Važan pojam logike uopšte je *logička mogućnost.* Kad istovremeno razmatramo više iskaza onda zahtevamo da *svaki* od tih iskaza bude vezan za jedan isti skup logičkih mogućnosti. Ako je neki iskaz istinit u svakom mogućem logičkom slučaju onda ga mi nazivamo *logički istinita.* Ako je, pak, iskaz lažan u svakom logički mogućem slučaju, nazivamo ga *logički lažna*, ili *protivrečna.*

Za jedan složeni iskaz u matematičkoj logici se kaže da je *tautologija* ako je on istinit bez obzira na istinitost odnosno neistinitost njegovih komponenata. Pojam tautologija je sinonim pojmu logički istinit.

2° Booleova algebra

Svaki složeni iskaz, sastavljen od nekih polaznih iskaza primenom logičkih operacija $1 \div 5$, zovemo *formula algebre iskaza.* Svaka formula predstavlja neku funkciju od slova koja ulaze u nju. Za dve formule A i B se kaže da su *istovredne* ako za proizvoljne vrednosti $x_1, \ldots, x_n$, gde su x_i $(i=1, \ldots, n)$ sve promenljive koje ulaze u A i B, te formule imaju istu vrednost. Ako su A i B dve istovredne formule, onda to pišemo u obliku $A=B$. Važniji primeri istovrednih formula su:

1. $\overline{\overline{p}}=p$;
2. $p \wedge q=q \wedge p$;
3. $(p \wedge q) \wedge r=p \wedge (q \wedge r)$;
4. $p \vee q=q \vee p$;
5. $(p \vee p) \vee r=p \vee (q \vee r)$;
6. $p \wedge (q \vee r)=(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
7. $p \vee (q \wedge r)=(p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
8. $\overline{(p \vee q)}=\overline{p} \wedge \overline{q}$;
9. $\overline{(p \wedge q)}=\overline{p} \vee \overline{q}$;
10. $p \vee p=p$;
11. $p \wedge p=p$;
12. $p \wedge I=p$;
13. $p \vee N=p$.

Skup elemenata na kojima su definisane operacije sabiranja, množenja i negacije, koje zadovoljavaju aksiome $1 \div 13$ naziva se *Booleova algebra.* Otuda se može reći da iskaz i osnovne logičke operacije $\vee, \wedge, -$ čine Booleovu algebru. Najprostiji skup koji zadovoljava gornje aksiome sastoji se od elemenata 0 i 1. U ovom slučaju ćemo identifikovati 0 sa N i 1 sa I, operaciju $+$ sa disjunkcijom $\vee$, a operaciju sa konjunkcijom $\wedge$. Na taj način ako su slova $x, y, z, \ldots$ proizvoljni elementi skupa (0, 1) imamo sledeće tablice sabiranja i množenja.

Tablica 3

x	y	xy
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

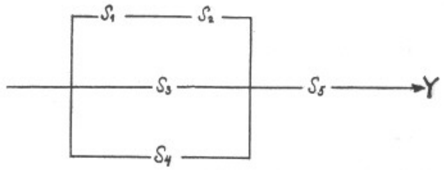
Tablica 4

x	y	$x+y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Svaka formula Booleove algebre definiše neku *Booleovu funkciju.* Pod Booleovom funkcijom se podrazumeva svaka funkcija f od n promenljivih koje uzimaju vrednost iz skupa (0, 1) a vrednosti funkcije takođe pripadaju skupu (0, 1).

Booleova algebra (0, 1) ili, kako se to kaže, binarni sistem, ima veliku primenu u električnim mrežama. Za dva prekidača se kaže da su u „paralelnoj vezi" kad struja prolazi kroz sistem u kome je bar jedan od njih zatvoren. Analogno tome prekidači su vezani u „seriji" kad struja prolazi kroz mrežu kad su oba prekidača zatvorena. Na sl. 1 sa S je obeležen prekidač. Uzima se da svaki prekidač S ima vrednost 1 ako je zatvoren a vrednost 0 ako je otvoren. Isto tako uzmimo da svaki kombinovani prekidač Y ima vrednost 1 ako je zatvoren i vrednost 0 ako je otvoren. Otuda se to stanje može opisati jednačinama:

za paralelnu vezu $S_1+S_2=Y$,
za vezu u seriji $S_1 \cdot S_2=Y$,
gde su „+" i „·" operacije Booleove algebre (0, 1).



