

LAPORAN TUGAS BESAR I

IF2123 ALJABAR LINEAR DAN GEOMETRI

Sistem Persamaan Linear, Determinan, dan Aplikasinya



Disusun oleh :

Christian Justin Hendrawan (13522135)

Farrel Natha Saskoro (13522145)

Jason Fernando (13522156)

Program Studi Teknik Informatika

Institut Teknologi Bandung

2023

Daftar Isi

| | |
|--|----|
| Daftar Isi..... | 1 |
| Bab I Deskripsi Masalah..... | 2 |
| I. Tujuan..... | 2 |
| II. Spesifikasi..... | 2 |
| Bab II Teori Singkat..... | 4 |
| 2.1. Eliminasi Gauss..... | 4 |
| 2.2. Eliminasi Gauss-Jordan..... | 5 |
| 2.3. Determinan Matriks..... | 5 |
| 2.4. Matriks Balikan..... | 7 |
| 2.5. Matriks Kofaktor..... | 9 |
| 2.6. Kaidah Cramer..... | 9 |
| 2.7. Interpolasi Polinom..... | 10 |
| 2.8. Regresi Linear Berganda..... | 11 |
| Bab III Implementasi Pustaka..... | 12 |
| Folder userinterference..... | 12 |
| Folder functions..... | 14 |
| Folder Main..... | 20 |
| Bab IV Eksperimen..... | 22 |
| Bab V Kesimpulan, Saran, dan Refleksi..... | 28 |
| I. Kesimpulan..... | 28 |
| II. Saran..... | 28 |
| III. Refleksi..... | 28 |
| Bab VI Daftar Pustaka..... | 29 |

Bab I

Deskripsi Masalah

I. Tujuan

Tujuan dari pembuatan tugas besar ini adalah sebagai berikut.

1. Membuat pustaka (*library* atau *package*) dalam **Bahasa Java** untuk menemukan solusi SPL dengan metode eliminasi Gauss, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah *Cramer* (kaidah *Cramer* khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan), menghitung determinan matriks dengan reduksi baris dan dengan ekspansi kofaktor, dan menghitung balikan matriks.
2. Dengan memanfaatkan pustaka yang telah dibuat, membuat program penyelesaian berbagai persoalan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi dan regresi linier, menghitung matriks balikan, menghitung determinan matriks dengan berbagai metode (reduksi baris dan ekspansi kofaktor).

II. Spesifikasi

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Anda sudah mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gambar 1. Eliminasi Gauss dilakukan dengan matriks eselon baris dan eliminasi Gauss-Jordan dengan matriks eselon baris tereduksi.

Di dalam Tugas Besar 1 ini, Anda diminta membuat satu atau lebih library aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, gunakan library tersebut di dalam program Java untuk menyelesaikan

berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi. Persoalan interpolasi yang harus diselesaikan berupa persoalan interpolasi polinom dan persoalan interpolasi bicubic spline. Sedangkan, persoalan regresi yang harus diselesaikan berupa persoalan regresi linier berganda. Serta, ada persoalan yang dapat menjadi nilai bonus yakni image processing menggunakan pendekatan bicubic spline.

Bab II

Teori Singkat

2.1. Eliminasi Gauss

Merupakan sebuah metode matematika yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Metode ini bertujuan untuk mengubah matriks augmented sistem persamaan linear menjadi bentuk baris tereduksi atau bentuk eselon baris.

Langkah-langkah eliminasi gauss :

1. Membentuk matriks augmented dari persamaan linear yang diberikan
2. Membuat bentuk eselon baris, ini dilakukan dengan melakukan operasi matematika sampai mendapatkan 0 pada elemen di bawah diagonal utama
3. Mengurangkan baris dengan mengurangi dengan faktor yang membuat elemen di bawah diagonal utama menjadi 0

Misalkan persamaan linear :

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$

$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

Buat matriks augmented :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Ubah menjadi matriks eselon baris :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Diperoleh persamaan :

$$x_1 + 3/2x_2 - 1/2x_3 = 5/2 \quad (i)$$

$$x_2 + 1/2x_3 = 7/2 \quad (ii)$$

$$x_3 = 3 \quad (iii)$$

Maka nilai $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$

2.2. Eliminasi Gauss-Jordan

Merupakan sebuah metode matematika dimana eliminasi gauss-jordan ini merupakan pengembangan dari eliminasi yang hasilnya lebih sederhana. Metode matematika ini membuat sebuah matriks augmented menjadi matriks eselon baris tereduksi.

