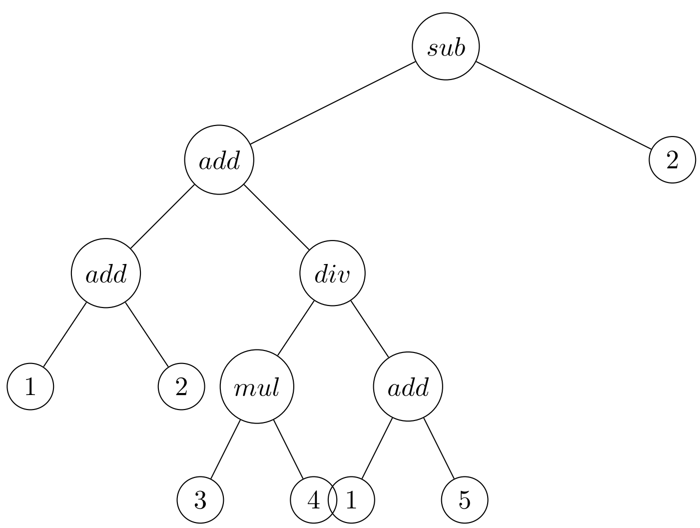
Inhaltsverzeichnis

1 Rechenoperationen

1. Baum besteht aus Knoten (Kreise) und Kanten (Pfeile)
2. Kanten verbinden Knoten mit ihren Kind-Knoten
3. jeder Knoten (außer der Wurzel) hat genau ein Elternteil
4. Knoten ohne Kinder heißen "Blätter" (leaf-nodes)
5. Teilbaum
   (a) wähle beliebigen Knoten
   (b) entferne temporär dessen Eltern-Kante
      i. der Knoten wird temorär zu einer Wurzel
      ii. dieser Knoten mit allen seinen Nachkommen bildet wieder seinen Baum - " Teilbaum des Originalbaums"
   (c) Tiefe: Abstand des Knotens zur Wurzel
   (d)

Infix-Notation:
$1 + 2 + 3 * 4/(1 + 5) - 2$

Präfix-Notation:
$sub(add(add(1, 2), div(mul(3, 4), add(1, 5))), 2)$



Präfix Notation aus dem Baum rekonstruieren

1. Wenn die Wurzel ein Blatt ist, dann "Drucke die Zahl"
2. sonst (Operator):
   (a) Drucke Funktionsnamen
   (b) Drucke "("
   (c) wiederhole ab 1) für das linke Kind
   (d) Drucke ","
   (e) wiederhole den Algorithmus ab 1) für das rechte Kind
   (f) Drucke ")"

Beachte Reihenfolge: Wurzel - Links - Rechts (Pre-Order Traversal) Ergebnis: $sub(add(add(1,2), div(mul(3,4), add(1,5))), 2)$

Definition: Rekursion Rekursion meint Algorithmus für Teilproblem von vorn

Infix Notation

1. wie bei Präfix
2. sonst
   (a) entfällt
   (b) wie bei Präfix
   (c) wie bei Präfix
   (d) Drucke Operatorsymbol
   (e) wie bei Präfix
   (f) wie bei Präfix
   (g) wie bei Präfix

Beachte Reihenfolge: Links - Wurzel - Rechts (In-Order Traversal)

Ergebnis:
$(((1+2)+((3*4)/(1+5)))+2)$

Berechne den Wert mit Substitutionsmethode

1. Wenn Wurzel ein Blatt hat, gib die Zahl zurück
2. sonst
   (a) entfällt
   (b) entfällt
   (c) wiederhole ab 1) für linken Teilbaum und speichere Ergebnis als "left-result"

(d) entfällt

(e) wiederhole ab 1) für rechten Teilbaum, speichere Ergebnis als "right-result"

(f) berechne $fkt_name(left - result, right - result)$ und gib Ergebnis zurück

Beachte Reihenfolge: Links - Rechts - Wurzel (Post-Order Traversal)

$$\begin{aligned}
&sub(add(add(1,2), div(mul(3,4), add(1,5))), 2)\\
=&sub(add(add(1,2), div(12,6)), 2)\\
=&sub(add(3,2)2)\\
=&sub(5,2)\\
=&3
\end{aligned}$$

2 Maschinensprache

- optimiert für die Hardware (viele verschiedene)
- Gegensatz: höhere Programmiersprache ($C++$) ist optimiert für Programmierer
- Compiler oder Interpreter übersetzen Hoch- in Maschinensprache

Vorgang des Übersetzens

1. Eingaben (und Zwischenergebnisse) werden in Speicherzellen abgelegt ⇒ jeder Knoten im Baum bekommt eine Speicherzelle (Maschinensprache: durchnumeriert ; Hochsprache: sprechende Namen)
2. Speicherzellen für die Eingaben *initialisieren* ; Notation: SpZ ← Wert
3. Rechenoperationen in der Reihenfolge des Substitutionsmodells ausführen und in der jeweiligen Speicherzelle speichern ; Notation: SpZ_Ergebnis ← fkt_name SpZ_Arg1 SpZ_Arg2
4. alles in Zahlencode umwandeln
   - Funktionsname ⇒ Opcodes
   - Speicherzellen: nur die Nummer
   - Werte sind schon Zahlen
   - Notation: Opcode Ziel SpZ SpZ_Arg1 SpZ_Arg2 oder Opcode Ziel SpZ Initialwert

3 funktionale Programmierung

(alles durch Funktionsaufrufe ausführen)

1. bei Maschinensprache wurden Zwischenergebnisse in Speicherzellen abgelegt

2. das ist auch in der funktionalen Programm. eine gute Idee
   (a) Speicherzellen werden durch Namen (vom Programmierer vergeben) unterschieden
   (b) Beispiel: Lösen einer quadratischen Gleichung: $ax^2+bx+c=0$, finde $x_{1/2} \Rightarrow x^2-px+q = 0 \quad mit \quad p=-\frac{b}{2a}, q=\frac{c}{a} \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{(-\frac{b}{2a}^2 - \frac{c}{a})}$
   $\Leftarrow allgemein : x_{1/2} = p \pm \sqrt{p^2-q}$
   (c) Präfix:
   $x_1 \leftarrow add(div(div(b,a),-2), sqrt(sub(mul(div(div(b,a),-2), div(div(b,a),-2)), div(c,a))))$
   mit Zwischenergebnissen und Infix-Notation: $p \leftarrow b/c/-2$ oder $p \leftarrow -0,5*b/a \quad q \leftarrow c/a$
   $discriminant \leftarrow sqrt(p*P-q)$
   $x_{1/2} \leftarrow p \pm discriminant$
3. zwei Vorteile:
   (a) lesbar
   (b) redundante Berechnung verschieden
   Beachte: In der funktionalen Programmierung können die Speicherzellen nach der Initialisierung <u>nicht</u> mehr verändert werden
   (c) Speicherzellen mit Namen sind nützlich, um Argumente an Funktionen zu übergeben $\Rightarrow$ Definition eigener Funktionen
   Bsp: function sq(x){ return x*x }

4 funktionale Programmierung in C++

1. in C++ hat jede Speicherzelle einen <u>Typ</u> (legt Größe und Bedeutung der Speicherzelle fest)
   wichtigste Typen: “int“für ganze Zahlen, “double“für reelle Zahlen, “std::string“für Text
   zugehörige Literale (Konstanten): 12, -3 (int)   -1.02 , 1.2e-4 (double)   “text text “(string)
2. Die Initialisierung wird geschrieben als

```
type_name spz_name = initialwert
```

   Bsp:

```
double a = 10
std::cout << "x_1" << x_1 << "\n" ;
```

3. eigene Funktion in $C++$:

```
type_ergebnis funktionsname (typ_arg1 name_arg1, typ_arg2 name_arg2)
{
  <code>
  return ergebnis;
}
```

4. zwei Funktionen mit gleichem Namen, aber unterschiedlichen Typen dürfen in C++ gleichzeitig definiert sein (“overloading“)
   ⇒ C++ wählt automatisch die richtige Variante anhand des Argumenttypes (“overload resolution“)

5. jedes $C++$ -Programm muss genau eine Funktion names “main“haben: Dort beginnt die Programm-Ausführung
   Bsp:
   int main() { <code> return 0 (erfolgreich abgearbeitet)}

6. Regel von $C++$ für erlaubte Namen (Speicherzelle & Funktion):
   (a) erste Zeichen: Klein- oder Großbuchstaben des englischen Alphabets oder _
   (b) optional: weitere Zeichen: wie erstes Zeichen oder Ziffern $0 \ldots 9$

7. vordefinierte Funktionen in $C++$
   (a) eingebaute Funktionen (immer vorhanden) z.B. Infix Operatoren
   (b) Funktionen der Standardbibliothek (Programmierer muss sie explizit auffordern)
      i. z.B. algebraische Funtionen beginnend mit std::...
      ii. sind in Module geordnet, z.B. cmath $\widehat{=}$ algebraische Funktionen, iostream $\widehat{=}$ Ausgabe, z.B. std::cout
      iii. Um ein Modul zu benutzen, muss man zuerst (am Anfang des Programms) sein Inhaltsverzeichnis importieren
      #include <module_name> sprich “Header inkludieren“

```
# include <iostream>
# include <string>

int main() {

std::cout <<  "Hello" << "\n";
std::string >> ausgabe = "mein erstes Programm"
std::cout << ausgabe;

return 0
}
```

4.1 Overloading der arithmetischen Operationen

```
  int a = 3;
  int b = 4;
  int c = a * b;
  double x = 3.0;
  double y = 4.0;
  double z = x * y;
```

$3.0 * 4 \quad \Rightarrow \quad$ automatische Umwandlung in höheren Typ, hier: "double" $\Rightarrow$ wird als $3.0 * 4.0$ ausgeführt

4.2 Interger-Division in $C++$

Konsequenzen:

