Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2018

11. April 2018

Stochastik I

1. Übung

Aufgabe 1 **(4 Punkte)** Für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $q \in [0,1]$ sei

$$\Omega = \{0,1\}^n = \{(i_1, \dots, i_n) : \ i_j \in \{0,1\}, \ j = 1, \dots, n\}$$
$$p : \Omega \to \mathbb{R}, \quad (i_1, \dots, i_n) \mapsto q^{\sum_{j=1}^n i_j} (1-q)^{n - \sum_{j=1}^n i_j}.$$

(i) Zeigen Sie, dass p eine Zähldichte auf Ω ist.

(ii) Sei $A_k = \{(i_1, \dots, i_n) \in \Omega : \sum_{j=1}^n i_j = k\}$ für $0 \leq k \leq n$. Berechnen Sie $P(A_k)$, wobei P das von p induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß beschreibt.

(iii) Zeigen Sie, dass $\tilde{p}(k) := P(A_k)$ eine Zähldichte auf $\{0, \dots, n\}$ definiert.

Aufgabe 2 **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass die folgenden Mengensysteme Erzeuger derselben σ-Algebra sind:

(i) $J_1 := \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$,

(ii) $J_2 := \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$,

(iii) $J_3 := \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}^n\}$,

(iv) $J_4 := \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}^n\}$,

(v) $J_5 := \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ offen}\}$.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Maßes μ:

(i) *Endliche Additivität*: Für disjunkte $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(ii) Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Unter welcher Voraussetzung kann man dies zu

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

umstellen?

(iii) *Monotonie*: Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

(iv) *Sub-σ-Additivität*: Für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$