Langkah-langkah eliminasi gauss-jordan :

1. Membentuk matriks augmented dari persamaan linear yang diberikan
2. Membuat bentuk eselon baris, ini dilakukan dengan melakukan operasi matematika sampai mendapatkan 0 pada elemen di bawah diagonal utama
3. Mengurangkan baris dengan mengurangi dengan faktor yang membuat elemen di bawah diagonal utama menjadi 0
4. Setelah menjadi eselon baris langkah selanjutnya adalah membuat eselon baris tereduksi dimana dilakukan operasi matematika hingga mendapatkan 0 pada elemen diatas diagonal utama

Misalkan persamaan liner :

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$

$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

Buat matriks augmented :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ubah menjadi matriks eselon baris tereduksi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka nilai $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$

2.3. Determinan Matriks

Determinan matriks adalah sebuah nilai atau bilangan skalar yang dapat dihitung dari suatu matriks persegi (matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama). Determinan matriks sendiri dapat dihitung dengan berbagai metode, tergantung pada ukuran matriks dan preferensi perhitungan.

Metode umum determinan matriks :

1. Metode Ekspansi Kofaktor

Metode ini melibatkan ekspansi determinan matriks ke dalam penjumlahan produk elemen-elemen matriks dengan tanda positif dan negatif berdasarkan kofaktor masing-masing elemen.

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Didefinisikan:

M_{ij} = minor entri a_{ij}
= determinan upa-matriks (*submatrix*) yang elemen-elemennya tidak berada pada baris i dan kolom j

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ = kofaktor entri a_{ij}

Misalkan A adalah matriks sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Maka, untuk menghitung M_{11} tidak melibatkan elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-1:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-4)(5) = 26$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 26$$

Untuk Mencari determinan dapat dilakukan dengan cara berikut.

dapat dihitung dengan salah satu dari persamaan berikut:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n}$$

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{2n}C_{2n}$$

\vdots

$$\det(A) = a_{n1}C_{n1} + a_{n2}C_{n2} + \dots + a_{nn}C_{nn}$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \dots + a_{n1}C_{n1}$$

$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{n2}C_{n2}$$

\vdots

$$\det(A) = a_{1n}C_{1n} + a_{2n}C_{2n} + \dots + a_{nn}C_{nn}$$

2. Metode Reduksi Baris

Metode ini melibatkan melakukan operasi baris pada matriks untuk mengubahnya menjadi bentuk segitiga atas atau bentuk eselon baris, untuk mempermudah perhitungan determinan.

$$[A] \stackrel{\text{OBE}}{\sim} [\text{matriks segitiga bawah}]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \stackrel{\text{OBE}}{\sim} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & a'_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat determinan :

1. Jika determinan matriks sama dengan 0, maka matriks tersebut merupakan matriks singular (tidak memiliki invers).
2. Jika determinan matriks tidak sama dengan 0, maka matriks tersebut merupakan matriks nonsingular (memiliki invers).
3. Dalam teori SPL, determinan digunakan untuk menentukan apakah sistem persamaan memiliki solusi unik atau tidak.

2.4. Matriks Balikan

Matriks balikan atau yang lebih dikenal dengan matriks invers merupakan matriks yang dapat menggantikan matriks asal sehingga ketika matriks asal dikalikan dengan matriks balikan tersebut, hasilnya adalah matriks identitas.

Secara formal, jika A adalah matriks persegi, maka matriks balikan A dinotasikan sebagai A^{-1} , dan syarat utama untuk matriks A memiliki matriks balikan adalah :

$$\mathbf{A} * \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

Di mana I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$ yang memiliki elemen-elemen diagonal utama bernilai 1 dan elemen-elemen lainnya bernilai 0.

