1 Grundlagen der Maßtheorie

In diesem Kapitel führen wir die Mengensysteme ein, die eine systematische Betrachtung von Ereignissen und zufälligen Beobachtungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie erlauben. Ferner sollen Maße, insbesondere Wahrscheinlichkeitsmaße, auf solchen Mengensystemen konstruiert werden. Schließlich werden wir Zufallsvariablen als messbare Abbildungen definieren.

1.1 Mengensysteme

Im Folgenden ist stets $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ (Potenzmenge von Ω) eine Familie von Teilmengen. Später wird die Menge Ω als Raum von Elementarereignissen interpretiert werden und $\mathcal{A}$ als ein System von beobachtbaren Ereignissen. Wir wollen in diesem Abschnitt Mengensysteme, die abgeschlossen sind unter einfachen mengentheoretischen Verknüpfungen, mit Namen versehen und einfache Beziehungen zwischen solchen Systemen herstellen.

Definition 1.1. *Das Mengensystem $\mathcal{A}$ heißt*

– $\cap$*-stabil (sprich: schnittstabil) oder ein* π***-System****, falls für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ gilt, dass auch $A \cap B \in \mathcal{A}$,*

– σ-$\cap$*-stabil (sigma-schnittstabil), falls für je abzählbar unendlich viele Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt, dass auch $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$,*

– $\cup$*-stabil (vereinigungsstabil), falls für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ gilt, dass auch $A \cup B \in \mathcal{A}$,*

– σ-$\cup$*-stabil (sigma-vereinigungsstabil), falls für je abzählbar unendlich viele Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt, dass auch $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$,*

– $\setminus$*-stabil (differenzmengenstabil), falls für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ gilt, dass auch $A \setminus B \in \mathcal{A}$,*

– *komplementstabil, falls mit jeder Menge $A \in \mathcal{A}$ auch $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ gilt.*

Definition 1.2 (σ-Algebra). *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ heißt **σ-Algebra**, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind.*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) $\mathcal{A}$ ist komplementstabil,

(iii) $\mathcal{A}$ ist σ-$\cup$-stabil.

σ-Algebren sind die natürlichen Mengensysteme für zufällige Ereignisse, denn wie wir sehen werden, können wir diesen Ereignissen in konsistenter Weise Wahrscheinlichkeiten zuordnen.

Satz 1.3. *Ist $\mathcal{A}$ komplementstabil, so gelten die beiden folgenden Äquivalenzen.*

$$\mathcal{A} \text{ ist } \cap\text{-stabil} \iff \mathcal{A} \text{ ist } \cup\text{-stabil},$$

$$\mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-}\cap\text{-stabil} \iff \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-}\cup\text{-stabil}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus den de Morgan'schen Regeln (Erinnerung: $(\bigcup A_i)^c = \bigcap A_i^c$). Ist beispielsweise $\mathcal{A}$ σ-$\cap$-stabil und sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, so ist auch

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}.$$

Also ist $\mathcal{A}$ auch σ-$\cup$-stabil. Die anderen Fälle folgen analog. □

Satz 1.4. *Ist $\mathcal{A}$ $\setminus$-stabil, so gelten die folgenden Aussagen.*

(i) $\mathcal{A}$ ist $\cap$-stabil.

(ii) Falls $\mathcal{A}$ σ-$\cup$-stabil ist, dann ist $\mathcal{A}$ auch σ-$\cap$-stabil.

(iii) Jede abzählbare (beziehungsweise endliche) Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$ lässt sich als abzählbare (beziehungsweise endliche), disjunkte Vereinigung von Mengen in $\mathcal{A}$ schreiben.

Beweis. (i) Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Dann ist auch $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$.

(ii) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=2}^{\infty} (A_1 \cap A_n) = \bigcap_{n=2}^{\infty} A_1 \setminus (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \in \mathcal{A}.$$

(iii) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Dann ist $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ als abzählbare, disjunkte Vereinigung in $\mathcal{A}$ darstellbar durch

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \uplus (A_2 \setminus A_1) \uplus ((A_3 \setminus A_1) \setminus A_2) \uplus (((A_4 \setminus A_1) \setminus A_2) \setminus A_3) \uplus \ldots \quad \square$$

Bemerkung 1.5. Manchmal bezeichnen wir, wie im obigen Beweis, die Vereinigung paarweise disjunkter Mengen mit dem Symbol $\biguplus$. Dies soll lediglich der optischen Verdeutlichung dienen und ist keine neue Verknüpfung. $\diamond$

Definition 1.6. *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ heißt **Algebra**, falls gilt:*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) $\mathcal{A}$ ist $\setminus$-stabil,

(iii) $\mathcal{A}$ ist $\cup$-stabil.

Offenbar ist in einer Algebra stets $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$ enthalten. Diese Eigenschaft ist im Allgemeinen jedoch schwächer als (i) in Definition 1.6.

Satz 1.7. *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ ist genau dann eine Algebra, wenn es folgende drei Eigenschaften hat:*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) $\mathcal{A}$ ist komplementstabil,

(iii) $\mathcal{A}$ ist $\cap$-stabil.

Beweis. Übung! $\square$

Definition 1.8. *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ heißt **Ring**, falls gilt:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) $\mathcal{A}$ ist $\setminus$-stabil,

(iii) $\mathcal{A}$ ist $\cup$-stabil.

*Ein Ring heißt **σ-Ring**, falls er σ-$\cup$-stabil ist.*

Definition 1.9. *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ heißt **Semiring** (oder **Halbring**), falls gilt:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ ist $B \setminus A$ endliche Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{A}$,

(iii) $\mathcal{A}$ ist $\cap$-stabil.

Definition 1.10. *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ heißt* ***Dynkin-System*** *(oder* ***λ-System****), falls gilt:*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ *mit* $A \subset B$ *ist* $B \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) für je abzählbar viele, paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *gilt* $\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Beispiele 1.11. (i) Ist Ω eine beliebige nichtleere Menge, so sind $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ die trivialen Beispiele für Algebren, σ-Algebren und Dynkin-Systeme. Hingegen sind $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$ und $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ die trivialen Beispiele für Semiringe, Ringe und σ-Ringe.

(ii) Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann ist $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ist abzählbar}\}$ ein σ-Ring.

(iii) $\mathcal{A} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \le b\}$ ist ein Semiring über $\Omega = \mathbb{R}$ (aber kein Ring).

(iv) Die Menge endlicher Vereinigungen von beschränkten Intervallen ist ein Ring über $\Omega = \mathbb{R}$ (aber keine Algebra).

(v) Die Menge endlicher Vereinigungen beliebiger (auch unbeschränkter) Intervalle ist eine Algebra über $\Omega = \mathbb{R}$ (aber keine σ-Algebra).

(vi) Sei E eine endliche, nichtleere Menge und $\Omega := E^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in E. Für $\omega_1, \ldots, \omega_n \in E$ sei

$$[\omega_1, \ldots, \omega_n] := \{\omega' \in \Omega : \omega'_i = \omega_i \text{ für jedes } i = 1, \ldots, n\}$$

die Menge aller Folgen, die mit den Werten $\omega_1, \ldots, \omega_n$ beginnen. Sei $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$\mathcal{A}_n := \{[\omega_1, \ldots, \omega_n] : \omega_1, \ldots, \omega_n \in E\}. \tag{1.1}$$

Dann ist $\mathcal{A} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ ein Semiring, aber kein Ring (falls $\#E > 1$).

(vii) Sei Ω eine beliebige nichtleere Menge. Dann ist

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}$$

eine Algebra. Ist $\#\Omega = \infty$, so ist $\mathcal{A}$ jedoch keine σ-Algebra.

(viii) Sei Ω eine beliebige nichtleere Menge. Dann ist

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra.

(ix) Jede σ-Algebra ist auch ein Dynkin-System.

(x) Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\big\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ ein Dynkin-System, aber keine Algebra. ◇

Satz 1.12 (Inklusionen zwischen Mengensystemen).

(i) Jede σ-Algebra ist ein Dynkin-System, eine Algebra und ein σ-Ring.

(ii) Jeder σ-Ring ist ein Ring, jeder Ring ein Semiring.

(iii) Jede Algebra ist auch ein Ring. Eine Algebra auf einer endlichen Menge Ω ist auch eine σ-Algebra.

Beweis. (i) Das ist klar.

(ii) Sei $\mathcal{A}$ ein Ring. Nach Satz 1.4 ist $\mathcal{A}$ schnittstabil und damit ein Semiring.

(iii) Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. Dann ist $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$, also ist $\mathcal{A}$ ein Ring. Ist zudem Ω endlich, so ist $\mathcal{A}$ endlich und damit jede abzählbare Vereinigung in $\mathcal{A}$ schon eine endliche Vereinigung. □

Definition 1.13 (liminf und limsup). *Es seien $A_1, A_2, \ldots$ Teilmengen von Ω. Dann heißen*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Limes inferior *beziehungsweise* ***Limes superior*** *der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Bemerkung 1.14. (i) Es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \big\{\omega \in \Omega : \#\{n \in \mathbb{N} : \omega \notin A_n\} < \infty\big\},$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \big\{\omega \in \Omega : \#\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\} = \infty\big\}.$$

Der Limes inferior ist also das Ereignis, dass *schließlich alle* der A_n eintreten, der Limes superior hingegen das Ereignis, dass unendlich viele der A_n eintreten. Insbesondere ist $A_* := \liminf_{n\to\infty} A_n \subset A^* := \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(ii) Bezeichnen wir mit

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A, \end{cases} \tag{1.2}$$

die **Indikatorfunktion** auf der Menge A, so gilt

$$\mathbb{1}_{A_*} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}, \qquad \mathbb{1}_{A^*} = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}.$$

(iii) Ist $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ eine σ-Algebra und $A_n \in \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist $A_* \in \mathcal{A}$ und $A^* \in \mathcal{A}$. ◇

Beweis. Übung! □

Satz 1.15 (Schnitt von Mengensystemen). *Ist I eine beliebige Indexmenge und $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra für jedes $i \in I$, so ist*

$$\mathcal{A}_I := \{A \subset \Omega : \; A \in \mathcal{A}_i \quad \textit{für jedes} \;\; i \in I\} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

eine σ-Algebra. Dies gilt analog für: Ringe, σ-Ringe, Algebren und Dynkin-Systeme; nicht aber für Semiringe.

Beweis. Wir führen den Beweis hier nur für σ-Algebren durch. Wir prüfen für $\mathcal{A}$ die Punkte (i)–(iii) aus Definition 1.2.

(i) Für jedes $i \in I$ ist $\Omega \in \mathcal{A}_i$. Also ist $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $A \in \mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$. Also ist auch $A^c \in \mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$. Mithin ist $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Dann ist $A_n \in \mathcal{A}_i$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $i \in I$. Also ist auch $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$ und damit $A \in \mathcal{A}$.

Gegenbeispiel für Semiringe: Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$. Dann sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ Semiringe, aber $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}\}$ ist keiner. □

Satz 1.16 (Erzeugte σ-Algebra). *Sei $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$. Dann existiert eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$:*

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subset 2^{\Omega} \;\; \text{ist } \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{A} \supset \mathcal{E}}} \mathcal{A}.$$

*$\sigma(\mathcal{E})$ heißt die von $\mathcal{E}$ **erzeugte σ-Algebra**. $\mathcal{E}$ heißt **Erzeuger** von $\sigma(\mathcal{E})$. Analog wird das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System $\delta(\mathcal{E})$ definiert.*

Beweis. $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ ist eine σ-Algebra mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Also ist der Schnitt nicht leer. Nach Satz 1.15 ist $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra, und dies ist offenbar die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Für Dynkin-Systeme geht der Beweis genauso. □

Bemerkung 1.17. Es gelten die folgenden einfachen Aussagen.

(i) $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$.

(ii) Gilt $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$, so ist $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$.

(iii) $\mathcal{A}$ ist genau dann σ-Algebra, wenn $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Die analogen Aussagen gelten für Dynkin-Systeme. Ferner ist stets $\delta(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.◇

Satz 1.18 (Schnittstabiles Dynkin-System). *Ist $\mathcal{D} \subset 2^{\Omega}$ ein Dynkin-System, so gilt*

$$\mathcal{D} \text{ ist } \cap\text{-stabil} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra.}$$

Beweis. „$\Longleftarrow$" Dies ist klar.

„$\Longrightarrow$" Wir prüfen die Eigenschaften (i)–(iii) aus Definition 1.2.

(i) Offensichtlich ist $\Omega \in \mathcal{D}$.

(ii) (Komplementstabilität) Sei $A \in \mathcal{D}$. Da $\Omega \in \mathcal{D}$ gilt, und nach Eigenschaft (ii) des Dynkin-Systems, ist $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{D}$.

(iii) (σ-$\cup$-Stabilität) Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Nach Voraussetzung ist $A \cap B \in \mathcal{D}$, und es gilt trivialerweise $A \cap B \subset A$. Also ist $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{D}$. Mithin ist $\mathcal{D}$ $\setminus$-stabil. Seien nun $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$. Nach Satz 1.4(iii) existieren paarweise disjunkte Mengen $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{D}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \biguplus_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}$. □

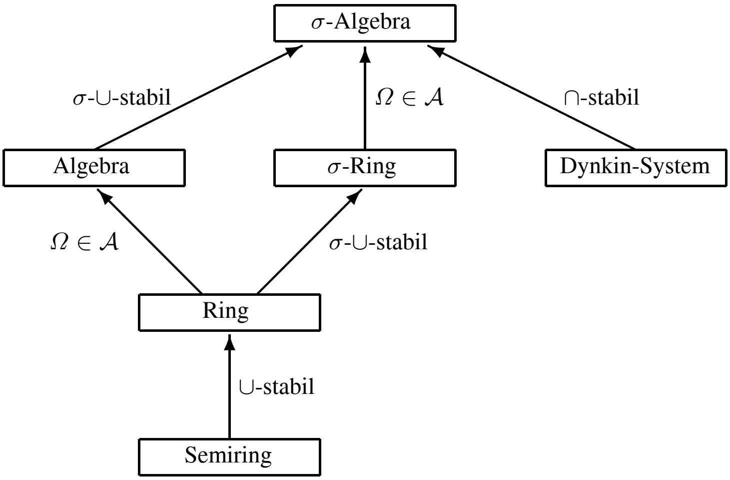

Abb. 1.1. Zusammenhang zwischen den Mengensystemen $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$.

Satz 1.19 (Dynkin'scher π–λ–Satz). *Sei $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem. Dann gilt*

$$\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}).$$

Beweis. „$\supset$" Dies ist klar nach Bemerkung 1.17.

„$\subset$" Zu zeigen ist: $\delta(\mathcal{E})$ ist eine σ-Algebra. Nach Satz 1.18 reicht es zu zeigen, dass $\delta(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil ist. Für $B \in \delta(\mathcal{E})$ sei

$$\mathcal{D}_B := \{A \in \delta(\mathcal{E}) : A \cap B \in \delta(\mathcal{E})\}.$$

Für die Schnittstabilität von $\delta(\mathcal{E})$ reicht es zu zeigen, dass

$$\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_B \quad \text{für jedes } \ B \in \delta(\mathcal{E}). \tag{1.3}$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{D}_E$ für jedes $E \in \delta(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist, indem wir (i)–(iii) aus Definition 1.10) prüfen:

(i) Offenbar ist $\Omega \cap E = E \in \delta(\mathcal{E})$, also ist $\Omega \in \mathcal{D}_E$.

(ii) Für $A, B \in \mathcal{D}_E$ mit $A \subset B$ ist $(B \setminus A) \cap E = (B \cap E) \setminus (A \cap E) \in \delta(\mathcal{E})$.

