Prof. Dr. Christian Bender
Philip Oberacker

Universität des Saarlandes, Sommersemester 2014
10. Juni 2014

Stochastik I

Blatt 8

Aufgabe 1 (2,5+2,5=5 Punkte)

(a) Seien $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $\eta \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$ zwei unabhängige Zufallsvariablen. Wir definieren

$$Y := (2\eta - 1)X.$$

Zeigen Sie, dass X und Y unkorreliert, jedoch nicht unabhängig sind.

(b) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X, Y Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass X und Y genau dann unabhängig sind, wenn $f(X)$ und $g(Y)$ unkorreliert sind für alle beschränkten, borel-messbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (2,5+2,5=5 Punkte)

(a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli(p)-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Summe $\sum_{i=1}^n X_i$ dann Binomial(n, p)-verteilt ist.

(b) Verwenden Sie Teil (a) um den Erwartungswert und die Varianz einer Binomial(n, p)-verteilten Zufallsvariable X auszurechnen.

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y \in L^2(\mathbb{P})$ mit $\mathrm{Var}[X] > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass mit der Wahl $a = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[X]}$ und $b = \mathbb{E}[Y] - a\mathbb{E}[X]$ der Ausdruck

$$\mathbb{E}\left[\Big(Y - (aX + b)\Big)^2\right]$$

minimal wird.

(b) Folgern Sie hieraus

$$X \text{ und } Y \text{ sind unkorreliert} \quad \Leftrightarrow \quad \min_{a,b \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\Big(Y - (aX + b)\Big)^2\right] = \mathrm{Var}\left[Y\right].$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten ein Programm, das einen Datenträger auf Fehler des Dateisystems überprüft und versucht diese zu reparieren. Die Zufallsvariable X modelliere die zufällige Dauer (in Minuten) des Durchlaufs des Programmes. Unser Ansatz ist, für X eine Lebesgue-Dichte der Gestalt

$$f(x) := \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

wobei $b, p > 0$ Parameter sind und Γ die *Gammafunktion* bezeichnet, zu Grunde zu legen (Sie müssen nicht überprüfen, dass es sich in der Tat um eine Dichtefunktion handelt). Welche Wahl ist für die Parameter b und p ist sinnvoll, wenn wir aus Erfahrung wissen, dass das Programm im Mittel 4 Minuten benötigt und die Standardabweichung 2 Minuten beträgt?