Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2018

18. April 2018

Stochastik I

2. Übung

Aufgabe 1 **(5 Punkte)** Sei $\Omega \neq \emptyset$. Ein nicht-leeres Mengensystem M auf Ω heißt Präring, wenn

$$A, B \in M \Rightarrow A \backslash B \text{ ist endliche Vereinigung disjunkter Mengen aus } M.$$

Zeigen Sie:

(i) Das Mengensystem

$$J := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^D\}$$

ist ein Präring.

(ii) Sei M ein nicht-leeres Mengensystem auf einer Menge Ω. Zudem sei

$$\mathcal{R}(M) := \{A \in \Omega : A \text{ ist endliche Vereinigung disjunkter Mengen aus } M\}.$$

Zeigen Sie, dass $R(M)$ genau dann ein Ring ist, wenn M ein Präring ist.

Aufgabe 2 **(6 Punkte)** Es sei μ_0 ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$. Wir betrachten die folgenden Aussagen:

(a) μ_0 ist ein Prämaß.

(b) *Stetigkeit von unten*: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_0(A_n) = \mu_0(A).$$

(c) *Stetigkeit von oben*: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \supset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mu_0(A_1) < \infty$ und $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu_0(A_n) = \mu_0(A).$$

(d) *Stetigkeit von oben in $\emptyset$*: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \supset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mu_0(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_0(A_n) = 0.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Leftrightarrow (d).$$

Zeigen Sie weiter, dass unter der zusätzlichen Bedingung $\mu_0(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$ auch $(c) \Rightarrow (b)$ gilt.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)** Zeigen Sie, dass ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ existiert mit

(a) $P(\{0\}) = \frac{1}{4} = P(\{2\})$, $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$

bzw. mit

(b) $P((a, b]) = b - a$ für alle $0 \leq a \leq b \leq 1$

und geben Sie jeweils die zugehörige Verteilungsfunktion an.