## 1. Pojam relacije. Osnovni pojmovi.

Svaki podskup Kartezijevog produkta skupova naziva se **relacija** (uključujući i prazan skup i cijeli Kartezijev produkt).

Pišemo:

$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ → n-arna relacija

$\rho \subseteq \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}$ → n-arna relacija na skupu A

Ako neki element pripada binarnoj relaciji, pišemo $(x, y) \in \rho$ ali i $x\rho y$.
Kažemo da su x i y **usporedivi** u relaciji $\rho$ ako je $(x, y) \in \rho$ ili $(y, x) \in \rho$, odnosno $(x, y) \notin \rho$ il $(y, x) \notin \rho$ ako nisu.

Skup S na kojem je definirana neka relacija naziva se relacijska struktura. Sam skup je amorfna cjelina (bez dubljeg sadržaja). Na skupu može biti definirano i više relacija i operacija. U svim takvim slučajevima kažemo da skup ima strukturu.

## 2. Binarna relacija i binarna relacija na skupu. Osnovna svojstva binarnih relacija.

Binarna relacija na skupu X je bilo koji neprazan podskup $\rho \subseteq X \times X$. Kažemo da su elementi x i y u relaciji $\rho$ (ili x je u relaciji s y) ako je $(x, y) \in \rho$. U tom slučaju možemo pisati $x\rho y$. Riječ binarna znači da imamo odnos između dva elementa, pri čemu je važno znati koji je prvi a koji drugi.

Binarnu relaciju ρ smo definirali kao $\rho \subseteq A \times B$, a $\rho \subseteq A \times A$ zvali smo relacija na skupu A i mogli smo ju zadati opisom ili Vennovim dijagramom.

Činjenicu da neki element (x,y) pripada relaciji ili ne, možemo shvatiti i kao iskaznu funkciju:

$\tau[(x, y) \in \rho] = \top$

$\tau[(x, y) \in \rho] = \bot$

Ta funkcija preslikava $f : A \times A \to \{0,1\}$ ({T, ⊥}). Relacije možemo definirati i Cayleyevom tablicom.

<u>Svojstva:</u>

**a) refleksivnost**

$\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A)[(x, x) \in \rho]$

**b) simetričnosti**

$\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x, y \in A)[(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho]$

**c) antisimetričnosti**

$\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x, y \in A)[(x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Rightarrow x = y]$

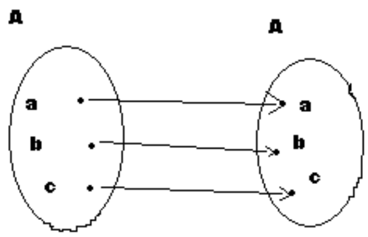
**d) tranzitivnost**

$\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x, y, z \in A)[(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho]$

### 3. Predočavanje binarnih relacija. Koliko imamo binarnih relacija na skupu A od n elemenata?

Relacije predočavamo:

1) nabrajanjem elemenata ako je skup konačan (binarna, a slično i unarna relacija)
2) kao podskup kartezijevog produkta (Vennov dijagram)
3) definicijskim dijagramom




4) Cayleyevom tablicom (samo unarne i binarne operacije)

   npr. A = {a,b,c}

   ρ = {(a, a), (b, b), (b, c)}

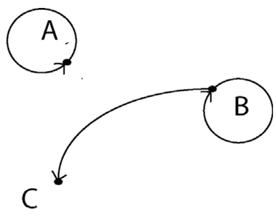
| ρ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | T | ⊥ | ⊥ |
| b | ⊥ | T | T |
| c | ⊥ | ⊥ | ⊥ |

5) Matrično, jer se tablica može shvatiti kao matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6) Grafom

Veze se prikazuju ravnim crtama. Ako je element u vezi s nekim drugim elementom, ali taj drugi nije u vezi s prvim, veza se prikazuje vektorom. Ako su oba međusobno u relaciji, umjesto $a \leftrightarrow b$ pišemo $a — b$.




