Kombinatorika

1. Pravilo zbrajanja i produktno pravilo (citirati i dokazati teorem).

Pravilo zbrajanja: Ako su A i B konačni disjunktni skupovi, onda vrijedi

$$| A \cup B | = |A| + |B|$$

Teorem (Produktno pravilo): Neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ neprazni konačni skupovi. Onda vrijedi:

$$| A_1 \times A_2 \times ... \times A_n | = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$$

ili kraće pisano:

$$\left| \prod_{i=1}^{n} A_i \right| = \prod_{k=1}^{n} |A_i| \quad .$$

Dokaz: Rabimo matematičku indukciju.

Za n=1 tvradnja je istinita: $|A_1| = |A_1|$.

Pretpostavljamo da je za $n = k$: $| A_1 \times A_2 \times ... \times A_k | = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_k|$

Za $n = k + 1$ vrijedi: $| (A_1 \times A_2 \times ... \times A_k) \times A_{k+1} | = | A_1 \times A_2 \times ... \times A_k | \cdot |A_{k+1}|$

$\Rightarrow$ $| A_1 \times A_2 \times ... \times A_{k+1} | = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_{k+1}|$

2. Koliki su $|B^A|$ i $|2^X|$ za konačne skupove A, B i X? Dokazati.

Teorem: Neka su A i B neprazni konačni skupovi. Onda vrijedi $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$.

Dokaz: Neka je $A = \{ a_1, a_2, ..., a_n \}$, onda je $|A| = n$. Skup $B^n = B \times B \times ... \times B$ ima $|B|^n = |B|^{|A|}$ elemenata.

Teorem: Neka je X neprazan konačan skup. Onda za partitivni skup 2^X vrijedi $\left|2^X\right| = 2^{|X|}$.

Dokaz:

a) Neka je $X = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$. Treba pokazati da postoji bijekcija iz partitivnog skupa 2^X na skup $\{0, 1\}^n$. Definirajmo $F : 2^X \to \{0, 1\}^n$ kodoranjem podskupa $A \in 2^X$. Ako je $A = \emptyset$ stavljamo $F(A) = (0, 0, ..., 0)$. Ako je $A \neq 0$, onda neka je F(A) n-terac u kojem na k-tom mjestu dolazi jedinica onda i samo onda ako je $x_k \in A$, inače je nula. F(A) je n-terac koji predstavlja kod skupa A.

Funkcija F je očevidno injektivna, jer ako su $A, B \in 2^X$ i $F(A)=F(B)$ onda je $A=B$. Funkcija je surjektivna jer za svaki n-terac iz $\{0, 1\}^n$ možemo očitati A.

b) Budući da je $F : 2^X \to \{0, 1\}^n$ bijekcija, onda je:

$$\left|2^X\right| = \left|\{0,1\}^n\right| = 2^n = 2^{|X|}$$

3. Što su to varijacije bez ponavljanja i permutacije bez ponavljanja? Kako ih prebrojavamo?

Definicija: **Varijacijom bez ponavljanja** reda k konačnog skupa $A_n = \{ a_1, a_2, ..., a_n \}$, $k \leq n$, zovemo bilo koju uređenu k-torku različitih elmenata iz A_n. Ukupan broj varijacija bez ponavljanja reda k označavamo sa V_n^k.
Varijacije bez ponavljanja reda n nazivamo **permutacijama** n-članog skupa. Ukupan broj permutacija n-članog skupa označavamo sa P_n.

Teorem: Ukupan broj varijacija bez ponavljanja reda $k \leq n$ skupa od n elemenata jednak je

$$V_n^k = n\,(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!$$

Ukupan broj permutacija bez ponavljanja n-članog skupa jednak je $P_n = n!$.

4. Što su to kombinacije bez ponavljanja i binomni koeficijenti? Koja su svojstva binomnih koeficijenata?

Definicija: Kombinacijom bez ponavljanja reda k konačnog skupa $A_n = \{ a_1, a_2, ..., a_n \}$, zovemo bilo koji k-člani podskup od A_n.
Ukupan broj kombinacija bez ponavljanja reda k označavamo sa C_n^k.

Teorem: Ukupan broj kombinacija bez ponavljanja reda $k \le n$ skupa od n elemenata jednak je:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Izraz $\binom{n}{k}$ se zove **binomni koeficijent**.

Svojstva binomnih koeficijenata**:**

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

4) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

5. Kako glasi binomna formula? Dokazati.

Propozicija: (Binomna formula) Za svaki $x, y \in R$, $n \in N$ vrijedi:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Dokaz: U izrazu:

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

nakon množenja opći član će imati oblik $c_k x^{n-k} y^k$, gdje je c_k konstantni koeficijent kojeg želimo odrediti. Produkt $x^{n-k} y^k$ može se ostvariti tako da uzmemo k elemena y od ukupno n elemenata y iz binoma (x+y). Tih k elemenata možemo odabrati na ukupno $\binom{n}{k}$ načina. Dakle, $c_k = \binom{n}{k}$.

