

Stochastik I

Blatt 9

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Eine fairer Würfel werde unendlich oft geworfen. Wie hoch ist dabei die Wahrscheinlichkeit, dass unendlich oft bei zwei aufeinander folgenden Würfeln eine 6 geworfen wird?

Hinweis: Beachten Sie, dass die Folge von Ereignissen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$A_n := \{ \text{"n-ter Wurf ist 6"} \text{ und } \text{"n+1-ter Wurf ist 6"} \}$$

nicht unabhängig ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Wir definieren für zwei reellwertige Zufallsvariablen X, Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$d(X, Y) := \mathbb{E}[|X - Y| \wedge 1]$$

(Hierbei bezeichnet $a \wedge b$ das Minimum von a und b). Zeigen Sie, dass eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ genau dann in Wahrscheinlichkeit gegen eine reellwertige Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ konvergiert, wenn

$$d(X_n, X) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit den Grenzwert schon bis auf Modifikation eindeutig festlegt.

Aufgabe 4 (3+3=6 Punkte)

- (a) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, reellwertiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[X_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli: Genügt $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dem starken Gesetz der großen Zahlen, so gilt für alle $\epsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\left\{ \frac{1}{n} |X_n| \geq \epsilon \right\} \right) < \infty.$$

- (b) Sei die Folge $(X_n)_{n \geq 2}$ so, dass

$$\mathbb{P} \left(\left\{ X_n = \sqrt{N} \right\} \right) = \mathbb{P} \left(\left\{ X_n = -\sqrt{N} \right\} \right) = \frac{1}{2n \log(n)}$$

und

$$\mathbb{P}(\{X_n = 0\}) = 1 - \frac{1}{n \log(n)}.$$

Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n \geq 2}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, nicht jedoch dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt.