《数字信号处理课程设计》实验报告

实验报告 2:FFT 频谱分析

学院 卓越学院

学号 23040447

姓名 陈文轩

专业 智能硬件与系统 (电子信息工程)

2025 年 5 月 20 日

1　实验目的

1、通过这一实验，能够熟练掌握快速离散傅里叶变换 (FFT) 的原理及其用 FFT 进行频谱分析的基本方法。

2、在通过计算机上用软件实现 FFT 及信号的频谱分析。

3、通过实验对离散傅里叶变换的主要性质及 FFT 在数字信号处理中的重要作用有进一步的了解。

2　实验基本原理

2.1　快速傅里叶变换 (FFT) 基本原理

离散傅里叶变换 (DFT) 是将时域离散信号变换到频域的一种基本方法，其定义为：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{1}$$

其逆变换 (IDFT) 定义为：

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2}$$

直接计算 DFT 需要 $O(N^2)$ 的计算复杂度。快速傅里叶变换 (FFT) 通过分解算法，将计算复杂度降至 $O(N \log_2 N)$，显著提高了计算效率。

2.1.1　基 2FFT 算法 (Cooley-Tukey 算法)

基 2FFT 算法基于序列长度为 2 的整数幂 ($N = 2^m$) 时，可将 DFT 分解为更小规模的 DFT 计算。具体地，将序列分为奇偶两组：

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2r)} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2r+1)} \tag{3}$$

令 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$，上式可重写为：

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{2rk} \tag{4}$$

注意到 $W_N^2 = W_{N/2}$，可得：

$$X[k] = G[k] + W_N^k \cdot H[k] \tag{5}$$

其中 $G[k]$ 和 $H[k]$ 分别是偶序列和奇序列的 DFT，各自长度为 $N/2$。

由于 $G[k]$ 和 $H[k]$ 的周期性，对于 $k + N/2$：

$$X[k + N/2] = G[k] - W_N^k \cdot H[k] \tag{6}$$

这种蝶形运算结构可递归应用，直至最小规模的 DFT(N=2)。

2.2 FFT 频谱分析原理

频谱分析是分析信号频率成分的方法，通过 FFT 可以高效计算信号的频谱。对于长度为 N 的序列，其频谱分析过程如下：

2.2.1 频谱计算

通过 FFT 计算信号的频域表示：

$$X[k] = \text{FFT}(x[n]), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7}$$

2.2.2 频率分辨率

对于采样频率为 f_s 的信号，频率分辨率为：

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} \tag{8}$$

第 k 个频点对应的实际频率为：$f_k = k \cdot \Delta f$（对于 $0 \le k \le N/2$）。

2.2.3 功率谱计算

信号的功率谱密度 (PSD) 可通过以下方式计算：

$$P[k] = \frac{|X[k]|^2}{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{9}$$

对于单边谱，需要对 $k = 1, 2, \ldots, N/2 - 1$ 的值乘以 2（因为对称性）。

3 实验要求及内容

(1) 周期为 N 的正弦序列 $\sin(\frac{2\pi}{N}n)$，且 $0 \leq n \leq N-1$，N=32，求 N 点 DFT。

(2) 复合函数序列 $0.9\sin(\frac{2\pi}{N}n)+0.6\sin(\frac{2\pi}{N/3}n)$

(3) 矩形序列 $R_N(n)$，N=8；求 N 点 DFT 和 2N 点 DFT。

(4) 见教材习题 2.31

有一调幅信号

$$x_\alpha(t)=[1+\cos(2\pi\times 100t)]\cos(2\pi\times 600t)$$

DFT 做频谱分析，要求能分辨 $x_q(t)$ 的所有频率分量，若用 $f_x=3kHz$ 频率抽样，首先分析抽样数据为N=120 点的频谱分析，求 $X(k)=DFT[x(n)]$，N=120 点，画出 $X(k)$ 的幅频特性 $|X(k)|$，标出主要点的坐标值。其次分析抽样数据为 N=128 点的频谱分析，求 $X(k)=DFT[x(n)]$，N=128 点，画出 $X(k)$ 的幅频特性 $|X(k)|$，标出主要点的坐标值。

