerischen Funktionen $f_j \geq 0$, vgl. Satz 2.13) gilt*

$$\int \liminf_{j\to\infty} f_j \; \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int f_j \; \mathrm{d}\mu\,.$$

Beweis. Es sei $f := \liminf_{j\to\infty} f_j$ und $g_i := \inf_{j\geq i} f_j$ $(i \in \mathbb{N})$. Nach Lemma 2.4 sind die Funktionen f und g_i $(i \in \mathbb{N})$ nicht-negativ und μ-messbar, und damit nach Satz 2.13 in $E^*(X, \mathcal{A})$ enthalten. Aus der Definition von g_i und der Monotonie des Integrals folgt

$$\int g_i \; \mathrm{d}\mu \leq \int f_j \; \mathrm{d}\mu$$

für alle $j \geq i$, also

$$\int g_i \; \mathrm{d}\mu \leq \inf_{j\geq i} \int f_j \; \mathrm{d}\mu\,.$$

Wegen $g_i \uparrow f$ folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass

$$\int f \; \mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int g_i \; \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int f_j \; \mathrm{d}\mu,$$

wie behauptet. $\square$

Aus dem Lemma von Fatou leiten wir nun eine Reihe von Konvergenzsätzen ab, die es uns unter bestimmten Voraussetzungen erlauben werden, aus der nur punktweisen fast-überall-Konvergenz auf die Konvergenz in $\mathcal{L}^p(\mu)$ zu schließen.

Satz 2.25 (Satz von Riesz) *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $(f_j)_j$ eine Folge in $\mathcal{L}^p(\mu)$, die μ-fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ konvergiert. Dann gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \quad \Longleftrightarrow \quad f_j \to f \text{ in } \mathcal{L}^p(\mu) \text{ für } j \to \infty.$$

Beweis. Es gelte $f_j \to f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ für $j \to \infty$. Aus der Minkowskischen Ungleichung folgt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\|f_j\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = \|f_j - f + f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \leq \underbrace{\|f_j - f\|_{L^p(\mu)}}_{\to 0,\, j\to\infty} + \|f\|_{L^p(\mu)}$$

bzw. mittels der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\big|\|f_j\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} - \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}\big| \leq \|f_j - f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \to 0$$

für $j \to \infty$, wie behauptet. Es gelte nun umgekehrt $\lim_{j\to\infty} \|f_j\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}$. Für positive Zahlen α, β gilt die elementare Ungleichung

$$|\alpha - \beta|^p \leq |\alpha + \beta|^p \leq 2^p(|\alpha|^p + |\beta|^p).$$

Somit ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$g_j := 2^p(|f_j|^p + |f|^p) - |f_j - f|^p$$

nicht-negativ und in $L^1(\mu)$ enthalten. Nach Voraussetzung konvergiert die Folge $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ für $j\to\infty$ gegen $2^{p+1}|f|^p$ μ-fast überall. Daher ist auch

$$\liminf_{j\to\infty} g_j = 2^{p+1}|f|^p \qquad \mu\text{-fast überall.}$$

Aus dem Lemma von Fatou und der Voraussetzung folgt somit

$$\begin{aligned}2^{p+1}\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int \liminf_{j\to\infty} g_j \,\mathrm{d}\mu\\ &\le \liminf_{j\to\infty}\int g_j \,\mathrm{d}\mu\\ &= \liminf_{j\to\infty}\Big(2^p\int |f_j|^p \,\mathrm{d}\mu + 2^p\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu - \int |f_j-f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\lim_{j\to\infty}\int |f_j|^p \,\mathrm{d}\mu = \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu$ und deshalb

$$2^{p+1}\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu \le 2^{p+1}\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{j\to\infty}\int |f_j-f|^p \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Es folgt $0 = -\limsup_{j\to\infty}\int |f_j-f|^p \,\mathrm{d}\mu$, also $\lim_{j\to\infty}\int |f_j-f|^p \,\mathrm{d}\mu = 0$, wie behauptet. □

Satz 2.26 (Lebesguescher Konvergenzsatz, Satz von der majorisierten Konvergenz) *Sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine fast überall konvergente Folge in $\mathcal{L}^p(\mu)$. Es existiere ferner eine Funktion $g\in\mathcal{L}^p(\mu)$, $g\ge 0$, mit $|f_j|\le g$ für alle $j\in\mathbb{N}$. Dann gibt es eine messbare Funktion $f\colon X\to\mathbb{R}$ mit $f_j\xrightarrow{j\to\infty} f$ μ-fast überall. Jede solche Funktion f liegt in $\mathcal{L}^p(\mu)$ und die Konvergenz $f_j\xrightarrow{j\to\infty} f$ ist in $\mathcal{L}^p(\mu)$.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt die Existenz einer Nullmenge N mit
(i) $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ existiert für alle $x\in X\setminus N$;
(ii) $g(x)<\infty$ für alle $x\in X\setminus N$.
Damit ist die durch

$$f(x) := \begin{cases}\lim_{j\to\infty} f_j(x), & x\in X\setminus N,\\ 0, & x\in N,\end{cases}$$

definierte Funktion f reellwertig und messbar, und es gilt $f_j\to f$ fast überall. Sei nun f irgendeine Funktion mit diesen Eigenschaften. Dann gilt $|f|\le g$ fast überall, also $\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu \le \int g^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$ und damit $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$. Es bleibt, $f_j\xrightarrow{j\to\infty} f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ zu zeigen. Betrachte hierzu die nichtnegativen Funktionen $g_j := |f-f_j|^p$ und $h := (|f|+g)^p$. Wegen $0\le g_j\le (|f_j|+|f|)^p\le h$ ist auch jede Funktion g_j integrierbar. Aus dem Lemma von Fatou folgt jetzt

$$\int \liminf_{j\to\infty}(h-g_j) \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{j\to\infty}\int h-g_j \,\mathrm{d}\mu = \int h \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{j\to\infty}\int g_j \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Wegen $f_j\to f$ fast überall ist $\liminf_{j\to\infty}(h-g_j) = h$ fast überall. Dies zeigt, dass

$$\int \liminf_{j\to\infty}(h-g_j) \,\mathrm{d}\mu = \int h \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Es folgt $\limsup_{j\to\infty}\int g_j \,\mathrm{d}\mu \le 0$, also $\lim_{j\to\infty}\int g_j \,\mathrm{d}\mu = 0$, was zu zeigen war. □

Wie üblich nennnen wir eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|f_i - f_j\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} < \varepsilon$$

für alle $i, j \geq N$. Aufgrund der Minkowski-Ungleichung ist jede in $\mathcal{L}^p(\mu)$ konvergente Folge eine Cauchy-Folge. Es gilt hiervon auch die Umkehrung:

Satz 2.27 (Fall $p = 2$: Satz von Riesz-Fischer) *Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Jede Cauchy-Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ konvergiert in $\mathcal{L}^p(\mu)$ gegen eine Grenzfunktion $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Eine Teilfolge von $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall gegen f.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Teilfolge $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ so, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $g_k := f_{j_{k+1}} - f_{j_k}$ die Ungleichung

$$\|g_k\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \leq 2^{-k}$$

erfüllt. Es sei $g := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$. Die Funktion g ist messbar und erfüllt

$$\|g\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Dies zeigt $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Insbesondere ist g fast überall reellwertig, d.h. die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ konvergiert fast überall absolut. Die k-te Partialsumme von $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ ist $f_{j_{k+1}} - f_{j_1}$, weswegen die Folge der Funktionen f_{j_k} fast überall konvergiert. Wegen

$$|f_{j_{k+1}}| = |f_{j_1} + g_1 + \cdots + g_k| \leq |f_{j_1}| + |g|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt $(f_{j_k})_k$ die Voraussetzungen des Lebesgueschen Konvergenzsatzes (mit der Funktion $|f_{j_1}| + |g|$ als Majorante). Es existiert somit $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $f_{j_k} \xrightarrow{k\to\infty} f$ fast überall und in $\mathcal{L}^p(\mu)$. Da $(f_j)_j$ eine Cauchy-Folge ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_i - f_j\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} < \varepsilon$ für alle $i, j \geq N$. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $j_k \geq N$ und $\|f_{j_k} - f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} < \varepsilon$. Es folgt, dass

$$\|f_j - f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \leq \|f_j - f_{j_k}\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} + \|f_{j_k} - f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} < 2\varepsilon$$

für alle $j \geq N$, also $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$. □

Beispiel. Sei $X = [0, 1)$, $\mathcal{A} = \{B \cap [0, 1) \mid B \in \mathcal{B}^1\}$, $\mu = \lambda^1|_{\mathcal{A}}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ zerlegt in $n = 2^l + k$, wobei $0 \leq k \leq 2^l - 1$. Sei $A_n := [k2^{-l}, (k + 1)2^{-l}) \in \mathcal{A}$ und $f_n := 1_{A_n}$. Es folgt $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ (für jedes $1 \leq p < \infty$), denn

$$\int f_n^p \, \mu = (k + 1)2^{-l} - k2^{-l} = 2^{-l} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Andererseits existiert für kein $x \in X$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_k(x)$, denn: zu jedem $l \in \mathbb{N}_0$ gibt es genau ein $k \in \{0, \ldots, 2^l - 1\}$ mit $x \in [k2^{-l}, (k + 1)2^{-l})$. Für dieses k ist $x \in A_{2^l+k}$ und

$$x \notin \begin{cases} A_{2^l+k+1}, & k + 1 < 2^l, \\ A_{2^{l+1}}, & k + 1 = 2^l. \end{cases}$$

Dies zeigt $f_{2^l+k}(x) = 1$, wohingegen $f_{2^l+k+1}(x) = 0$ (bzw. $f_{2^{l+1}}(x) = 0$, falls $k + 1 = 2^l$) ist. Die Konvergenz fast überall gilt also nur nach Übergang zu einer geeigneten Teilfolge von $(f_n)_n$.

Korollar 2.28 *Es sei $(f_j)_j$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(\mu)$ mit $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ fast überall für eine messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$.*

Beweis. Nach Satz 2.27 existiert eine Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $f_j \xrightarrow{j\to\infty} \tilde{f}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ und eine Teilfolge von $(f_j)_j$ konvergiert fast überall gegen $\tilde{f}$. Die gleiche Teilfolge konvergiert nach Voraussetzung auch fast überall gegen f. Damit ist $f = \tilde{f}$ fast überall, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Wir haben bereits festgestellt, dass für jede Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ gilt:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = 0 \quad \mu\text{-fast überall.}$$

Damit ist $N := \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) \mid \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = 0\}$ ein Unterraum von $\mathcal{L}^p(\mu)$, der nicht von p abhängt. Dieser besteht aus allen messbaren reellen Funktionen, die μ-fast überall gleich null sind. Man bildet nun den Quotientenraum

$$L^p(\mu) := \frac{\mathcal{L}^p(\mu)}{N}$$

und versieht diesen mit der Norm $\|[f]\|_{L^p(\mu)} := \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}$.

Übung: Zeige, dass $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$ wohldefiniert ist und eine Norm auf $L^p(\mu)$ definiert.

Satz 2.27 besagt, dass $L^p(\mu)$ mit dieser Norm vollständig, also ein *Banach-Raum* ist. Ferner ist $L^2(\mu)$ sogar ein *Hilbert-Raum* bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle [f], [g] \rangle := \int fg \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Dieses ist endlich aufgrund der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung: $\int fg \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_{L^2(\mu)} \|g\|_{L^2(\mu)}$.

Übung: Dieses Skalarprodukt ist wohldefiniert und die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ ist die $L^2(\mu)$-Norm.

Anwendungen der Konvergenzsätze

In Anwendungen trifft man häufig auf Funktionen, die als Integral

$$\varphi(x) := \int f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(y)$$

über eine Kernfunktion $f\colon E \times X \to \mathbb{R}$ mit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert sind. Im folgenden geben wir Kriterien für die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der so definierten Funktion $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ an.

Lemma 2.29 (Stetigkeits-Lemma) *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (allgemeiner: E ein metrischer Raum) und $f\colon E \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit*
(i) $y \mapsto f(x,y)$ ist μ-integrierbar für alle $x \in E$;
(ii) $x \mapsto f(x,y)$ ist stetig in $x_0 \in E$ für alle $y \in X$;
(iii) Es existiert $h \geq 0$ auf X, μ-integrierbar mit $|f(x,y)| \leq h(y)$ für alle $(x,y) \in E \times X$.

Dann ist die Funktion

$$\varphi\colon E \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int f(x,y)\; \mathrm{d}\mu(y)$$

stetig in x_0.

Beweis. Sei $(x_j)_j$ eine Folge in E mit $x_j \to x_0$ für $j \to \infty$. Dann ist $f_j\colon y \mapsto f(x_j, y)$ eine Folge von integrierbaren Funktionen, die wegen (ii) punktweise gegen $y \mapsto f(x_0, y)$ konvergieren. Da nach (iii) $|f_j| \le h$ für alle j gilt, ist der Satz von der majorisierten Konvergenz 2.26 anwendbar und liefert

$$\lim_{j\to\infty} \varphi(x_j) = \lim_{j\to\infty} \int f(x_j, y)\; \mathrm{d}\mu(y) = \int \lim_{j\to\infty} f(x_j, y)\; \mathrm{d}\mu = \int f(x_0, y)\; \mathrm{d}\mu = \varphi(x_0),$$

d.h. die Stetigkeit von φ in x_0. □

Lemma 2.30 (Differentiations-Lemma) *Sei $I = (a, b)$ ein Intervall und $f\colon I \times X \to \mathbb{R}$ mit*

(i) $y \mapsto f(x, y)$ ist μ-integrierbar für alle $x \in I$;
(ii) $x \mapsto f(x, y)$ ist differenzierbar für alle $y \in X$;
(iii) Es existiert $h \ge 0$ integrierbar mit $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \le h(y)$ für alle $x \in I$.

Dann ist die auf I definierte Funktion

$$\varphi(x) = \int f(x, y)\; \mathrm{d}\mu(y)$$

differenzierbar. Für alle x ist die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}$ μ-integrierbar und es gilt

$$\varphi'(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\; \mathrm{d}\mu\,.$$

(Man kann unter dieser Voraussetzung also „unter dem Integral differenzieren“).

Beweis. Es sei $x_0 \in I$ und $(x_j)_j$ eine Folge in $I \setminus \{x_0\}$ mit $x_j \to x_0$ für $j \to \infty$. Betrachte die Funktionenfolge

$$g_j(y) := \frac{f(x_j, y) - f(x_0, y)}{x_j - x_0}\colon X \to \mathbb{R}.$$

Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist g_j μ-integrierbar und es gilt $\lim_{j\to\infty} g_j(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)$ für alle $y \in X$. Ferner ist $|g_j| \le h$, denn für jedes $y \in X$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x_j, x_0)$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) = \frac{f(x_j, y) - f(x_0, y)}{x_j - x_0}.$$

Mit (iii) folgt $|g_j(y)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_j, y)\right| \le h(y)$ für geeignetes $\xi \in (x_j, x_0)$. Damit ist der Satz von der majorisierten Konvergenz anwendbar und liefert

$$\varphi'(x_0) = \lim_{j\to\infty} \frac{\varphi(x_j) - \varphi(x_0)}{x_j - x_0} = \int \lim_{j\to\infty} g_j(y)\; \mathrm{d}\mu(y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)\; \mathrm{d}\mu(y),$$

wie behauptet. □

Abschließend gehen wir noch auf den Zusammenhang zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral ein.

Satz 2.31 *Sei $f\colon I=[a,b]\to\mathbb{R}$ Borel-messbar. Ist f Riemann-integrierbar (also insbesondere beschränkt), so ist f auch Lebesgue-integrierbar. In diesem Fall stimmen beide Integrale überein.*

Beweis. Sei $a=a_0\le a_1\le\dots\le a_n=b$ eine Zerlegung ν von I und

$$\gamma_i=\inf f|_{[a_{i-1},a_i]}\,,\qquad \Gamma_i=\sup f|_{[a_{i-1},a_i]}\,.$$

Die zu ν gehörende Unter- bzw. Obersumme ist

$$U_\nu=\sum_{i=1}^n\gamma_i(a_i-a_{i-1})\qquad\text{und}\qquad O_\nu=\sum_{i=1}^n\Gamma_i(a_i-a_{i-1}).$$

Sei $A_i:=[a_{i-1},a_i]$. Dann sind $u_\nu:=\sum_{i=1}^n\gamma_i 1_{A_i}$ und $o_\nu:=\sum_{i=1}^n\Gamma_i 1_{A_i}$ λ-integrierbare Funktionen mit $U_\nu=\int u_\nu\,\mathrm{d}\lambda$ und $O_\nu=\int o_\nu\,\mathrm{d}\lambda$. Da f nach Voraussetzung Riemann-integrierbar ist, gibt es eine Folge $(\nu_j)_j$ von Unterteilungen von I, ν_{j+1} eine Verfeinerung von ν_j für alle $j\in\mathbb{N}$, mit

$$\rho:=\lim_{j\to\infty}U_{\nu_j}=\lim_{j\to\infty}O_{\nu_j},$$

und ρ ist das Riemann-Integral von f. Da die Folge $(u_{\nu_j})_j$ monoton steigend und die Folge $(o_{\nu_j})_j$ monoton fallend ist, existiert die Grenzfunktion $q:=\lim_{j\to\infty}(o_{\nu_j}-u_{\nu_j})$. Nach dem Lemma von Fatou ist

$$0\le\int q\,\mathrm{d}\lambda\le\lim_{j\to\infty}(O_{\nu_j}-U_{\nu_j})=0,$$

also $q=0$ fast überall. Mit $u_{\nu_j}\le f\le o_{\nu_j}$ folgt $\lim_{j\to\infty}u_{\nu_j}=f$ fast überall. Da f beschränkt ist, existiert eine λ-integrierbare Majorante von $(u_{\nu_j})_j$ (z.B. die konstante Funktion $g=c$ für $c>0$ hinreichend groß). Der Satz von der majorisierten Konvergenz zeigt jetzt, dass f λ-integrierbar ist mit

$$\int f\,\mathrm{d}\lambda=\int\lim_{j\to\infty}u_{\nu_j}\,\mathrm{d}\lambda=\lim_{j\to\infty}\int u_{\nu_j}\,\mathrm{d}\lambda=\lim_{j\to\infty}U_{\nu_j}=\rho,$$

was zu zeigen war. □

Satz 2.32 *Sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\ge0$, Borel-messbar und über jedes kompakte Intervall Riemann-integrierbar. Die Funktion f ist Lebesgue-integrierbar genau dann, wenn das uneigentliche Riemann-Integral*

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^n f(x)\,dx$$

existiert. In diesem Fall stimmen beide Integrale überein.

Beweis. Sei $\rho_n:=\int_{-n}^n f(x)\,dx$ das Riemann-Integral über $A_n:=[-n,n]$. Nach Satz 2.31 gilt $\rho_n=\int 1_{A_n}f\,\mathrm{d}\lambda$. Wegen $1_{A_n}f\uparrow f$ folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\rho_n=\int f\,\mathrm{d}\lambda$$

als Integral in $E^*(\mathbb{R},\mathcal{B})$ (d.h. auch $\int f\,\mathrm{d}\lambda=\infty$ ist zulässig). Dieser Ausdruck ist genau dann endlich, wenn $\sup_{n\in\mathbb{N}}\rho_n<\infty$ gilt und somit das uneigentliche Riemann-Integral existiert oder aber, wenn $\int f\,\mathrm{d}\lambda<\infty$ ist und das Lebesgue-Integral von f existiert. In diesem Fall ist $\sup_{n\in\mathbb{N}}\rho_n=\int f\,\mathrm{d}\lambda=\rho$, wie behauptet. □

Bemerkung. Die Aussage des Satzes ist ohne die Voraussetzung $f \geq 0$ im allgemeinen falsch. Es gibt Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren uneigentliches Riemann-Integral existiert, die jedoch nicht Lebesgue-integrierbar sind, wie zum Beispiel die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

vgl. die Übungen.

2.8 Produktmaße - Satz von Fubini

Beispiel. Wir betrachten das Rechteck $A = [a_0, b_0] \times [a_1, b_1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Für die (Lebesgue-integrierbare) charakteristische Funktion von A gilt:

$$\int 1_A \,\mathrm{d}\lambda^2 = (b_0 - a_0)(a_1 - b_1).$$

Andererseits gilt $1_A = 1^x_{[a_0,b_0]} \cdot 1^y_{[a_1,b_1]}$ mit

$$1^x_{[a_0,b_0]}(x, y) := \begin{cases} 1 & a_0 \leq x \leq b_0, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

und entsprechend für $1^y_{[a_1,b_1]}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int \left(\int 1^x_{[a_0,b_0]} \cdot 1^y_{[a_1,b_1]} \,\mathrm{d}\lambda^1(x) \right) \mathrm{d}\lambda^1(y) &= \int 1^y_{[a_1,b_1]} \left(\int 1^x_{[a_0,b_0]} \,\mathrm{d}\lambda^1(x) \right) \mathrm{d}\lambda^1(y) \\ &= \int 1^y_{[a_1,b_1]} (b_0 - a_0) \,\mathrm{d}\lambda^1(y) \\ &= (b_0 - a_0)(b_1 - a_1). \end{aligned}$$

Im folgenden wird es unser Ziel sein, zu geeigneten Maßräumen $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ ein Maß π auf $X_1 \times X_2$ mit $\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu(A_2)$ für alle $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, zu finden. Im Beispiel: $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda^1)$ und $X_1 \times X_2 = \mathbb{R}^2$, $\pi = \lambda^2$.