(iii) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}_E$ paarweise disjunkt. Dann ist

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap E = \biguplus_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E) \in \delta(\mathcal{E}).$$

Nach Voraussetzung ist für $A \in \mathcal{E}$ auch $A \cap E \in \mathcal{E}$, also ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$, falls $E \in \mathcal{E}$ gilt. Nach Bemerkung 1.17(ii) ist daher auch $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E$ für $E \in \mathcal{E}$. Für $B \in \delta(\mathcal{E})$ und $E \in \mathcal{E}$ ist also $B \cap E \in \delta(\mathcal{E})$. Mithin gilt $E \in \mathcal{D}_B$ für jedes $B \in \delta(\mathcal{E})$, also $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_B$ für jedes $B \in \delta(\mathcal{E})$, und damit gilt (1.3). $\square$

Von besonderer Bedeutung sind σ-Algebren, die von Topologien erzeugt werden. Hier wiederum spielt natürlich der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ die prominenteste Rolle, aber wir wollen auch den (unendlichdimensionalen) Raum $C([0,1])$ der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ im Blick haben. Auf diesem Raum wird durch die Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ eine Topologie erzeugt. Zur Erinnerung bringen wir hier das Axiomensystem der Topologie.

Definition 1.20 (Topologie). *Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Ein Mengensystem $\tau \subset \Omega$ heißt* ***Topologie*** *auf Ω, falls folgende drei Eigenschaften gelten.*

(i) $\emptyset, \Omega \in \tau$.

(ii) Sind $A, B \in \tau$, so ist auch $A \cap B \in \tau$.

(iii) Ist $\mathcal{F} \subset \tau$ eine beliebige Familie, so ist auch $\left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A\right) \in \tau$.

Das Paar (Ω, τ) heißt dann ***topologischer Raum****. Die Mengen $A \in \tau$ heißen* ***offen****, die Mengen $A \subset \Omega$ mit $A^c \in \tau$ heißen* ***abgeschlossen****.*

Anders als bei σ-Algebren sind bei Topologien nur endliche Schnitte, jedoch auch überabzählbare Vereinigungen erlaubt. Ist d eine Metrik auf Ω, und bezeichnet

$$B_r(x) = \{y \in \Omega : \ d(x,y) < r\}$$

die offene Kugel um $x \in \Omega$ mit Radius $r > 0$, so wird eine Topologie erzeugt durch

$$\tau = \Big\{ \bigcup_{(x,r)\in F} B_r(x) : F \subset \Omega \times (0,\infty) \Big\}.$$

Dies ist das gewöhnliche System offener Mengen, das man in den meisten Analysisbüchern findet.

Definition 1.21 (Borel'sche σ-Algebra). *Sei (Ω, τ) ein topologischer Raum. Die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra*

$$\mathcal{B}(\Omega) := \mathcal{B}(\Omega, \tau) := \sigma(\tau)$$

*heißt **Borel'sche σ-Algebra** auf Ω. Die Elemente $A \in \mathcal{B}(\Omega, \tau)$ heißen **Borel'sche Mengen** oder **Borel-messbare Mengen**.*

Bemerkung 1.22. Wir sind meistens an $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ interessiert, wobei wir auf $\mathbb{R}^n$ den euklidischen Abstand annehmen:

$$d(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,.$$

(i) Es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die keine Borel'schen Mengen sind. Diese sind kompliziert herzustellen, wie beispielsweise die **Vitali-Mengen**, die man in Analysisbüchern findet (siehe etwa [7]). Wir wollen hier auf diesen Aspekt nicht näher eingehen, sondern lediglich die - mathematisch unpräzise - Feststellung treffen, dass jede Menge, die man sich konstruktiv herstellen kann, auch Borel'sch ist.

(ii) Jede abgeschlossene Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, denn es ist $C^c \in \tau$, also ist $C = (C^c)^c \in \sigma(\tau)$. Speziell ist $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist keine Topologie. Sei nämlich $V \subset \mathbb{R}^n$, $V \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Wäre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eine Topologie, so wären beliebige Vereinigungen Borel'scher Mengen wieder Borel'sch, also auch $V = \bigcup_{x\in V}\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. ◇

Das Mengensystem der offenen Mengen, das die Borel'sche σ-Algebra erzeugt, ist in vielen Fällen unhandlich groß. Wir wollen daher andere Mengensysteme als Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ identifizieren, mit denen wir in der Praxis besser arbeiten können. Hierzu wollen wir einerseits Mengen von einfacher Struktur, Quader etwa, betrachten, andererseits aber auch die Größe des Systems einschränken, indem wir abzählbare Mengensysteme betrachten. Wir führen folgende Notationen ein. Mit $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir die Menge der rationalen Zahlen, mit $\mathbb{Q}^+$ die Menge der strikt positiven rationalen Zahlen. Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$a < b, \quad \text{falls } a_i < b_i \quad \text{für jedes } i = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Wir definieren für $a < b$ den offenen **Quader** als das kartesische Produkt

$$(a,b) := \bigtimes_{i=1}^{n} (a_i, b_i) := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \tag{1.5}$$

und analog $[a,b]$, $(a,b]$ und $[a,b)$. Ferner schreiben wir $(-\infty,b) := \times_{i=1}^{n}(-\infty,b_i)$ und definieren analog $(-\infty,b]$ und so fort. Wir führen die folgenden Mengensysteme ein:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &:= \{A \subset \mathbb{R}^n :\ A \text{ ist offen}\}, & \mathcal{E}_2 &:= \{A \subset \mathbb{R}^n :\ A \text{ ist abgeschlossen}\},\\
\mathcal{E}_3 &:= \{A \subset \mathbb{R}^n :\ A \text{ ist kompakt}\}, & \mathcal{E}_4 &:= \{B_r(x) :\ x \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q}^+\},\\
\mathcal{E}_5 &:= \{(a,b) :\ a,b \in \mathbb{Q}^n,\ a<b\}, & \mathcal{E}_6 &:= \{[a,b) :\ a,b \in \mathbb{Q}^n,\ a<b\},\\
\mathcal{E}_7 &:= \{(a,b] :\ a,b \in \mathbb{Q}^n,\ a<b\}, & \mathcal{E}_8 &:= \{[a,b] :\ a,b \in \mathbb{Q}^n,\ a<b\},\\
\mathcal{E}_9 &:= \{(-\infty,b) :\ b \in \mathbb{Q}^n\}, & \mathcal{E}_{10} &:= \{(-\infty,b] :\ b \in \mathbb{Q}^n\},\\
\mathcal{E}_{11} &:= \{(a,\infty) :\ a \in \mathbb{Q}^n\}, & \mathcal{E}_{12} &:= \{[a,\infty) :\ a \in \mathbb{Q}^n\}.
\end{aligned}$$

Satz 1.23. *Die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wird von jedem der Mengensysteme $\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_{12}$ erzeugt: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E}_i)$ für jedes $i = 1,\dots,12$.*

Beweis. Wir zeigen nur exemplarisch ein paar der Identitäten.

(1) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E}_1)$ gilt per Definition.

(2) Sei $A \in \mathcal{E}_1$. Dann ist $A^c \in \mathcal{E}_2$, also $A = (A^c)^c \in \sigma(\mathcal{E}_2)$. Daher gilt $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$ und dann (wegen Bemerkung 1.17) auch $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$. Analog folgt aber $\sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ und damit die Gleichheit.

(3) Jede kompakte Menge ist abgeschlossen. Also gilt $\sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$. Sei nun $A \in \mathcal{E}_2$. Dann sind die Mengen $A_K := A \cap [-K,K]^n$, $K \in \mathbb{N}$, kompakt, also ist die abzählbare Vereinigung $A = \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K$ in $\sigma(\mathcal{E}_3)$. Es gilt also $\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_3)$ und damit $\sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3)$.

(4) Offenbar ist $\mathcal{E}_4 \subset \mathcal{E}_1$, also $\sigma(\mathcal{E}_4) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$. Sei nun $A \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $x \in A$ sei $R(x) = \min(1, \sup\{r > 0 :\ B_r(x) \subset A\})$. Da A offen ist, folgt $R(x) > 0$. Sei $r(x) \in (R(x)/2, R(x)) \cap \mathbb{Q}$. Für jedes $y \in A$ und $x \in (B_{R(y)/3}(y)) \cap \mathbb{Q}^n$ ist nun $R(x) \geq R(y) - \|x-y\|_2 > \frac{2}{3}R(y)$, also $r(x) > \frac{1}{3}R(y)$, also $y \in B_{r(x)}(x)$. Also ist $A = \bigcup_{x \in A \cap \mathbb{Q}^n} B_{r(x)}(x)$ eine abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{E}_4$ und damit in $\sigma(\mathcal{E}_4)$. Es gilt also auch $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_4)$.

(5–12) Ähnliche Ausschöpfungsargumente wie in (4) funktionieren auch für die Quader. In (4) können statt der offenen Kugeln $B_r(x)$ offene Quader genommen werden. So folgt die Gleichheit mit $\sigma(\mathcal{E}_5)$. Man bemerke beispielsweise, dass

$$\bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigtimes_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{1}{k}, b_i\right) \in \sigma(\mathcal{E}_5).$$

Die anderen Inklusionen $\mathcal{E}_i \subset \sigma(\mathcal{E}_j)$ zeigt man analog. □

Bemerkung 1.24. Jedes der Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_5, \dots, \mathcal{E}_{12}$ (nicht aber $\mathcal{E}_4$) ist schnittstabil, mithin ist die Borel'sche σ-Algebra jeweils gleich dem erzeugten

Dynkin-System: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \delta(\mathcal{E}_i)$ für $i = 1, 2, 3, 5, \dots, 12$. Die Mengensysteme $\mathcal{E}_4, \dots, \mathcal{E}_{12}$ sind zudem abzählbar. Dies ist eine Eigenschaft, die wir an späterer Stelle wieder benötigen werden. $\diamond$

Definition 1.25 (Spur eines Mengensystems). *Es sei $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ ein beliebiges System von Teilmengen von Ω und $A \in 2^{\Omega} \setminus \{\emptyset\}$. Das Mengensystem*

$$\mathcal{A}\big|_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{A}\} \subset 2^A \tag{1.6}$$

*heißt **Spur** von $\mathcal{A}$ auf A, oder **Einschränkung** von $\mathcal{A}$ auf A.*

Satz 1.26. *Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, oder eines der Mengensysteme aus den Definitionen 1.6 – 1.10 auf Ω, so ist $\mathcal{A}\big|_A$ ein Mengensystem vom selben Typ, allerdings auf A statt Ω.*

Beweis. Übung! $\square$

Übung 1.1.1. Sei $\mathcal{A}$ ein Semiring. Man zeige: Jede abzählbare (beziehungsweise endliche) Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$ lässt sich als abzählbare (beziehungsweise endliche), *disjunkte* Vereinigung von Mengen in $\mathcal{A}$ schreiben. ♣

Übung 1.1.2. Man zeige durch ein Gegenbeispiel, dass im Allgemeinen die Vereinigung $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ zweier σ-Algebren keine σ-Algebra ist. ♣

Übung 1.1.3. Seien (Ω_1, d_1) und (Ω_2, d_2) metrische Räume, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine beliebige Abbildung und $U_f = \big\{x \in \Omega_1 : f \text{ ist unstetig in } x\big\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen. Man zeige: $U_f \in \mathcal{B}(\Omega_1)$.

Hinweis: Man zeige zunächst, dass für $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ die Menge

$$U_f^{\delta,\varepsilon} := \big\{x \in \Omega_1 : \text{ es gibt } y, z \in B_\varepsilon(x) \text{ mit } d_2(f(y), f(z)) > \delta\big\}$$

(wobei $B_\varepsilon(x) = \{y \in \Omega_1 : d_1(x, y) < \varepsilon\}$) offen ist und konstruiere dann U_f aus solchen Mengen. ♣

Übung 1.1.4. Sei Ω eine überabzählbare Menge und $\mathcal{A} = \sigma(\{\omega\} : \omega \in \Omega)$. Zeige:

$$\mathcal{A} = \big\{A \subset \Omega : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\big\}.$$ ♣

Übung 1.1.5. Sei $\mathcal{A}$ ein Ring auf der Menge Ω. Man zeige: $\mathcal{A}$ erfüllt die Axiome eines kommutativen Rings (im Sinne der Algebra) mit „$\cap$“ als Multiplikation und „$\triangle$“ als Addition. ♣

1.2 Mengenfunktionen

Definition 1.27. *Sei $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion. μ heißt*

(i) ***monoton****, falls für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt, dass $\mu(A) \leq \mu(B)$,*

(ii) ***additiv****, falls für je endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ gilt, dass $\mu\left(\biguplus\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$,*

(iii) ***σ-additiv****, falls für je abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots$ aus $\mathcal{A}$ mit $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ gilt, dass $\mu\left(\biguplus\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$,*

(iv) ***subadditiv****, falls für je endlich viele Mengen $A, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ gilt, dass $\mu(A) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$,*

(v) ***σ-subadditiv****, falls für je abzählbar viele $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt, dass $\mu(A) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.*

Definition 1.28. *Sei $\mathcal{A}$ ein Semiring und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. μ heißt*

- ***Inhalt****, falls μ additiv ist,*
- ***Prämaß****, falls μ σ-additiv ist,*
- ***Maß****, falls μ ein Prämaß ist und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra,*
- ***Wahrscheinlichkeitsmaß*** *(kurz* ***W-Maß****), falls μ ein Maß ist und $\mu(\Omega) = 1$.*

Definition 1.29. *Sei $\mathcal{A}$ ein Semiring. Ein Inhalt μ auf $\mathcal{A}$ heißt*

(i) ***endlich****, falls $\mu(A) < \infty$ für jedes $A \in \mathcal{A}$,*

(ii) ***σ-endlich****, falls es Mengen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gibt mit $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ und $\mu(\Omega_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Beispiel 1.30 (Inhalte, Maße). (i) Sei $\omega \in \Omega$ und $\delta_\omega(A) = \mathbb{1}_A(\omega)$ (siehe (1.2)). Dann ist δ_ω ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf jeder σ-Algebra $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ und heißt **Dirac-Maß** im Punkt ω, oder **Einheitsmasse**.

(ii) Sei Ω eine endliche, nichtleere Menge. Durch

$$\mu(A) := \frac{\#A}{\#\Omega} \quad \text{für } A \subset \Omega,$$

wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ definiert. μ heißt **Gleichverteilung** oder **uniforme Verteilung** auf Ω. Wir führen hierfür das Symbol $\mathcal{U}_{\Omega} := \mu$ ein. Das so definierte Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{U}_{\Omega})$ wird auch **Laplace-Raum** genannt.

(iii) Sei Ω abzählbar unendlich und

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : \#A < \infty \text{ oder } \#A^c < \infty\}.$$

Dann ist $\mathcal{A}$ eine Algebra. Die durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ \infty, & \text{falls } A^c \text{ endlich}, \end{cases}$$

auf $\mathcal{A}$ definierte Mengenfunktion ist ein Inhalt, aber kein Prämaß, denn es gilt $\mu\left(\bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}\right) = \mu(\Omega) = \infty$, aber $\sum_{\omega\in\Omega} \mu(\{\omega\}) = 0$.

(iv) Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen (Prämaßen, Inhalten) und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen Zahlen. Dann ist auch $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$ ein Maß (Prämaß, Inhalt).

(v) Sei Ω eine (höchstens) abzählbare, nichtleere Menge und $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Ferner seien $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ nichtnegative Zahlen. Dann wird durch $\mu(A) := \sum_{\omega\in A} p_\omega$ für jedes $A \subset \Omega$, ein σ-endliches Maß auf 2^{Ω} definiert. Wir nennen $p = (p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ die **Gewichtsfunktion** von μ.

(vi) Ist in (v) speziell $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$, so ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Wir interpretieren dann p_ω als Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses ω und nennen $p = (p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ auch einen **Wahrscheinlichkeitsvektor**.

(vii) Ist in (v) speziell $p_\omega = 1$ für jedes $\omega \in \Omega$, so heißt μ das **Zählmaß** auf Ω. Ist Ω endlich, so ist auch μ endlich.

(viii) Sei $\mathcal{A}$ der Ring endlicher Vereinigungen von Intervallen $(a, b] \subset \mathbb{R}$. Für $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < b_n$ und $A = \biguplus_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$ setzen wir

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

μ ist ein σ-endlicher Inhalt auf $\mathcal{A}$ (sogar ein Prämaß), denn es ist $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n] = \mathbb{R}$ und $\mu((-n, n]) = 2n < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(ix) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig. Analog zu (viii) setze

$$\mu_f(A) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} f(x)\, dx.$$

μ_f ist ein σ-endlicher Inhalt auf $\mathcal{A}$ (sogar ein Prämaß). Die Funktion f heißt **Dichte** und spielt hier eine ähnliche Rolle wie die Gewichtsfunktion p in (v). $\diamond$

Lemma 1.31 (Eigenschaften von Inhalten). *Sei $\mathcal{A}$ ein Semiring und μ ein Inhalt auf $\mathcal{A}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) Ist $\mathcal{A}$ ein Ring, so ist $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$.

(ii) μ ist monoton. Ist $\mathcal{A}$ ein Ring, so gilt genauer $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$.

(iii) μ ist subadditiv. Ist μ sogar σ-additiv, so ist μ auch σ-subadditiv.

(iv) Ist $\mathcal{A}$ ein Ring, so gilt für je abzählbar viele, paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ stets $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$.

Beweis. (i) Es ist $A \cup B = A \uplus (B \setminus A)$ und $B = (A \cap B) \uplus (B \setminus A)$. Da μ additiv ist, folgt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \quad \text{und} \quad \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

Hieraus folgt sofort (i).

(ii) Sei $A \subset B$. Wegen $A \cap B = A$ folgt $\mu(B) = \mu(A \uplus (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, falls $B \setminus A \in \mathcal{A}$ ist, insbesondere also, falls $\mathcal{A}$ ein Ring ist. Ist nun $\mathcal{A}$ nur ein Semiring, so ist $B \setminus A = \biguplus_{i=1}^{n} C_i$ für gewisses $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{A}$. In diesem Fall ist $\mu(B) = \mu(A) + \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \ge \mu(A)$, also ist μ monoton.

(iii) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Setze $B_1 = A_1$ und

$$B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i = \bigcap_{i=1}^{k-1} (A_k \setminus (A_k \cap A_i)) \quad \text{für } k = 2, \ldots, n.$$

Per Definition des Semirings ist jedes $A_k \setminus (A_k \cap A_i)$ disjunkte Vereinigung endlich vieler Mengen in $\mathcal{A}$, also existiert ein $c_k \in \mathbb{N}$ und Mengen $C_{k,1}, \ldots, C_{k,c_k} \in \mathcal{A}$ mit $\biguplus_{i=1}^{c_k} C_{k,i} = B_k \subset A_k$. Analog existieren $d_k \in \mathbb{N}$ und $D_{k,1}, \ldots, D_{k,d_k} \in \mathcal{A}$ mit $A_k \setminus B_k = \biguplus_{i=1}^{d_k} D_{k,i}$. Da μ additiv ist, gilt

$$\mu(A_k) = \sum_{i=1}^{c_k} \mu(C_{k,i}) + \sum_{i=1}^{d_k} \mu(D_{k,i}) \ge \sum_{i=1}^{c_k} \mu(C_{k,i}).$$

Wiederum aufgrund von Additivität und Monotonie gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\biguplus_{k=1}^{n} \biguplus_{i=1}^{c_k} (C_{k,i} \cap A)\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{c_k} \mu(C_{k,i} \cap A) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{c_k} \mu(C_{k,i}) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \end{aligned}$$

Also ist μ subadditiv. Die σ-Subadditivität folgt aus der σ-Additivität in analoger Weise.

(iv) Sei $\mathcal{A}$ ein Ring und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Da μ additiv (und damit monoton) ist, gilt nach (ii)

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \mu\left(\biguplus_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \mu(A) \quad \text{für jedes } m \in \mathbb{N}.$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A)$. □

Bemerkung 1.32. In (iv) kann strikte Ungleichheit herrschen (siehe etwa Beispiel 1.30(iii)). Mit anderen Worten: Es gibt Inhalte, die keine Prämaße sind. ◇

Satz 1.33 (Einschluss- Ausschlussformel). *Sei $\mathcal{A}$ ein Ring und μ ein Inhalt. Dann gelten für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ die Einschluss- Ausschlussformeln*

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,n\}} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}),$$

$$\mu(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,n\}} \mu(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}),$$

wobei sich die Summen über alle k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ erstrecken.

Beweis. Übung! *Hinweis:* Man verwende vollständige Induktion über n. □

Wir wollen die σ-Subadditivität durch eine Stetigkeitseigenschaft charakterisieren (Satz 1.36). Hierzu verabreden wir die folgende Sprechweise und Notation.

Definition 1.34. *Sind $A, A_1, A_2, \ldots$ Mengen, so schreiben wir*

- $A_n \uparrow A$, *falls* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ *und* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$,
- $A_n \downarrow A$, *falls* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ *und* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Wir sagen dann, dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen A aufsteigt beziehungsweise absteigt.

Definition 1.35 (Stetigkeit von Inhalten). *Sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{A}$.*

(i) μ heißt ***stetig von unten****, falls für jedes $A \in \mathcal{A}$ und jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow A$ gilt: $\mu(A_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$.*

(ii) μ heißt ***stetig von oben****, falls für jedes $A \in \mathcal{A}$ und jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow A$ sowie $\mu(A_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mu(A_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$.*

(iii) μ heißt ***$\emptyset$-stetig****, falls (ii) für $A = \emptyset$ gilt.*

Bei der Stetigkeit von oben wurde die Endlichkeitsbedingung eingeführt, weil sogar für das Zählmaß μ auf $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ und $A_n := \{n, n+1, \ldots\} \downarrow \emptyset$ sonst keine Gleichheit gelten kann.

Satz 1.36 (Stetigkeit und Prämaß). *Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{A}$. Betrachte die folgenden fünf Eigenschaften.*

(i) μ ist σ-additiv (also ein Prämaß).

(ii) μ ist σ-subadditiv.

(iii) μ ist stetig von unten.

(iv) μ ist $\emptyset$-stetig.

(v) μ ist stetig von oben.

Dann gelten die Implikationen $(i) \iff (ii) \iff (iii) \implies (iv) \iff (v)$.

Ist μ endlich, so gilt auch (iv) $\implies$ (iii).

Beweis. „(i) $\implies$ (ii)“ Seien $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Setze $B_1 = A_1$ und $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathcal{A}$ für $n = 2, 3, \ldots$ Dann ist $A = \biguplus_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)$, also wegen der Monotonie von μ und der σ-Additivität von μ

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Damit ist μ als σ-subadditiv erkannt.

„(ii) $\implies$ (i)“ Dies folgt aus Lemma 1.31(iv).

„(i) $\implies$ (iii)“ Sei μ ein Prämaß und $A \in \mathcal{A}$ sowie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow A$ sowie $A_0 = \emptyset$. Dann gilt

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

„(iii) $\implies$ (i)“ Gelte nun (iii). Seien $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, und gelte $B = \biguplus_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$. Setze $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus (iii)

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

Also ist μ σ-additiv und damit ein Prämaß.

„(iv) $\Longrightarrow$ (v)“ Seien $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow A$ und $\mu(A_1) < \infty$. Setze $B_n = A_n \setminus A \in \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $B_n \downarrow \emptyset$. Es gilt also $\mu(A_n) - \mu(A) = \mu(B_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

„(v) $\Longrightarrow$ (iv)“ Dies ist trivial.

„(iii) $\Longrightarrow$ (iv)“ Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ und $\mu(A_1) < \infty$. Dann gilt $A_1 \setminus A_n \in \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $A_1 \setminus A_n \uparrow A_1$, also

$$\mu(A_1) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Wegen $\mu(A_1) < \infty$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

„(iv) $\Longrightarrow$ (iii)“ (für den Fall μ endlich) Es gelte nun $\mu(A) < \infty$ für jedes $A \in \mathcal{A}$, und μ sei $\emptyset$-stetig. Seien $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow A$. Dann gilt $A \setminus A_n \downarrow \emptyset$ und

$$\mu(A) - \mu(A_n) = \mu(A \setminus A_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also gilt (iii). □

Beispiel 1.37. (Vergleiche Beispiel 1.30(iii).) Sei Ω abzählbar unendlich und

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : \#A < \infty \ \text{ oder } \ \#A^c < \infty\},$$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich.} \end{cases}$$

Dann ist μ ein $\emptyset$-stetiger Inhalt, aber kein Prämaß. ◇

Definition 1.38. *(i) Ein Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, bestehend aus einer nichtleeren Menge Ω und einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$, heißt* ***Messraum****. Die Mengen $A \in \mathcal{A}$ heißen* ***messbare Mengen****. Ist Ω höchstens abzählbar und $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, so heißt der Messraum $(\Omega, 2^{\Omega})$* ***diskret****.*

(ii) Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt ***Maßraum****, wenn $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum ist und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$.*

(iii) Ist zudem $\mu(\Omega) = 1$, so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein ***Wahrscheinlichkeitsraum****. In diesem Fall heißen die Mengen $A \in \mathcal{A}$ auch* ***Ereignisse****.*

(iv) Den Raum aller endlichen Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_f(\Omega) := \mathcal{M}_f(\Omega, \mathcal{A})$, den der W-Maße mit $\mathcal{M}_1(\Omega) := \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$, schließlich den der σ-endlichen Maße mit $\mathcal{M}_\sigma(\Omega, \mathcal{A})$.

Übung 1.2.1. Sei $\mathcal{A} = \{(a,b] \cap \mathbb{Q} : a,b \in \mathbb{R}, a \le b\}$. Definiere $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ durch $\mu\big((a,b]\cap\mathbb{Q}\big) = b-a$. Man zeige, dass $\mathcal{A}$ ein Semiring ist und μ ein unterhalb und oberhalb stetiger Inhalt auf $\mathcal{A}$, der jedoch nicht σ-additiv ist. ♣

1.3 Fortsetzung von Maßen

In diesem Abschnitt wollen wir Maße konstruieren, indem wir zunächst auf einem einfachen Mengensystem, nämlich einem Semiring, plausible Werte für einen Inhalt angeben und dann, nach Möglichkeit, diesen Inhalt zu einem Maß auf der erzeugten σ-Algebra fortsetzen. Bevor wir zu den konkreten Bedingungen kommen, unter denen das machbar ist, bringen wir zwei Beispiele.

Beispiel 1.39 (Lebesgue-Maß). Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{A} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}^n, a < b\}$$

der Semiring der halboffenen Quader $(a,b] \subset \mathbb{R}^n$ (vergleiche (1.5)). Das n-dimensionale Volumen des Quaders ist

$$\mu((a,b]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Können wir μ zu einem (eindeutig bestimmten) Maß auf der Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{A})$ fortsetzen? Wir werden sehen, dass dies möglich ist. Das resultierende Maß heißt Lebesgue-Maß (manchmal auch Lebesgue-Borel-Maß) λ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. ◇

Beispiel 1.40 (Produktmaß, Bernoulli-Maß). Wir wollen ein Wahrscheinlichkeitsmaß konstruieren für die unendliche, unabhängige Wiederholung eines Zufallsexperiments mit endlich vielen möglichen Ausgängen. Die Menge der Ausgänge sei E. Für $e \in E$ sei p_e die Wahrscheinlichkeit, dass e eintritt. Es gilt also $\sum_{e\in E} p_e = 1$. Die Ergebnisse dieser Experimente seien $\omega_1, \omega_2, \ldots \in E$. Der Raum des gesamten Experiments ist daher $\Omega = E^{\mathbb{N}}$. Wie in Beispiel 1.11(vi) definieren wir

$$[\omega_1, \ldots, \omega_n] := \{\omega' \in \Omega : \omega'_i = \omega_i \text{ für jedes } i = 1, \ldots, n\} \tag{1.7}$$

als die Menge aller Folgen, die mit den Werten $\omega_1, \ldots, \omega_n$ beginnen.

Sei $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das Mengensystem der Zylindermengen, die nur von den ersten n Koordinaten abhängen,

$$\mathcal{A}_n := \{[\omega_1, \ldots, \omega_n] : \omega_1, \ldots, \omega_n \in E\}, \tag{1.8}$$

und setzen $\mathcal{A} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$.

Wir interpretieren $[\omega_1, \dots, \omega_n]$ als das Ereignis, dass im ersten Experiment der Wert ω_1 herauskommt, im zweiten ω_2 und schließlich im n-ten Experiment der Wert ω_n. Die Ergebnisse der weiteren Experimente spielen für das Eintreten des Ereignisses keine Rolle. Für $\omega_1, \dots, \omega_n \in E$ soll die Wahrscheinlichkeit für $[\omega_1, \dots, \omega_n]$ das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten sein (das verstehen wir intuitiv unter „Unabhängigkeit")

$$\mu([\omega_1, \dots, \omega_n]) = \prod_{i=1}^{n} p_{\omega_i}.$$

Hierdurch wird ein Inhalt auf $\mathcal{A}$ definiert, und unser Ziel ist es, μ in eindeutiger Weise zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortzusetzen.

Bevor wir dies tun, treffen wir noch die folgenden Definition. Wir definieren eine (Ultra-)Metrik auf Ω durch

$$d(\omega, \omega') = \begin{cases} 2^{-\inf\{n \in \mathbb{N}:\, \omega_n \neq \omega'_n\}}, & \text{falls } \omega \neq \omega', \\ 0, & \text{falls } \omega = \omega'. \end{cases} \tag{1.9}$$

Dann ist (Ω, d) ein kompakter, metrischer Raum. Offenbar ist

$$[\omega_1, \dots, \omega_n] = B_{2^{-n}}(\omega) = \{\omega' \in \Omega :\, d(\omega, \omega') < 2^{-n}\}.$$

Das Komplement von $[\omega_1, \dots, \omega_n]$ ist die Vereinigung von $(\#E)^n - 1$ offenen Kugeln

$$[\omega_1, \dots, \omega_n]^c = \bigcup_{(\omega'_1, \dots, \omega'_n) \neq (\omega_1, \dots, \omega_n)} [\omega'_1, \dots, \omega'_n],$$

also offen. Damit ist $[\omega_1, \dots, \omega_n]$ abgeschlossen und kompakt, weil Ω kompakt ist. Ähnlich wie in Satz 1.23 kann man zeigen, dass $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\Omega, d)$.

Übung: Man zeige die obigen Aussagen. $\diamond$

Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist der Fortsetzungssatz für Maße, den wir hier in der Form von Carathéodory formulieren.

Satz 1.41 (Carathéodory). *Sei $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ ein Ring und μ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{A}$. Dann kann μ auf genau eine Weise zu einem Maß $\widetilde{\mu}$ auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortgesetzt werden, und $\tilde{\mu}$ ist σ-endlich.*

Den Beweis dieses Satzes müssen wir mit einigen Lemmata vorbereiten. Wir zeigen dann in Satz 1.53 eine etwas stärkere Aussage. Dort wird auch die griffige Formulierung „kann fortgesetzt werden" präzisiert.