比较上述不同长度采样点情况下的实验结果，说明利用 DFT 对连续信号进行傅里叶分析可能造成哪些误差？

4 实验结果与分析

4.1 题目一

```
clear all
N = 32;
n = 0:N-1;
xn = sin(2*pi*n/N)  %32点的正弦信号
XK = fft(xn, N);   %32点FFT转换
magXK = abs(XK);
phaXK = angle(XK);

subplot(1,2,1)
plot(n, xn)
xlabel('n'); ylabel('x(n)');
title('x(n) N=32');
```

```
subplot(1,2,2)
k = 0:length(magXK)-1;  %绘制时域信号和频域幅度谱
stem(k, magXK, '.');
xlabel('k'); ylabel('|X(k)|');
title('X(k) N=32');


%频谱特性解释：
%频点横坐标确定：生成的信号是频率为1周期/32点的正弦波，在DFT后，理论上应该在k=1和k=31(即N-1)处有两个峰值
                %这是因为DFT的周期性：k=N-1对应的是负频率分量(-1/32点)，K=1对应的是正频率分量(1/32点)
                %正负频率分量，关于N/2对称，这是FFT频谱的特性
%频点强度确定：对于纯正弦波Asin(2 fn)，DFT系数的理论幅度为AN/2，这里就是16
```

Code Listing 1: 实验一 MATLAB 实现代码

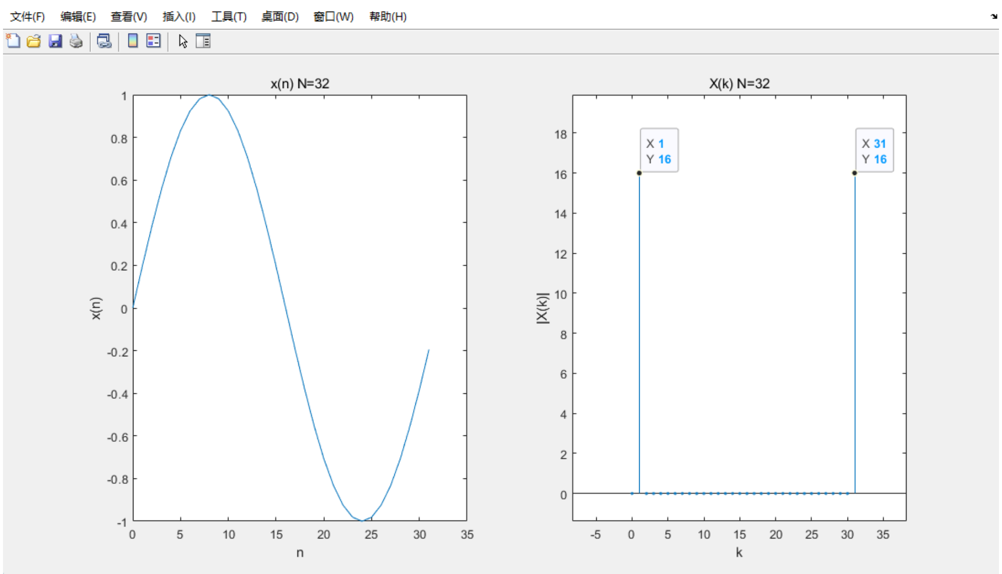

图 1 matlab 绘图

4.2 题目二

```
clear all
N = 100;
n = 0:N-1;
xn = 0.9*sin(2*pi*n/N) + 0.6*sin(2*pi*n/N*3);
%时域信号构成:
%第一个正弦波: 频率1周期/100点, 幅度0.9
%第二个正弦波: 频率3周期/100点, 幅度0.6

XK = fft(xn, N);
magXK = abs(XK);
phaXK = angle(XK);

subplot(1,2,1)
plot(n, xn)
xlabel('n'); ylabel('x(n)');
title('x(n) N=100');

subplot(1,2,2)
k = 0:length(magXK)-1; %绘制时域信号和频域幅度谱
stem(k, magXK, '.');
xlabel('k'); ylabel('|X(k)|');
title('X(k) N=100');

%FFT频谱解释:
%横坐标(k): DFT频点序号 (0到99)
    %k=1对应频率: 1/100 cycles/sample (即第一个正弦波)
    %k=3对应频率: 3/100 cycles/sample (即第二个正弦波)
    %k=97对应频率: -3/100 cycles/sample (第二个正弦波的负频率分量)
    %k=99对应频率: -1/100 cycles/sample (第一个正弦波的负频率分量)
    %正负频率分量关于N/2对称
%纵坐标(|X(k)|): 频谱幅度 (理论预测值)
    %对于幅度A的正弦波, DFT峰值幅度应为A*N/2
```

```
    %第一个正弦波: 0.9×100/2 = 45 (k=1和k=99)
    %第二个正弦波: 0.6×100/2 = 30 (k=3和k=97)

%由于 N=3 太小, 无法分辨原始信号中的高频分量 (3 cycles/100), 导致频谱严重失真。
%当 N=3, 最高可分辨频率是 0.5 cycles/sample (Nyquist 频率)。但原信号的高频分量0.03cycles/sample 在 N=3 时被 混叠 (aliasing) 到低频。
%原信号周期100/3=33.3,N=3太短, 频谱泄漏严重
```