Produkte von σ-Algebren

Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, messbare Räume und

$$p_i\colon X := X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i, \qquad p(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

die Projektion auf X_i. Dann definieren wir das *Produkt* $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ der σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ als die kleinste σ-Algebra auf X, für die jede der Projektionsabbildungen p_i $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i)$-messbar ist. Ab jetzt seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume, $(X, \mathcal{A}) := (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ und $Q \subseteq X_1 \times X_2$ eine Menge. Für $x_1 \in X_1$ definieren wir den x_1-Schnitt $Q_{x_1} \subseteq X_2$ von Q durch

$$Q_{x_1} := \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in Q\},$$

und analog für $x_2 \in X_2$ durch

$$Q_{x_2} := \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in Q\}.$$

Lemma 2.33 *Für jedes $x_1 \in X_1$ (bzw. $x_2 \in X_2$) und jede Menge $Q \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt $Q_{x_1} \in \mathcal{A}_2$ (bzw. $Q_{x_2} \in \mathcal{A}_1$).*

Beweis. Sei $x_1 \in X_1$. Für beliebige Teilmengen $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ von X gelten die Relationen

$$X_{x_1} = X_2, \qquad (X \setminus Q)_{x_1} = X_2 \setminus Q_{x_1}, \qquad \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\right)_{x_1} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (Q_j)_{x_j}.$$

Weiterhin gilt für alle $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$,

$$(A_1 \times A_2)_{x_1} = \begin{cases} A_2, & x_1 \in A_1, \\ \emptyset, & x_1 \notin A_1. \end{cases}$$

Es folgt, dass das System $\mathcal{B}$ der Mengen $Q \subseteq X$ mit $Q_{x_1} \in \mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra ist, welches alle Mengen $A_1 \times A_2$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, enthält. Da die σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ von geeigneten Mengen der Form $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ erzeugt wird (vgl. die nachfolgende Proposition), gilt $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, also die Behauptung für x_1-Schnitte, und analog für x_2-Schnitte. $\square$

Lemma 2.34 *Seien μ_1 und μ_2 σ-endliche Maße auf X_1 bzw. X_2. Dann ist für jedes $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die Funktion*

$$s\colon x_1 \mapsto \mu_2(Q_{x_1}) \qquad \textit{bzw.} \qquad s'\colon x_2 \mapsto \mu_1(Q_{x_2})$$

auf X_1 bzw. X_2 definiert und $\mathcal{A}_1$- bzw. $\mathcal{A}_2$-messbar.

Beweis.

Schritt 1 Wir betrachten den Spezialfall $\mu_2(X_2) < \infty$.

Es sei

$$\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \mid s_D\colon x_1 \mapsto \mu_2(D_{x_1}) \text{ ist } \mathcal{A}_1\text{-messbar}\}.$$

Die Menge $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System, denn: $s_X = \mu_2(X_2)$, also ist $X \in \mathcal{D}$. Wegen $s_{X \setminus D} = s_X - s_D$ für alle $D \in \mathcal{D}$ ist auch $X \setminus D \in \mathcal{D}$. Aus $s_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j} = \sum_{j=1}^{\infty} s_{D_j}$ für alle Folgen (D_j) paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{D}$ folgt $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j \in \mathcal{D}$. Außerdem enthält $\mathcal{D}$ alle Mengen der Form $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, da

$$s_{A_1 \times A_2} = \mu_2(A_2) \mathbb{1}_{A_1}$$

messbar ist. Die Mengen $\mathcal{C}$ der Form $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ erzeugen $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Ferner ist $\mathcal{C}$ schnittstabil[1]. Es gilt daher $\delta_{\mathcal{C}} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$[2] und somit $\delta_{\mathcal{C}} \subseteq \delta_{\mathcal{D}} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, wie behauptet.

Schritt 2 Allgemeiner Fall.

Im Fall, dass μ_2 ein beliebiges σ-endliches Maß ist, existiert eine Folge (B_j) in $\mathcal{A}_2$ mit $B_j \uparrow X_2$ und $\mu_2(B_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Für jedes j ist dann $A_2 \mapsto \mu_2(A_2 \cap B_j)$ ein endliches Maß $\mu_{2,j}$ auf $\mathcal{A}_2$. Wie bereits gezeigt ist jede der Funktionen

$$x_1 \mapsto \mu_{2,j}(Q_{x_1}) \text{ mit } Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$$

[1] $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$

[2] Übung 2 Aufgabe 1: Ein schnittstabiles Dynkinsystem ist eine σ-Algebra und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C}) = \delta_{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

$\mathcal{A}_1$-messbar. Da das Maß μ_2 stetig von unten ist, gilt

$$\mu_2(Q_{x_1}) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \mu_{2,j}(Q_{x_1}).$$

Daher ist auch $x_1 \mapsto \mu_2(Q_{x_1})$ $\mathcal{A}_1$-messbar. Analog beweist man die Behauptung für s'. $\square$

Proposition 2.35 *Seien $\mathcal{A}_i$, $i = 1, \dots, n$, σ-Algebren in X_i mit Erzeugern $\mathcal{E}_i$, sodass zu jedem i eine Folge von Mengen $(E_{ij})_j$ in $\mathcal{E}_i$ existiert mit $E_{ij} \uparrow X_i$. Dann gilt:*

(i) Die σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \mathcal{A}_n$ wird von allen Mengen der Form $E_1 \times \cdots \times E_n$ mit $E_i \in \mathcal{E}_i$, $i = 1, \dots, n$, erzeugt.

(ii) Gilt zusätzlich noch, dass die Erzeuger $\mathcal{E}_i$ schnittstabil sind und die Mengen E_{ij} die Bedingung $\mu_i(E_{ij}) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$ erfüllen, so existiert höchtens ein Maß π auf $(X, \mathcal{A})$ mit $\pi(E_1 \times \cdots \times E_n) = \mu_1(E_1) \cdots \mu_n(E_n)$ für alle $E_i \in \mathcal{E}_i$.

Beweis. Es sei $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra in X. Wir zeigen zunächst, dass

$$p_i : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_i$$

für alle i genau dann $(\mathcal{B}, \mathcal{A}_i)$-messbar ist, wenn $E_1 \times \cdots \times E_n \in \mathcal{B}$ für alle $E_i \in \mathcal{E}_i$. Nach Lemma 1.8 (i) ist p_i genau dann messbar, wenn $p_i^{-1}(E_i) \in \mathcal{A}$ für alle $E_i \in \mathcal{E}_i$.
Sei obige Bedingung für alle $E_i \in \mathcal{E}_i$ erfüllt. Dann gilt

$$E_1 \times \cdots \times E_n = p_1^{-1}(E_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}.$$

Sei umgekehrt $E_1 \times \cdots \times E_n \in \mathcal{B}$ für alle $E_i \in \mathcal{E}_i$. Dann gilt insbesondere

$$F_j := E_{1,j} \times \cdots \times E_{i-1,j} \times E_i \times E_{i+1,j} \times \cdots \times E_{n,j} \in \mathcal{B}$$

für festes E_i und alle $j \in \mathbb{N}$. Es folgt $p_i^{-1}(E_i) \in \mathcal{B}$, denn

$$p_i^{-1}(E_i) = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times E_i \times X_{i+1} \times \cdots \times E_n \uparrow F_j.$$

Nach (i) erzeugt das System $\mathcal{E}$ der Mengen $E_1 \times \cdots \times E_n$, $E_i \in \mathcal{E}_i$, die σ-Algebra $\mathcal{A}$. Ferner ist $\mathcal{E}$ schnittstabil, da

$$(E_1 \times \cdots \times E_n) \cap (E_1' \times \cdots \times E_n') = (E_1 \cap E_1') \times \cdots \times (E_n \cap E_n') \in \mathcal{E}.$$

Mit $E_j := E_{1j} \times \cdots \times E_{nj}$ gilt $E_j \uparrow X$ sowie $\mu_i(E_{ij}) < \infty$. Die Eindeutigkeit eines Maßes π mit den behaupteten Eigenschaften folgt jetzt mit demselben Beweis wie für Satz 1.20 (vgl. Übung 2 Aufgabe 4). $\square$

Bemerkung. Die Voraussetzung, dass die Erzeugendensysteme $\mathcal{E}_i$ in Proposition 2.35 eine Folge $(E_{ij})_j$ mit $E_{ij} \uparrow X_i$ enthalten, kann im allgemeinen nicht weggelassen werden.

Satz 2.36 (Produktmaße) *Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(x_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume. Dann existiert genau ein Maß π auf $(X, \mathcal{A}) = (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ mit*

$$\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \qquad \text{für alle} \quad A_i \in \mathcal{A}_i. \tag{14}$$

Für jede Menge $Q \in \mathcal{A}$ gilt dabei, dass

$$\pi(Q) = \int \mu_2(Q_{x_1})\, \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int \mu_1(Q_{x_2})\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \tag{15}$$

Mit μ_1 und μ_2 ist auch das Maß π σ-endlich.

Beweis. Sei $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $s_Q \colon x_1 \mapsto \mu_2(Q_{x_1})$. Wir definieren

$$\pi \colon \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad \pi(Q) := \int s_Q \, \mathrm{d}\mu_1 \,.$$

Es gilt $s_\emptyset = 0$, also $\pi(\emptyset) = 0$. Ist (Q_j) eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$, so gilt

$$s_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j} = \sum_{j=1}^{\infty} s_{Q_j},$$

also nach dem Satz von der monotonen Konvergenz[1], dass

$$\pi\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi(Q_j).$$

Die Mengenfunktion π ist damit σ-additiv, also ein Maß. Wegen $s_{A_1\times A_2} = \mu_2(A_2)\mathbb{1}_{A_1}$ ist $\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$, d.h. es gilt (14). Die Eindeutigkeit von π folgt aus Proposition 2.35 (ii), angewandt auf $\mathcal{E}_1 = \mathcal{A}_1$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{A}_2$. Eigenschaft (15) folgt aus der Definition von π (linke Identität) bzw. der Eindeutigkeit von π (rechte Identität), da durch

$$\pi'(Q) := \int \mu_1(Q_{x_2}) \, \mathrm{d}\mu_2$$

ebenfalls ein Maß mit (14) definiert wird. Es folgt $\pi = \pi'$. Dies zeigt (15). Die σ-Endlichkeit von π folgt mit $A_{ij} \uparrow X_i$, $i = 1, 2$, und $\mu_i(A_{ij}) < \infty$ aus $A_{1j} \times A_{2j} \uparrow X_1 \times X_2 = X$ und $\pi(A_{1j} \times A_{2j}) = \mu_1(A_{1j})\mu_2(A_{2j}) < \infty$. □

Beispiel. Satz 2.36, angewandt auf das Lebesgue–Borel-Maß liefert $\lambda^{m+n} = \lambda^m \otimes \lambda^n$ $(n, m \in \mathbb{N})$.

Im folgenden verwenden wir die Notation

$$X_2 \to Y \colon \; x_2 \mapsto f_{x_1}(x_2) := f(x_1, x_2) \quad \text{etc.}$$

für Abbildungen $f \colon X_1 \times X_2 \to Y$.

Bemerkung. Sei $(Y, \mathcal{B})$ ein weiterer messbarer Raum und $f \colon X_1 \times X_2 \to Y$ $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B})$-messbar. Dann ist jede der Abbildungen $f_{x_1} \colon X_2 \to Y$, $f_{x_2} \colon X_1 \to Y$ $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B})$- bzw. $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B})$-messbar.

Satz 2.37 (Satz von Tonelli) *Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume und $f \colon X := X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$-messbar. Dann sind die Funktionen*

$$x_1 \mapsto \int f_{x_1} \, \mathrm{d}\mu_2 \quad \textit{bzw.} \quad x_2 \mapsto \int f_{x_2} \, \mathrm{d}\mu_1$$

$\mathcal{A}_1$- bzw. $\mathcal{A}_2$-messbar und es gilt

$$\int f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \Big(\int f_{x_1} \, \mathrm{d}\mu_2 \Big) \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int \Big(\int f_{x_2} \, \mathrm{d}\mu_1 \Big) \mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

[1] angewandt auf die Folge der Partialsummen (vgl. Korollar 2.12)

Beweis. Sei $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $\pi := \mu_1 \otimes \mu_2$. Zunächst sei $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{Q^j}$ $(\alpha_j \geq 0, Q^j \in \mathcal{A})$ eine Elementarfunktion. Dann ist $f_{x_2} = \sum_{j=1}^n \alpha_j (1_{Q^j})_{x_2}$ und $\int f_{x_2}\, \mathrm{d}\mu_1 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_1(Q^j_{x_2})$. Nach Lemma 2.34 ist $x_2 \mapsto \int f_{x_2}\, \mathrm{d}\mu_1$ $\mathcal{A}_2$-messbar und wegen Satz 2.36 gilt

$$\int \Big(\int f_{x_2}\, \mathrm{d}\mu_1 \Big)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \pi(Q^j) = \int f\, \mathrm{d}\pi\,. \tag{16}$$

Sei jetzt f eine beliebige Funktion wie in der Voraussetzung und $(u_j)_j$ eine Folge von Elementarfunktionen mit $u_j \uparrow f$. Für $x_2 \in X_2$ ist dann auch $(u_{j,x_2})_j$ eine Folge von $\mathcal{A}_1$-Elementarfunktionen mit $u_{j,x_2} \uparrow f_{x_2}$. Damit ist die Folge der $\mathcal{A}_2$-messbaren Funktionen $x_2 \mapsto \varphi_j(x_2) := \int u_{j,x_2}\, \mathrm{d}\mu_1$ monoton steigend mit Supremum

$$x_2 \mapsto \int f_{x_2}\, \mathrm{d}\mu_1\,.$$

Diese Funktion ist $\mathcal{A}_2$-messbar und es gilt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \int \varphi_j\, \mathrm{d}\mu_2 \quad = \int \sup\nolimits_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j\, \mathrm{d}\mu_2 = \int \big(\int f_{x_2}\, \mathrm{d}\mu_1 \big)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

Wie bereits durch (16) gezeigt, gilt $\int \varphi_j\, \mathrm{d}\mu_2 = \int u_j\, \mathrm{d}\pi$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\int \Big(\int f_{x_2}\, \mathrm{d}\mu_1 \Big)\, \mathrm{d}\mu_2 = \sup_{j\in\mathbb{N}} \int \varphi_j\, \mathrm{d}\mu_2 = \sup_{j\in\mathbb{N}} \int u_j\, \mathrm{d}\pi = \int f\, \mathrm{d}\pi,$$

wie behauptet. Der zweite Teil der Behauptung folgt nach Vertauschen der Rollen von x_1 und x_2. □

Korollar 2.38 (Satz von Fubini) *Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume. Sei $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-integrierbar. Für μ_1-fast alle x_1 ist f_{x_1} μ_2-integrierbar, für μ_2-fast alle x_2 ist f_{x_2} μ_1-integrierbar und die μ_1- bzw. μ_2-fast überall definierte Funktion*

$$x_1 \mapsto \int f_{x_1}\, \mathrm{d}\mu_2 \quad \textit{bzw.} \quad x_2 \mapsto \int f_{x_2}\, \mathrm{d}\mu_1$$

ist μ_1- bzw. μ_2-integrierbar mit

$$\int f\, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \Big(\int f_{x_2}\, \mathrm{d}\mu_1 \Big)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) = \int \Big(\int f_{x_1}\, \mathrm{d}\mu_2 \Big)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1).$$

Beweis. Sei $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $\pi := \mu_1 \otimes \mu_2$. Nach dem Satz von Tonelli gilt für die π-integrierbare Funktion $|f| \geq 0$, dass

$$\int \big(|f_{x_1}|\, \mathrm{d}\mu_2 \big)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int \big(\int |f_{x_2}|\, \mathrm{d}\mu_1 \big)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) = \int |f|\, \mathrm{d}\pi < \infty.$$

Damit ist die μ_1-integrierbare Funktion $x_1 \mapsto \int |f_{x_1}|\, \mathrm{d}\mu_2$ μ_1-fast überall endlich und die Funktion

$$x_1 \mapsto \int f_{x_1}\, \mathrm{d}\mu_2 = \int f^+_{x_1}\, \mathrm{d}\mu_2 - \int f^-_{x_1}\, \mathrm{d}\mu_2$$

μ_1-fast überall definiert und $\mathcal{A}_1$-messbar (letzteres wegen $f^{\pm} \geq 0$ und des Satzes von Tonelli). Angewandt auf $f^{\pm} \geq 0$ liefert der Satz von Tonelli nun die μ_1-Integrierbarkeit dieser Funktion und

$$\begin{aligned}\int\Big(\int f_{x_2}\,\mathrm{d}\mu_2\Big)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) &= \int\Big(\int f^+_{x_2}\,\mathrm{d}\mu_2\Big)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) - \int\Big(\int f^-_{x_2}\,\mathrm{d}\mu_2\Big)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\\ &= \int f^+\,\mathrm{d}\pi - \int f_-\,\mathrm{d}\pi\\ &= \int f\,\mathrm{d}\pi\,.\end{aligned}$$

Aus Vertauschung der Rollen von x_1 und x_2 folgt der zweite Teil der Behauptung. $\square$

Beispiel. Sei $\lambda^2 = \lambda^1 \otimes \lambda^1$ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathbb{R}^2$ und $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}^2$. Dann erfüllt die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_A$ die Voraussetzung des Satzes von Tonelli und es gilt

$$0 = \int 1_A\,\mathrm{d}\lambda^2 = \int\Big(\underbrace{\int \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{d}\lambda^1}_{=0\ \forall x_2\in\mathbb{R}}\Big)\,\mathrm{d}\lambda^1(x_2) = \int \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x_1)\Big(\underbrace{\int \mathbf{1}_{\mathbb{R}}\,\mathrm{d}\lambda^1}_{=\infty\ \forall x_1\in\mathbb{Q}}\Big)\,\mathrm{d}\lambda^1(x_1).$$

Man sieht, dass $(\mathbf{1}_A)_{x_1}$ nur für λ^1-fast alle x_1 integrierbar ist.

Bemerkung. Die Aussagen der Sätze 2.36 (Produktmaße), 2.37 (Satz von Tonelli), sowie das Korollar 2.38 (Satz von Fubini) bleiben uneingeschränkt gültig für endliche Produkte von σ-endlichen Maßräumen $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, \dots, n$, d.h. auf

$$(X, \mathcal{A}) := (X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n)$$

existiert ein eindeutig bestimmtes Produktmaß $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ mit allen Eigenschaften wie im Fall $n = 2$.

Beispiel. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, \lambda^2)$ und $D_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$ für $r > 0$. Für das Integral $\mu(D_r) = \int \mathbf{1}_{D_r}\,\mathrm{d}\lambda^2$ gilt nach dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned}\int \mathbf{1}_{D_r}\,\mathrm{d}\lambda^2 &= \int\Big(\int (\mathbf{1}_{D_r})_{x_1}\,\mathrm{d}\lambda^1(x_2)\Big)\,\mathrm{d}\lambda^1(x_1)\\ &= \int_{-r}^{r}\Big(\int_{-\sqrt{r^2-x_1^2}}^{\sqrt{r^2-x_1^2}} 1\,dx_2\Big)\,dx_1\\ &= \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x_1^2}\,dx_1.\end{aligned}$$

Mittels der Substitution $x_1 = r\sin u$ folgt

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x_1^2}\,dx_1 &\overset{(*)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^2\cos^2(u)\,du\\ &= 2r^2\Big[\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \pi r^2.\end{aligned}$$

Den Schritt $(*)$ müssen wir an dieser Stelle noch ohne Begründung hinnehmen.

2.9 Transformationssatz

Erinnerung: Sind $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $f : X \to X'$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, so wird durch

$$(f_*\mu)(A') \coloneqq \mu(f^{-1}(A')) \quad A' \in \mathcal{A}'$$

ein Maß erklärt, das *Bildmaß* von μ unter f.

Beispiel. Seien $(X, \mathcal{A}) = (X', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ und

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \longmapsto Tx + b \qquad T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt für das Lebesgue-Borel-Maß λ^n:

$$f_*\lambda^n = (\det T)^{-1}\lambda^n.$$

Sei jetzt allgemeiner $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Frage:

$$\text{Wenn } \varphi\ (\mathcal{B}^n_U, \mathcal{B}^n_V)\text{-messbar ist} \Leftrightarrow \varphi_*\lambda^n = \ ?$$

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir zunächst Maße mit Dichten.

Lemma 2.39 *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für jede Funktion $f \in E^*(X, \mathcal{A})$ wird durch*

$$\nu(A) \coloneqq \int_A f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int f \cdot 1_A \,\mathrm{d}\mu \qquad A \in \mathcal{A}$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ erklärt.

Beweis. Es gilt $\nu(\emptyset) = 0$ und $\nu \geq 0$. Für jede Folge $(A_j)_j$ in $\mathcal{A}$, A_j paarweise disjunkter Mengen mit $A \coloneqq \bigcup_{j\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\begin{aligned}\nu(A) = \int f 1_A \,\mathrm{d}\mu &= \int f\big(\sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_j}\big) \,\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\big(\int 1_A f \,\mathrm{d}\mu\big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus Korollar 2.12 folgt. Damit ist ν ein Maß auf $\mathcal{A}$. □

Definition 2.40 Sei $f \in E^*(X, \mathcal{A})$. Dann heißt das Maß ν wie in Lemma 2.39 das *Maß mit der Dichte f bezüglich μ*. Wir verwenden hierfür die Notation $\nu = f\mu$.

Beispiel.
(1) Das Maß μ hat die Dichte $f = 1_X$ bezüglich μ.
(2) Es existiert kein $f \in E^*(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ mit $f\lambda^1 = \delta_x$ (Dirac-Maß in $x \in \mathbb{R}$), Übung.