1. Division unterscheidet sich nach dem Datentypen: $(-12)/5 \Rightarrow -2 \neq -2.4 \Leftarrow (-12.0/5.0)$
2. negative Ereignisse werden aufgerund, positive abgerundet (truncating division)
   d.h. Nachkommstellen abschneiden, d.h. Richtung Null runden
3. Gegensatz (z.B. zu Python): floor division $\widehat{=}$ wird immer abgerundet
4. Divisionsrest:

```
int a = ...;
int b = ...;
int q = a/b;
(a/b)*b = q * b
```

ist im allgemeinen <u>ungleich</u> $a \Rightarrow$

```
int rest = a = q*b;
```

1. wenn Division aufgeht $\Rightarrow$ rest $= 0$, sonst $\neq 0$
2. Invariante:

```
(a/b) * b + rest = a

int rest1 = a % b;  // aequivalent: a-(b/a)*b
```

4.3 Anwendung

Wochentag für beliebiges Datum bestimmen: gegeben: d, m, y , gesucht: $w \in \{0, \ldots, b\}$
int weekday(int d, int w, int y) ; weekday(10,11,2016) $\Rightarrow$ 3 (Donnerstag)
Teilprobleme

1. finde den Wochentag vom 1. Januar y
2. finde den Abstand vom (d,m,y) zum (1,1,y)
3. setze beides zusammen

Schaltjahresregel: y ist Schaltjahr, wenn:

1. y durch 4 teilbar, aber nicht durch 100 $\Rightarrow$ 2004, 2006, nicht 2100

2. y durch 400 teilbar $\Rightarrow$ 2000

   $\Rightarrow$ 400-Jahres-Zyklus der Regeln: nach 400 Jahren beginnt die Schaltjahresregel von vorn

- Beobachtung: der 1.1.2001 ist der erste Tag eines neuen Zyklus und war Montag
- die Anzahl der Tage vom 1.1.y zum 1.1.2001 ist:
  $z = y - 2001 \quad \triangle = 365 * z + z/4 - z/100 + z/400$
- floor division ist wichtig, wenn $z < 0$, z.B. $y = 2000\,, z = -1$

zu2: d.m. ist der x-te Tag im Jahr mit:

- kein Schaltjahr
  1. $m = 1 \Rightarrow d$
  2. $m = 2 \Rightarrow d + 31$
  3. $m = 3 \Rightarrow d + 59$
  4. $m = 4 \Rightarrow d + 90$
  5. $m = 5 \Rightarrow d + 120$
  6. $m > 2 \Rightarrow d + 59 + (153 * m - 457)/5$
- Schaltjahr
  1. $m = 1 \Rightarrow d$
  2. $m = 2 \Rightarrow d + 31$
  3. $m = 3 \Rightarrow d + 60$
  4. $m = 4 \Rightarrow d + 91$
  5. $m = 5 \Rightarrow d + 121$
  6. $m > 2 \Rightarrow d + 60 + (153 * m - 457)/5$

  zu3: Wochentag von d, m, y:

```
w = (w_11y + x - 1) mod 7
```

4.4 Bedingungen

- Bei den meisten Algorithmen ist die Reihenfolge der Schritte nicht fix, sondern hängt von den Eingabedaten ab
- Beispiel: Auswahl der Offset $d \rightarrow x$ hängt von m ab
  dafür die Funktion:

```
cond ( bedingung , resultat_wenn_wahr , resultat_wenn_falsch )
```

- kanonische Beispiele: Absolutbetrag, Vorzeichenfunktion

Bedingungen programmieren:

- relationale Operatoren: Vergleich von zwei Argumenten
  $<, >, <=, >=, !=$
- logische Operatoren: Verknüpfen von mehreren Bedingungen
  $\&\&(und), ||(oder), != (nicht)$
- in $C++$ gibt es <u>keine</u> Prefix-Variante für die *cond()*-Funktion, aber eine Infix-Variante:

```
(bedingung) ? erg_wenn_wahr : erg_wenn_falsch

int abs (int x) {
  return (x >= 0) ? x : -x;
}
double abs (double x) {
  return (x >= 0.0) ? x : -x;
}
int sign (int x) {
  return (x == 0) ? 0 : ((x > 0) ? 1 : -1);
}
```

4.5 Rekursion

bedeutet: eine Funktion ruft sich selbst auf (evtl. indirekt)

- kanonisches Beispiel: Fakultätsfunktion $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots (k-1) \cdot k$
- in $C++$ (rekursive Definition)

```
int fakultaet (int k) {
  return (k == 0) ? 1 : k * fakultaet(k-1) ;
}
```

- wichtige Eigenschaften:
  - jede rekursive Funktion muss mindestens einen nicht-rekursiven Zweig enthalten, der nach endlich vielen rekursiven Aufrufen erreicht wird "Rekursionsabschluss"- sonst: Endlosrekursion (Absturz)
  - bei jedem Aufruf werden dem Namen der Dateenelemente (Argumente & Zwischenergebnisse) <u>neue</u> Speicherzellen zugeordnet
    fakultaet(3) $\to$ *fakultaet(2)* $\to$ *fakultaet(1)* $\to$ *fakultaet(0)* $\Rightarrow$
    *return 3*fakultaet(2)* $\leftarrow$ *return 2*fakultaet(1)* $\leftarrow$ *return 1*fakultaet(0)* $\leftarrow$ *return 1*

4.6 Von der funktionalen zur prozeduralen Programmierung

- Eigenschaften der FP:
  - alle Berechnungen durch Funktionsaufrufe, Ergebnis ist Rückgabe

  - Ergebnis hängt nur von den Werten der Funktions-Argumente ab, nicht von externen Faktoren (*referentielle Integrität*)
  - Speicherzellen für Zwischenergebnisse/Argumente können nach der Initialisierung nicht geändert werden (*write once*)
  - Möglichkeit der rekursiven Funktionsaufrufe (jeder Aufruf bekommt eigene Speicherzellen)

- Vorteile:
  - natürliche Ausdrucksweise für arithmetische und algebraische Funktionalität (*Taschenrechner*)
  - einfache Auswertung durch Substitutionsmodell - Auswertungsreihenfolge nach Post-Order
  - mathematisch gut formalisierbar $\Rightarrow$ Korrektheitsbeweise (besonders bei Parallelverarbeitung)
  - Rekursion ist mächtig und natürlich für bestimmte Probleme (z.B. Fakultät)

- Nachteile:
  - viele Probleme lassen sich anders natürlicher ausdrücken (z.B. Rekursion vs. Iteration)
  - setzt unendlich viel Speicher vorraus ($\Rightarrow$ Memory management notwendig $\Rightarrow$ später)
  - Entitäten, die sich zeitlich verändern schwer modellierbar, teilweise unnatürlich

- Korrolar: Man kann keine externen Resourcen (z.B. die Console/Drucker, Bildschirm) ansprechen (weil zeitlich veränderlich)
  "keine Seiteneffekte"

- Lösung: Einführung einer Multi-Paradigmensprachen, z.B. Kombination von funktionaler mit prozeduraler Programmierung

5 Prozeduale Programmierung

- Kennzeichen:
  - Prozeduren - Funktionen, die nichts zurückgeben, haben nur Seiteneffekte
    Bsp: auf Konsole ausgeben

    ```
        std::cout << "Hello World \n";  // Infix
        operator << (std::cout, "Hello \nLeftarrow"); // Praefix notation
    ```

  - Prozeduren in $C++$:
    1. Funktion, die *void* zurückgibt (Pseudotyp nur "nichts")
    2. Returnwert ignorieren
  - Anweisen zur Steuerung des Programmablaufs (z.B. *if* / *else*)

```
// funktional:
int abs (int x) {
  return (x>=0) ? x : -x ;
}

// prozedural
int abs (int x) {
  if (x >= 0) {
    return x;
  } else {
    return -x;
  }
}
```

- Zuweisung:
  - Speicherzellen können nachträglich verändert werden "*read-work*"

```
// prozedural
int foo (int x) {
  int y =2;
  int z1 = x * y;  // z1 = 6
  y = 5;
  int z2 = x * y;  // z2 = 15
  return z1 + z2;
}
// write once
typ const name = wert

// funktional
int foo (int x) {
  int y = 2;
  int z1 = x * y;  // z1 = 6
  int y2 = 5;
  int z2 = x * y2;  // z2 = 15
  return z1 + z2;
}
```

- ⇒ Folgen:
  - mächtiger, aber ermöglicht völlig neue Bugs ⇒ Erhöhte Aufmerksamkeit beim Programmieren
  - die Reihenfolge der Ausführung ist viel kritischer als beim Substitutionsmodell
  - der Programmierer muss immer ein mentales Bild des aktuellen Systemzustands haben

5.1 Schleifen

der gleiche Code soll oft wiederholt werden

```
while (bedingung) {
  ... // code wird ausgefuehrt, solange bedingung "true" ist
}
```

Bsp: Zahlen von 0-2 ausgeben)

```
int counter = 0;
while (counter < 3) {
  std::cout << counter << "\n";
  counter = counter +1;
}
```

counter	Bedingung	Ausgabe
0	true	0
1	true	1
2	true	2
3	false	$\varnothing$

- $C++$ beginnt mit der Zählung meist bei 0 "*zero-based*"
- vergisst man Inkrementierung counter $=$ counter $+1$ $\Rightarrow$ Bedingung immer true $\Rightarrow$ Endlosschleife $\Rightarrow$ Bug
- drei äquivalente Schreibweisen für Implementierung:

```
counter = counter + 1;  // assignment
counter += 1;  // add-assignment
++ counter;  // pre-increment
```

5.2 Anwendung: Wurzelberechnung

Ziel: double sqrt (double y) Methode: iterative Verbesserung mittels Newtonverfahren

```
initial guess  x(0) bei t=0 geraten
while not_good_enough(x(t)) {
  update x(t+1) from x(t)
  t = t+1
}
```

Newtonverfahren: finde Nullstelle einer gegebenen Funktion $f(x)$, d.h. suche $x^\star$, sodass $f(x^\star) = 0$ oder $|f(x^\star)| < \epsilon$

1. Taylorreihe von $f(x)$: $f(x + \triangle) \approx f(x) + f'(x) \cdot \triangle + \dots$
2. $0 = f(x^\star) \approx f(x) + f'(x) \cdot \triangle = 0 \Rightarrow \triangle = -\frac{f(x)}{f'(x)}$
3. Iterationsvorschrift: $x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{f(x^{(t)}}{f'(x^{(t)}}$
4. Anwendung auf Wurzel: setze $f(x) = x^2 - y \Rightarrow mit f(x^\star) = 0 gilt (x^\star)^2 - y = 0$
5. Iterationsvorschrift: $x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{(x^{(t)})^2 - y}{2x^{(t)}} = \frac{(x^{(t)})^2 + y}{2x^{(t)}}$
   $x^{(t+1)} = \frac{x^{(t)} + \frac{y}{x^{(t)}}}{2}$ mit $x^\star = \sqrt{y} \Rightarrow x^{(t+1)} = \sqrt{y}$

```
double sqrt (double y) {
  if (y<0.0) {
    std::cout << "Wurzel aus negativer Zahl \n";
    return -1.0;
  }
  if (y == 0.0) {
    return 0.0;
  }
  double x = y;  // initial guess
  double epsilon = 1e-15 * y;  // double Genauigkeit

  while (abs(x*x-y) > epsilon) {
    x = (x + y/x) / 2.0 ;
  }
  return x;
}
```

***for* - Schleife** Zum Vergleich mit der while-Schleife:

```
int c = 0;
while (c < 3) {
  ... // unser code
  c += 1;  //sonst funktionsunfaehig
}
```

die *for* - Schleife ist dagegen "idiotensicher"

```
for (int c =0;  // Initialisierung
    c < 3;  // Bedingung (oder: c!=3)
    c+=1) {  // Incrementierungsanweisung
      ... // unser code
    }
```

- Befehle, um Schleifen vorzeitig abzubrechen:
  - *continue* (bricht aktuelle Iteration ab und springt zum Schleifenkopf)
  - *break* (bricht die ganze Schleife ab und springt hinter die schließende Klammer)
  - *return* (beendet die Funktion und damit auch die Schleife)
- 3 gleichbedeutende Beispiele:

```
for (int c =0; c<10; ++c) {
  if (c%2 ==0) {  // gerade Zahl?
    std::cout << c << "\n";
  }
}

/* Sobald in der if-Anweisung nur eine Zeile steht, kann sie weggelassen
  werden. Das ist gefaehrlich und die Klammern sollten eher trotzdem
  gesetzt werden */

for (int c =0; c<10; ++c) {
  if (c %2 !=0) { // nicht gerade?
    continue;
```

```
    }
    std::cout << c << "\n" ;
  }

  for (int c =0; c<10; c+=2) {
    std::cout << c << "\n" ;
  }
```

- mit den wichtigsten Schleifen ist bereits ein guter Grundstein für die vielseitige Programmierung gelegt

6 Datentypen

- Basistypen:
  Bestandteil der Sprachsyntax und normalerweise direkt von der Hardware(CPU) unterstützt
  - int (ganze Zahlen)
  - double (Fließkommazahlen)
  - bool (*true* oder *false*)
  - später mehr
- zusammengesetzte Typen:
  mithilfe von *struct* oder *class* aus einfacheren Typen zusammengebaut
  - Standardtypen: in der $C++$ Standardbibliothek definiert ($\#include$ ..)
  - Bsp: std::string mit $\#include <string>$
  - externe Typen: aus anderer Bibliothek, die man zuvor herunterladen und installieren muss
  - eigene Typen: vom Programmierer selbst implementiert
- durch "objekt-orientierte Programmierung" erreicht man, dass zusammengesetzte Typen genauso einfach, bequem und effizient sind, wie Basistypen
- "Kappselung": die interne Strukter und Implementation ist für den Benutzer unsichtbar
- Benutzer manipuliert Speicher über Funktionen ("member functions") $\approx$ Schnittstelle des Typs Interface

```
  zusammenges_typ_name    var_name = initial-wert;  // init
  var_name.foo(a1, a2);  // oder: foo(var_name, a1, a2)
```

6.1 Zeichenketten - String

- zwei Datentypen in $C++$
- klassischer C-String: *char*[] ("character array")
- $C++$-String: *std::string* - gekappselt und bequem
- String-Literale: "Zeichenkette"
- einzelnes Zeichen: 'z'
  Vorsicht: die String-Literale sind C-Strings(gibt keine $C++$ String-Literale)
- Initialisierung:

```
std::string s1 = "abcde";  // Zuweisung
std::string s2 = s1;
std::string leer = "";
s1.size()   // Laenge (Anzahl der Zeichen)
s1.empty()  // Test: s1.size() ==0
```

- Addition: Strings aneinanderreihen ("concalculate")

```
std::string s3 = s + "i,k";  // "xyi,k"
std::string s3 = s + s;   // "xyxy"
std::string s3 = "abc" + "def";  // Bug - Literale unterstuetzen + mit ganz anderer Bedeutung
```

- Add-Assignement: Abkürzung für Addition gefolgt von Zuweisung

```
s += "nmk";  // ist gleich zu:
s = s + "nmk";  // "xynmk"
s3 = (s + "abc") + "def";  // ok
```

- die Zeichen werden intern in einem C-Array gespeichert
  Array: zusammenhängende Folge von Speicherzellen des gleichen Types, hier: *char*

a	b	c	d	e

Länge: 5; s[index] $\in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

```
std::string s = "abcde";
for (int k = 0; k < s.size(); ++k) {
  std::cout << s[k] << "\n";
}
```

Variante 1: 'in-place' (den alten String überschreiben, selbe Speicherzelle)

```
int i = 0;
int k = s.size()-1;
while (1<k) {
  char tmp = s[i]  // i-tes Zeichen merken
  s[i] = s[k];
  s[k] = tmp;
  --k;  // k = k-1
  ++i;
}
```

Variante ②: neuen String erzeugen

```
std::string s = "abcde";
std::string r = "";
for (int k =s.size()-1; k>=0; --k)
```

6.2 Umgebungsmodell

- in prozeduraler Programmierung: Gegenstück zum Substitutionsmodell für funktionale Programmierung
- Zwecke:
  - Regeln für Auswertung von Ausdrücken
  - Regeln für automatische Speichervewaltung: Freigeben nicht mehr benötigter Speicherzellen (nützlich bei in der Praxis immer endlichem Speicher)
    ⇒ bessere Approximation von "unendlich viel Speicher"
- Umgebung beginnt normalerweise bei "{" und endet bei "}"
  Ausnahme: for-Schleife, Funktionsdefinitionen, globale Umgebung

```
for (int k=0; k<10; ++k) {  // Laufvariable Teil der Umgebung
  ... // code
}

bool is_email (std::string s) {  // Speicherzellen fuer Argumente
                                // und Ergebnis gehoeren zur Umgebung
  ...  // code
}
```

- automatische Speicherverwaltung:
  - Speicherzellen, die in einer Umgebung angelegt werden, werden am Ende der Umgebung in umgekehrter Reihenfolge freigegeben
  - Compiler fügt vor "{" automatisch die notwendigen Befehle ein
  - Speicherzellen in der globalen Umgebung werden dem Programmierenden freigegeben

```
int global = 1;

int main() {
  int l = 2;
  {
    int m = 3;
  }    // m wird freigegeben
}    // l wird freigegeben
    // global wird freigegeben
```

- Umgebungen können beliebig tief geschachtelt werden
  ⇒ alle Umgebungen bilden einen Baum, mit der globalen Umgebung als Wurzel

- Funktionen sind in der globalen Umgebung definiert
  $\Rightarrow$ Umgebung jeder Funktion sind “Kinder“ der globalen Umgebung (Ausnahme: Namensräume) $\Rightarrow$ Funktionsumgebung ist nicht Kind der Umgebung, in der sie aufgerufen wird

- Jede Umgebung besitzt eine Zuordnungstabelle für alle Speicherzellen, die in der Umgebung definiert werden

Name	Typ	aktueller Wert
1	int	2

- jeder Name kann pro Umgebung nur $1\times$ vorkommen ()gleichzeitig in anderen Umgebungen)
  Ausnahme: Funktionsnamen können mehrmals vorkommen bei “function overloading“ (C++)

- Alle Befehle werden relativ zur aktuellen Umgebung ausgeführt
  aktuell: Zuordnungstabelle der gleichen Umgebung & aktueller Wert zum Zeitpunkt des Aufrufs (Zeitpunkt wichtig im Substitutionsmodell)

Beispiel: $c = a * B$;
Regeln:

- wird der Name (a,b,c) in der aktuellen Zuordnungstabelle gefunden:
  1 Typisierung $\Rightarrow$ Fehlermeldung, wenn Typ und Operation zusammenpassen
  2 andernfalls, setze aktuellen Wert aus Tabelle in Ausdruck ein

- wird der Name nicht gefunden, suche in der Elternumgebung weiter mit 1 oder 2
- wird der Name bis zur Wurzel nicht gefunden $\Rightarrow$ Fehlermeldung
- ist der Name in mehreren Umgebungen vorhanden, gilt das zuerst gefundene (Typ, Wert)

$\Rightarrow$ Programmierer muss selbst darauf achten, dass:

1. bei der Suche die gewünschte Speicherzelle gefunden wird $\Rightarrow$ benutze “sprechende“ Namen
2. der aktuelle Wert der richtige ist $\Rightarrow$ beachte Reihenfolge der Befehle!