Sl. 1

127. Polazeći od iskaza p i q napisati složeni iskaz koji je istinit kada je p ili q istinito ali ne i oba, primenjujući na njih operacije $\vee, \wedge, -$.

Formirati tablicu istinitosti za svaki od sledećih iskaza:

128. 1° $\overline{(p \wedge q)}$; 2° $p \wedge \overline{q}$;
3° $(p \vee q) \vee \overline{p}$; 4° $\overline{(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})}$.

129. 1° $p \Rightarrow (q \vee r)$; 2° $(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)$;
3° $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$; 4° $p \wedge \overline{p}$.

130. 1° $(p \Rightarrow p) \vee (p \Rightarrow \overline{p})$; 2° $(p \vee \overline{q}) \wedge r$;
3° $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.

131. Utvrditi koji je od sledećih iskaza logički istinit a koji logički protivrečan a koji ni jedno ni drugo.
1° $p \Leftrightarrow p$; 2° $p \Rightarrow \overline{p}$; 3° $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$;
4° $(p \Rightarrow \overline{q}) \Rightarrow (q \Rightarrow \overline{p})$.

132. 1° $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \overline{(p \Rightarrow r)}$;
2° $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$; 3° $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$.

133. Dokazati ako je p logički istinit iskaz da je:
1° $p \vee q$ logički istinito;
2° $\overline{p} \wedge q$ logički lažno;
3° $p \wedge q$ ekvivalentno sa q;
4° $\overline{p} \vee q$ ekvivalentno sa q.

134. Ako su p i q logički istiniti, a r logički lažno, šta se može reći o iskazu $(p \vee \overline{q}) \wedge \overline{r}$?

U kakvom odnosu stoje iskazi:

135. $p \Rightarrow [p \wedge \overline{(q \vee r)}]$ i $\overline{p} \vee (\overline{q} \wedge \overline{r})$.

136. $[p \vee \overline{(q \vee r)}] \vee (p \wedge s)$ i $\overline{[p \wedge q \wedge r \wedge s]}$.

Pomoću tablica istinitosti pokazati da su sledeći iskazi tautologije.

137. 1° $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{(p \wedge \bar{q})}$; 2° $(p \vee q) \Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})}$;

138. 1° $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$;

2° $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

139. 1° $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$;

2° $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.

140. 1° $(\bar{p} \vee p) \vee (\bar{q} \vee q) \vee (\bar{r} \vee r) \vee (\bar{s} \vee s)$;

2° $(\bar{p} \vee q) \vee (\bar{q} \vee r) \vee (\bar{r} \vee p)$.

141. 1° $(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (q \vee r) \vee (\bar{r} \vee \bar{s}) \vee (s \vee p)$;

2° $(p \Rightarrow \bar{q}) \vee (\bar{q} \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow \bar{s}) \vee (\bar{s} \Rightarrow p)$.

142. 1° $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

2° $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \wedge r)] \Rightarrow (q \vee s)$.

143. $(p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_2 \Rightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \Rightarrow p_n) \wedge (p_n \Rightarrow p_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \vee (\bar{p}_1 \wedge \bar{p}_2 \wedge \cdots \wedge p_n)$.

144. Ako su dati iskazi p i q istiniti a sem toga su dati $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee q)$ $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$. Izvesti odatle zaključak da je r neistinito.

Na osnovu navedenih aksioma dokazati sledeće stavove:

145. $p \wedge (\bar{p} \vee q) = p \wedge q$.

146. $p \vee q \vee r \vee s = \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r} \Rightarrow s$.

