Binarne relacije

1. Binarna relacija. Relacija ekvivalencije i razredi (klase) ekvivalencije. Svojstva razreda ekvivalencije. (Ilustrirati primjerima).

Definicija: **Binarna relacija na skupu X** je bilo koji neprazan podskup $\rho \subseteq X \times X$. Kažemo da su x i y u relaciji ρ ako je $(x, y) \in \rho$. U tom slučaju pišemo $x \rho y$.

Definicija: Za binarnu relaciju ρ na X kažemo da je:

a) **refleksivna** ako vrijedi $(\forall x \in X) \ \ x \rho x$;

b) **simetrična** ako vrijedi $(\forall x, y \in X) (x \rho y \Rightarrow y \rho x)$

c) **antisimetrična** ako vrijedi $(\forall x, y \in X) (x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y)$

d) **tranzitivna** ako vrijedi $(\forall x, y, z \in X) (x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z)$

Definicija: Za binarnu relaciju ρ na skupu X kažemo da je **relacija ekvivalencije** ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Napomena: U literaturi se često relaciju ekvivalencije označava i sa ~ umjesto ρ, pa se piše $x \sim y$.

Primjeri relacija ekvivalencije:

- Na skupu X svih trokuta u ravnini možemo definirati binarnu relaciju sličnosti trokuta $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (jednaki kutevi)
- Na skupu X svih trokuta u ravnini možemo definirati binarnu relaciju sukladnosti (kongruentnosti) trokuta $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (jednake stranice
- ρ = "biti paralelan sa" na skupu X svih pravaca u ravnini
- ρ = "biti koncentričan sa" na skupu svih kružnica zadanih u ravnini R^2

Definicija: Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu X. **Razred (klasa) ekvivalencije** [x] elementa $x \in X$ je skup svih elemenata iz X koji su u relaciji ρ s x. Dakle,

$$[x] = \{ y \in X : \ x \rho y \} \subseteq X \quad .$$

Napomena:
- $x \in [x]$ jer je $x \rho x$
- Bilo koji $y \in [x]$ se zove **reprezentant** razreda (klase) [x]

Teorem: Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu X. Onda za sve $x, y \in X$ vrijedi:
- ili $[x] = [y]$ ili $[x] \cap [y] = \emptyset$
- $x \rho y$ postoji ako i samo ako je $[x] = [y]$

2. Particija skupa i pridružena relacija ekvivalencije na tom skupu (citirati teorem)

Definicija: Kažemo da obitelj podskupova $\{A_i\}_{i \in I}$ od X čini **particiju (rastav)** skupa X ako vrijedi:

a) $X = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$,   tj. obitelj skupova $\{A_i\}_{i \in I}$ je **pokrivač** od X

b) $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve $i, j \in I$, $i \neq j$, tj. skupovi iz $\{A_i\}_{i \in I}$ su međusobno disjunktni.

Ponekad se i sam prikaz skupa $X = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ kao disjunktne unije podskupova A_i zove particijom od X.

Teorem: Neka je $\{A_i\}_{i \in I}$ particija skupa X. Definirajmo relaciju ρ na skupu X tako da je $x \rho y$ onda i samo onda ako x i y pripadaju istom skupu iz particije. Onda je ρ relacija ekvivalencije na skupu X, a pripadne klase ekvivalencije se podudaraju sa A_i.

3. Što je kvocjentni skup nekog skupa po zadanoj relaciji ekvivalencije na tom skupu? Ilustriraj primjerom kvocjentnog skupa od Z po relaciji ≡ (mod n).

Definicija: Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu X. Onda skup svih klasa ekvivalencije nazivamo **kvocijentni skup** od X s obzirom na relaciju ρ i označavamo:

$$X/_{\rho} = \{ [x] \}_{x \in X}$$

Primjer: Kvocijentni skup od Z po relaciji ≡ (mod n) jednak je slijedećem skupu:

$$Z/_{\equiv} = \{ [0], [1], \dots, [n-1] \}$$

Taj skup se naziva **kvocijentni skup ostataka po modulu** n, ili skup ostataka pri dijeljenju sa n. Razredi ekvivalencije su:

$$[0] = \{ q\,n : q \in Z \}$$

$$[1] = \{ q\,n + 1 : q \in Z \}$$

$$\vdots$$

$$[n\text{-}1] = \{ q\,n + (n\text{-}1) : q \in Z \}$$

Dakle, razred [r] sadrži skup svih onih cijelih brojeva koji nakon dijeljenja sa n daju ostatak r.