7 Umgebungen

7.1 Namensräume

spezielle Umgebungen in der globalen Umgebung (auch geschachtelt) mit einem Namen

- Ziele:
  - Gruppieren von Funktionalität in Module (zusätzlich zu Headern)
  - Verhindern von Namenskollisionen
  - Beispiel: $C++$ Standardbiblithek

```
namespace std {
  double sqrt (double x);
  namespace chrono {
    class system_clock;
  }
}
```

⇒ $std :: sqrt(x)$ wird zu $sqrt(x)$

Besonderheit: mehrere Blöcke mit selbem Namensraum werden verschmolzen

– Funktionen befinden sich in der globalen Umgebung
⇒ Umgebung der Funktion ist Kind der globalen Umgebung

```
int p = 2;
int q = 3;

int foo (int p) {  // lokales p verdeckt das globale, aber globales q
    sichtbar
  return p * q;
}

int main() {
  int k = p * q;  // beides ist global; =6
  int p = 4;  // lokales p, was das globale verdeckt
  int r = p * q;  // lokales p. globales q; =12
  int s = foo(p);  // lokales p wird zum lokalen p von foo(); =12
  int t = foo(q);  // globales q wird zum lokalen p von foo(); =9
}
```

Beispiel: *my_ sin* (Übung 3.3)

```
double taylor_sin (double x) {
  return x - std::pow(x,3)/6.0;
}

double pump_sin (double sin_third) {
  return 3.0*sin_third - 4.0 * std::pow(sin_third,3)
}

double pi_2 = 2.0*M_PI;

double normalize (double x) {
  double k = std::floor(x/pi_2);   // wie vielte Periode
  double y = x-pi_2*k;   // 0 <= y < pi_2
  return (y <= M_PI) ? y : y-pi_2;   // -pi < result <= pi
}

double my_sin (double x) {
  double y = normalize(x) ;
  return (std::abs(y)<=0.15) ? taylor_sin(y) : pump_sin(y/3.0);
}

int main() {
  double r = my_sin(0.78) ;
}
```

global	**main**
$pi_2 = 6.28$	$r = 2$

7.2 Referenzen

- sind neue (zusätzliche) Namen für vorhandene Speicherzellen

```
int x = 3;   // neue Variable x mit neuer Speicherzelle
int & y = x; // Referenz: y ist neuer Name fuer x, beide haben dieselbe
     Speicherzelle

y = 4; // Zuweisung an y, aber x aendert sich auch, d.h. x == 4
x = 5; // jetzt y == 5

int const & z = x; // read-only Referenz, d.h. z = 6 ist verboten
x = 6;   // jetzt auch z == 6
```

- Hauptanwendung:
  - Umgebung, wo eine Funktion aufgerufen wird und die Umgebung der Implementation sind unabhängig, d.h. Variablen der einen Umgebung sind in der anderen nicht sichtbar

Beispiel:

```
int foo (int x) {  // pass-by-value (Uebergabe des echten Werts)
  x += 3;
  return x;
}

int bar (int & x) {  // pass-by-reference (Uebergabe der Adresse der
    Speicherzelle)
  y += 3;
  return y;
}

void baz (int & z) {  // pass-by-reference
  z += 3;  // kein return Wert
}

int main() {
  int a = 2;
  std::cout << foo(a) << "\n";  // Ausgabe: 5
  std::cout << a << "\n";     // Ausgabe 2

  std::cout << bar(a) << "\n";  // Ausgabe: 5
  std::cout << a << "\n";    // Ausgabe: 5

  baz(a);
  std::cout << a << "\n";
}
```

- Funktionen die Werte nur über eine Referenz änder heißen Seiteneffekt der Funktion (Haupteffekt ist immer der return Wert) [in der funktionalen Programmierung sind Seiteneffekte verboten mit Ausnahme von Ein-/Ausgabe]
- Ziele
  1. häufig möchte man Speicherzellen in beiden Umgebungen teilen ⇒ verwende Referenzen
  2. häufig will man vermeiden, dass eine Variable kopiert wird (pass-by-value)
     ⇒ durch *pass-by-value* braucht man keine Kopie ⇒ typisch *const* & ≊ read-only, <u>keine</u> Seiteneffekte

```
void print_string(std::string const & s) {
  std::cout << s;
}
```

8 Container-Datentypen

dienen dazu, andere Datentypen aufzubewahren

- Art der Elemente
  - homogene Container: alle Elemente haben den gleichen Typ (typisch für $C++$)
  - heterogene Container: Elemnte können verschiedene Typen haben (z.B. Python)
- Art der Größe
  - statische Container: feste Größe, zur Compilezeit bekannt
  - dynamische Container: Größe zur Laufzeit veränderbar
- Arrays sind die wichtigsten Container, weil effizient auf Hardware abgebildet und einfach zu benutzen
  - klassisch: Arrays sind statisch, z.B. C-Arrays (hat $C++$ geerbt)
  - modern: dynamische Arrays:
    * Entdeckung einer effizienten Implementierung
    * Kapselung durch Objekt-Orientierte-Programmierung (sonst zu kompliziert)
- ein dynamisches Array: $std::string$ ist Abbildung $int \rightarrowtail char \quad Index \rightarrow Zeichen$
- wir wollen das selbe Verhalten für beliebige Elementtypen: $std::vector$

Datentyp: $std::vector$

```
#include <vector>

std::vector <double> v(20, 0.0) ;  // initialisiert mit Groesse,
    Initialwert

// analog: std::vector<int>, std::vector<std::string>
```

- Abbildung: $int \rightarrowtail double$
- weitere Verallgemeinerung: Indextyp beliebig (man sagt dann “Schlüssel-Typ§“
typische Fallen:
  - Index ist nicht im Bereich $0 \leq Index < size$,z.B. Matrikelnummer
  - Index ist String, z.B. Name eines Studenten

- $std :: map$, $std :: unordered_map$ (Binärer Suchbaum)

  Beispiel:

```
std::map <int, double> noten;  // noten[3 1 2 4 5  2 3 1 3] = 1.0
std::map <string, double> noten;  // noten["krause"] = 1.0
```

  dabei: <Schlüsseltyp, Elementtyp>

- Erzeugen:

```
std::vector <double> v(20, 1.0);
std::vector <double> v;   // leeres Array (erst ab C++ 11)

std::vector <double> v = {1.0, -3.0, 2.2};  // "initializer list"
```

- Größe:

```
v.size()
v.empty()  (=v.size() ==0)
```

- Größe ändern:

```
v.resize(neue_groesse, initialwert)
  1.: neue_gr < size()  // Elemente ab neue_gr geloescht, andere bleiben
  2.: neue_gr > size()  // neue Elemente mit Initialwert am Ende
      angehaengt

v.push_back(neues_element)  // ein neues Element am Ende anhaengen

v.insert(v.begin+index, neues_element); // neues Element an Position
              // index einfuegen folgende Werte werden
              // um eine Position verschoben
    v.begin() ist Iterator

v.pop_back()  // letztes Element loeschen (effizient)

v.erase(v.begin()+index)  // Element aus Position loeschen,
                // hintere Werte verschieben

v.clear()  // alles loeschen
```

- Zugriff:

```
v[k]  // Element bei Index k
v.front()  // erstes Element
v.back()  // letztes Element

v.at(k)  // wie v[k], aber Fehlermeldung, wenn nicht 0<= k < size()
```

- Funktionen für Container: benutzen in $C++$ Iteration, damit sie für verschiedenste Container funktionieren

- Iteration-Range:

```
v.begin()
v.end()  // hinter dem letzten Element

im Header <algorithm>
```

- alle Elemente kopieren:

```
std::vector <double> source = {1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0};
std::vector <double> target(source.size(), 0.0);

std::copy(source.begin(), source.end(), target.begin());
std::copy(source.begin()+2, source.end(), target.begin());
    // unbenutzte Initialwerte bleiben erhalten
```

- Elemente sortieren:

```
std::sort(v.begin(), v.end());  // "in-place"
std::random_shuffle(v.begin(), v.end())  // "in-place"
```

Warum ist *push_back*() effizient?

- veraltete Lehrmeinung: Arrays sind nur effizient, weenn statisch (d.h. Größe zur Compilezeit, spätestens bei Initialisierung bekannt)
- modern: bei vielen Anwenduungen genügt, wenn Array (meist) nur am Ende vergrößert wird (z.B. *push_back*)
  dies kann sehr effizient unterstützt werden ⇒ dynamisches Array
- $std :: vector$ verwaltet intern ein statisches Array der Größe "$v.capacity() >= v.size()$"
  - wird das interne Array zu klein ⇒ wird automatisch auf ein doppelt so großes umgeschaltet
  - ist das interne Array zu groß, bleiben unbenutzte Speicherzellen als Reserve
- Verhalten bei *push_back*()
  - noch Reserve vorhanden: lege neues Element in eine unbenutzte Speicherzelle ⇒ billig & chillig
  - keine Reserve:
    1. alloziere neues statisches Array mit doppelter Kapazität
    2. kopiere die Daten aus allem ins neue Array
    3. gebe das alte Array frei
    4. gehe zu 1, jetzt wieder Reserve vorhanden
       Umkopieren ist nicht teuer, da es nur selten nötig ist
  - Beispiel:

```
std::vector <int> v;
for (int k = 0; k < 32; ++k) {
  v.push_back(k);
}
```

k	$cap\,vor\,p\_b()$	$cap\,nach\,p\_b()$	$size()$	Reserve	Umkopierung
0	0	1	1	0	0
1	1	2	2	0	1
2	2	4	3	1	2
3	4	4	4	0	0
4	4	8	5	3	4
5 ... 7	8	8	8	0	0
8	8	16	9	7	8
9 ... 15	16	16	16	0	0
16	16	32	17	15	16

...

- Kosten:
  - 32 Elemente einfügen = 32 Kopien extern $\Rightarrow$ intern
  - aus altem Array ins neue kopieren = 31 Kopien intern $\Rightarrow$ intern
    $\Rightarrow$ im Durchschnitt sind pro Einführung 2 Kopien nötig
    $\Rightarrow$ dynamisches Array ist doppelt so teuer, wie das statische
    $\Rightarrow$ immer noch sehr effizient
- relevante Funktionen von $std :: vector$
  - $v.size()$: aktuelle Zahl der Elemente
  - $v.capacity() - v.size()$: Reserve (≥ 0)
  - $v.resize(new\_size)$: ändert immer $v.size()$, aber $v.capacity()$ nur wenn $< new\_size$
  - $v.reserve(new\_capacity)$: ändert $v.size()$ nicht, aber $v.capacity()$ falls $new\_capacity \geq size$
  - $v.shrink\_to\_fit()$: $v.reserve(v.size())$ (Reserve ist danach 0), wenn Endgröße erreicht
- wenn Reserve $> size$: *capacity* kann auch halbiert werden

wichtige Container der $C++$ Standardbiblithek

- dynamisches Arrays: $std :: string, std :: vector$
- assoziative Arrays: $std :: map, std :: unordered\_map$
- Mengen: $std :: set, std :: unordered\_set$ (jedes Element ist höchstens einmal enthalten)
- Stapel: $std :: stack$ (Funktion: "last-in-first-out") z.B. gestapelte Bierkästen.
- Warteschlange: $std :: queue$ (Funktion: "first-in-first-out")
- Kartendeck: $std :: deque$ gleichzeitig Stapel und Warteschlange
- Stapel mit Priorität: $std :: priority\_queue$ (Priorität vom Nutzer definiert)

