Prof. Dr. H. Zähle
M.Sc. C. Gärtner

Universität des Saarlandes, SS 2015
6. Mai 2015

# Stochastik I

## 3. Übung

**Aufgabe 9** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass jedes der folgenden Mengensysteme die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugt:

(i) $\mathcal{I}_1 := \{(a,b) : -\infty < a < b < \infty\}$.

(ii) $\mathcal{I}_2 := \{[a,b] : -\infty < a < b < \infty\}$.

(iii) $\mathcal{I}_3 := \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\}$.

(iv) $\mathcal{I}_4 := \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\}$.

**Aufgabe 10** (4 Punkte)

Es sei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Für $a = (a_1,\ldots,a_d)$, $b = (b_1,\ldots,b_d) \in \mathbb{R}^d$ mit $a \le b$ seien außerdem $D_{a_1}^{b_1}F := F_2^{a,b}$, $D_{a_2}^{b_2}F_2^{a,b} := F_3^{a,b}$, $\ldots$, $D_{a_{d-1}}^{b_{d-1}}F_{d-1}^{a,b} := F_d^{a,b}$, $D_{a_d}^{b_d}F_d^{a,b} := \Delta_{a_d}^{b_d}F_d^{a,b}$ mit

$$\begin{array}{lcll}
F_2^{a,b}(x_2,\ldots,x_d) & := & F(b_1,x_2,\ldots,x_d) - F(a_1,x_2,\ldots,x_d) & , \quad (x_2,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}, \\
F_3^{a,b}(x_3,\ldots,x_d) & := & F_2^{a,b}(b_2,x_3\ldots,x_d) - F_2^{a,b}(a_2,x_3\ldots,x_d) & , \quad (x_3,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^{d-2}, \\
 & \vdots & & \\
F_d^{a,b}(x_d) & := & F_{d-1}^{a,b}(b_{d-1},x_d) - F_{d-1}^{a,b}(a_{d-1},x_d) & , \quad x_d \in \mathbb{R}^1.
\end{array}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $\Delta_a^b F = D_{a_d}^{b_d}\cdots D_{a_1}^{b_1}F$ (was die Terminologie *„d-fach monoton wachsend“* in Definition 1.6.5 motiviert). Beschränken Sie sich der Einfachheit halber auf die Fälle $d = 1,2,3$.

(ii) Es gilt $\Delta_a^b F = \Delta_a^b(F + \sum_{i=1}^d h_i)$ für alle $a,b \in \mathbb{R}^d$ mit $a \le b$ und Funktionen $h_1,\ldots,h_d : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ derart, dass $h_i$ nicht von der $i$-ten Koordinate $x_i$ abhängt, $i = 1,\ldots,d$.

**Aufgabe 11** (4 Punkte)

Sei $F$ die Verteilungsfunktion eines W-Maßes auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $F$ ist rechtsstetig auf $\mathbb{R}^d$.

(ii) $F$ ist monoton wachsend auf $\mathbb{R}^d$ in dem Sinne, dass $F(a) \le F(b)$ für alle $a,b \in \mathbb{R}^d$ mit $a \le b$.

**Aufgabe 12** (4 Punkte)

Es seien $k \in \mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < \cdots < x_k$, $p_1,\ldots,p_k \ge 0$ mit $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, und $\delta_{x_i}$ das Dirac-Maß auf der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ für jedes $i = 1,\ldots,k$. Ferner seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und $\ell|_{[a,b]}$ die Konzentration des Lebesgue-Maßes auf $[a,b]$, d. h. $\ell|_{[a,b]}(A) := \ell(A \cap [a,b])$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktionen der auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definierten W-Maße

$$\mu_1(\cdot) := \sum_{i=1}^k p_i\,\delta_{x_i}(\cdot) \qquad \text{und} \qquad \mu_2(\cdot) := \frac{1}{b-a}\,\ell|_{[a,b]}(\cdot).$$

Erläutern Sie auch, warum die Mengenfunktionen $\mu_1$ und $\mu_2$ tatsächlich W-Maße sind.