《数字信号处理课程设计》实验报告

实验报告 1: 线性卷积与圆周卷积的计算/利用 FFT 实现线性卷积

学院 卓越学院

学号 23040447

姓名 陈文轩

专业 智能硬件与系统 (电子信息工程)

2025 年 5 月 9 日

1 实验目的

1、掌握计算机的使用方法和常用系统软件及应用软件的使用；

2、通过 MATLAB 编程，上机调试程序，进一步增强使用计算机解决问题的能力；

3、通过实验一，掌握线性卷积与循环卷积软件实现的方法，并验证二者之间的关系；

4、通过实验三，加深理解 FFT 在实现数字滤波 (或快速卷积) 中的重要作用，更好的利用 FFT 进行数字信号处理。

5、进一步掌握循环卷积和线性卷积两者之间的关系。

2 实验基本原理

2.1 实验一：线性卷积与圆周卷积的计算

线性卷积和圆周卷积是数字信号处理中两种基本的序列运算方式，在信号分析、滤波器设计及频谱分析中有广泛应用。

2.1.1 线性卷积

对于长度为 N_1 的序列 $x[n]$ 和长度为 N_2 的序列 $h[n]$，两者的线性卷积定义为：

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=0}^{N_2-1} h[m]x[n-m] \tag{1}$$

线性卷积的结果序列长度为 $N_1 + N_2 - 1$。在本实验中，我们使用 MATLAB 内置函数 `conv()` 计算序列 x 和 h 的线性卷积。

2.1.2 圆周卷积

圆周卷积（循环卷积）是在周期延拓的基础上进行的卷积运算。对于长度为 N 的序列 $x[n]$ 和 $h[n]$，其圆周卷积定义为：

$$y[n] = x[n] \circledast h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]x[(n-m)_N] \tag{2}$$

其中，$(n-m)_N$ 表示取模运算，即 $(n-m) \mod N$。

圆周卷积的结果序列长度与运算周期 N 相同。在本实验中，我们通过自定义函数 `circonv()` 计算不同长度 $(N = 5, 6, 9, 10)$ 的圆周卷积。

2.2 实验三：利用 FFT 实现线性卷积

快速傅里叶变换 (FFT) 是离散傅里叶变换 (DFT) 的高效计算算法，可以显著降低计算复杂度，从 $O(N^2)$ 降至 $O(N \log N)$。利用 FFT 实现线性卷积是数字信号处理中的重要应用，尤其对于长序列的卷积计算具有明显优势。

2.2.1 卷积定理

根据卷积定理，两个序列的线性卷积等价于它们傅里叶变换的乘积的逆变换：

$$y[n] = x[n] * h[n] \Leftrightarrow Y(k) = X(k) \cdot H(k) \tag{3}$$

其中 $X(k)$ 和 $H(k)$ 分别是序列 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的离散傅里叶变换，$Y(k)$ 是它们的频域乘积。

2.2.2 FFT 实现线性卷积的步骤

对于长度为 N_1 的序列 $x[n]$ 和长度为 N_2 的序列 $h[n]$，利用 FFT 实现线性卷积的基本步骤如下：

1. 确定变换长度 $N \geq N_1 + N_2 - 1$，通常选择 $N = N_1 + N_2 - 1$
2. 对序列 $x[n]$ 和 $h[n]$ 进行零填充，使其长度达到 N
3. 计算零填充后序列的 FFT：$X(k) = \text{FFT}(x[n], N)$，$H(k) = \text{FFT}(h[n], N)$
4. 计算频域乘积：$Y(k) = X(k) \cdot H(k)$
5. 计算逆 FFT 得到线性卷积结果：$y[n] = \text{IFFT}(Y(k), N)$

2.2.3 本实验原理

在本实验中，我们利用 FFT 实现了数字滤波器对不同输入信号的滤波过程，本质上是计算输入信号与滤波器脉冲响应的线性卷积。实验中：

- 数字滤波器脉冲响应序列 $h[n] = 0.5^n$，为指数衰减序列，长度为 N_1

- 三种输入序列：
  - $x_1[n]$ 为单位阶跃序列，全为 1
  - $x_2[n]$ 为余弦序列，$x_2[n] = \cos(2\pi n/N_2)$
  - $x_3[n]$ 为指数衰减序列，$x_3[n] = 0.33^n$
- 确定变换长度 $N = N_1 + N_2 - 1$
- 对输入序列和滤波器脉冲响应计算 FFT
- 在频域相乘实现滤波：$Y_i(k) = X_i(k) \cdot H(k)$，其中 $i = 1, 2, 3$
- 通过 IFFT 得到时域滤波结果 $y_i[n]$