147. $(p \vee p) \wedge q \vee (p \vee q) = (p \wedge q) \vee (p \vee p) = (p \wedge q) \vee p$.

148. $\overline{(p \vee \bar{q} \wedge r)}(p \wedge s \vee r) = \bar{p} \wedge q \wedge r$.

149. Izračunati:

1° $1+1+1$: 2° $1 \cdot 1 \cdot 1$; 3° $[1 \cdot (0+1)] : (1+0)$;

4° $[(1+1) \cdot (0+0)] + [(0 \cdot 1) \cdot (1+0)]$.

150. Izraziti sledeće iskaze logike simbolikom Booleove algebre (0, 1):

1° $(p \vee q) \Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})}$;

2° $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$;

3° $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow t$, gde je t neki iskaz koji je uvek istinit;

4° $(p \vee q) \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$.

151. Naći iskaze u logici koji odgovaraju sledećim odnosima u Booleovoj algebri (0, 1).

1° $x+x=x$; 2° $x+x \cdot y = x \cdot (x+y) = x$; 3° $x+(y+z)=(x+y)+z$.

152. Neka $z=f(x, y)$ predstavlja funkciju u kojoj su x, y i z elementi Booleove algebre (0, 1). Ta funkcija je određena sledećom tablicom, gde su vrednosti u

x	x	$f(x, y)$
1	1	$f(1, 1)$
1	0	$f(1, 0)$
0	1	$f(0, 1)$
0	0	$f(0, 0)$

desnoj koloni proizvoljno izabrani brojevi iz skupa (0, 1). Pokazati da je tada $f(x, y)$ eksplicitno određeno formulom:

$$f(x \cdot y) = f(1, 1)\, xy + f(1, 0)\, x\bar{y} + f(0, 1)\, \bar{x}y + f(0, 0)\, \bar{x}\bar{y}.$$

153. Koliko ima Booleovih funkcija od 1, 2, 3, 4 i 5 promenljivih?

154. Dokazati da se svaka Booleova funkcija $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ može predstavit u obliku:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \cdot \bar{f}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + 1 \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1).$$

155. Pokaži induktivnim putem da se svaka Booleova funkcija $f(x_1, \dots, x_n$ može napisati u jednom od sledećih oblika:

1° $f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee\limits_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{\sigma_n}$ $(x^0 = \bar{x},\ x^1 = x$

gde je logički zbir uzet za one slogove

$\sigma_1, \dots, \sigma_n$ za koje je $f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1$;

2° $f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge\limits_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} (x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n{}^{\sigma_n})$,

gde je logički proizvod uzet za one slogove $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, za koje j $f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0$.

Služeći se sistemom aksioma $1 \div 13$ dokazati bez upotrebe tablica istin tosti sledeće identitete:

156. 1° $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 x_4}$.

2° $x_1 x_2 x_3 x_4 = \overline{\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_3 x_4}}$.

157. 1° $fx \vee f\bar{x} = f$; 2° $fx \vee f = f$.

3° $fx_1 \vee fx_2 = f(x_1 \vee x_2)$.

158. $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee {}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = \begin{cases} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3. \end{cases}$

159. 1° $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$.

2° $xy\bar{z} \vee xz \vee \bar{x}y = xz \vee y$.

160. 1° $AC \vee B\overline{C} = AC \vee B\overline{C} \vee AB$.

2° $A(A \vee D)B(B \vee C)(C \vee D) = ABC \vee ABD$.

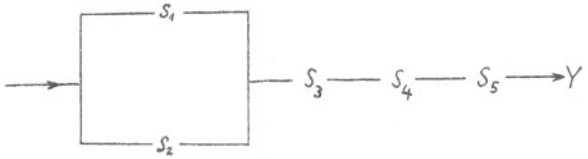
161. $\overline{(B \wedge \overline{A})} \vee \overline{(C \vee \overline{A})} = (A \wedge C) \vee (C \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$.