Für den Rest des Kapitels seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (also insbesondere Elemente von $\mathcal{B}^n$) und $\varphi\colon U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Dies bedeutet, φ ist bijektiv und stetig differenzierbar mit

$$(D\varphi)(x) = (\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x))_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

In diesem Fall ist auch $\varphi^{-1}\colon V \to U$ stetig differenzierbar mit $D\varphi^{-1} = (D\varphi)^{-1}$.

Satz 2.41 (Transformationssatz für $\mathcal{B}^n$) *Sei $\varphi\colon U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Dann gilt:*

(i) φ ist $(\mathcal{B}^n_U, B^n_V)$-messbar und es gilt

$$\varphi_* \lambda^n|_{\mathcal{B}^n_U} \quad = |\det D\varphi(x)|^{-1} \ \lambda^n|_{B^n_V} \tag{17}$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\lambda^n(\varphi(A)) \quad = \textstyle\int_A |\det D\varphi| \ \mathrm{d}\lambda^n \qquad \forall A \in \mathcal{B}^n_U \tag{18}$$

(ii) Für $f \in E^*(V, \mathcal{B}^n_V)$ gilt

$$\int_V f \ \mathrm{d}\lambda^n = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| \ \mathrm{d}\lambda^n \in [0, \infty].$$

(iii) Eine Funktion $f\colon V \to \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann λ^n-integrierbar über V, wenn die Funktion $f \circ \varphi\colon U \to \bar{\mathbb{R}}$ über U integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_V f \ \mathrm{d}\lambda^n = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| \ \mathrm{d}\lambda^n \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Wir betrachten das System der Mengen

$$\mathcal{H} := \{[a, b) \subseteq \mathbb{R}^n \mid a \leq b, \ a, b \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i}\mathbb{Z}^n, \ [a, b) \subseteq U\}$$

und den von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$, d.h. das System der endlichen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{H}$. Es gilt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}^n_U$, denn jede offene Menge $U' \subseteq U$ ist die abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{H}$.

Schritt 1 Vorbemerkung.

Da φ und φ^{-1} stetig sind, ist φ $(\mathcal{B}^n_U, \mathcal{B}^n_V)$- und φ^{-1} $(\mathcal{B}^n_V, \mathcal{B}^n_U)$-messbar.

Schritt 2 Für alle $I \in \mathcal{H}$ gilt

$$\lambda^n(\varphi(I)) \leq \int_I |\det D\varphi| \ \mathrm{d}\lambda^n \,.$$

.

Sei $I \subseteq \mathcal{H}$ und $\varepsilon > 0$. Nach Schritt 1 ist $\varphi(I) \in \mathcal{B}^n_V$. Wir zerlegen disjunkt

$$I = \bigsqcup_{\nu=1}^{k} I_\nu \tag{19}$$

in Würfel I_ν der Kantenlänge $d > 0$. Durch fortgesetzte Unterteilung durch Würfel der halben Kantenlänge kann d beliebig klein gewählt werden. Wir wählen $d > 0$ wie folgt: Für $\bar{I} \subseteq U$, kompakt und U offen gibt es ein $r' > 0$, sodass $K_{r'}(a) \subseteq U \ \forall a \in \bar{I}$, wobei

$$K_r(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\} = B_r(a), \quad r > 0.$$

Nach Voraussetzung ist $D\varphi : U \to \mathbb{R}^n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ stetig, d.h. auf $K \subseteq U$ kompakt ist $D\varphi$ gleichmäßig stetig. Hierbei wähle $K \coloneqq \bigcup_{a \in \bar{I}} K_{r'}(a) \subseteq U$ (r' wie zuvor). Damit gibt es ein $0 < r < r'$, sodass

$$\sup_{x \in K_r(a)} \|D\varphi(x) - D\varphi(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}} \quad \forall a \in \bar{I},$$

wobei

$$M \coloneqq \sup_{y \in \bar{I}} \|(D\varphi)^{-1}(y)\| \in (0, \infty).$$

Nach Wahl von $r > 0$ wie oben wähle die Zerlegung (19) so fein, dass $d < \frac{r}{\sqrt{n}}$. Dann ist für jedes $b \in \bar{I}_\nu$:

$$\bar{I}_\nu \subseteq K_r(b) \subseteq U \qquad \nu = 1, \ldots, k.$$

Für $\nu = 1, \ldots, k$ wähle nun $a_\nu \in \bar{I}_\nu$ mit

$$|\det D\varphi(a_\nu)| = \min_{y \in \bar{I}_\nu} |\det D\varphi(y)|$$

und setze $M_\nu \coloneqq (D\varphi)(a_\nu) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sowie $b_\nu \coloneqq \varphi(a_\nu) \in V$.

Grundidee: Approximiere $\varphi|_{I_\nu}$ durch die affin-lineare Abbildung $\varphi_\nu : x \mapsto M_\nu(x - a_\nu) + b_\nu$.

Sei $a \in \bar{I}$, $h : K_r(a) \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Der Mittelwertsatz zeigt, dass

$$\|h(x) - h(y)\| \leq \|x - y\| \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|Dh(x + \lambda(y - x))\| \quad \forall x, y \in K_r(a)$$

gilt. Wir wenden dies an auf $h(x) \coloneqq \varphi(x) - M_\nu x$ und x beliebig und $y = a_\nu$. Dann folgt für alle $x \in K_r(a_\nu) \supseteq \bar{I}_\nu$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x) - \varphi_\nu(x)\| &= \|\varphi(x) - (M_\nu(x - a_\nu) + b_\nu)\| \\
&= \|h(x) - h(a_\nu)\| \\
&\leq \|x - a_\nu\| \cdot \sup_{y \in K_r(a)} \|D\varphi(y) - M_\nu\| \\
&\leq \|x - a_\nu\| \cdot \frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Für $x \in \bar{I}_\nu$ gilt aber $\|x - a_\nu\| \leq d\sqrt{n}$, d.h.

$$\|\varphi(x) - \varphi_\nu(x)\| \leq \frac{\varepsilon d}{M} \quad \forall x \in \bar{I}_\nu.$$

Dies zeigt, dass $\varphi(\bar{I}_\nu) \subseteq \varphi_\nu(\bar{I}_\nu) + K_{\varepsilon \mathbf{d} M}(0)$. Es ist

$$K_{\varepsilon \mathbf{d} M}(0) = M_\nu(M_\nu^{-1} K_{\varepsilon \mathbf{d} M}(0)) \leq M_\nu K_{\varepsilon d}(0),$$

also

$$\varphi(\bar{I}_\nu) \leq b_\nu + M_\nu(\underbrace{\bar{I}_\nu + K_{\varepsilon d}(0) - a_\nu}_{\substack{\leq \text{Würfel mit Kanten-} \\ \text{länge } d(1+2\varepsilon)}}).$$

Da für affin-lineare Abbildungen $A\colon x \mapsto Tx + b$ gilt: $A_*\lambda^n = |\det T|^{-1}\lambda^n$, folgt

$$\begin{aligned} \lambda^n(\varphi(I_\nu) &\leq d^n(1+2\varepsilon)^n|\det M_\nu| \\ &= (1+2\varepsilon)^n|\det M_\nu|\lambda^n(I_\nu) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \lambda^n(\varphi(I)) &\leq (1+2\varepsilon)^n \cdot \sum_{\nu=1}^{k} \underbrace{|\det M_\nu|}_{\substack{\leq|\det D_\nu| \\ \text{auf } I_\nu}} \lambda^n(I_\nu) \\ &\leq (1+2\varepsilon)^n \int_I |\det D\varphi| \; \mathrm{d}\lambda^n \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

Schritt 3 Es gilt

$$\lambda^n(\varphi(A)) \leq \int_A |\det D\varphi| \, \mathrm{d}\lambda^n \quad \forall A \in \mathcal{B}_U^n.$$

Nach Schritt 2 gilt diese Ungleichung für Mengen $A \in \mathcal{H}$. Damit folgt die Behauptung für alle $A \in \mathcal{B}_U^n$, denn $\mathcal{B}_U^n$ wird von $\mathcal{H}$ erzeugt.

Schritt 4 Es gilt

$$\int_V f \; \mathrm{d}\lambda^n \leq \int_U (f \circ \varphi)|\det D\varphi| \; \mathrm{d}\lambda^n \quad \forall f \in E^*(V, \mathcal{B}_V^n). \tag{20}$$

Nach Schritt 4 folgt dies (wegen Homogenität und Additivität) für alle Treppenfunktionen. Zu $f \in E^*(V, B_V^n)$ wähle eine monoton steigende Folge $(u_j)_j$ in $E(V, \mathcal{B}_V^n)$ mit $u_j \to (j \to \infty) f$. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt damit, dass

$$\begin{aligned} \int_V f \; \mathrm{d}\lambda^n &= \lim_{j\to\infty} \int_V u_j \; \mathrm{d}\lambda^n \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \int_V u_j \circ \varphi|\det D\varphi| \; \mathrm{d}\lambda^n \\ &= \int_V f \circ \varphi|\det D\varphi| \; \mathrm{d}\lambda^n \end{aligned}$$

wie behauptet.

Schritt 5 Es gilt Gleichheit in (20).

Wende Schritt 4 an auf $\varphi^{-1}\colon V \to X$ und $(f \circ \varphi)|\det D\varphi| \in E^*(U, \mathcal{B}_U^n)$. Es folgt, dass

$$\int_V (f \circ \varphi)|\det D\varphi| \; \mathrm{d}\lambda^n \leq \int_V \underbrace{(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1})}_{=f} \underbrace{|\det D\varphi| \cdot |\det D\varphi|^{-1}}_{=1} \, \mathrm{d}\lambda^n = \int_U f \; \mathrm{d}\lambda^n \, .$$

Damit sind die Ausagen (i), (ii) gezeigt. Die Behauptung (iii) für Funktionen $f\colon V \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ folgt aus (ii), wenn wir f in $f = f^+ - f^-$ zerlegen. Dann gilt: f ist λ^n integrierbar $\iff$ $f^\pm \in E^*(V, \mathcal{B}_V^n)$ mit $\int_V f^\pm \; \mathrm{d}\lambda^n < \infty \iff$ (wegen (ii) und der Messbarkeit von φ) $f^\pm \circ \varphi \in E^*(U, \mathcal{B}_U^n)$ mit $\int_U (f^\pm \circ \varphi)|\det D\varphi| \; \mathrm{d}\lambda^n < \infty \iff f \circ \varphi$ ist $|\det D\varphi|\lambda^n$-integrierbar über U. Damit sind alle Aussagen des Satzes gezeigt. $\square$

Beispiel.

(1) Betrachte ebene Polarkoordinaten (r, θ). Die Transformation zu euklidischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \varphi : (0,\infty) \times (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid <\geq 0\} \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

ist ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus mit

$$D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

und $\det D\varphi = r$. Da $\{(x,0) \mid x \geq 0\}$ eine λ^2 Nullmenge ist, gilt: $f \colon \mathbb{R}^2 \to \bar{\mathbb{R}}$ ist λ^2-integrierbar genau dann, wenn $f \circ \varphi$ $(|\det D\varphi|\lambda^2)$-integrierbar über $(0,\infty) \times (0, 2\pi)$. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, \mathrm{d}\lambda^2 = \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \, \mathrm{d}\lambda^2 \,.$$

(2) Betrachte $U \coloneqq (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$, $V \coloneqq \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\varphi \colon U \to V$, $(r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. Es gilt

$$D\varphi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $\det D\varphi(r,\theta,z) = r$. Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, \mathrm{d}\lambda^3 = \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \cdot r \, \mathrm{d}\lambda^3 \,.$$

Anwendung zu Beispiel (a): Man kann nun leicht das Integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}\lambda$ mit Hilfe der Transformationsformel und des Satzes von Fubini ausrechnen:

$$\begin{aligned} I^2 &= (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}\lambda)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}\lambda^2 && = \int e^{-y^2} (\int e^{-x^2} \, \mathrm{d}\lambda) \, \mathrm{d}\lambda^1 \\ &= \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} e^{-r^2} r \, \mathrm{d}\lambda^2 && = (\int e^{-x^2} \, \mathrm{d}\lambda^1)(\int e^{-y^2} \, \mathrm{d}\lambda^1) \\ &= 2\pi \int_{(0,\infty)} r e^{-x^2} \, \mathrm{d}\lambda^1 \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Es folgt $I = \sqrt{\pi}$.

3 Differentialformen und der Satz von Stokes

3.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Im folgenden bedeutet „differenzierbar" immer „unendlich-oft differenzierbar". *Erinnerung:* Untermannigfaltigkein im $\mathbb{R}^n$:

Definition 3.1 Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls für alle $p \in M$ eine offene Umgebung U von p in $\mathbb{R}^n$ existiert mit: nach eventueller Permutation der Koordinaten ist $U = U' \times U''$ für $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ offen $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ offen und $U \cap M = \operatorname{graph}(f)$ für eine differenzierbare Abbildung $f\colon U' \longrightarrow U''$.

Beispiel. $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ (n-dimensionale Einheitsphäre) ist Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Wir definieren $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x = (x', x'') \mapsto (x', x'' - f(x'))$. Durch φ wird ein Diffeomorphismus $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U)$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \varphi(\mathbb{R}^n \times \{0\})$$

induziert. Eine solche Abbildung φ heißt *Untermannigfaltigkeitskarte* um p. Die Einschränkung

$$\psi \coloneqq \varphi|_{U \cap M}\colon U \cap M \longrightarrow \varphi(U \cap M) \overset{\text{(off.)}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$$

ist ein Homöomorphismus und heißt *Karte um p*.

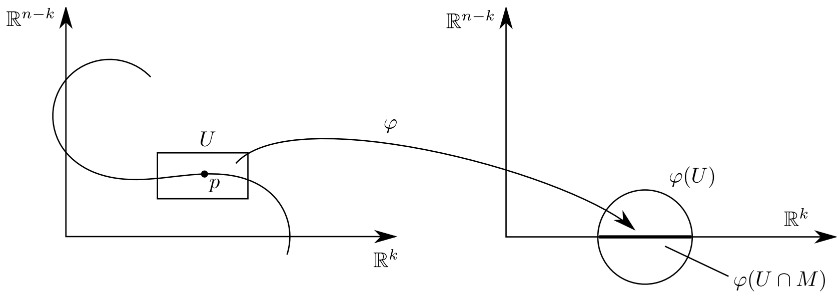


Abbildung 1: Karte und Kartengebiet

Definition 3.2 Sei X ein topologischer Raum. Ein Homöomorphismus $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U)$ zwischen offenen Teilmengen $U \subseteq X$ und $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (n-dimensionale) *Karte.* Die Menge U heißt *Kartengebiet.*

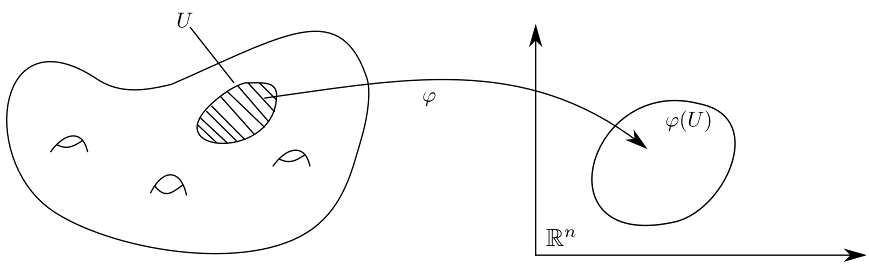


Abbildung 2: Karte

Sind $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\psi\colon V \longrightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ n-dimensionale Karten von X (im folgenden gelte stets $U \cap V \neq \emptyset$), so heißt der Homöomorphismus

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(X \cap V)} \colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

der *Kartenwechsel* von φ nach ψ.

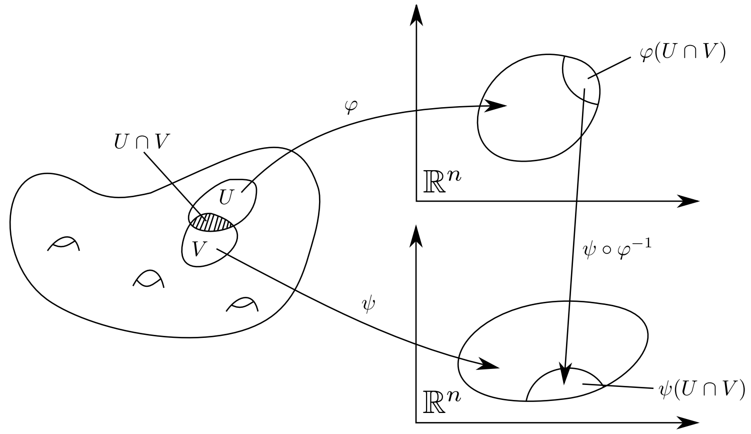


Abbildung 3: Kartenwechsel

Eine Menge $\mathcal{A}$ n-dimensionaler Karten heißt (n-dimensionaler) *Atlas*, falls die Kartengebiete X überdecken. Der Atlas $\mathcal{A}$ heißt differenzierbar, falls aus $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ folgt:

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)} \colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

ist ein Diffeomorphismus. Zwei differenzierbare Atlanten $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ heißen *äquivalent*, falls $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ wieder ein differenzierbarer Atlas ist. Eine Äquivalenzklasse $\mathcal{D}$ differenzierbarer Atlanten heißt (n-dimensionale) *differenzierbare Struktur* auf X. Für eine differenzierbare Struktur $\mathcal{D}$ setzen wir $\mathcal{A}_{\max} := \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathcal{D}} \mathcal{A}$ und nennen $\mathcal{A}_{\max}$ den *maximalen Atlas* bezüglich $\mathcal{D}$.

Bemerkung. Es ist $\mathcal{A}_{\max} \in \mathcal{D}$ und $\mathcal{A}_{\max}$ enthält alle Karten, die mit einem gegebenen Atlas $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{D}$ (und damit mit allen Atlanten $\mathcal{A} \in \mathcal{D}$) differenzierbare Kartenwechsel haben. Durch Übergang zu $\mathcal{A}_{\max}$ können wir zum Beispiel sicherstellen, dass Einschränkungen von Karten auf kleinere Definitionsgebiete wieder im Atlas liegen.

Erinnerung: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt hausdorffsch, falls für alle $p, q \in X$, $p \neq q$ offene Umgebungen U von p und V von q mit $U \cap V = \emptyset$ existieren. Der Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das zweite *Abzählbarkeitsaxiom*, falls er eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Das heißt es gibt ein abzählbares Teilmengensystem in $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, sodass jede offene Menge (abzählbare) Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Im folgenden werden wir nur topologische Räume betrachten, die diese beiden Eigenschaften erfüllen (Grund hierfür: Vermeide „Pathologien“ – d.h. nicht-metrisierbare Mannigfaltigkeiten oder solche, die sind nicht in $\mathbb{R}^n$ einbetten lassen...).

Definition 3.3 Eine *(n-dimensionale) differenzierbare Mannigfaltigkeit* ist ein Paar $(M, \mathcal{D})$, wobei M ein Hausdorffraum ist, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, zusammen mit einer differenzierbaren Struktur $\mathcal{D}$.

Beispiel. Betrachte die Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Wir sehen S^n als topologischen Raum mit der von $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T}_{\text{std}})$ induzierten Topologie. Ein differenzierbarer Atlas $\mathcal{A}$ ist z.B. gegeben durch die Karten $\varphi_i^\pm \colon U_i^\pm \to V_i^\pm, \quad i = 1,2,3$

$$
\begin{aligned}
U_1^\pm &:= \{(x_1,x_2,x_3) \in S^2 | x_1 \gtrless 0\} & \qquad \varphi_1^\pm &\colon (x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_2,x_3)\\
U_2^\pm &:= \{(x_1,x_2,x_3) \in S^2 | x_2 \gtrless 0\} & \qquad \varphi_2^\pm &\colon (x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_1,x_3)\\
U_3^\pm &:= \{(x_1,x_2,x_3) \in S^3 | x_1 \gtrless 0\} & \qquad \varphi_3^\pm &\colon (x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_1,x_2)
\end{aligned}
$$

Für einen Atlas müssen wir uns noch überzeugen, dass die Differenzierbarkeit aller Kartenwechselabbildungen gegeben ist. Für den Fall, dass $U_i^\pm \cap U_j^\pm \neq \emptyset$ gilt[1], betrachten wir

$$\varphi_j^\pm \circ (\varphi_i^\pm)^{-1} \colon \varphi_i^\pm(U_i^\pm \cap U_j^\pm) \to \varphi_j^\pm(U_i^\pm \cap U_j^\pm) \qquad i,j = 1,2,3.$$

Zum Beispiel für

$$
\begin{aligned}
\varphi_3^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1} \colon \varphi_1^+(U_1^+ \cap U_3^+) &\to \varphi_3^+(U_1^+ \cap U_3^+)\\
(y_1,y_2) &\mapsto (\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}\,, y_1 \,\mathrm{rk}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\varphi_1^+(U_1^+ \cap U_3^+) &= \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 < 1,\ y_2 > 0\}\\
\varphi_3^+(U_1^+ \cap U_3^+) &= \{(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1^2 + z_2^2 < 1,\ z_1 > 0\}
\end{aligned}
$$

Dieser Kartenwechsel ist (unendlich oft) differenzierbar. Analog zeigt man die Differenzierbarkeit aller anderen Kartenwechsel. Somit ist $\mathcal{A} = \{\varphi_i^\pm\,,\ i = 1,2,3\}$ ein differenzierbarer Atlas auf S^2. Den zugehörigen maximalen Atlas erhalten wir unter Hinzunahme aller weiteren Karten, sodass Kartenwechsel mit Karten aus $\mathcal{A}$ differenzierbar sind.