Lemma 1.42 (Eindeutigkeit durch schnittstabilen Erzeuger). *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$. Es gebe $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist μ durch die Werte $\mu(E)$, $E \in \mathcal{E}$, eindeutig festgelegt.*

Ist μ ein W-Maß, so gilt die Folgerung auch ohne die Existenz der Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis. Sei ν ein weiteres σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit der Eigenschaft

$$\mu(E) = \nu(E) \quad \text{für jedes} \;\; E \in \mathcal{E}.$$

Sei $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E) < \infty$. Betrachte das Mengensystem

$$\mathcal{D}_E = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A \cap E) = \nu(A \cap E)\}.$$

Um zu zeigen, dass $\mathcal{D}_E$ ein Dynkin-System ist, prüfen wir die Eigenschaften aus Definition 1.10:

(i) Offensichtlich ist $\Omega \in \mathcal{D}_E$.

(ii) Seien $A, B \in \mathcal{D}_E$ mit $A \supset B$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mu\left((A \setminus B) \cap E\right) &= \mu(A \cap E) - \mu(B \cap E) \\ &= \nu(A \cap E) - \nu(B \cap E) = \nu\left((A \setminus B) \cap E\right).\end{aligned}$$

Also ist $A \setminus B \in \mathcal{D}_E$.

(iii) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}_E$ paarweise disjunkt sowie $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann ist

$$\mu(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n \cap E) = \nu(A \cap E),$$

also $A \in \mathcal{D}_E$.

Offenbar ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$, also $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E$. Da $\mathcal{E}$ schnittstabil ist, ist nach Satz 1.19

$$\mathcal{A} \supset \mathcal{D}_E \supset \delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}.$$

Also ist $\mathcal{D}_E = \mathcal{A}$.

Für jedes $A \in \mathcal{A}$ und $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E) < \infty$ gilt also $\mu(A \cap E) = \nu(A \cap E)$. Seien nun $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da μ und ν von unten stetig sind, gilt für $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap E_n) = \lim_{n \to \infty} \nu(A \cap E_n) = \nu(A).$$

Der Zusatz ist trivial, denn $\tilde{\mathcal{E}} := \mathcal{E} \cup \{\Omega\}$ ist ebenfalls ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$, und der Wert $\mu(\Omega) = 1$ ist bekannt. Es kann also die konstante Folge $E_n = \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, gewählt werden. Man beachte jedoch, dass es nicht reicht zu fordern, dass μ endlich ist, weil dann im Allgemeinen die Gesamtmasse $\mu(\Omega)$ nicht eindeutig festgelegt ist (siehe Beispiel 1.45(ii)). $\square$

Beispiel 1.43. Sei $\Omega = \mathbb{Z}$ und $\mathcal{E} = \{E_n : n \in \mathbb{Z}\}$, wobei $E_n = (-\infty, n] \cap \mathbb{Z}$. $\mathcal{E}$ ist schnittstabil und $\sigma(\mathcal{E}) = 2^\Omega$. Also ist ein endliches Maß μ auf $(\Omega, 2^\Omega)$ eindeutig festgelegt durch die Werte $\mu(E_n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ein σ-endliches Maß auf $\mathbb{Z}$ ist jedoch durch die Werte auf $\mathcal{E}$ noch nicht eindeutig bestimmt: Sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{Z}$ und $\nu = 2\mu$. Dann ist $\mu(E) = \infty = \nu(E)$ für jedes $E \in \mathcal{E}$. Um μ und ν zu unterscheiden, brauchen wir also einen Erzeuger, der Mengen endlichen Maßes (für μ) enthält. Tun es die Mengen $\tilde{F}_n = [-n, n] \cap \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$? In der Tat ist für jedes σ-endliche Maß μ jetzt $\mu(\tilde{F}_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Allerdings erzeugen die $\tilde{F}_n$ nicht 2^Ω (sondern welche σ-Algebra?). Wir können aber die Definition so modifizieren: $F_n = [-n/2, (n+1)/2] \cap \mathbb{Z}$. Dann ist $\sigma(\{F_n,\, n \in \mathbb{N}\}) = 2^\Omega$, also $\mathcal{E} = \{F_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ ein schnittstabiler Erzeuger von 2^Ω und $\mu(F_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen $F_n \uparrow \Omega$ sind die Bedingungen des Satzes erfüllt. ◇

Beispiel 1.44 (Verteilungsfunktion). Ein W-Maß μ auf dem Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ist durch Angabe der Werte $\mu((-\infty, b])$ auf den Mengen $(-\infty, b] = \times_{i=1}^n (-\infty, b_i]$, $b \in \mathbb{R}^n$, eindeutig festgelegt, da diese Mengen einen schnittstabilen Erzeuger bilden (Satz 1.23). Speziell ist ein W-Maß μ auf $\mathbb{R}$ durch Angabe der **Verteilungsfunktion** $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto \mu((-\infty, x])$ eindeutig bestimmt. ◇

Beispiel 1.45. (i) Sei $\Omega = \{1,2,3,4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$. Offenbar gilt $\sigma(\mathcal{E}) = 2^\Omega$, jedoch ist $\mathcal{E}$ nicht schnittstabil. Tatsächlich ist hier ein W-Maß μ durch Angabe der Werte $\mu(\{1,2\}) = \mu(\{2,3\}) = \frac{1}{2}$ nicht eindeutig festgelegt. Es gibt beispielsweise die Möglichkeiten $\mu = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_3$ oder $\mu' = \frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{2}\delta_4$.

(ii) Sei $\Omega = \{1,2\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1\}\}$. Dann ist $\mathcal{E}$ ein schnittstabiler Erzeuger von 2^Ω, und ein W-Maß μ ist durch Angabe von $\mu(\{1\})$ eindeutig festgelegt. Allerdings gilt dies nicht für endliche Maße im Allgemeinen, denn $\mu = 0$ und $\nu = \delta_2$ sind zwei endliche Maße, die auf $\mathcal{E}$ übereinstimmen. ◇

Definition 1.46 (Äußeres Maß). *Eine Mengenfunktion $\mu^* : 2^\Omega \to [0,\infty]$ heißt* ***äußeres Maß****, falls gilt:*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) μ^* *ist monoton,*

(iii) μ^* *ist σ-subadditiv.*

Lemma 1.47. *Sei $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ ein beliebiges Mengensystem mit $\emptyset \in \mathcal{A}$ und μ eine monotone Mengenfunktion auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$. Für $A \subset \Omega$ sei*

$$\mathcal{U}(A) = \left\{ \mathcal{F} \subset \mathcal{A} : \mathcal{F} \ \text{ ist höchstens abzählbar und } \ A \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right\}$$

die Menge der abzählbaren Überdeckungen $\mathcal{F}$ von A mit Mengen F aus $\mathcal{A}$. Setze

$$\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_{F\in\mathcal{F}} \mu(F) : \mathcal{F} \in \mathcal{U}(A)\right\},$$

wobei $\inf\emptyset = \infty$. *Dann ist* μ^* *ein äußeres Maß. Ist* μ *zudem* σ*-subadditiv, so gilt* $\mu^*(A) = \mu(A)$ *für jedes* $A \in \mathcal{A}$.

Beweis. Wir weisen die Eigenschaften (i)–(iii) des äußeren Maßes nach.

(i) Wegen $\emptyset \in \mathcal{A}$ ist $\{\emptyset\} \in \mathcal{U}(\emptyset)$, also ist $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Ist $A \subset B$, so ist $\mathcal{U}(A) \supset \mathcal{U}(B)$, also ist $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

(iii) Sei $A_n \subset \Omega$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Wir müssen zeigen, dass $\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$. Ohne Einschränkung sei $\mu^*(A_n) < \infty$ und damit $\mathcal{U}(A_n) \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wähle $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung $\mathcal{F}_n \in \mathcal{U}(A_n)$ mit

$$\sum_{F\in\mathcal{F}_n} \mu(F) \;\le\; \mu^*(A_n) + \varepsilon\, 2^{-n}.$$

Dann ist $\mathcal{F} := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n \in \mathcal{U}(A)$ und

$$\mu^*(A) \;\le\; \sum_{F\in\mathcal{F}} \mu(F) \;\le\; \sum_{n=1}^\infty \sum_{F\in\mathcal{F}_n} \mu(F) \;\le\; \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Sei $A \in \mathcal{A}$. Wegen $\{A\} \in \mathcal{U}(A)$ ist $\mu^*(A) \le \mu(A)$. Ist μ σ-subadditiv, so gilt für jedes $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(A)$, dass $\sum_{F\in\mathcal{F}} \mu(F) \ge \mu(A)$ ist, also auch $\mu^*(A) \ge \mu(A)$. □

Definition 1.48 (μ^*-messbare Mengen). *Sei* μ^* *ein äußeres Maß. Eine Menge* $A \in 2^\Omega$ *heißt* μ^****-messbar**, falls*

$$\mu^*(A\cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E) \quad \text{für jedes } E \in 2^\Omega. \tag{1.10}$$

Wir schreiben $\mathcal{M}(\mu^*) = \{A \in 2^\Omega : A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}$.

Lemma 1.49. *Es ist* $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$ *genau dann, wenn*

$$\mu^*(A\cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \le \mu^*(E) \quad \text{für jedes } E \in 2^\Omega.$$

Beweis. Da μ^* subadditiv ist, gilt stets die andere Ungleichung. □

Lemma 1.50. $\mathcal{M}(\mu^*)$ *ist eine Algebra.*

Beweis. Wir prüfen die Eigenschaften (i)–(iii) der Algebra aus Satz 1.7.

(i) $\Omega \in \mathcal{M}(\mu^*)$ ist klar.

(ii) (Komplementstabilität) Per Definition ist $A \in \mathcal{M}(\mu^*) \iff A^c \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

(iii) (Schnittstabilität) Seien $A, B \in \mathcal{M}(\mu^*)$ und $E \in 2^\Omega$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\mu^*\left((A \cap B) \cap E\right) + \mu^*\left((A \cap B)^c \cap E\right) \\
&\quad = \mu^*(A \cap B \cap E) + \mu^*\big((A^c \cap B \cap E) \cup (A^c \cap B^c \cap E) \cup (A \cap B^c \cap E)\big) \\
&\quad \le \mu^*(A \cap B \cap E) + \mu^*(A^c \cap B \cap E) \\
&\qquad\qquad\qquad + \mu^*(A^c \cap B^c \cap E) + \mu^*(A \cap B^c \cap E) \\
&\quad = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B^c \cap E) \\
&\quad = \mu^*(E).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der vorletzten Gleichung $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$ benutzt und in der letzten $B \in \mathcal{M}(\mu^*)$. □

Lemma 1.51. *Ein äußeres Maß μ^* ist σ-additiv auf $\mathcal{M}(\mu^*)$.*

Beweis. Seien $A, B \in \mathcal{M}(\mu^*)$ mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A \cap (A \cup B)) + \mu^*(A^c \cap (A \cup B)) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Induktiv folgt die (endliche) Additivität. Da μ^* per Definition σ-subadditiv ist, folgt nach Satz 1.36, dass μ^* auch σ-additiv ist. □

Lemma 1.52. *Ist μ^* ein äußeres Maß, so ist $\mathcal{M}(\mu^*)$ eine σ-Algebra. Speziell ist μ^* ein Maß auf $\mathcal{M}(\mu^*)$.*

Beweis. Nach Lemma 1.50 ist $\mathcal{M}(\mu^*)$ eine Algebra, also insbesondere schnittstabil. Nach Satz 1.18 reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{M}(\mu^*)$ ein Dynkin-System ist.

Seien also $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}(\mu^*)$ paarweise disjunkt und $A := \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$. Zu zeigen ist $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$, also

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \;\le\; \mu^*(E) \quad \text{für jedes } E \in 2^\Omega. \tag{1.11}$$

Setze $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap B_{n+1}) &= \mu^*\big((E \cap B_{n+1}) \cap B_n\big) + \mu^*\big((E \cap B_{n+1}) \cap B_n^c\big) \\
&= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A_{n+1}),
\end{aligned}$$

und induktiv $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i)$. Wegen der Monotonie von μ^* folgt

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) \;=\; \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \;&\ge\; \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A^c) \\
&=\; \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap A^c).
\end{aligned}$$

Indem wir $n \to \infty$ gehen lassen, folgt mit der σ-Subadditivität von μ^*

$$\mu^*(E) \;\geq\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap A^c) \;\geq\; \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Also gilt (1.11), und der Beweis ist komplett. □

Wir zeigen nun einen Satz, der mit schwächeren Voraussetzungen auskommt als der Satz von Carathéodory (Satz 1.41) und diesen impliziert.

Satz 1.53 (Fortsetzungssatz für Maße). *Sei $\mathcal{A}$ ein Semiring und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine additive, σ-subadditive, σ-endliche Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$.*

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes, σ-endliches Maß $\widetilde{\mu} : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ mit $\widetilde{\mu}(A) = \mu(A)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$.

Beweis. Da $\mathcal{A}$ schnittstabil ist, folgt die Eindeutigkeit aus Lemma 1.42.

Um die Existenz zu zeigen, definieren wir wie in Lemma 1.47

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F) : \mathcal{F} \in \mathcal{U}(A) \right\} \qquad \text{für jedes } \; A \in 2^{\Omega}.$$

Nach Lemma 1.31(ii) ist μ monoton, also ist μ^* nach Lemma 1.47 ein äußeres Maß und $\mu^*(A) = \mu(A)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{M}(\mu^*) \supset \sigma(\mathcal{A})$ gilt. Da $\mathcal{M}(\mu^*)$ eine σ-Algebra ist (Lemma 1.52), reicht es, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$ zu zeigen.

Seien also $A \in \mathcal{A}$ und $E \in 2^{\Omega}$ mit $\mu^*(E) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \;\leq\; \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Setze $B_n := E_n \cap A \in \mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ ein Semiring ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m_n \in \mathbb{N}$ sowie $C_n^1, \ldots, C_n^{m_n} \in \mathcal{A}$ mit $E_n \setminus A = E_n \setminus B_n = \biguplus_{k=1}^{m_n} C_n^k$. Also ist

$$E \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad E \cap A^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_n} C_n^k \quad \text{und} \quad E_n = B_n \uplus \biguplus_{k=1}^{m_n} C_n^k.$$

μ^* ist σ-subadditiv, und nach Voraussetzung ist μ additiv. Wegen $\mu^*\big|_{\mathcal{A}} \leq \mu$ (es gilt sogar Gleichheit, wie wir gleich sehen) folgt

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \;&\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* \left(\biguplus_{k=1}^{m_n} \mu(C_n^k) \right) \\
&\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mu(C_n^k) \\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(B_n) + \sum_{k=1}^{m_n} \mu(C_n^k) \right) \\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daher ist $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$ und damit $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$, also ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$. Setze nun $\widetilde{\mu} : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$, $A \mapsto \mu^*(A)$. Nach Lemma 1.51 ist $\widetilde{\mu}$ ein Maß und $\widetilde{\mu}$ ist σ-endlich, weil μ σ-endlich ist. $\square$

Beispiel 1.54 (Lebesgue-Maß, Fortsetzung von Beispiel 1.39). Wir wollen das auf den Quadern $\mathcal{A} = \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}^n,\ a < b\}$ eingeführte Volumen $\mu((a,b]) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ zu einem Maß auf der Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Um die Voraussetzungen von Satz 1.53 zu prüfen, müssen wir nur noch zeigen, dass μ σ-subadditiv ist. Seien also $(a,b]$, $(a(1), b(1)]$, $(a(2), b(2)], \ldots \in \mathcal{A}$ mit

$$(a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a(k), b(k)].$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\mu((a,b]) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu((a(k), b(k)]). \tag{1.12}$$

Hierzu benutzen wir ein Kompaktheitsargument, um (1.12) auf die endliche Additivität zurück zu führen. Sei also $\varepsilon > 0$, und sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $b_\varepsilon(k) > b(k)$ so gewählt, dass

$$\mu((a(k), b_\varepsilon(k)]) \leq \mu((a(k), b(k)]) + \varepsilon\, 2^{-k-1}.$$

Ferner sei $a_\varepsilon \in (a,b)$ so gewählt, dass $\mu((a_\varepsilon, b]) \geq \mu((a,b]) - \frac{\varepsilon}{2}$. Nun ist $[a_\varepsilon, b]$ kompakt und

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (a(k), b_\varepsilon(k)) \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a(k), b(k)] \supset (a,b] \supset [a_\varepsilon, b].$$

Also existiert ein K_0 mit $\bigcup_{k=1}^{K_0} (a(k), b_\varepsilon(k)) \supset (a_\varepsilon, b]$. Da μ (endlich) subadditiv ist (Lemma 1.31(iii)), folgt

$$\mu((a,b]) \le \frac{\varepsilon}{2} + \mu((a_\varepsilon, b]) \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{K_0} \mu((a(k), b_\varepsilon(k)])$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{K_0} \left(\varepsilon\, 2^{-k-1} + \mu((a(k), b(k)])\right) \le \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mu((a(k), b(k)]).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (1.12) und damit die σ-Subadditivität von μ. ◇

Zusammen mit Satz 1.53 haben wir den folgenden Satz gezeigt.