Berikut merupakan tahapan pencarian matriks balikan menggunakan metode eliminasi gauss-jordan.

Misalnya diberikan matriks seperti :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Susun matriks menjadi seperti di bawah :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Sehingga matriks balikannya :

$$\begin{bmatrix} 5 & -20 & 18 \\ -2 & 7 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Berikut merupakan tahapan pencarian matriks balikan menggunakan metode matriks Adjoin.

Misalnya diberikan matriks :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktornya :

$$\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -13 & 5 & -2 \\ -5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Dibagi dengan determinan :

$$A^{-1} = (1/26) * \begin{bmatrix} 40 & 13 & -5 \\ 13 & 5 & -3 \\ -5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Maka hasil balikkannya adalah :

$$\begin{bmatrix} 40/26 & 13/26 & -5/26 \\ 13/26 & 5/26 & -3/26 \\ -5/26 & -2/26 & 6/26 \end{bmatrix}$$

2.5. Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor merupakan suatu matriks yang berisi kofaktor dari setiap elemen di dalam matriks tersebut. Kofaktor setiap elemen dinyatakan sebagai

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Dengan

C_{ij} : Kofaktor elemen matriks baris ke-i dan kolom ke-j

M_{ij} : Minor dari matriks M pada baris ke-i dan kolom ke-j

Misalkan matriks M :

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor dari M :

$$\begin{bmatrix} 30 & 17 & -30 \\ -14 & 11 & -6 \\ -8 & -10 & 21 \end{bmatrix}$$

2.6. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer merupakan formula yang dipakai untuk menyelesaikan SPL dengan menggunakan determinan dari matriks augmented.

Misalkan SPL :

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= c_3 \end{aligned}$$

Cari determinan :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Mengganti setiap entri setiap kolom menjadi konstanta SPL dan cari determinannya :

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}.$$

Solusi :

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}}$$

2.7. Interpolasi Polinom

Interpolasi polinom merupakan suatu teknik interpolasi dengan asumsi pola yang kita miliki mengikuti pola polinomial baik berderajat satu maupun berderajat tinggi. Interpolasi polinom digunakan untuk mencari titik-titik antara n buah titik, dengan menggunakan pendekatan :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

Diperoleh persamaan simultan :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} \\ y_2 &= a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} \\ y_3 &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + \dots + a_{n-1}x_3^{n-1} \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} \end{aligned}$$

S

Masukan nilai x dari titik yang dicari ke fungsi polinomial, maka didapatkan nilai y :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

2.8. Regresi Linear Berganda

Regresi linear merupakan suatu metode untuk memprediksi nilai fungsi dengan banyak perubah. Diperlukan sebuah persamaan yang memuat $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, y)$. Menggunakan Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression :

$$\begin{array}{ccccccc}
 nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} & + & b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} & + & \dots & + & b_k \sum_{i=1}^n x_{ki} & = & \sum_{i=1}^n y_i \\
 b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 & + & b_2 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} & + & \dots & + & b_k \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{ki} & = & \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 b_0 \sum_{i=1}^n x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{ki}x_{1i} & + & b_2 \sum_{i=1}^n x_{ki}x_{2i} & + & \dots & + & b_k \sum_{i=1}^n x_{ki}^2 & = & \sum_{i=1}^n x_{ki}y_i
 \end{array}$$

Setelah SPL selesai akan diperoleh $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$. Untuk memprediksi nilai suatu fungsi dapat dilakukan dengan persamaan :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Bab III

Implementasi Pustaka

Folder userinterference

1. Class InputMatrix

- Attributes

| Nama | Tipe | Deskripsi |
|------|-----------------------|--|
| scan | Public static Scanner | Scanner untuk input yang digunakan dalam class InputMatrix |