162. Booleova funkcija $x_1 | x_2$ se naziva Šeferova funkcija, i definisana je sledećom tablicom

x_1	x_2	$x_1 \| x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

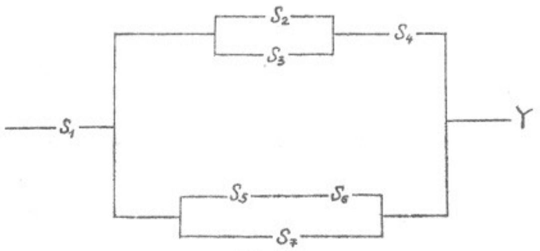
Izraziti pomoću nje funkcije $\overline{x}, x_1 \vee x_2$ i $x_1 \wedge x_2$.

163. Napisati Booleovu jednačinu strujnog kola na sl. 2.



Sl. 2

164. Napisati Booleovu jednačinu za strujno kolo na sl. 3.



Sl. 3

165. Potrebno je da se osvetljenje nekog stepeništa reguliše pomoću dva prekidača, jednog dole i jednog gore. Okrećući bilo koji prekidač zahtevamo da se može upaliti ili ugasiti osvetljenje. Formirati tablicu koja daje rešenje postavljenog problema.

166. Na osnovu aksioma Booleove algebre pokazati da je

$$(D \wedge U) \vee (\overline{D} \wedge \overline{U}) = (D \vee \overline{U}) \wedge (\overline{D} \vee U)$$

i nacrtati oba oblika odgovarajućeg strujnog kola.

167. Nacrtati kolo struje koje odgovara jednačini

$$[(S_1 + S_3) \cdot S_2] + (S_4 \cdot S_5) = Y.$$

§ 2. Skup. Relacija. Funkcija

1° Ako je a element skupa A, pisaćemo

$$a \in A$$

a ako a nije elemenat skupa A, pisaćemo

$$a \notin A.$$

Skup A je dat ako se za svaki objekat može ustanoviti da li pripada skupu A ili ne pripada.

Skup A je podskup skupa B ako iz $a \in A \Rightarrow a \in B$. Tada pišemo

$$A \subset B.$$

Ako je $A \subset B \wedge B \subset A$ kažemo da su A i B jednaki, i pišemo

$$A = B.$$

Ako su $a, b, \ldots, x, y, z$ elementi skupa A označavamo

$$A = \{a, b, \ldots, x, y, z\}.$$

Specijalno $\{a\}$ označava skup čiji je jedini elemenat a. *Prazan skup* (skup bez elemenata) označavamo sa $\emptyset$.

Sknp A čiji elementi imaju osobinu π označavamo

$$A = \{a\colon a \text{ osobine } \pi\}.$$

Pomoću skupova A i B mogu se formirati novi skupovi:

1) *Unija skupova* A i B, $A \cup B$, je skup koji sadrži sve elemente koji su bar u jednom od skupova A i B. Znači da je

$$A \cup B = \{a\colon a \in A \vee a \in B\}.$$

2) *Presek skupova* A i B, $A \cap B$, je skup koji sadrži sve elemenie koji su i iz skupa A i iz skupa B, tj.

$$A \cap B = \{a\colon a \in A \wedge a \in B\}.$$

3) *Komplement skupa* A u odnosu na skup $S \supset A$, $C_s A$, je skup elemenata iz S koji ne pripadaju A

$$C_s A = \{a\colon a \in S \wedge a \notin A\}.$$

4) *Razlika skupova* A i B, $A \setminus B$, je skup elemenata koji su iz A a nisu iz B

$$A \setminus B = \{a\colon a \in A \wedge a \notin B\}.$$

5) *Partitivni skup* skupa A, $\mathbf{P}A$, je skup svih podskupova skupa A.

6) *Dekartov proizvod skupova* A i B, $A \times B$, je skup uređenih parova elemenata, gde je prvi elemenat u paru iz A a drugi iz B

$$A \times B = \{(a, b)\colon a \in A,\ b \in B\}.$$

Skupovi A i B su *projekcije proizvoda* $A \times B$.

