IEEE standard – greške:

Napomena:

Pri rješavanju se koriste slijedeći pomoćni rezultati:

1. $(1+\varepsilon_1)\cdot(1+\varepsilon_2)\cdot\ldots\cdot(1+\varepsilon_n)=(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n)$
2. $\frac{(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_2)}\approx(1+\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)$
3. $\sqrt{(1+\varepsilon)}=(1+0.5\varepsilon)$
4. $a\cdot b>0\Longrightarrow a(1+\varepsilon_1)+b(1+\varepsilon_2)=(a+b)(1+\delta),\ \ \delta\le\max(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$

(30 bodova) Neka su x i y reprezentabilni u računalu, tako da vrijedi $x=fl(x)$ i $y=fl(y)$. S kolikom će relativnom greškom računalo koje koristi IEEE standard izračunati

$$\sqrt{xy+1}+y^2\ \ ?$$

Rješenje:

$$\sqrt{xy+1}+y^2\approx\left[\sqrt{[xy(1+\varepsilon_1)+1](1+\varepsilon_2)}(1+\varepsilon_3)+y^2(1+\varepsilon_4)\right](1+\varepsilon_5)\approx$$

$$\left[\sqrt{xy(1+\varepsilon_1)+1(1+0)}\sqrt{(1+\varepsilon_2)}(1+\varepsilon_3)+y^2(1+\varepsilon_4)\right](1+\varepsilon_5)\approx$$

$$\left[\sqrt{(xy+1)(1+\varepsilon_1)}\sqrt{(1+\varepsilon_2)}(1+\varepsilon_3)+y^2(1+\varepsilon_4)\right](1+\varepsilon_5)\approx$$

$$\left[\sqrt{(xy+1)}(1+0.5\varepsilon_1)(1+0.5\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)+y^2(1+\varepsilon_4)\right](1+\varepsilon_5)\approx$$

$$\left[\sqrt{(xy+1)}(1+0.5\varepsilon_1+0.5\varepsilon_2+\varepsilon_3)+y^2(1+\varepsilon_4)\right](1+\varepsilon_5)\approx$$

$$\left[\sqrt{(xy+1)}(1+2\varepsilon)+y^2(1+\varepsilon)\right](1+\varepsilon)\approx$$

$$\left[\left(\sqrt{(xy+1)}+y^2\right)(1+2\varepsilon)\right](1+\varepsilon)\approx$$

$$\left(\sqrt{(xy+1)}+y^2\right)(1+3\varepsilon)\approx$$

$$(\sqrt{(xy+1)}+y^2)(1+\delta),\ \ \delta\approx 3\varepsilon, |\varepsilon|\le u.$$

Napomene:

-ε_1 greška množenja, ε_2 greška zbrajanja, $\varepsilon_3$greška korijenovanja, ε_4 greška množenja, ε_5 greška zbrajanja.

- 1 se može napisati kao 1(1+0). Znači greška je 0, pa se može primjeniti 'max' pravilo.
- Ako su ispod korjena faktori onda je najjednostavnije faktore greške izbaciti u novi korijen.
- Epsiloni se mogu ali ne moraju indeksirati pošto su svi manji od u.
- xy u ovom zadatku je pozitivan broj (nije bilo navedeno zadatku greškom).

(30 bodova) Neka su x, y i z reprezentabilni u računalu, tako da vrijedi $x = fl(x)$, $y = fl(y)$, $z = fl(z)$ i $yz > 0$. S kolikom će relativnom greškom računalo koje koristi IEEE standard izračunati

$$fl\left(\frac{x^2 + yz}{x}\right) \quad ?$$

Rješenje:

$$\frac{x^2 + yz}{x} \approx \frac{[x^2(1+\varepsilon) + yz(1+\varepsilon)](1+\varepsilon)}{x}(1+\varepsilon) \approx$$

$$\frac{[(x^2 + yz)(1+\varepsilon)](1+2\varepsilon)}{x} \approx$$

$$\frac{(x^2 + yz)}{x}(1+3\varepsilon) \approx$$

$$\frac{(x^2 + yz)}{x}\ (1+\delta), \qquad \delta \approx 3\varepsilon, |\varepsilon| \leq u.$$

Zadatak (sa vježbi):

Naći grešku za $fl\left(\frac{xy^2}{z^3}\right)$

Rješenje:

$$\frac{xy^2}{z^3} \approx \frac{x(1+\varepsilon)y^2(1+\varepsilon)}{z^2(1+\varepsilon)z(1+\varepsilon)}(1+\varepsilon) \approx$$

$$\frac{xy^2(1+3\varepsilon)}{z^2 z}(1-\varepsilon)(1-\varepsilon) \approx$$

$$\frac{xy^2}{z^3}(1+3\varepsilon)(1-\varepsilon)(1-\varepsilon)$$

$$\approx \frac{xy^2}{z^3}(1+\delta\ ), \qquad \delta \approx\ |\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon| \approx 5\varepsilon, |\varepsilon| \leq u$$

LU faktorizacija

(40 bodova) Pronađite LU faktorizaciju (s pivotiranjem) matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uz pomoć faktorizacije riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte kondiciju matrice A i pronađite ocjenu greške. Inverzna matrica matrice A je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

Sustav se rješava na normalan način. Umjesto da se pišu nule u toku rješavanja sustava, zgodnije je pisati dobivene faktore u istoj matrici.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R1 \cdot (-1) + R2 \\ R1 \cdot 1 + R3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim P = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} R2 \cdot \frac{2}{3} + R3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & \left(\frac{2}{3}\right) & \left(-\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \left(-\frac{2}{3}\right) & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b' = Pb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Napomena:

- Dobiveni faktori mijenjaju predznak kada se pišu u matrici L.
- Pivotiranje se radi po apsolutnim vrijednostima. Permutacijska (jedinična) matrica P služi samo za praćenje zamjene redaka te kada se pomnoži sa vektorom b, permutira vektor b tako da bude u skladu za izmjenjenim retcima. Ako nije bilo pivotiranja onda se koristi zadani b.
- U slučaju da se ne zada inverzna matrica dobro je obnoviti računanje inverza.

$$\boldsymbol{Ly = b'} \quad \left\} \begin{aligned} y_1 + 0 + 0 = 4 \quad &\Rightarrow \quad y_1 = 4 \\ -y_1 + y_2 + 0 = 1 \quad &\Rightarrow \quad y_2 = 5 \\ y_1 - \frac{2}{3} y_2 + y_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad y_3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ \left(-\frac{2}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ux = y} \quad \left\} \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 1 \\ 0 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = -1 \\ 0 + 0 - \frac{1}{3} x_3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 2 \end{aligned} \right\} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{18}$$

$$\|A\|^{-1} = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (4)^2 + (-3)^2 + (1)^2 + (3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{45}$$

$$kond(A) = \|A\| \|A\|^{-1} = \sqrt{18} \cdot \sqrt{45} = 28.46$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{2\varepsilon \cdot kond(A)}{1 - \varepsilon \cdot kond(A)} = \frac{2 \cdot 2.2 \cdot 10^{-16} \cdot 28.46}{1 - 2.2 \cdot 10^{-16} \cdot 28.46} \approx 125.2 \cdot 10^{-14} = 1.25 \cdot 10^{-16}$$

Cholesky faktorizacija

(30 bodova) Pronađite Cholesky faktorizaciju Hilbertove matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$A = R^T R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1 = (r_{11})^2 + 0 + 0 \Rightarrow r_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$$

$$a_{12} = \frac{1}{2} = r_{11} \cdot r_{12} + 0 + 0 = r_{12} \Rightarrow r_{12} = \frac{1}{2}$$

$$a_{13} = \frac{1}{3} = r_{11} \cdot r_{13} + 0 + 0 = r_{13} \Rightarrow r_{13} = \frac{1}{3}$$

$$a_{22} = \frac{1}{3} = (r_{12})^2 + (r_{22})^2 + 0 = \frac{1}{4} + (r_{22})^2 \Rightarrow r_{22} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$a_{23} = \frac{1}{4} = r_{12} \cdot r_{13} + r_{22} \cdot r_{23} + 0 \Rightarrow r_{23} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$a_{33} = \frac{1}{5} = (r_{13})^2 + (r_{23})^2 + (r_{33})^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + (r_{33})^2 = \frac{7}{36} + (r_{33})^2 \Rightarrow r_{33} = \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{7}{36}} = \sqrt{\frac{1}{180}} = \frac{1}{\sqrt{180}} = \frac{1}{\sqrt{36}\sqrt{5}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$A = R^T R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Napomena:

Vrijedi $R^T y = b$ i $Rx = y$ (slično kao i kod LU faktorizacije)

Jacobijeva metoda

(40 bodova) Zadan je sustav

$$25x_1 - 5x_2 = 15$$
$$-5x_1 + 17x_2 = 29\ .$$

Provjerite kondiciju matrice koeficijenata sustava, te Jacobijevom metodom s inicijalnim vektorom $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ u dvije iteracije izračunajte aproksimaciju $\widetilde{x}$ rješenja sustava (zaokružujte na četiri decimale). Gaussovim eliminacijama pronadite točno rješenje x i izračunajte relativnu grešku aproksimacije $\widetilde{x}$. Koristite Euklidsku matričnu i vektorsku normu.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ -5 & 17 \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix},\quad N = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix},\qquad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 29 \end{bmatrix},\qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{25 \cdot 17 - 0 \cdot 0}\begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} = \frac{1}{425}\begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{17} \end{bmatrix}$$

$$T = D^{-1} \cdot (-N) = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{17} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{5}{17} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = D^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{17} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{29}{17} \end{bmatrix}$$

Prva iteracija:

$$x^{(1)} = Tx^{(0)} + C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{5}{17} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{29}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.7059 \end{bmatrix}$$

Druga iteracija:

$$x^{(2)} = Tx^{(1)} + C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{5}{17} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.7059 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{29}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94 \\ 1.88 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 0.94 \\ 1.88 \end{bmatrix}$$

Gaussovom eliminacijom zadanog sustava dobije se točno rješenje: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Relativna greška:

$$x - \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.94 \\ 1.88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0588 \\ 0.1176 \end{bmatrix}$$

$$\delta = \frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{(0.0588)^2+(0.1176)^2}}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}} = 0.0588$$

Napomena:

Ako nije zadan broj iteracija može se tražiti preciznost na određeni broj značajnih znamenki. U tom slučaju se radi suma razlika (po apsolutnoj vrijednosti) svih članova vektora iz trenutne i prethodne iteracije. Ako je suma manja od zadane preciznosti onda se iteracije zaustavljaju. U gornjem zadatku bi za drugu iteraciju to izgledalo ovako:

$S_2 = |0.94 - 0.6| + |1.8 - 1.7059|$, pa se gleda da li je S_2 manji od zadane vrijednosti.