- Methods

| Nama | Tipe | Parameter | Deskripsi |
|------------------|--------------------------|-----------|--|
| InputKeyboard | Public static double[][] | - | Fungsi untuk input matriks sesuai dengan row dan column yang diinput dan mengembalikan matriksnya (double[][]) |
| InputInterpolasi | Public static double[][] | - | Fungsi untuk input matriks dengan row adalah banyaknya titik yang diinput dan column 2, lalu mengembalikan matriksnya (double[][]) |
| InputRegresi | Public static double[][] | - | Fungsi untuk input matriks dengan row adalah banyaknya sample yang diinput dan column adalah jumlah peubah x yang diinput lalu ditambah 1, lalu mengembalikan matriksnya |

| | | | |
|------------------|--------------------------|---|---|
| | | | (double[][]) |
| InputFile | Public static double[][] | - | Fungsi yang membaca file .txt yang diinput lalu mengembalikan matriks yang berada di file tersebut. |
| InputFileReg | Public static double[][] | - | Fungsi yang membaca file .txt yang diinput lalu mengembalikan matriks yang berada di file tersebut. |
| InputFileInterpl | Public static double[][] | - | Fungsi yang membaca file .txt yang diinput lalu mengembalikan matriks yang berada di file tersebut. |
| InputFileInterBc | Public static double[][] | - | Fungsi yang membaca file .txt yang diinput lalu mengembalikan matriks yang berada di file tersebut. |

2. Class outputMatrix

- Attributes

Class ini tidak memiliki attributes

- Methods

| Nama | Tipe | Parameter | Deskripsi |
|-----------|--------------------|-------------------|---|
| OutString | Public static void | Double[][] matrix | Fungsi untuk menampilkan output hasil fungsi yang lain ke dalam terminal. |
| outFile | Public static void | String s | Fungsi untuk menampilkan |

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | output hasil fungsi yang lin ke dalam file .txt baru yang akan dibuat. |
|--|--|--|--|

Folder functions

3. Class Matrix

- Attributes

| Nama | Tipe | Deskripsi |
|------|-----------------------|---|
| scan | Public static Scanner | Scanner untuk input yang digunakan dalam class Matrix |

- Methods

| Nama | Tipe | Parameter | Deskripsi |
|----------------------|--------------------------|----------------------------|--|
| OutputMatrix | Public static void | Double[][] matrix | Menampilkan matrix |
| CreateIdentityMatrix | Public static double[][] | Double[][] matrix Int n | Membuat matrix identitas dengan n baris dan n kolom |
| IsSquare | Public static boolean | Double [][] matrix | Cek apakah suatu matrix persegi, matrix persegi adalah matrix dengan jumlah baris dan kolom sama |
| CopyMatrix | Public static double[][] | Double [][] matrix | Mengcopy keseluruhan matrix dan disimpan ke matrix baru |
| TransposeMatrix | Public static double[][] | Double[][] matrix | Men-transpose kan suatu matrix dan mengembalikan matrix transposenya |
| DeterminanOBE | Public static double | Double[][] matrix | Mengembalikan nilai determinan |

| | | | |
|--------------------|---------------------------|---|--|
| | | | dari suatu matrix dengan menggunakan OBE |
| GetMinorMatrix | Public static double[][] | Double[][] matrix Int row Int col | Mengembalikan matrix minor suatu matrix dari kolom dan baris yang diinput |
| DeterminanKofaktor | Public static double | Double [][] matrix | Mengembalikan nilai determinan dari suatu matrix dengan menggunakan ekspansi kofaktor |
| MatrixKofaktor | Public static double [][] | Double [][] matrix | Mengembalikan matrix yang semua elemennya merupakan kofaktor dari matrix |
| BikinKanan | Public static double [][] | Double [][] matrix | Membuat kolom paling kanan menjadi array baru yang terpisah dari matrix sebelumnya |
| BikinKiri | Public static double[][] | Double [][] matrix | Membuat matrix baru yang terdiri dari kolom paling awal sampai kolom $n - 1$ (n = jumlah kolom) |

