



Self-Test Problems

This problem sheet contains 6 problems which are intended to be similar in style and difficulty to a 180-minute written exam on IPCV. Only aid used should be a handwritten, double-sided DIN A4 paper with formulas and notes from the lecture.

Use these problems to test yourself. Opportunity to ask questions related to the problems of this test is given in the tutorials

Tue, July 16 to Wed, July 17, 2019.

Problem 1 (Fourier and Wavelet Transform)

- (a) Compute the discrete Fourier transform of $\mathbf{f} = (7, 1, 2, 7)^\top$. Set the coefficient which corresponds to the highest frequency to zero and perform the inverse transform.
- (b) Compute the discrete Haar wavelet transform of $\mathbf{f} = (7, 1, 2, 7)^\top$. Set the scaling coefficient of smallest absolute value to zero and perform the inverse transform.

Aufgabe 1 (Fourier- und Wavelettransformation)

Gegeben sei das Signal $\mathbf{f} = (7, 1, 2, 7)^\top$.

- (a) Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformation von \mathbf{f} . Setzen Sie den Koeffizienten, der zur höchsten Frequenz gehört, auf null und führen Sie die Rücktransformation aus.
 - (b) Berechnen Sie die diskrete Haar Wavelettransformation von \mathbf{f} . Setzen Sie den Skalierungskoeffizienten mit betragsmäßig kleinstem Wert auf null und führen Sie die Rücktransformation aus.
-

Problem 2 (Quartic B-Spline Interpolation)

Consider the 1-D case with finitely many equidistant interpolation data f_1, \dots, f_n given at the points $x_1 = 1, \dots, x_n = N$. The zeroth order and third order B-splines are defined as

$$\beta_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } |x| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{for } |x| = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{else,} \end{cases} \quad \beta_3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - x^2 + \frac{1}{2}|x|^3, & \text{for } |x| < 1, \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3, & \text{for } 1 \leq |x| < 2, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

- (a) Determine the synthesis function $\beta_4(x)$ for *quartic (i.e. fourth order) B-spline interpolation*.
- (b) Set up the linear system of equations that has to be solved in order to determine the interpolation coefficients for *quartic B-spline interpolation*. You do not have to solve the system.
- (c) Do quartic B-splines require less or more computational effort for determining the coefficients than cubic B-splines? Justify your answer.

Aufgabe 2 (Quartische B-Spline-Interpolation)

Gegeben seien für den 1-D Fall endlich viele äquidistante Interpolationswerte f_1, \dots, f_n zu den Punkten $x_1 = 1, \dots, x_n = N$. B-Splines nullter und dritter Ordnung sind definiert als

$$\beta_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } |x| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{for } |x| = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{else,} \end{cases} \quad \beta_3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - x^2 + \frac{1}{2}|x|^3, & \text{for } |x| < 1, \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3, & \text{for } 1 \leq |x| < 2, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

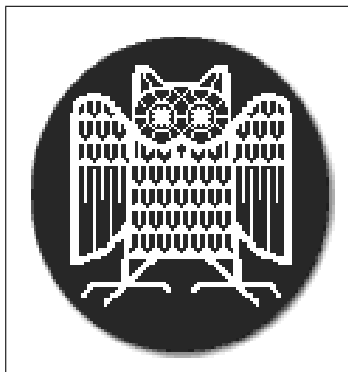
- (a) Bestimmen Sie die Synthesefunktion $\beta_4(x)$ für *quartische B-Spline-Interpolation (d.h. B-Spline-Interpolation vierter Ordnung)*.
 - (b) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, welches gelöst werden muss, um die Koeffizienten für *quartische B-Spline-Interpolation* zu bestimmen. Sie müssen das System nicht lösen.
 - (c) Ist der Rechenaufwand zum Bestimmen der Koeffizienten für quartische B-Splines geringer oder höher als der für kubische B-Splines? Begründen Sie Ihre Antwort.
-

Problem 3 (Morphological Operations)

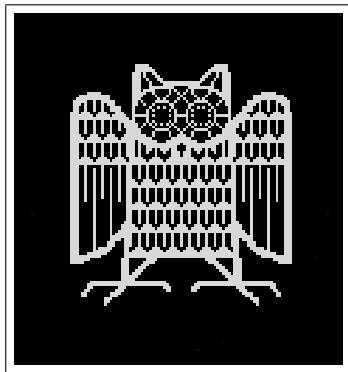
The figure on the next page shows one original image (**O**). The filtered images (**A**)–(**F**) are the results from applying a morphological filter to the original image (**O**). All operations were performed using the same structuring element. State for each image the corresponding filter operation.