4. Što je to relacija parcijalnog poretka, a što relacija potpunog poretka. Primjerima (2^X, $\subseteq$) i (N, |) pokaži da parcijalno poredani skup ne mora biti i potpuno poredan.

Definicija: Za binarnu relaciju ρ na skupu X kažemo da **je relacija parcijalnog (djelomičnognog) poretka** ako je refleksivna, **antisimetrična** i tranzitivna.

Definicija: Za parcijalno poredan skup (X, $\leq$) kažemo da je **potpuno (totalno) poredan** ako za svaka dva elementa vrijedi da su usporediva, tj. za svaki $x, y \in X$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$.

Primjer 1: Skup (2^X, $\subseteq$) je parcijalno poredan skup. Ako partitivni skup 2^X ima barem dva elementa, onda skup (2^X, $\subseteq$) nije potpuno poredan skup, jer disjunktni podskupovi A i B iz 2^X nisu usporedivi, tj. nisu u relaciji $A \subseteq B$ ili $B \subseteq A$.

Primjer 2: Skup (N, |) je parcijalno poredan skup, ali on nije potpuno poredan skup, tj. za svaki $a, b \in N$ ne vrijedi da $a \mid b$ ili $b \mid a$.

5. Objasni pojmove donje (gornje) međe, odozdol (odozgor) omeđenog podskupa, infimuma (supremuma), minimuma (maksimuma) i ilustriraj primjerima u $(\mathbb{R}, \leq)$, $(2^X, \subseteq)$ i $(\mathbb{N}, |)$.

Definicija: Neka je $(X, \leq)$ parcijalno poredan skup i $S \subseteq X$.

- Kažemo da je $m \in X$ **donja međa** skupa S, ako je $(\forall s \in S)\ (m \leq s)$
- Kažemo da je $M \in X$ **gornja međa** skupa S, ako je $(\forall s \in S)\ (s \leq M)$
- Za skup S kažemo da je **odozdol omeđen** ako ima barem jednu donju među
- Za skup S kažemo da je **odozgor omeđen** ako ima barem jednu gornju među
- Kažemo da je $m^* \in X$ (ako postoji) **infimum skupa** skupa S, i označavamo sa **inf S**, ako vrijedi: a) $m^* = \inf S$ je donja međa od S
  b) za svaku donju među $m \in X$ vrijedi $m \leq \inf S$
- Kažemo da je $M^* \in X$ (ako postoji) **supremum skupa** skupa S, i označavamo sa **sup S**, ako vrijedi: a) $M^* = \sup S$ je gornja međa od S
  b) za svaku gornju među $M \in X$ vrijedi $\sup S \leq M$
- Ako vrijedi da je $\inf S \in S$, onda se $\inf S$ zove **minimum skupa** S i označava **min S** .
- Ako vrijedi da je $\sup S \in S$, onda se $\sup S$ zove **maksimum skupa** S i označava **max S** .

Primjer: Za skup $(\mathbb{R}, \leq)$ i $S = (0, 1)$ vrijedi: $\inf S = 0$, $\min S$ ne postoji
$\sup S = 1$, $\max S$ ne postoji

Za skup $S = [0, 1)$ je: $\inf S = 0$, $\min S = 0$

Primjer: Za $A, B \in 2^X$ je: $\inf\{A, B\} = A \cap B$
$\sup\{A, B\} = A \cup B$.

Primjer: Za skup $(\mathbb{N}, |)$ i $S = \{2, 4, 6\}$ vrijedi:

$\inf S = \text{Nzm}\{2, 4, 6\}$, $\min S = 2$

$\sup S = \text{nzv}\{2, 4, 6\} = 12$, $\max S$ ne postoji

6. Što je to Kartezijev produkt parcijalno poredanih skupova? Primjerom pokaži da Kartezijev produkt totalno poredanih skupova ne mora biti totalno poredan. Što je to leksikografski poredak?

Definicija: Neka su $(X_1, \leq_1)$ i $(X_2, \leq_2)$ dva parcijalno poredana skupa**. Kartezijev produkt parcijalno poredanih skupova** definiramo kao $(X_1 \times X_2, \leq)$. Pritom za elemente $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in X_1 \times X_2$ kažemo da je $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ ako je $a_1 \leq_1 b_1$ i $a_2 \leq_2 b_2$.