9 Iteratoren

- für Arrays lautet kanonische Schleife:

```
for (int k = 0; k != v.size(); ++k) {
  int current = v[k];  // aktuelles Element lesen
  v[k] = new_value;  // aktuelles Element schreiben
}
```

- wir wollen eine so einfache Schleife für beliebige Container
  - der Index-Zugriff $v[k]$ ist bei den meisten Containern nicht effizient
  - Iteratoren sind immer effizient $\Rightarrow$ es gibt sie in allen modernen Programmiersprachen, aber die Details sind sehr unterschiedlich
  - Analogie: Zeiger einer Uhr, Cursor in Textverarbeitung
    $\Rightarrow$ ein Iterator zeigt immer auf ein Element des Containers oder auf Spezialwert "ungültiges Element"
  - in $C++$ unterstützt jeder Iterator 5 Grundoperationen
    1. Iterator auf erstes Element erzeugen:

    ```
    auto iter = v.begin();  // auto ist Universaltyp, wird
                            // vom Compiler automatisch
                            //  mit richtigen Typen ersetzt
    ```

    2. Iterator auf "ungültiges Element" erzeugen:

    ```
    auto end = v.end()  // typischerweise v[v.size()]
    ```

    3. Vergleich:

    ```
    iter1 == iter2;
    iter != end;  (= !(iter == end))  // iter zeigt nicht auf
                                      // ungueltiges Element
    ```

    4. zum nächsten weitergehen: $++iter$, Ergebnis ist $v.end()$, wenn man vorher beim letzten Element war
    5. auf Daten des aktuellen Elements zugreifen: $*iter$ ("Dereferenzierung")

- $\Rightarrow$ kanonische Schleife:

```
for (auto iter = v.begin(); iter != v.end(); ++iter) {
  int current = *iter;  // lesender Zugriff;
  *iter = new_value;  // schreibender Zugriff

  // Abkuerzung in C++: rang-based for-loop
  for (int & element : v) {
    int current = element;  // lesen
    element = new_value;  // schreiben
  }
}
```

- wenn die zugrunde liegenden Speicherzellen geändert werden, also die Containergröße sich ändert, werden die Iteratoren ungültig
- Iteratoren mit den 5 Grundoperationen heißen “forward iterators“ (wegen $++iter$)
- “bidirectional iterators“ unterstützen auch $--iter$ (alle Iteratoren aus Standardbibliothek)
- “random access iterators“ können beliebige Sprünge machen ($iter+=5$)
  unterstützt von $std::string$ und $std::vector$
- Besonderheit für assoziative Arrays ($std::map$):
  - Schlüssel und Werte können beliebig gewählt werden
    $\Rightarrow$ das aktuelle Element ist immer ein Schlüssel/Wert-Paar
    $(*iter).first \Rightarrow$ Schlüssel
    $(*iter).second \Rightarrow$ Wert

```
v[(*iter).first] == (*iter).second;
```

- Bei $std::map$ liefern die Iteratoren die Elemente in aufsteigender Reihenfolge der Schlüssel (Unterschied zu $std::unordered\_map$)

«««< HEAD

9.1 Die Funktion $std::transform()$

=======

Die Funktion $std::transform()$ »»»> 19bbfc961301f88d1291a395c8d091764c4b0c56

- $std::transform()$ erlaubt, die Daten “on-the-fly“ zu ändern
  z.B. nach Kleinbuchstaben konvertieren:

```
std::string source = "aAbCdE";std::string = target = source;  // Target
    muss gleiche Laenge haben
std::transform(source.begin(), source.end(), target.begin(), std::tolower
    ); //Name einer Funktion, die ein einzelnes Element transformiert
```

- z.B. die Daten quadrieren:

```
double sq (double x) {
  return x*x;
}

std::transform(source.begin(), source.end(), target.begin(), sg);
```

- das ist eine Abkürzung für eine Schleife: (zwei Schleifen auf einmal)

```
auto src_begin = source.begin();
auto src_end = source.end();
auto tgt_begin = target.begin();

for ( ; src_begin != src_end; ++src_begin, ++tgt_begin) {
        // mehrere Inkrementierungen durch , getrennt
  *tgt_begin = sq(*src_begin);  // mit * Bezug zu originalen Daten
}
```

- der Argumenttyp der Funktion muss mit dem *source*-Elementtyp kompatibel sein
- der Argumenttyp der Funktion muss mit dem *target*-Elementtyp kompatibel sein «««< HEAD =======
- Das letzte Argument von $std :: transform()$ muss ein Funktor sein ($\approxeq$ verhält sich wie eine Funktion)
  Dazu gibt es drei Varianten:
  1. normale Funktion, z.B. sq Aber wenn die Funktion für mehrere Argumenttypen überladen ist, muss der Programmierer dem Compiler sagen, welche Version gemeint ist
     $\Rightarrow$ ("function pointer cast")
  2. Funktorobjekte $\Rightarrow$ objekt-orientierte Programmierung
  3. definiere eine namenlose Funktion $\approxeq$"Lamda-Funktionen" λ
     statt λ wird in $C++$ [] geschrieben

```
std::transform(source.begin(), source.end(), target.begin(),
  [] (double x) {  // statt Funktionsname sq, wie bei 1.
           // steht hier die ganze Funktionsimplementierung
    return x*x
  });  // der Returntypwird automatisch eingesetzt, wenn es
     // nur einen Returntyp gibt
```

  - Lambda-Funktionen können noch viel mehr $\Rightarrow$ für Fortgeschrittene
  - $std :: transform$ kann "in-place" arbeiten (d.h. source-Container überschreiben), wenn source und target gleich
  - die Funktion $std :: sort()$ wird zum "in-place" sortieren eines Arrays

```
std::vector <double> v = {4.0, 2.0, 3.0, 5.0, 1.0};
std::sort(v.begin(), v.end());  // -> v = {1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0}
```

  - $std :: sort()$ ruft intern den "<" Operator des Elementtyps auf, um die Reihenfolge zu bestimmen

    Def: "totale Ordnung"
    - $a < b$ muss $\forall a, b$ gelten
    - transitiv: $(a < b) \land (b < c) \Rightarrow (a < c)$
    - anti-symmetrisch: $!(a < b) \land !(b < a) \Rightarrow a == b$

9.2 Insertion Sort

schnellste Sortieralgor. für kleine Arrays ($n \leq 30$, hängt vom Compiler & CPU ab)

- für große Arrays sind Merge Sort, Heap Sort, Quick Sort schneller
- $std :: sort()$ wählt automatisch einen schnellen Algor.

Idee von Insertion Sort: wie beim Aufnehmen und Ordnen eines Kartenblatts

- gegeben: bereits sortiertes Teilarray bis zur Position $k - 1$
- füge das k-te Element an der richtigen Stelle ein. Erzeuge Lücke an der richtigen Position duch Verschieben von Elementen nach rechts
- wiederhole für $k = 1, \ldots, N$ (siehe Übung 5.1 "Einsortieren")

4	2	3	5	1	
4		3	5	1	(current = 2)
	4	3	5	1	
2	4	3	5	1	
2	4		5	1	(current = 3)
2		4	5	1	
2	3	4	5	1	
2	3	4	5	1	
2	3	4		1	(current = 5)
2	3	4	5	1	
2	3	4	5	1	(current = 1)
1	2	3	4	5	

```
void insertion_sort(std::vector <double> &v) {
  for ( int K = 1; k < v.size(); ++k) {
    double current = v[k];
    int j = k;   // Anfangsposition der Luecke
    while (j>0) {
      if (v[j-1] < current) {
        break;   // j ist richtige Position der Luecke
      }
      v[j] = v[j-1];
      --j;
    }
    v[j] = current;   // current in die Luecke kopieren
  }
}
```

- andere Sortierung: definiere Funktor $cmp(a, b)$, der das gewünschte "kleiner" realisiert $\approxeq$ gibt genau dann *true* zurück, wenn a "kleiner b nach neuer Sortierung
- neue Sortierungen am besten per Lambda-Funktion an $std :: sort$ übergeben

```
std::sort(v.begin(), v.end());  // Standardsortierung aufsteigend

std::sort(v.begin(), v.end(),   // Standardsortierung aufsteigend
        [](double a, double b) {
```

```
            return a<b;
          }
)

std::sort(v.begin(), v.end(),    // absteigende Sortierung
        [](double a, double b) {
          return b<a;
        }
)

std::sort(v.begin(), v.end(),    //   normale Sortierung nach Betrag
        [](double a, double b) {
          return std::abs(a) < std::abs(b);
        }
)

// Stringvergleich
std::vector <std::string> v = {"Ac", "ab", "De", "cf"};
std::vector <std::string> v = {"Ac", "De", "ab", "cf"}  // case
    insensitive
std::vector<std::string> v = {"ab", "Ac", "cf", "De"}  // case sensitive
```

- Das letzte Argument von $std :: transform()$ muss ein Funktor sein ($\approxeq$ verhält sich wie eine Funktion)
  Dazu gibt es drei Varianten:

  1. normale Funktion, z.B. sq Aber wenn die Funktion für mehrere Argumenttypen überladen ist, muss der Programmierer dem Compiler sagen, welche Version gemeint ist
     $\Rightarrow$ (“function pointer cast“)
  2. Funktorobjekte $\Rightarrow$ objekt-orientierte Programmierung
  3. definiere eine namenlose Funktion $\approxeq$“Lamda-Funktionen“ λ
     statt λ wird in $C++$ [] geschrieben

```
std::transform(source.begin(), source.end(), target.begin(),
  [] (double x) {  // statt Funktionsname sq, wie bei 1.
            // steht hier die ganze Funktionsimplementierung
    return x*x
  });  // der Returntypwird automatisch eingesetzt, wenn es
     // nur einen Returntyp gibt
```

  - Lambda-Funktionen können noch viel mehr $\Rightarrow$ für Fortgeschrittene
  - $std :: transform$ kann “in-place“ arbeiten (d.h. source-Container überschreiben), wenn source und target gleich
  - die Funktion $std :: sort()$ wird zum “in-place“ sortieren eines Arrays

    ```
    std::vector <double> v = {4.0, 2.0, 3.0, 5.0, 1.0};
    std::sort(v.begin(), v.end());  // -> v = {1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0}
    ```

  - $std :: sort()$ ruft intern den “$<$“ Operator des Elementtyps auf, um die Reihenfolge zu bestimmen

    Def: “totale Ordnung“

    - $a < b$ muss $\forall a, b$ gelten
    - transitiv: $(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c)$
    - anti-symmetrisch: $!(a < b) \wedge !(b < a) \Rightarrow a == b$

9.3 Insertion Sort

schnellste Sortieralgor. für kleine Arrays ($n \leq 30$, hängt vom Compiler & CPU ab)

- für große Arrays sind Merge Sort, Heap Sort, Quick Sort schneller
- $std :: sort()$ wählt automatisch einen schnellen Algor.

