Es bleibt zu zeigen, dass die angegebenen Bedingungen hinreichend sind. Es ist leicht zu sehen, dass jede für jede der angegebenen Mengensysteme $\mathcal{X}_a$ gilt $\sigma(\mathcal{X}_a) = \mathfrak{B}^1$. Da Vereinigungsbildung, Komplementbildung und Durchschnittsbildung unter der f^{-1} erhalten bleiben, folgt der Satz. $\square$

Oft will man Funktionen zulassen, die nach $\mathbb{R}_{erw}$ abbilden. In diesem Fall muss die Definition der Messbarkeit der Funktion leicht modifiziert werden. Wir nutzen dazu die eben gemachten Aussagen und schreiben die naheliegende Verallgemeinerung.

Definition 12.4.7 (Messbarkeit von Funktionen nach $\mathbb{R}_{erw}$)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum, $f : \Omega \to \mathbb{R}_{erw}$ heißt messbar, wenn für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\left\{x \in \Omega \,\middle|\, f(x) > a\right\}$$

messbar ist.

Bemerkung 12.4.8 (Kriterien für $\mathbb{R}_{erw}$-wertige Funktionen)
Man überzeugt sich leicht, dass eine Funktion nach $\mathbb{R}_{erw}$ genau dann messbar ist, wenn $f^{-1}(\infty)$ und $f^{-1}(-\infty)$ messbar sind und das Urbild jeder Teilmenge der Form (a, ∞) messbar ist.

Satz 12.4.9 (Messbarkeit der Betragsfunktion)
Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbar, so ist auch $|f|$ im gleichen Sinne messbar. Eine entsprechende Aussage gilt für Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}_{erw}$.

Beweis. Die Menge

$$\left\{x \in \Omega \,\middle|\, |f(x)| > a\right\} = \left\{x \in \Omega \,\middle|\, f(x) > a\right\} \cup \left\{x \in \Omega \,\middle|\, f(x) < -a\right\}$$

ist als Vereinigung zweier messbarer Mengen messbar. Damit haben wir die erste Aussage gezeigt, auch die zweite wird auf ähnliche Weise bewiesen. $\square$

Satz 12.4.10 (Messbarkeit von Suprema/Infima)
Ist $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbarer Funktionen, so sind auch die Funktionen g, h mit

$$g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \;\; h(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x)$$

im gleichen Sinne messbar. Gleiches gilt natürlich auch für das Infimum bzw. den Limesinferior.

Entsprechende Aussagen gelten für messbare Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}_{erw}$.

Beweis. Wir untersuchen die Menge

$$\left\{x \in \Omega \;\middle|\; g(x) > a\right\}$$

auf Messbarkeit. Natürlich ist $g(x) > a \iff \exists n \in \mathbb{N} : f_n(x) > a$, also ist

$$\left\{x \in \Omega \;\middle|\; g(x) > a\right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in \Omega \;\middle|\; f_n(x) > a\right\}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die letztgenannte Menge messbar und damit auch die abzählbare Vereinigung.

Für die zweite Aussage setzen wir

$$g_n(x) = \sup_{m > n} f_m(x)$$

und

$$h(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n(x).$$

Dann folgt die Aussage aus der Aussage über die Messbarkeit des Supremums. □

Eine Spezialisierung der bisher gezeigten Aussagen ergibt das folgende Korollar.

Korollar 12.4.11 (Messbarkeit-Kriterien)
Es seien $f, g, \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}^1$-messbare Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Funktionen im gleichen Sinne messbar.

1. $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$
2. $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$
3. $\lim_{n \to \infty} f_n$, *falls dieser Grenzwert existiert.*

Satz 12.4.12 (Hintereinanderausführung)
Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}^1$-messbar und ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so ist h definiert durch

$$h(x) = F(f(x), g(x))$$

$\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$*-messbar.*

Beweis. Natürlich reicht es zu zeigen, dass das Urbild $U = h^{-1}(V)$ einer offener Menge $V \subset \mathbb{R}$ in $\mathfrak{A}$ liegt. F ist stetig, daher ist nach Satz 4.2.6 $F^{-1}(V)$ offen in $\mathbb{R}^2$ und demzufolge als abzählbare Vereinigung offener achsenparalleler Intervalle $(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k)$, $k \in \mathbb{N}$ darstellbar. (Dazu betrachte man einfach die Menge

$Q = \mathbb{Q}^2 \cap F^{-1}(V)$, welche abzählbar ist und betrachte die Menge der Intervalle $\left\{(\mathbf{a},\mathbf{b}) \,\middle|\, \mathbf{a},\mathbf{b} \in Q,\ \mathbf{a} < \mathbf{b},\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) \subset F^{-1}(V)\right\}$, welche demzufolge ebenfalls abzählbar ist und $F^{-1}(V)$ überdeckt, denn ist $\mathbf{x} \in F^{-1}(V)$, so gibt es, wegen der Offenheit von $F^{-1}(V)$ ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset F^{-1}(V)$. Natürlich gibt es in $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ Punkte $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^2$ mit $\mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}$ und $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \subset F^{-1}(V)$.)