Satz 1.55 (Lebesgue-Maß). *Es existiert ein eindeutig bestimmtes Maß λ^n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit der Eigenschaft*

$$\lambda^n((a,b]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \quad \textit{für alle} \;\; a,b \in \mathbb{R}^n \;\; \textit{mit} \;\; a < b.$$

*λ^n heißt **Lebesgue-Maß** auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, oder **Lebesgue-Borel-Maß**.*

Beispiel 1.56 (Lebesgue-Stieltjes-Maß). Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R},\, a \le b\}$. $\mathcal{A}$ ist ein Semiring und $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, wo $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel'sche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ ist. Ferner sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und rechtsseitig stetig. Wir definieren eine Mengenfunktion

$$\tilde{\mu}_F : \mathcal{A} \to [0,\infty), \qquad (a,b] \mapsto F(b) - F(a).$$

Offensichtlich ist $\tilde{\mu}_F(\emptyset) = 0$, und $\tilde{\mu}_F$ ist additiv.

Seien $(a,b], (a(1),b(1)], (a(2),b(2)], \ldots \in \mathcal{A}$ mit $(a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a(n),b(n)]$. Sei $\varepsilon > 0$, und sei $a_\varepsilon \in (a,b)$ so gewählt, dass $F(a_\varepsilon) - F(a) < \varepsilon/2$. Dies geht, weil F als rechtsstetig angenommen wurde. Ferner sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $b_\varepsilon(k) > b(k)$ so gewählt, dass $F(b_\varepsilon(k)) - F(b(k)) < \varepsilon\, 2^{-k-1}$. Wie in Beispiel 1.54 kann man jetzt zeigen, dass $\tilde{\mu}_F((a,b]) \le \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}_F((a(k),b(k)])$. Es folgt, dass $\tilde{\mu}_F$ σ-subadditiv ist. Nach Satz 1.53 können wir $\tilde{\mu}_F$ auf eindeutige Weise zu einem σ-endlichen Maß μ_F auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fortsetzen. ◇

Definition 1.57 (Lebesgue-Stieltjes-Maß). *Das Maß μ_F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit*

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a) \quad \textit{für alle} \;\; a,b \in \mathbb{R} \;\; \textit{mit} \;\; a < b$$

*heißt **Lebesgue-Stieltjes-Maß** zur Funktion F.*

Beispiel 1.58. Wichtige Spezialfälle für das Lebesgue-Stieltjes-Maß sind:

(i) Ist $F(x) = x$, so ist $\mu_F = \lambda^1$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ stetig und $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist μ_F die Fortsetzung des in Beispiel 1.30(ix) definierten Prämaßes mit **Dichte** f.

(iii) Sind $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$ und $\alpha_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, so gehört zu $F = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{[x_n,\infty)}$ das endliche Maß $\mu_F = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{x_n}$.

(iv) Sind $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$, so ist $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_n}$ ein σ-endliches Maß. μ ist genau dann ein Lebesgue-Stieltjes-Maß, wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt hat. Hat nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt, so ist nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß $\#\{n \in \mathbb{N} : x_n \in [-K, K]\} < \infty$ für jedes $K > 0$. Setzen wir $F(x) = \#\{n \in \mathbb{N} : x_n \in [0, x]\}$ für $x \geq 0$ und $F(x) = -\#\{n \in \mathbb{N} : x_n \in [x, 0)\}$, so ist $\mu = \mu_F$. Ist nun andererseits μ ein Lebesgue-Stieltjes-Maß, also $\mu = \mu_F$ für ein F, dann ist $\#\{n \in \mathbb{N} : x_n \in (-K, K]\} = F(K) - F(-K) < \infty$ für jedes $K > 0$, also hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt.

(v) Gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \big(F(x) - F(-x)\big) = 1$, so ist μ_F ein W-Maß. $\diamond$

Den Fall, wo μ_F ein W-Maß ist, wollen wir noch weiter untersuchen.

Definition 1.59 (Verteilungsfunktion). *Eine rechtsseitig stetige, monoton wachsende Funktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit $F(-\infty) := \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $F(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ heißt **Verteilungsfunktion**. Gilt statt $F(\infty) = 1$ lediglich $F(\infty) \leq 1$, so heißt F uneigentliche Verteilungsfunktion.*

Ist μ ein (Sub-)W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so heißt $F_\mu : x \mapsto \mu((-\infty, x])$ die Verteilungsfunktion von μ.

Offenbar ist F_μ rechtsseitig stetig und $F(-\infty) = 0$, weil μ stetig von oben und endlich ist (Satz 1.36). Auf Grund der Stetigkeit von unten ist $F(\infty) = \mu(\mathbb{R})$, also ist F_μ tatsächlich eine (uneigentliche) Verteilungsfunktion, wenn μ ein (Sub-)W-Maß ist.

Die Argumentation aus Beispiel 1.56 liefert nun den folgenden Satz.

Satz 1.60. *Die Abbildung $\mu \mapsto F_\mu$ ist eine Bijektion von der Menge der W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ auf die Menge der Verteilungsfunktionen, beziehungsweise von der Menge der Sub-W-Maße auf die der uneigentlichen Verteilungsfunktionen.*

Wir sehen also, dass jedes endliche Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ein Lebesgue-Stieltjes-Maß für eine gewisse Funktion F ist. Für σ-endliche Maße ist dies im Allgemeinen falsch, wie wir in Beispiel 1.58(iv) gesehen haben.

Wir kommen nun zu einem Satz, der Satz 1.55 mit dem Lebesgue-Stieltjes-Maß kombiniert. Später werden wir sehen, dass dieser Satz in größerer Allgemeinheit gültig ist. Speziell kann man auf die Bedingung verzichten, dass die einzelnen Faktoren vom Lebesgue-Stieltjes-Typ sind.

Satz 1.61 (Endliche Produkte von Maßen). *Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $\mu_1, \dots, \mu_n$ endliche Maße oder, allgemeiner, Lebesgue-Stieltjes-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes, σ-endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit*

$$\mu((a,b]) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i((a_i, b_i]) \quad \textit{für alle} \;\; a, b \in \mathbb{R}^n \;\; \textit{mit} \;\; a < b.$$

Wir nennen $\mu =: \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ das ***Produktmaß*** *zu den Maßen $\mu_1, \dots, \mu_n$.*

Beweis. Dies geht völlig analog zum Beweis von Satz 1.55. Man muss sich vergewissern, dass die Intervalle $(a, b_\varepsilon]$ und so weiter, so gewählt werden können, dass $\mu((a, b_\varepsilon]) < \mu((a,b]) + \varepsilon$. Hierzu wird die Rechtsstetigkeit der zu den μ_i gehörigen wachsenden Funktion F_i verwendet. Wir überlassen die Details zur Übung. □

Bemerkung 1.62. Wir werden später in Satz 14.14 sehen, dass die Aussage auch für beliebige σ-endliche Maße $\mu_1, \dots, \mu_n$ auf beliebigen (auch unterschiedlichen) Messräumen gilt. Wir können auch unendliche (sogar überabzählbare) Produkte betrachten, wenn wir voraussetzen, dass alle Faktoren Wahrscheinlichkeitsräume sind (Satz 14.36). ◇

Beispiel 1.63 (Unendliches Produktmaß, Fortsetzung von Beispiel 1.40). Sei E eine endliche Menge und $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ der Raum der Folgen mit Werten in E. Ferner sei $(p_e)_{e \in E}$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor. Der auf $\mathcal{A} = \{[\omega_1, \dots, \omega_n] : \omega_1, \dots, \omega_n \in E,\ n \in \mathbb{N}\}$ definierte Inhalt

$$\mu([\omega_1, \dots, \omega_n]) = \prod_{i=1}^{n} p_{\omega_i}$$

soll nun zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortgesetzt werden. Um die Voraussetzungen von Satz 1.53 zu prüfen, müssen wir zeigen, dass μ σ-subadditiv ist. Wie im vorangehenden Beispiel geht dies mit Hilfe eines Kompaktheitsarguments.

Seien also $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ und $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Es reicht zu zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{N} A_n. \tag{1.13}$$

Dann ist nämlich aufgrund der endlichen Subadditivität von μ (Lemma 1.31(iii)) schon $\mu(A) \le \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, also ist μ σ-subadditiv.

Wir geben nun zwei Beweise für (1.13) an.

1. Beweis. Wie in Beispiel 1.40 angemerkt, ist Ω mit der von der Metrik d in (1.9) erzeugten Produkttopologie kompakt, und jedes $A \in \mathcal{A}$ ist abgeschlossen und damit auch kompakt. Da jedes der A_n zugleich offen ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung von A, mithin gilt (1.13).

2. Beweis. Wir zeigen nun auf *elementare* Weise die Gültigkeit von (1.13). Das Vorgehen imitiert den Beweis dafür, dass Ω kompakt ist. Wir setzen $B_n := A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, nehmen an, dass $B_n \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und führen dies zum Widerspruch. Nach dem Dirichlet'schen Schubfachprinzip (E ist endlich) können wir ein $\omega_1 \in E$ auswählen, sodass $[\omega_1] \cap B_n \neq \emptyset$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Wegen $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ folgt

$$[\omega_1] \cap B_n \neq \emptyset \quad \text{für jedes } \ n \in \mathbb{N}.$$

Wähle nun sukzessive $\omega_2, \omega_3, \ldots \in E$ so aus, dass

$$[\omega_1, \ldots, \omega_k] \cap B_n \neq \emptyset \quad \text{für alle } \ k, n \in \mathbb{N}.$$

B_n ist disjunkte Vereinigung von gewissen Mengen $C_{n,1}, \ldots, C_{n,m_n} \in \mathcal{A}$. Daher existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $i_n \in \{1, \ldots, m_n\}$ mit $[\omega_1, \ldots, \omega_k] \cap C_{n,i_n} \neq \emptyset$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Wegen $[\omega_1] \supset [\omega_1, \omega_2] \supset \ldots$ folgt

$$[\omega_1, \ldots, \omega_k] \cap C_{n,i_n} \neq \emptyset \quad \text{für alle } \ k, n \in \mathbb{N}.$$

Für festes $n \in \mathbb{N}$ und großes k ist $[\omega_1, \ldots, \omega_k] \subset C_{n,i_n}$, also ist $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in C_{n,i_n} \subset B_n$. Es folgt im Widerspruch zur Annahme, dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$. $\diamond$

Zusammen mit Satz 1.53 haben wir den folgenden Satz gezeigt.

Satz 1.64 (Produktmaß, Bernoulli-Maß). *Sei E eine endliche, nichtleere Menge und $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ sowie $(p_e)_{e \in E}$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes W-Maß μ auf $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\Omega)$ mit*

$$\mu([\omega_1, \ldots, \omega_n]) = \prod_{i=1}^{n} p_{\omega_i} \quad \textit{für alle } \ \omega_1, \ldots, \omega_n \in E \ \textit{ und } \ n \in \mathbb{N}.$$

Wir nennen μ das ***Produktmaß*** *oder* ***Bernoulli-Maß*** *auf Ω mit Gewichten $(p_e)_{e \in E}$. Wir schreiben auch $\left(\sum_{e \in E} p_e \delta_e\right)^{\otimes \mathbb{N}} := \mu$.*
Ferner nennen wir $(2^E)^{\otimes \mathbb{N}} := \sigma(\mathcal{A})$ die Produkt-σ-Algebra auf Ω.

Auf Produktmaße gehen wir systematisch noch einmal in Kapitel 14 ein.

Der Fortsetzungssatz liefert uns einen abstrakten Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Maße, die wir zuvor nur auf einem Semiring $\mathcal{A}$ definiert hatten. Der folgende Satz zeigt, wie gut wir das Maß von $\sigma(\mathcal{A})$-messbaren Mengen durch endliche, beziehungsweise abzählbare Operationen mit Mengen aus $\mathcal{A}$ annähern können.

Wir schreiben

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad \text{für } A, B \subset \Omega, \tag{1.14}$$

für die **symmetrische Differenz** zweier Mengen A und B.

Satz 1.65 (Approximationssatz für Maße). *Sei $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ ein Semiring und μ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$, das σ-endlich auf $\mathcal{A}$ ist.*

(i) Zu $A \in \sigma(\mathcal{A})$ und $\varepsilon > 0$ gibt es paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) < \varepsilon$.

(ii) Zu $A \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $\mu\left(A \triangle \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < \varepsilon$.

(iii) Zu jedem $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$ gibt es $A_-, A_+ \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $A_- \subset A \subset A_+$ und $\mu(A_+ \setminus A_-) = 0$.

Bemerkung 1.66. Nach (iii) gelten (i) und (ii) auch für $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$ (mit μ^* statt μ). Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, so gilt in (ii) für jedes $A \in \sigma(\mathcal{A})$ sogar $\inf\limits_{B \in \mathcal{A}} \mu(A \triangle B) = 0$. $\diamond$

Beweis. (ii) Da μ auf $\sigma(\mathcal{A})$ mit dem äußeren Maß μ^* übereinstimmt und $\mu(A)$ endlich ist, gibt es nach Definition von μ^* (siehe Lemma 1.47) eine Überdeckung $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ von A mit

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) - \varepsilon/2.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \mu(B_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ (dies existiert, weil $\mu(A) < \infty$). Für je drei Mengen C, D, E gilt

$$C \triangle D = (D \setminus C) \cup (C \setminus D) \subset (D \setminus C) \cup (C \setminus (D \cup E)) \cup E \subset (C \triangle (D \cup E)) \cup E.$$

Mit $C = A$, $D = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ und $E = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu\left(A \triangle \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) &\leq \mu\left(A \triangle \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) + \mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) - \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} \;\leq\; \varepsilon. \end{aligned}$$

Schreibe nun

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B_1 \uplus \biguplus_{i=2}^{n} \bigcap_{j=1}^{i-1} (B_i \setminus B_j) =: \biguplus_{i=1}^{k} A_i$$

für ein gewisses $k \in \mathbb{N}$ und gewisse $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ (Semiring-Eigenschaft).