4. Class operations

- Attributes

Class ini tidak memiliki attributes

- Methods

| Nama | Tipe | Parameter | Deskripsi |
|--------------|--------------------------|---|------------------------------|
| extendMatrix | Public static double[][] | Double[][] Matrix1, Double[][] Matrix2 | Membesarkan atau meng-extend |

| | | | |
|----------------|--------------------------|--|---|
| | | | matrix1 dengan menambahkan matrix2 |
| MultiplyMatrix | Public static double[][] | Double[][] matrix1 Double[][] matrix2 | Mengembalikan hasil kali matrix1 dengan matrix2 |
| multiplyConst | Public static double[][] | Double[][] matrix Double k | Mengembalikan hasil perkalian dari suatu matrix dengan suatu angka |
| cekHasil | Public static string | Double [][] matrix | Mengecek hasil dari suatu penyelesaian SPL lalu mengembalikan string hasil, hasil dapat berupa solusi unik, solusi banyak, dan tidak ada solusi |
| solusiUnik | Public static string | Double [][] matrix | Mengeluarkan string berupa solusi unik dan menampilkan nilai x_1, x_2, \dots, x_n dari suatu SPL |
| solusiTidakAda | Public static string | Double [][] matrix | Mengeluarkan string berupa solusi tidak ada dari suatu SPL |
| solusiBanyak | Public static string | Double [][] matrix | Mengeluarkan string berupa solusi banyak (parametrik) dari suatu SPL |
| UpdateHasil | Public static double[][] | Double [][] matrix | Melakukan update pada matriks hasil agar tidak ada hasil yang -0 |
| doubletoStr | Public static string | Double[][] matrix | Fungsi yang mengubah struktur data double menjadi |

| | | | |
|---------------|--------------------------|---|---|
| | | | string |
| IsZero | Public static boolean | Double [][] matrix | Mengecheck apakah suatu row semua elemennya adalah zero atau nol |
| SwapRow | Public static double[][] | Double [][] matriks Int row1 Int row2 | Menukar suatu baris dengan baris lainnya pada suatu matrix |
| OBE | Public static double[][] | Double[][] matriks | Melakukan operasi baris elementer terhadap suatu matriks sampai menghasilkan matriks eselon baris |
| OBE_Tereduksi | Public static double[][] | Double[][] matriks | Melakukan operasi baris elementer kepada suatu matriks sampai menghasilkan matriks eselon baris tereduksi |

5. Class Inverse

- Attributes

Class ini tidak memiliki attributes

- Methods

| Nama | Tipe | Parameter | Deskripsi |
|-----------------|--------------------------|--------------------|--|
| InverseCofactor | Public static double[][] | Double [][] matrix | Mengembalikan balikan suatu matriks dengan metode kofaktor |
| InverseOBE | Public static double[][] | Double [][] matrix | Mengembalikan balikan suatu matriks dengan metode eliminasi Gauss-Jordan |

6. Class SPL

- Attributes

Class ini tidak memiliki attributes

- Methods

| Nama | Tipe | Parameter | Deskripsi |
|-----------------|---------------------------|-------------------|--|
| gaussElim | Public static double[][] | Double[][] matrix | Mengoperasikan suatu matriks augmented untuk mendapatkan solusinya menggunakan metode eliminasi Gauss |
| gaussJordanElim | Public static double[][] | Double[][] matrix | Mengoperasikan suatu matriks augmented untuk mendapatkan solusinya menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan |
| matrixBalikan | Public static double [][] | Double[][] matrix | Mengoperasikan suatu matriks augmented untuk mendapatkan solusinya menggunakan metode eliminasi inverse matriks atau matriks balikan |
| kaidahCramer | Public static double[][] | Double[][] matrix | Mengoperasikan suatu matriks augmented untuk mendapatkan solusinya menggunakan metode kaidah Cramer |

7. Class InterpolasiPolinom

- Attributes

Class ini tidak memiliki attributes

- Methods

| Nama | Tipe | Parameter | Deskripsi |
|-------------------|------------------------|------------------------------|---|
| Interpolate | Public static double[] | Double [][] matrix | Menyelesaikan persoalan interpolasi polinomial dan mengembalikan solusi yang diperoleh dalam bentuk array |
| estimasi | Public static double | Double [] matrix Double x | Mengembalikan estimasi dari masukan x dengan cara memasukan x ke persamaan polinomial yang diperoleh |
| OutputInterpolasi | Public static string | Double[] matrix | Menampilkan persamaan interpolasi polinomial dari array solusi yang sudah diperoleh |