Code Listing 2: MATLAB 实现代码

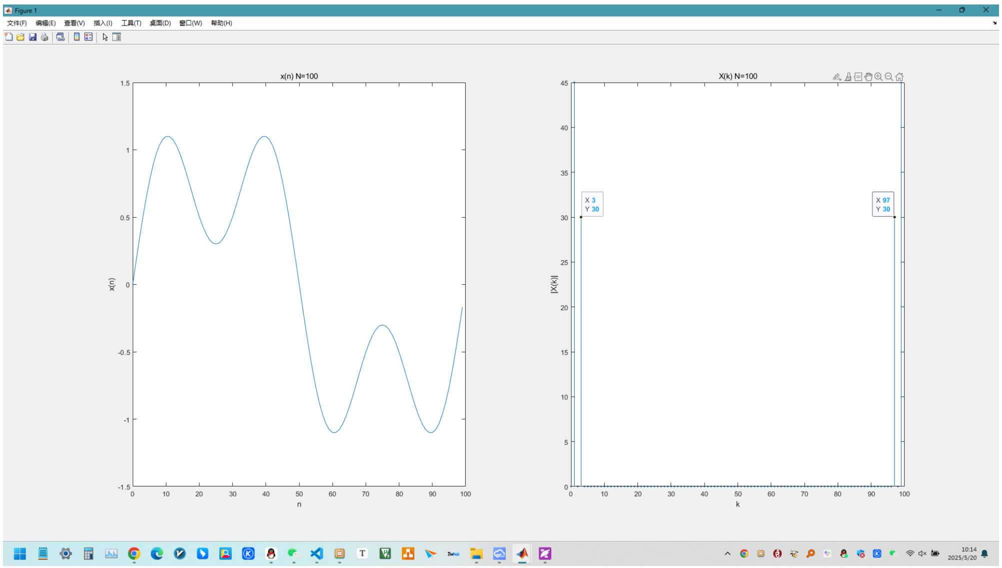

图 2 matlab 绘图

4.3 题目三

```
clear all
M = 16;
n=[0:1:7];
N = length(n);
xn = ones(1,N);    %这是一个宽度为8的矩形脉冲, 在数字信号处理中称为矩形窗函数
X1K = fft(xn, N); %FFT运算
```

```matlab
X2K = fft(xn, M);
magX1K = abs(X1K);
phaX1K = angle(X1K);
magX2K = abs(X2K);
phaX2K = angle(X2K);

subplot(1,3,1)
stem(n, xn)
xlabel('n'); ylabel('x(n)');
title('x(n) N=8');

subplot(1,3,2)
k1 = 0:length(magX1K)-1; % Corrected the index calculation
stem(k1, magX1K, '.'); % Changed '.' to '.' for marker style
xlabel('k'); ylabel('|X(k)|');
title('X(k) N=8');

subplot(1,3,3)
k2 = 0:length(magX2K)-1; % Corrected the index calculation
stem(k2, magX2K, '.'); % Changed '.' to '.' for marker style
xlabel('k'); ylabel('|X(k)|');
title('X(k) M=16');

%频谱图1：（N=8）
%FFT分析：对8点信号做8点FFT（N=8）
%对于8点采集宽度为8的矩形脉冲，就是只有直流信号（时域信号幅值一直为1，没有振荡成分，没有交流分量）
%所以K=1~7(交流分量)FFT频谱上的幅值就是0，所有FFT幅值都在k=0
%k=0，e^j0=1，计算得幅值为8

%频谱图2：(N=16)
%幅值：对于16点采集宽度为8的矩形脉冲，时域呈现出窗函数，窗函数对应的FFT频谱就是离散Sinc函数，并关于N/2对称
%横坐标：由于分子1-e^(j*pi*k)为偶数时为 0，奇数时为 2，所以奇数
```

```
时有幅值，偶数时没有幅值，而是呈现离散 sinc 函数的形状。
```

