# Zadaci za samostalno vježbanje 8.

Dolje navedeni zadaci po svom sadržaju prate Predavanja 8 i Tutorial 8 i vrlo ih je poželjno preraditi, s obzirom da se uglavnom radi o zadacima koji su se ranije pojavljivali na ispitima ili kao zadaci predviđeni za zadaće. Zvjezdicom (*) su označeni zadaci koji su se pojavljivali na dosadašnjim ispitima, dok su tarabom (#) su označeni zadaci koji su se ranije pojavljivali kao zadaci za zadaću.

1*. Odredite koliko ima bijektivnih funkcija sa skupa X na skup Y ukoliko je X = $\{a, b, c, d, e, f\}$ a
a) Y = $\{u, v, w, x, y, z\}$ b) Y = $\{u, v, w\}$ c) Y = $\{s, t, u, v, w, x, y, z\}$

*Rješenje*: a) 720 b) 0 c) 0

2. Na koliko načina možemo 8 bijelih šahovskih figura (2 topa, 2 skakača, 2 lovca, kralja i kraljicu) postaviti na prvi red šahovske ploče?

*Rješenje*: 5040

3. Koliko se ukupno brojeva manjih od 10000 može napisati pomoću cifri 2, 3 i 5?

*Rješenje*: 120

4. Na šahovskom turniru odigrano je 45 partija, pri čemu je svaki učesnik sa ostalim odigrao po jednu partiju. Koliko je bilo učesnika na turniru?

*Rješenje*: 10

5. Košarkaški tim sačinjavaju 5 bekova, 4 centra i 3 krila. Na koliko načina se može od njih sačiniti petorka ako u njoj moraju da igraju bar dva beka i bar jedan centar?

*Rješenje*: 540

6#. Odredite koliko se različitih stringova može napraviti premetanjem slova iz riječi MISSISSIPPI, pri čemu treba upotrijebiti sva slova.

*Rješenje*: 34650

7*. Odredite koliko se ukupno riječi može sastaviti od slova u riječi “KOBASICA” pod uvjetom da riječi počinju samoglasnikom.

*Rješenje*: 10080

8#. Od 7 žena i 4 muškarca treba izabrati delegaciju. Na koliko načina se može izabrati delegacija tako da se ona sastoji od:

a) Petero ljudi, od kojih su tri muškarca i dvije žene?
b) Bilo kojeg broja ljudi, ali pri čemu je jednak broj muškaraca i žena?
c) Petero ljudi, od kojih su barem dvije žene?
d) Šestero ljudi, po troje od oba spola, ali pri čemu se jedan unaprijed određeni muškarac i jedna unaprijed određena žena ne smiju skupa naći u delegaciji?

*Rješenje*: a) 84 b) 329 c) 455 d) 95

9#*. Odredite koliko se može napraviti različitih troslovnih riječi od slova u riječi “PARADA” (nebitno je imaju li riječi smisla ili ne).

*Rješenje*: 34

10#. Odredite na koliko načina možemo raspodijeliti $n$ jednakih predmeta među $k$ ljudi.

*Rješenje*: $\overline{\mathrm{C}}(k,n)$

11#. Na koliko načina možemo raspodijeliti 12 jabuka, 10 krušaka i 8 banana među petero djece, pri čemu se pretpostavlja se da se jabuke, kruške i banane ne mogu međusobno razlikovati?

*Rješenje*: 901800900

12*. Odredite na koliko načina je moguće rasporediti 25 kuglica koje se ne mogu međusobno razlikovati u 8 različitih kutija, ali tako da barem jedna kutija bude prazna.

*Rješenje*: 3019752

13*. Elektrotehnički fakultet je dobio 20 novih računara i 10 printera. Odredite na koliko različitih načina je moguće ovu opremu raspodijeliti na 4 fakultetska odsjeka, pri čemu su svi računari i printeri međusobno jednaki (u smislu da smatramo da se ne mogu međusobno razlikovati).Pri tome nas ne zanima da li je raspodjela pravična ili ne (recimo, sasvim je legalna raspodjela prema kojoj sva oprema pripadne jednom odsjeku, a preostalim odsjecima ne pripadne ništa).

*Rješenje*: 506506

14*. Odredite koliko postoji osmobitnih stringova (tj. nizova od 8 znakova pri čemu znakovi mogu biti samo 0 ili 1) koji sadrže barem dvije uzastopne nule.

*Rješenje*: 201

15#. Glavni grad afričke države Burkine Faso (bivša Gornja Volta) zove se OUAGADOUGOU (čita se wagadûgû). Ako svako slovo ovog lijepog imena napišemo na papirić, koliko različitih četveroslovnih riječi (nebitno da li imaju smisla ili ne) možemo složiti izvlačeći 4 papirića iz tako dobijene skupine papirića?

*Rješenje*: 476

16*. Na stolu se nalazi 9 kapa, od kojih su 4 plave, 2 crvene, 2 smeđe i 1 bijela. Stolu prilaze 4 osobe i svaka od njih uzima po jednu kapu. Odredite koliko pri tome može nastati različitih situacija ukoliko smatramo da se dvije kape iste boje ne mogu međusobno razlikovati.

*Rješenje*: 163

17. Na koliko načina možemo razmjestiti 7 različitih crnaca i 5 različitih bijelaca u red tako da nikoja dva bijelca ne stoje jedan do drugog?

*Rješenje*: 33868800

18#*. Odredite koliko ukupno ima sedmocifrenih brojeva (u dekadnom brojnom sistemu) kod kojih su tačno 3 cifre jednake osmici (tj. cifri 8). Vodite računa da ispravan sedmocifreni broj ne može početi nulom (tj. prva cifra mora biti u opsegu $1-9$).

*Rješenje*: 215055

19*. Odredite koliko se različitih trocifrenih brojeva može napisati uzimajući cifre iz broja 2524725, ukoliko se svaka cifra može uzeti samo jedanput.

*Rješenje*: 43

20*. Odredite koliko se različitih petoslovnih riječi može formirati iz slova u riječi POPOKATEPETL, pod uvjetom da te riječi sadrže barem dva različita samoglasnika.