Prema teoremu o broju binarnih operacija, broj binarnih relacija na skupu **A** sa **n** elemenata jednak je $2^{n^2}$ jer je K({T,⊥})=2

## 4. Operacije s binarnim relacijama.

Za dvije relacije $\rho_1$ i $\rho_2$ na skupu X definiramo novu relaciju – kompoziciju relacija $\rho_1 \circ \rho_2$ kao skup svih $(x, y) \in X \times X$ za koje postoji $z \in X$ takav da je $x\rho_1 z$ i $z\rho_2 y$. Zapisano vrijedi:
$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(x,y) \in X \times X \;:\; (\exists z \in X)(x\rho_1 z \wedge z\rho_2 y)\}$

Za relaciju $\rho$ na X definiramo inverznu relaciju $\rho^{-1}$ tako da pišemo $x\rho^{-1}y$ onda i samo onda ako je $y\rho x$:
$\rho^{-1} = \{(x,y) \in X \times X \;:\; (y,x) \in \rho \}$

Kao i za funkcije, i za relacije vrijedi zakon asocijativnosti:
$\rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3$
te vrijedi:
$(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$

Binarnu relaciju $\Delta$ na skupu X definiranu s $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ zovemo relacijom jednakosti na X, tj. $x\Delta y$ vrijedi jedino ako je $x=y$. Ta se relacija zove i dijagonala u $X \times X$.

- Relacija $\rho$ je relfeksivna onda i samo onda ako je $\Delta \subseteq \rho$
- Relacija $\rho$ je simetrična onda i samo onda ako vrijedi $\rho = \rho^{-1}$
- Relacija $\rho$ je antisimetrična onda i samo onda ako je $\rho \cap \rho^{-1} = \Delta$
- Relacija $\rho$ je tranzitivna onda i samo onda ako je $\rho \circ \rho \subseteq \rho$

## 5. Što je relacija ekvivalencije? Definirajte klase ekvivalencije i kvocijentni skup.

Relacija $\rho$ se naziva **relacijom ekvivalencije** ako i samo ako ima svojstvo refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti. Uobičajeno je ekvivalenciju označavati znakom ~.

Važan pojam u relaciji ekvivalencije je **klasa** ili razred za element **x**.
$\forall x \in A$ definira se klasa **[x]** kao skup svih **y** u relaciji sa **x:**

$[x] \overset{def}{=} \{y \mid y \sim x\}$.

**x** se naziva predstavnikom (ili reprezent) klase i može biti bilo koji element klase.

Npr. na skupu $\mathcal{N}$ $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ x i y imaju isti ostatak pri dijeljenju s 2:

$\{1,3,5,7,9,11,...\} = [1]$
$\{2,4,6,8,...\} = [2]$

Ovako definirana relacija je relacija ekvivalencije i ima samo dvije klase.

Ako je ~ relacija ekvivalencije, tada vrijedi:

a) ili $[x] = [y]$ ili $[x] \cap [y] = \emptyset$ ($\cap$ -> disjunktne)
b) $x \sim y \Rightarrow [x] = [y]$
c) unija svih klasa $\bigcup_{x \in A} [x] = A$ $(x \in A)$

Svaka relacija ekvivalencije ~ zbog navedenih svojstava određuje jednu particiju (rastav) skupa A na klase ekvivalencije.

Skup svih klasa ekvivalencija naziva se **kvocijentni** ili faktorski **skup**, a označavamo ga s **A/~.**

$\mathcal{N}$/~ = {[1], [2]}        (za gornji primjer)

**6. Dokažite da je relacija ~ ekvipotentnosti skupova primjer relacije ekvivalencije. Što su u tom slučaju klase ekvivalencije, a što kvocijentni skup?**

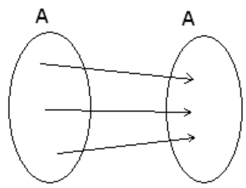
Relacija ekvipotentnosti skupova ima tri svojstva:

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \Vdash B \sim A$
3. $A \sim B, B \sim C \Vdash A \sim C$

Ova svojstva čine relaciju ekvipotentnosti primjerom relacije ekvivalencije (refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost).

Dokaz:

a)




$i: A \to A$

b) $f: A \to B \Rightarrow f^{-1}: B \to A$

c) $f: A \to B,\ g: B \to C \Rightarrow (g \circ f): A \to C$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$(g \circ f)(x_1) \stackrel{?}{=} (g \circ f)(x_2)$

$g[f(x_1)] \neq g[f(x_2)]$

$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$

**7. Što je relacija parcijalnog poretka? Što je relacija totalnog poretka? PUS i TUS.**

Ako relacija $\rho$ ima svojstva refleksivnosti, antisimetričnosti i tranzitivnosti, tada se naziva **relacija parcijalnog poretka.** Označava se s $\preccurlyeq$.
Skup $\mathbb{A}$ na kojem je definirana relacija poretka naziva se **parcijalno uređen skup** (**PUS**).

Relacija parcijalnog poretka za koju vrijedi da je x u relaciji s y ili y u relaciji s x:
$x\, \rho\, y \vee y\, \rho\, x \quad \forall x, y \in A$ naziva se **relacija potpunog (totalnog) poretka.** Odnosno, u ovoj relaciji su svaka dva elementa skupa usporediva.
Skup uređen relacijom totalnog poretka naziva se **totalno uređen skup (TUS)**, lienearno uređen skup ili lanac.