Eine differenzierbare Struktur erlaubt es, Konzepte der Analysis in $\mathbb{R}^n$ auf Mannigfaltigkeiten zu übertragen.

Definition 3.4 Eine Funktion $f \colon M \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar in* $p \in M$, wenn eine Karte φ um p existiert, sodass die Funktion $f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Karte um p ab, denn: Ist $\psi : V \to \psi(V)$ eine weitere solche Karte, so ist

$$\psi \circ \varphi^{-1}\big|_{\varphi(U \cap V)} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

ein Diffeomorphismus und somit ist $f \circ \psi^{-1}$ differenzierbar in $\psi(p)$ genau dann, wenn $f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar in $\varphi(p)$ ist (da $f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap V)} = f \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)})$ nach der Kettenregel).
Eine ähnliche Definition können wir für Abbildungen $f \colon M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten treffen:

[1] In dieser Konstruktion gibt es offensichtlich Hemisphären die sich nicht schneiden, zum Beispiel

$$U_1^+ \cap U_1^- = \emptyset$$

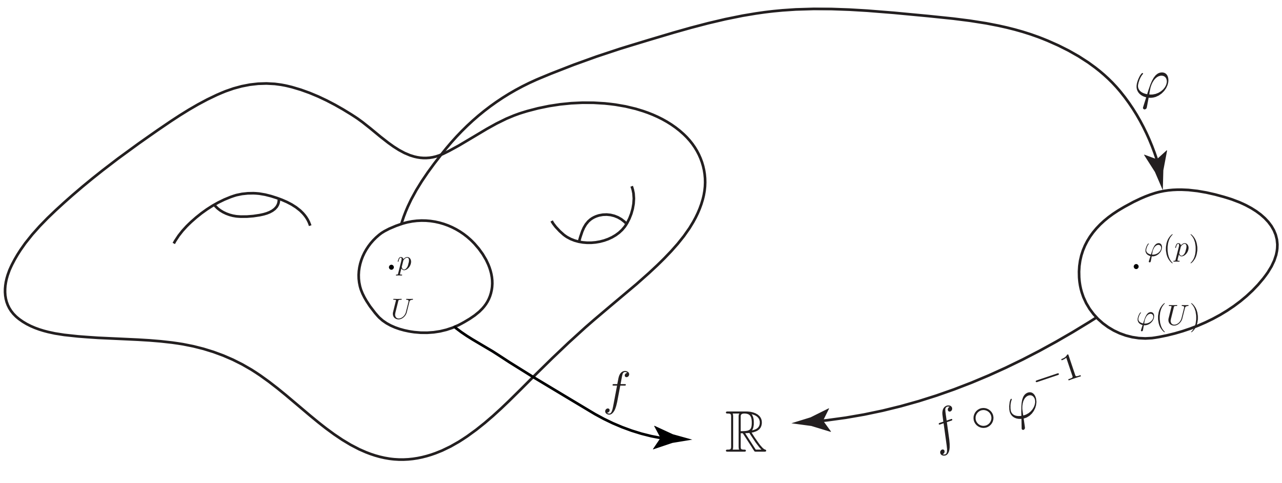


Abbildung 4: Kartenwechsel

Definition 3.5 Eine stetige Abbildung $f\colon M \to N$ heißt *differenzierbar in* $p \in M$, falls Karten φ um p und ψ um $f(p)$ existieren mit $f(U) \subseteq V$ und die Komposition

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \psi(V)$$

differenzierbar in $\varphi(p)$ ist.

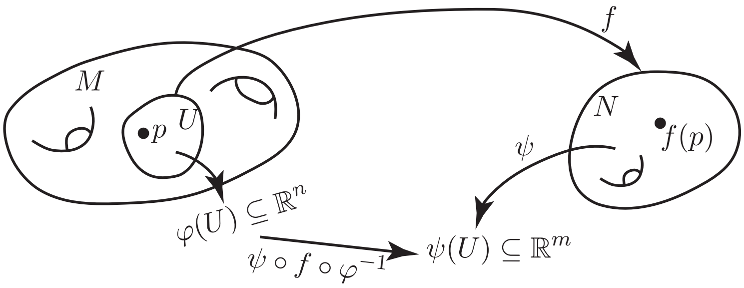


Abbildung 5: Kartenwechsel

Bemerkung.

(i) Wir oben zeigt man die Unabhängigkeit dieser Definition von der Wahl der Karten φ und ψ.

(ii) Eine differenzierbare Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ entspricht in Definition 3.5 dem Spezialfall $N = \mathbb{R}$.

Definition 3.6 Zwei differenzierbare Kurven $\gamma_1\colon (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to M$, $\gamma_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to M$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ heißen *tangential äquivalent in* p, falls für eine (und dann alle) Karten φ um p gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\varphi \circ \gamma_1)(t)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\varphi \circ \gamma_2)(t)\bigg|_{t=0} \in \mathbb{R}^n.$$

Tangentiale Äquivalenz $\sim_{\text{tang}}$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der differenzierbaren Kurven $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ durch p.

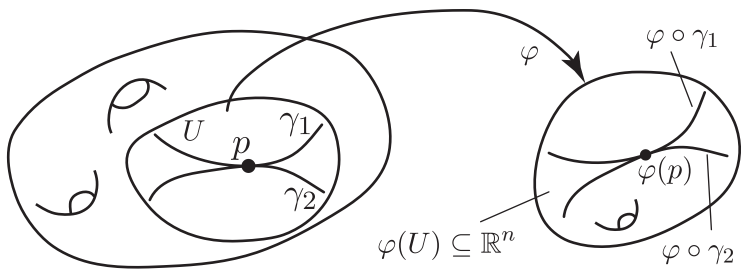


Abbildung 6: Kartenwechsel

Definition 3.7 Wir setzen

$$T_p^{\mathrm{geom}}M := \{\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ differenzierbar} \mid \gamma(0) = p\}|_{\sim_{\mathrm{tang}}}$$

$T_p^{\mathrm{geom}}M$ heißt der Tantentialraum an M in p.

Ziel: Wir möchten $T_p^{\mathrm{geom}}M$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum machen. Das ist mit Definition 3.7 nicht direkt möglich.

Definition 3.8 Zwei Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$, $g\colon V \to \mathbb{R}$, $U, V \subseteq M$ offen, $p \in U \cap V$ heißen *äquivalent in* p, falls eine offene Umgebung W von p existiert, $W \subseteq U \cap V$, mit $f|_W = g|_W$. Die Äquivalenzklassen heißen *Keime differenzierbarer Funktionen in* p. Die Menge der Keime in p wird mit $\mathcal{E}_p(M)$ bezeichnet.

Bemerkung. In der Notation unterscheiden wir nicht zwischen f und $[f] \in \mathcal{E}_p(M)$. Mit der Definition $[f] + [g] = [f + g]$ und $[f] \cdot [g] = [fg]$ (man muss sich natürlich von der Wohldefiniertheit überzeugen) wird die Menge $\mathcal{E}_p(M)$ eine $\mathbb{R}$-Algebra in offensichtlicher Weise.

Definition 3.9 Ein Tangentialvektor (in p) ist eine Derivation auf der $\mathbb{R}$-Algebra $\mathcal{E}_p(M)$, d.h. eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$v\colon \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$$

mit $v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p)v(g)$ $\forall f, g \in \mathcal{E}_p(M)$. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum dieser Derivationen bezeichnen wir mit T_pM und heißt Tangentialraum an M in p.

Wir kennen bereits solche Derivationen, denn jede partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$, $i = 1, \ldots, n$ definiert eine Derivation, da

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (fg) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot g(p) + f(p)\frac{\partial g}{\partial x_i}(p).$$

Etwas allgemeiner: Alle Richtungsableitungen $\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ sind Derivationen. Wir werden sehen, dass dies bereits alle Derivationen sind, da der Raum der Derivationen von den Richtungsableitungen aufgespannt wird. Schaut man sich dazu eine Reihenentwicklung von f an, so stellt man das eben gesagte fest (heuristisch):

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \tilde{f}_i(0) + O(|x|^2).$$

Sei $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(0) = p = 0$. Die tangentiale Äquivalenzklasse $[\gamma]$ definiert eine Derivation $v_{[\gamma]}$ durch

$$v_{[\gamma]} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} \gamma \,\mathrm{rk}_i \, \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p .$$

Äquivalenz der Definitionen 3.7 und 3.9

Wir konstruieren eine Abbildung $T_p^{\mathrm{geom}}M \to T_pM$. Repräsentiert $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ ein Element in T_p^{geom}, so wird durch

$$v\colon \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R},\ f \longmapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} (f\circ\gamma)(t)$$

ein Tantentialvektor definiert. Die Eigenschaft einer Derivation folgt hier aus der Produktregel. Der Tangentialvektor hängt nur von der tangentialen Äquivalenzklasse von p ab. Denn: Sei $\gamma_1 \sim_{\mathrm{tang}} \gamma_2$. Dann gilt (nach Wahl einer Karte $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ um p):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} (f\circ\gamma_1)(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} (f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\gamma_1)(t) \\
&= D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) \,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} (\varphi\circ\gamma_1)(t) \\
&= D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) \,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} (\varphi\circ\gamma_2)(t) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} (f\circ\gamma_2)(t)
\end{aligned}$$

Nun konstruieren wir eine Abbildung $T_pM \to T_p^{\mathrm{geom}}$. Sei $v \in T_pM$ ein Tangentialvektor. Wir wählen eine Karte $\varphi = (x_1,\dots,x_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ um p. OBdA ist $\varphi(p) = 0$.
Ziel: Entwickle den Vektor v nach der Basis

$$\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (f) := \frac{\partial}{\partial x_i}(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) \quad \forall f \in \mathcal{E}_p(M).$$

Diese sind linear unabhängig, denn mit $x_j\colon U \to \mathbb{R}$ folgt dies aus

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (x_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) = \delta_{ij}.$$

Die lineare Unabhängigkeit folgt dann, weil in einer Nullsumme jeweils der j-te Koeffizient Null ist und insgesamt dann, dass die Nullsumme bereits Nullkoeffizienten hatte.

Lemma 3.10 *Die Menge $\mathcal{B}$ mit*

$$\mathcal{B} = \{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \}$$

ist eine Basis von T_pM. Insbesondere gilt $\dim T_pM = n$.

Beweis. Es bleibt zu zeigen, dass T_pM von der Menge $\mathcal{B}$ erzeugt wird. Dazu verwenden wir die folgende Behauptung: Sei $f\colon B_r(0) \to \mathbb{R}$ $(r > 0)$ differenzierbar und $f(0) = 0$. Dann existieren differenzierbare Funktionen $f_i\colon B_r(0) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x) \quad \text{für} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in B_r(0).$$

Es gilt nach dem Hauptsatz der Differential - und Integralrechnung, dass

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bigg|_{t=0} f(tx_1, \dots, tx_n)\ \mathrm{dt} \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n)\,\mathrm{rk} \cdot (\frac{\mathrm{d}(tx_i)}{\mathrm{dt}}|_{t=0}) \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n)\ \mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Setze $f_i \coloneqq \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, x_n)\ \mathrm{dt}$. Dies zeigt die Behauptung. Wir wenden dies an auf $\tilde{f} \coloneqq f \circ \varphi^{-1}$ (oBdA ist $\varphi(p) = 0$ ($\Rightarrow x_i(p) = 0$, $i = 1, \dots, n$) und $f(p) = 0$). Es folgt

$$(f \circ \varphi^{-1})(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{f}_i(x)$$

mit geeigneten Funktionen $\tilde{f}_i$. Damit ist $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{f}_i \circ \varphi$. Nach der Linearität und der Produkteigenschaft von v folgt nun

$$\begin{aligned}
v(f) = v\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{f}_i \circ \varphi\right) &= \sum_{i=1}^{n} v(x_i \cdot (\tilde{f}_i \circ \varphi)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \cdot \tilde{f}_i(\underbrace{\varphi(p)}_{=0}) + \underbrace{x_i(p)}_{=0} \cdot v(\tilde{f}_i \circ \varphi) \\
&= \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \tilde{f}_i(0)
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}|_p(f) &= \frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{f}_i(\varphi(p)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} f_i(0) + x_i \cdot \frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \tilde{f}_i(0) + x_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \cdot \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \tilde{f}_i(0) = \tilde{f}_j(0)
\end{aligned}$$

Da f beliebig gewählt war, folgt $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ mit $v_i \coloneqq v(x_i)$ woraus die Aussage des Lemmas folgt. $\square$

Sei $v \in T_pM$ wie oben. Wir können v mit Lemma 3.7 darstellen als

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$$

mit geeeigneten $v_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Dann definieren wir

$$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,\ \gamma(t) \coloneqq \varphi^{-1}\left(t \sum_{i=1}^n v_i e_i\right)$$

wobei $\{e_i\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist. Die tangentiale Äquivalenzklasse von γ definiert ein Element in $T_p^{\text{geom}}M$. Dieses ist unabhängig von der Wahl der Karte φ (also allein durch $v \in T_pM$ bestimmt). Denn: Sei $\psi\colon V \to \psi(V)$, $\psi\colon (y_1, \ldots, y_n)$ eine weitere solche Karte (um p mit $\psi(p) = 0$). Dann gilt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_i}|_p(f) &= \frac{\partial}{\partial y_i}(f \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \\
&= \frac{\partial}{\partial y_i}((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}))(\psi(p)) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(\psi(p)) \\
\text{Definition von } \frac{\partial}{\partial x_j}|_p \to &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}|_p(f) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(\psi(p))
\end{aligned}$$

Mit $v = \sum_{i=1}^n v_i^\varphi \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_{i=1}^n v_i^\psi \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p$ gilt somit

$$v = \sum_{i,j=1}^n v_i^\psi \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(\psi(p)) \frac{\partial}{\partial x_j}|_p.$$

Ein Koeffizientenvergleich mit obiger Darstellung von v ergibt

$$v_i^\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(\psi(p)) v_j^\psi \qquad \text{Transformationsformel für Komponenten von Tangentialvektoren} \tag{21}$$

Die behauptete Unabhängigkeit folgt jetzt aus der Kettenregel und (21)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} (\varphi \circ \gamma^\psi)(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} \varphi \circ \psi^{-1}\left(t \sum_{i=1}^n v_i^\psi e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n v_i^\varphi e_i \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} (\varphi \circ \gamma^\varphi)(t)
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe: Man zeige, dass obige Konstruktionen zueinander invers sind und wir somit eine kanonische (d.h. kartenunabhängige) Bijektion $T_p^{\text{geom}} \Leftrightarrow T_pM$ hergestellt haben.

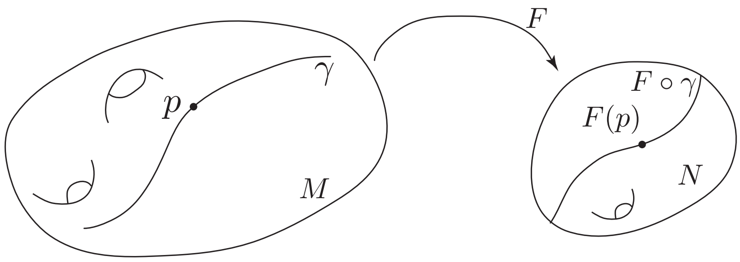
Definition 3.11 Sei $F\colon M \to N$ differenzierbar in $p \in M$. Die Abbildungen

$$\mathrm{d}_p^{\mathrm{geom}} F\colon T_p^{\mathrm{geom}} M \to T_{F(p)}^{\mathrm{geom}} N,\ [\gamma] \longmapsto [F \circ \gamma],$$

bzw.

$$\mathrm{d}_p F\colon T_p M \longmapsto T_{F(p)} N,\ v \longmapsto (\mathrm{d}_p F)(v)$$

mit $(\mathrm{d}_p F)(v)(f) = v(f \circ F)$ für f lokal um $F(p)$ definiert heißen *(geometrisch definiertes) Differential von F im Punkt p.*



Bemerkung.

(i) Das Differential $\mathrm{d}_p F$ ist $\mathbb{R}$-linear.

(ii) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_p^{\mathrm{geom}} \arrow[r, "\mathrm{d}_p^{\mathrm{geom}} F"] \arrow[d, "1:1"] & T_{F(p)}^{\mathrm{geom}} N \arrow[d] \\ T_p M \arrow[r, "\mathrm{d}_p F"] & T_{F(p)} N \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, d.h beide Definitionen des Differentials sind mit der Identifikation $T_p^{\mathrm{geom}} M \mathrel{\widehat{=}} T_p M$ verträglich (Übung).

(iii) Es gilt die Kettenregel $\mathrm{d}_p(G \circ F) = \mathrm{d}_{F(p)} G \circ \mathrm{d}_p F$.

Im folgenden verwenden wir die Notation $TM \coloneqq \coprod_{p \in M} T_p M$, wobei wir hiermit die disjunkte Vereinigung meinen.

Definition 3.12 Eine Abbildung $X\colon M \to TM$ mit $X(p) \in T_p M$ fügür alle $p \in M$ ist ein Vektorfeld auf M. Das Vektorfeld X heißt *differenzierbar in $p \in M$*, falls eine Karte $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)\colon U \to \varphi(U)$ um p mit

$$X|_U = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

für $X_i\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in p (für $i = 1, \ldots, n$) existiert.

Bemerkung. Für eine weitere Karte $\psi = (y_1, \ldots, y_n)\colon V \to \psi(V)$ um p gilt

$$X|_{U \cap V} = \sum_{i=1}^n X_i^{\varphi} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n X_i^{\psi} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

mit (vgl. $(*)$ oben) $X_i^{\varphi} = \sum_{j=1}^n X_j^{\psi} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi$. Da x_i differenzierbar von y_j abhängt, ist die Differenzierbarkeit von X (in p) unabhängig von der Wahl der Karte.

3.2 Differentialformen

Seien nun V bzw. W endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume ($\dim V = n$, $\dim W = m$).

Definition 3.13 Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine *alternierende k-Form* ω auf V ist eine k-fach multilineare Abbildung

$$\omega\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ Faktoren}} \to \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$\omega(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k)\ \forall v_1, \ldots, v_n \in V$$

und $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ (symmetrische Gruppe mit k-Elementen). Wir bezeichnen mit $\operatorname{Alt}^k V$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der alternierenden k-Formen auf V. Ferner setzen wir $\operatorname{Alt}^0 V \coloneqq \mathbb{R}$.

Bemerkung.

(i) $\operatorname{Alt}^1 V = V^*$

(ii) Jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ induziert eine lineare Abbildung

$$f^* : \operatorname{Alt}^k W \to \operatorname{Alt}^k V$$

mit $f^*\omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega(fv_1, \ldots, fv_k)$ für $v_1, \ldots, v_k \in V$. (Für $k = 1$ ist f^* die duale Abbildung zu f).

(iii) Ist $v_i = v_j$, $i \neq j$, so folgt $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$, denn:

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = 0.$$

Sind allgemeiner $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig, so folgt $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$ (Übung).

Beispiel.

(1) Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Kreuzprodukt $(v_1, v_2) \mapsto v_1 \times v_2$. Dieses ist komponentenweise eine alternierende 2-Form.

(2) $V = \mathbb{R}^n$, $\det\colon V^n \to \mathbb{R}$ ist eine alternierende n-Form.

(3) Für jede alternierende k-Form ω ($k \geq 1$) und $v \in V$ wird durch

$$\eta(v_1, \ldots, v_{k-1}) \coloneqq \omega(v, v_1, \ldots, v_{k-1}) \qquad v_1, \ldots, v_{k-1} \in V$$

eine alternierende $(k-1)$-Form η erklärt.

Lemma 3.14 *Es gilt*

$$\dim \operatorname{Alt}^k V = \begin{cases} \binom{n}{k} & 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}.$$

Beweis. Sei zunächst $1 \leq k \leq n$ und $\omega \in \operatorname{Alt}^k V$. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V und $v_i = \sum_{j=1}^n v_{ij} e_j$, $i = 1, \ldots, k$. Aus der Multilinearität von ω folgt[1]

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \ldots, v_k) &= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n v_{1j_1} \cdots v_{kj_k} \cdot \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}\sigma \cdot v_{1j_{\sigma(1)}} \cdots v_{kj_{\sigma(k)}} \Big) \cdot \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \end{aligned} \tag{22}$$

[1] Es reicht hier, die aufsteigende Reihenfolge von Indizes zu betrachten, da ansonsten $\omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = 0$ ist, falls $j_l = j_i$ für $i \neq l$ für 2 Indizes gilt.

Also ist ω durch die $\binom{n}{k}$ Zahlen $\omega_{j_1\cdots j_k} := \omega(e_{j_1},\dots,e_{j_k})$ $(1 \le j_1 < \dots < j_k \le n)$ bestimmt. Sind umgekehrt Zahlen $\omega_{j_1\cdots j_k} \in \mathbb{R}$ gegeben, so definieren diese durch (22) eine alternierende k-Form ω auf V. Dies zeigt die Behauptung für $1 \le k \le n$. Da für $k > n$ jedes k-Tupel von Vektoren $v_1,\dots,v_k$ linear abhängig ist, folgt für alle $\omega \in \operatorname{Alt}^k V$ stets $\omega(v_1,\dots,v_k) = 0$, also ist $\omega = 0$, d.h. die Behauptung in diesem Fall. Für $k = 0$ folgt dies aus der Definition $\operatorname{Alt}^0 V = \mathbb{R}$. □

Bemerkung. Aus Lemma 3.14 folgt insbesondere $\dim \operatorname{Alt}^n V = \binom{n}{n} = 1$ Sei $f \in \operatorname{End} V$. Dann ist $f^*\colon \operatorname{Alt}^n V \to \operatorname{Alt}^n V$, $\omega \mapsto \det(f)\cdot\omega$.

