

Ime i prezime _____

Smjer _____

Upotreba kalkulatora, mobitela, tablica je zabranjena.

Svako dodavanje, dogovaranje i prepisivanje kazniti će se prema pravilima fakulteta.

dio A

1. **(15b)** Neka je $\mathcal{D} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ i neka su zadani predikati $P(x, y, z) \equiv x + y > z$, $Q(x, y, z) \equiv z|(x + y)$, $R(x, y) \equiv x = y^2$, $S(x) \equiv x$ je neparan. Za koliko je trojaca $(x, y, z) \in \mathcal{D}^3$ formula algebre predikata

$$(P(2, y, x) \wedge Q(y, 1, z)) \Rightarrow (\neg R(x, 2) \vee S(y))$$

istinita?

2. **(10b)** Zadana je logička operacija $*$ sljedećom tablicom istinitosti

A	B	$A * B$
\top	\top	\perp
\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top
\perp	\perp	\perp

Dokažite da je skup $\{*, \neg\}$ sustav izvodnica algebre sudova. Detaljno obrazložite!

3. **(10b)** Odredite konjunktivnu normalnu formu Booleove funkcije

$$F(x, y, z, w) = (y + z + w)(x + z + w)(x + y + w)(x + y + z).$$

Detaljno obrazložite postupak.

4. **(15b)** Dokažite da su nula i jedinica u Booleovoj algebri jedinstvene. Što su Booleove funkcije n varijabla, koliko ih ima različitih (dokažite) i kakve operacije s njima možemo definirati?

dio B

1. **(10b)** Odredite najmanje pozitivne cijele brojeve x i y koji zadovoljavaju kongruencije

$$7^{99} \equiv x \pmod{15}, \quad 9^{101} \equiv y \pmod{17}.$$

2. **(15b)** Koliko se različitih peteroznamenastih brojeva može napisati koristeći brojeve 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7 kao znamenke?

3. **(10b)** Odredite opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} + 1 + (-1)^n, \quad n \geq 3.$$

4. **(15b)** Kako glasi formula uključivanja i isključivanja (Sylvesterova formula)? Citiraj teorem i dokaži samo za $n = 2$.

Napomena: Za prolaznu ocjenu potrebno je imati barem **50 bodova** od čega barem po **20 bodova** iz svakog od dijelova A i B.