8. Class RegresiLinier

- Attributes

Class ini tidak memiliki attributes

- Methods

| Nama | Tipe | Parameter | Deskripsi |
|---------------|------------------------|--------------------------------------|--|
| Regresiganda | Public static double[] | Double[][] matrix Double [] hasil | Mengembalikan array berisi solusi koefisien dalam persamaan regresi (B0,B1,B2,...Bn) |
| FungsiRegresi | Public static double | Double[] function Double[] input | Mengembalikan estimasi nilai y |

| | | | |
|---------------|----------------------|-----------------|--|
| | | | dengan input yang memenuhi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ |
| OutputRegresi | Public static string | Double[] matrix | Menampilkan hasil dari regresi linier berganda dalam bentuk umum model regresi linier berganda |

9. Class InterpolasiBikubik

- Attributes
Class ini tidak memiliki attributes
- Methods

| Nama | Tipe | Parameter | Deskripsi |
|----------------------------|--------------------|--|---|
| bicubicSplineInterpolation | Public static void | Double[][] Mat Double a Double b | Mengembalikan nilai interpolasi bikubik |

Folder Main

10. Class Main

- Attributes

| Nama | Tipe | Deskripsi |
|------|-----------------------|---|
| scan | Public static Scanner | Scanner untuk input yang digunakan dalam class Main |

- Methods

| Nama | Tipe | Parameter | Deskripsi |
|------|--------------------|---------------|---|
| main | Public static void | String[] args | Menjadi main program, tempat semua program dijalankan, disini juga main menjadi |

| | | | |
|----------------|--------------------|---|---|
| | | | input utama dan menampilkan semua fitur dan menu dalam program |
| SubmenuSPL | Public static void | - | Menampilkan fitur-fitur dengan metode apa solusi SPL ingin didapatkan serta menerima input metode penyelesaian SPL |
| SubmenuDet | Public static void | - | Menampilkan fitur-fitur dengan metode apa hasil determinan ingin didapatkan serta menerima input metode penyelesaian determinan |
| SubmenuInverse | Public static void | - | Menampilkan fitur-fitur dengan metode apa hasil invers ingin didapatkan serta menerima input metode penyelesaian inversnya |
| Clear | Public static void | - | Fungsi untuk melakukan clearing pada program |
| Exit | Public static void | - | Melakukan exit dari program |
| batas | Public static void | - | Menampilkan batas-batas pada tampilan design program |

Bab IV Eksperimen

1. SPL:

a. Studi kasus 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Jawaban:

```
METODE ELIMINASI GAUSS:  
Masukkan Nama File: SPL_Ax=b.txt
```

```
=====
```

```
0 1 -1.6667 -1 -1.3333  
0 0 1 -1 1  
0 0 0 0 1  
=====
```

```
Solusi tidak ada  
=====
```

b. Studi kasus 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right]$$

Jawaban:

```

=====
Hasil Gauss-Jordan:
1 0 1 2
0 1 1 2
0 0 0 0
=====

x2 = 2 - x3
x1 = 2 - x3
x3 = x3

```

c. Studi kasus 3:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$n = 6$$

Jawaban:


```

METODE ELIMINASI GAUSS:
Masukkan Nama File: hilbert.txt
=====
Hasil Gauss:
1 0.5 0.3333 0.25 0.2 0.1667 1
0 1 1 0.9 0.8 0.7143 -6
0 0 1 1.5 1.7143 1.7857 30
0 0 0 1 2 2.7778 -140
=====
nilai x = {16,-120,240,-140}
=====

```

2. Determinan:

a. Studi kasus 1:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Jawaban:

```

METODE REDUKSI BARIS:
Masukkan Nama File: determinan.txt
=====
Determinan = 0
=====