Beweis. Übung (Hinweis: Es gilt $f^*\omega = c_f \cdot \omega$ für ein $c_f \in \mathbb{R}$ und alle $\omega \in \operatorname{Alt}^n V$. Außerdem ist $c_{fg}\omega = (f\circ g)^*\omega = g^*f^*\omega = c_g \cdot c_f \cdot \omega$, also $c_{fg} = c_g \cdot c_f$ und $\operatorname{Id}^*\omega = \omega$, also $c_{\mathrm{Id}} = 1$). □

Ab jetzt: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir setzen

$$\operatorname{Alt}^k TM := \coprod_{p\in M} \operatorname{Alt}^k T_pM.$$

Definition 3.15 Eine Abbildung $\omega\colon M \to \operatorname{Alt}^k TM$ mit $\omega(p) \in \operatorname{Alt}^k T_pM$ für alle $p \in M$ heißt *Differentialform vom Grad k* (oder kurz k-Form). Die k-Form ω heißt *differenzierbar* in p, falls für eine Karte $\varphi = (x_1,\dots,x_n)\colon U \to \varphi(U)$ von p gilt: Die Abbildung

$$\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\Big)\colon U \to \mathbb{R}$$

ist differenzierbar in p (für alle $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$). Wir bezeichnen mit $\Omega^k(M)$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der differenzierbaren k-Formen auf M.

Definition 3.16 Es sei $\omega \in \operatorname{Alt}^r V$, $\eta \in \operatorname{Alt}^s V$. Dann heißt die durch

$$(\omega\wedge\eta)(v_1,\dots,v_{r+s}) := \frac{1}{r!}\frac{1}{s!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{r+s}} \operatorname{sgn}\sigma\cdot\omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(r)})\cdot\eta(v_{\sigma(r+1)},\dots,v_{\sigma(r+s)})$$

definierte alternierende Multilinearform $\omega\wedge\eta \in \operatorname{Alt}^{r+s} V$ das *Dachprodukt* der Formen ω und η. Die so definierte $(r+s)$-fache Multilinearform ist alternierend. (Übung).

Lemma 3.17 *Das Dachprodukt $\wedge : \operatorname{Alt}^* V \times \operatorname{Alt}^* V \to \operatorname{Alt}^* V$ ($*$ bedeutet freie Wahl des Index) besitzt folgende Eigenschaften:*

(i) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\bigoplus_{k=0}^\infty \operatorname{Alt}^k V$ (infakt kommt ab irgendeinem k nur noch der Nullraum hinzu) wird durch $\wedge$ zu einer graduierten, antikommutativen $\mathbb{R}$-Algebra mit 1, d.h.

(1) $\wedge\colon \operatorname{Alt}^r V \times \operatorname{Alt}^s V \to \operatorname{Alt}^{r+s} V$ ist bilinear,

(2) $\wedge$ ist assoziativ,

(3) $\wedge$ ist graduiert-antikommutativ, d.h. für alle $\omega \in \operatorname{Alt}^r V$, $\eta \in \operatorname{Alt}^s V$ gilt

$$\omega\wedge\eta = (-1)^{rs}\cdot\eta\wedge\omega \in \operatorname{Alt}^{r+s} V,$$

(4) $1 \in \operatorname{Alt}^0 V = \mathbb{R}$ erfüllt $1\wedge\omega = \omega$ für alle $\omega \in \bigoplus_{k=0}^\infty \operatorname{Alt}^k V$.

(ii) $\wedge$ ist natürlich, d.h. für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gilt

$$f^*(\omega\wedge\eta) = f^*\omega\wedge f^*\eta \qquad \forall w \in \operatorname{Alt}^r, \eta \in \operatorname{Alt}^s W.$$

Beweis.

(i) Die graduierte Antikommutativität folgt aus

$$\begin{aligned}(\eta \wedge \omega)(v_1, \dots, v_{r+s}) &= \frac{1}{r!}\frac{1}{s!} sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \eta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \cdot \omega(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) \\ &= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \cdot \eta(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(s)}) \cdot \omega(v_{\sigma\tau(s+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(s+r)}) \\ &= (-1)^{rs} (\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{r+s})\end{aligned}$$

wobei

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & s & s+1 & \cdots & s+r \\ r+1 & \cdots & r+s & 1 & \cdots & r \end{pmatrix}.$$

Die Assoziativität folgt ähnlich. Bilinearität und Eigenschaft der 1 folgen unmittelbar aus der Definition von $\wedge$.

(ii) Natürlichkeit gilt wegen

$$\begin{aligned}f^*(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_n) &= (\omega \wedge \eta)(f v_1, \dots, f v_{r+s}) \\ &= \frac{1}{r!}\frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(f v_{\sigma(1)}, \dots, f v_{\sigma(r)}) \cdot \eta(f v_{\sigma(r+1)}, \dots, f v_{\sigma(r+s)}) \\ &= \frac{1}{r!}\frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot f^*\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \cdot f^*\eta(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) \\ &= (f^*\omega \wedge f^*\eta)(v_1, \dots, v_{r+s})\end{aligned}$$

wie gewünscht.

□

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V und $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ die dazu duale Basis von $V^* = \operatorname{Alt}^1(V)$, d.h. $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Dann ist

$$e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 0 & \{i_1, \dots, i_k\} \neq \{j_1, \dots, j_k\}, \\ \operatorname{sgn} \tau & \tau \in \mathfrak{S}_k,\ \tau(j_l) = i_l,\ l = 1, \dots, k. \end{cases} \tag{23}$$

Dies folgt aus der Definition des Dachprodukts, Übung.

Lemma 3.18 *Die* $\binom{n}{k}$ *Formen* $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$ *(*$1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$*) bilden eine Basis von* $\operatorname{Alt}^k(V)$*.*

Beweis. Vergleiche Lemma 3.14. Es sei $\omega \in \operatorname{Alt}^k(V)$. Dann gilt

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_k} \cdot e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$$

mit $\omega_{i_1 \cdots i_k} = w(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. Somit wird $\operatorname{Alt}^k(V)$ von den Formen $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$ erzeugt. Da diese linear unabhängig sind, folgt die Behauptung. □

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Es ist $\det \in \operatorname{Alt}^n V$. Da $\det \neq 0$ und $\dim \operatorname{Alt}^n V = 1$, also $\operatorname{Alt}^n V = \mathbb{R} \cdot \det$. Andererseits ist auch $\operatorname{Alt}^n V = \mathbb{R} \cdot e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$, vgl. Lemma 3.18. Tatsächlich ist $\det = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$, wie aus (23) folgt.

Definition 3.19 Wie in Definition 3.15 bezeichne $\Omega^r(M)$ den Vektorraum der differenzierbaren r-Formen auf M. Wir definieren das *Dachprodukt*

$$\wedge : \Omega^r(M) \times \Omega^s(M) \to \Omega^{r+s}(M), \ (\omega, \eta) \longmapsto w \wedge \eta$$

punktweise durch $(\omega \wedge \eta)(p) := \omega(p) \wedge \eta(p) \ \forall p \in M$.

Bemerkung.

(i) Die algebraischen Eigenschaften aus Lemma 3.17 gelten entsprechend für das Dachprodukt auf Differentialformen.

(ii) Ist $\varphi = (x_1, \ldots, x_n) \colon U \to \varphi(U)$ eine Karte, so bezeichnen wir mit $\{\mathrm{d}\, x_1, \ldots, \mathrm{d}\, x_n\}$ das Basenfeld von $T^*M|_U$ dual zu $\{\partial\partial x_1, \ldots, \partial\partial x_n\}$, d.h.

$$\mathrm{d}\, x_i|_p\big(\frac{\partial}{\partial x_j}\big|_p\big) = \delta_{ij} \qquad \forall p \in U.$$

Dann gilt für $w \in \Omega^k(M)$:

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} w_{i_1 \cdots i_k} \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

mit geeigneten differenzierbaren Funktionen $\omega_{i_1 \cdots i_k} : U \to \mathbb{R}$ (*Komponentenfunktionen* von ω bezügüglich φ).

Bemerkung. Wir verwenden im folgenden die Notationen $\mathrm{d}\,|_U = \mathrm{d}_U$ synonym als Einschränkung der Abbildung d auf das Kartengebiet U.

Satz 3.20 (und Definition (äußeres Differential)) *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $n = \dim M$. Dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ genau eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung*

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}_k \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für $f \in \Omega^0(M)$ stimmt df mit dem geometrischen Differential $\mathrm{d}_p f \colon T_pM \to \mathbb{R}$ ($p \in M$), aufgefasst als Element in T_p^*M, überein.

(ii) Die Sequenz linearer Abbildungen

$$0 \to \Omega^0(M) \overset{\mathrm{d}_0}{\to} \Omega^1(M) \overset{\mathrm{d}_1}{\to} \Omega^2(M) \overset{\mathrm{d}_2}{\to} \cdots$$

ist ein Komplex, d.h. $\mathrm{d}^2 = \mathrm{d}_{k+1} \circ \mathrm{d}_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Es gilt die Leibnizsche Produktregel

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\,\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge \mathrm{d}\,\eta$$

für alle $\omega \in \Omega^r(M)$ und $\eta \in \Omega^*(M)$.

Die durch (i) - (iii) eindeutig bestimmt lineare Abbildung d heißt äußeres Differential *(oder* Cartanableitung*), obige Sequenz heißt* de Rham-Komplex.

Vorbemerkung (äußeres Differential einer Funktion $f \in \Omega^0(M)$). Sei $\varphi \colon U \to \varphi(U)$, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Karte um p, oBdA $\varphi(p) = 0$. Dann gilt mit $\gamma \colon t \mapsto \varphi^{-1}(te_i)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_p\, f\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0}(f \circ \gamma)(t) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0}(f \circ \varphi^{-1})(te_i) \\
&= \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(0) \\
&= \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))
\end{aligned}$$

Dies sind die Koeffizienten in der Entwicklung in T_p^*M. Also

$$\mathrm{d}_U f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\circ\varphi\cdot\mathrm{d}\,x_i \tag{24}$$

(Darstellung der 1-Form $\mathrm{d}\,f\in\Omega^1(M)$ bzgl. der Karte φ).

Beweis.[Beweis von Satz 3.20] Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

Schritt 1 Beweis für ein Kartengebiet.

Sei $\varphi=(x_1,\ldots,x_n):U\to\varphi(U)$ eine Karte. Für $\omega\in\Omega^k(U)$ gilt

$$\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\omega_{i_1\cdots i_k}\cdot\mathrm{d}\,x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{i_k}$$

mit differenzierbaren Funktionen $\omega_{i_1\cdots i_k}:U\to\mathbb{R}$. Wir definieren

$$\mathrm{d}_U\, w := \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\mathrm{d}_U(\omega_{i_1\cdots i_k})\wedge\mathrm{d}\,x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{i_k} \tag{25}$$

wobei $\mathrm{d}(\omega_{i_1\cdots i_k})$ wie in (24) zu verstehen ist. Die lineare Abbildung d_U erfüllt die Eigenschaften (i) - (iii), denn:

(i) folgt sofort aus (24).

(ii) Zu zeigen ist $\mathrm{d}_U(\mathrm{d}_U\,\omega)=0$ für alle $\omega\in\Omega^k(U)$. Fügvgvr $\omega=f\in\Omega^0(U)$ rechnen wir dazu noch:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_U(\mathrm{d}_U\, f) &\overset{(24)}{=} \mathrm{d}_U\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i \qquad (\text{mit } \frac{\partial f}{\partial x_i}:=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\circ\varphi)\\
&\overset{(25)}{=}\sum_{i=1}^n\mathrm{d}_U(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{rk}\wedge\mathrm{d}\,x_i\\
&\overset{(24)}{=}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\cdot\mathrm{d}\,x_j\wedge\mathrm{d}\,x_i\\
&=0
\end{aligned}$$

denn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\cdot\mathrm{d}\,x_j\wedge\mathrm{d}\,x_i=-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\cdot\mathrm{d}\,x_i\wedge\mathrm{d}\,x_j$$

für alle i,j. Der Fall $k\ge 1$ reduziert sich mittels der Leibnizregel und (25) auf den Fall $k=0$, d.h. es ist hier ebenfalls $\mathrm{d}_U(\mathrm{d}_U\,\omega)=0$.

(iii) OBdA können wir $\omega=f\cdot\mathrm{d}\,x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{i_r}$, $\eta=g\cdot\mathrm{d}\,x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{j_s}$ mit $f,g\in\mathcal{C}^\infty(U)$ annehmen. Nach (25) gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_U(\omega\wedge\eta) &= \underbrace{\mathrm{d}_U(fg)}_{(\mathrm{d}_U f)\cdot g+f\cdot\mathrm{d}_U g}\wedge\mathrm{d}\,x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{i_r}\wedge\mathrm{d}\,x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{j_s}\\
&=(\mathrm{d}_U\, f)\wedge\mathrm{d}\,x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{i_r}\wedge g\cdot\mathrm{d}\,x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{j_s}\\
&\qquad+(-1)^r f\cdot\mathrm{d}\,x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{i_r}\wedge\mathrm{d}_U\, g\wedge\mathrm{d}\,x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{j_s}\\
&=(\mathrm{d}_U\,\omega)\wedge\eta+(-1)^r\omega\wedge(\mathrm{d}_U\,\eta)
\end{aligned}$$

Schritt 2 Beweis für „ganz“ M.

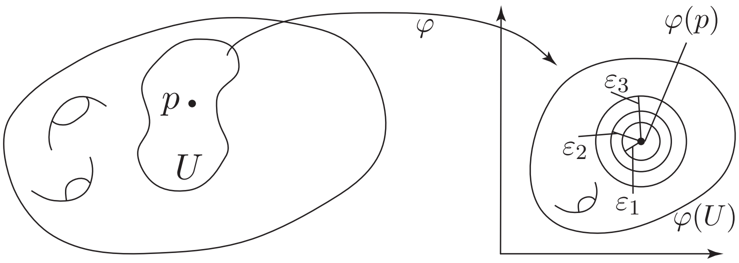
Zur Existenz des äußeren Differentials d sei $\omega \in \Omega^k(M)$ und $p \in M$. Für eine Karte $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ um p definieren wir

$$(\mathrm{d}\,\omega)_p \coloneqq (\mathrm{d}_U\,\omega|_U)_p$$

mit d_U wie in Schritt 1. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte um p (Übung). Zur Eindeutigkeit: Zu zeigen ist: Ist d eine äußere Ableitung, so gilt

$$(\mathrm{d}\,\omega)_p = (\mathrm{d}_U\,\omega|_U)_p$$

für alle $p \in M$, $\omega \in \Omega^k(M)$ und eine Karte $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ um p wie oben. Wir zeigen die Eindeutigkeit von d. Dazu sei $(\mathrm{d}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))_p$ ein äußeres Differential, d.h. d erfügülle (i) - (iii). Weiter sei $\omega \in \Omega^k(M)$ und $p \in M$. Zu zeigen ist: $(\mathrm{d}\,\omega)_p = (\mathrm{d}_U\,\omega_U)_p$.



Wähle $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$, sodass

$$B_{\varepsilon_1}(\varphi(p)) \subseteq B_{\varepsilon_2}(\varphi(p)) \subseteq B_{\varepsilon_3}(\varphi(p)) \subseteq \varphi(U).$$

Wir setzen $U_i \coloneqq \varphi^{-1}(B_{\varepsilon_i}(\varphi(p)))$, $i = 1, 2, 3$. Sei

$$\omega|_U = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} w_{i_1 \cdots i_k} \cdots \mathrm{d}\,x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_{i_k}$$

mit geeigneten Funktionen $\omega_{i_1 \cdots i_k}\colon U \to \mathbb{R}$. Wähle $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $\tau\colon U_3 \to [0,1]$ mit $\tau|_{U_1} \coloneqq 1$, $\tau|_{U_3 \setminus U_2} \coloneqq 0$ und setze

$$a_{i_1 \cdots i_k} \coloneqq \begin{cases} \tau(q) w_{i_1 \cdots i_k}(q), & q \in U_3, \\ 0, & q \in M \setminus U_3, \end{cases}$$

$$\varphi_i(q) \coloneqq \begin{cases} \tau(q) x_i(q), & q \in U_3, \\ 0, & q \in M \setminus U_3. \end{cases}$$

sowie

$$\tilde{\omega} \coloneqq \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \ldots i_k} \cdots \mathrm{d}\,\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,\varphi_{i_k} \in \Omega^k(M).$$

Wegen Aussagen (i) - (iii) gilt

$$\mathrm{d}\,\tilde{\omega} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathrm{d}\,a_{i_1 \ldots i_k} \wedge \mathrm{d}\,\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,\varphi_{i_k}.$$

Insbesondere gilt

$$(\mathrm{d}\,\tilde{\omega})_p = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} (\mathrm{d}\,\omega_{i_1 \cdots i_k})_p \wedge (\mathrm{d}\,x_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}\,x_{i_k})_p = (\mathrm{d}_U\,\omega|_U)_p$$

nach Definition von $a_{i_1\cdots i_k}$ und $\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k}$. Es bleibt zu zeigen: $(\mathrm{d}\,\omega)_p = (\mathrm{d}\,\tilde{\omega})_p$.
Wähle hierzu $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\sigma|_{M\setminus U_1} := 1$, $\sigma(p) = 0$ und $(\tilde{\omega}-\omega) = \sigma(\tilde{\omega}-\omega)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\tilde{\omega}-\omega) &= \mathrm{d}(\sigma(\tilde{\omega}-\omega)) \\
&= \mathrm{d}\,\sigma \wedge (\tilde{\omega}-\omega) + \sigma \wedge \mathrm{d}(\tilde{\omega}-\omega) \\
&= \mathrm{d}\,\sigma \wedge \sigma(\tilde{\omega}-\omega) + \sigma \wedge \mathrm{d}(\tilde{\omega}-\omega)
\end{aligned}$$

also $(\mathrm{d}(\tilde{\omega}-\omega))_p = 0$ bzw. $(\mathrm{d}\,\tilde{\omega})_p = (\mathrm{d}\,\omega)_p$, wie behauptet.

□

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass d lokal ist: Für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ hängt $(\mathrm{d}\,\omega)_p$ nur ab von $\omega|_U$, U eine beliebige Umgebung von p.

Definition 3.21 Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ nennen wir *geschlossen*, falls $\mathrm{d}\,\omega = 0$ gilt. Wir nennen $\omega \in \Omega^k(M)$ *exakt*, falls $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ existiert mit $\mathrm{d}\,\eta = \omega$.

Bemerkung. Jede exakte Differentialform $\omega = \mathrm{d}\,\eta$ ist geschlossen, denn $\mathrm{d}\,\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}(\eta)) = 0$ $(\mathrm{d}^2 = 0)$. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht: nicht jede geschlossene Differentialform ω ist exakt. Im Fall $k = n$ ist jedes $\omega \in \Omega^k(M)$ geschlossen, da $\Omega^{n+1}(M) = \{0\}$. Eine 0-Form (d.h. Funktion) $f \in \Omega^0(M)$ (M zusammenhängend) ist geschlossen genau dann, wenn f konstant ist.

Beispiel.

(1) Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sei $r = \sqrt{x^2+y^2}$ $((x,y) \in M)$. Die *Windungsform* $\omega \in \Omega^1(M)$ ist $\omega := \frac{1}{r^2}(x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x)$. Sie ist geschlossen wegen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\omega &= \mathrm{d}\left(\frac{x}{r^2}\right) \wedge \mathrm{d}\,y - \mathrm{d}\left(\frac{y}{r^2}\right) \wedge \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right) \cdots \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,x - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^2}\right) \cdots \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{x^2+y^2-x\cdots 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdots \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y - \frac{x^2+y^2-y\cdots 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdots \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdots \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdots \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Windungsform ist nicht exakt, da kein $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ existiert mit $\mathrm{d}\,f = \omega$ (Übung). Aber:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}\,y \\
&= \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}\,y \\
&= -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,y \\
&= \frac{1}{r^2}(-y\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,y) \\
&= \omega.
\end{aligned}$$

Dies ist aber kein Widerspruch, da $f = \arctan\frac{y}{x}$ nicht als glatte Funktion auf M definiert werden kann (aber jedoch zum Beispiel auf $M^* = M\setminus(0,\infty)$, und da ist $\omega|_{M^*}$ geschlossen und exakt).

(2) Sei $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $((x,y,z) \in M)$. Die *Gravitationsform* ist

$$\omega = -\frac{1}{r^3}(x \,\mathrm{d}\, x + y \,\mathrm{d}\, y + z \,\mathrm{d}\, z) \in \Omega^1(M).$$

Die Funktion $f := \frac{1}{r}$ ist ein Potential von ω, d.h. $\omega = \mathrm{d}\, f$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\, f &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\, x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\, y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\, z \\
&= -\frac{1}{2}\cdots\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\mathbf{32}}}\,\mathrm{d}\, x - \frac{1}{2}\cdots\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{\mathbf{32}}}\,\mathrm{d}\, y - \frac{1}{2}\cdots\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{\mathbf{32}}}\,\mathrm{d}\, z \\
&= -\frac{1}{r^3}(x \,\mathrm{d}\, x + y \,\mathrm{d}\, y + z \,\mathrm{d}\, z) \\
&= \omega.
\end{aligned}$$

Damit ist ω exakt und insbesondere geschlossen, $\mathrm{d}\,\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\, f) = 0$.