Gauss-Seidel

Zadan je slijedeći sustav:

$$16x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 12$$

$$4x_1 + 10x_2 + x_3 = 15$$

$$-8x_1 + x_2 + 14x_3 = 7$$

Riješiti sustav sa 2 iteracije Gauss-Seidela uz početni vektor $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]$

Rješenje:

Gauss-Seidelove iteracije su oblika:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}}{a_{22}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}}{a_{33}}$$

Prva iteracija:

$$x_1^{(1)} = \frac{12 - 4x_2^{(0)} + 8x_3^{(0)}}{16} = \frac{12 - 4 \cdot 0 + 8 \cdot 0}{16} = 0.75$$

$$x_2^{(1)} = \frac{15 - 4x_1^{(1)} - x_3^{(0)}}{10} = \frac{15 - 4 \cdot 0.75 - 0}{10} = 1.2$$

$$x_3^{(1)} = \frac{7 + 8x_1^{(1)} - x_2^{(1)}}{14} = \frac{7 + 8 \cdot 0 - 1.2}{14} = 0.8429$$

Druga iteracija:

$$x_1^{(2)} = \frac{12 - 4x_2^{(1)} + 8x_3^{(1)}}{16} = \frac{12 - 4 \cdot 1.2 + 8 \cdot 0.8429}{16} = 0.8714$$

$$x_2^{(2)} = \frac{15 - 4x_1^{(2)} - x_3^{(1)}}{10} = \frac{15 - 4 \cdot 0.8714 - 0.8429}{10} = 1.0671$$

$$x_3^{(2)} = \frac{7 + 8x_1^{(2)} - x_2^{(2)}}{14} = \frac{7 + 8 \cdot 0.8714 - 1.0671}{14} = 0.9217$$

$$x \approx \begin{bmatrix} 0.8714 \\ 1.0671 \\ 0.9217 \end{bmatrix}$$

Teorija

(15 bodova) Izvedite broj računskih operacija za rješavanje sustava linearnih jednadžbi reda n Gaussovom eliminacijom.

U prvom koraku trokutaste redukcije obavlja se:

- $n-1$ dijeljenje — računanje `mult`,
- $n(n-1)$ množenje – za svaki od $n-1$ redaka
  - $n-1$ množenje za računanje elemenata matrice A;
  - jedno množenje za računanje elementa vektora b,
- $n(n-1)$ oduzimanje — u istoj naredbi gdje i prethodna množenja.

Na sličan način zaključujemo da se u k-tom koraku obavlja:

- $n-k$ dijeljenja,
- $(n-k+1)\,(n-k)$ množenja i $(n-k+1)\,(n-k)$ oduzimanja.

Ukupno, u k-tom koraku imamo

$$n-k+2(n-k+1)\,(n-k)=2(n-k)^2+3(n-k)$$

aritmetičkih operacija.
Broj koraka k varira od 1 do $n-1$, pa je ukupan broj operacija potrebnih za svođenje na trokutastu formu jednak

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\left[2(n-k)^2+3(n-k)\right] &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(2k^2+3k\right)\\ &= \frac{1}{6}\left(4n^3+3n^2-7n\right).\end{aligned}$$

Druga suma se dobije se iz prve zamjenom indeksa $n-k\to k$.

Potpuno istim zaključivanjem dobivamo da u povratnoj supstituciji ima:

- $(n-1)\,n/2$ množenja i $(n-1)\,n/2$ zbrajanja,
- n dijeljenja,

što je zajedno točno n^2 operacija.

Dakle, ukupan broj operacija u Gaussovim eliminacijama je

$$OP(n)=\frac{1}{6}\left(4n^3+9n^2-7n\right),$$

što je približno $2n^3/3$, za malo veće n.

http://web.math.hr/~singer/num_mat/NM_0809/03.pdf

Maclaurin

(30 bodova) Izvedite Maclaurinov red za funkciju $f(x) = \ln(x+1)$ i ocijenite grešku odbacivanja $|R_{n+1}(x)|$ za $0 \le x \le 0.5$. Aproksimirajte $\ln 1.5$ s prvih pet članova reda i provjerite ocjenu greške.

Rješenje:

1. Nekoliko prvih derivacija (dok se ne nađe opći član):

$$f(x) = \ln(x+1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(x+1)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$$

2. Vrijednost u x=0:

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 2$$

$$f^{IV}(0) = -2\cdot 3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

3. Maclaurinov red:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n =$$

$$0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{2\cdot 3}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n =$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

4. Prvih 5 članova reda su:

$$M_5(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

5. Traži se ocjena greške nastale odbacivanjem svih članova nakon 5-og: $R_{5+1}(x) = R_6(x) = ?$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}} \Longrightarrow$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = (-1)^n\frac{n!}{(\xi+1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}}$$

6. Pri procjeni napravljene greške tražimo najnepovoljniji slučaj u intervalu $0 \le \xi \le 0.5$. Greška će biti maksimalna kada je u gornjem izrazu $\xi = 0$. Uvrstimo nulu te dobijemo procjenu greške:

$$R_{n+1}(x) \le \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

7. Za zadani interval $x \in [0,0.5]$ greška odbacivanja najveća je za x=0.5, pa vrijedi:

$$|R_6(x)| \le \frac{0.5^6}{6} = 0.0026$$

Dakle, u zadanom intervalu greška ne može biti veća od 0.0026.

8. Aproksimacija za *ln 1.5*:

$$ln1.5 = \ln(x+1) \Longrightarrow x = 0.5 \Longrightarrow M_5(0.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} = 0.4073$$

9. Ocjena greške:

$$|M_5(0.5) - f(0.5+1)| = 0.4073 - 0.4054 = 0.0018$$

Interpolacija

(35 bodova) Zadana je tablica vrijednosti funkcije $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ kako slijedi:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.2	0.20271
1	0.3	0.30934
2	0.4	0.42279

Interpolacijom odredite približnu vrijednost za $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}$.