Idee von Insertion Sort: wie beim Aufnehmen und Ordnen eines Kartenblatts

- gegeben: bereits sortiertes Teilarray bis zur Position $k - 1$
- füge das k-te Element an der richtigen Stelle ein. Erzeuge Lücke an der richtigen Position duch Verschieben von Elementen nach rechts
- wiederhole für $k = 1, \ldots, N$ (siehe Übung 5.1 "Einsortieren")

4	2	3	5	1	
4		3	5	1	(current = 2)
	4	3	5	1	
2	4	3	5	1	
2	4		5	1	(current = 3)
2		4	5	1	
2	3	4	5	1	
2	3	4	5	1	
2	3	4		1	(current = 5)
2	3	4	5	1	
2	3	4	5	1	(current = 1)
1	2	3	4	5	

```
void insertion_sort(std::vector <double> &v) {
  for ( int K = 1; k < v.size(); ++k) {
    double current = v[k];
    int j = k;   // Anfangsposition der Luecke
    while (j>0) {
      if (v[j-1] < current) {
        break;   // j ist richtige Position der Luecke
      }
      v[j] = v[j-1];
      --j;
    }
    v[j] = current;   // current in die Luecke kopieren
  }
}
```

- andere Sortierung: definiere Funktor $cmp(a, b)$, der das gewünschte "kleiner" realisiert $\approxeq$ gibt genau dann $true$ zurück, wenn a "kleiner b nach neuer Sortierung

- neue Sortierungen am besten per Lambda-Funktion an *std* :: *sort* übergeben

```
std::sort(v.begin(), v.end());  // Standardsortierung aufsteigend

std::sort(v.begin(), v.end(),   // Standardsortierung aufsteigend
        [](double a, double b) {
          return a<b;
        }
)

std::sort(v.begin(), v.end(),   // absteigende Sortierung
      [](double a, double b) {
        return b<a;
      }
)

std::sort(v.begin(), v.end(),   //   normale Sortierung nach Betrag
      [](double a, double b) {
        return std::abs(a) < std::abs(b);
      }
)

// Stringvergleich
std::vector <std::string> v = {"Ac", "ab", "De", "cf"};
std::vector <std::string> v = {"Ac", "De", "ab", "cf"}  // case
    insensitive
std::vector <std::string> v = {"ab", "Ac", "cf", "De"}  // case sensitive

std::sort(v.begin(), v.end(),
      [](std::string a, std::string b) {
        std::transform(a.begin(), a.end(), a.begin(), std::tolower);
        std::transform(b.begin(), b.end(), b.begin(), std::tolower);

        retuern a<b;
      }
);
```

10 Templates

insertion_sort soll für beliebige Elementtypen funktionieren:

```
template <typename ElementType>

void insertion_sort(std::std::vector <ElementType> & v) {
  for (int k =1; k < v.size(); ++k) {
    ElementType current = v[k];
    ...   // Rest unveraendert
  }
}
```

“ElementType“ ist Platzhalter für den tatsächlichen Elementtyp und wird vom Compiler automatisch ersetzt.

11 Grundlagen der generischen Programmierung

- Ziel: benutze *template*-Mechanismus, damit eine Implementation für viele verschiedene Typen verwendbar ist
  erweitert funktionale und prozedurale und objekt-orientierte Programmierung
- zwei Arten von Templates ("Schablonen")
  1. Klassen-Templates für Datenstrukturen, z.B. Containersollen beliebige Elementtypen unterstützen
     - Implementation ⇒ später
     - Benutzung: Datenstrukturname gefolgt vom Elementtyp in spitzen Klammern
       $std :: vector\ < double >$
  2. Funktionen-Templates: es gab schon "function overloading"
     Beispiel:

```
int sq (int x) {
  return x * x;
}

double sq (double x) {
  return x * x;
}
... usw fuer komplexe Zahlen
```

     ⇒ Nachteile:
     - wenn die Implementationen gleich sind nutzlose Arbeit
     - Redundanz ist gefährlich, korrigiert man ein Bug, wird leicht eine Variante vergessen

11.1 Funktionen-Templates

mit Templates reicht eine Implementation:

```
template <typename T>  // T ist Platzhalter fuer beliebigen Typ
            // wird spaeter durch einen tatsaelichen Typ ersetzt
T sq (T x) {
  return x * x;  // impliziete Anforderung an den Typ:
        // er muss Multiplikation unterstuetzen

}
```

- Benutzung:
  - Typen für die Platzhalter hinter dem Funktionsnamen in spitzen Klammern
  - meist kann man die Typangabe $< type >$ weglassen, weil der Compiler sie anhand des Argumenttyps automatisch einsetzt
- kombiniert man Templates mit Overloading, wird die ausprogrammierte Variante vom Compiler bevorzugt

- Funktion, die ein Array aus Konsole ausgibt:

```
std::vector <double> v = {1.0, 2.0, 3.0};
print_vector(v);  // {1.0, 2.0, 3.0}
```

für beliebige Elementtypen:

```
template <typename ElemtType>
void print_vector(std::vector <ElementType> const & v) {
// const: read-only , &: nur Kopie verwenden
  std::cout << "{";
  if ( v.size() > 0) {
    std::cout << " " << v[0];
    for (int k = 1; k<v.size(); ++k) {
      std::cout <<  " " << v[k];
    }
  }
  std::cout << " }";
}
```

- Verallgemeinerung für beliebige Container mittels Iteratoren:

```
std::list <int> l = {1,2,3};
print_container (l.begin(), l.end())  // {1,2,3}
```

- es genügen forward iterators

```
Iterator iter2 = iter;  // Kopie erzeugen
++iter1;  // zum naechsten Element
iter1 == iter2, iter1 != end  // zeigen sie auf das selbe Element
+ iter1  // Zugriff auf aktuelles Element

template <typename Iterator>

void print_container(Iterator begin, Iterator end) {
  std::cout << "{";
  if (begin != end) {  // teste, ob Container leer
    std::cout << " " << *begin;
    ++begin;
    for (; begin != end; ++begin) {
      std::cout << ", " << *begin;
    }
  }
  std::cout << "}";
}
```

- Beispiel 3: checken, ob Container sortiert ist

```
Version 1: hard-coded

bool check_sorted (std::vector <double> const & v) {
  for (int k = 1; k < v.size(); ++k) {
    if (v[k] < v[k-1]) {  // Sortierfehler durch Ausnutzen
                     // der Transitivitaet
        return false;
    }
```

```
    }
    return true;  // Schleife ohne Fehler zuende gelaufen
  }

  Version 2: beliebige Elementtypen, beliebige Sortierung

  template <typename ElementType, typename LessThanFunctor>

  bool check_sorted(std::vector<ElementType> const & v, typename
      LessThanFunctor) {
    for (int k = 1; k < v.size(); ++k) {
      if (less_than(v[k], v[k-1])) {
        return false;
      }
    }
    reurn true;
  }
```

– Aufruf von Version 2 mit “lambda-function“:

```
std::vector <double> v = {1.0, 2.0, 3.0};
check_sorted(v, [] (double a, double b) {
  return a<b;
}); // true

check_sorted(v, [] (double a, double b) {
  return a>b;
}); // true
```

– Version 3 mit “forward-iterator“:

```
template <typename Iterator, typename LessThanFunctor>
bool check_sorted(Iterator begin, Iterator end,
        LessThanFunctor less_than)
  {
    if (begin == end) {  // Container leer?
      return true;  // leerer Container immer sortiert
    }
    Iterator next = begin;
    ++ next;  // next zeigt auf Element nach Iterator begin

    for (; next != end; ++begin, ++next) {  // Iteratoren zeigen
                //auf zwei benachbarte Elemente
      if (less_than(*next , *begin))  {
        return false;
      }
    }
  }
```

- Bemerkungen:

  1. Compiler-Fehlermeldungen bei Template-Code sind oft schwer zu implementieren ⇒ Erfahrung nötig
  2. mit Templates kann man noch viel raffiniertere Dinge machen, z.B. Traits-Klassen, intelligent libraries, template metaprogramming ⇒ nur für Fortgeschrittene

12 Bestimmung der Effizienz von Algorithmen und Datenstrukturen

- 2 Möglichkeiten
  1. messe die "wall clock time" (wie lange muss man auf ein Ergebnis warten)
  2. unabhängig von Hardware: algorithmische Komplexität
- "wall-clock-time" misst man z.B. mit dem Modul $< chrono >$

```cpp
#include <chrono>
#include <iostream>

int main() {
  ...  // alles zur Zeitmesung vorbereiten, z.B. Daten einlesen

  auto start = std::chrono::high_resolution_clock::now();  // Startzeit
      merken
    ...  // Code, der gemessen werden soll
  auto stop = std::chrono::high_resolution_clock::now();  // Endzeit
      merken
  std::chrono::duration<double> diff = stop-start;  // Zeitdifferenz (
      Laufzeit) in Sekunden
  std::cout << "Zeitdauer: " << diff() << " sekunden \n";)
}
```