2° Kazaćemo da je x, $x \in X$, u *relaciji* ρ sa y, $y \in Y$, tada i samo tada ako je par $(x, y) \in \rho$, gde je $\rho \subset X \times Y$ i pisaćemo $x \rho y$.

Ako je $Y = X$, ρ se zove *binarna relacija* u skupu X.

Neke binarne relacije imaju sledeće osobine:

1) $a \rho a$ za $\forall a \in X$ (refleksivnost)

2) $a \rho b \Rightarrow b \rho a$ (simetričnost)

3) $a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b$ (antisimetričnost)

4) $a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$ (tranzitivnost)

Binarna relacija ρ je *relacija ekvivalencije* u skupu X ako ima osobine 1), 2) i 4). Binarna relacija ρ je *relacija poretka* u skupu X ako ima osobine 1), 3) i 4). Obeležava se obično sa $<$.

Kazaćemo da je skup X sa relacijom poretka *uređen.* Ako su svaka dva elementa iz X u relaciji poretka, skup X je *totalno uređen,* inače je delimično uređen ili samo uređen.

Neka je X deo uređenog skupa S i $a \in S$. a je *majoranta* od X ako je $x < a$ za $\forall x \in X$. Ako je još $a \in X$, a je *maksimum skupa X.* Slično se definiše *minoranta* i *minimum* od X. *Supremum skupa X* je minimum skupa majoranata od X, ukoliko postoji. Slično se definiše *infinum skupa X.*

3° Ako svakom elementu $x \in X$ odgovara na neki način elemenat $y \in Y$, kažemo da se skup X *preslikava* u skup Y i pišemo $X \xrightarrow{f} Y$ ili $x \to f(x)$, $f(x)$ je slika elementa x. Ako je $A \subset X$, sa $f(A)$ označavamo skup slika elemenata iz A. Za $B \subset Y$ sa $f^{-1}(B)$ označavamo skup svih $x \in X$ za koje je $f(x) \in B$. $f^{-1}(B)$ je *inverzna slika skupa B.* Ako je $f(X) = Y$ kažemo da se skup X preslikava *na* skup Y. Preslikavanje kod koga svakom $x \in X$ odgovara samo jedan elemenat $y \in Y$ zove se *jednoznačno.* Tada se kaže da je na X definisana *funkcija f* sa skupom vrednosti u Y. Ukoliko je, još, $\forall y \in Y$ slika samo jednog elementa $x \in X$ preslikavanje f je *jednoznačno obostrano* (biunivoko). Tada je f^{-1}, $(Y \xrightarrow{f^{-1}} X)$, *inverzna funkcija* funkcije f.

Dva skupa X i Y su *iste moći (ekvivalentni)* ako između njih postoji biunivoko preslikavanje. Tada pišemo $X \sim Y$.

Skup X je *konačan* ako je ekvivalentan skupu svih prirodnih brojeva n koji zadovoljavaju nejednakost $1 \leqslant n \leqslant N$, gde je N neki prirodni broj. Ako skup nije konačan kažemo da je *beskonačan.*

Skup koji ima istu moć kao i skup N prirodnih brojeva je *prebrojiv.* Za njega se kaže da ima moć χ_0 (alef-nula). Beskonačan skup koji nije ekvivalentan sa skupom prirodnih brojeva je *neprebrojiv.* Ako je neki skup ekvivalentan sa skupom tačaka odsečka [0, 1] kaže se da ima *moć kontinuuma.*

168. Dati su skupovi:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Naći skupove:

1° $A \cup B$, $A \cup C$, 4° $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$,

2° $A \cap B$, $A \cap C$, 5° $\mathbf{P}A$, $\mathbf{P}B$,

3° $\mathbf{C}_S A$, gde je $S = A \cup B$, 6° $A \times B$, $A \times C$.