Rješenje:

Pošto se traže inverzne vrijednosti od tg(x) onda se u tablici samo zamijene strane pa dobijemo vrijednosti koje se interpoliraju direktno:

i	x_i	$g(x_i)$
0	0.20271	0.2
1	0.30934	0.3
2	0.42279	0.4

$$a_0 + a_1 0.20271 + a_2 0.20271^2 = 0.2$$

$$a_0 + a_1 0.30934 + a_2 0.30934^2 = 0.3$$

$$a_0 + a_1 0.42279 + a_2 0.20271^2 = 0.4$$

Nakon što se riješi ovaj sustav dobije se:

$$a_0 = -0.0061, \qquad a_1 = 1.0689, \qquad a_2 = -0.2561$$

Pa je:

$$P(x) = -0.0061 + 1.0689x - 0.2561x^2$$

Uvrštavanjem $\frac{1}{3}$ u polinom dobije se:

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = -0.0061 + 1.0689 \cdot \frac{1}{3} - 0.2561\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0.32170$$

Dakle približna vrijednost je:

$$arctg\,\frac{1}{3} \approx 0.32170$$

Interpolacija

(35 bodova) Nađite interpolacijski polinom koji interpolira funkciju

$$f(x) = 2^x$$

u točkama s apscisama 0, 2 i 3. Uz pomoć izračunatog polinoma pronađite približnu vrijednost $f(2.5)$ i ocijenite relativnu grešku. Nađite i pravu relativnu grešku. Zaokružujte na četiri decimale.

Rješenje:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	2	4
2	3	8

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 1$$

$$a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 4$$

$$a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 = 8$$

Nakon što se riješi ovaj sustav dobije se: $a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{1}{6},\ a_2 = \frac{5}{6}$

Pa je: $P(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 1$

Uvrštavanjem 2.5 u polinom dobije se: $P(2.5) = \frac{5}{6}(2.5)^2 - \frac{1}{6}2.5 + 1 = 5.7917$

Točna vrijednost je: $f(2.5) = (2.5)^2 = 5.6569$

Relativna greška: $\frac{|f(2.5)-P(2.5)|}{|f(2.5)|} = \frac{|5.7917-5.6569|}{|5.6569|} = 0.0238$

Ocjena relativne greške:

Prvo se nađe G_{aps}, formula je:

$$G_{aps}(x) = f(x) - P_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}[(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)]$$

Ovisno kojeg je reda polinom, treba se raditi *n+1* derivacija funkcije. U našem slučaju polinom je drugog reda pa je *n=2+1=3* i rade se 3 derivacije.

$f(x) = 2^x,\quad f'(x) = 2^x ln2,\quad f''(x) = 2^x (ln2)^2,\quad f'''(x) = 2^x (ln2)^3$

U treću derivaciju se uvrštava vrijednost iz zadanog intervala (intervala [0,3]) za koju funkcija poprima maksimalnu vrijednost, te se izračuna ta vrijednost:

$f'''(3) = 2^3(ln2)^3 = 2.644$ pa imamo $G_{aps}(2.5) \leq \frac{2.644}{3!}[(2.5-0)(2.5-2)(2.5-3)] = 0.2775$

Sada za ocjene relativne greške koristimo izraz:

$$\frac{G_{aps}(x)}{f(x)} = \frac{|f(x) - P_2(x)|}{f(x)} \leq \frac{0.2775}{5.6569} = 0.049$$

Napomena: Izraz M_n podrazumijeva da se treba napraviti *n* derivacija a u n-tu derivaciju se uvrštava vrijednost iz zadanog intervala za koju funkcija poprima maksimalnu vrijednost. Isto je za i m_n, samo se na kraju traži minimum a ne maksimum.

Lagrangeov interpolacijski polinom

(40 bodova) S pomoću Lagrangeovog interpolacijskog polinoma izračunajte $\sqrt[3]{1.15}$ koristeći poznate vrijednosti: $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{1.1} = 1.0323$ i $\sqrt[3]{1.5} = 1.1447$. Zaokružujte na 4 decimale.

Rješenje:

$$L_2(x) = 1 \cdot \frac{x-1.1}{1-1.1} \cdot \frac{x-1.5}{1-1.5} + 1.0323 \cdot \frac{x-1}{1.1-1} \cdot \frac{x-1.5}{1.1-1.5} + 1.1447 \cdot \frac{x-1}{1.5-1} \cdot \frac{x-1.1}{1.5-1.1} =$$

$$\frac{x-1.1}{-0.1} \cdot \frac{x-1.5}{-0.5} + 1.0323 \cdot \frac{x-1}{0.1} \cdot \frac{x-1.5}{-0.4} + 1.1447 \cdot \frac{x-1}{0.5} \cdot \frac{x-1.1}{0.4} =$$

$$\frac{(x-1.1)(x-1.5)}{0.05} + 1.0323 \cdot \frac{(x-1)(x-1.5)}{-0.04} + 1.1447 \cdot \frac{(x-1)(x-1.1)}{0.2} =$$

$$\frac{x^2-1.5x-1.1x+1.65}{0.05} + 1.0323 \cdot \frac{(x^2-1.5x-x+1.5)}{-0.04} + 1.1447 \cdot \frac{(x^2-1.1x-x+1.1)}{0.2} =$$

$$\frac{x^2-2.6x+1.65}{0.05} + 1.0323 \cdot \frac{(x^2-2.5x+1.5)}{-0.04} + 1.1447 \cdot \frac{(x^2-2.1x+1.1)}{0.2} =$$

$$\frac{x^2-2.6x+1.65}{0.05} + \frac{1.0323x^2-2.58075x+1.54845}{-0.04} + \frac{1.1447x^2-2.40387x+1.25917}{0.2} =$$

$$\frac{4x^2-10.4x+6.6-5.1615x^2+12.90375x-7.74225+1.1447x^2-2.40387x+1.25917}{0.2}$$

$$\frac{-0.0168x^2+0.09988x+0.11692}{0.2} = \frac{-0.0168x^2}{0.2} + \frac{0.09988x}{0.2} + \frac{0.11692}{0.2} =$$

$$-0.084x^2 + 0.4994x + 0.5846$$

$$L_2(1.15) = -0.084 \cdot (1.15)^2 + 0.4994 \cdot 1.15 + 0.5846 = 1.0478$$

Provjera:

$$\sqrt[3]{1.15} = 1{,}04768 \approx 1.0478$$

Newtonov interpolacijski polinom

(40 bodova) Funkciju $f(x) = \sin(\pi x)$ na intervalu $[0, 0.75]$ treba aproksimirati Newtonovim interpolacijskim polinomom koji će prolaziti sljedećim točkama:

x	0	0.25	0.5	0.75
$f(x)$	0	0.707107	1	0.707107

Izračunajte aproksimaciju vrijednosti $\sin\frac{\pi}{8}$, te pronadite ocjenu relativne greške i pravu relativnu grešku.