(i) Sei $A \in \sigma(\mathcal{A})$ und $E_n \uparrow \Omega$, $E_n \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $\mu(E_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wähle zu $n \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung $(B_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ von $A \cap E_n$ mit

$$\mu(A \cap E_n) \geq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_{n,m}) - 2^{-n}\varepsilon.$$

(Dies ist möglich nach Definition des äußeren Maßes μ^*, das auf $\mathcal{A}$ mit μ übereinstimmt.) Schreibe $\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} B_{n,m} = \biguplus\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ für gewisse $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ (Übung 1.1.1). Dann ist

$$\begin{aligned}\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \setminus A\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} \big(B_{n,m} \setminus (A \cap E_n)\big)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_{n,m})\right) - \mu(A \cap E_n)\right) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

(iii) Sei $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$ und $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben. Wähle zu $m, n \in \mathbb{N}$ ein $A_{n,m} \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $A_{n,m} \supset A \cap E_n$ und $\mu^*(A_{n,m}) \leq \mu^*(A \cap E_n) + \frac{2^{-n}}{m}$.
Setze $A_m := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{n,m} \in \sigma(\mathcal{A})$. Dann ist $A_m \supset A$ und $\mu^*(A_m \setminus A) \leq \frac{1}{m}$. Setze $A_+ := \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$. Dann ist $\sigma(\mathcal{A}) \ni A_+ \supset A$ und $\mu^*(A_+ \setminus A) = 0$. Wähle analog $(A_-)^c \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $(A_-)^c \supset A^c$ und $\mu^*((A_-)^c \setminus A^c) = 0$. Dann ist $A_+ \supset A \supset A_-$ und $\mu(A_+ \setminus A_-) = \mu^*(A_+ \setminus A_-) = \mu^*(A_+ \setminus A) + \mu^*(A \setminus A_-) = 0$. □

Bemerkung 1.67 (Regularität von Maßen). (Vergleiche auch Satz 13.6 auf Seite 248.) Sei λ^n das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Sei $\mathcal{A}$ der Semiring der Quader der Form $(a, b]) \subset \mathbb{R}^n$. Nach Satz 1.23 ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{A})$. Nach dem Approximationssatz gibt es zu $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ abzählbar viele $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit

$$\lambda^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus A\right) < \varepsilon/2.$$

Zu jedem A_i existiert ein *offener* Quader $B_i \supset A_i$ mit $\lambda^n(B_i \setminus A_i) < \varepsilon\, 2^{-i-1}$ (Stetigkeit von oben von λ^n). Daher ist $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ eine offene Menge $U \supset A$ mit

$$\lambda^n(U \setminus A) < \varepsilon.$$

Diese Eigenschaft von λ^n heißt **Regularität von außen**.

Ist $\lambda^n(A)$ endlich, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset A$ mit

$$\lambda^n(A \setminus K) < \varepsilon.$$

Diese Eigenschaft von λ^n heißt **Regularität von innen**. In der Tat: Sei $N > 0$ mit $\lambda^n(A) - \lambda^n(A \cap [-N,N]^n) < \varepsilon/2$. Wähle eine offene Menge $U \supset (A \cap [-N,N]^n)^c$ mit $\lambda^n(U \setminus (A \cap [-N,N]^n)^c) < \varepsilon/2$ und setze $K := [-N,N]^n \setminus U \subset A$. $\Diamond$

Definition 1.68 (Nullmenge). *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.*

*(i) Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt μ-**Nullmenge**, oder kurz Nullmenge, falls $\mu(A) = 0$. Mit $\mathcal{N}_\mu$ bezeichnen wir das System aller Teilmengen von μ-Nullmengen.*

*(ii) Sei $E(\omega)$ eine Eigenschaft, die dem Punkt $\omega \in \Omega$ zukommen kann. Wir sagen, dass E μ-**fast überall** (f.ü.) gilt oder für **fast alle** (f.a.) ω, falls es eine Nullmenge N gibt, sodass $E(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega \setminus N$ gilt. Ist $A \in \mathcal{A}$, so sagen wir, dass E fast überall auf A gilt, falls es eine Nullmenge N gibt, sodass $E(\omega)$ für jedes $\omega \in A \setminus N$ gilt.*

*Ist $\mu = P$ ein W-Maß, so sagen wir dann auch, dass E P-**fast sicher** (f.s.) gilt, beziehungsweise fast sicher auf A.*

(iii) Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so schreiben wir $A = B \pmod{\mu}$, falls es eine Nullmenge N gibt mit $A \triangle B \subset N$.

Definition 1.69. *Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **vollständig**, falls $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{A}$.*

Bemerkung 1.70 (Vervollständigung eines Maßraums). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es gibt genau eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}^* \supset \mathcal{A}$ und eine Fortsetzung μ^* von μ auf $\mathcal{A}^*$, sodass $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ vollständig ist. $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ heißt die **Vervollständigung** von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. In der Notation des Beweises von Satz 1.53 ist

$$\left(\Omega, \mathcal{M}(\mu^*), \mu^*\big|_{\mathcal{M}(\mu^*)}\right)$$

diese Vervollständigung.

Ferner ist $\mathcal{M}(\mu^*) = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu) = \{A \cup N :\ A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N}_\mu\}$ und $\mu^*(A \cup N) = \mu(A)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ und $N \in \mathcal{N}_\mu$.

Da wir diese Aussagen im Folgenden nicht benötigen werden, verzichten wir auf den Beweis und verweisen auf die gängigen Maßtheoriebücher, etwa [46].

Beispiel 1.71. Ist λ das Lebesgue-Maß (genauer: das Lebesgue-Borel-Maß) auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, so lässt sich λ eindeutig fortsetzen zu einem Maß λ^* auf

$$\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{N}),$$

wo $\mathcal{N}$ die Menge der Teilmengen der Lebesgue-Borel'schen Nullmengen bezeichnet. $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^n)$ heißt σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen. Zur Unterscheidung wird manchmal λ das **Lebesgue-Borel-Maß** genannt und λ^* das **Lebesgue-Maß**. Wir werden diese Unterscheidung im Folgenden aber nicht benötigen. $\Diamond$

Beispiel 1.72. Sei $\mu = \delta_\omega$ auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Ist $\{\omega\} \in \mathcal{A}$, so ist die Vervollständigung $\mathcal{A}^* = 2^\Omega$, $\mu^* = \delta_\omega$. Im Extremfall der trivialen σ-Algebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ hingegen ist $\mathcal{N}_\mu = \{\emptyset\}$, also die Vervollständigung $\mathcal{A}^* = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mu^* = \delta_\omega$. Man beachte, dass man auf dieser trivialen σ-Algebra die Dirac-Maße zu verschiedenen Punkten aus Ω nicht unterscheiden kann. $\Diamond$

Definition 1.73. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\Omega' \in \mathcal{A}$. Dann wird durch*

$$\mu\big|_{\Omega'}(A) := \mu(A) \quad \textit{für } A \in \mathcal{A} \textit{ mit } A \subset \Omega'$$

ein Maß auf der Spur-σ-Algebra $\mathcal{A}\big|_{\Omega'}$ definiert. Dieses Maß nennen wir die ***Einschränkung*** *von μ auf Ω'.*

Beispiel 1.74. Die Einschränkung des Lebesgue-Borel-Maßes λ von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ auf $[0,1]$ ist ein W-Maß auf $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R})\big|_{[0,1]})$. Allgemeiner nennen wir für messbares $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Einschränkung $\lambda\big|_A$ das Lebesgue-Maß auf A. Oftmals wird als Symbol wieder λ verwendet, weil wir nicht zu viele kleinliche Unterscheidungen treffen wollen.

Wir sehen später (Korollar 1.84), dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})\big|_A = \mathcal{B}(A)$, wobei $\mathcal{B}(A)$ die Borel'sche σ-Algebra auf A ist, die von den in A (relativ) offenen Mengen erzeugt wird. $\Diamond$

Beispiel 1.75 (Gleichverteilung). Ist $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit n-dimensionalem Lebesgue-Maß $\lambda^n(A) \in (0, \infty)$, so wird durch

$$\mu(B) := \frac{\lambda^n(B)}{\lambda^n(A)} \quad \text{für } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ B \subset A,$$

ein W-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big|_A$ definiert. Wir nennen μ die **uniforme Verteilung** oder **Gleichverteilung** auf A und schreiben $\mathcal{U}_A := \mu$. $\Diamond$

Übung 1.3.1. Man zeige die folgende Verallgemeinerung von Beispiel 1.58(iv): Ein Maß $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \delta_{x_n}$ ist genau dann ein Lebesgue-Stieltjes Maß zu einer geeigneten Funktion F, wenn $\sum_{n:\,|x_n| \le K} \alpha_n < \infty$ für jedes $K > 0$ gilt. $\clubsuit$

Übung 1.3.2. Sei Ω eine überabzählbare Menge und $\omega_0 \in \Omega$ ein beliebiges Element. Sei $\mathcal{A} = \sigma(\{\omega\} : \omega \in \Omega \setminus \{\omega_0\})$.

(i) Charakterisiere $\mathcal{A}$ ähnlich wie in Übung 1.1.4 (Seite 11).

(ii) Zeige, dass $(\Omega, \mathcal{A}, \delta_{\omega_0})$ vollständig ist. ♣

Übung 1.3.3. Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von endlichen Maßen auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Für jedes $A \in \mathcal{A}$ existiere der Grenzwert $\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$.

Man zeige: μ ist ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Hinweis: Zu zeigen ist insbesondere die $\emptyset$-Stetigkeit von μ. ♣

1.4 Messbare Abbildungen

Eine Zwangshandlung in der Mathematik ist es, Homomorphismen zwischen Objekten anzugeben, also strukturerhaltende Abbildungen. Für topologische Räume sind dies die stetigen Abbildungen, für Messräume die messbaren Abbildungen.

Seien im Folgenden stets $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ Messräume.

Definition 1.76 (Messbare Abbildungen).

(i) Eine Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ heißt $\mathcal{A}$ – $\mathcal{A}'$-messbar (oder kurz: messbar), falls $X^{-1}(\mathcal{A}') := \{X^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\} \subset \mathcal{A}$ ist, falls also

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \text{für jedes} \;\; A' \in \mathcal{A}'.$$

Ist X messbar, so schreiben wir auch $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$.

(ii) Ist $\Omega' = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}' = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel'sche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$, so heißt $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ kurz eine reelle $\mathcal{A}$-messbare Abbildung.

Beispiel 1.77. (i) Die Identität $\mathrm{id} : \Omega \to \Omega$ ist $\mathcal{A}$ – $\mathcal{A}$-messbar.

(ii) Sei $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ oder $\mathcal{A}' = \{\emptyset, \Omega'\}$. Jedes $X : \Omega \to \Omega'$ ist dann $\mathcal{A}$ – $\mathcal{A}'$-messbar.

(iii) Sei $A \subset \Omega$. Die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ ist genau dann $\mathcal{A}$ – $2^{\{0,1\}}$-messbar, wenn $A \in \mathcal{A}$. ◇

Satz 1.78 (Erzeugte σ-Algebra). *Sei $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum und Ω eine nichtleere Menge sowie $X : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Das Urbild*

$$X^{-1}(\mathcal{A}') := \{X^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\} \tag{1.15}$$

*ist die kleinste σ-Algebra, bezüglich der X messbar ist. Wir nennen $\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{A}')$ die von X **erzeugte σ-Algebra** auf Ω.*

Beweis. Übung! □

Wir wollen nun σ-Algebren betrachten, die von mehreren Abbildungen erzeugt werden.

Definition 1.79 (Erzeugte σ-Algebra). *Sei Ω eine nichtleere Menge. Sei I eine beliebige Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ein Messraum sowie $X_i : \Omega \to \Omega_i$ eine beliebige Abbildung. Dann heißt*

$$\sigma(X_i,\, i \in I) := \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \sigma(X_i)\right) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right)$$

*die von $(X_i,\, i \in I)$ **erzeugte σ-Algebra** auf Ω. Dies ist die kleinste σ-Algebra, bezüglich der jedes X_i messbar ist.*

Wie bei stetigen oder linearen Abbildungen gibt es eine Verknüpfungseigenschaft.

Satz 1.80 (Verknüpfung von Abbildungen). *Sind $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ und $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ Messräume sowie $X : \Omega \to \Omega'$ messbar und $X' : \Omega' \to \Omega''$ messbar, so ist die Abbildung $Y := X' \circ X : \Omega \to \Omega''$, $\omega \mapsto X'(X(\omega))$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$ – $\mathcal{A}''$.*

Beweis. Es ist $Y^{-1}(\mathcal{A}'') = X^{-1}((X')^{-1}(\mathcal{A}'')) \subset X^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$. □

Praktisch kann man die Messbarkeit einer Abbildung X kaum prüfen, indem man sämtliche Urbilder $X^{-1}(A')$, $A' \in \mathcal{A}'$ auf Messbarkeit hin untersucht. Dafür sind die meisten σ-Algebren $\mathcal{A}'$ einfach zu groß. Glücklicherweise reicht hier die Betrachtung eines Erzeugers von $\mathcal{A}'$ aus:

Satz 1.81 (Messbarkeit auf einem Erzeuger). *Für jedes System $\mathcal{E}' \subset \mathcal{A}'$ von $\mathcal{A}'$-messbaren Mengen gilt $\sigma(X^{-1}(\mathcal{E}')) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{E}'))$ und damit*

$$X \text{ ist } \mathcal{A} – \sigma(\mathcal{E}')\text{-messbar} \iff X^{-1}(E') \in \mathcal{A} \quad \text{für jedes } E' \in \mathcal{E}'.$$

Ist speziell $\sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{A}'$, dann gilt

$$X \text{ ist } \mathcal{A} – \mathcal{A}'\text{-messbar} \iff X^{-1}(\mathcal{E}') \subset \mathcal{A}.$$

Beweis. Offenbar ist $X^{-1}(\mathcal{E}') \subset X^{-1}(\sigma(\mathcal{E}')) = \sigma(X^{-1}(\sigma(\mathcal{E}')))$. Also ist auch

$$\sigma(X^{-1}(\mathcal{E}')) \subset X^{-1}(\sigma(\mathcal{E}')).$$

Für die andere Inklusion betrachten wir das Mengensystem

$$\mathcal{A}'_0 := \left\{A' \in \sigma(\mathcal{E}') : X^{-1}(A') \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{E}'))\right\}$$

und zeigen zunächst, dass $\mathcal{A}'_0$ eine σ-Algebra ist, indem wir die Punkte (i)–(iii) aus Definition 1.2 prüfen:

(i) Offensichtlich ist $\Omega' \in \mathcal{A}'_0$.

(ii) (Komplementstabilität) Ist $A' \in \mathcal{A}'_0$, so ist

$$X^{-1}((A')^c) \;=\; (X^{-1}(A'))^c \;\in\; \sigma(X^{-1}(\mathcal{E}')),$$

also $(A')^c \in \mathcal{A}'_0$.

(iii) (σ-$\cup$-Stabilität) Seien $A'_1, A'_2, \ldots \in \mathcal{A}'_0$. Dann ist

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A'_n) \;\in\; \sigma(X^{-1}(\mathcal{E}')),$$

also ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \in \mathcal{A}'_0$.

Wegen $\mathcal{E}' \subset \mathcal{A}'_0$ ist $\mathcal{A}'_0 = \sigma(\mathcal{E}')$, also $X^{-1}(A') \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{E}'))$ für jedes $A' \in \sigma(\mathcal{E}')$ und damit $X^{-1}(\sigma(\mathcal{E}')) \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{E}'))$. $\square$

Korollar 1.82 (Messbarkeit von verknüpften Abbildungen). *Sei I eine nichtleere Indexmenge sowie $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ und $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Messräume, $i \in I$. Sei ferner $(X_i : i \in I)$ eine Familie messbarer Abbildungen $X_i : \Omega' \to \Omega_i$ mit der Eigenschaft $\mathcal{A}' = \sigma(X_i : i \in I)$. Dann gilt: Eine Abbildung $Y : \Omega \to \Omega'$ ist genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$ messbar, wenn $X_i \circ Y$ messbar ist bezüglich $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$.*

Beweis. Ist Y messbar, so ist nach Satz 1.80 jedes $X_i \circ Y$ messbar. Sei nun jede der zusammengesetzten Abbildungen $X_i \circ Y$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_i$. Die Menge $\mathcal{E}' := \{X_i^{-1}(A'') : A'' \in \mathcal{A}_i,\, i \in I\}$ ist nach Voraussetzung ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$, und es gilt $Y^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ für jedes $A' \in \mathcal{E}'$ wegen der Messbarkeit aller $X_i \circ Y$. Nach Satz 1.81 ist also Y messbar. $\square$

Wir erinnern an den Begriff der Spur eines Mengensystems aus Definition 1.25.