Code Listing 3: MATLAB 实现代码

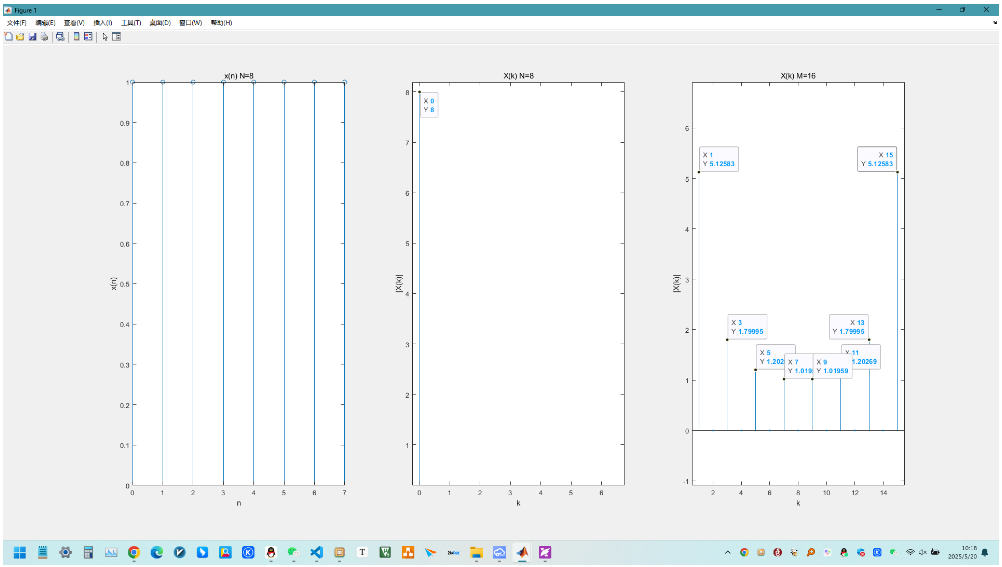

图 3 matlab 绘图

4.4 题目四

```
clear all
N = 128;
M = 120;
fs = 3000 ;
t=0:1/fs:120/3000;  %采样时间40ms,整数周期采样
t2=0:1/fs:128/3000;  %采样时间42.67ms, 非整数周期采样

xn = cos(2*pi*600*t).*(1+cos(2*pi*100*t));
x2n = cos(2*pi*600*t2).*(1+cos(2*pi*100*t2));
%这是一个幅度调制信号:
%载波: 600 Hz 余弦波（高频）。
%调制信号: 100 Hz 余弦波（低频）, 叠加直流分量1, 形成时变幅度。

%FFT频谱解释:
%N=120:
```

```
%频率分辨率：Fs/120=25HZ
%AM时域信号积化和差得：x(t)=cos(2pai*600t)+0.5*cos(2pai*500t)
    +0.5*cos(2pai*700t)
%所以横坐标在k=20,24,28有幅值，且k=24的幅值为其余两个的两倍
%对于单频余弦信号，FFT频谱幅值为AN/2,所以k=20时，幅值就是0
    .5*120/2=30

%N=128
%频率分辨率：Fs/128=23.44HZ
%频谱出现能量扩散（频谱泄漏），因为信号频率未对齐DFT频点。
%主峰（600 Hz，k=25.6(无法对应)）和边带（500/700 Hz）的能量会分
    散到多个频点。

XK = fft(x2n, N); %N=120采样
X1K = fft(xn, M);
magXK = abs(XK);
phaXK = angle(XK);

magX1K = abs(X1K);
phaX1K = angle(X1K);


subplot(1,4,1)
plot(t, xn)
xlabel('n'); ylabel('x(n)');
title('x(n) N=120');

subplot(1,4,2)
plot(t2, x2n)
xlabel('n'); ylabel('x(n)');
title('x(n) N=128');

subplot(1,4,3)
k = 0:length(magXK)-1; % Corrected the index calculation
```

```
stem(k, magXK, '.'); % Changed '.' to '.' for marker style
xlabel('k'); ylabel('|X(k)|');
title('X(k) N=128');

subplot(1,4,4)
k1 = 0:length(magX1K)-1; % Corrected the index calculation
stem(k1, magX1K, '.'); % Changed '.' to '.' for marker style
xlabel('k'); ylabel('|X(k)|');
title('X(k) N=120');
```