Rješenje:

x_i	$f(x_i)$			
0	0			
		$\frac{0.707107-0}{0.25-0} = 2.8284$		
0.25	0.707107		$\frac{1.1715-2.8284}{0.5-0} = -3.3137$	
		$\frac{1-0.707107}{0.5-0.25} = 1.1715$		$\frac{-4.6862+3.3137}{0.75-0} = -1.8301$
0.5	1		$\frac{-1.1715-1.1715}{0.75-0.25} = -4.6862$	
		$\frac{0.707107-1}{0.75-0.5} = -1.1715$		
0725	0.707107			

Iz gornje tablice podjeljenih razlika dakle dobivamo (po formuli Newtonovog polinoma):

$$P(x) = 2.8284x - 3.3137x(x-0.25) - 1.8301x(x-0.25)(x-0.25)$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = sin\frac{\pi}{8} = 0.3827$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) \approx P\left(\frac{1}{8}\right) = 0.3946$$

Ocjena relativne greške:

Prvo se nađe G_{aps}, formula je:

$$G_{aps}(x) = f(x) - P_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}[(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)]$$

Ovisno kojeg je reda polinom, treba se raditi *n+1* derivacija funkcije. U našem slučaju polinom je trećeg reda pa je *n=3+1=4* i rade se 4 derivacije.

$$f(x) = \sin(\pi x),\quad f'(x) = \pi\cos(\pi x) \quad f''(x) = -\pi^2\sin(\pi x),\quad f'''(x) = -\pi^3\cos(\pi x),\quad f^{IV}(x) = \pi^4\sin(\pi x)$$

U četvrtu derivaciju se uvrštava vrijednost iz zadanog intervala ($x \in [0,0.75]$) za koju funkcija poprima maksimalnu vrijednost (u ovom slučaju to je 0.5 to jest $\frac{1}{2}$) , te se izračuna ta vrijednost:

$f^{IV}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^4\sin(\frac{\pi}{2}) = \pi^4$ pa imamo $G_{aps}\left(\frac{1}{8}\right) \leq \frac{\pi^4}{4!}\left[\left(\frac{1}{8}-0\right)\left(\frac{1}{8}-0.25\right)\left(\frac{1}{8}-0.5\right)\left(\frac{1}{8}-0.75\right)\right] = 0.01485$

Sada za ocjenu relativne greške koristimo izraz:

$$\frac{G_{aps}(x)}{f(x)} = \frac{|f(x) - P_3(x)|}{f(x)} \leq \frac{0.01485}{0.3827} = 0.03881$$

Prava relativna greška (ona koja je stvarno napravljena) je:

$$\frac{|f\left(\frac{1}{8}\right) - P\left(\frac{1}{8}\right)|}{|f\left(\frac{1}{8}\right)|} = \frac{|sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - P\left(\frac{1}{8}\right)|}{|sin\left(\frac{\pi}{8}\right)|} = \frac{0.3827 - 0.3946}{0.3827} = 0.0311$$

Metoda najmanjih kvadrata

(30 bodova) Kroz točke $T_1(-1,0)$, $T_2(1,0)$, $T_3(2,1)$, $T_4(3,2)$ i $T_5(5,3)$ provucite pravac u smislu najmanjih kvadrata. Izračunajte kvadratičnu prilagodbu, komentirajte kvalitetu rješenja i skicirajte rješenje.

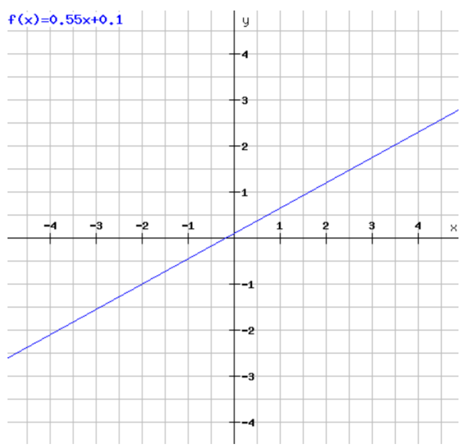
Rješenje:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}, \qquad y = kx + l$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T A x = A^T b \Rightarrow \begin{bmatrix} 40 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 40k + 10l = 23 \\ 10k + 5l = 6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} k = 0.55 \\ l = 0.1 \end{matrix} \Rightarrow y = 0.55x + 0.1$$



$$Kvadratična\ prilagodba\ je: \quad q = \frac{\|Ax - b\|}{\|b\|}$$

$$Ax - b = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.65 \\ 1.2 \\ 1.75 \\ 2.85 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.65 \\ 0.2 \\ -0.25 \\ -0.15 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\|Ax - b\| = \sqrt{(-0.45)^2 + (0.65)^2 + (0.2)^2 + (-0.25)^2 + (-0.15)^2} = \sqrt{0.75} = 0.866025$$

$$\|b\| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$$

$$q = \frac{\|Ax - b\|}{\|b\|} = \frac{0.866025}{\sqrt{14}} = 0.23145 \Rightarrow Prilagodba\ je\ dobra!$$

Napomene:
- U drugom stupcu matrice A su uvijek samo jedinice, prvi stupac se izvuče iz zadanih točaka.
- Prilagodba je dobra ako je blizu nule (manja od 0.5). Ako je veća od 0.5 onda nije dobra.
- Na grafu se još mogu nacrtati zadane točke T, čime se može vidjeti koliko dobro izračunati pravac aproksimira te točke.