*Rješenje*: 5730

21*. Odredite koliko ima različitih načina da se napravi niz od četiri kuglice (poredak kuglica je bitan) ukoliko se kuglice vade iz kutije u kojoj ima 5 crvenih, 3 plave, 3 zelene, 2 crne i 1 bijela kuglica (pri tome se prepostavlja da se kuglice iste boje ne mogu međusobno razlikovati).

*Rješenje*: 493

22#*. Na koliko načina je moguće doći iz donjeg lijevog ugla šahovske table u gornji desni ugao ukoliko je dozvoljeno kretati se

a) Samo nagore ili nadesno?
b) Nagore, nadesno ili dijagonalno gore desno?

*Rješenje*: a) 3432 b) 48639

23#. Fudbalsko prvenstvo igra se u 8 gradova. Također, postoji 8 glavnih sudija, svaki iz po jednog grada u kojima se igra prvenstvo. Da bi prvenstvo bilo regularno, niti jedan sudija ne smije suditi u gradu iz kojeg dolazi. Odredite koliko postoji načina da se organizira regularno prvenstvo.

*Rješenje*: 14833

24#. Iz špila od 52 karte izvlači se uzorak od 6 karata. Odredite koliko postoji takvih uzoraka u kojima se nalazi bar po jedna karta od svake boje ukoliko smatramo da je poredak karata u uzorku bitan, a koliko ukoliko smatramo da poredak nije bitan.

*Rješenje*: 6251431680 ako je poredak bitan, 8682544 ako poredak nije bitan

25#. Izračunajte na koliko načina se broj 10 može napisati kao zbir prirodnih brojeva ukoliko je
a) poredak sabiraka nebitan b) poredak sabiraka bitan

*Rješenje*: a) 42 b) 512

# Rješenja odabranih zadataka iz kombinatorike i teorije vjerovatnoće

***Upozoravaju se studenti da se gledanjem gotovih urađenih zadataka gubi efekat koji se postiže samostalnim rješavanjem zadataka. Stoga se studentima savjetuje da gledaju gotova rješenja samo u slučaju da ni na koji način nisu mogli samostalno riješiti zadatak!***

**Rješenje zadatka 8.7:**

Razmotrimo tri slučaja:

Prvi slučaj: početno slovo je “O”. Tada je potrebno naći permutacije stringa “KBASICA”, kojih ima $7!/2! = 2520$, s obzirom da se slovo A ponavlja 2 puta u stringu.

Drugi slučaj: početno slovo je “I”. Tada je potrebno naći permutacije stringa “KOBASCA”, kojih također ima 2520, iz istog razloga.

Treći slučaj: početno slovo je “A”. Tada je potrebno naći permutacije stringa “KOBSICA”, kojih ima $7! = 5040$, s obzirom da se ni jedno slovo ne ponavlja.

Stoga je ukupan broj riječi $2520 + 2520 + 5040 = 10080$.

Napomena: Razumije se da ovo nije jedini način da se riješi zadatak.

**Rješenje zadatka 8.8:**

a) Problem možemo riješiti da prvo izaberemo tri muškarca, a nakon toga dvije žene. Tri muškarca iz skupa od 4 muškarca mogu se izabrati na $C(4, 3) = 4$ načina, dok se dvije žene iz skupa od 7 žena mogu se izabrati na $C(7, 2) = 21$ način. Prema multiplikativnom principu, ukupan broj načina da se izvrši dati izbor iznosi $4 \cdot 21 = 84$.

b) Ovdje zapravo trebamo izabrati $k$ muškaraca i $k$ žena, pri čemu $k$ može biti 1, 2, 3 ili 4 ($k$ ne može biti veći od 4, jer imamo samo 4 muškarca). Za fiksno $k$, broj načina na koje možemo izabrati $k$ muškaraca i $k$ žena iznosi $C(4, k) \cdot C(7, k)$, što se zaključuje na isti način kao u slučaju pod a). Kako se slučajevi za različite vrijednosti $k$ međusobno isključuju, ukupan broj delegacija možemo dobiti primjenom aditivnog principa, i on iznosi:

$$C(4,1)\cdot C(7,1)+C(4,2)\cdot C(7,2)+C(4,3)\cdot C(7,3)+C(4,4)\cdot C(7,4) =$$
$$= 4\cdot 7 + 6\cdot 21 + 4\cdot 35 + 1\cdot 35 = 329$$

c) Ovdje trebamo izabrati $k$ žena i $5–k$ muškaraca, pri čemu $k$ može biti 2, 3, 4, ili 5 ($k$ mora biti veći ili jednak 2 jer se traže barem dvije žene, dok $k$ ne može biti veći od 5, s obzirom da delegacija sadrži 5 ljudi). Za fiksno $k$, broj načina na koji možemo izabrati $k$ žena i $5-k$ muškaraca iznosi $C(7, k) \cdot C(4, 5–k)$. Sada, primjenom aditivnog principa, dobijamo da traženi broj iznosi:

$$C(7,2)\cdot C(4,3)+C(7,3)\cdot C(4,2)+C(7,4)\cdot C(4,1)+C(7,5)\cdot C(4,0) =$$
$$= 21\cdot 4 + 35\cdot 6 + 35\cdot 4 + 21\cdot 1 = 455$$

Do istog rezultata možemo doći i na drugi način. Na primjer, odredimo prvo koliko ima delegacija sastavljenih od 5 ljudi, bez ikakvih ograničenja. Takvih delegacija očigledno ima $C(11, 5) = 462$. Međutim, iz ovog broja treba isključiti delegacije koje ne zadovoljavaju postavljena ograničenja, a to su delegacije bez žena i delegacije sa jednom ženom. Delegaciju od 5 ljudi bez žena je nemoguće sastaviti, s obzirom da su na raspolaganju samo 4 muškarca (formalno, taj broj je $C(7, 0) \cdot C(4, 5)$; ako usvojimo da je $C(n, k) = 0$ kad god je $k < 0$ ili $k > n$, a imamo jakih opravdanja da usvojimo da je zaista tako, dobijamo nulu kao rezultat, kako i slijedi iz zdravorazumskog razmatranja), dok delegaciju od 5 ljudi sa jednom ženom možemo sastaviti na $C(7, 1) \cdot C(4, 4) = 7$ načina. Slijedi da je broj delegacija koje zadovoljavaju tražena ograničenja $462 - 7 = 455$.