Code Listing 4: MATLAB 实现代码

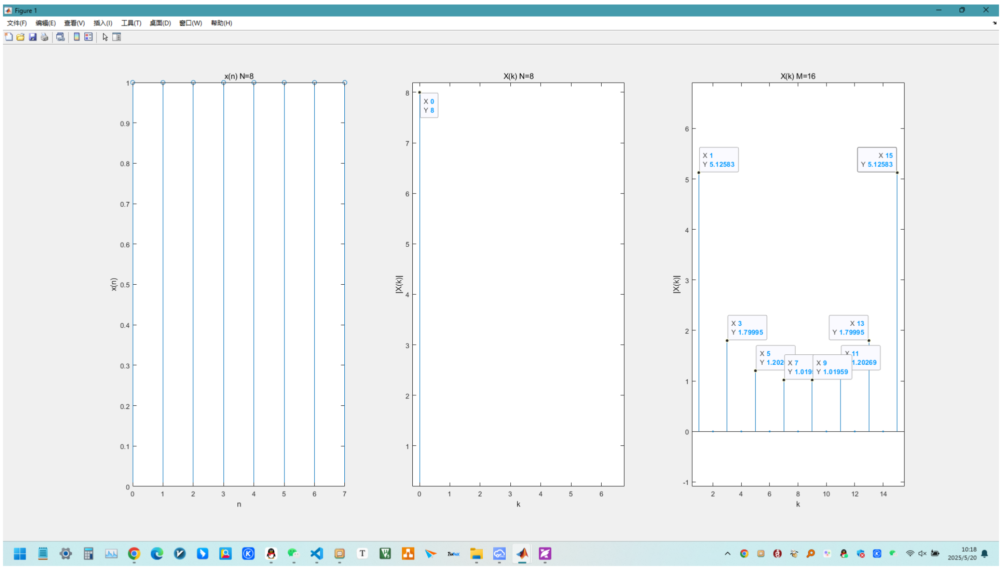

图 4 matlab 绘图

5 实验小结

通过本次快速傅里叶变换 (FFT) 频谱分析实验，我系统地学习了 FFT 算法的基本原理和应用技巧，掌握了在 MATLAB 环境下进行频谱分析的方法。通过四个不同的实验案例，我对 FFT 分析的特性有了更加深入的理解：

5.1 关键发现

1. **FFT 的基本特性**：通过实验一和二，验证了单频和多频信号的 FFT 频谱特性。对于频率为 $f = 1/N$ 的正弦信号，其频谱在 $k = 1$ 和 $k = N - 1$ 处呈现对称峰值，幅值理论上为 $AN/2$，这与实验结果相符。

2. **频谱泄漏现象**：在实验四中，通过比较 N=120 和 N=128 点 FFT 的结果，明显观察到当信号频率与 FFT 频点不对准时，能量会" 泄漏" 到相邻频点，导致频谱分辨率下降和能量扩散。

3. **零填充效应**：实验三通过对比 N=8 和 N=16 点 FFT 结果，展示了零填充如何改变频谱的表现形式。零填充不会提高频率分辨率，但能使频谱表现更为平滑和连续。

4. **调制信号分析**：实验四验证了调幅 (AM) 信号在频域的表现，证实了时域乘积在频域转化为卷积的特性，呈现出载波 (600Hz) 以及上下边带 (500Hz/700Hz)。

5.2 实验中的误差来源

利用 DFT 对连续信号进行频谱分析时，可能产生以下误差：

- **频谱泄漏 (Spectral Leakage)**：当分析窗口长度不是信号周期的整数倍时，会导致能量从实际频率扩散到邻近频率，如实验四中 N=128 的情况所示。
- **栅栏效应 (Picket Fence Effect)**：DFT 只能在离散频点上计算频谱值，当信号的实际频率落在这些频点之间时，会导致幅值测量误差。
- **分辨率限制**：频率分辨率受限于 $\Delta f = f_s/N$，实验四中两种采样长度产生不同分辨率 (25Hz vs 23.44Hz)。
- **截断误差**：有限长度采样会造成信号截断，相当于对信号应用了矩形窗，引入额外的频谱成分。

5.3 应用启示

在实际应用 FFT 进行频谱分析时，应当注意：

- 选择合适的采样频率，确保满足奈奎斯特采样定理
- 尽可能使采样长度为信号周期的整数倍，减少频谱泄漏
- 在需要精确测量频率和幅值时，考虑应用适当的窗函数和插值技术

- 理解零填充可以提高频谱的视觉分辨率，但不会提高实际频率分辨率

本次实验加深了我对傅里叶变换和频谱分析的理解，尤其是 FFT 算法在数字信号处理中的重要作用。通过实际编程验证理论知识，我更清晰地认识到 FFT 在信号分析、通信系统、声音处理等领域的广泛应用价值。