Prof. Dr. H. Zähle
M.Sc. C. Gärtner

Stochastik I

8. Übung

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Seien $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ σ-endliche Maße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$. Zeigen Sie, dass aus $\nu_i \ll \mu_i$ für $i = 1, 2$ stets $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$ folgt.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Die Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x,y) := \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{\{0<y<x<1\}}(x,y) - \frac{1}{y^2}\mathbb{1}_{\{0<x<y<1\}}(x,y)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)\,\ell(dx)\,\ell(dy) = -1$ und $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)\,\ell(dy)\,\ell(dx) = 1$.

(ii) Die Funktion f verletzt die Voraussetzungen des Satzes von Fubini (so dass Aussage (i) dem Satz von Fubini *nicht* widerspricht).

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass die Funktion $h^+ := \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{1}_{\{f^+\in[n,n+1)\}}$ nicht $\ell^{(2)}$-integrierbar ist. Warum?

Aufgabe 31 (2 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A, B, C \in \mathcal{F}$ Ereignisse.

(i) Beschreiben Sie die mengentheoretische Verknüpfung $(A\cap B)^{\mathsf{c}} \cup (A\cap C)^{\mathsf{c}}$ der Ereignisse A, B, C verbal.

(ii) Finden Sie das mengentheoretische Äquivalent zu: „Wenn A eintritt, treten weder B noch C ein“.

Aufgabe 32 (6 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $(A_n) \subset \mathcal{F}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\mathbb{P}[\liminf_n A_n] \le \liminf_n \mathbb{P}[A_n]$.

(ii) $\mathbb{P}[\limsup_n A_n] \ge \limsup_n \mathbb{P}[A_n]$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < \infty$ impliziert $\mathbb{P}[\limsup_n A_n] = 0$.