NAPOMENA: Često se susreće sljedeće pogrešno rezonovanje. Prvo izaberemo dvije žene, što možemo uraditi na $C(7,2) = 21$ načina, nakon čega iz preostalog skupa ljudi (5 žena i 4 muškarca) izaberemo još 3 osobe, što možemo uraditi na $C(9,3) = 84$ načina, tako da za ukupan broj delegacija multiplikativni princip daje $21 \cdot 84 = 1764$. Međutim, ovo je očito *pogrešan rezultat*, s obzirom da smo dobili broj koji je veći od broja svih mogućih petočlanih delegacija, bez obzira na polnu strukturu (462). Greška je u tome što smo neke delegacije brojali *više puta*. Naime, ako sve žene numeriramo rednim brojevima od 1 do 7, a muškarce od 1 do 4, tada se delegacija u kojoj se nalaze recimo žene 2, 3 i 5 i muškarci 1 i 3 može dobiti tako da u prvom izboru izaberemo recimo žene 2 i 5 a u drugom izboru izaberemo ženu 3 i muškarce 1 i 3, ali istu delegaciju možemo dobiti i ako u prvom izboru izaberemo recimo žene 2 i 5, ali tada u drugom izboru moramo izabrati ženu 3 i ponovo muškarce 1 i 3. Slijedi da više različitih izbora daje isti uzorak (istu delegaciju). Ovo je očigledan primjer pogrešne upotrebe multiplikativnog principa, jer je on valjan samo uz pretpostavku da različiti postupci izbora dovode do različitih uzoraka!

d) Prvo odredimo broj delegacija u kojima se nalaze tri muškarca i tri žene, bez ikakvih dodatnih ograničenja. Slično kao i u dosada provedenim razmatranjima, lako se dobija da taj broj iznosi $C(7,3) \cdot C(4,3) = 35 \cdot 4 = 140$. Odredimo sada koliko ima delegacija u kojima se nalaze muškarac i žena koji se ne smiju pojaviti u delegaciji. Kako je određeno koji su to muškarac i žena, takve delegacije možemo sastaviti da od preostalih 6 žena i 3 muškarca izaberemo po 2 žene i dva muškarca, što možemo izvesti na $C(6,2) \cdot C(3,2) = 15 \cdot 3 = 45$ načina. Stoga je broj delegacija koje zadovoljavaju uvjete zadatka $140 - 45 = 95$.

**<u>Rješenje zadatka 8.9:</u>**

Troslovne riječi sastavljene od slova u riječi "PARADA" mogu imati:

a) Nijedno slovo "A", tj. imati samo slova "P", "R" i "D". Takvih riječi ima $3! = 6$.

b) Jedno slovo "A", a dva slova izabrana iz skupa {"P", "R", "D"}. Slovo "A" možemo razmjestiti na 3 načina, a preostala dva slova možemo izabrati i razmjestiti na $P(3,2) = 3^{(2)} = 6$ načina. To je ukupno $3 \cdot 6 = 18$ riječi.

c) Dva slova "A", a preostalo slovo izabrano iz skupa {"P", "R", "D"}. Dva slova A možemo razmjestiti na $C(3,2) = 3$ načina, a za preostalo slovo imamo ukupno 3 mogućnosti. To je ukupno $3 \cdot 3 = 9$ riječi.

d) Tri slova "A" – samo je jedna takva riječ.

Ukupno, to je $6 + 18 + 9 + 1 = 34$ riječi.

**<u>Rješenje zadatka 8.11:</u>**

Raspodjelu možemo izvršiti tako da prvo raspodijelimo jabuke, zatim kruške i na kraju banane. Ove raspodjele su neovisne jedna od druge, tako da za dobijanje konačnog broja raspodjela možemo koristiti multiplikativni princip. Kako sve tri raspodjele imaju oblik raspodjeljivanja $n$ jednakih predmeta među $k$ ljudi, utvrdimo prvo koliki je broj takvih raspodjela. Označimo li tih $k$ ljudi sa $x_1, x_2, \ldots x_k$, svaku raspodjelu $n$ predmeta među tih $k$ ljudi možemo predstaviti kao jednu kombinaciju sa ponavljanjem klase $n$ skupa $\{x_1, x_2, \ldots x_k\}$ u kojoj broj ponavljanja elementa $x_i$ odgovara broju predmeta koju je dobila osoba $x_i$. Slijedi da je broj traženih raspodjela $\overline{C}(k,n)$. Do istog zaključka možemo doći i na druge načine. Recimo, ispišimo $n$ zvjezdica koje predstavljaju predmete, i umetnimo u taj niz zvjezdica $k-1$ štapića koji predstavljaju pregrade koje razdvajaju predmete koje će dobiti pojedine osobe. Na taj način dobijamo niz od $n+k-1$ elemenata koji su ili zvjezdice, ili štapići, među kojima je $n$ zvjezdica. Takvih nizova ima $C(n+k-1,\, n)$, što je isto što i $\overline{C}(k,n)$. U svakom slučaju, za konačno rješenje postavljenog problema dobijamo:

$$\overline{C}(5,12) \cdot \overline{C}(5,10) \cdot \overline{C}(5,8) = C(16,12) \cdot C(14,10) \cdot C(12,8) = 1820 \cdot 1001 \cdot 495 = 901800900$$

**Rješenje zadatka 8.14:**

Prvo prebrojavamo sve stringove od 8 bita koji nemaju dvije uzastopne nule. Ovaj problem ćemo svesti na podprobleme nalaženje takvih stringova sa 8 jedinica, sa 7 jedinica, sa 6 jedinica, itd.

– Samo je jedan osmobitni string sa 8 jedinica i on ne sadrži dvije uzastopne nule.

– Osmobitni string sa 7 jedinica također ne može sadržavati dvije uzastopne nule. Takvih stringova ima 8, jer nula može biti na jednoj od 8 pozicija.

