Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2018
25. April 2018

Stochastik I

3. Übung

Aufgabe 1 **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass ein Dynkin-System $\mathcal{D}$ genau dann eine σ-Algebra ist, falls für je zwei Mengen aus $\mathcal{D}$ auch ihr Durchschnitt in $\mathcal{D}$ liegt.

Aufgabe 2 **(3 Punkte)** Chevalier de Méré wunderte sich einmal Pascal gegenüber, dass er beim Werfen mit 3 Würfeln die Augensumme 11 häufiger beobachtet hatte als die Augensumme 12, obwohl doch 11 durch die Kombinationen 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3 und die Augensumme 12 durch genauso viele Kombinationen (welche?) erzeugt würden. Kann man die Beobachtung des Chevalier de Méré als „vom Zufall bedingt“ ansehen oder steckt in seiner Argumentation ein Fehler? Führen Sie zur Lösung dieses Problems einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum ein und berechnen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

(i) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Für jede natürliche Zahl $r \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir

$$S_r := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}),$$

wobei die Summe über alle r-elementigen Teilmengen $\{i_1, \ldots, i_r\}$ von $\{1, \ldots, n\}$ summiert wird. Zeigen Sie

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_r.$$

(ii) Der Fachschaftsrat der Mathematik lädt n Studierende zu einer Informationsveranstaltung ein. Dazu werden n Briefe, die eine persönliche Anrede enthalten (die Briefe lassen sich also eindeutig den Studierenden zuordnen), ausgedruckt. Weiter wurden n adressierte Briefumschläge vorbereitet. Die n Briefe werden nun rein zufällig in die n Briefumschläge gesteckt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief im richtigen Umschlag landet?

(iii) Wie verhält sich die in Teil (ii) berechnete Wahrscheinlichekit im Grenzwert $n \to \infty$?

Aufgabe 4 **(6 Punkte)** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Mit $\mathcal{N}$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von μ-Nullmengen, d.h.

$$\mathcal{N} := \{F \subset \Omega : \exists G \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(G) = 0 \text{ und } F \subset G\}$$

Wir definieren die *Vervollständigung* $\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$ von $\mathcal{A}$ durch

$$\mathcal{A}^{\mathcal{N}} := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}).$$

Zeigen Sie:

$$\mathcal{A}^{\mathcal{N}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}.$$

Nun setzen wir μ auf $\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$ fort durch

$$\tilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$$

für $A \in \mathcal{A}$ und $N \in \mathcal{N}$. Zeigen Sie, dass die Fortsetzung wohldefiniert ist und dass $(\Omega, \mathcal{A}^{\mathcal{N}}, \tilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum ist.

Hinweis: Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn alle Teilmengen von μ-Nullmengen in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthalten sind.