```

b. Studi kasus 2:

| | | |
|-----|-----|-----|
| 3 | 4.5 | 2.8 |
| -3 | 7 | 8.3 |
| 0.5 | -10 | -9 |

Jawaban:

```

METODE EKSPANSI KOFAKTOR:
Masukkan Nama File: inverse.txt
=====
Determinan = 31.375
=====

```

3. Inverse Matrix:

a. Studi kasus 1:

```
1 2 3
4 5 6
7 8 9
```

Jawaban:

```
METODE MATRIKS BALIKAN:
Masukkan Nama File: determinan.txt
=====
Matriks tidak mempunyai inverse atau merupakan matriks singular
```

b. Studi kasus 2:

```
3 4.5 2.8
-3 7 8.3
0.5 -10 -9
```

Jawaban:

```
METODE ADJOIN:
Masukkan Nama File: inverse.txt
=====
0.6375 0.3984 0.5657
-0.7283 -0.9052 -1.0614
0.8446 1.0279 1.0996
```

4. Interpolasi Polinomial:

a. Studi kasus 1:

```
0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
0.2
```

Jawaban:

```

---INTERPOLASI POLINOM---
Masukkan Nama File: Interpolasi1.txt
=====
Hasil dari interpolasi adalah:
-0.022976562500000138 + 0.2400000000000024x + 0.197395833333196x^2 + 3.4409974869475946E-14x^3 + 0.026041666666624073x^4 + 2.550133859867565E-14x^5 - 5.910407676
398067E-15x^6, f(0.2) = 0.032960937500000016

```

b. Studi kasus 2:

```

0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
0.55

```

Jawaban:

```

---INTERPOLASI POLINOM---
Masukkan Nama File: Interpolasi2.txt
=====
Hasil dari interpolasi adalah:
-0.022976562500000138 + 0.2400000000000024x + 0.197395833333196x^2 + 3.4409974869475946E-14x^3 + 0.026041666666624073x^4 + 2.550133859867565E-14x^5 - 5.910407676
398067E-15x^6, f(0.55) = 0.17111865234374998

```

5. Interpolasi Bicubic Spline:

a. Studi kasus 1:

```

21 98 125 153
51 101 161 59
0 42 72 210
16 12 81 96
0 0

```

Jawaban:

```

---INTERPOLASI BICUBIC SPLINE---
Masukkan Nama File: BicubicSplineInput.txt
=====
f(0.0,0.0) = Hasil taksirannya adalah 114.0

```

6. Regresi Linear Berganda

a. Studi kasus 1:

| | | | |
|-------|------|-------|------|
| 72.4 | 76.3 | 29.18 | 0.90 |
| 41.6 | 70.3 | 29.35 | 0.91 |
| 34.3 | 77.1 | 29.24 | 0.96 |
| 35.1 | 68.0 | 29.27 | 0.89 |
| 10.7 | 79.0 | 29.78 | 1.00 |
| 12.9 | 67.4 | 29.39 | 1.10 |
| 8.3 | 66.8 | 29.69 | 1.15 |
| 20.1 | 76.9 | 29.48 | 1.03 |
| 72.2 | 77.7 | 29.09 | 0.77 |
| 24.0 | 67.7 | 29.60 | 1.07 |
| 23.2 | 76.8 | 29.38 | 1.07 |
| 47.4 | 86.6 | 29.35 | 0.94 |
| 31.5 | 76.9 | 29.63 | 1.10 |
| 10.6 | 86.3 | 29.56 | 1.10 |
| 11.2 | 86.0 | 29.48 | 1.10 |
| 73.3 | 76.3 | 29.40 | 0.91 |
| 75.4 | 77.9 | 29.28 | 0.87 |
| 96.6 | 78.7 | 29.29 | 0.78 |
| 107.4 | 86.8 | 29.03 | 0.82 |
| 54.9 | 70.9 | 29.37 | 0.95 |
| 50.0 | 76.0 | 29.30 | |