Ako odustanemo od svojstva antisimetričnosti umjesto toga uvedemo svojstvo jake antisimetričnosti tada kažemo da se radi o relaciji strogo poretka  (ako je a u relaciji s b, onda b nije u relaciji s a) i ovo svojstvno isključuje mogućnost refleksivnosti (<, >, ⊃, ⊂)

### 8. Pojam međe, infimuma i supremuma, maksimuma i minimuma.

Neka je $(\mathbb{X}, \preccurlyeq)$ PUS. Za element **x** kažemo da je prvi ili najmanji element (**minimum**) tog PUS-a ako se nalazi ispred svih ostalih elemenata.

$$x \preccurlyeq y, \quad \forall y \in \mathbb{X}$$

Na sličan način kažemo da je **x** posljednji element (**maksimum**) samo ako se nalazi iza svih ostalih elemenata.

$$y \preccurlyeq x, \quad \forall y \in \mathbb{X}$$

Važno je praviti razliku između minimuma i minimalnog elementa, tj. maksimuma i maksimalnog elementa. Ako se radi o TUS-u, ovi pojmovi se poklapaju, kod PUS-a se razlikuju.
Kada kažemo da je neki element minimalan element, onda to znači da ne postoji element koji se nalazi ispred njega, kao i za maksimalni element što znači da ne postoji nijedan iznad njega.

Neka je $(\mathbb{X}, \preccurlyeq)$ uređen skup i neka je $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$. Za element $x \in \mathbb{X}$ kažemo da je **gornja granica (međa)** ili **majoranta** skupa $\mathbb{A}$ ukoliko je $y \preccurlyeq x, \ \ \forall y \in \mathbb{A}$.
Analogno tome, imamo **minorantu, donju granicu**. Vrijedi da je $x \in \mathbb{X}$ minoranta skupa $\mathbb{A}$ ako si samo ako $\forall y \in \mathbb{A}, \ \ x \preccurlyeq y$.

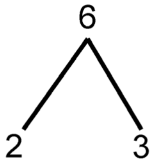
Najmanji element svih gornjih granica (majoranata) naziva se **supremumom** skupa $\mathbb{A}$ i piše **sup** $\mathbb{A}$.
Isto tako, najveći element svih donjih granica (minoranata) naziva se **infimum** skupa $\mathbb{A}$ i piše **inf** $\mathbb{A}$.

Ako je sup $\mathbb{A} \in \mathbb{A}$, nazivamo ga najvećim elementom skupa $\mathbb{A}$ (max($\mathbb{A}$)).
Ako je inf $\mathbb{A} \in \mathbb{A}$, nazivamo ga najmanjim elementom skupa $\mathbb{A}$ (min($\mathbb{A}$)).

### 9. Što je to dobro uređen skup? Primjer PUS-a koji nije TUS i TUS-a koji nije DUS.

Za PUS $(\mathbb{X}, \preccurlyeq)$ kažemo da je **dobro uređen skup (DUS)** ako svaki njegov neprazan podskup ima najmanji (ili prvi) element.

**Primjer** PUS-a koji nije TUS:
({2, 3, 6}, |)




**Primjer** TUS-a koji nije DUS
(Z, ≤) jest TUS, ali nije DUS jer nema najmanji element, dok je (N, ≤) DUS jer ima

### 10. Definicija Kartezijevog produkta PUS-ova. Relacija leksikografskog poretka.

Neka su $(\mathbb{X}_1, \preccurlyeq_1)$ i $(\mathbb{X}_2, \preccurlyeq_2)$ dva parcijalno uređena skupa. **Kartezijev produkt** parcijalno uređenih skupova definiramo kao $(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2, \preccurlyeq)$.
Pritom za $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_1$ definiramo $(a_1, a_2) \preccurlyeq (b_1, b_2)$ ako je $a_1 \preccurlyeq_1 b_1$ i $a_2 \preccurlyeq_2 b_2$.

Neka je $\mathbb{X}$ skup uređen relacijom poretka $(\mathbb{X}, \preccurlyeq)$, PUS.
Tada se može definirati posebna relacija na $\mathbb{X}^n$ tako da vrijedi:
$(a_1, a_2, \dots a_n) \preccurlyeq (b_1, b_2, \dots b_n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists k)(a_k \preccurlyeq b_k \wedge a_i = b_i, \quad \forall i < k)$
Nazivamo je **relacija leksikografskog poretka** i primjenjuje se u definiranju poretka riječi u rječnicima.