– Neka imamo osmobitni string sa 6 jedinica. Dvije njegove nule mogu se rasporediti na $C(7,2)$ načina da ne budu jedna do druge, tako da imamo $C(7,2)=21$ takvih stringova (vidjeti uzorak oblika _1_1_1_1_1_1_).

– Neka imamo osmobitni string sa 5 jedinica. Tri njegove nule mogu se rasporediti na $C(6,3)$ načina tako da ne budu jedna do druge, tako da imamo $C(6,3)=20$ takvih stringova.

– Neka imamo osmobitni string sa 4 jedinice. Četiri njegove nule mogu se rasporediti na $C(5,4)$ načina tako da ne budu jedna do druge, tako da imamo $C(5,4) = 5$ takvih stringova.

– U osmobitnom stringu sa manje od 4 jedinice moraju se pojaviti 2 uzastopne nule.

Ukupno imamo $2^8 = 256$ osmobitnih stringova, tako da je broj stringova sa traženim svojstvom jednak:

$256 - (1 + 8 + 21 + 20 + 5) = 201$

**Rješenje zadatka 8.15:**

Na raspolaganju su nam 3 slova "O", 3 slova "U", 2 slova "A", 2 slova "G" i jedno slovo "D". Uz ova slova na raspolaganju, četveroslovnu riječ očito možemo napraviti na jedan od sljedećih načina:

– Riječ sadrži tri ista slova i četvrto slovo različito;
– Riječ sadrži dva različita para od po dva ista slova;
– Riječ sadrži jedan par istih slova i još po dva različita slova;
– Riječ sadrži sva četiri različita slova.

U prvom slučaju, slovo koje će se triput ponoviti možemo izabrati iz skupa {"O", "U"}, što možemo izvesti na 2 načina. Koje god slovo da izaberemo, iz kompletnog skupa slova {"O", "U", "A", "G", "D"} ostaju četiri slova od kojih trebamo izabrati još jedno slovo, što možemo uraditi na 4 načina. Kada smo izabrali slovo koje se triput ponavlja i slovo koje će biti samo, od njih možemo napraviti četveroslovnu riječ na $\overline{P}(4;3,1) = 4$ načina. Stoga ukupan broj riječi koje možemo napraviti u prvom slučaju iznosi $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$.

U drugom slučaju, dva različita slova koja će se dvaput ponavljati možemo izabrati iz skupa {"O", "U", "A", "G"}, što možemo izvesti na $C(4,2) = 6$ načina. Nakon što izaberemo ta dva slova, od njih možemo napraviti četveroslovnu riječ na $\overline{P}(4;2,2) = 6$ načina. Stoga ukupan broj riječi koje možemo napraviti u drugom slučaju iznosi $6 \cdot 6 = 36$.

U trećem slučaju, slovo koje će se dvaput ponavljati možemo izabrati iz skupa {"O", "U", "A", "G"}, što možemo izvesti na 4 načina. Nakon što izaberemo to slovo, iz kompletnog skupa slova {"O", "U", "A", "G", "D"} ostaju četiri slova, od kojih trebamo izabrati dva različita, što možemo uraditi na $C(4,2) = 6$ načina. Kada smo izvršili izbor slova, od njih možemo napraviti četveroslovnu riječ na $\overline{P}(4;2,1,1) = 12$ načina, tako da ukupan broj riječi koje možemo napraviti u trećem slučaju iznosi $4 \cdot 6 \cdot 12 = 288$.

U četvrtom slučaju, 4 različita slova biramo iz kompletnog skupa slova {"O", "U", "A", "G", "D"}, što možemo uraditi na $C(5,4) = 5$ načina. Izabrana slova možemo rasporediti u četveroslovnu riječ na $P(4) = 24$ načina. Stoga ukupan broj riječi koje možemo napraviti u četvrtom slučaju iznosi

$5 \cdot 24 = 120$. U ovom posljednjem slučaju smo mogli uočiti i da se radi o varijacijama bez ponavljanja, što bi dalo isti broj riječi $P(5, 4) = 120$.

Konačno, ukupan broj traženih riječi iznosi $32 + 36 + 288 + 120 = 476$.

## **Rješenje zadatka 8.16:**

Očigledno mogu nastupiti sljedeći slučajevi:

- Sve osobe su uzele kapu iste boje;
- Tri osobe su uzele kapu jedne boje, a četvrta osoba kapu drugačije boje;
- Dva para osoba su uzele kapu iste boje;
- Dvije osobe su uzele kapu iste boje, a preostale dvije osobe međusobno različite kape neke druge boje;
- Sve četiri osobe su uzele različite kape.

Prvi slučaj daje samo jednu moguću situaciju, jer samo plavih kapa ima dovoljno da 4 osobe mogu uzeti kapu iste boje.

U drugom slučaju, tri osobe također moraju uzeti plavu kapu, dok četvrta osoba može izabrati jednu od preostale 3 boje, što daje 3 mogućnosti. Međutim, izbor koje će 3 osobe uzeti plavu kapu a koja neku drugu možemo izvesti na $\overline{P}(4; 3, 1) = 4$ načina. Stoga drugi slučaj daje ukupno $4 \cdot 3 = 12$ situacija.

U trećem slučaju, 2 boje kapa (za 2 para) možemo odabrati iz skupa {plava, crvena, smeđa} s obzirom da ima samo jedna bijela kapa. Ovaj izbor možemo izvesti na $C(3, 2) = 3$ načina. Međutim, izbor osoba koje će dobiti pojedine kape može se izvesti na $\overline{P}(4; 2, 2) = 6$ načina, tako da ovaj slučaj daje ukupno $3 \cdot 6 = 18$ situacija.

U četvrtom slučaju, boju kape koju će imati 2 osobe možemo odabrati na 3 načina (bijela ne doalzi u obzir). Nakon što smo odabrali tu boju, sad od preostale 3 boje treba izabrati dvije (za boje kapa preostalih osoba), što se može izvesti na $C(3, 2) = 3$ načina. Konačno, izabrane boje možemo rasporediti po osobama na $\overline{P}(4; 2, 1, 1) = 12$ načina. Slijedi da ovaj slučaj daje ukupno $3 \cdot 3 \cdot 12 = 108$ situacija.