Lemma 3.22 (Natürlichkeit von d) *Es sei $f\colon M \longrightarrow N$ differenzierbar. Dann gilt $f^*(\mathrm{d}\,\omega) = \mathrm{d}(f^*\omega)$ für alle $\omega \in \Omega^k(N)$.*

Beweis. Im Fall $\omega \in \Omega^0(N)$, d.h. $f^*\omega = \omega \circ f$, folgt aus der Kettenregel:

$$(\mathrm{d}(f^*\omega)_p = \mathrm{d}(\omega \circ f)_p = \mathrm{d}_{f(p)}\,\omega \circ \mathrm{d}_p\, f = (f^*(\mathrm{d}\,\omega))_p.$$

Sei jetzt $k \geq 1$, $\omega \in \Omega^k(N)$. In lokalen Koordinaten ist

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_k} \cdots \mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}, \\
\mathrm{d}\,\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathrm{d}\,\omega_{i_1 \cdots i_k} \wedge \mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_{i_k}.
\end{aligned}$$

Aus der Natürlichkeit des Dachprodukts folgt

$$f^*\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f^*\omega_{i_1 \cdots i_k} \cdot f^*(\mathrm{d}\, x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(\mathrm{d}\, x_{i_k}),$$

also

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f^*\omega) = &\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathrm{d}\, f^*\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge f^*\,\mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge f^*\,\mathrm{d}\, x_{i_k} \\
&\qquad + f^*\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge \underbrace{\mathrm{d}(f^*\,\mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge f^*\,\mathrm{d}\, x_{i_k})}_{=0} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots i_k \leq n} f^*\,\mathrm{d}\,\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge f^*\,\mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge f^*\,\mathrm{d}\, x_{i_k} \\
&= f^* \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathrm{d}\,\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge \mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_{i_k} = \\
&= f^*\,\mathrm{d}\,\omega
\end{aligned}$$

□

3.3 Zerlegung der Eins

Definition 3.23 Eine *differenzierbare Zerlegung* (oder *Partition*) der Eins auf M ist eine Familie differenzierbarer Funktionen $(\tau_i)_{i\in I}$, $\tau_i\colon M \longrightarrow [0,1]$, mit

(i) Es sei $supp f := \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$. Die Familie $(supp \tau_i)_{i\in I}$ ist lokalendlich, d.h. zu jedem $p \in M$ existiert eine Umgebung U von p mit $U \cap supp\tau_i \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $i \in I$.

(ii) $\sum_{i\in I} \tau_i = 1$.

Die Zerlegung der Eins $(\tau_i)_{i\in I}$ heißt einer offenen Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von M untergeordnet, falls für alle $i \in I$ ein $j(i) \in J$ existiert mit $supp\tau_i \subseteq U_{j(i)}$.

Lemma 3.24 *Die Mannigfaltigkeit M besitzt eine kompakte Ausschöpfung, d.h. eine Folge offener, relativkompakter*[1] *Teilmengen $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\bar{\Omega}_n \subseteq \Omega_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = M$.*

Beweis. Wir konstruieren eine abzählbare Überdeckung von M wie folgt. Sei $p \in M$, $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U)$ eine Karte von M. Sei $\varepsilon > 0$ (abhängig von p) so, dass $B_\varepsilon(\varphi(p)) \subseteq \varphi(U)$. Definiere die offene Menge $V_p := \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(p)) \subseteq U$. Die Mengen $\{V_p\}_{p\in M}$ überdecken M. Da M eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, können wir zu einer abzählbaren Teilüberdeckung $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von $\{V_p\}_{p\in M}$ übergehen. Ferner sei $B_i := \overline{V}_i, i \in \mathbb{N}$. Per Konstruktion sind die Mengen B_i (als Urbilder der relativkompakten Bälle) kompakt[2].
Rekursiv sei die Funktion $\mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$, $k \mapsto n_k$ definiert durch $n_0 = 0$ und die folgende Festsetzung. Sei bereits n_k definiert und $A_k := \bigcup_{j=0}^{k} B_j$. A_k ist kompakt als endliche Vereinigung kompakter Mengen. Es existieren also endlich viele Mengen aus $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, die A_k überdecken. Wähle $n_{k+1} \geq n_k + 1$ so, dass

$$A_k \subseteq \bigcup_{j=0}^{n_{k+1}} V_j \subseteq \bigcup_{j=0}^{n_{k+1}} B_j =: A_{k+1}.$$

Setze $\Omega_k := \mathring{A}_k$. Dann gilt $\bar{\Omega}_k \subseteq A_k \subseteq \mathring{A}_{k+1} = \Omega_{k+1}$ und

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_{k+1} \supseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = M.$$

Damit ist $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die gewünschte kompakte Ausschöpfung von M. $\square$

Satz 3.25 *Zu jeder offenen Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von M existiert eine dazu untergeordnete Zerlegung der Eins $(\tau_i)_{i\in I}$ mit kompakten Trägern $supp\tau_i, i \in I$ und abzählbarer Indexmenge I.*

Beweis. Sei $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von M wie in Lemma 3.24.
Zu $p \in \overline{\Omega}_n \setminus \Omega_{n-1}$ wähle offene Umgebung $V_p \subseteq \Omega_{n+1} \setminus \bar{\Omega}_{n-2}$ (offen) und $\lambda_p\colon M \to [0,\infty)$ differenzierbar mit $supp\lambda_p \subseteq V_p$ und $\lambda_p(p) > 0$. Das System der offenen Mengen $\{\lambda_p > 0\}$, $p \in \bar{\Omega}_n \setminus \Omega_{n-1}$, überdeckt die kompakte Menge $\bar{\Omega}_n \setminus \Omega_{n-1}$. Da M von den Mengen Ω_n ausgeschöpft wird, folgt die Existenz von Punkten $p_i \in M, i \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

i) $(\{\lambda_{p_i} > 0\})_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von M

ii) $(V_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ist ein lokalendliches Mengensystem.

Betrache die Funktion $\lambda := \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_{p_i}\colon M \longrightarrow (0,\infty)$. Die Funktionen $\tau := \frac{\lambda_{p_i}}{\lambda}$ bilden eine differenzierbare Zerlegung der Eins. Um diese einer Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ unterzuordnen, wähle V_p oben so, dass $V_p \subseteq U_{j(p)}$ für geeignetes $j(p)$ gilt. $\square$

[1]Eine Menge ist relativkompakt, falls ihr Abschluss kompakt ist.

[2]Wir benutzen im Beweis mehrfach, dass φ als Homöomorphismus kompakte (offene) Mengen auf kompakte (offene) Mengen abbildet

3.4 Orientierungen

Sei v ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $1 \leq n := \dim_{\mathbb{R}} V < \infty$. Zwei Basen $\{e_1, \dots, e_n\}$ und $\{f_1, \dots, f_n\}$ von V heißen *gleichorientiert*, falls für die lineare Abbildung $g\colon V \longrightarrow V$ definiert durch $g(e_i) = f_i$, $i = 1, \dots, n$ gilt: $\det g > 0$ (bzw. äquivalent hierzu $g \in \mathrm{Gl}^+(V)$, Zusammenhangskomponente von $\mathrm{Gl}(U)$ mit $1 \in \mathrm{Gl}^+(V)$). Auf diese Weise wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen von V mit genau zwei Äquivalenzklassen erklärt. Die Auswahl einer Äquivalenzklasse heißt *Orientierung von V*, die darin enthaltenen Basen heißen *positiv orientiert* (die anderen entsprechend *negativ orientiert*). Konvention für $n = 0$ ($V = \{0\}$): Orientierung korrespondiert zur Auswahl eines Vorzeichens „+“ oder „−“. Ist $0 \neq \omega \in \mathrm{Alt}^n(V)$, so wird durch $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine positiv orientierte Basis definiert genau dann, wenn $\omega(e_1, \dots, e_k) > 0$ eine Orientierung auf V definiert.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Die Orientierung von V bezüglich derer die Standardbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ positiv orientiert ist, heißt Standardorientierung von $\mathbb{R}^n$. Diese wird induziert durch die alternierende Multilinearform $\omega = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* \in \mathrm{Alt}^n \mathbb{R}^n$.

Sind V, W n-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, so heißt ein Vektorraumisomorphismus *orientierungserhaltend*, falls er positiv orientierte Basen auf positiv orientierte Basen abbildet.

Definition 3.26 Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine *Orientierung von M* ist eine simultane Orientierung aller Tangentialräume T_pM, $p \in M$, die lokal verträglich sind im folgenden Sinn: Für alle $p \in M$ existiert eine Karte $\varphi = (x_1, \dots, x_n)\colon U \longrightarrow \varphi(U)$ um p so, dass für alle $q \in U$:

$$\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_q \}$$

eine positiv orientierte Basis von T_qM ist. Falls M zusammenhängend ist, gibt es genau zwei Orientierungen.

Beispiel. S^2, T^2 sind orientierbare Mannigfaltigkeiten, nicht jedoch das Möbiusband.

Definition 3.27 Ein Diffeomorphismus $f\colon M \longrightarrow N$ zwischen orientierten n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten heißt *orientierungserhaltend*, falls $\mathrm{d} f_p\colon T_pM \longrightarrow T_{f(p)}M$ ein orientierungserhaltender Vektorraumisomorphismus ist für alle $p \in M$.

3.5 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Es sei $H^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$ der abgeschlossene Halbraum,

$$\mathring{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < 0\} \text{ sein Inneres}$$

und

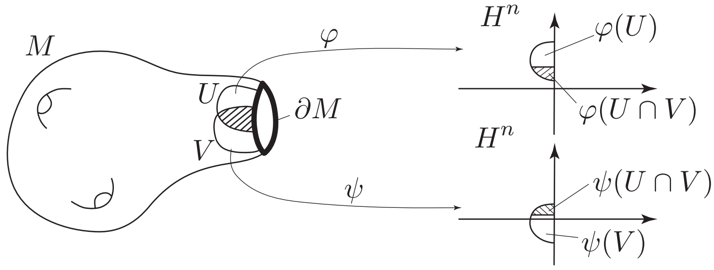
$$\partial H^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\} \text{ sein Rand.}$$

Im folgenden verwenden wir H^n als lokales Modell einer Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir nennen $f\colon H^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar im Punkt $p \in H^n$, falls es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p in $\mathbb{R}^n$ gibt und eine in p differenzierbare Funktion $\tilde{f}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{f}|_{U \cap H^n} = f|_{U \cap H^n}$.

Definition 3.28 Sei X ein topoplogischer Hausdorff-Raum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Eine H^n-wertige Karte ist ein Homöomorhpismus $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ zwischen offenen Teilmengen $U \subseteq X$ und $\varphi(U) \subseteq H^n$ (bzgl. der Relativtopologie[1] auf $H^n \subseteq \mathbb{R}^n$). Ein *Atlas H^n-wertiger Karten* heißt *differenzierbar*, falls die Kartenwechselabbildungen

$$\psi \circ \varphi^{-1}\big|_{\varphi(U\cap V)}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

differenzierbar im obigen Sinne sind.



Wie zuvor sind die Begriffe „differenzierbare Struktur“, „maximaler Atlas“, „n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit“, Tangentialraum T_pM, Differential $\mathrm{d}_p f$, usw. erklärt. Ferner definieren wir

$$\mathring{M} = \{p \in M \mid \varphi(p) \in \mathring{H}^n \text{ für eine Karte } \varphi\colon U \to \varphi(U) \subseteq H^n \text{ um } p\}$$

als das *Innere* von M und

$$\partial M := \{p \in M \mid \varphi(p) \in \partial H^n \text{ für eine Karte } \varphi\colon U \to \varphi\colon U \to \varphi(U) \subseteq H^n \text{ um } p\}$$

als den *Rand* von M. $\mathring{M}$ und ∂M sind unabhängig von der Wahl der Karte φ in obiger Definition. Der Rand ∂M trägt die Struktur einer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit (ohne Rand).

Beispiel. Sei $n \geq 1$ und $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. $\mathbb{D}$ ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der $(n-1)$-dimensionalen Einheitsshäre $\partial M = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ als Rand.

Ist $\mathring{M}$ eine orientierte Mannigfaltigkeit (ohne Rand), so ist ∂M orientierbar. Wir geben ∂M die folgende Orientierung. Im Fall $n \geq 2$, $p \in \partial M$, zeigt $v \in T_pM$ *nach außen*, falls bezüglich einer Randkarte um p seine $\frac{\partial}{\partial x_1}$-Komponente positiv ist (entsprechend heißt $v \in T_pM$ nach *innen zeigend*, falls $-v$ nach außen zeigt).
Als Konvention für die Orientierung von ∂M führen wir ein: Wir nennen $\{v_2, \ldots, v_n\}$ als Basis von $T_p\partial M$ $(p \in \partial M)$ positiv orientiert, falls $\{v, v_2, \ldots, v_n\}$ eine positiv orientierte Basis von T_pM für (jedes) nach außen zeigende $v \in T_pM$ ist. Im Fall $n = 1$ nennen wir $p \in \partial M$[2] positiv orientiert, falls (jeder) nach außen zeigende Tangentialvektor $v \in T_pM$ eine positiv orientierte Basis von T_pM bildet.

Beispiel.

[1]Das bedeutet, dass eine Menge offen im Sinne der Relativtopologie heißt, falls sie durch Schnitt mit einer geeigneten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ entsteht.
[2]∂M ist hier eine diskrete Menge, da 0-dimensional

(1) Sei $M = \mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$. Dann ist

$$\partial M = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}.$$

Die Standardorientierung von $\mathbb{D}^2$ induziert die übliche Orientierung von S^1 (entgegen des Uhrzeigers).

(2) Sei $M = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, dann ist $\partial M = \{a, b\}$. Die Standardorientierung von M induziert auf ∂M die Orientierung:

$$\begin{aligned} &a \in \partial M \text{ hat die Orientierung } - \\ &b \in \partial M \text{ hat die Orientierung } + \end{aligned}$$

Sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit, evtl. mit Rand ∂M. Wir definieren $\Omega^n_{\mathrm{kp}}(M) \coloneqq \{\omega \in \Omega^n(M) \mid \mathit{supp}\omega \text{ ist kompakt}\}$ als die n-Formen mit kompaktem Träger.
Ziel: Wir wollen ein Integral definieren $\int_M \omega$ für $\omega \in \Omega_{\mathrm{kp}}(M)$. Sei $U \subseteq H^n$ offen, H^n (und somit U) versehen mit der Stardardorientierung. Zu $\omega = f \cdots dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^n_{\mathrm{kp}}(U)$, $f \in \mathbb{C}^\infty_{kp}(U)$ definieren wir

$$\int_U \omega \coloneqq \int_U f \,\mathrm{d}\,\lambda^n.$$

Lemma 3.29 (Invarianz des Integrals unter Koordinatentransformationen) *Seien $U, V \subseteq H^n$ offen, $F \colon U \to V$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus und $\omega \in \Omega^n_{kp}(V)$. Dann gilt:*

$$\int_U F^*\omega = \int_V \omega.$$

Beweis. Sei $\omega = f \cdots \mathrm{d}\, y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, y_n$, $f \in \mathbb{C}^\infty_{kp}(V)$. Hierbei versehen wir V mit kartesischen Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$, U sei versehen mit (kartesischen) Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$. Demnach ist

$$\begin{aligned} F^*\omega(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}) &= \omega(\mathrm{d}\, F(\frac{\partial}{\partial x_1}\,\mathrm{rk}, \ldots, \mathrm{d}\, F(\frac{\partial}{\partial x_n}\,\mathrm{rk}) \\ &= \omega(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_i} \circ F, \ldots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial y_i} \circ F) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n \frac{\partial F_{i_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_{i_n}}{\partial x_n} \cdots \omega(\frac{\partial}{\partial y_{i_1}} \circ F, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_{i_n}} \circ F\,\mathrm{rk} \\ &= (f \circ F) \cdots \det(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})_{ij} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$F^*\omega = (f \circ F)(\det \mathrm{d}\, F) \cdots dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{26}$$

Nun folgt aus der Transformationsformel und der Tatsache, dass F orientierungserhaltend ist:

$$\begin{aligned}
\int_V \omega &= \int_V f \,\mathrm{d}\,\lambda^n \\
&= \int_U (F \circ f) \underbrace{|\det \mathrm{d}\, F|}_{=\det \mathrm{d}\, F} \,\mathrm{d}\,\lambda^n \\
&= \int_U (F \circ f) \det \mathrm{d}\, F \,\mathrm{d}\,\lambda^n \\
&= \int_U (F \circ f) \det \mathrm{d}\, F dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \int_U F^* \omega
\end{aligned}$$

□

Sei jetzt allgemeiner M eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (evtl. mit Rand). Für eine orientierungserhaltende Karte $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subseteq H^n$ und $\omega \in \Omega^n_{\mathrm{kp}}(M)$ mit $supp\omega \subseteq U$ setze

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega.$$

Nach Lemma 3.29 ist $\int_M \omega$ unabhängig von der Wahl der Karte φ. Ist nämlich $\psi\colon V \to \psi(V) \subseteq H^n$ mit $supp\omega \subseteq V$, so folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^* \omega &= \int_{\varphi(U)} (\psi \circ \varphi^{-1})^* (\psi^{-1})^* \omega \\
&= \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \psi^* (\psi^{-1})^* \omega \\
&= \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* (\psi^{-1} \circ \psi)^* \omega \\
&= \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega
\end{aligned}$$

Sei jetzt $\omega \in \Omega^n_{\mathrm{kp}}(M)$ beliebig. Wir wählen eine Zerlegung der Eins $(\tau_i)_{i\in I}$ mit kompakten Trägern $supp\tau_i$ und offene eine Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ aus Kartengebieten orientierungserhaltender Karten, sodass die gewählte Zerlegung der Eins der Überdeckung untergeordnet ist. Wegen $supp\tau_i \subseteq U_{j(i)}$ (kompakt) ist $\int_M \tau_i\omega$ wohldefiniert. Wir setzen nun

$$\int_M \omega := \sum_{i\in I} \int_M \tau_i \omega.$$

Diese Summe ist endlich, da wegen der Lokalendlichkeit der Zerlegung der Eins $(\tau_i)_{i\in I}$ nur endlich viele der Mengen $supp\tau_i$ mit dem Kompaktum $supp\omega$ nichtleeren Schnitt haben. Die Definition von $\int_M \omega$ ist unabhängig von der gewählten Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ und der dazu untergeordneten Zerlegung der Eins $(\tau_i)_{i\in I}$. Ist nämlich $(V_\beta)_{\beta\in B}$ eine weitere solche Überdeckung mit untergeordneter Zerlegung der Eins $(\sigma_\alpha)_{\alpha\in A}$, so gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in A} \int_M \sigma_\alpha \omega &= \sum_{\substack{\alpha\in A\\ i\in I}} \tau_i \int_M \sigma_\alpha \omega \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in A\\ i\in I}} \underbrace{\int_M \tau_i \sigma_\alpha \omega}_{=:X}
\end{aligned}$$

X ist wohldefiniert, da $supp \tau_i \sigma_\alpha \omega \in U_{j(i)} \cap V_{\beta(\alpha)}$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in A \\ i \in I}} \sigma_\alpha \int_M \tau_i \omega$$
$$= \sum_{i \in I} \int_M \tau_i \omega$$

Bemerkung. Das Integral $\int_\gamma \omega$ einer 1-Form (bzw. eines Vektorfeldes) ω in $\mathbb{R}^n$ längs eines Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, vgl. Analysis II ist als Spezialfall

$$\omega = \int_{[a,b]} \gamma^* \omega$$

in obiger Definition enthalten.

3.6 Der Integralsatz von Stokes

Satz 3.30 (Satz von Stokes) *Es sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M (evtl. $\partial M = \emptyset$). Für jede Differentialform $\eta \in \Omega_{kp}^{n-1}(M)$ gilt*

$$\int_M \mathrm{d}\,\eta = \int_{\partial M} \eta.$$

Hierbei fassen wir $\int_{\partial M} \eta$ als $\int_{\partial M} i^* \eta$ mit $i : \partial M \to M$ der Inklusionsabbildung.

Beweis. Wir zeigen den Satz zunächst fügür $M = H^n$. Es sei

$$\eta = \sum_{i=1}^n f_i \cdots dx_1 \wedge \cdots \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n =: \sum_{i=1}^n \eta_i \in \Omega_{\mathrm{kp}}^{n-1}(H^n)$$

mit $f_i \in \mathbb{C}_{kp}^\infty(H^n)$, wobei man den i-ten Faktor $\mathrm{d}\,\hat{x}_i$ auslässt. Damit ist

$$\mathrm{d}\,\eta_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \cdots dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\int_{H^n} \mathrm{d}\,\eta_1 &= \int_{H^n} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&\overset{(*)}{=} \int_{\partial H^n} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n \\
&\overset{(**)}{=} \int_{\partial H^n} f_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n \\
&\overset{(***)}{=} \int_{\partial H^n} \eta_1
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir in $(*)$ den Satz von Fubini, in $(**)$ den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (zusammen mit $supp f_1$ kompakt) sowie in $(***)$ die Definition von

$$\int_{\partial H^n} \eta_1 = \int_{\partial H^n} i^* \eta_1$$

verwendet. Für $i \geq 2$ folgt analog

$$\begin{aligned}
\int_{H^n} \mathrm{d}\,\eta_i &= (-1)^{i-1} \int_{H^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= (-1)^{i-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right)}_{\substack{=0, \text{ da } supp f_i \\ \text{kompakt}}} dx_2 \cdots \hat{dx_i} \cdots dx_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ebenso ist $\int_{\partial H^n} \eta_i = \int_{\partial H^n} i^* \eta_i = 0$, da $i^*\eta_i = 0$. Letzteres folgt wegen

$$\begin{aligned}
i^*\eta_i(\frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \text{rk} &= f_i \cdot \underbrace{dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n(\frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \text{rk}}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dies beweist den Satz für $M = H^n$. Sei jetzt $(U_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von M mit Kartengebieten, M eine beliebige orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Es sei $(\tau_i)_{i \in I}$ eine dazu untergeordnete Zerlegung der Eins. Aus der Definition des Integrals einer n-Form folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}\,\eta &= \sum_{i \in I} \int_M \mathrm{d}(\tau_i \eta) \\
&= \sum_{i \in I} \int_{\varphi(U_i)} (\varphi_i^{-1})^* \,\mathrm{d}(\tau_i \eta) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i \in I} \int_{\partial(\varphi_i(U_i))} (\varphi_i^{-1})^* \tau_i \eta \\
&= \sum_{i \in I} \int_{\partial M} \tau_i \eta \\
&= \int_{\partial M} \eta
\end{aligned}$$

Wobei in $(*)$ der obige Schritt und die Natürlichkeit des Differentials verwendet wurde. Dies zeigt Satz von Stokes im allgemeinen Fall. □

Beispiel.

