Prof. Dr. H. Zähle
M.Sc. C. Gärtner

Universität des Saarlandes, SS 2015
2. Juli 2015

Stochastik I

11. Übung

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Es seien $p \in (0,1]$ und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängig und identisch $\mathrm{B}_{1,p}$-verteilten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wir definieren eine Abbildung $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ durch $T(\omega) := \inf\{i \in \mathbb{N} : X_i(\omega) = 1\}$, $\omega \in \Omega$, unter Verwendung der Konvention $\inf \emptyset := \infty$. Zeigen Sie:

(i) T ist $(\mathcal{F}, \mathfrak{P}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}))$-messbar.

(ii) $\mathbb{P}_T = \mathrm{Geo}_p$.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Für Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{B}_{n,p}$ und $Y \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sowie $c > 0$ berechne man $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$ und $\mathbb{E}[X|X < n]$ sowie $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y]$ und $\mathbb{E}[Y|Y > c]$.

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Es seien $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} := \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω. Zudem seien X und Y zwei durch $X(1) := X(2) := 1$, $X(3) := X(4) := -1$ bzw. $Y(1) := 2$, $Y(2) := -2$, $Y(3) := 1$, $Y(4) := -1$ gegebene Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(i) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $\mathbb{C}\mathrm{orr}(X, Y)$ von X und Y.

(ii) Prüfen Sie, ob X und Y unabhängig sind.

(iii) Es gilt $X = aY^2 + b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$. Finden Sie diese a, b.

Aufgabe 44 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_d$ Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Es bezeichnen F_X und F_{X_i} die Verteilungsfunktionen von $X := (X_1, \ldots, X_d)$ bzw. X_i, $i = 1, \ldots, d$. Zeigen Sie:

(i) $F_{X_i}(x_i) = \lim_{y\to\infty} F_X(y, \ldots, y, x_i, y, \ldots, y)$ für alle $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, d$.

(ii) $F_X(x) = \prod_{i=1}^d F_{X_i}(x_i)$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, falls $X_1, \ldots, X_d$ unabhängig sind.

Zeigen Sie außerdem die folgenden Aussagen für den Fall, dass $\mathbb{P}_X$ eine Lebesgue-Dichte f_X besitzt:

(iii) Die Funktion $f_{X_i}(x_i) := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_X(x_1, \ldots, x_d)\, \ell^{(d-1)}(d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d))$, $x_i \in \mathbb{R}$, liefert eine Lebesgue-Dichte von $\mathbb{P}_{X_i}$ für jedes $i = 1, \ldots, d$.

(iv) $f_X(x) = \prod_{i=1}^d f_{X_i}(x_i)$ für $\ell^{(d)}$-f.a. $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, falls $X_1, \ldots, X_d$ unabhängig sind.