Jawaban:

```

---REGRESI LINEAR GANDA---
Masukkan Nama File Input: RegresiLinearInput.txt
=====
Hasil dari regresi berganda adalah:
-3.5077781408835103 - 0.002624990745878327*x1 + 7.989410472218274E-4*x2 + 0.15415503019830143*x3, f(50.0,76.0,29.3) = 0.9384342262216645

```

Bab V

Kesimpulan, Saran, dan Refleksi

I. Kesimpulan

SPL dapat diselesaikan dengan menggunakan berbagai macam metode, diantaranya adalah dengan menggunakan metode-metode yang diproses dalam bentuk matriks. Metode yang disediakan dengan tujuan menyelesaikan suatu SPL diantaranya adalah Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, Matriks Balikan / Inverse Matriks dan Kaidah Cramer. Solusi yang didapat dari penyelesaian SPL tersebut dapat diklasifikasikan menjadi 3 jenis yakni unique solution, multi solution, dan no solution.

Implementasi dari penyelesaian SPL adalah untuk menyelesaikan persoalan-persoalan interpolasi polinomial, regresi linier berganda, dan interpolasi bikubik spline. Pada tugas besar ini, kami telah membuat program dalam bahasa Java yang dapat mengoperasikan matriks untuk menyelesaikan persoalan-persoalan yang telah disebutkan. Library pada tugas besar kami telah diimplementasikan dalam program sebagaimana sudah dijelaskan lebih lanjut pada bab III. Program telah digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan sebagaimana dijelaskan lebih lanjut pada bab IV.

II. Saran

Saran pengembangan untuk tugas besar kami dapat ditingkatkan dengan mengimplementasikan *graphical user interface* (GUI) untuk meningkatkan kenyamanan dalam menggunakan program. Selain itu, penambahan komentar yang lebih jelas dan terperinci dapat meningkatkan keterbacaan kode kami serta mempermudah proses debugging. Yang terakhir, seharusnya pengecekan test case dilakukan lebih baik dan lebih meng-handle segala jenis input, baik input valid atau invalid.

III. Refleksi

Refleksi yang kami dapatkan dari tugas besar ini adalah kami bisa lebih memperbaiki kinerja kami dalam beberapa hal, dalam hal komunikasi, manajemen waktu, dan kerja sama. Dengan komunikasi yang baik dan jelas sangatlah penting untuk meminimalisir miskomunikasi dan mempercepat pengerjaan. Dengan manajemen waktu, sangatlah penting untuk menerapkan sistem timeline yang terperinci dan jelas. Dengan kerja sama yang baik, maka segala hal dapat lebih terpadu dan sistematis. Di luar dari kekurangan kami, banyak juga pelajaran yang dapat kami ambil dari tugas besar ini untuk lebih improve sebagai individu dan sebagai kelompok.

Bab VI

Daftar Pustaka

Berikut adalah daftar referensi yang dipakai dalam pengerjaan tugas besar ini.

1. <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2023-2024/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier-2023.pdf> (Diakses pada 23 September, 2023)
2. <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2023-2024/Algeo-04-Tiga-Kemungkinan-Solusi-SPL-2023.pdf> (Diakses pada 23 September, 2023)
3. <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2023-2024/Algeo-05-Sistem-Persamaan-Linier-2023.pdf> (Diakses pada 24 September, 2023)
4. <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2023-2024/Algeo-08-Determinan-bagian1-2023.pdf> (Diakses pada 25 September, 2023)
5. <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2023-2024/Algeo-09-Determinan-bagian2-2023.pdf> (Diakses pada 26 September, 2023)
6. <https://www.youtube.com/watch?v=v73SdwcSM5I&t=900s&pp=ugMICgJpZBABGAHKBRdyZWdyZXNpIGxpbmVhciBiZXJnYW5kYQ%3D%3D> (Diakses pada 28 September, 2023)
7. <https://youtu.be/LaolbjAzZvg?si=b8gdhoDxHjp5d4Bc> (Diakses pada 1 oktober, 2023)

Link Repository GitHub :

[ChrisCS50X/Algeo01-22135: Tugas Besar 01 IF2123 Aljabar Linear dan Geometri \(github.com\)](https://github.com/ChrisCS50X/Algeo01-22135)