Actividad 2

Cristopher Aldama Pérez

August 26, 2018

1 Realiza las siguientes demostraciones

1. Demuestre que si el triángulo XYZ de catetos x e y e hipotenusa z tiene de área $\frac{z^2}{4}$, entonces es isósceles.

   Proof. Sea $x = y$ ya que el triángulo es isósceles.

$$
\begin{aligned}
z^2 &= x^2 + y^2 && \text{Teorema de pitágoras} \\
&= 2x^2 && \text{Sustituyendo } y = x \\
x^2 &= \frac{z^2}{2} && \text{Despejando } x^2 \\
& && \text{(Por otro lado)} \\
A &= \frac{xy}{2} && \text{Área de un triángulo} \\
&= \frac{x^2}{2} && \text{Sustituyendo } y = x \\
&= \frac{z^2}{2 \times 2} && \text{Sustituyendo } x^2 \\
&= \frac{z^2}{4} && \square
\end{aligned}
$$

2. Demostrar que $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$

   Proof. Pasando las series a notación de sumatoria tenemos que:

$$\sum_{1}^{n} k^3 = (\sum_{1}^{n} k)^2$$

Evaluando $L(1)$, $L(2)$ $L(h)$ y $L(h+1)$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
L(1) &= \sum_{1}^{1} k^3 \\
&= 1 \\
&= (\sum_{1}^{1} k)^2 \\
L(2) &= \sum_{1}^{2} k^3 \\
&= (1+8) \\
&= (1+2)^2 \\
&= (\sum_{1}^{2} k)^2 \\
L(h) &= \sum_{1}^{h} k^3 \\
&= (\sum_{1}^{h} k)^2 && \text{Suposición} \\
L(h+1) &= \sum_{1}^{h+1} k^3 \\
&= \sum_{1}^{h} k^3 + (h+1)^3 && \text{Cambiando límite de sumatoria} \\
&= (\sum_{1}^{h} k)^2 + (h+1)^3 && \text{Inducción} \\
&= [\frac{h(h+1)}{2}]^2 + (h+1)^3 && \text{Fórmula de Gauss} \\
&= \frac{1}{4}(h^4 + 6h^3 + 13h^2 + 12h + 4) && \text{Desarrollando potencias} \\
&= \frac{1}{4}(h^2 + 3h + 2)^2 && \text{Reagrupando} \\
&= [\frac{(h+1)(h+1+1)}{2}]^2 && \text{Fórmula de Gauss} \\
&= (\sum_{1}^{h+1} k)^2 && \square
\end{aligned}
$$

3. Demuestra la negación del siguiente enunciado: la suma de dos números compuestos siempre es un número compuesto.

   Proof. La negación es: la suma de dos números compuestos no siempre es un número compuesto. Sean 4 y 9 dos números compuestos

$$\begin{aligned} 4 &= 2 \times 2 \\ 9 &= 3 \times 3 \\ 4 + 9 &= 13 \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

□

4. Demuestre que para cada entero n, que si $5n + 3$ es par, entonces n es impar.

   Proof. Demostrando la contraposición, podemos reformular como: si n es par, etonces $5n + 3$ es impar.

$$\begin{aligned} n &= 2k && \text{Ya que n es par} \\ 5n + 3 &= 5(2k) + 3 && \text{Sustituyendo } n = 2k \\ &= 2h + 3 && \text{Sustituyendo } h = 5k \\ &= 2(h + 1) + 1 && \text{Refactorizando} \\ &= 2j + 1 && \text{Sustituyendo } j = h + 1 \end{aligned}$$

□

5. Demuestre que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces, $n^2 - 3$ es multíplo de 4.

   Proof. Esta preposición es falsa y se puede demonstrar su falsedad con un contra ejemplo:

$$\begin{aligned} 1 &\in \mathbb{Z} \\ n &= 1 \\ n^2 - 3 &= 2 - 3 && \text{Sustituyendo n=1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

□