Nun ist für jedes solche Intervall $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \subset \mathbb{R}^2$ sind die Mengen

$$\left\{x \in \Omega \,\middle|\, a_1 < f(x) < b_1\right\} \text{ und } \left\{x \in \Omega \,\middle|\, a_2 < g(x) < b_2\right\} \in \mathfrak{A}.$$

Insbesondere ist

$$\left\{x \in \Omega \,\middle|\, a_1 < f(x) < b_1\right\} \cap \left\{x \in \Omega \,\middle|\, a_2 < g(x) < b_2\right\} \in \mathfrak{A}.$$

Da die abzählbare Vereinigung dieser Mengen wieder in $\mathfrak{A}$ liegt, ist der Satz gezeigt. □

Korollar 12.4.13 (Summen messbarer Funktionen)
Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}^1$ messbar, so gilt dies auch für $f + g$, fg.

12.5 Treppenfunktionen und ihr Integral

Wir beginnen mit der Wiederholung eines Begriffes, der schon in der Integration reeller Funktionen eine Rolle spielte.

Definition 12.5.1 (Treppenfunktion)
Es sei Ω eine Menge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Nimmt f nur endlich viele Werte an, so sprechen wir von einer Treppenfunktion.

Man vergleiche diese Definition mit der aus Definition **??**. In Teilmengen höher dimensionaler Räume wird natürlich die Menge der Unstetigkeitsstellen einer Treppenfunktion kompliziert aussehen und es reicht nicht die Punkte einer Zerlegung getrennt zu betrachten. Daher jetzt die neue etwas allgemeinere Definition. Spezielle Treppenfunktionen sind solche, die nur die Werte $0, 1$ annehmen.

Definition 12.5.2 (Charakteristische Funkton)
Die charakteristische Funktion *einer Menge $X \subset \Omega$ ist die Funktion*

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in X \\ 0, & \text{falls } x \notin X \end{cases}$$

Lemma 12.5.3 (Messbarkeit reellwertiger Treppenfunktionen)
Ist $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum, so ist eine Treppenfunktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}^1$-messbar, wenn für die Werte $c_1, \ldots, c_r$ von f gilt

$$A_k = \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; f(x) = c_k \right\} \in \mathfrak{A}.$$

Beweis. Klar! □

Satz 12.5.4 (Approximation durch Treppenfunktionen)
Zu jeder Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt es eine Folge $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, so dass

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x)$$

als Grenzwert von Treppenfunktionen geschrieben werden. Ist f messbar, so können die Funktionen g_n messbar gewählt werden. Für $f \geq 0$ kann die Folge monoton steigend gewählt werden.

Beweis. Für $f \geq 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, (n-1)2^n$ schreiben wir

$$X_{i,n} = \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}$$

und

$$Y_n = \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; |f(x)| > n \right\}.$$

Wir setzen

$$g_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{X_{i,n}} + n\chi_{Y_n}.$$

Dann gilt für $x \in \Omega$ offenbar $g_n(x) \to f(x)$. Für messbares f sind die Mengen $X_{i,n}$ bzw. Y_n messbar, also ist g_n messbar.

Hat f wechselnde Vorzeichen, so setzen wir $f = f^+ - f^-$ (mit der Bezeichnung von Korollar 12.4.11). Den ersten Teil des Argumentes wenden wir dann auf die beiden Funktionen f^+, f^- an und erhalten die allgemeine Aussage. □

Definition 12.5.5 (Integrierbarkeit von Treppenfunktionen)
Ist $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : Z \to \mathbb{R}$ eine $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}^1$-messbare Treppenfunktion mit Werten $c_1, \ldots, c_k$, wobei $Z \in \mathfrak{A}$ sei. Ist $X_i = f^{-1}(c_i) \cap Z$ und für alle $c_i \neq 0$ $\mu(X_i) < \infty$, so nennen wir f über Z integrierbar *und setzen das* Integral *als*

$$\int_Z f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(X_i).$$