U petom slučaju, 4 različite boje možemo rasporediti na 4 osobe na $P(4) = 24$ načina, što je ujedno i broj situacija koje mogu nastati u ovom slučaju.

Konačno, ukupan broj različitih situacija iznosi $1 + 12 + 18 + 108 + 24 = 163$.

## **Rješenje zadatka 8.18:**

Ovaj zadatak se može riješiti barem na dva podjednako dobra načina, stoga ćemo razmotriti oba.

Prvi način:

Razmotrićemo posebno slučajeve kada osmica nije prva cifra i kada osmica jeste prva cifra.

U prvom slučaju, slijedi da za osmice imamo 6 mogućih pozicija, tako da postoji $C(6, 3) = 20$ načina da razmjestimo 3 osmice na 6 pozicija. Za prvu cifru imamo 8 mogućnosti (s obzirom da prva cifra ne smije biti 0 niti 8), a za preostale cifre po 9 mogućnosti (ne računamo one osmice koje smo već rasporedili). To je ukupno $20 \cdot 8 \cdot 9^3 = 116640$ brojeva.

U drugom slučaju, kada osmica jeste prva cifra, preostaju još dvije osmice koje možemo razmjestiti na $C(6, 2) = 15$ načina. Nakon toga preostaju još 4 cifre, a za svaku imamo po 9 mogućnosti. To je ukupno $15 \cdot 9^4 = 98415$ brojeva.

U totalu, to je $116640 + 98415 = 215055$ brojeva.

Drugi način:

Prvo ćemo prebrojati koliko ima stringova sa 7 znakova koji su u opsegu "0" – "9" koji sadrži tri znaka "8", bez obzira što svaki takav string ne predstavlja legalan sedmocifreni broj (nisu legalni oni stringovi kod kojih je prvi znak "0"). Tri pozicije za osmicu možemo izabrati na $C(7, 3) = 35$ načina. Nakon toga preostaju 4 pozicije, koje ravnopravno možemo popuniti ciframa od 0 do 9 na $9^4$ načina. Stoga je ukupan broj takvih stringova $35 \cdot 9^4 = 229635$ načina.

Nakon toga ćemo prebrojati koliko je ilegalnih stringova među tako kreiranim stringovima. Kako su ilegalni oni kod kojih je prvi znak "0", fiksiranjem ovog znaka preostaje da popunimo preostalih 6 znakova. Sada tri pozicije za osmicu možemo izabrati na $C(6, 3) = 20$ načina. Preostaju 3 pozicije na koje treba popuniti cifre od 0 do 9, što se može izvesti na $9^3$ načina. Slijedi da je ukupan broj ilegalnih stringova $20 \cdot 9^3 = 14580$.

Na kraju, traženi broj dobijamo oduzimanjem broja ilegalnih stringova od ukupnog broja stringova, tj. kao $229635 - 14580 = 215055$.

**Rješenje zadatka 8.19:**

Ukupno imamo 4 različite cifre u broju 2524725 (to su 2, 4, 5 i 7). Ukoliko pravimo trocifren broj sa svim različitim ciframa, to možemo uraditi na $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ načina (prvu cifru na 4 načina, nakon toga, drugu na tri načina, jer ne uzimamo opet istu, itd.). Ukoliko pravimo dvocifren broj tako da u njemu imamo dvije iste cifre, te cifre mogu biti samo 2 ili 5 (dva načina), jer se samo one u broju 2524725 javljaju barem dvaput. Kada izaberemo tu cifru, preostalu cifru možemo izabrati na 3 načina (jer su ostale 3 cifre), a poziciju preostale cifre u trocifrenom broju također možemo izabrati na 3 načina. Ukupno, to je $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ varijatni. Konačno, postoji samo jedan trocifreni broj koji možemo napraviti sa 3 jednake cifre – to je broj 222, jer se samo cifra 2 ponavlja triput u zadanom broju. Kada sve rezimiramo, traženi broj trocifrenih brojeva koji se mogu napraviti od cifara polaznog broja iznosi $24 + 18 + 1 = 43$.

**Rješenje zadatka 8.20:**

Na osnovu uvjeta zadatka, sve tražene riječi moraju sadržavati barem dva samoglasnika (i to različita). Kako u riječi "POPOKATEPETL" ima ukupno 5 samoglasnika (dva slova "O", jedno slovo "A" i jedno slovo "E"), slijedi da postoje sljedeće klase dozvoljenih riječi:

– Riječ sadrži 5 samoglasnika i niti jedan suglasnik;
– Riječ sadrži 4 samoglasnika i 1 suglasnik;
– Riječ sadrži 3 samoglasnika i 2 suglasnika;
– Riječ sadrži 2 samoglasnika i 3 suglasnika.

Ove klase je najbolje razmatrati odvojeno. U prvoj klasi, koristimo sve raspoložive samoglasnike (slučajno ih je upravo 5) da formiramo od njih riječ. Ovdje se radi o klasičnim permultacijama sa ponavljanjem, tako da mogućih riječi u prvoj klasi ima $5! / (2! \cdot 1! \cdot 2!) = 30$.

U drugoj klasi, poziciju na kojoj će biti suglasnik možemo izabrati na 5 načina, a sam suglasnik možemo izabrati na 4 načina (postoje 4 različita suglasnika). Preostaje da razmjestimo četiri samoglasnika. Imajući u vidu samoglasnike koji su nam na raspolaganju (uključujući i njihovu brojnost), vidimo da to možemo uraditi tako da uzmemo dva slova "O" i dva slova "E", ili dva slova "O" i po jedno slovo "A" i "E", ili dva slova "E" i po jedno slovo "A" i "O" (u sva tri slučaja ispunjen je uvjet da imamo barem dva različita samoglasnika). Uzmemo li prvu varijantu, razmještaj samoglasnika možemo obaviti na $4! / (2! \cdot 2!) = 6$ načina, dok u drugoj i trećoj varijanti razmještaj samoglasnika možemo obaviti na $4! / (2! \cdot 1! \cdot 1!) = 12$ načina. Dakle, razmještaj samoglasnika možemo obaviti na ukupno $6 + 12 + 12 = 30$ načina. Prema multiplikativnom principu, ukupan broj riječi u drugoj klasi iznosi $5 \cdot 4 \cdot 30 = 600$.

