Prof. Dr. H. Zähle
M.Sc. C. Gärtner

Universität des Saarlandes, SS 2015

23. Juli 2015

Stochastik I

14. Übung

Aufgabe 53 (4 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \dots$ identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $k \in \mathbb{N}$. Verifizieren Sie sie folgenden Aussagen:

(i) Im Fall von $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ konvergiert $\frac{1}{n} \min_{1 \le i \le n} |X_i|$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0. Daraus kann man zudem schließen, dass auch $\mathbb{P}$-fast sichere Konvergenz gegen 0 gilt.

(ii) Sind die $X_1, X_2, \dots$ unabhängig, dann gilt $\mathbb{E}[|X_1|^k] < \infty$ genau dann, wenn $\frac{1}{n^{1/k}} X_n$ $\mathbb{P}$-fast sicher gegen 0 konvergiert.

Hinweis für (ii): Verwenden Sie Lemma 3.11.6.

Aufgabe 54 (4 Punkte)

Es seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}[X_i = i^\lambda] = \mathbb{P}[X_i = -i^\lambda] = \frac{1}{2}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Ferner sei $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine Bedingung für λ an, unter der

(i) das starke Gesetz der großen Zahlen für (X_i) erfüllt ist, d. h. $\overline{X}_n \longrightarrow \mathbb{E}[X_1]$ $\mathbb{P}$-f.s.

(ii) das schwache Gesetz der großen Zahlen für (X_i) *nicht* erfüllt ist, d. h. $\overline{X}_n$ *nicht* in Wahrscheinlichkeit gegen $\mathbb{E}[X_1]$ konvergiert.

Hinweis für (i): Schauen Sie sich den Beweis des starken Gesetzes der großen Zahlen (Satz 3.11.7) an, um eine hinreichende Bedingung für $\overline{X}_n \longrightarrow \mathbb{E}[X_1]$ $\mathbb{P}$-f.s. zu finden.

Aufgabe 55 (4 Punkte)

Es sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] = 1$. Ferner seien $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$, und Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie:

(i) $\sqrt{n} \frac{S_n}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \xrightarrow{\mathsf{d}} Z$.

(ii) $\frac{S_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{\mathsf{d}} Z$.

Aufgabe 56 (4 Punkte)

Eine faire Münze werde 10 000-Mal unabhängig voneinander geworfen.

(i) Approximieren Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Anzahl von ‚Kopf' um höchstens 50 von 5 000 unterscheidet.

(ii) Approximieren Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl von ‚Kopf' mindestens 5 100 beträgt.

Hilfsmittel: Anlage 5.