- in der Praxis nicht so einfach ⇒ Pitfalls:
  - moderne Compiler optimieren oft zu viel, d.h. komplexe Berechnungen werden zur Compilezeit ausgeführt und ersetzt ⇒ gemessene Zeit viel zu kurz gegenüber der Praxis
    Abhilfe: Daten nicht "hard-wired", sondern z.B. von Platte lesen (*volatile* beim Initialisieren)
  - der Algorithmus ist schneller als die clock
    Abhilfe: rufe den Algorithmus mehrmals in einer Schleife auf
  - die Ausstattung des Programms kann vom Betriebssystem jederzeit für etwas wichtigeres unterbrochen werden ⇒ gemessene Zeit ist zu lang
    Abhilfe: messe mehrmals und nimm die kürzeste Zeit (meist reicht 3-10x)
  - Faustregel: Messung zwischen 0.02-3 Sekunden zur optimalen Nutzung der clock
- Nachteil: Zeit hängt besonders von der Qualität der Implementation, den Daten und der Hardware ab
- algorithmische Komplexität ist davon unabhängig ≊ "theoretisches Effizienzmaß"
  beschreibt, wie sich die Laufzeit verlängert, wenn man mehr Daten hat

  ⇒ bei effizienten Algrorithmen steigt der Aufwand mit n nur langsam (oder bestenfalls gar nicht)

12.1 technisches Effizienzmaß

- berechne, wie viele elementare Schritte der Algorithmus in Abhängigkeit von n benötigt
  $\Rightarrow$ komplizierte Formel $f(n)$
- vereinfache $f(n)$ in eine einfache Formel $g(n)$, die dasselbe wesentliche Verhalten zeigt
  Die Vereinfachung erfolgt mittels O-Notation und ihren Verwandten

12.2 $\mathcal{O}$-Notation/Ω-Notation

1. $g(n)$ ist eine asymptotische (für große n) obere Schranke für $f(n)$ $(f(n) \leq g(n))$
   $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ ($f(n)$ ist in der Komplexitätsklasse $g(n)$, wenn es ein n_0 und C gibt, sodass $\forall n > n_0 :\Leftrightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$
2. $g(n)$ ist asymptotisch untere Schranke für $f(n)$ $(f(n) \geq g(n))$
   $f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists n_0, C, sodass\, \forall n > n_0 : f(n) \geq C \cdot g(n)$
3. $g(n)$ ist asymptotisch scharfe Schranke für $f(n)$ $(f(n) = g(n))$
   $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$

Regeln:

1. $f(n) \in \Theta(f(n)) \Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(f(n)), f(n) \in \Omega/f(n))$
2. $f(n) \in \Theta(f(n)) \Rightarrow C \cdot f(n) \in \Theta(f(n))$
3. $\mathcal{O}(f(n)) \cdot \mathcal{O}(g(n)) \in= \mathcal{O}(f(n) \cdot g(n))$
4. $O(f(n)) + O(g(n)) \in O(max(f(n), g(n))$
   formell: $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) + O(g(n)) \in O(g(n))$ $g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow O(g(n)) + O(g(n)) \in O(f(n))$

- beliebteste Wahl für $g(n)$:
  * $\mathcal{O}(1)$ " konstante Komplexität", Bsp: elementare Operationen, Array-Zugriff
  * $\mathcal{O}(log(n))$ "logarithmische Komplexität", Bsp: Zugriff auf ein Element von $std :: map$
  * $\mathcal{O}(n)$ "lineare Komplexität", Bsp: $std :: transform$
  * $\mathcal{O}(log(n) \cdot n)$ "$n \cdot log(n)$","quasilinear", Bsp: $std :: sort()$
  * $\mathcal{O}(n^2)$ "quadratische Komplexität"
  * $\mathcal{O}(n^p) p = const.$ "polynomelle Komplexität"
  * $\mathcal{O}(2^n)$ "exponentielle Komplexität"
- Beispiele:
  $f(n) = 1 + 15n + 4n^2 + 7n^3 \in \mathcal{O}(n^3)$
  $f(n) = n \cdot log(n) + n^2 \in \mathcal{O}(n \cdot log(n) + n \cdot n) \in \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(log(n) + n) \in \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(n) \in \mathcal{O}(n^2)$
  $\Rightarrow$ es gewinnt immer die am stärksten wachsende Funktion

Anwendung 1: Fibonacci-Zahlen: $f_k = f_{k-2} + f_{k-1}$

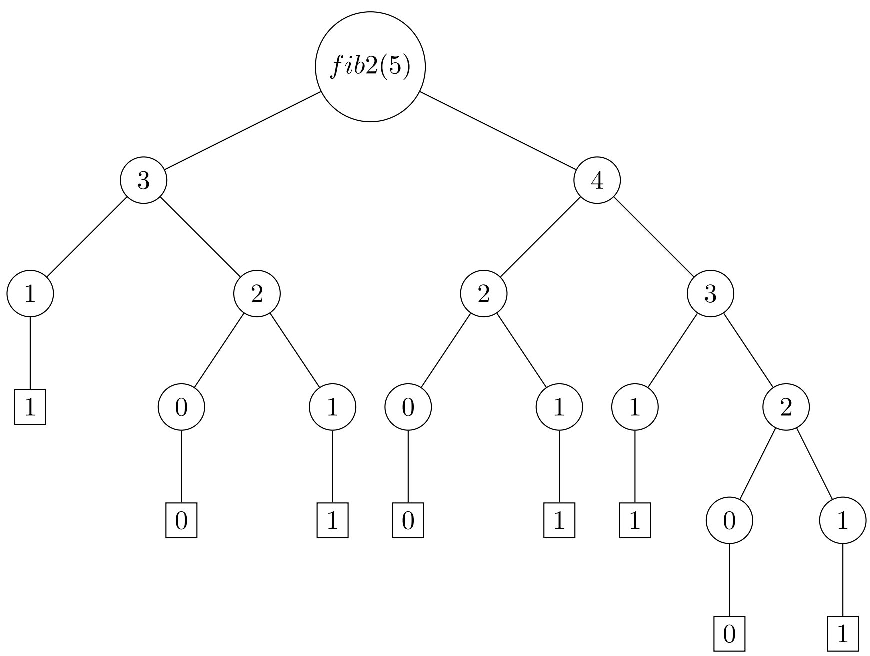
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21

```
int fib1 (int k) {  // O(k)
  if (k<2) {  // O(1)
    return k;  // O(1)
  }
  int f1 = 1;  // O(1)
  int f2 = 1;  // O(1)

  for (int j = 2; j<=k; ++j) {  // O(k)
    int f = f1 + f2;  // O(1)
    f1 = f2;  // O(1)
    f2 = f;  // O(1)
  }

  return f2;  // O(1)
}

int fib2 (int k) {
  if (k<2) {
    return k;
  }
  return fib2(k-2)+fib2(k-1));
}
```



$\Rightarrow$ sehr ineffizient, weil alle Fib-Zahlen $< k$ mehrmals berechnet werden
Sei $f(k)$ die Anzahl der Schritte, Annahme: jeder Knoten ist $\mathcal{O}(1) \Rightarrow \mathcal{O}(Knoten)$ Sei $f'(k)$ die Anzahl der Schritte, oberhalb (oberhalb ist der Baum vollständig (jeder innere Knoten

hat genau 2 Kinder))

$$\begin{aligned} f'(k) &= 2^{l+1} - 1 \\ &= 2^{k/2+1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{k/2} - 1 \\ &= 2 \cdot (\sqrt{2})^k - 1 \\ &\in \Omega(\sqrt{2})^k \\ &\Rightarrow exponentielle\, Komplexität \end{aligned}$$

13 Zahlendarstellung

Problem: unendlich viele Zahlen, aber die Computer sind endlich

13.1 natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$x \geq 0$, (++ bietet Typen verschiedener Größe)

klassisch	mit Größe $(C++)$	# Bits	Bereiche	Literale
unsigned char	uint8_t	$(\geq)8$	$0 - 256$	
unsigned short	$uint16\_t$	$(\geq)16$	$0 - 65.535$	
unsigned int	$uint32\_t$	$(\geq)32$	$0 - 4 \cdot 10^9$	
unsigned long	$uint32\_t$	32 oder 64	$0 - 4 \cdot 10^9$	
unsigned long long	$uint64\_t$	64	$0 - 2 \cdot 10^{19}$	4L

Was passiert bei zu großen Zahlen?

- alle Operationen werden Modulo 2^m ausgeführt, wenn der Typ m Bits hat
  Bsp 1:

```
uint8_t x = 250, y = 100;
uint8_t s = x+t; // 350 % 256 = 94
uint8_t p = x*y;  // 2500 % 256 = 168
```

- Pitfalls
  Beispiel 1: Mittelwert eines $uint8\_t$-Arrays

```
std::vector <uint8_t> v = {...}
uint8_t sum = 0;  // uint32_t od. uint64_t
for (int k = 0; k< v.size(); ++k) {
  sum += v[k];
}
std::cout << ‘‘Mittelwert: ‘‘’’ << (sum(v.size())) << ‘‘\n’’;
```

$uint32\_t\ sum = 0$ verhindert overflow mit hoher Wahrscheinlichkeit

Bsp 2: Count-Down Loop (rückwärts über Array)

```
for (uint8_t k = v.size()-1; k >= 0; --k) {
  ..  // v[k] zugreifen
}
uint8_t x = 0;
--x;
```

- arithmetische Op. Addition in Kapitel "Automaten"
  Substitution kann auf Addition zurückgeführt werden

Erinnerung: Restklassenarithmetik (Modulo) alle Zahlen mit dem gleichen Rest modulo k bilden "Äquivalenzklasse"

hier: kleinste Reprösentanten $0, \ldots, k-1$ mit $k = 2^m$

Eigenschaft: man kann Vielfache $n \cdot k$ addieren, ohne Äquivalenzklasse zu ändern

$\Rightarrow$ implementiere (Addition besser als Subtraktion)

$$\begin{aligned} &(a-b)\%2^m \\ =&(a+2^m-b)\%2^m \\ =&(a+z)\%2^m \end{aligned}$$

bitweise Negation dreht alle Bits um

$$\begin{aligned} m = 4 \sim (1001) &\Rightarrow (0110) \\ setze: \quad (2^m - b)\%2^m &= \sim (b+1)\%2^m \\ b + \sim b &= 11\ldots11 = 2^m - 1 \\ \sim b + 1 &= 2^m - b \end{aligned}$$