### 11. Definirajte pojam mreže i potpune mreže. Pojam nule i jedinice.

Uređeni skup $(\mathbb{X}, \preccurlyeq)$ naziva se **mreža** ako svaki dvočlani podskup {a,b} ima supremum i infinum (sup{a,b}, inf{a,b}).
Ova relacijska struktura omogućava da se u relacijsku strukturu uvedu operacije.

a + b = sup {a,b}
a · b = inf {a,b}

Tako dobivamo složenu operacijsko-relacijsku strukturu zovemo **mreža.**

$(\mathbb{X}, \preccurlyeq, +, \cdot)$

Uređeni skup $(\mathbb{X}, \preccurlyeq)$ naziva se **potpuna ili totalna** mreža ako svaki podskup $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{X}$, (a ne samo dvočlani) ima infinum i supremum.
Kako je $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}$, tada mora postojati sup $\mathbb{X}$ i inf $\mathbb{X}$ i oni se nazivaju jedinični element ili **jedinica skupa** $\mathbb{X}$ (sup $\mathbb{X}$) i **nula skupa** $\mathbb{X}$ (inf $\mathbb{X}$).

### 12. Teorem o operacijama + i · na potpunoj mreži.

Za operacije + i · na potpunoj mreži $(\mathbb{X}, \preccurlyeq)$ vrijede ova svojstva:

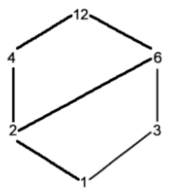
a) a+b = b+a, ab=ba (obe komutativnosti)
b) (a+b)+c = a+ (b+c), (ab)c=a(bc) (obe asocijativnosti)
c) a(a+b)=a, a+ab=a (obje apsorpcije)
d) a+a=a, aa=a (obje idempotentnosti)
e) a+0=a, a·1=a (postoje oba jedinična elementa)

Distributivnost ne mora vrijediti.

### 13. Distributivna i komplementarna mreže. Dajte primjere.

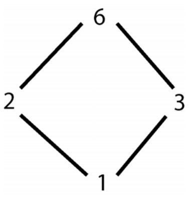
Ako u totalnoj mreži vrijedi distributivnost, kažemo da je distributivna.
Za potpunu mrežu kažemo da je distributivna ako u njoj vrijede zakoni distribucije:
a(b+c)=ab+ac a+bc=(a+b)(a+c)

**Primjer:**
Uzmemo li skup D svih djelitelja broja 12. D={1, 2, 3, 4, 6, 12} poredan relacijom djelivosti. Taj skup je primjer distributivne mreže, njegova nula je broj 1, a jedinica broj 12.




$6(4+3)=6\cdot 12=6$
$6\cdot 4+6\cdot 3=2+3=6$

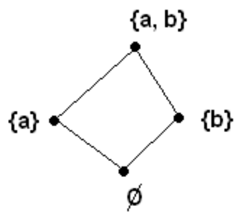
Ako svaki element totalne mreže ima komplement, mreža se nazva komplementarna. Distributivna i komplementarna mreža predstavljaju Booleovu algebru.
U totalnoj mreži $(\mathbb{X}, \preccurlyeq, +, \cdot)$ definira se komplement elementa x: $\bar{x}$ ako vrijedi $x+\bar{x}=1$ i $x\cdot\bar{x}=0$.
Gornja mreža nije komplementarna jer recimo broj 2 nema svoga komplementa, dok ova prikazana na slici ispod jest, gdje su 2 i 3 komplementarni.




### 14. Hasseov dijagram. Dajte primjer.

Hasseovi dijagrami su reducirani usmjereni grafovi kojima se prikazuju relacije poretka. Kako relacija poretka mora biti refleksivna, petlje se izbacuju. Izbacuju se i veze koje su rezultat tranzitivnosti.
Kako se idući elementi uvijek nalaze na višem nivou, i strelice se mogu izostaviti (po dogovoru).
Potpuno različiti PUS-ovi mogu imati isti Hasseov dijagram.

Evo dico moja jedan lipi Hasseov dijagram za $(\mathcal{P}\{a,b\}, \subseteq)$.




Za razliku od PUS-a koji ima rešetkastu strukturu, TUS uvijek ima oblik lanca:


Potpuno različiti PUS-ovi mogu imati isti Hasseov dijagram. Odnosno mogu biti sitog oblika ali samo s različito označenim čvorovima. Neka su $(X, \leq_1)$ i $(Y, \leq_2)$ dva PUS-a. Ako postoji bijekcija $f:X\rightarrow Y$ koja ima svojstvo da iz $x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y)$ tada kažemo da su ta dva PUS-a izomorfna i pišemo:
$(X, \leq_1) \approx (Y, \leq_2)$