(1) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂U (d.h. U ist eine zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand). Wir betrachten die Flächenform

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega^2(U) \quad (= \Omega^2_{\text{kp}}(U)).$$

Diese ist exakt, denn $\omega = \mathrm{d}\,\eta$ für $\eta = x\,\mathrm{d}\,y$ (da $\mathrm{d}\,\eta = \frac{\partial x}{\partial x} dx \wedge \mathrm{d}\,y = dx \wedge \mathrm{d}\,y = \omega$). Ebenso beispielsweise auch für $\tilde{\eta} = -y\,dx$ etc. Damit ist nach dem Satz von Stokes.

$$\lambda^2(U) = \int_U \omega = \int_{\partial U} \eta.$$

Sei ∂U parametrisiert (in orientierungserhaltender Weise, d.h. so, dass U „links" liegt) durch $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Dann lässt sich $\int_{\partial U} \eta$ schreiben als

$$\lambda^2(U) = \int_{\partial U} \eta = \int_{[a,b]} \gamma_1(t)\gamma_2(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

(2) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂U (d.h. U ist eine zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand). Sei

$$\eta = \frac{1}{r^2}(x \,\mathrm{d}\, y - y\, dx) \in \Omega^1_{\mathrm{kp}}(U)$$

die Windungsform ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$). U sei entsprechend der Standardortientierung von $\mathbb{R}^2$ orientiert. Da $\mathrm{d}\,\eta = 0$ gilt, folgt aus dem Satz von Stokes, dass

$$0 = \int_U \mathrm{d}\,\eta = \int_{\partial U} \eta.$$

Sei $\gamma = \gamma_4$ parametrisiert durch $t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$, $0 \leq t < 2\pi$. Dann folgt mit $\varphi : \gamma^* = \gamma \setminus \{(R,0)\} \to (0, 2\pi) = I$ (Homöomorphismus), dass

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \eta &= \int_{\gamma^*} \frac{1}{r^2}(x \,\mathrm{d}\, y - y\, dx) \\
&= \int_I (\varphi^{-1})^* (\frac{1}{r^2}(x \,\mathrm{d}\, y - y\, dx)\, \mathrm{rk} \\
&= \int_I \frac{1}{R^2}(R\cos t R\cos t + R\sin t \cdot R\sin t)\ \mathrm{dt} \\
&= \int_I 1\ \mathrm{dt} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Wobei $\varphi^{-1} \colon t \mapsto (R\cos t, R\sin t) = (x,y)$ und es ist

$$D(\varphi^{-1})(t) = R\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
(\varphi^{-1})^*\, dx &= -R\sin t\ \mathrm{dt} \\
(\varphi^{-1})^*\, dy &= R\cos t\ \mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Korollar 3.31 *Es sei M eine n-dimensionale, orientierte, kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand und N eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ferner sei*

$$F \colon M \times [0,1] \to N$$

differenzierbar und $f_0 \coloneqq F(\cdot, 0)$, $f_1 \coloneqq F(\cdot, 1)$ (d.h. F ist eine Homotopie zwischen f_0 und f_1). Dann gilt für jede geschlossene Form $\omega \in \Omega^n(N)$, dass

$$\int_M f_0^*\omega = \int_M f_1^*\omega.$$

Beweis. Dies folgt aus dem Satz von Stokes, denn ($d\eta = 0$):

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{M\times[0,1]} F^*(\mathrm{d}\,\omega) \\
&= \int_{M\times[0,1]} d(F^*\omega) \\
&= \int_{M\times\{1\}} F^*\omega - \int_{M\times\{0\}} F^*\omega \\
&= \int_M f_1^*\omega - \int_M f_0^*\omega
\end{aligned}$$

□

Satz 3.32 (Brouwersche Fixpunktsatz) *Es sei $f\colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n$, $n \geq 1$, eine glatte Abbildung ($\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$). Dann hat f einen Fixpunkt.*

Beweis. Ohne Einschränkungen sei $n \geq 2$ (der Fall $n = 1$ folgt aus dem Zwischenwertsatz). Widerspruchsannahme: $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathbb{D}_n$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} g\colon D^n &\longrightarrow S^{n-1} \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

wobei $g(x)$ der Schnittpunkt des Strahls von $f(x)$ durch x mit S^{n-1} sein soll. Man beachte, dass diese nur durch die Annahme $f(x) \neq x \ \forall x \in \mathbb{D}^n$ wohldefiniert ist. Weiter sei

$$\begin{aligned} F\colon S^{n-1} \times [0,1] &\longrightarrow S^{n-1} \\ (x,t) &\longmapsto g(tx). \end{aligned}$$

Es ist $f_0 := F(\cdots, 0) = g(0) = \text{const.}$ und $f_1 := F(\cdots, 1) = \mathrm{Id}_{S^{n-1}}$. Es sei $\omega \in \Omega^{n-1}(S^{n-1})$ die Differentialform, die einer orientierten Orthonormalbasis von T_pS^{n-1} den Wert 1 zuordnet. Damit folgt nach Korollar 3.31, dass

$$0 = \int_{S^{n-1}} f_0^*\omega = \int_{S^{n-1}} f_1^*\omega = \int_{S^{n-1}} \omega = |S^{n-1}| \neq 0$$

Somit hat f einen Fixpunkt, wie behauptet. $\square$

Bemerkung. Die Aussage bleibt auch für lediglich stetige Abbildungen f bestehen.

3.7 Integralsätze der klassischen Vektoranalysis

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Es bestehen folgende ($C^\infty(X)$-lineare) Isomorphismen von Vektorräumen:

$i_1\colon C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \Omega^1(U), \quad u = (u_1, u_2, u_3) \longmapsto u_1 \,\mathrm{d}\, x_1 + u_2 \,\mathrm{d}\, x_2 + u_3 \,\mathrm{d}\, x_3$

$i_2\colon C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to \Omega^2(U), \quad u = (u_1, u_2, u_3) \longmapsto u_1 \,\mathrm{d}\, x_2 \wedge \mathrm{d}\, x_3 - u_2 \,\mathrm{d}\, x_1 \wedge \mathrm{d}\, x_3 + u_3 \,\mathrm{d}\, x_1 \wedge \mathrm{d}\, x_2$

$i_3\colon C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to \Omega^3(U), \quad u \longmapsto u \,\mathrm{d}\, x_1 \wedge \mathrm{d}\, x_2 \wedge \mathrm{d}\, x_3$

Die Operationen der klassichen Vektoranalysis:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \\ \operatorname{rot}(u_1, u_2, u_3) &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \\ \operatorname{div}(u_1, u_2, u_3) &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

sowie die äußere Ableitung $\Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$, $k = 0, 1, 2, 3$, entsprechen sich in folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega^0(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^3(U) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C^\infty(U) \arrow[r, "\operatorname{grad}"] \arrow[u, "="] & C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \arrow[r, "\operatorname{rot}"] \arrow[u, "\cong", "i_1"'] & C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \arrow[r, "\operatorname{div}"] \arrow[u, "\cong", "i_2"'] & C^\infty(U) \arrow[r] \arrow[u, "\cong", "i_3"'] & 0 \end{tikzcd}$$

Es ist $\mathrm{d}^2 = 0 \iff \operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$, $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$. Der Satz von Stokes (für Differentialformen) ügüberträgt sich mittels dies kommutativen Diagramms in die Integralsätze der klassischen Vektoranalysis.

Satz 3.33 *(Integralsatz von Gauß). Sei $M^3 \subseteq U$ eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mir Rand ∂M und $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div} F \, \mathrm{d}\, V = \int_{\partial M} \langle F, v \rangle \, \mathrm{d}\, A.$$

Hierbei bezeichnen $v \colon \partial M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das nach außen zeigende Einheitsnormalenfeld,

$$\mathrm{d}\, V = \mathrm{d}\, x_1 \wedge \mathrm{d}\, x_2 \wedge \mathrm{d}\, x_3$$

die (euklidische) Volumenform und $\mathrm{d}\, A = \mathrm{d}\, V(v, \cdots, \cdots)$ das (euklidische) Flächenelement.

Satz 3.34 *(Integralsatz von Stokes). Sei $M^2 \subseteq U$ eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Dann gilt:*

$$\int_M \langle \operatorname{rot} F, v \rangle \, \mathrm{d}\, A = \int_{\partial M} \langle F, T \rangle \, \mathrm{d}\, L.$$

Hierbei sind v und $\mathrm{d}\, A$ wie im Satz 3.33 und T das positiv orientierte Einheitsnormalenfeld auf ∂M der (euklidischen) Länge 1. Ferner bezeichnet $\mathrm{d}\, L$ das (euklidische) Längenelement auf ∂M, d.h. $\mathrm{d}\, L \in \Omega^1(\partial M)$ mit $\mathrm{d}\, L(T) = 1$.

4 Fourieranalysis

4.1 Fourierreihen (Fourieranalysis auf $\mathbb{T}$)

Erinnerung (an Analysis II): Für eine 2π-periodische, (Riemann-) integrierbare Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiere

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}kx} \, dx$$

als den k-ten Fourierkoeffizient, $k \in \mathbb{Z}$. Jetzt setzen wir etwas allgemeiner $\mathbb{T} := \mathbb{R}2\pi\mathbb{Z}$ und für $1 \le p \le \infty$ betrachte die Menge

$$L^p(\mathbb{T}) = \{ f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C} \text{ messbar} \mid \|f\|_{L^p(Tbb)} < \infty \},$$

wobei

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{\mathbf{1}p} & 1 \le p < \infty, \\ esssup_{x \in \mathbb{T}} |f(x)| & p = \infty. \end{cases}.$$

Bemerkung. Es ist

$$esssup_{x \in \mathbb{T}} := \inf\{ a \in \bar{\mathbb{R}} \mid \mu(\{|f| \ge a\}) = 0 \}.$$

Wie oben definieren wir $\hat{f}(k) := c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ und nennen die formale Reihe

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx} \tag{27}$$

die *Fourierreihe von f*. Dabei ist unklar, ob und in welchem Sinne die Reihe (27) konvergiert. Im Falle der Konvergenz ist nicht offensichtlich, dass die Grenzfunktion mit f übereinstimmt. Wir wissen bereits aus Analysis II

1. Für $f \in L^2(\mathbb{T})$ konvergiert (27) im quadratischen Mittel gegen f.
2. Ist f stetig und stückweise differenzierbar, so konvergiert (27) gleichmäßig gegen f.
Diese Aussagen wollen wir im folgenden verallgemeinern

Definition 4.1 Für $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ definieren wir die *Faltung* $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ durch

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Bemerkung. Nach dem Satz von Tonelli ist für fast alle $x \in \mathbb{T}$ der Integrand

$$y \longmapsto f(x-y)g(y)$$

eine Funktion in $L^1(\mathbb{T})$, und $f * g$ ist ebenfalls in $L^1(\mathbb{T})$ mit

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdots \|g\|_{L^1(\mathbb{T})},$$

siehe Lemma 4.2 unten.

Lemma 4.2 *Für alle $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in L^p(\mathbb{T})$ mit $1 \leq p \leq \infty$ ist $f * g \in L^p(\mathbb{T})$ und es gilt*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Ferner ist $\widehat{(f * g)}(k) = \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir oben bemerkt ist für fast alle $x \in \mathbb{T}$ die Funktion $y \mapsto f(x-y)g(y)$ in $L^1(\mathbb{T})$. Für jedes solche $x \in \mathbb{T}$ gilt nach der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} \cdot |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} \cdot |g(y)|\, dy \\
&\leq \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-y)| \cdot |g(y)|^p\, dy\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-y)|\, dy\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-y)| \cdot |g(y)|^p\, dy\Big)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^p(\mathbb{T})}^p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(f * g)(x)|^p\, dx \\
&\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-y)| \cdot |g(y)|^p\, dy\, dx \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}^{\mathbf{p}q} \\
&\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}^{\mathbf{p}q} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} |f(z)|\, dz}_{2\pi \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} |g(y)|^p\, dy}_{2\pi \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}^p} \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}^p
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage folgt mittels des Satzes von Fubini und der Substitutionsregel aus

$$
\begin{aligned}
(\widehat{f * g})(k) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)\, g(y)\, e^{-\mathrm{i}kx}\, dy\, dx \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)\, e^{-\mathrm{i}k(x-y)}\, dx\, g(y)\, e^{-\mathrm{i}ky}\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \cdot e^{\mathrm{i}kz}\, dz \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) \cdot e^{-\mathrm{i}ky}\, dy \\
&= \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung. Die Faltung erfüllt $f*g = g*f$, $(f*g)*h = f*(g*h)$, $f*(g+h) = f*g+f*h$ für alle $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$ (Übung).

Für $N \in \mathbb{N}_0$ sei die N-te Partialsumme der Fourierreihe von $f \in L^1(\mathbb{T})$ definiert durch

$$S_N f(x) = \sum_{|k| \leq N} \hat{f}(k) e^{\mathrm{i}kx}.$$

Definition 4.3 Für $N \in \mathbb{N}_0$ definiere die *Dirichletsche Kernfunktion* $D_N : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ durch

$$D_N(x) := \sum_{|k| \leq N} e^{\mathrm{i}kx}.$$

Lemma 4.4 *Es gilt*

$$D_N(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N} \cos(kx) = \frac{\sin((N + \mathbf{1}2)x)}{\sin(\mathbf{x}2)}.$$

Beweis. Die erste Identität ergibt sich direkt aus der Zerlegung

$$
\begin{aligned}
D_N(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{N} e^{\mathrm{i}kx} + \sum_{k=1}^{N} e^{-\mathrm{i}kx} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N} e^{\mathrm{i}kx} + e^{-\mathrm{i}kx} \\
&= 1 + 2 \sum_{k=1}^{N} \cos(kx)
\end{aligned}
$$

Die zweite Identität beweisen wir per Induktion nach N. Sei $N = 0$, dann ist $1 = \frac{\sin(\mathbf{x2})}{\sin(\mathbf{x2})}$. Die Aussage gilt also für $N = 0$. Induktionsschritt: Es ist

$$
\begin{aligned}
D_N(x) &= 1 + 2\sum_{k=1}^{N+1} \cos(kx) \\
&= \frac{\sin((N+\mathbf{12})x)}{\sin(\mathbf{x2})} + 2\cos((N+1)x) \\
&= \frac{\sin((N+\mathbf{12})x) + 2\cos((N+1)x)\sin(\mathbf{x2})}{\sin(\mathbf{x2})} \\
&= \frac{\sin((N+\mathbf{12})x) + 2(\cos((N+\mathbf{12})x)\cos(\mathbf{x2}) - \sin((N+\mathbf{12})x)\sin(\mathbf{x2})\,\mathrm{rk}\sin(\mathbf{x2})}{\sin(\mathbf{x2})} \\
&= \frac{\sin((N+\mathbf{12})x)\overbrace{(1-2\sin^2(\mathbf{x2}))}^{=\cos(x)} + \cos((N+\mathbf{12})x)\cdot\overbrace{2\cos(\mathbf{x2})\sin(\mathbf{x2})}^{=\sin(x)}}{\sin(\mathbf{x2})} \\
&= \frac{\sin((N+\mathbf{12})x)\cos(x) + \cos((N+\mathbf{12})x)\sin(x)}{\sin(\mathbf{x2})} \\
&= \frac{\sin((N+1+\mathbf{12})x)}{\sin(\mathbf{x2})}
\end{aligned}
$$

□

Lemma 4.5 *Für jede Funkion $f \in L^1(\mathbb{T})$ und alle $N \in \mathbb{N}_0$ gilt $S_N f = D_N * f$ (als Funktionen in $L^1(\mathbb{T})$).*

Beweis. Sei $e_k := e^{\mathrm{i}kx}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\hat{f}(k)e_k = f * e_k$, denn

$$f * e_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{\mathrm{i}k(x-y)} f(y)\, dy = e^{\mathrm{i}kx}\hat{f}(k).$$

Somit folgt

$$
\begin{aligned}
S_N f &= \sum_{|k|\le N} \hat{f}(k)e_k \\
&= \sum_{|k|\le N} f * e_k \\
&= f * \sum_{|k|\le N} e_k \\
&= f * D_N
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung. Im Gegensatz zum Fall $p = 2$ gilt für $f \in L^1(\mathbb{T})$ im allgemeinen nicht, dass $S_n f \to f$ in $L^1(\mathbb{T})$ für $N \to \infty$. Heuristisch folgt dies aus

$$\|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})} := \sup_{f\in L^1(\mathbb{T}), \|f\|_{L^1}=1} \|D_N * f\|_{L^1(\mathbb{T})} \approx \log N \qquad \text{Übung} \tag{28}$$

d.h. $\lim_{N\to\infty} \|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})} = \infty$. Die Existenz (mindestens) einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \lim_{N\to\infty} \|D_N * f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \infty$$

folgt aus (28) zusammen mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (vgl. Vorlesung Funktionalanalysis).

4.2 Konvergenz in $L^p(\mathbb{T})$ und der Satz von Plancharel

Im folgenden sei $X \coloneqq L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$ oder $X = \mathcal{C}(\mathbb{T})$[1]. Es bezeichne

$$\|D_N\|_{\mathcal{L}(X)} \coloneqq \sup_{f \in X, \|f\|_X = 1} \|D_N * f\|_X$$

die *Operatornorm* des linearen Operators $f \mapsto D_N * f = S_N f \colon X \to X$. Nach Lemma 4.1 (für $X = L^p(\mathbb{T})$, analog für $X = \mathcal{C}(\mathbb{T})$) gilt

$$\|D_N * f\|_X \le \|D_N\|_{L^1} \cdot \|f\|_X,$$

weshalb $\|D_N\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|D_N\|_{L^1} < \infty$ ist ($D_N \in L^1(\mathbb{T})$ gilt, da D_N sogar glatt ist).

Lemma 4.6 *Sei*

$$\sup_{N \in \mathbb{N}_0} \|D_N\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Dann gilt $S_N f \to (N \to \infty) f$ in X für alle $f \in X$.

Beweis. Sei $f \in X$. Da die trigonometrischen Polynome (d.h. Funktionen $g = \sum_{|k| \le N} c_k e^{ikx}$) dicht in X liegen, gibt es eine Folge $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von trigonometrischen Polynomen mit grad $g_j \le j$ und $g_j \to f$ in X für $j \to \infty$. Somit folgt für jedes $\varepsilon > 0$ und j hinreichend groß, dass

$$\begin{aligned}
\|f - S_j f\|_X &= \|f - g_j + g_j + S_j g_j - S_j g_j - S_j f\|_X \\
&\le \underbrace{\|f - g_j\|_X}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|g_j - \underbrace{S_j g_j}_{=g_j}\|_X}_{=0} + \underbrace{\|S_j(f - g_j)\|_X}_{\substack{\le \|D_j\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|f - g_j\|_X \\ < \|D_j\|_{\mathcal{L}(X)} \varepsilon}} \\
&\le (1 + \|D_j\|_{\mathcal{L}(X)}) \cdot \varepsilon \\
&< M \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante M, unabhängig von j. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ und $j > j(\varepsilon)$ gilt, folgt $\lim_{j \to \infty} S_j f = f$ in X. $\square$

Definition 4.7 Wir definieren $\sup_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| = \|(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}$.

Satz 4.8 (Satz von Plancharel) *Es sei $X = L^2(\mathbb{T})$. Dann gilt $\|D_N\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist für alle $f \in L^2(\mathbb{T})$*

$$\lim_{N \to \infty} S_N f = f$$

in $L^2(\mathbb{T})$. Ferner gilt

$$\|(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 \, dx = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2.$$

Beweis. Aus L^2 Orthogonalität der Funktionen $e_k = e^{ikx}$ folgt durch kurze Rechnung (vgl. Lemma 11.2 aus Analysis II), dass

$$\|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \sum_{|k| \le N} |\hat{f}(k)|^2 \ge 0 \tag{29}$$

[1] Dies ist der Banachraum der stetigen Funktionen auf X mit der Supremumsnorm.

für alle $N \in \mathbb{N}_0$. Deshalb gilt:

$$\|S_n f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{|k|\leq N} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \tag{30}$$

woraus $\|D_N\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))} \leq 1$ folgt. Für die spezielle Wahl $f = 1$ folgt in (30) sogar Gleichheit, d.h. $\|D_N\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))} = 1$. Aus Lemma 4.6 folgt, dass

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} S_N f = f \text{ in } L^2(\mathbb{T})$$

gilt. Die behauptete Identität folgt nun aus (29), wenn man zum Grenzübergang $N \to \infty$ übergeht. $\square$

Bemerkung. Die Ungleichung $\|S_n f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$ und $f \in L^2(\mathbb{T})$ heißt *Besselsche Ungleichung.*

Definition 4.9 Es sei X ein Banachraum wie oben und $h \in \mathbb{T}$. Wir definieren die *Translation von h* durch

$$\begin{aligned} \tau_h \colon X &\longrightarrow X \\ f &\longmapsto \tau_h f, \end{aligned}$$

wobei $\tau_h f(x) = f(x+h)$. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ heißt *translationsinvariant*, falls

$$\tau_h(Tf) = T(\tau_h f)$$

für jedes $h \in \mathbb{T}$ und für alle $f \in X$.

