Prof. Dr. H. Zähle
M.Sc. C. Gärtner

Universität des Saarlandes, SS 2015
27. Mai 2015

Stochastik I

6. Übung

Aufgabe 20 (3 Punkte)

Es seien $\mathbb{X} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$ für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, $\mu := \sum_{x\in\mathbb{X}}\delta_x$, ℓ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $f,g\in\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ reellwertige Funktionen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $f = g$ μ-f.s. genau dann, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x\in\mathbb{X}$.

(ii) Es gilt $f = g$ ℓ-f.s., wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{X}$.

Aufgabe 21 (2 Punkte)

Betrachten Sie die Folge $(f_n)\subset\mathcal{L}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit

$$f_n := \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,1)} & , \ n \text{ ungerade} \\ \mathbb{1}_{[-1,0)} & , \ n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Verifizieren Sie anhand dieses Beispiels, dass die Ungleichung im Lemma von Fatou strikt sein kann, d. h. dass $\int \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\ell < \liminf_{n\to\infty}\int f_n\, d\ell$.

Aufgabe 22 (3 Punkte)

Umgekehrtes Lemma von Fatou. Es seien $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ ein Maßraum und $(f_n)\subset\mathcal{L}_+(\Omega,\mathcal{F})$. Weiterhin existiere ein μ-integrierbares $g\in\mathcal{L}_+(\Omega,\mathcal{F})$ mit $f_n\le g$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n d\mu \le \int \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Hinweis: Wenden Sie das Lemma von Fatou auf die Funktionen $\widetilde{f}_n := g - f_n$, $n\in\mathbb{N}$, an.

Aufgabe 23 (4 Punkte)

Satz von Scheffé. Es seien $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ ein Maßraum und $f,f_1,f_2,\ldots\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{F})$ mit $f_n\longrightarrow f$ μ-f.s. Zeigen Sie, dass dann

$$\|f_n - f\|_1\longrightarrow 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \int |f_n|\, d\mu \longrightarrow \int |f|\, d\mu.$$

Hinweise: Wenden Sie für den Beweis von „$\Longleftarrow$“ das Lemma von Fatou auf die Funktionen $\widetilde{f}_n := |f_n| + |f| - |f_n - f|$, $n\in\mathbb{N}$, an. Beachten Sie zudem, dass $\widetilde{f}_n\longrightarrow 2|f|$ μ-f.s. Die Implikation „$\Longrightarrow$“ gilt auch ohne die Voraussetzung, dass $f_n\longrightarrow f$ μ-f.s.

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Für feste $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ sei $h\in\mathcal{L}^1([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\ell|_{[a,b]})$. Zeigen Sie, dass die durch

$$F(x) := \int_{[a,x]} h\, d\ell_{[a,b]}, \qquad x\in[a,b]$$

gegebene Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig ist.