Prof. Dr. H. Zähle
M.Sc. C. Gärtner

Universität des Saarlandes, SS 2015
18. Juni 2015

Stochastik I

9. Übung

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Ziehen Sie für die folgenden Aufgaben die in Anlage 2 beschriebenen Urnenmodelle zu Hilfe. Geben Sie jeweils zunächst einen geeigneten W-Raum an, der das Zufallsexperiment modelliert.

(i) Aus einem Skatblatt (32 Karten, 4 Farben: Kreuz, Pik, Herz, Karo) werden zwei Karten ohne Zurückstecken gezogen. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse?

{„Die erste Karte ist Herz, aber die zweite Karte ist kein Herz.“}

{„Die erste Karte ist eine Dame und die zweite Karte ist Karo.“}

(ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 von 25 Studierenden in einem Hörsaal am gleichen Tag Geburtstag haben? Annahmen: Die Geburtstage seien gleichverteilt auf 365 Tage und „unabhängig“ voneinander (insbesondere keine Zwillinge, Drillinge, etc.).

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Ein (unbegabter) Sportschütze gibt einen Schuss auf eine 10-er Ringscheibe ab, bei dem der Treffer gleichmäßig verteilt sei. Jeder Ring sei 1 cm breit, die 10 sei ein Kreis von 1 cm Durchmesser.

(i) Geben Sie einen geeigneten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für dieses Zufallsexperiment an.

(ii) Definieren Sie eine Zufallsvariablen X auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, die die Anzahl der bei dem Schuss erzielten Ringe angibt.

(iii) Spezifizieren Sie die Verteilung $\mathbb{P}_X$ von X.

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $A, A_1, \ldots, A_n, G, H \in \mathcal{F}$ Ereignisse und X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}_X = \mathrm{Exp}_\lambda$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\mathbb{P}[A_1 \cap \cdots \cap A_n] = \mathbb{P}[A_1] \cdot \mathbb{P}[A_2|A_1] \cdot \mathbb{P}[A_3|A_1 \cap A_2] \cdots \mathbb{P}[A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}]$.

(ii) $\mathbb{P}_G[A|H] = \mathbb{P}[A|G \cap H]$.

(iii) $\mathbb{P}[X > c + x|X > c] = \mathbb{P}[X > x]$ für alle $x, c > 0$.

Aufgabe 36 (3 Punkte)

Eine Person feiert heute ihren x-ten Geburtstag. Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T : (\Omega, \mathcal{F}) \to ((x, \infty), \mathcal{B}((x, \infty))$ eine Zufallsvariable, die den Todeszeitpunkt der betrachteten Person modellieren. Es bezeichne ${}_np_x$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Person die nächsten n Jahre überlebt, und q_{x+j} die Wahrscheinlichkeit, dass die Person zwischen ihrem $(x+j)$-ten und $(x+j+1)$-ten Geburtstag verstirbt, falls sie ihren $(x + j)$-ten Geburtstag erlebt. Mit anderen Worten:

$${}_np_x := \mathbb{P}[T \geq x + n], \quad q_x := \mathbb{P}[T < x + 1] \quad \text{und} \quad q_{x+j} := \mathbb{P}[T < x + j + 1 \,|\, T \geq x + j]$$

für $n, j \in \mathbb{N}$. Verifizieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung ${}_np_x = \prod_{j=0}^{n-1}(1 - q_{x+j})$.