Bemerkung. Für jedes $h \in \mathbb{T}$ ist $\tau_h \in \mathcal{L}(X)$ mit Operatornorm $\|\tau_h\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$.

Satz 4.10 *Es sei $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ ein translationsinvarianter Operator. Dann gibt es eine Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$ mit $|m_k| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ so, dass*

$$Te_k = m_k e_k \textit{ für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist

$$Tf(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k \hat{f}(k) e^{\mathrm{i}kx} \textit{ in } L^2(\mathbb{T}) \tag{31}$$

und es gilt:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))} = \|(m_k)_{k\in\mathbb{Z}}\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}.$$

Umgekehrt wird für alle $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$ durch (31) ein translationsinvarianter Operator $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ definiert.

Beweis. Sei $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ translationsinvariant und $g_k = Te_k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$\tau_h g_k = T(\tau_h e_k) = T(e^{\mathrm{i}hk} e_k) = e^{\mathrm{i}hk} Te_k = e^{\mathrm{i}hk} g_k.$$

Damit ist

$$\frac{g_h(x+h) - g_k(x)}{h} = \frac{e^{\mathrm{i}hk} - 1}{h} g_k(x).$$

Nach Grenzübergang $h \longrightarrow 0$ folgt:

$$g_k'(x) = \mathrm{i}kg_k(x) \text{ für fast alle } x \in \mathbb{T}. \tag{32}$$

Da $g_k(x+h) = e^{\mathrm{i}hx}g_k(x)$ ist, folgt, dass g_k auf ganz $\mathbb{T}$ differenzierbar ist. Somit gilt (32) sogar für alle $x \in \mathbb{T}$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertporblems (32) folgt $g_k(x) = m_k e^{\mathrm{i}kx} = m_k e_k$, wie behauptet. Ferner gilt (32) und (wegen $\|e_k\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1$):

$$|m_k| = \|m_k e_k\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))}\|e_k\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|T\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dies zeigt:

$$\|(m_k)_{k\in\mathbb{Z}}\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))}.$$

Umgekehrt folgt aus Satz 4.8 zusammen mit (31), dass

$$\|Tf\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_k|^2|\hat{f}(k)|^2 \leq \|(m_k)_{k\in\mathbb{Z}}\|_{l^\infty\mathbb{Z}} \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2}_{=\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}} \tag{33}$$

und somit

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^2\mathbb{Z})} \leq \|(m_k)_{k\in\mathbb{Z}}\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}.$$

Schließlich sei $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$ und Tf durch (31) definiert. Aus (33) folgt $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ und T ist translationsinvariant, da für alle $h \in \mathbb{T}$, $f \in L^2(\mathbb{T})$.

$$\begin{aligned}
\tau_h(Tf) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k \hat{f}(k) e^{\mathrm{i}k(x+h)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k \cdot e^{\mathrm{i}kh} \hat{f}(k) e^{\mathrm{i}kx} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k \cdot \widehat{\tau_k f(k)} e^{\mathrm{i}kx}
\end{aligned}$$

□

Definition 4.11 Ein Operator T wird wie in Satz 4.10 wird *Fourier-Multiplikationsoperator* genannt. Die Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ heißt *Symbol* des Operators T. Der Satz zeigt, dass alle beschränkten, translationsinvarianten Operatoren $T\colon L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ Fourier-Multiplikationsoperatoren mit einem Symbol $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^\infty\mathbb{Z}$ sind und umgekehrt.

Beispiel. $T = \mathrm{Id}\colon L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ ist Fourier-Multiplikationsoperator mit Symbol

$$(\ldots, 1, 1, 1, \ldots).$$

$T_N\colon L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T}),\ f \longmapsto S_n f$ $(N \in \mathbb{N}_0)$ ist Fourier-Multiplikationsoperator mit Symbol

$$(\ldots, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1}_{k=-N,\ldots,N}, 0, \ldots).$$

Im folgenden betrachten wir den durch die Folge $m_k = -ß \operatorname{sgn} k$ definierten Fourier-Multiplikationsoperator $H\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$, $Hf(x) = -ß \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)\hat{f}(k)e^{ßkx}$. Wir nennen Hf *Hilbert-Transformation* von f.

Satz 4.12 *Es sei $1 \leq p < \infty$. Angenommen, es gibt eine Konstante $M > 0$ mit*

$$\|Hf\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq M\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

für alle $f \in L^p(\mathbb{T}) \cap L^2(\mathbb{T})$. Dann existiert eine Konstante $M' > 0$ mit

$$\|S_N f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq M' \cdot \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

für alle $f \in L^p(\mathbb{T})$ und alle $N \in \mathbb{N}_0$. (D.h. $\|D_N\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} \leq M'$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$. Folglich konvergiert dann $S_N f \to f$ für $N \to \infty$ in $L^p(\mathbb{T})$ für alle $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Beweis. Es sei $f \in L^2(\mathbb{T})$ und $Tf = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ßkx}$. Dann gilt

$$Tf = \frac{1}{2}(f + ßHf) + \frac{1}{2}\hat{f}(0).$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

für eine Konstante $C > 0$ und alle $f \in L^p(\mathbb{T}) \cap L^2(\mathbb{T})$. Für $N \in \mathbb{N}_0$ ist

$$S_N f = e^{-ßNx} T(e^{ßNx} f) - e^{ß(N+1)x} T(e^{-ß(N+1)x} f).$$

Damit existiert eine Konstante $M' > 0$ mit

$$\|S_N f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq M'\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

für alle $f \in L^p(\mathbb{T}) \cap L^2(\mathbb{T})$. Da $L^p(\mathbb{T}) \cap L^2(\mathbb{T})$ dicht in $L^p(\mathbb{T})$ liegt, folgt die Ungleichung für alle $f \in L^p(\mathbb{T})$. $\square$

Bemerkung. Man kann zeigen, dass für $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ Hf dargestellt werden kann als Integral

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |y| \leq \pi} \frac{f(x-y)}{\tan(fracy2)}\, dy \qquad x \in \mathbb{T}$$

Dabei ist die Kernfunktion

$$K(x) := \frac{1}{\tan(\frac{x}{2})} = \frac{2}{x} + O(1)$$

nicht in $L^1(\mathbb{T})$ enthalten, weshalb $\|Hf\|_{L^p(\mathbb{T})}$ nicht direkt mittels Lemma 4.2 durch $\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ abgeschätzt werden kann. Mit Hilfe der Theorie der singulären Integraloperatoren kann jedoch $H \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))$ für $1 < p < \infty$ beschränkt werden.

4.3 Fejér-Mittel

Wir beweisen Konvergenzsresultate für die Fejér-Mittel

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} S_n f = \sum_{k=-N}^{N} (1 - \frac{|k|}{N+1} \operatorname{rk} \hat{f}(k) e^{ßkx}$$

der Partialsummen der Fourierreihe von $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Bemerkung. Konvergenz der $S_N f$ (bezüglich irgendeiner Norm) impliziert Konvergenz der $\sigma_N f$. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Proposition 4.13 *Es sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $N \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\sigma_N f = K_N * f \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbb{T}$$

wobei

$$K_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} (1 - \frac{|k|}{N+1} \,\mathrm{rk}\, e^{\text{ß}kx} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2} \cdot x \,\mathrm{rk}}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2$$

den N-ten Fejér-Kern bezeichnet. Außerdem ist $K_N \geq 0$ und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x)\, dx = 1 \qquad\qquad \lim_{N\to\infty} \sup_{\delta < x < 2\pi - \delta} |K_N(x)| = 0.$$

Beweis. Aus Lemma 4.5 folgt $\sigma_N f(x) = K_N * f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{T}$ mit

$$K_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} (1 - \frac{|k|}{N+1} \,\mathrm{rk}\, e^{\text{ß}kx}.$$

Mit $(\sin \frac{x}{2})^2 = -\frac{1}{4} e^{\text{ß}x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{\text{ß}x}$ folgt

$$\begin{aligned}(\sin \frac{x}{2})^2 \sum_{k=-N}^{N} (1 - \frac{|k|}{N+1} e^{\text{ß}kx} \,\mathrm{rk} &= \frac{1}{N+1} (-\frac{1}{2} e^{\text{ß}(N+1)x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{\text{ß}(N+1)x} \,\mathrm{rk} \\ &= \frac{1}{N+1} (\sin(\frac{N+1}{2} \cdot x \,\mathrm{rk}\,\mathrm{rk}^2\end{aligned}$$

Damit ist auch $K_n \geq 0$ gezeigt. Wegen $\int_0^{2\pi} e^{\text{ß}kx}\, dx = 0$ für $k \neq 0$ folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x)\, dx = 1.$$

Schließlich ist

$$|K_N(x)| \leq \frac{1}{N+1} \frac{1}{(\sin \frac{\delta}{2})^2} \qquad \forall \delta \leq x \leq 2\pi - \delta.$$

Hieraus folgt die letzte Aussage. □

Definition 4.14 Eine Folge von Funktionen $k_N \in L^1(\mathbb{T})$, $N \in \mathbb{N}_0$ heißt *approximative Identität*, falls gilt:

(i) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_N(x)\, dx = 1$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$

(ii) $\sup_{N \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |k_N(x)|\, dx < \infty$

(iii) $\lim_{N\to\infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} |k_N(x)|\, dx = 0$ für alle $0 < \delta < \pi$.

Bemerkung. Proposition 4.13 zeigt, dass die Folge K_N der Fejér-Kerne eine approximative Identität ist.

Lemma 4.15 *Sei $(k_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ eine approximative Identität. Dann gilt für alle $f \in X$, wobei $X = L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, oder $X = \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, dass*

$$\lim_{N\to\infty} k_N * f = f \qquad \text{in } X.$$

Beweis. Es sei $M := \sup_{N\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k_N(x)|\,dx$. Betrachte zunächst den Fall $X = \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ für x, y mit $|x - y| < \delta$. Wegen (iii) existiert $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$2\|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})}\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_N(y)|\,dy \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $N \geq N_0$. Wegen (i) gilt

$$f(x) - (k_N * f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_N(y)(f(x) - f(x-y))\,dy.$$

Für $N \geq N_0$ folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}
&|f(x) - k_N * f(x)|\\
&\quad\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |k_N(x)| \cdot \underbrace{|f(x) - f(x-y)|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2\pi}}\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_N(y)| \cdot \underbrace{|f(x) - f(x-y)|}_{\leq 2\|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})}}\,dy\\
&\quad\leq \frac{\varepsilon}{2M}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k_N(y)|\,dy + 2\|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})}\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_N(y)|\,dy\\
&\quad\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. Sei jetzt $X = L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$. Aus Lemma 4.2 folgt

$$\|k_N * f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq M\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

für eine Konstante M (unabhängig von N) und alle f. Die Folge der Operatoren

$$k_N * : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$$

ist demnach gleichmäßig beschränkt. Außerdem gilt $k_N * f \to f$ für $N \to \infty$ für alle $f \in L^p(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Damit folgt die Behauptung aus folgendem Lemma. □

Lemma 4.16 *Es sei $A_k \in \mathcal{L}(X)$ eine Folge beschränkter Operatoren auf dem Banachraum X mit*
(i) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|A_k\|_{\mathcal{L}(x)} < \infty$
(ii) $\lim_{k\to\infty} A_k x = A_k$ *für alle $x \in D$ und $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge, erfüllt ist.*
Dann existiert ein beschränkter Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} A_k x = Ax$$

für alle $x \in X$.

Beweis. Übung. □

Satz 4.17 (Konvergenz der Fejér-Mittel) *Es sei $X = L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$ oder $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Dann gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N f = f \qquad \textit{in } X$$

für alle $f \in X$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Proposition 4.13 und Lemma 4.15. □

Korollar 4.18 (Eindeutigkeitssatz) *Es sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Falls $\hat{f}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, so ist $f = 0$ fast überall.*

Beweis. Ist $\hat{f}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so folgt $\sigma_N f = 0$ fvr alle $N \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt nach Satz 4.17, dass $f = \lim_{N\to\infty} \sigma_N f = 0$ in $L^1(\mathbb{T})$, wie behauptet. □

Korollar 4.19 (Approximationssaz von Weierstraß) *Jede Funktion $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ kann durch trigonometrische Polynome approximiert werden.*

Beweis. Nach Satz 4.17 gilt $\sigma_N f \to f$ für $N \to \infty$, in $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, woraus die Behauptung folgt, denn die $\sigma_N f$ sind trigonometrische Polynome. □

Korollar 4.20 (Satz von Riemann-Lebesgue) *Für alle $f \in L^1(\mathbb{T})$ gilt*

$$\lim_{|k|\to\infty} |\hat{f}(k)| = 0.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\sigma_N f \to f$ für $N \to \infty$ in $L^1(\mathbb{T})$ existiert $N \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\|f - \sigma_N f\|_{L^1(\mathbb{T})} < \varepsilon.$$

Außerdem ist $\hat{f}(k) = (\widehat{f - \sigma_N f})(k)$ für $|k| \geq N + 1$. Somit folgt

$$|\hat{f}(k)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |\hat{f}(k)| \leq \|f - \sigma_N f\|_{L^1(\mathbb{T})} < \varepsilon$$

für alle $|k| \geq N + 1$. Da ε beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

4.4 Fourieranalysis auf $\mathbb{R}^n$

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. In Analogie zu Fourierreihen definieren wir die Fouriertransformierte $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ durch

$$\hat{f}(\xi) := \mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ß\xi\cdot x}\, dx,$$

wobei $\xi \cdot x = \sum_{j=1}^{n} \xi_i x_i$ ist. $\hat{f}(\xi)$ ist wohlfefiniert, da $|f(x)e^{-ß\xi\cdot x}| = |f(x)|$ integrierbar ist. Wir fassen einige Eigenschaften der Fouriertransformierten zusammen.

Lemma 4.21 *(i) $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n)$ ist ein beschränkter linearer Operator (hierbei ist $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \mid f \text{ beschränkt}\}$, versehen mit der Supremumsnorm).*

(ii) Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar in x_j, $j = 1, \dots, n$ mit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f) = ß\xi_j \hat{f}.$$

(iii) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für ein $1 \leq j \leq n$, so ist $\hat{f}$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\partial_{\xi_j} \hat{f} = -ß\widehat{x_j f}.$$

(iv) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $(\tau_y f)(x) = f(x + y)$, $y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mathcal{F}(\tau_y f) = e^{ßy\xi} \mathcal{F}(f).$$

(v) *Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

mit $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$.

(vi) *Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $(\rho_\varepsilon f)(x) := f(\varepsilon x)$, $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

$$\mathcal{F}(\rho_\varepsilon f)(\xi) = \varepsilon^{-n}\hat{f}(\frac{y}{\varepsilon})$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Beweis.

(i) Es gilt

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \le \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)e^{-\text{ß}\xi x}|\,dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Somit ist die Funktion $\mathcal{F}(f)$ beschränkt. Sei $g(x,y) = f(x)e^{\text{ß}\xi x}$. Dann ist g stetig in ξ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und nach Voraussetzung messbar in x für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Ferner ist $|g(x,\xi)| = |f(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $|f|$ ist integrierbar. Damit folgt aus Lemma 2.29 (Stetigkeitslemma), dass $\hat{f}$ stetig ist.

(ii) folgt ähnlich unter Verwendung von Lemma 2.30 (Differentiationslemma)

(iii) folgt ähnlich unter Verwendung von Lemma 2.30 (Differentiationslemma)

(iv) folgt aus dem Transformationssatz

(v) Mittels des Satzes von Fubini und des Transformationssatzes (analog zum Beweis von Lemma 4.2) $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Damit existiert $\mathcal{F}(f * g)$. Die zweite Aussage erhält man durch Nachrechnen.

(vi) folgt aus dem Transformationssatz.

□

Ähnlich wie bei Fourierreihen besteht folgender Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit von f und dem Abfallverhalten von $\hat{f}$. Nach Lemma 4.21 (i) und (ii) folgt für stetig differenzierbares $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $1 \le j \le n$, dass

$$(1 + |\xi|) \cdot |\hat{f}(\xi)| \le C \Longleftrightarrow |\hat{f}(\xi)| \le \frac{C}{1 + |\xi|}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Allgemein: Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ m-fach stetig differenzierbar mit $\partial_x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| \le m$ ($\alpha \in \mathbb{N}_0^k$ ist ein Multiindex), so folgt

$$|\hat{f}(\xi)| \le \frac{C}{(1 + |\xi|)^m}.$$

Definition 4.22 Es sei $S(\mathbb{R}^n)$ der *Schwarz-Raum* der schnell fallenden, glatten Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ so, dass für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $N \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante $C_{\alpha,N} > 0$ existiert mit

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \le \frac{C_{\alpha,N}}{(1 + |x|)^N}.$$

Zu $m \in \mathbb{N}_0$ definieren die Norm

$$\|f\|_{m,S} := \sup_{|\alpha|+|\beta|\le m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)|.$$

Achtung: Der Schwarz-Raum ist nicht vollständig bezüglich dieser Norm! Seien $f_k, f \in S(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$f_k \to (k \to \infty) f \text{ in } S(\mathbb{R}^n) :\Longleftrightarrow \|f - f_k\|_{m,S} \to (k \to \infty) 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Bemerkung. Es gilt $\mathbb{C}^\infty_{kp}(\mathbb{R}^n) \subsetneqq S(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R}^n)$

Beispiel. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Dann ist $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Eine Rechnung ergibt

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.$$

Bemerkung. Für alle $f \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|\hat{f}\|_{m,S} \leq C_m \|f\|_{m+n+1,S} < \infty.$$

für eine Konstante C_m (unabhängig von f). Insbesondere gilt $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$, falls $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Es sei $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Eine formale Rechnung zeigt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ßy\xi} \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}} \,\mathrm{d}\,\xi &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ß\xi x}\, dx e^{ßy\xi} \,\mathrm{d}\,\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}}^n \int_{\mathbb{R}}^n f(x) e^{ß(y-x)\xi - \frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}} \,\mathrm{d}\,\xi\, dx
\end{aligned}$$

mit der Substitution $\eta \coloneqq \varepsilon\xi$ und $z \coloneqq \varepsilon^{-1}(x-y)$ folgt

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y + \varepsilon z) \qquad \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ßz\eta} e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} \,\mathrm{d}\,\eta}_{\mathcal{F}(e^{-\frac{|\eta|^2}{2}})(z)=(2\pi)^{fracn2}e^{-\frac{|z|^2}{2}}} \qquad dz$$

Nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ folgt

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ßy\xi} \,\mathrm{d}\,\xi = f(y) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{|z|^2}{2}}\, dz}_{(2\pi)^{\frac{2}{n}}} = f(y).$$

Die formale Rechnung motiviert den folgenden Satz

Satz 4.23 *Sei $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Hierbei ist $\mathcal{F}^{-1}\colon S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ßx\cdot\xi} \,\mathrm{d}\,\xi.$$

Insbesondere ist $\mathcal{F}\colon S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis. Übung (rechtfertige alle Zwischenschritte der obigen Rechnung mittels des Satzes von Fubini und des Satzes von der majorisierten Konvergenz). $\square$

Beispiel. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad \Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \tag{34}$$

auf $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ mit der Anfangsbedingung

$$u(0, x) = f(x) \tag{35}$$

wobei wir $f \in S(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Die Fouriertransformation von (34) (in x) liefert nach Lemma 4.21 die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + |xi|^2 \hat{u} = 0.$$

Mit der Anfangsbedingung $\hat{U}(0, \xi) = \hat{f}(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$ besitzt die eindeutige Lösung

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(\xi).$$

Es ist $\hat{u} \in S(\mathbb{R}^n)$ und folglich wegen Satz 4.23 und Lemma 4.21 die eindeutige Lösung $u \in S(\mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems (34), (35) gegeben durch

$$u(x, t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{G}_t * f(x),$$

wobei $G_t(\xi) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Die Funktion $\hat{G}_t \in S(\mathbb{R}^n)$ heißt Wärmeleitungskern. Sie erfüllt $(*)$ für $t > 0$ und $\lim_{t \searrow 0} \hat{G}_t(x) = \delta(x)$ (in geeignetem Sinne...siehe Vorlesung partielle Differentialgleichungen).

Satz 4.24 (Satz von Plancharel) *Für alle $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, \mathrm{d}\,\xi.$$

Insbesondere ist

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Ferner lässt sich $\mathcal{F}$ zu einem (bis auf den Faktor $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ isometrischen) Isomorphismus $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen.

Beweis. Seien $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Unter Anwendung des Satzes von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, \mathrm{d}\,\xi &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) e^{ß\xi x}\, \mathrm{d}\,\xi\, \mathrm{rk}}\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt Satz 4.23 angewandt. Mit $f = g$ folgt die zweite Identität. Damit ist insbesondere

$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$

beschränkt (bezüglich der L^2-Norm). Da $S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt, lässt sich $\mathcal{F}$ wie behauptet fortsetzen. $\square$

Literatur

[Ba] H. Bauer, *Maß- und Integrationstheorie.* Zweite Auflage. de Gruyter Lehrbuch. Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[Gr] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 249. Springer-Verlag, New York, 2008.

[Jä] K. Jänich, *Vektoranalysis.* Fünfte Auflage. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2005.

[Kö] K. Königsberger, *Analysis 2.* Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 1993.