Prof. Dr. Christian Bender
Philip Oberacker Universität des Saarlandes, Sommersemester 2014

06. Mai 2014

Stochastik I

Blatt 3

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Mit $\mathcal{N}$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von μ-Nullmengen, d.h.

$$\mathcal{N} := \{F \subset \Omega : \ \exists G \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(G) = 0 \text{ und } F \subset G\}.$$

Wir definieren die *Vervollständigung* $\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$ von $\mathcal{A}$ durch

$$\mathcal{A}^{\mathcal{N}} := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}).$$

Zeigen Sie:

$$\mathcal{A}^{\mathcal{N}} = \{A \cup N : \ A \in \mathcal{A}, \ N \in \mathcal{N}\}.$$

Nun setzen wir μ auf $\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$ fort durch

$$\tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$$

für $A \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{N}$. Zeigen Sie, dass die Fortsetzung wohldefiniert ist und dass $(\Omega, \mathcal{A}^{\mathcal{N}}, \tilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum ist.
Hinweis: Ein Maßraum heißt *vollständig*, wenn alle Teilmengen von Nullmengen messbar sind.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Für jede natürliche Zahl $r \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir

$$S_r := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}),$$

wobei in der Summe über alle r-elementigen Teilmengen $\{i_1, \ldots, i_r\}$ von $\{1, \ldots, n\}$ summiert wird. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_r.$$

Aufgabe 3 (4+1=5 Punkte)

(a) Der Fachschaftsrat Mathematik lädt ein zur Informationsveranstaltung für die n Studierenden des ersten (Fach-)Semesters ($n \in \mathbb{N}$). Dazu wurden n Briefe, die eine persönliche Anrede enthalten (die Briefe lassen sich also den Studierenden eindeutig zuordnen), ausgedruckt. Weiter wurden n adressierte Briefumschläge vorbereitet. Die n Briefe werden nun zufällig in die n Briefumschläge gesteckt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief im richtigen Umschlag landet? Dabei dürfen Sie annehmen, dass alle Studierenden verschiedene Namen haben.

(b) Wie verhält sich die in Teil (a) berechnete Wahrscheinlichkeit im Grenzwert $n \to \infty$?

Aufgabe 4 (2+1+1=4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-messbar, wenn die Abbildungen $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := \max(-f, 0)$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-messbar sind.

(b) Ist f $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-messbar, so ist auch $|f|$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-messbar.

(c) Die Umkehrung in (b) gilt nicht.