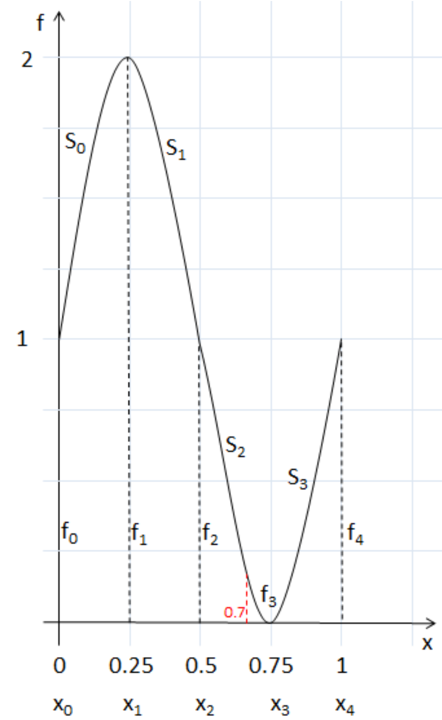
Kubični splajn

(35 bodova) Tablično je zadana funkcija

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x_i)$	1	2	1	0	1

Pronađite prirodni kubični splajn koji interpolira zadanu funkciju. Pronađite aproksimaciju vrijednosti $f(0.7)$.

Pomoću kubičnog splajna zadana funkcija se aproksimira tako da se za svaki interval odredi polinom trećeg reda koji aproksimira taj dio funkcije. Grafički to izgleda kao na slijedećoj slici (dakle tražimo polinome S_0 do s_3):



Prvo se odrede duljine svakog od intervala (duljine h_i mogu biti iste ili različite).

$$h_i = x_i - x_{i-1} \Longrightarrow h_1 = 0.25 - 0 = 0.25, h_2 = 0.5 - 0.25 = 0.25, h_3 = 0.25, h_4 = 0.25$$

Nakon što se nađu duljine intervala, koristi se slijedeći oblik sustava linearnih jednadžbi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & & \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dakle na 3 središnje dijagonale su 'koraci' a ostalo su nule, pa imamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(\frac{1-2}{0.25} - \frac{2-1}{0.25}) \\ 6(\frac{0-1}{0.25} - \frac{1-2}{0.25}) \\ 6(\frac{1-0}{0.25} - \frac{0-1}{0.25}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 \\ 0 \\ 48 \end{bmatrix}$$

Nakon što se riješi sustav dobijemo da je $m_1 = -48, m_2 = 0, m_3 = 48$. Pošto se radi o prirodnom kubičnom splajnu onda su $m_0 = m_4 = 0$ (inače da nije zadan prirodni kubični splajn onda bi trebale biti zadane te rubne vrijednosti). Sada se izvode polinomi za svaki interval pomoću slijedećih izraza:

$S_i(x) = A_i + B_i(x - x_i) + C_i(x - x_i)^2 + D_i(x - x_i)^3$ gdje je

$A_i = f_i, \quad B_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}[2m_i + m_{i+1}], \quad C_i = \frac{m_i}{2}, \quad D_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i}$

Za prvi interval imamo:

$A_0 = f_0 = 1, B_0 = \frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}[2m_0 + m_1] = \frac{2-1}{0.25} - \frac{0.25}{6}[2 \cdot 0 - 48] = 6, C_0 = \frac{m_0}{2} = \frac{0}{2} = 0, D_0 = \frac{m_1 - m_0}{6h_i} = \frac{-48-0}{6 \cdot 0.25} = -32$

Pa je prvi interval aproksimiran sa: $S_0 = 1 + 6(x - 0) + 0(x - 0)^2 + (-32)(x - 0)^3 = 1 + 6x - 32x^3$

Slično se napravi i za ostale intervale pa dobijemo:

$S_1 = 14x - 48x^2 + 32x^3$

$S_2 = 18x - 48x^2 + 32x^3$

$S_3 = 27 - 90x + 96x^2 - 32x^3$

Rezultat je dakle:

$$P(x) = \begin{cases} 1 + 6x - 32x^3 \quad , & 0 \le x \le 0.25 \\ 18x - 48x^2 + 32x^3 \quad , & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 18x - 48x^2 + 32x^3 \quad , & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 27 - 90x + 96x^2 - 32x^3 \quad , & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

Još trebamo naći aproksimaciju vrijednosti f(0.7). Ova točka se nalazi u intervalu [0.5, 0.75] pa onda koristimo polinom izračunat za taj interval, to jest:

$$P(0.7) = S_2(0.7) = 18x - 48x^2 + 32x^3 = 18(0.7) - 48(0.7)^2 + 32(0.7)^3 = 0.056$$

QR rastav

(35 bodova) Izračunajte QR rastav vektora

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$\|x\| = \sqrt{(0)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (0)^2} = 5 \Longrightarrow r = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

U vektoru r je prvi član suprotnog predznaka a ostali su uvijek nule. Sada tražimo vektor v.

$$v = x - r = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v^T = [5 \quad 3 \quad 4 \quad 0]$$

$$v^T \cdot v = [5 \quad 3 \quad 4 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 25 + 9 + 16 = 50$$

$$v \cdot v^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [5 \quad 3 \quad 4 \quad 0] = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 20 & 0 \\ 15 & 9 & 12 & 0 \\ 20 & 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = I - \frac{2}{v^T \cdot v} v \cdot v^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{50} \begin{bmatrix} 25 & 15 & 20 & 0 \\ 15 & 9 & 12 & 0 \\ 20 & 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.6 & -0.8 & 0 \\ -0.6 & 0.64 & -0.48 & 0 \\ -0.8 & -0.48 & 0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.6 & -0.8 & 0 \\ -0.6 & 0.64 & -0.48 & 0 \\ -0.8 & -0.48 & 0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simpsonova formula

(30 bodova) Produljenom Simpsonovom formulom približno izračunajte integral

$$\int_1^2 [x - \ln(x+1)]\, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-4}. Zaokružujte na pet decimala.