6. Što su to permutacije i varijacije s ponavljanjem i kako ih prebrojavamo? (Citirati i dokazati teoreme o ukupnom broju permutacija s ponavljanjem i varijacija s ponavljanjem)

Definicija: Neka je zadan skup od k elemenata $A_k=\{ a_1, a_2, ..., a_k \}$. Promatrajmo sve uređene n-torke elmenata iz A_k u kojima se element a_1 pojavljuje n_1 puta, element a_2 pojavljuje n_2 puta, ..., element a_k pojavljuje n_k puta, pri čemu je $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Takve n-torke zovemo **permutacijama n-tog reda s ponavljanjem**, a njihov ukupni broj označavamo sa: $P_n^{n_1, n_2, \cdots, n_k}$.

Teorem: Ukupan broj permutacija n-tog reda s ponavljanjem skupa $A_k=\{ a_1, a_2, ..., a_k \}$, u kojima se element a_i pojavljuje n_i puta, $i = 1, 2, ..., k$ jednak je:

$$P_n^{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \quad .$$

Dokaz: Vrijedi da je $P_n = n! = (n_1! n_2! \cdots n_k!)\, P_n^{n_1, n_2, \cdots, n_k}$, odakle slijedi tvrdnja.

Definicija: Neka je zadan skup od n elemenata $A_n=\{ a_1, a_2, ..., a_n \}$. Uređene k-torke elmenata iz A_n, pri čemu se svaki element može i ponavljati, **zovemo varijacijama s ponavljanjem k-tog reda n-članog skupa**, a njihov ukupan broj označavamo s $\overline{V}_n^k$.

Teorem: Ukupan broj varijacija s ponavljanjem k-tog reda n-članog skupa je:

$$\overline{V}_n^k = n^k .$$

Dokaz: Skup svih varijacija s ponavljanjem k-tog reda je Kartezijev produkt od k-skupova $A_n \times A_n \times \cdots \times A_n$. Vrijedi da je $|A_n \times A_n \times \cdots \times A_n| = |A_n|^k = n^k$.

7. Citiraj i dokaži multinomnu formulu.

Teorem (**Multinomni teorem**): Vrijedi da je:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=n} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

gdje u gornjoj sumi zbrajamo po svim k-torkama cijelih brojeva n_1, n_2, ..., $n_k \geq 0$ takvim da je $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Dokaz: Ukupan broj načina na koji u potenciji

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$$

možemo odabrati n_i puta varijablu x_i; $i = 1, 2, ..., k$; tako da je $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, jednak je ukupnom broju permutacija n-tog reda s ponavljanjem:

$$P_n^{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

To je upravo multinomni koeficijent uz $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ u razvoju $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$.

8. Što su to kombinacije s ponavljanjem i kako ih prebrojavamo?

Definicija: Neka je zadan skup od n elemenata $A_n=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. **Kombinacija s ponavljanjem k-tog reda** n-članog skupa je bilo koja neuređena k-torka elemenata iz A_n. Pri tom se svaki element k-torke može i ponavljati.

Teorem: Ukupan broj kombinacija s ponavljanjem k-tog reda n-članog skupa jedanak je:

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

9. Kako glasi formula uključivanja i isključivanja (Sylvesterova formula)? Dokazati formulu.

Teorem (**Formula uključivanja i isključivanja ili Sylvesterova formula**): Neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ konačni skupovi sadržani u univerzalnom skupu X. Onda vrijedi:

a) $$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

b) $$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_n| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$$

Dokaz:

a) Rabi se matematička indukcija. Lako se vidi da za n=2 vrijedi tvrdnja izrečena teoremom: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n konačnih skupova, a treba dokazati da onda tvrdnja vrijedi za n + 1 konačnih skupova.

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}|$$

$$= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}|$$

$$= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})|$$

$$= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| - \ldots - (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}|$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n+1} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}|$$

b) Iz DeMorganove formule slijedi da je:

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_n| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n}| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$$

10. Izvedi formulu za ukupan broj deranžmana u skupu svih permutacija bez ponavljanja reda n.

Koliko ima permutacija bez ponavljanja f skupa {1, 2, ..., n} takvih da je $f(k) \neq k$ za sve k = 1, 2, ..., n? Takve permutacije kod kojih niti jedan element nije na svom mjestu nazivamo **neredima ili deranžmanima**.

Ukupan broj deranžmana d_n se računa po formuli:

$$d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ \dots \ + (-1)^n\frac{1}{n!}\right) \quad .$$

Izvod formule:

Neka je X skup svih permutacija skupa {1, 2, ..., n}, a $A_i = \{f \in X : f(i) = i\}$.

Tada je ukupan broj deranžmana: $d_n = \left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right|$.

Prema Sylvestrovoj formuli:

$$\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right| = \left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\right| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

odnosno:

$$d_n = |X| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n}|A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| +$$

$$+ \ \dots \ + (-1)^n\,|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Ako imamo k fiksiranih elemenata skupa {1, 2, ..., n}, onda variramo ostalih (n-k) elemenata. Ukupan broj varijacija bez ponavljanja (n-k)-tog reda od n elemenata iznosi:

$$V_n^{n-k} = \binom{n}{n-k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

Dakle,

$$d_n = \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \ \dots \ + (-1)^n\frac{n!}{n!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \quad .$$