Prof. Dr. Christian Bender
Philip Oberacker

Universität des Saarlandes, Sommersemester 2014
03. Juni 2014

Stochastik I

Blatt 7

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei σ-endliche Maßräume. Weiter seien reellwertige, nichtnegative messbare Funktionen X_i auf $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ gegeben.

(a) Beweisen Sie, dass die durch

$$\nu_i(A_i) := \int_{A_i} X_i \; d\mu_i, \quad A_i \in \mathcal{A}_i, \quad i = 1, 2$$

definierten Maße σ-endlich sind.

(b) Zeigen Sie, dass das Produktmaß $\nu_1 \otimes \nu_2$ die Dichte $X(\omega_1, \omega_2) := X_1(\omega_1)X_2(\omega_2)$ bezüglich des Produktmaßes $\mu_1 \otimes \mu_2$ besitzt.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Seien F und G zwei maßerzeugende Funktionen auf $\mathbb{R}$ und μ_F bzw. μ_G die von ihnen erzeugten Maße. Weiter seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie

$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_{(a,b]} F(t-) \; \mu_G(dt) + \int_{(a,b]} G(s) \; \mu_F(ds)$$

Hinweis:
Hierbei könnte es sich als nützlich erweisen, die beiden Integrale

$$\int_{(a,b]^2} \mathbb{1}_{\{s<t\}} \; \mu_F \otimes \mu_G(d(s,t)) \quad \text{und} \quad \int_{(a,b]^2} \mathbb{1}_{\{s \geq t\}} \; \mu_F \otimes \mu_G(d(s,t))$$

mit Hilfe des Satzes von Fubini zu berechnen.

Aufgabe 3 (4+3=7 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine reellwertige, nichtnegative Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(a) Zeigen Sie (zum Beispiel mit Hilfe des Satzes von Fubini) die Formel

$$\int_\Omega X^p \; d\mathbb{P} = \int_{(0,\infty)} p \; t^{p-1} \; \mathbb{P}(\{X \geq t\}) \; \lambda(dt).$$

(b) Seien nun $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, reellwertige und nichtnegative Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, so dass jedes X_i $(i = 1, \ldots, n)$ die Verteilungsfunktion F besitzt. Benutzen Sie Teil (a), um zu zeigen

$$\mathbb{E}\left[\max_{i=1,\ldots,n} X_i\right] = \int_{(0,\infty)} \left(1 - F(t)^n\right) \ \lambda(dt).$$

Berechnen Sie weiter den obigen Erwartungswert im Fall $F(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t) \cdot t$.