FFT 实现线性卷积的方法在实际应用中被广泛用于数字滤波器设计、系统辨识、语音处理和图像处理等领域。

3 实验要求及内容

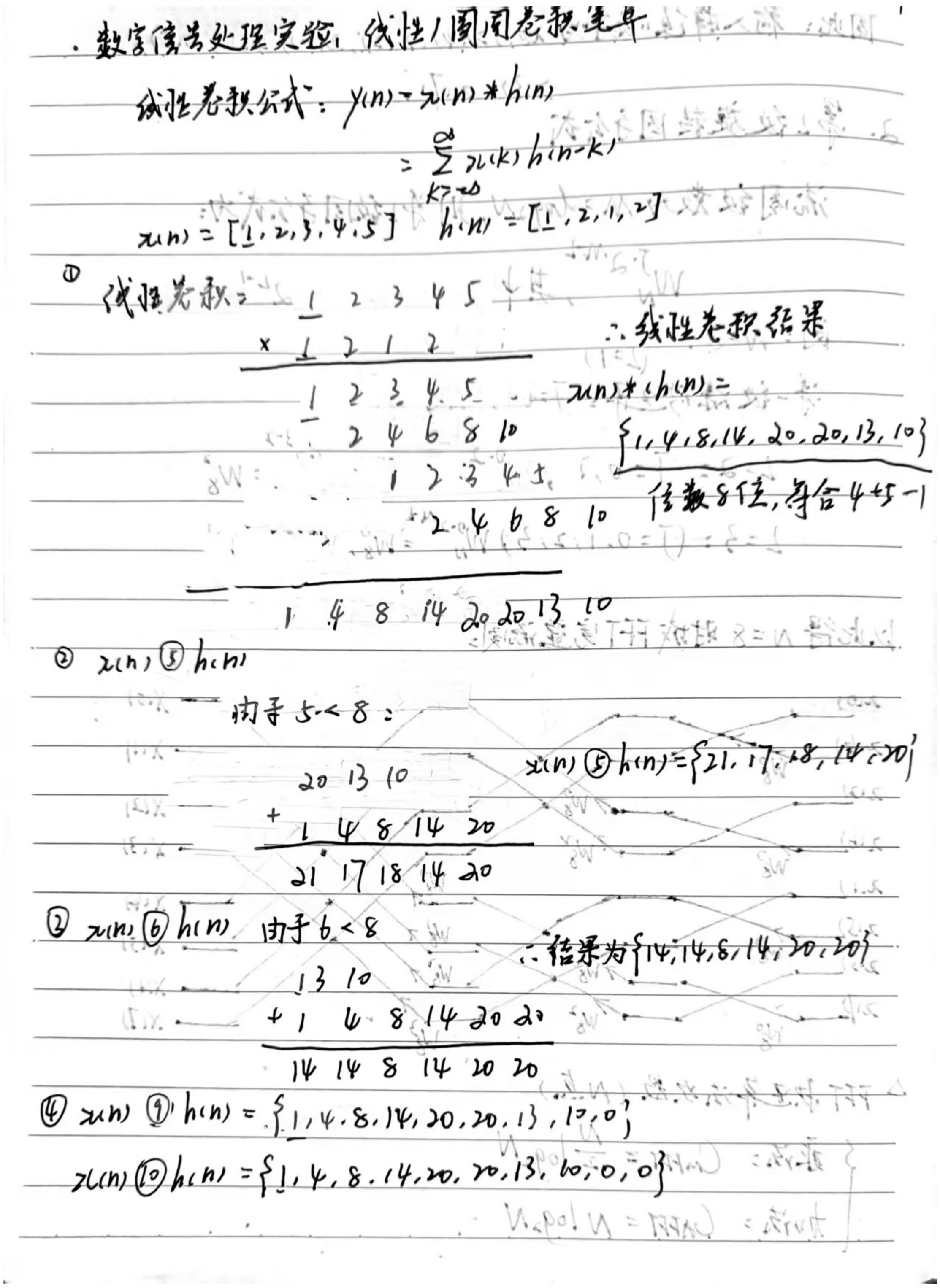
3.1 实验一

已知两个有限长序列

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 5\delta(n-4)$$
$$h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) + 2\delta(n-3)$$

1. 实验前，预先预算好这两个序列的线性卷积及 N=5,6,9,10 循环卷积：
2. 将实验结果与预先笔算的结果比较，验证其正确性。

笔算过程与结果如下：



数字信号处理实验：线性/圆周卷积笔算

线性卷积公式：$y(n)=x(n)*h(n)$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

$x(n)=[\underline{1},2,3,4,5]$　　$h(n)=[\underline{1},2,1,2]$

① 线性卷积：

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\times & & & & & 1 & 2 & 1 & 2 \\
\hline
 & & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & & & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\
 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & & & \\
\hline
 & 1 & 4 & 8 & 14 & 20 & 20 & 13 & 10
\end{array}$$