Rješenje:

1. Da bi greška bila manja od zadane vrijednosti treba se napravit *n* koraka; *n* se nalazi pomoću slijedeće nejednakosti:

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180 \cdot \varepsilon}} \qquad \text{gdje je } M_4 = \max\left|f^{(IV)}(x)\right|;\ x \in [a,b]$$

$$f(x) = x - \ln(x+1);\ f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)};\ f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2};\ f'''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3};\ f^{IV}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}.$$

U intervalu $x \in [1,2]$ četvrta derivacija je maksimalna za *x=1* pa imamo:

$$M_4 = \frac{6}{(1+1)^4} = 0{,}375 \Longrightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{(2-1)^5 \cdot 0.375}{180 \cdot 10^{-4}}} = 2.1364 \Longrightarrow n = 4.$$

Napomena: n mora biti cijeli i paran broj.

2. Korak *h* je:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = 0.25$$

3. Radi se tablica sa *n* koraka duljine *h* i računaju se funkcijske vrijednosti:

i	x_i	$f(x_i) = x_i - \ln(x_i+1)$
0	1	0.30685
1	1.25	0.43907
2	1.5	0.58371
3	1.75	0.73840
4	2	0.90139

4. Prema Simpsonovoj formuli računa se:

$$I_S = \frac{0.25}{3}(0.306855 + 4 \cdot 0.43907 + 2 \cdot 0.58371 + 4 \cdot 0.73840 + 0.90139) = 0.59046$$

Napomena: U nekim zadacima se odmah daju funkcijske vrijednosti (npr. mjerenja itd). U tom slučaju se te vrijednosti jednostavno uvrste u formulu.

Trapezna formula

(30 bodova) Trapeznom formulom izračunajte integral

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

s točnošću 10^{-3}. Izračunajte i stvarnu pogrešku. (Uputa: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.)

Rješenje:

1. Da bi greška bila manja od zadane vrijednosti treba se napravit n koraka; n se nalazi pomoću slijedeće nejednakosti:

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{12 \cdot \varepsilon}} \qquad \text{gdje je } M_2 = \max|f''(x)|\,;\ x \in [a,b]$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = x \cdot\ (1-x^2)^{-\frac{3}{2}};\ f''(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2 \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

U intervalu $[0, \frac{1}{2}]$ druga derivacija je maksimalna za $x = \frac{1}{2}$, pa imamo:

$$M_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{5}{2}} = 3.0792 \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)^3 \cdot 3.0792}{12 \cdot\ 10^{-3}}} = 5.6635 \Rightarrow n = 6.$$

Napomena: n mora biti cijeli broj.

2. Korak h je:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{1}{2}-0}{6} = \frac{1}{12} = 0.083333$$

3. Radi se tablica sa n koraka duljine h i računaju funkcijske vrijednosti:

i	x_i	$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
0	0	1
1	0.083333	1.00349
2	0.166667	1.014185
3	0.25	1.032796
4	0.333333	1.06066
5	0.416667	1.100038
6	0.5	1.154701

4. Prema Trapeznoj formuli računa se:

$$I_T = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2} \cdot 1 + 1.00349 + 1.01418 + 1.03279 + 1.06066 + 1.10003 + \frac{1}{2} \cdot 1.15470\right) = 0.52404$$

5. Stvarna pogreška (računa se u radijanima):

$$I = arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - arcsin(0) = 0.5236 \Rightarrow |I - I_T| = |0.5236 - 0.52404| = 0.000441 = 4.41 \cdot 10^{-4}$$

RK-2 metoda

(25 bodova) Nadite rješenje Cauchyjevog problema

$$y' = xy^2 + 1 \quad , \quad y(0) = 0,$$

metodom RK-2 u točki $x = 1$ s korakom 0.5. Zaokružujte na pet decimala.

Rješenje:

Prva iteracija:

$i = 0, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad h = 0.5$

$K_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0.5 \cdot (0 \cdot 0^2 + 1) = 0.5$

$K_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + K_1) = h \cdot f(0.5, 0.5) = 0.5 \cdot (0.5 \cdot 0.5^2 + 1) = 0.5625$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 0 + \frac{1}{2}(0.5 + 0.5625) = 0.53125$

Druga iteracija:

$i = 1, \qquad x_1 = x_0 + h = 0.5, \qquad y_1 = 0.53125$

$K_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0.5 \cdot (0.5 \cdot 0.53125^2 + 1) = 0.57056$

$K_2 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + K_1) = 0.5 \cdot (1 \cdot 1.10181^2 + 1) = 1.10699$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 0.53125 + \frac{1}{2}(0.57056 + 1.10699) = 1.37005$

$i = 2, \qquad x_2 = x_1 + h = 1 \Longrightarrow \textit{Nema više iteracija}$

$y(1) \approx 1.37005$

(30 bodova) Zadan je sustav diferencijalnih hednadžbi

$$y' = 3y - z - x$$
$$z' = y - xz$$

uz početne uvjete $y(0) = 1$, $z(0) = 1$. Runge-Kutta metodom 2. reda nadite približno rješenje sustava za $x = 0.2$ uz korak $h = 0.2$.