Korollar 1.83 (Spur der erzeugten σ-Algebra). *Ist $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$ und $A \subset \Omega$ nichtleer, so gilt $\sigma\big(\mathcal{E}\big|_A\big) = \sigma(\mathcal{E})\big|_A$.*

Beweis. Sei $X : A \hookrightarrow \Omega$, $\omega \mapsto \omega$ die Inklusionsabbildung. Dann ist $X^{-1}(B) = A \cap B$ für jedes $B \subset \Omega$. Nach Satz 1.81 ist

$$\begin{aligned}\sigma\big(\mathcal{E}\big|_A\big) &= \sigma(\{E \cap A :\, E \in \mathcal{E}\}) \\ &= \sigma(\{X^{-1}(E) :\, E \in \mathcal{E}\}) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{E})) \\ &= X^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \{A \cap B :\, B \in \sigma(\mathcal{E})\} = \sigma(\mathcal{E})\big|_A. \end{aligned}$$ $\square$

Zur Erinnerung: Für eine Teilmenge $A \subset \Omega$ eines topologischen Raums (Ω, τ) ist $\tau\big|_A$ die Topologie der in A relativ offenen Mengen. Mit $\mathcal{B}(\Omega, \tau) = \sigma(\tau)$ bezeichnen wir die Borel'sche σ-Algebra auf (Ω, τ).

Korollar 1.84 (Spur der Borel'schen σ-Algebra). *Sei (Ω, τ) ein topologischer Raum und $A \subset \Omega$ eine beliebige Teilmenge von Ω. Dann gilt*

$$\mathcal{B}(\Omega,\tau)\big|_A = \mathcal{B}\big(A, \tau\big|_A\big).$$

Beispiel 1.85. (i) Ist Ω' abzählbar, so ist $X : \Omega \to \Omega'$ genau dann $\mathcal{A}$ – $2^{\Omega'}$-messbar, wenn $X^{-1}(\{\omega'\}) \in \mathcal{A}$ für jedes $\omega' \in \Omega'$. Für überabzählbare Ω' ist dies im Allgemeinen falsch. (Man betrachte etwa $\Omega = \Omega' = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X(\omega) = \omega$ für jedes $\omega \in \Omega$. Offenbar ist $X^{-1}(\{\omega\}) = \{\omega\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ist andererseits $A \subset \mathbb{R}$ nicht in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, so ist $A \in 2^{\mathbb{R}}$, jedoch $X^{-1}(A) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$.)

(ii) Für $x \in \mathbb{R}$ verabreden wir folgende Schreibweisen für das Ab- und Aufrunden

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\} \quad \text{und} \quad \lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} : k \ge x\}. \tag{1.16}$$

Die Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ und $x \mapsto \lceil x \rceil$ sind messbar bezüglich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – $2^{\mathbb{Z}}$, denn für jedes $k \in \mathbb{Z}$ sind die Urbilder $\{x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor = k\} = [k, k+1)$ und $\{x \in \mathbb{R} : \lceil x \rceil = k\} = (k-1, k]$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nach dem Verknüpfungssatz (Satz 1.80) sind dann für jede messbare Abbildung $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ auch die Abbildungen $\lfloor f \rfloor$ und $\lceil f \rceil$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$ – $2^{\mathbb{Z}}$.

(iii) Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ist genau dann $\mathcal{A}$ – $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-messbar, wenn

$$X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A} \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R}^d,$$

denn $\sigma((-\infty, a],\ a \in \mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nach Satz 1.23. Analog gilt dies auch für die anderen Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{12}$ aus Satz 1.23. ◇

Beispiel 1.86. Sei $d(x,y) = \|x-y\|_2$ der gewöhnliche euklidische Abstand auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Borel'sche σ-Algebra zu der von d erzeugten Topologie. Für jede Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ ist dann $\mathcal{B}(A,d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, d)\big|_A$. ◇

Wir wollen die reellen Zahlen um die Punkte $-\infty$ und $+\infty$ erweitern und definieren

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Topologisch wollen wir $\overline{\mathbb{R}}$ als die so genannte Zweipunktkompaktifizierung ansehen, indem wir $\overline{\mathbb{R}}$ als topologisch isomorph zu $[-1, 1]$ betrachten, beispielsweise vermöge der Abbildung

$$\varphi : [-1,1] \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \tan(\pi x/2), & \text{falls } x \in (-1,1), \\ -\infty, & \text{falls } x = -1, \\ \infty, & \text{falls } x = +1. \end{cases}$$

In der Tat wird durch $\bar{d}(x,y) = \big|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)\big|$ für $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert, sodass φ und φ^{-1} stetig sind (also ist φ ein topologischer Isomorphismus). Mit $\bar{\tau}$ bezeichnen wir die induzierte Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$, mit τ die gewöhnliche Topologie auf $\mathbb{R}$.

Korollar 1.87. *Es gilt* $\bar{\tau}\big|_{\mathbb{R}} = \tau$, *und daher gilt* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big|_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ist speziell $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *messbar, so ist* X *in kanonischer Weise auch eine* $\overline{\mathbb{R}}$*-wertige messbare Abbildung.*

Mit $\overline{\mathbb{R}}$ haben wir also eine echte Erweiterung der reellen Zahlen geschaffen, und die Inklusion $\mathbb{R} \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar.

Satz 1.88 (Messbarkeit stetiger Abbildungen). *Sind* (Ω, τ) *und* (Ω', τ') *topologische Räume und* $f : \Omega \to \Omega'$ *stetig, dann ist* f *auch* $\mathcal{B}(\Omega) - \mathcal{B}(\Omega')$*-messbar.*

Beweis. Wegen $\mathcal{B}(\Omega') = \sigma(\tau')$ reicht es nach Satz 1.81 zu zeigen, dass $f^{-1}(A') \in \sigma(\tau)$ für jedes $A' \in \tau'$. Da f stetig ist, gilt aber sogar $f^{-1}(A') \in \tau$ für jedes $A' \in \tau'$. □

Für $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ verabreden wir folgende Notationen

$$
\begin{aligned}
x \vee y &= \max(x, y) && \text{(Maximum)},\\
x \wedge y &= \min(x, y) && \text{(Minimum)},\\
x^+ &= \max(x, 0) && \text{(Positivteil)},\\
x^- &= \max(-x, 0) && \text{(Negativteil)},\\
|x| &= \max(x, -x) = x^- + x^+ && \text{(Absolutbetrag)},\\
\operatorname{sign}(x) &= \mathbb{1}_{\{x>0\}} - \mathbb{1}_{\{x<0\}} && \text{(Vorzeichenfunktion)}.
\end{aligned}
$$

Analog bezeichnen wir für reelle messbare Abbildungen beispielsweise $X^+ = \max(X, 0)$. Die Abbildungen $x \mapsto x^+$, $x \mapsto x^-$ und $x \mapsto |x|$ sind stetig (und damit nach dem vorangehenden Satz messbar), die Abbildung $x \mapsto \operatorname{sign}(x)$ ist offenbar auch messbar. Wir erhalten also (zusammen mit Korollar 1.82):

Korollar 1.89. *Ist* X *eine reelle oder* $\overline{\mathbb{R}}$*-wertige messbare Abbildung, so sind auch die Abbildungen* X^-, X^+, $|X|$ *und* $\operatorname{sign}(X)$ *messbar.*

Satz 1.90 (Koordinatenabbildungen sind messbar). *Sei* $(\Omega, \mathcal{A})$ *ein Messraum und* $f_1, \ldots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *Abbildungen sowie* $f := (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. *Dann gilt*

$$f \text{ ist } \mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\text{-messbar} \iff \text{jedes } f_i \text{ ist } \mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})\text{-messbar.}$$

Die Aussage gilt analog für $f_i : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Beweis. Für $b \in \mathbb{R}^n$ ist $f^{-1}((-\infty, b)) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}((-\infty, b_i))$. Ist jedes f_i messbar, so ist also $f^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{A}$. Die Quader $(-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R}^n$, erzeugen aber $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, und daher ist dann f messbar. Sei nun f messbar. Für $i = 1, \ldots, n$ sei $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_i$ die i-te Projektion. Offenbar ist π_i stetig also $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Nach Satz 1.80 ist auch $f_i = \pi_i \circ f$ messbar. □

Für den folgenden Satz vereinbaren wir die Konvention $\frac{x}{0} := 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Satz 1.91. *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ sowie $h : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar. Dann sind auch die Abbildungen $f + g$, $f - g$, $f \cdot h$ und f/h messbar.*

Beweis. Die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, (x, \alpha) \mapsto \alpha \cdot x$ ist stetig, also messbar. Nach Satz 1.90 ist $(f, h) : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ messbar, also auch die zusammengesetzte Abbildung $f \cdot h = \pi \circ (f, h)$. Analog folgt die Messbarkeit von $f + g$ und $f - g$.

Um die Messbarkeit von f/h zu zeigen, definieren wir $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$. Nach unserer Konvention ist $H(0) = 0$. Dann ist $f/h = f \cdot H \circ h$. Es reicht also zu zeigen, dass H messbar ist. Offenbar ist $H\big|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ stetig. Für offenes $U \subset \mathbb{R}$ ist auch $U \setminus \{0\}$ offen und damit $H^{-1}(U \setminus \{0\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ferner ist $H^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Also ist schließlich $H^{-1}(U) = H^{-1}(U \setminus \{0\}) \cup (U \cap \{0\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

Satz 1.92. *Sind $X_1, X_2, \ldots$ messbare Abbildungen $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, dann sind auch die folgenden Abbildungen messbar:*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} X_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} X_n.$$

Beweis. Für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\left(\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)^{-1}([-\infty, a)) \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^{-1}([-\infty, a)) \;\in\; \mathcal{A}.$$

Nach Satz 1.81 folgt hieraus die Messbarkeit von $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Analog geht der Beweis für $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $Y_n := \inf_{m\geq n} X_m$. Dann ist Y_n messbar, und damit auch $\liminf_{n\to\infty} X_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Analog folgt der Beweis für den Limes superior. □

Ein wichtiges Beispiel für messbare Abbildungen $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sind Elementarfunktionen.

Definition 1.93 (Elementarfunktion). *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt* ***Elementarfunktion****, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte, messbare Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ sowie Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mathbb{1}_{A_i}.$$

Bemerkung 1.94. Eine messbare Abbildung, die nur endlich viele Werte annimmt, ist eine Elementarfunktion. (Übung!) $\diamond$

Definition 1.95. *Sind $f, f_1, f_2, \ldots$ Abbildungen $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \ldots \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad \text{für jedes} \quad \omega \in \Omega,$$

so schreiben wir $f_n \uparrow f$ und sagen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton aufsteigend gegen f konvergiert. Analog schreiben wir $f_n \downarrow f$, falls $(-f_n) \uparrow (-f)$.

Satz 1.96. *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) Es gibt eine Folge nichtnegativer Elementarfunktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \uparrow f$.

(ii) Es gibt $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \geq 0$ mit $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$.

Beweis. (i) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $f_n = (2^{-n}\lfloor 2^n f \rfloor) \wedge n$. Dann ist f_n messbar (nach Satz 1.92 und Beispiel 1.85(ii)) und nimmt höchstens $n2^n + 1$ Werte an, ist also eine Elementarfunktion. Offenbar gilt $f_n \uparrow f$.

(ii) Seien f_n wie oben, $B_{n,i} := \{\omega : f_n(\omega) - f_{n-1}(\omega) = i\,2^{-n}\}$ und $\beta_{n,i} = i\,2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, 2^n$. Man überlege sich, dass $\bigcup_{i=1}^{2^n} B_{n,i} = \Omega$. Dann ist $f_n - f_{n-1} = \sum_{i=1}^{2^n} \beta_{n,i} \mathbb{1}_{B_{n,i}}$. Nach Umnummerierung $(n, i) \mapsto m$ erhalten wir $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$, sodass

$$f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n - f_{n-1}) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \mathbb{1}_{A_m}. \qquad \square$$

Als Korollar zu dieser Strukturaussage für messbare $[0, \infty]$-wertige Abbildungen zeigen wir das Faktorisierungslemma.

Korollar 1.97 (Faktorisierungslemma). *Seien $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum und Ω eine nichtleere Menge. Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar bezüglich $\sigma(f)$ – $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, wenn es eine messbare Abbildung $\varphi : (\Omega', \mathcal{A}') \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ gibt mit $g = \varphi \circ f$.*

Beweis. „$\Longleftarrow$" Ist φ messbar und $g = \varphi \circ f$, so ist g messbar nach Satz 1.80.

„$\Longrightarrow$" Sei nun g messbar bezüglich $\sigma(f)$ – $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Wir betrachten zunächst den Fall, wo g nichtnegativ ist. Dann existieren messbare Mengen $A_1, A_2 \ldots \in \sigma(f)$

sowie Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \in [0, \infty)$ mit $g = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$. Nach der Definition von $\sigma(f)$ gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $B_n \in \mathcal{A}'$ mit $f^{-1}(B_n) = A_n$, also mit $\mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{B_n} \circ f$. Wir definieren nun $\varphi : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{B_n}.$$

Offenbar ist φ messbar bezüglich $\mathcal{A}'$ – $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, und es gilt $g = \varphi \circ f$.

Sei nun der allgemeine Fall betrachtet, wo g auch negative Werte annehmen kann. Dann existieren messbare Abbildungen φ^- und φ^+ mit $g^- = \varphi^- \circ f$ und $g^+ = \varphi^+ \circ f$. Daher leistet $\varphi := \varphi^+ - \varphi^-$ das Gewünschte. □

Mit einer messbaren Abbildung wird auch ein Maß von einem Raum auf einen anderen transportiert.

Definition 1.98 (Bildmaß). *Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ Messräume und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Ferner sei $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ messbar. Das durch*

$$\mu \circ X^{-1} : \mathcal{A}' \to [0, \infty], \quad A' \mapsto \mu(X^{-1}(A'))$$

*definierte Maß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ heißt **Bildmaß** von μ unter X.*

Beispiel 1.99. Sei μ ein Maß auf $\mathbb{Z}^2$ und $X : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$. Dann ist

$$\mu \circ X^{-1}(\{x\}) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} \mu(\{(x - y, y)\}). \qquad \diamond$$

Beispiel 1.100. Ist $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bijektive lineare Abbildung und λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, so ist $\lambda \circ L^{-1} = |\det(L)|^{-1} \lambda$. Dies ist klar, weil für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ das Spat (oder Parallelepiped) $L^{-1}((a, b])$ das Volumen $|\det(L^{-1})| \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ hat. ◇

Als Verallgemeinerung des letzten Beispiels geben wir hier ohne Beweis den Transformationssatz für Maße mit stetigen Dichten unter differenzierbaren Abbildungen an. Den Beweis findet man in Lehrbüchern zur Analysis II unter dem Stichwort „Transformationssatz“ oder „Substitutionsregel“ (siehe etwa [7] oder [46]).