U trećoj klasi, dvije pozicije na kojoj će biti suglasnici možemo izabrati na $C(5,2)=10$ načina. Sad treba odabrati dva suglasnika (koji mogu biti i jednaki). Imamo ukupno 4 različita suglasnika. Kada bi od svakog od ta 4 suglasnika bila barem po dva komada, mogli bismo dva suglasnika izabrati na $4^2=16$ načina. Međutim, kako imamo samo jedno slovo "K" i jedno slovo "L", varijante "KK" i "LL" nisu dozvoljene, tako da imamo 14 načina za izbor dva suglasnika iz raspoloživih resursa. Ostaje da razmjestimo tri samoglasnika. Imajući na umu uvjete zadatka, to možemo uraditi ili da uzmemo sva tri različita samoglasnika, ili da uzmemo dva samoglasnika ista a treći samoglasnik različit. Za prvu varijantu, imamo samo jednu mogućnost (izbor samoglasnika "O", "A" i "E"), a možemo ih razmjestiti na ukupno $3!=6$ načina. U drugoj varijanti, imamo 4 mogućnosti izbora (dva slova "O" i jedno slovo "E", ili dva slova "O" i jedno slovo "A", ili dva slova "E" i jedno slovo "O", ili dva slova "E" i jedno slovo "A"), dok njihov razmještaj možemo obaviti na $3!/(2!\cdot 1!)=3$ načina. Stoga, u drugoj varijanti imamo $4\cdot 3=12$ mogućnosti. Dakle, razmještaj samoglasnika možemo obaviti na $6+12=18$ načina. Prema multiplikativnom principu, ukupan broj riječi u trećoj klasi iznosi $10\cdot 14\cdot 18=2520$.

Konačno, ostaje nam da razmotrimo riječi u četvrtoj klasi. U ovom slučaju ćemo prvo razmjestiti samoglasnike, jer je njih manje (pa će nam biti lakše). Mjesto za dva samoglasnika možemo naći na $C(5,2)=10$ načina. Prvi samoglasnik može biti bilo koji od 3 raspoloživa, dok drugi može biti bilo koji od dva preostala, zbog uvjeta da moramo imati barem dva različita samoglasnika. Dakle, izbor samoglasnika možemo obaviti na $3\cdot 2=6$ načina. Preostaje da rasporedimo suglasnike. Ovdje imamo tri moguće varijante. Prvo, možemo uzeti sva tri suglasnika različita. Kako imamo 4 različita suglasnika, to možemo uraditi na $P(4,3)=4\cdot 3\cdot 2=24$ načina. Drugo, možemo uzeti dva suglasnika ista, a treći različit. Suglasnik koji se ponavlja može biti "P" ili "T" (jedino su oni na raspolaganju u više od jednog primjerka), a onaj preostali može biti bilo koji od druga tri suglasnika, tako da izbor suglasnika u ovoj varijanti možemo obaviti na $2\cdot 3=6$ načina. Kada smo ih izabrali, njihov razmještaj možemo obaviti na $3!/(2!\cdot 1!)=3$ načina. U svakom slučaju, izbor suglasnika u drugoj varijanti možemo izvršiti na $6\cdot 3=18$ načina. U trećoj varijanti možemo uzeti sva tri suglasnika jednaka. Postoji samo jedan način da to izvršimo (uzeti tri slova "P"), jer je jedino slovo "P" zastupljeno tri puta. Dakle, razmještaj suglasnika možemo obaviti na $24+18+1=43$ načina. Stoga ukupan broj riječi u četvrtoj klasi iznosi $10\cdot 6\cdot 43=2580$.

Kada sve rezimiramo, ukupan broj traženih riječi je $30+600+2520+2580=5730$.

**Rješenje zadatka 8.21:**

Na osnovu kuglica koje su nam na raspolaganju, niz od 4 kuglice očigledno možemo napraviti na jedan od sljedećih načina:

- Sve četiri kuglice su iste boje;
- Tri kuglice su iste boje, dok je četvrta kuglica drugačije boje;
- Dvije kuglice imaju istu boju, i preostale dvije kuglice također imaju istu boju, ali drugačiju od prve boje;
- Dvije kuglice su iste boje, a preostale dvije kuglice su različitih boja (koje se razlikuju od boje para kuglica koje su iste boje);
- Sve četiri kuglice su različitih boja.

U prvom slučaju, jedino možemo izabrati crvenu boju, jer jedino crvenih kuglica ima 4 ili više. Slijedi da postoji samo jedan mogući niz prvog tipa: 4 crvene kuglice.

U drugom slučaju, boja tri kuglice koje su iste boje može biti iz skupa {"crvena", "plava", "zelena"} (s obzirom da crnih i bijelih kuglica nema dovoljno), što možemo izvesti na 3 načina. Za koju god boju da se odlučimo, preostaju 4 boje iz kojih trebamo odabrati boju preostale kuglice, što možemo izvesti na 4 načina. Kada smo izabrali boje, tri kuglice iste boje i jednu drugačiju možemo razmjestiti na $\overline{P}(4;3,1)=4$ načina. Stoga je ukupan broj traženih nizova u drugom slučaju $3\cdot 4\cdot 4=48$.

U trećem slučaju, dvije boje za dva različita para kuglica iste boje možemo izabrati iz skupa {"crvena", "plava", "zelena", "crna"} (bijelih kuglica nema dovoljno), što možemo izvesti na

$C(4, 2) = 6$ načina. Nakon što izaberemo te dvije boje, dva para identičnih kuglica možemo razmjestiti na $\overline{P}(4; 2, 2) = 6$ načina. Stoga ukupan broj traženih nizova u drugom slučaju iznosi $6 \cdot 6 = 36$.

U četvrtom slučaju, boju dvije kuglice iste boje ponovo možemo izabrati iz skupa {"crvena", "plava", "zelena", "crna"} na 4 načina. Nakon što izaberemo tu boju, preostaju 4 boje od kojih trebamo izabrati dvije različite, što možemo uraditi na $C(4, 2) = 6$ načina. Kada smo izvršili izbor boja, 4 kuglice od koje su dvije iste možemo razmjestiti na $\overline{P}(4; 2, 1, 1) = 12$ načina, tako da ukupan broj traženih nizova u četvrtom slučaju iznosi $4 \cdot 6 \cdot 12 = 288$.