Rješenje:

$i = 0, \qquad x_0 = 0, \qquad Y_0 = \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad h = 0.2$

$K_1 = h \cdot f(x_0, Y_0) = 0.2 \cdot \begin{bmatrix} 3y_0 - z_0 - x_0 \\ y_0 - x_0 z_0 \end{bmatrix} = 0.2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 - 1 - 0 \\ 1 - 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$

$K_2 = h \cdot f(x_0 + h, Y_0 + K_1) = h \cdot f\left(0.2, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}\right) = h \cdot f\left(0.2, \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.2 \end{bmatrix}\right) = 0.2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot 1.4 - 1.2 - 0.2 \\ 1.4 - 0.2 \cdot 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.232 \end{bmatrix}$

$Y_1 = Y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.232 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0.96 \\ 0.432 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.48 \\ 0.216 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.48 \\ 1.216 \end{bmatrix}$

$i = 1, \qquad x_1 = x_0 + h = 0.2 \Longrightarrow \textit{Nema više iteracija}$

$y(0.2) \approx 1.48, \qquad z(0.2) \approx 1.216,$

RK-4 Metoda

RK-4 metoda je slična RK-2, samo ima više koraka u svakoj iteraciji. Formula je:

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hK_1\right)$$

$$K_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hK_2\right)$$

$$K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)h$$

Metoda bisekcije

(30 bodova) Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = x - \sin x - 0.25$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$. Pronađite dinamičku ocjenu greške. Zaokružujte na pet decimala.

Rješenje:

Prvo se treba naći interval unutar kojeg se nalazi nultočka (pošto nije već zadan). Najbolje je nacrtati funkciju i vidjeti gdje su presjecišta a može se napraviti i tablica sa vrijednostima funkcija u proizvoljnim točkama, npr:

x	0	0.25	1	1.57=π/2	2
x-25	-0.25	0	0.75	1.32	1.75
sin(x)	0	0.247	0. 84	1	0.909

Vidimo da se u intervalu [1,2] funkcije sijeku pa bi tu trebala biti nultočka. Točnost odabranog intervala se može i lako provjeriti tako da se uvrste rubovi intervala u zadanu funkciju (funkcije bi onda trebale biti različitog predznaka). Provjera:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1-\sin(1)-0.25<0 \\ f(2)=2-\sin(2)-0.25>0 \end{array}\right\} \quad \text{Interval } x\in[1,2] \text{ je dobar}$$

Napomena:

Što se izabere bolji interval to će biti manje iteracija/polovljenja poslije.

Nakon što je određen interval traži se broj iteracija koji će zadovoljiti zadanu točnost, pomoću slijedeće formule:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{2-1}{2^{n+1}} \leq 10^{-2} \Rightarrow 100 \leq 2^{n+1} \Rightarrow n = 6$$

Sada se rade iteracije/polovljenja:

i	a	b	f(a)	f(b)	c=(a+b)/2	f(c)
1	1	2	-0,09147	0,84070	1,5	0,25250
2	1	1,5	-0,09147	0,25251	1,25	0,051011
3	1	1,25	-0,09147	0,05102	1,125	-0,0272
4	1,125	1,25	-0,02727	0,05102	1,1875	0,01006
5	1,125	1,1875	-0,02727	0,01006	1,15625	-0,00904
6	1,15625	1,1875	-0,00905	0,01006	1,171875	0,00039

Ako su f(a) i f(c) različitog predznaka onda u je slijedećoj iteraciji a=a, b=c.
Ako su f(a) i f(c) istog predznaka onda u je slijedećoj iteraciji a=c, b=a.
Ako je f(c)=0 onda je pronađena nultočka te se iteracije prekidaju (rijedak slučaj).
Za rezultat se uzima vrijednost c=(a+b)/2 iz zadnje iteracije. Dakle riješenje je:

$x \in [1,2], n = 6, \alpha \approx x_6 = 1.171875$

Dinamička ocjena greške je: $|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon$

$m_1 = \min|f'(x)|\,;\ x \in [a,b]$
$f'(x) = (x - sinx - 0.25)' = 1 - cosx$
$f'(1) = 1 - 0.540302 = 0.459698$
$f'(2) = 1 + 0.416146 = 1.416146 \Rightarrow m_1 = \min(0.459698{,}1.416146) = 0.459698$
$|f(x_n)| \leq 0.459698 \cdot 10^{-2} = 0.0045969$

Newtonova metoda (metoda tangente)

(40 bodova) Newtonovom metodom pronađite korijen jednadžbe

$$x - \sin x - 0.25 = 0$$

u intervalu $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

Napomena. S iteracijama započnite na "strmijem" kraju intervala, tj. onom kraju na kojem je ispunjeno $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Rješenje:

$$f(x) = x - sinx - 0.25$$

$$f'(x) = 1 - cosx$$

$$f''(x) = sinx$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 - \sin(1) - 0.25 = -0,09147 \\ f''(1) = \sin(1) = 0,84147 \end{array}\right\} \quad f(1) \cdot f''(1) < 0 \Longrightarrow strmiji\ kraj\ intervala\ nije\ kod\ 1\ nego\ kod\ \frac{\pi}{2}$$

Dinamička ocjena greške / zahtjev točnosti:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$$

$$m_1 = \min|f'(x)|\,; x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = 1 - \cos(1) = 0.459698 \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array}\right\} \quad \min(0.459698, 1) = 0.459698 \Longrightarrow m_1 = 0.459698$$

$$M_2 = \max|f''(x)|\,; x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(1) = \sin(1) = 0,84147 \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array}\right\} \quad \max(0,84147, 1) = 1 \Longrightarrow M_2 = 1$$

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.459698 \cdot 10^{-3}}{1}} = 0.0303$$

Iteracije (počinju od $\frac{\pi}{2}$, sa strmijeg kraja):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0.25}{sin\frac{\pi}{2}} = 1.25$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.25 - \frac{1.25 - \sin(1.25) - 0.25}{sin1.25} = 1.19624 \longrightarrow |1.19624 - 1.25| = 0,05376 \geq 0.0303$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.19624 - \frac{1.19624 - sin(1.19624) - 0.25}{\sin(1.19624)} = 1.17951 \longrightarrow |1.17951 - 1.19624| = 0.01673 \leq 0.0303$$

Uvjet je zadovoljen pa se prekidaju iteracije.

$$\alpha \approx x_3 = 1,17951$$

Horner

MinMax

Metoda sekante

Ostalo?