Aufgabe 3 (Morphologische Operationen)

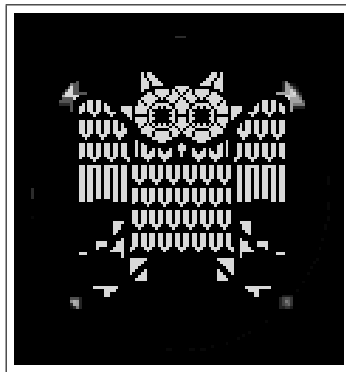
Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt ein Originalbild (**O**). Die gefilterten Bilder (**A**)–(**F**) sind die Ergebnisse nach dem Anwenden von morphologischen Filtern auf der Originalbild (**O**). Alle Operationen wurden mit demselben Strukturelement ausgeführt. Nennen Sie für jedes Bild die entsprechende Filteroperation.



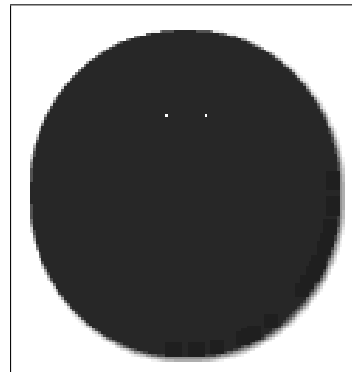
(O)



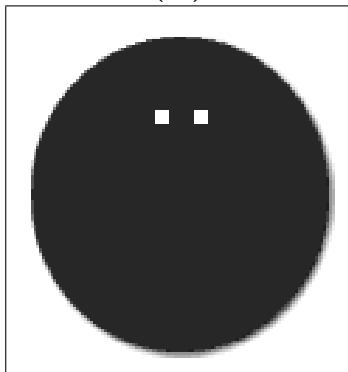
(A)



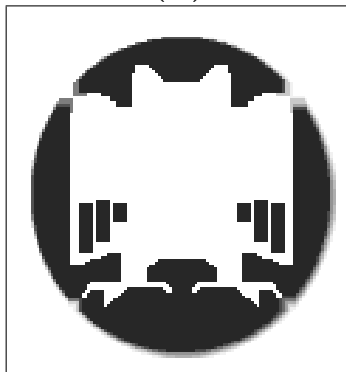
(B)



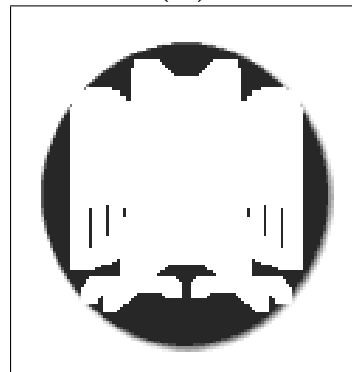
(C)



(D)



(E)



(F)

Figure for Problem 3 – Abbildung für Aufgabe 3

Problem 4 (Variational Methods)

- (a) An energy functional for obtaining a smoothed version w of some image f is given by

$$E(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((w - f)^2 + \alpha |\nabla w|^2) dx dy$$

with $\alpha > 0$. Show that the Fourier transform \hat{w} of a minimiser w fulfils the formula

$$\hat{w} = \frac{\hat{f}}{1 + 4\pi^2\alpha(u^2 + v^2)},$$

where \hat{f} is the Fourier transform of the image f and u, v are frequencies in x - and y -direction.

Does this equation describe a low-, high- or bandpass filter for $\alpha > 0$?

- (b) Let f denote some blurred version of the image w . Let h be the corresponding symmetric blurring kernel, and $*$ denote convolution. A minimiser of the energy functional

$$E(w) = \int_{\Omega} ((h * w - f)^2 + Kw^2) dx dy \quad (K > 0)$$

fulfils the Euler-Lagrange equation

$$h * (h * w - f) + Kw = 0.$$

Prove that the corresponding minimiser is equivalent to the result of Wiener filtering, i.e:

$$\hat{w} = \frac{1}{\hat{h}} \cdot \frac{\hat{h}^2 \hat{f}}{\hat{h}^2 + K}$$

Aufgabe 4 (Variationsmethoden)

- (a) Ein Energiefunktional, das genutzt werden kann, um eine geglättete Version w eines Bildes f zu erhalten, ist gegeben durch

$$E(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((w - f)^2 + \alpha |\nabla w|^2) dx dy$$

mit $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation \hat{w} eines Minimierers w die folgende Formel erfüllt:

$$\hat{w} = \frac{\hat{f}}{1 + 4\pi^2\alpha(u^2 + v^2)}.$$

Dabei bezeichnet \hat{f} die Fouriertransformation des Originalbildes f und u , v bezeichnen Frequenzen in x - und y -Richtung.

