Prof. Dr. H. Zähle
M.Sc. C. Gärtner

Universität des Saarlandes, SS 2015
9. Juli 2015

Stochastik I

12. Übung

Aufgabe 45 (4 Punkte)

Es seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(\varepsilon\mathbb{Z})$ und $\mu_1 * \mu_2$ deren Faltung, wobei $\varepsilon\mathbb{Z} := \{\ldots, -2\varepsilon, -\varepsilon, 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots\}$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$.

(i) Verifizieren Sie die folgende Formel für $k \in \mathbb{Z}$:

$$\mu_1 * \mu_2\,[\{k\varepsilon\}] \;=\; \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu_1[\{(k-m)\varepsilon\}]\,\mu_2[\{m\varepsilon\}].$$

(ii) Wie vereinfacht sich die Formel, wenn sogar $\mu_i \in \mathcal{M}_1(\{0, \varepsilon, \ldots, n_i\varepsilon\})$, $i = 1, 2$, für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 46 (5 Punkte)

Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\mathrm{B}_{n_1,p} * \cdots * \mathrm{B}_{n_k,p} = \mathrm{B}_{n_1+\cdots+n_k,p}$ für $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$.

(ii) $\mathrm{Poiss}_{\lambda_1} * \cdots * \mathrm{Poiss}_{\lambda_k} = \mathrm{Poiss}_{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}$ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$.

(iii) Für eine Zufallsvariable $X \sim \mathrm{N}_{0,1}$ und $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ gilt $\sigma X + m \sim \mathrm{N}_{m,\sigma^2}$.

(iv) $\varphi_{N_{m,\sigma^2}}(t) = e^{itm} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(v) $\mathrm{N}_{m_1,\sigma_1^2} * \cdots * \mathrm{N}_{m_k,\sigma_k^2} = \mathrm{N}_{m_1+\cdots+m_k,\sigma_1^2+\cdots+\sigma_k^2}$ für $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2 > 0$.

Aufgabe 47 (3 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_i]$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_i] < \infty$. Zudem sei $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie unter Verwendung der Tchebyschev-Ungleichung, dass

$$n^\alpha(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow{\mathsf{p}} 0 \qquad \text{für jedes } \alpha < 1/2.$$

Dies impliziert insbesondere $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathsf{p}} \mathbb{E}[X_1]$. Warum?

Aufgabe 48 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \ell|_{[0,1]})$ und $p \in [1, \infty)$. Ferner seien $A_1 := [0, 1]$, $A_2 := [0, \frac{1}{2}]$, $A_3 := (\frac{1}{2}, 1]$, $A_4 := [0, \frac{1}{4}]$, $A_5 := (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $A_6 := (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $A_7 := (\frac{3}{4}, 1]$, $A_8 := [0, \frac{1}{8}]$, ... Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

(i) $X_n \xrightarrow{\mathsf{p}} X$, aber $X_n \overset{L^1}{\not\longrightarrow} X$, falls $X_n := \frac{1}{\ell(A_n)}\mathbb{1}_{A_n}$ und $X :\equiv 0$.

(ii) $X_n \xrightarrow{L^p} X$, aber $X_n \overset{\text{f.s.}}{\not\longrightarrow} X$, falls $X_n := \mathbb{1}_{A_n}$ und $X :\equiv 0$.

(iii) $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ und $X_n \xrightarrow{L^p} X$, falls $X_n := \mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n})}$ und $X :\equiv 0$.

(iv) $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ und $X_n \overset{L^p}{\not\longrightarrow} X$, falls $X_n := n^{\frac{1}{p}}\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n})}$ und $X :\equiv 0$.