Prof. Dr. Christian Bender
Philip Oberacker

Universität des Saarlandes, Sommersemester 2014
22. April 2014

Stochastik I

Blatt 1

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Das Mengensystem $\mathcal{F}$ aller endlichen Vereinigungen disjunkter halboffener Intervalle $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}^D$ ist ein Ring auf $\mathbb{R}^D$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Maßes μ:

(a) *endliche Additivität*: Für disjunkte A und B gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(b)

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Unter welcher Voraussetzung kann man (b) umstellen zu

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)?$$

(c) *Monotonie*: Ist $A \subseteq B$, so folgt

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

(d) *Sub-σ-Additivität*:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei Ω eine nicht-leere Menge, $\emptyset \neq \Omega' \subset \Omega$ und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Zeigen Sie ohne Verwendung von Aufgabe 4:
Das Mengensystem

$$\mathcal{A}|_{\Omega'} := \{A \cap \Omega' : \ A \in \mathcal{A}\}$$

ist eine σ-Algebra auf Ω'.

Aufgabe 4 (4+2=6 Punkte)

Es seien Ω_1 und Ω_2 nicht-leere Mengen und $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra auf Ω_2. Weiter sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung. Beweisen Sie:

(a) Das Mengensystem

$$\sigma(f) := \{f^{-1}(A_2) : \ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

ist eine σ-Algebra auf Ω_1.

(b) Zeigen Sie Aufgabe 3 unter Verwendung von Aufgabe 4(a).