Satz 1.101 (Dichtetransformationsformel im $\mathbb{R}^n$). *Es sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit stetiger (oder stückweise stetiger) Dichte $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, das heißt*

$$\mu((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} dt_n \, f(t_1, \ldots, t_n) \quad \textit{für jedes } x \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene (oder abgeschlossene) Menge mit $\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$. Ferner sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen oder abgeschlossen sowie $\varphi : A \to B$ bijektiv und stetig differenzierbar mit Ableitung φ'. Dann hat das Bildmaß $\mu \circ \varphi^{-1}$ die Dichte

$$f_\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(\varphi^{-1}(x))}{|\det(\varphi'(\varphi^{-1}(x)))|}, & \textit{falls } x \in B, \\ 0, & \textit{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus B. \end{cases}$$

Übung 1.4.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Zeige: Eine Borel-messbare Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann messbar bezüglich $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, wenn g gerade ist. ♣

Übung 1.4.2. Man zeige: Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und $g = f$ μ-fast überall, so braucht g nicht messbar zu sein. ♣

Übung 1.4.3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung f'. Zeige: f' ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})$–$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar. ♣

Übung 1.4.4. (Vergleiche Beispiele 1.40 und 1.63.) Sei $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathcal{A} = (2^{\{0,1\}})^{\otimes\mathbb{N}}$ die σ-Algebra, die von den Zylindermengen $\big\{[\omega_1, \ldots, \omega_n] : n \in \mathbb{N}, \omega_1, \ldots, \omega_n \in \{0,1\}\big\}$ erzeugt wird. Ferner sei $\mu = (\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes\mathbb{N}}$ das Bernoulli-Maß auf Ω mit gleichen Gewichten auf 0 und 1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n : \Omega \to \{0,1\}$, $\omega \mapsto \omega_n$ die n-te Koordinatenabbildung, und sei

$$U(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)\, 2^{-n} \qquad \text{für } \omega \in \Omega.$$

(i) Zeige: $\mathcal{A} = \sigma(X_n : n \in \mathbb{N})$.

(ii) Zeige: U ist $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}([0,1])$ messbar.

(iii) Bestimme das Bildmaß $\mu \circ U^{-1}$ auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$.

(iv) Man gebe ein $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ an, sodass $\tilde{U} := U\big|_{\Omega_0}$ bijektiv ist.

(v) Man zeige, dass $\tilde{U}^{-1}$ messbar ist bezüglich $\mathcal{B}([0,1])$–$\mathcal{A}\big|_{\Omega_0}$.

(vi) Welche Interpretation hat die Abbildung $X_n \circ \tilde{U}^{-1}$? ♣

Übung 1.4.5 (Satz von Lusin). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Man zeige: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine abgeschlossene Menge $C \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda(\mathbb{R} \setminus C) < \varepsilon$, sodass die Einschränkung $f\big|_C$ von f auf C stetig ist. (Merke: Dies heißt natürlich nicht, dass f in jedem Punkte $x \in C$ stetig wäre.)

Anleitung: Man zeige die Aussage zunächst mit Hilfe der inneren Regularität des Lebesgue-Maßes λ (Bemerkung 1.67) für Indikatorfunktionen messbarer Mengen und approximiere mit solchen die Abbildung f auf einer geeigneten Menge C gleichmäßig. ♣

1.5 Zufallsvariablen

In diesem Abschnitt werden wir messbare Abbildungen als *Zufallsvariablen* auffassen, die zufällige Beobachtungen beschreiben. Wir definieren den Begriff der Verteilung von Zufallsvariablen.

Im Folgenden sei stets $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Mengen $A \in \mathcal{A}$ heißen **Ereignisse**. $\mathbf{P}[A]$ wird als die Wahrscheinlichkeit interpretiert, dass A eintritt. Oft ist allerdings nicht der Wahrscheinlichkeitsraum selbst betrachtbar, sondern nur gewisse Beobachtungsgrößen. Wir wollen also Wahrscheinlichkeiten dafür definieren, dass Zufallsgrößen bestimmte Werte annehmen und einen Kalkül für, zum Beispiel, Summen von Zufallsgrößen entwickeln.

Definition 1.102 (Zufallsvariablen). *Sei $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum und $X : \Omega \to \Omega'$ messbar.*

*(i) X heißt **Zufallsvariable** mit Werten in $(\Omega', \mathcal{A}')$. Ist $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so nennen wir X eine reelle Zufallsvariable oder schlicht Zufallsvariable.*

(ii) Ist $A' \in \mathcal{A}'$, so schreiben wir $\{X \in A'\} := X^{-1}(A')$ und $\mathbf{P}[X \in A'] := \mathbf{P}[X^{-1}(A')]$. Speziell schreiben wir $\{X \geq 0\} := X^{-1}([0, \infty))$ und analog $\{X \leq b\}$ und so weiter.

Definition 1.103 (Verteilungen). *Sei X eine Zufallsvariable.*

*(i) Das W-Maß $\mathbf{P}_X := \mathbf{P} \circ X^{-1}$ heißt **Verteilung** von X.*

*(ii) Ist X eine reelle Zufallsvariable, so heißt die Abbildung $F_X : x \mapsto \mathbf{P}[X \leq x]$ die **Verteilungsfunktion von** X (eigentlich von $\mathbf{P}_X$). Ist $\mu = \mathbf{P}_X$, so schreiben wir auch $X \sim \mu$ und sagen, dass X nach μ verteilt ist.*

*(iii) Eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ heißt **identisch verteilt**, falls $\mathbf{P}_{X_i} = \mathbf{P}_{X_j}$ für alle $i, j \in I$. Wir schreiben $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$, falls $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$ ($\mathcal{D}$ für* distribution*).*

Satz 1.104. *Zu jeder Verteilungsfunktion F existiert eine reelle Zufallsvariable X mit $F_X = F$.*

Beweis. Wir müssen explizit einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ und eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ angeben mit $F_X = F$.

Die einfachste Möglichkeit ist, $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ zu wählen, $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die identische Abbildung und $\mathbf{P}$ das Lebesgue-Stieltjes Maß mit Verteilungsfunktion F (siehe Beispiel 1.56).

Eine andere Möglichkeit, die zudem etwas lehrreicher ist, beruht darauf, zunächst unabhängig vom konkreten F eine Art Standard-Wahrscheinlichkeitsraum zu definieren, auf dem eine uniform auf $(0, 1)$ verteilte Zufallsvariable definiert ist, die dann vermöge der Umkehrabbildung F^{-1} zu einer Zufallsvariablen X mit Verteilungsfunktion F transformiert wird: Wir wählen $\Omega := (0,1)$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{R})\big|_\Omega$ und $\mathbf{P}$ das Lebesgue-Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ (siehe Beispiel 1.74). Definiere die (linksstetige) Inverse von F

$$F^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\} \quad \text{für } t \in (0,1).$$

Dann ist

$$F^{-1}(t) \leq x \iff t \leq F(x).$$

Speziell ist $\{t : F^{-1}(t) \leq x\} = (0, F(x)] \cap (0,1)$, also ist $F^{-1} : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar und

$$\mathbf{P}[\{t : F^{-1}(t) \leq x\}] = F(x).$$

Mithin ist $X := F^{-1}$ die gewünschte Zufallsvariable. □

Beispiel 1.105. Wir geben zu verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}$ reelle Zufallsvariablen X mit ebendieser Verteilung an. (Der konkrete Ort in diesem Buch dient lediglich als Vorwand, um ein paar der wichtigsten Verteilungen einzuführen, auf die wir bei späteren Gelegenheiten immer wieder zurückkommen.)

(i) Ist $p \in [0,1]$ und $\mathbf{P}[X = 1] = p$, $\mathbf{P}[X = 0] = 1 - p$, so heißt $\mathbf{P}_X =: \mathrm{Ber}_p$ die **Bernoulli-Verteilung** mit Parameter p. Formal ist

$$\mathrm{Ber}_p = (1-p)\,\delta_0 + p\,\delta_1,$$

und die Verteilungsfunktion ist

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ 1-p, & \text{falls } x \in [0,1), \\ 1, & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

(ii) Ist $p \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ sowie $X : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$ mit

$$\mathbf{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

so heißt $\mathbf{P}_X =: b_{n,p}$ die **Binomialverteilung** mit Parametern n und p. Formal ist

$$b_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,\delta_k.$$

(iii) Ist $p \in (0,1]$ und $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\mathbf{P}[X = n] = p\,(1-p)^n \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0,$$

so heißt $\gamma_p := b^-_{1,p} := \mathbf{P}_X$ die **geometrische Verteilung**[1] mit Parameter p. Formal können wir schreiben:

$$\gamma_p = \sum_{n=0}^{\infty} p\,(1-p)^n\,\delta_n.$$

Die Verteilungsfunktion ist $F(x) = 1 - (1-p)^{\lfloor x+1 \rfloor \vee 0}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Wir können $X + 1$ als die Wartezeit auf den ersten Erfolg bei „unabhängigen" Zufallsexperimenten auffassen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit p zum Erfolg führen. In der Tat: Sei $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbf{P}$ das Produktmaß $\big((1-p)\delta_0 + p\,\delta_1\big)^{\otimes\mathbb{N}}$ (Satz 1.64) sowie $\mathcal{A} = \sigma([\omega_1,\ldots,\omega_n] : \omega_1,\ldots,\omega_n \in \{0,1\},\, n \in \mathbb{N})$. Wir setzen

$$X(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} : \omega_n = 1\} - 1,$$

mit der Konvention $\inf\emptyset = \infty$. Offenbar ist jede der Abbildungen

$$X_n : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \begin{cases} n-1, & \text{falls } \omega_n = 1, \\ \infty, & \text{falls } \omega_n = 0, \end{cases}$$

$\mathcal{A} - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar und $X = \inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Also ist X auch $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar, also eine Zufallsvariable. Sei $\omega^0 := (0,0,\ldots) \in \Omega$. Dann ist $\mathbf{P}[X \geq n] = \mathbf{P}[[\omega^0_1,\ldots,\omega^0_n]] = (1-p)^n$. Also ist

$$\mathbf{P}[X = n] = \mathbf{P}[X \geq n] - \mathbf{P}[X \geq n+1] = (1-p)^n - (1-p)^{n+1} = p\,(1-p)^n.$$

(iv) Seien $r > 0$ (nicht notwendigerweise ganzzahlig) und $p \in (0,1]$. Mit

$$b^-_{r,p} := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-1)^k\, p^r (1-p)^k\, \delta_k \tag{1.17}$$

bezeichnen wir die **negative Binomialverteilung** oder **Pascal-Verteilung** mit Parametern r und p. (Hierbei ist $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ der verallgemeinerte Binomialkoeffizient.) Für $r \in \mathbb{N}$ ist $b^-_{r,p}$, ähnlich wie im vorangehenden Beispiel, die Verteilung der Wartezeit auf den r-ten Erfolg bei unabhängigen Versuchen. Wir werden hierauf in Beispiel 3.4(iv) zurückkommen.

(v) Ist $\lambda \in [0,\infty)$ und $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\mathbf{P}[X = n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0,$$

so heißt $\mathbf{P}_X =: \mathrm{Poi}_\lambda$ die **Poisson-Verteilung** mit Parameter λ.

(vi) Die **hypergeometrische Verteilung** mit Parametern $S, W, n \in \mathbb{N}$

[1] Obacht: Manche Autoren nennen die um Eins verschobene Verteilung auf $\mathbb{N}$ die geometrische Verteilung.

$$\mathrm{Hyp}_{B,W;n}(\{b\}) = \frac{\binom{B}{b}\binom{W}{n-b}}{\binom{B+W}{n}}, \quad b \in \{0,\dots,n\}, \tag{1.18}$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, aus einer Urne mit S schwarzen und W weißen Kugeln bei n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen genau s schwarze Kugeln zu ziehen. Mit ein bisschen Kombinatorik lässt sich dies leicht auf die Situation mit k Farben und B_i Kugeln der Farbe $i = 1,\dots,k$ verallgemeinern. Die Wahrscheinlichkeit, dass unter n gezogenen Kugeln exakt b_i von jeder Farbe $i = 1,\dots,k$ sind, ist gegeben durch die **verallgemeinerte hypergeometrische Verteilung**

$$\mathrm{Hyp}_{B_1,\dots,B_k;n}(\{(b_1,\dots,b_k)\}) = \frac{\binom{B_1}{b_1}\cdots\binom{B_k}{b_k}}{\binom{B_1+\ldots+B_k}{n}}. \tag{1.19}$$

(vii) Seien $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ und X reell mit

$$\mathbf{P}[X \le x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann heißt $\mathbf{P}_X =: \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ Gauß'sche **Normalverteilung** mit Parametern μ und σ^2.

(viii) Ist $X \ge 0$ reell und $\theta > 0$ sowie

$$\mathbf{P}[X \le x] = \mathbf{P}[X \in [0,x]] = \int_0^x \theta\, e^{-\theta t}\, dt \quad \text{für } x \ge 0,$$

so heißt $\mathbf{P}_X$ **Exponentialverteilung** mit Parameter θ (kurz: $\exp_\theta$).

(ix) Ist X $\mathbb{R}^d$-wertig, $\mu \in \mathbb{R}^d$, Σ eine positiv definite $d \times d$ Matrix und

$$\mathbf{P}[X \le x] = \det(2\pi\,\Sigma)^{-1/2} \int_{(-\infty,x]} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big\langle t-\mu,\, \Sigma^{-1}(t-\mu)\Big\rangle\Big)\, \lambda^d(dt)$$

für $x \in \mathbb{R}^d$ (wobei $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^d$ bezeichnet), so heißt $\mathbf{P}_X =: \mathcal{N}_{\mu,\Sigma}$ die d-dimensionale Normalverteilung mit Parametern μ und Σ. ◇

Definition 1.106. *Hat die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ die Gestalt*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} dt_n\, f(t_1,\dots,t_n) \quad \textit{für } x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

*für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, so heißt f die **Dichte** der Verteilung.*

Beispiel 1.107. (i) Für $\theta, r > 0$ heißt die Verteilung $\Gamma_{\theta,r}$ auf $[0,\infty)$ mit Dichte

$$x \mapsto \frac{\theta^r}{\Gamma(r)}\, x^{r-1} e^{-\theta x}$$

(wo Γ die Gamma-Funktion bezeichnet) **Gamma-Verteilung** mit Größenparameter θ und Formparameter r.

(ii) Für $r, s > 0$ heißt die Verteilung $\beta_{r,s}$ auf $[0,1]$ mit Dichte

$$x \mapsto \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\, x^{r-1}(1-x)^{s-1}$$

Beta-Verteilung mit Parametern r und s.

(iii) Für $a > 0$ heißt die Verteilung Cau_a auf $\mathbb{R}$ mit Dichte

$$x \mapsto \frac{1}{a\pi} \frac{1}{1 + (x/a)^2}$$

Cauchy-Verteilung mit Parameter a. ◇

Übung 1.5.1. Man leite (1.17) nach der Interpretation als Wartezeit kombinatorisch her unter Benutzung der Identität $\binom{-n}{k}(-1)^k = \binom{n+k-1}{k}$. ♣

Übung 1.5.2. Man gebe ein Beispiel an für zwei normalverteilte X und Y, sodass (X, Y) nicht (zweidimensional) normalverteilt ist. ♣

Übung 1.5.3. Man zeige mit Hilfe von Satz 1.101 (Transformationsformel für Dichten):

(i) Ist $X \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ und sind $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, so ist $(aX + b) \sim \mathcal{N}_{a\mu+b,a^2\sigma^2}$.

(ii) Ist $X \sim \exp_\theta$ und $a > 0$, so ist $aX \sim \exp_{\theta/a}$. ♣

http://www.springer.com/978-3-540-76317-8

Wahrscheinlichkeitstheorie
Klenke, A.
2008, XII, 624 S. 34 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-540-76317-8