169. Dati su skupovi

$A = \{a, b, 1\}$, $B = \{b, 1, c\}$, $C = \{a, 1\}$. Naći $(A \cup B) \cap C$ a zatim proveriti jednakost $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

170. Za proizvoljne skupove A, B i C važi jednakost $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Dokazati.

171. Dokazati tačnost iskaza

$A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$.

172. Da li iz $A \setminus B = C \Rightarrow A = B \cup C$?

173. Da li iz $A = B \cup C \Rightarrow A \setminus B = C$?

174. Da li su tačne jednakosti:

1° $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

2° $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$;

3° $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$? Ako nisu, uporediti leve i desne strane.

175. Dokazati da je

$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D) = A \cup (B \cap C \cap D)$.

176. Ako su A, B, C proizvoljni skupovi nekog podskupa, onda važi jednakost

$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Neka su A, B, C, D i X bilo koji skupovi. Dokazati tačnost sledećih iskaza:

177. 1° $A \subset X \Rightarrow X \setminus (X \setminus A) = A$.

2° $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$.

3° $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

178. 1° $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

2° $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.

179. Naći $\mathbf{P}(A)$ ako je $A = \{a, b, c\}$.

Dokazati tačnost sledećih iskaza:

180. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cap \mathbf{P}(B)$; $\mathbf{P}(A \cup B) \supset \mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B)$.

181. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = \mathbf{C}_A(A \cap B)$.

182. Neka su A, B, C i D proizvoljni neprazni skupovi. Dokazati da je:

1° $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

2° $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

183. Da li je 1° $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$

2° $(F \cup G) \times E = (F \times E) \cup (G \times E)$

za svaki skup E, F i G?

184. Za skupove A i B, skup $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ naziva se simetrična razlika skupova A i B i označava se $A \Delta B$. Dokazati sledeće jednakosti:

1° $A \Delta B = B \Delta A$; 3° $A \cap (B \Delta D) = (A \cap B) \Delta (A \cap D)$; 5° $A \Delta \varnothing = A$.

2° $A \Delta (B \Delta D) = (A \Delta B) \Delta D$; 4° $A \Delta A = \varnothing$;

185. Iz $A \Delta X = A \Rightarrow X = \varnothing$. Dokazati.

186. Neka je S skup svih pravih u ravni i $a \rho b$ oznaka da je a paralelna sa b. Dokazati da je ρ simetrična, tranzitivna i refleksivna relacija.

187. Neka je C skup svih celih brojeva i $a \rho b \Leftrightarrow a - b$ jednako celom umnošku od k (k fiksiran ceo broj). Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije. (Ova relacija se zove još i kongruencija, a obeležava $a \equiv b (\text{mod } c)$ i čita se a kongruentno sa b po modulu c).

188. R je skup realnih brojeva. $a \rho b \Leftrightarrow a \leqslant b$. Dokazati da je ρ relacija poretka.

189. $\mathbf{P} S$ je partitivan skup skupa S a $a \rho b (a, b \in \mathbf{P} S) \Leftrightarrow a \subset b$. Dokazati da je ρ relacija poretka.

190. S je skup uređenih parova (p, q), gde su p i q celi pozitivni brojevi i $(p, q) \rho (p', q') \Leftrightarrow pq' = qp'$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

191. Neka je S skup svih trouglova u ravni i $a \rho b (a, b \in S)$ ako a i b imaju jednake uglove, ρ je relacija ekvivalencije. Dokazati.

192. Z je skup svih kompleksnih brojeva i $a \rho b$ $(a, b \in Z)$ ako je $|a| < |b|$ i arg $\{a\}$ arg $\{b\}$. ρ je relacija poretka.

193. S je skup uglova sa fiksiranim temenom u tački M i $a \rho b$ ako je ugao a sadržan u uglu b. ρ je relacija poretka.

194. Skup negativnih realnih brojeva u skupu realnih brojeva nema maksimuma a supremum mu je nula.

195. Skup pozitivnih brojeva nema supremuma u skupu realnih brojeva.

196. Skup negativnih brojeva u skupu $R \setminus \{0\}$ nema supremuma. R je skup realnih brojeva.

197. Šta je supremum a šta infinum od X, $X \in \mathbf{P} S$? $\mathbf{P} S$ je uređen relacijom inkluzije $\subset$, a S proizvoljan skup.