U petom slučaju, vršimo izbor 4 različite boje iz skupa od 5 boja, što možemo uraditi na $C(5, 4) = 5$ načina. Kako 4 različite kuglice možemo razmjestiti na $P(4) = 24$ načina, ukupan broj traženih nizova u petom slučaju iznosi $5 \cdot 24 = 120$.

Konačno, ukupan broj traženih nizova iznosi $1 + 48 + 36 + 288 + 120 = 493$.

**Rješenje zadatka 8.22:**

a) Sve tražene putanje možemo kodirati stringom koji se sastoji od 2 tipa simbola, recimo $x$ i $y$, pri čemu $x$ označava pomak nagore, a $y$ pomak udesno. Lako je vidjeti da svaka putanja traženog oblika mora imati ukupno 14 pomaka, od kojih je tačno 7 pomaka nagore i 7 pomaka udesno. Stoga se problem svodi na problem određivanja koliko ima stringova od 14 elemenata koji mogu biti samo $x$ ili $y$, od kojih je tačno 7 $x$-ova. Taj broj iznosi $C(14, 7) = 3432$. Alternativno, tražene stringove možemo posmatrati i kao permutacije sa ponavljanjem tipa $(7, 7)$ elemenata skupa $\{x, y\}$, kojih ima $\overline{P}(14; 7, 7) = 3432$.

b) U ovom slučaju, tražene putanje možemo kodirati stringom koji se sastoji od 3 tipa simbola, recimo $x$, $y$ i $z$, pri čemu $x$ označava pomak nagore, $y$ pomak udesno, a $z$ pomak dijagonalno gore desno. Prvo ustanovimo koliko je takvih stringova ukoliko je u njima $n_x$ $x$-ova, $n_y$ $y$-na i $n_z$ $z$-ova. U stringu ukupne dužine $n_x + n_y + n_z$ možemo prvo odabrati pozicije $x$-ova, što možemo učiniti na $C(n_x + n_y + n_z, n_x)$ načina. Nakon toga, od preostalih $n_y + n_z$ pozicija, pozicije $y$-na možemo izabrati na $C(n_y + n_z, n_y)$ načina, nakon čega su pozicije $z$-ova jednoznačno određene. Stoga ukupan broj razmještaja iznosi $C(n_x + n_y + n_z, n_x) \cdot C(n_y + n_z, n_y)$. Do istog zaključka možemo doći i ako te stringove posmatramo kao permutacije sa ponavljanjem tipa $(n_x, n_y, n_z)$ skupa $\{x, y, z\}$. Njihov broj iznosi $\overline{P}(n_x + n_y + n_z, n_x, n_y, n_z)$. Lako se pokazuje da ovaj izraz ima istu vrijednost kao i $C(n_x + n_y + n_z, n_x) \cdot C(n_y + n_z, n_y)$.

Nakon ovog uvodnog razmatranja, potrebno je odrediti koliko iznose $n_x$, $n_y$ i $n_z$ u našem slučaju. Nažalost, taj broj nije fiksan (po čemu se ovaj slučaj razlikuje od prethodnog), tako da će biti potrebno razlikovati nekoliko podslučajeva. Neka je $n_z$ broj $z$-ova (tj. broj dijagonalnih pomaka). Taj broj može biti bilo koja vrijednost od 0 do 7. Međutim, lako se vidi da ukoliko imamo $n_z$ dijagonalnih pomaka, za formiranje tražene putanje potrebno je još $7 - n_z$ horizontalnih i isto toliko vertikalnih pomaka (tj. imamo $n_x = n_y = 7 - n_z$), tako da putanja ima ukupno $n_x + n_y + n_z = 14 - n_z$ pomaka. Dakle, ukupan broj traženih putanja u kojima imamo $n_z$ dijagonalnih pomaka iznosi $\overline{P}(14 - n_z; 7 - n_z, 7 - n_z, n_z)$. Kako $n_z$ može biti bilo koja vrijednost od 0 do 7, ukupan broj traženih putanja iznosi:

$$\begin{aligned}&\overline{P}(14; 7, 7, 0) + \overline{P}(13; 6, 6, 1) + \overline{P}(12; 5, 5, 2) + \overline{P}(11; 4, 4, 3) + \overline{P}(10; 3, 3, 4) + \overline{P}(9; 2, 2, 5) + \\ &\quad + \overline{P}(8; 1, 1, 6) + \overline{P}(7; 0, 0, 7) = \\ &\quad = 3432 + 12012 + 16632 + 11550 + 4200 + 756 + 56 + 1 = 48639\end{aligned}$$

**Rješenje zadatka 8.23:**

Iz postavke problema vidi se da se radi o permutacijama totalnog nereda (deranžmanima).. Njihov broj $D(n)$ može se izračunati na nekoliko načina (u konkretnom slučaju je $n = 8$):

Način 1: Rekurzivna formula $D(n) = (n - 1)\,(D(n - 1) + D(n - 2))$, $D(1) = 0$, $D(2) = 1$:

$D(3) = 2\,(D(2) + D(1)) = 2$
$D(4) = 3\,(D(3) + D(2)) = 9$
$D(5) = 4\,(D(4) + D(3)) = 44$
$D(6) = 5\,(D(5) + D(4)) = 265$
$D(7) = 6\,(D(6) + D(5)) = 1854$
$D(8) = 7\,(D(7) + D(6)) = 14833$

Način 2: Rekurzivna formula $D(n) = n\,D(n–1) + (–1)^n$, $D(1) = 0$:

$D(2) = 2\,D(1) + 1 = 1$
$D(3) = 3\,D(2) – 1 = 2$
$D(4) = 4\,D(2) + 1 = 9$
$D(5) = 5\,D(2) – 1 = 44$
$D(6) = 6\,D(2) + 1 = 265$
$D(7) = 7\,D(2) – 1 = 1854$
$D(8) = 8\,D(2) + 1 = 14833$