∴线性卷积结果

$x(n)*h(n)=$

$\{1,4,8,14,20,20,13,10\}$

位数8位，符合4+5-1

② $x(n)$ ⑤ $h(n)$

由于5<8：

$$\begin{array}{rrrrr}
20 & 13 & 10 & & \\
+\ 1 & 4 & 8 & 14 & 20 \\
\hline
21 & 17 & 18 & 14 & 20
\end{array}$$

$x(n)$ ⑤ $h(n)=\{21,17,18,14,20\}$

③ $x(n)$ ⑥ $h(n)$　由于6<8

$$\begin{array}{rrrrrr}
13 & 10 & & & & \\
+\ 1 & 4 & 8 & 14 & 20 & 20 \\
\hline
14 & 14 & 8 & 14 & 20 & 20
\end{array}$$

∴结果为$\{14,14,8,14,20,20\}$

④ $x(n)$ ⑨ $h(n)=\{\underline{1},4,8,14,20,20,13,10,0\}$

$x(n)$ ⑩ $h(n)=\{\underline{1},4,8,14,20,20,13,10,0,0\}$

图 1 笔算结果

3.2 实验三

数字滤波器的脉冲响应为 $h(n)=(\frac{1}{2})^n R_{N2}(n), N_2$ 可自定，本实验取 $N_2=17$ 输入序列 $x(n)$ 可选下列几种情况

$$\text{①}\,\mathrm{x}(n)=R_{N1}(n) \qquad N_1 \text{ 可取16}$$

$$\text{②}\,\mathrm{x}(n)=\cos(\frac{2\pi}{N_1}n)R_{N1}(n) \quad N_1=16$$

$$\text{③}\,\mathrm{x}(n)=(\frac{1}{3})^n R_{N1}(n), \quad N_1=16$$

2、实验前，预先计算好 $x(n)*h(n)$ 的值。

4 实验结果与分析

4.1 实验一

4.1.1 代码实现

```
% 主函数
clear all;
n = 0:1:11;
m = 0:1:5;
N1 = length(n);
N2 = length(m);
x = [1 2 3 4 5]; %定义序列x
h = [1 2 1 2]; %定义序列h
res_conv = conv(x,h); % 计算线性卷积
res_circonv5 = circonv(x,h,5);% 计算圆周卷积
res_circonv6 = circonv(x,h,6) ; % 计算圆周卷积
res_circonv9 = circonv(x,h,9); % 计算圆周卷积
res_circonv10 = circonv(x,h,10); % 计算圆周卷积
ny1 = 0:length(res_conv)-1;  % 定义线性卷积的输出时域
ny2 = 0:length(res_circonv5)-1; % 定义圆周卷积的输出时域
ny3 = 0:length(res_circonv6)-1;
ny4 = 0:length(res_circonv9)-1;
ny5 = 0:length(res_circonv10)-1;
```

```
subplot(5, 1, 1);
stem(ny1, res_conv);  % 绘制线性卷积结果
subplot(5, 1, 2);
stem(ny2, res_circonv5);  % 绘制圆周卷积结果
subplot(5, 1, 3);
stem(ny3, res_circonv6);
subplot(5, 1, 4);
stem(ny4, res_circonv9);
subplot(5, 1, 5);
stem(ny5, res_circonv10);
axis([0, 10, 0, 25]);  % 设置坐标轴范围
```