198. Naći sve funkcije koje preslikavaju skup A u skup B ako je

1° $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$;

2° $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a\}$.

199. Naći bar jednu funkciju koja skup realnih brojeva preslikava 1° na skup nenegativnih brojeva, 2° na skup prirodnih brojeva.

200. Ako su A, $B \subset X$, gde je X definicioni skup funkcije f dokazati da je

1° $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

2° $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

201. Neka su A, $B \subset Y$, gde je Y skup vrednosti funkcije f definisane na X. Dokazati da je

1° $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ ako je $A \subset B$; 3° $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

2° $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; 4° $f^{-1}(\mathbf{C}_Y A) = \mathbf{C}_X f^{-1}(A)$.

202. Ako je $X \xrightarrow{f} Y$ i $A \subset X$, $B \subset Y$ tada je 1° $f[f^{-1}(B)] = B \cap f(X)$;

2° $f^{-1}[f(A)] \supset A$; 3° $f^{-1}[f(A)] = A$

ako su f i f^{-1} funkcije.

203. Naći biunivoko preslikavanje koje skup svih parnih brojeva preslikava na skup N prirodnih brojeva.

204. Naći biunivoko preslikavanje segmenta [0, 2] na segment [1, 3].

205. Naći funkciju koja vrši biunivoko preslikavanje intervala (0, 1) na skup realnih brojeva R.

206. Naći biunivoko preslikavanje segmenta [0, 1] na interval (0, 1).

207. Dokazati da je skup parnih brojeva prebrojiv.

208. Dokazati da je skup tačaka na odsečku [0, 1] iste moći kao skup tačaka na odsečku [0, 101].

209. Dokazati da je skup racionalnih brojeva prebrojiv.

210. Kolika je moć skupa svih trouglova u ravni čija temena imaju racionalne koordinate?

211. Dokazati da je skup svih krugova u ravni čiji su poluprečnici racionalni brojevi i čiji su centri sa racionalnim koordinatama prebrojivi.

212. Neka je A skup svih tačaka realne prave kod koga je rastojanje ma koje dve tačke veće od 1. Dokazati da je A konačan ili prebrojiv skup.

213. Kolika je moć skupa svih segmenata na realnoj pravoj?

214. Kolika je moć skupa svih tačaka realne prave?

215. Skup $N \times N$ je prebrojiv gde je N skup prirodnih brojeva.

216. Skup tačaka ravni sa racionalnim koordinatama je prebrojiv.

217. Dokazati da skup svih tačaka ravni xOy ima moć kontinuuma.

218. Dokazati da je skup svih konačnih podskupova prebrojivog skupa prebrojiv skup.

§ 3. Algebarske strukture

1° G r u p o i d

Neka je G dati skup. Ako svakom uređenom paru (a, b) elemenata iz G odgovara, nekim postupkom f, elemenat c, takođe iz G, kažemo da je u G definisana jedna algebarska operacija f i pišemo $afb = c$. Operacija f se najčešće označava sa $*$, $+$, $\cdot$ itd. $(a * b = c,\ a + b = c,\ a \cdot b = c)$.

Skup G zajedno sa operacijom $*$ koja je u njemu definisana, par $(G, *)$, naziva se *grupoid.*

2° H o m o m o r f i z a m, a u t o m o r f i z a m, e n d o m o r f i z a m, i z o m o r f i z a m

Jednoznačno preslikavanje h grupoida $(G, *)$ na grupoid $(G', \cdot)$ zove se *homomorfizam* ako za svaki a, $b \in G$ važi

$$h(a * b) = h(a) \cdot h(b) \qquad (h(a),\ h(b) \in G').$$

Ako postoji bar jedan homomorfizam od $(G, *)$ na $(G', \cdot)$ kaže se da je grupoid $(G', \cdot)$