Beschreibt diese Gleichung für $\alpha > 0$ einen Tief-, Hoch- oder Bandpassfilter?

- (b) Es sei f eine unscharfe Version des Bildes w . Weiterhin sei h der symmetrische Faltungskern, der diese Unschärfe erzeugt und $*$ bezeichne die Faltungsoperation. Das Energiefunktional

$$E(w) = \int_{\Omega} ((h * w - f)^2 + Kw^2) dx dy \quad (K > 0)$$

erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung

$$h * (h * w - f) + Kw = 0.$$

Zeigen Sie, dass der zugehörige Minimierer äquivalent zum Ergebnis eines Wiener-Filters ist, d.h.

$$\hat{w} = \frac{1}{\hat{h}} \cdot \frac{\hat{h}^2 \hat{f}}{\hat{h}^2 + K}$$

Problem 5 (Stereo)

Let an orthoparallel stereo image pair $f_1(x, y)$ and $f_2(x, y)$ be given. The goal is to formulate a model for estimating a large disparity $u(x, y)$ which is based on the assumption that for object points the *entries of the Hessian* H_f remain constant.

- (a) Formulate the constraint equations which results from this assumptions. Why should you refrain from a linearisation?
- (b) Formulate a quadratic variational model for a disparity estimation that combines the constraint from part (a) with a smoothness assumption.
- (c) Derive the differential equation which must necessarily be satisfied by a solution $u(x, y)$.
(Boundary conditions need *not* to be specified.)

Aufgabe 5 (Stereo)

Gegeben sei ein Stereobildpaar $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ im orthoparallelen Fall. Ziel ist es, ein Modell zur Schätzung einer großen Disparität $u(x, y)$ zu formulieren, das von der Annahme ausgeht, dass für Objektpunkte die *Einträge der Hesse-Matrix* H_f konstant bleiben.

- (a) Formulieren Sie die aus dieser Annahme resultierende Bedingungsgleichungen. Warum sollten Sie auf eine Linearisierung verzichten?
 - (b) Modellieren Sie einen quadratischen Variationsansatz zur Disparitätsschätzung, der die Bedingung aus (a) mit einer Glattheitsannahme kombiniert.
 - (c) Leiten Sie die Differenzialgleichung her, die eine Lösung $u(x, y)$ notwendigerweise erfüllen muss.
(Randbedingungen müssen *nicht* angegeben werden.)
-

Problem 6 (Camera Geometry)

Consider a camera with focal distance 2. Its image coordinate system is orthogonal with square-shaped pixels of size 1. The principal point in this coordinate system is located in $(3, 2)^\top$. Furthermore, the position of the world coordinate system relative to the camera coordinate system is given by a rotation around the y -axis by an angle of α degrees.

- (a) State the extrinsic matrix \mathbf{A}^{ext} and intrinsic matrix \mathbf{H} .
- (b) Calculate the full projection matrix explicitly, which maps a 3-D point in homogeneous world coordinates $(X_w, Y_w, Z_w, 1)^\top$ to a 2-D image point with homogeneous coordinates $(u, v, w)^\top$.

Aufgabe 6 (Kamerageometrie)

Gegeben sei eine Kamera mit einer Brennweite 2. Das Bildkoordinatensystem ist orthogonal mit quadratischen Pixeln der Größe 1. Der Hauptpunkt in diesem Koordinatensystem liegt in $(3, 2)^\top$. Desweiteren ist die Position des Weltkoordinatensystems relativ zum Kamerakoordinatensystem gegeben durch eine Drehung von α Grad um die y -Achse.

- (a) Nennen Sie die extrinsische Matrix \mathbf{A}^{ext} und die intrinsische Matrix \mathbf{H} .
 - (b) Geben Sie die vollständige Projektionsmatrix an, die einen 3-D Punkt mit homogenen Weltkoordinaten $(X_w, Y_w, Z_w, 1)^\top$ auf einen 2-D Bildpunkt mit homogenen Koordinaten $(u, v, w)^\top$ projiziert.
-