Fall 1:

$$\begin{aligned} b > 0 \Rightarrow \sim b &< 2^m - 1 \\ &\Rightarrow \sim (b+1) < 2^m \\ \sim (b+1)\%2^m &= \sim (b+1) \\ (2^m - b)\%2^m &= \sim b\%2^m \end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned} b = 0 \Rightarrow \sim b &= 2^m - 1 \\ \sim b + 1 &= 2^m \\ (\sim b + 1)\%2^m &= 0 \\ 2^m - b &= 2^m \end{aligned}$$

Multiplikation

- neue Operationen $\ll$ und $\gg$ (left und right shift) verschiebt die Bits um k Positionen nach links oder rechts. Die herausgeschobenen Bits werden vergessen, auf der anderen Seite durch 0-Bits ersetzt.

$$\begin{aligned} m = 8: \quad & 11011101 \ll 3 = 11101000 \\ & 11011101 \gg 3 = 00011011 \end{aligned}$$

- Satz:

$$x \ll k = (x * 2^m)\%2^m \tag{1}$$

- Operationen & und | sind bitweise "und" bzw. "oder" Verknüpfungen
  nicht verwechseln mit && bzw. || für logische Operatoren
  für $m = 8$:

$$\begin{array}{ll} 10110011 & \& \, 1 \\ 00000001 & \\ \hline 00000001 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 10110011 & | \, 1 \\ 00000001 & \\ \hline 10110011 & \end{array}$$

```
uint8_t mal(uint8_t x, uint8_t y) {
  uint8_t res = 0;
  for (int k = 0; k < 8; ++k) {
      if (y & (1 << k) != 0) {
        res += k;
      }
      x = x << 1;   // = x*2
  }
  return res;
}
```

13.2 ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

klassisch	Typ mit Größe	Bits	Bereich
signed char	$int8\_t$	8	$-127 \ldots 128$
signed short	$int16\_t$	16	$-2^{15} \ldots 2^{15} - 1$
signed int	$int32\_t$	32	$-2^{31} \ldots 2^{31} - 1$
signed long	$int32\_t$	32 oder 64	$-2^{63} \ldots 2^{63} - 1$
signed long long	$int64\_t$	64	$-2^{63} \ldots 2^{63} - 1$

für Restklassen: statt $0 \dots 2^m$ bei unsigned
jetzt: $-2^{m-1} \dots 2^{m-1} - 1$ (symmetrisch um 0)

d.h. $x < 2^{m-1}$: Repräsentant bleibt
$x \geq 2^{m-1}$: neuer Repräsentant, $x - 2^m$ (gleiche Restklasse)

Konsequenzen:

- bei negativer Zahl ist höchste Bit 1, weil $x \to x - 2^m$, falls $x \geq 2^{m-1}$
- unäre Negation $-x$ durch Zweierkomplement:

$$\begin{aligned} -x &= (\sim x + 1)\%2^m \\ Bsp: -0 &= (\sim 000000 + 1)\%2^8 \\ &= (1111111 + 1)\%2^8 \\ &= 100000000\%2^8 \\ &= 0 \\ Bsp: -1 &= (\ 00000001 + 1)\%2^8 \\ &= (\sim 11111110 + 1)\%2^8 \\ &= 11111111\%2^8 \\ &= 11111111 \\ &= 2^8 - 1 < 2^8 \end{aligned}$$

- Ausnahmeregel: für $\gg$ bei negativen Zahlen Compilerabhängig, meist wird links ein Bit reingeschrieben, damit Zahl negativ bleibt $\Rightarrow$ es gilt immer noch $x \gg h = \lfloor x/2^k \rfloor$

13.3 reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Problem: unendlich viele Zahlen

Lösung in $C++$

Name	Größe	Bereich	kleinste	Literale
float	32 Bit	$-10^{-38} \dots 10^{38}$	10^{-38}	$4.0f$
double	64 Bit	$-10^{308} \dots 10^{308}$	10^{-308}	4.0
long double				

- der $C++$ Standard legt Größe nicht fest, aber alle gängigen CPUs benutzen Standard $IEEE754$
  $C++$ übernimmt Hardware-Implementation
- Ziele bei Definition von reellwertigen Zahlen:
  - hohe Genauigkeit (viele gültige Nachkommastellen)
  - a
- elegante Lösung: halb-logarithmische Darstellung ("floating-point")
  Datentyp ist aus rein natürlichen Zahlen zusammengesetzt (aber alles von CPU gekapselt)

1. S (1-bit): Vorzeichen ($0 \approxeq +, \quad 1 \approxeq -$)
2. M (m-bits): Mantisse: Nachkommastellen
3. E (e-bits, Basis b): Exponent/Größenordnung

- die eigentliche Zahl wird berechnet durch:
  $x = (-1)^s \cdot (1 + M \cdot 2^{-m}) \cdot 2^{E-b}$

x	$M \cdot 2^{-m}$	$E - b$	effektive Darstellung
1	0	0	$1 \cdot 2^0$
2	0	1	$1 \cdot 2^1$
3	0.5	1	$1.5 \cdot 2^1$
4	0	2	$1 \cdot 2^2$
5	0.25	2	$1.25 \cdot 2^2$

Konsequenz alle ganzen Zahlen zwischen $-2^m + \cdots + 2^m$ können exakt dargestellt werden und exakte Arithmetik

Werte für m, e, b ($IEEE754$)

- float: $m = 23, e = 8, b = 127$
  $2^{E-b} \in [2^{-126}, 2^{127}] \approxeq [10^{-38}, 10^{38}]$
- double: $m = 52, e = 11, b = 1023$
  $2^{E-b} \in [2^{-1022}, 2^{1023}] \approxeq [10^{-308}, 10^{308}]$

Anzahl Nachkommastellen

- allgemein: 2^{-m}
- float: $2^{-23} \approxeq 10^{-7}$
- double: $2^{-52} \approxeq 2 \cdot 10^{-16}$
- $\varepsilon = 2^{-m}$ = machine epsilon, unit last place (ULP)
- ε ist die kleinste Zahl, so dass $(1.0 \cdot \varepsilon)! = 1.0$, weil Nachkommastellen außerhalb der Mantisse (rechts von 2^{-m}) ignoriert werden
  $\Rightarrow$ Problem der Auslöschung von signifikanten Stllen: wenn man zwei fast gleich große Zahlen substrahiert, löschen sich fast alle Bits de Mantisse $\Rightarrow$ nur wenige gültige Nachkommastellen überleben
- Bsp 1: $0.1234567 - 0.1234566 = 0.0000001$ (eine gültige Nachkommastelle)
- Bsp 2: $10 - \cos(x)$ für kleine x:
  für $x \approxeq 0$ ist $\cos(x) \approxeq 1 \Rightarrow$ Auslöschung

x	# gültige Stellen	Additionstheorem
0.0001	9 (statt 15.5)	15.5
10^{-8}	0 ($\cos(10^{-8}) = 1$)	15.5

  Additionstheorem: $1 - \cos(x) = 2(\sin(x/2.0))^2$

- Bsp 3: quadratische Gleichung $ax^2 + by + c$ mit $b > 0$
  $x_1 = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})$ falls $a \cdot c > 0\,,\, b^2 \gg 4ac$
  Umstellen: $x_1 = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$
  $\approx -b + b + \varepsilon \approx 0 \Rightarrow$ Auslöschung, wenig gültige Stellen
  $\frac{1}{2a}\frac{b^2-(b^2-4ac)}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{2c}{-(b+\sqrt{b^2-4ac})}$

- Ausnahmeregeln (spezielle Werte)
  - normal: $E \in [1 \ldots 2^e - 2]$
  - $E = 2^e - 1$ (größtmöglicher Wert):
    für $M = 0 : x = \pm\infty$ (abhäng. von S)
    für $M > 0 : x =$ NaN ("Not a Number")
  - $E = 0$ (kleinster Wert):
    für $M = 0 :\ \pm 0$ (abhäng. von S)
    für $M > 0 :$ "denormalisierte Zahlen" für sehr kleine Werte

14 Buchstabenzeichen

"glyphs" müssen durch Zahlen repräsentiert werden: "Zeichencode"

Geschichte

- 1963: ASCII (7-bit) Zeichen der engl. Schreibmaschine (keine Umlaute)
- 1964-2000: 8-bit codes mit Umlauten, Akzenten, kyrillisch
  aber 8-bit sind zu wenig, um alles abzudecken
  $\Rightarrow$ viele konkurrierende 8-bit Codes
- 1991-heute: Unicode
  anfangs 16-bit, jetzt $\approx$ 21-bit
  $\Leftarrow$ alles (chinesisch, Emojis, Hyroglyphen)

Unicode 3 Codierungen für Unicode:

1. UTF-8: variable length code (pro glyph $1 \ldots 4 uint8\_t$)
2. UTF-16: variable length code (pro glyph $1 \ldots 2 uint16\_t$)
3. UTF-32: fixed length code (pro glyph $1 uint32\_t$)

- char: 8-bit Codes
- wchar_t: 16-bit (Windows), 32-bit (Linux)
- $u16char\_t$
- $u32int\_t$

leider sehr plattformabhängig ⇒ Zeichensalat, wenn inkompatible Codes verwendet werden
⇒ in $C++$ ICU library ("International Components for Unicode")

- hat man alle Zeichen korrekt, ist Problem noch nicht gelöst: alphabetische Sortierung sprachabhängig
  ä: dt. Wörterbuch - wie a; dt. Telefonbuch - wie ae

- Lösung in $C++$:

```
std::sort(v.begin(), v.end(), std::locale(``se_SE.UTF-8'')) mit <locale>,
    <codecrt>
```

14.1 eigene Datentypen

3 Möglichkeiten:

- *enum*: Aufzählungstypen ⇒ Selbststudium
- *struct*: strukturierte Daten, zusammengesetzte Typen
- *class*: wie *struct* auf objekt-orientiert

```
struct Typevalue {
  type_name var_name1;
  type_name var_name2;
  ...
};
```

Beispiel:

```
struct Date {
  int day;
  int month;
  int year;
};  // Datenmember = member variables

Date caster (int year) {
  ... // Osterdaten
  Date res;
  res.day = day;
  res.month = month;
}

// für Übungsaufgabe 8.4
struct Character {
  wchar_t clear;
  wchar_t encrypted;
  int count;
};
```