

Ime i prezime: _____ Dio: 1. 2. 3.
(zaokružite dio gradiva koji odgovarate)

1. dio				2. dio				3. dio			
1	2	3	Σ	1	2	3	Σ	1	2	3	Σ

1. dio

1. **(30 bodova)** Neka su x , y i z reprezentabilni u računalu, tako da vrijedi $x = fl(x)$, $y = fl(y)$, $z = fl(z)$ i $yz > 0$. S kolikom će relativnom greškom računalu koje koristi IEEE standard izračunati

$$fl\left(\frac{x^2 + yz}{x}\right) \quad ?$$

2. **(40 bodova)** Pronađite LU faktorizaciju (s pivotiranjem) matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uz pomoć faktorizacije riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte kondiciju matrice A i pronadite ocjenu greške. Inverzna matrica matrice A je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. a) **(15 bodova)** Izvedite broj računskih operacija za rješavanje sustava linearnih jednadžbi reda n .
b) **(15 bodova)** Što je pogreška unatrag, a što unaprijed?

Rješenja:

1. $\delta \approx 3\varepsilon$, $|\varepsilon| \leq u$

2. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $kond(A) = 28.46$,

$$= \frac{||\delta x||}{||x||} \leq 1.25 \cdot 10^{-14}$$

2. dio

1. **(40 bodova)** Funkciju $f(x) = \sin(\pi x)$ na intervalu $[0, 0.75]$ treba aproksimirati Newtonovim interpolacijskim polinomom koji će prolaziti sljedećim točkama:

x	0	0.25	0.5	0.75
$f(x)$	0	0.707107	1	0.707107

Izračunajte aproksimaciju vrijednosti $\sin \frac{\pi}{8}$, te pronađite ocjenu relativne greške i pravu relativnu grešku.

2. **(30 bodova)** Metodom najmanjih kvadrata odredite pravac koji najbolje aproksimira skup točaka $T_1(0, 3)$, $T_2(1, 4)$, $T_3(-1, 2)$ i $T_4(2, 4)$. Izračunajte kvadratičnu prilagodbu, komentirajte kvalitetu rješenja i skicirajte rješenje.
3. **(30 bodova)** Izvedite formule za kubični interpolacijski splajn.

Rješenja:

1. $P(x) = 2.8284x - 3.3137x(x-0.25) - 1.8301x(x-0.25)(x-0.5)$; $f(\frac{1}{8}) \approx P(0.125) = 0.3946$;
 $f(0.125) = 0.3827$ (točna vrijednost);
 $\frac{|f(0.125) - P(0.125)|}{|f(0.125)|} \leq 0.0388$; $\frac{|f(0.125) - P(0.125)|}{|f(0.125)|} = 0.0311$
2. $y = 0.7x + 2.9$; $q = \frac{\|Ax - b\|}{\|b\|} = 0.0816$

3. dio

1. **(40 bodova)** Newtonovom metodom pronađite korijen jednadžbe

$$x - \sin x - 0.25 = 0$$

u intervalu $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

Napomena. S iteracijama započnite na "strmijem" kraju intervala, tj. onom kraju na kojem je ispunjeno $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

2. **(30 bodova)** Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} y' &= 3y - z - x \\ z' &= y - xz \end{aligned}$$

uz početne uvjete $y(0) = 1$, $z(0) = 1$. Runge-Kutta metodom 2. reda nađite približno rješenje sustava za $x = 0.2$ uz korak $h = 0.2$.

3. **(30 bodova)** Izvedite trapeznu formulu i navedite ocjenu pogreške.

Rješenja:

1. $\alpha \approx x_3 = 1.1712$,
dinamička ocjena greške $|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.0303$ (ispunjena za x_3)
2. $y(0.2) \approx 1.48$, $z(0.2) \approx 1.216$