Code Listing 1: 实验一 MATLAB 实现代码

4.1.2 效果展示

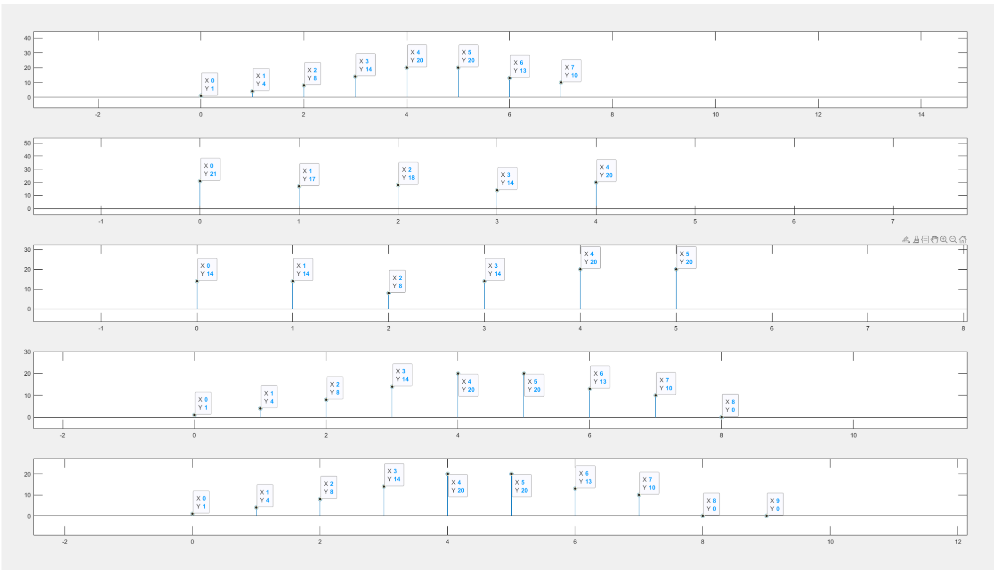


图 2 matlab 绘图

4.2 实验三

4.2.1 代码实现

```
n= [0:1:17];
m= [0:1:16];
```

```
Nl=length(n);
N2=length(m);
hn=0.5.^n;  %生成数字滤波器脉冲序列 hn为0.5指数衰减序列
x1n=ones(1,N2); %生成输入序列x1n 即 x1[n]=[1,1,1,...,1](单位步进序列)
x2n=ones(1,N2).*cos(2*pi/N2*m); %生成一个余弦波序列x2n = cos(2n/N2)
x3n=ones(1,N2).*0.33.^m; %生成一个指数衰减序列 x3[n]= 0.33^n
N=N1+N2-1;
X1K=fft(x1n, N); %输入序列和数字滤波器脉冲序列进行FFT运算
X2K=fft(x2n, N);
X3K=fft(x3n, N);
HK=fft(hn, N);
Y1K=X1K.*HK;   %频域相乘=时域卷积 FFT数字滤波实现关键 Xi[n]此时滤波
Y2K=X2K.*HK;
Y3K=X3K.*HK;
y1n=ifft(Y1K,N); %反傅里叶变换 由频域得到时域结果
y2n=ifft(Y2K,N);
y3n=ifft(Y3K,N);
x=0:N-1;
subplot(3, 1, 1);%将计算结果呈现在图表上
stem(x,y1n,'.');
subplot(3, 1, 2);
stem(x,y2n,'.');
subplot(3, 1 , 3);
stem(x,y3n,'.');
```

Code Listing 2: 实验三 MATLAB 实现代码

4.2.2 效果展示

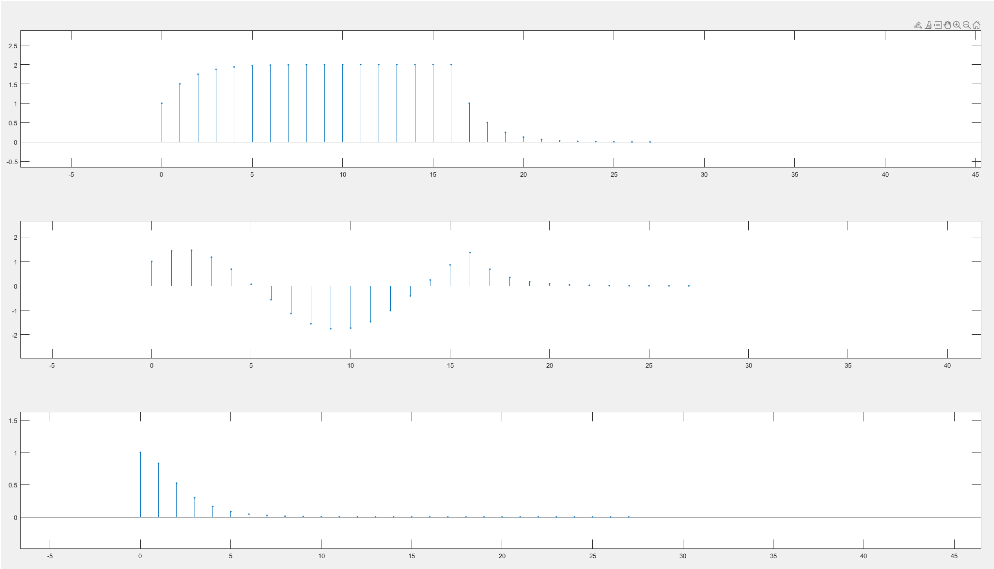


图 3 matlab 绘图

5 实验小结

本次实验主要完成了两个任务：线性卷积与圆周卷积的计算，以及利用 FFT 实现线性卷积。通过 MATLAB 编程，我们实现了两个序列的线性卷积和不同长度 (N=5,6,9,10) 下的圆周卷积计算，验证了当圆周卷积长度 $N \geq N_1+N_2-1$ 时与线性卷积结果相同的理论。同时，我们也利用 FFT 算法实现了数字滤波器对三种不同输入信号（单位阶跃序列、余弦序列和指数衰减序列）的滤波过程，验证了卷积定理在实际应用中的有效性。实验加深了对卷积运算和 FFT 在数字信号处理中应用的理解，掌握了频域方法提高计算效率的重要技术。