Način 3: Eksplicitna formuma $D(n) = n!\,\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ sa sumacijom:

$$D(8) = 8!\,(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}) = \frac{8!}{2!} - \frac{8!}{3!} + \frac{8!}{4!} - \frac{8!}{5!} + \frac{8!}{6!} - \frac{8!}{7!} + \frac{8!}{8!} =$$
$$= 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 - 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 - 6 \cdot 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8 - 8 + 1 =$$
$$= 20160 - 6720 + 1680 - 336 + 56 - 8 + 1 = 14833$$

Način 4: Eksplicitna formula $D(n) = \lfloor n!/e + 1/2 \rfloor$:

$D(8) = \lfloor 8!/e + 1/2 \rfloor = \lfloor 40320/e + 1/2 \rfloor = \lfloor 14833.399 \rfloor = 14833$

**Rješenje zadatka 8.24:**

Ovdje imamo dvije mogućnosti. Prva mogućnost je da imamo tri karte u istoj boji, i po tri karte u svakoj od preostale tri boje. Boju u kojoj ćemo imati tri karte možemo izabrati na 4 načina. Nakon izvršenog izbora, imamo klasični problem uzimanja uzoraka sa parametrima $n = 52$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 13$, $m = 6$, $m_1 = 3$, $m_2 = m_3 = m_4 = 1$ (bez umanjenja općenitosti možemo uzeti da karte izabrane boje čine klasu $A_1$), pa imamo:

Kada je poredak bitan: $\frac{6!}{3!1!1!1!}13^{(3)}13^{(1)}13^{(1)}13^{(1)} = 452406240$

Kada poredak nije bitan: $\binom{13}{3}\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1} = 628342$

Druga mogućnost je da imamo dvije karte u jednoj boji, dvije u drugoj boji, i po dvije karte u svakoj od preostale dvije boje. Dvije boje u kojima će biti po dvije karte možemo izabrati na $C(4, 2) = 6$ načina, nakon čega imamo klasični problem uzimanja uzoraka sa parametrima $n = 52$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 13$, $m = 6$, $m_1 = m_2 = 2$, $m_3 = m_4 = 1$, pa imamo:

Kada je poredak bitan: $\frac{6!}{2!2!1!1!}13^{(2)}13^{(2)}13^{(1)}13^{(1)} = 740301120$

Kada poretak nije bitan: $\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{1}\binom{13}{1} = 1028196$

Konačno, izvodimo ukupan broj uzoraka:

Kada je poredak bitan: $4 \cdot 452406240 + 6 \cdot 740301120 = 6251431680$
Kada poredak nije bitan: $4 \cdot 628342 + 6 \cdot 1028196 = 8682544$

## Rješenje zadatka 8.25:

a) Za slučaj kada je poredak sabiraka nebitan, tu se radi o particijama broja. Prihvatljiv način za računanje broja particija PP($n$) broja $n$ za ne prevelike vrijednosti $n$ dat je preko Eulerove petougaone rekurzivne formule:

$$\mathrm{PP}(n) = \sum_{k\neq 0} (-1)^{k+1}\,\mathrm{PP}\left(n-\frac{1}{2}k(3k+1)\right), \quad \mathrm{PP}(0) = 1, \quad \mathrm{PP}(n) = 0 \text{ za } n<0.$$

Zbog uvjeta PP($n$) = 0 za $n<0$, suma u gornjoj formuli je uvijek konačna. Tako imamo:

PP(1) = PP(0) = 1
PP(2) = PP(0) + PP(1) = 1 + 1 = 2
PP(3) = PP(1) + PP(2) = 1 + 2 = 3
PP(4) = PP(2) + PP(3) = 2 + 3 = 5
PP(5) = –PP(0) + PP(3) + PP(4) = –1 + 3 + 5 = 7
PP(6) = –PP(1) + PP(4) + PP(5) = –1 + 5 + 7 = 11
PP(7) = –PP(0) – PP(2) + PP(5) + PP(6) = –1 – 2 + 7 + 11 = 15
PP(8) = –PP(1) – PP(3) + PP(6) + PP(7) = –1 – 3 + 11 + 15 = 22
PP(9) = –PP(2) – PP(4) + PP(7) + PP(8) = –2 – 5 + 15 + 22 = 30
PP(10) = –PP(3) – PP(5) + PP(8) + PP(9) = –3 – 7 + 22 + 30 = 42

b) Za slučaj kada je poredak bitan, tu se radi o kompozicijama broja. Ovaj slučaj je mnogo jednostavniji, jer broj $n$ ima $2^{n-1}$ kompozicija, odnosno, kako je u našem slučaju $n = 10$, traženi broj rastava je $2^9$ = 512.

## Rješenje zadatka 9.1:

Vjerovatnoća da u jednom bacanju ne dobijemo šesticu iznosi 5/6. Vjerovatnoća da u 6 bacanja ne dobijemo šesticu iznosi $(5/6)^6$, s obzirom da su bacanja međusobno neovisna. Stoga vjerovatnoća da u 6 bacanja dobijemo barem jednu šesticu (suprotan događaj) iznosi $p_1 = 1-(5/6)^6 \approx 0.665$. Na sličan način zaključujemo da vjerovatnoća da u 36 bacanja dobijemo barem jednu duplu šesticu iznosi $p_2 = 1-(35/36)^{36} \approx 0.637$. Dakle, ova vjerovatnoća je manja od prve, bez obzira što mnogima izgleda da nije tako.

## Rješenje zadatka 9.2:

Uvedimo sljedeće događaje:

A – Broj je djeljiv sa 2
B – Broj je djeljiv sa 3

Tada je AB događaj "Broj je djeljiv i sa 2 i sa 3 (tj. sa 6)". Imamo

$p(\mathrm{A+B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{AB}) = 1/2 + 1/3 - (1/2)(1/3) = 2/3$

Stoga je:

a) $p(\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}) = p(\overline{\mathrm{A+B}}) = 1 - 2/3 = 1/3$

b) $p(\overline{\mathrm{A}}+\overline{\mathrm{B}}) = p(\overline{\mathrm{AB}}) = 1 - 1/6 = 5/6$