Napomena: Slično se definira Kartezijev produkt više parcijalno poredanih skupova.

Primjer: Skup svih točaka T(x, y) u ravnini $R \times R = R^2$ koje su $\geq (0, 0)$ jednak je prvom kvadrantu: $x \geq 0, y \geq 0$.

Primjer: Primjerom treba pokazati da Kartezijev produkt totalno poredanih skupova ne mora biti totalno poredan. Npr. neka je $X = \{0, 1\}$, $0 < 1$, i $Y = \{d, g\}$, $d < g$. Elementi $(0, g)$ i $(1, d)$ nisu usporedivi u $X \times Y$.

Definicija: Neka su $(X_1, \leq_1)$ i $(X_2, \leq_2)$ dva parcijalno poredana skupa. Na Kartezijevom produktu $X_1 \times X_2$ definiramo tzv. relaciju **leksikografskog poretka $\leq_L$** . Pritom za elemente $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in X_1 \times X_2$ kažemo da je $(a_1, a_2) \leq_L (b_1, b_2)$, ako je ispunjen jedan od dva slijedeća uvjeta:

1) $a_1 < b$ (a_2 i b_2 bilo kakvi)

2) a1 = b1 i $a_2 \leq_2 b_2$

$(X_1 \times X_2, \leq_L)$ je parcijalno poredan skup.

Napomena: Neka su $(X_1, \leq_1)$ i $(X_2, \leq_2)$ dva totalno poredana skupa, onda je i $(X_1 \times X_2, \leq_L)$ totalno poredan skup.

Primjer: Neka je skup svih točaka T(x, y) u ravnini R^2 snabdjeven leksikografskim poretkom. Skup svih točaka koje su $\geq (0, 0)$ jednak je desnoj poluravnini $x \geq 0$, bez negativnog dijela y osi.

7. Jednostavnim primjerima objasniti što je to usmjereni graf.

Neka je X konačan skup i ρ relacija na X. Tada relaciju ρ možemo predočiti dijagramom kojeg nazivamo **usmjereni graf**.

- Svaki element skupa reprezentira (označcena) točka koju nazivamo **čvor** ili **vrh**.
- Ako je $a \rho b$, tada dva čvora označena sa a i b povežemo strelicom od a do b. Tu strelicu nazivamo **usmjereni brid**.
- Ako je $a \rho b$ i $b \rho a$ onda imamo dva usmjerena brida između a i b, pa, zbog jednostavnosti, a i b povezujemo jednom dvostranom strelicom.
- Ako je $a \rho a$, usmjereni brid između a i a se zove **petlja**.

Primjer: Neka na skupu $X = \{1, 2, 3\}$ vrijedi relacija $x < y$. Tada usmjereni graf izgleda:

Primjer: Neka na skupu $X = \{1, 2, 3\}$ vrijedi relacija $x \mid y$. Tada usmjereni graf izgleda:

8. Jednostavnim primjerima objasni što je to Hasseov dijagram relacije poretka na nekom skupu.

Neka je X konačan skup i ρ (≤) relacija parcijalnog poretka na X. Tada relaciju ≤ možemo predočiti pomoću **Hasseovog dijagama**.

- Svaki element skupa reprezentira točka u ravnini koju nazivamo čvor ili vrh.
- Ispuštamo petlje, jer je relacija refleksivna.
- Ako je $a < b$ i između njih ne postoji niti jedan $c \in X$, tj. iz $a \le c \le b$ slijedi $a = c$ ili $b = c$, onda čvor koji pripada b satavljamo iznad čvora koji pripada a i spajamo ih crtom.
- Usmjereni brid koji je imliciran tranzitivnošu ne crtamo.

Primjer: U ovom primjeru $X \subseteq N$, a relacija poretka ≤ je "biti djelitelj od", tj. $x \le y$ znači $x \mid y$.

a) $X = \{ 1, 2, 4, 8 \}$

b) $X = \{ 2, 3, 5, 7, 10, 12, 24 \}$

c) $X = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 \}$ - djelitelji broja 30

9. Kad kažemo da je neki parcijalno poredan skup izomorfan nekom drugom parcijalno poredanom skupu?

Definicija: Kažemo da je parcijalno poredan skup $(X, \leq_1)$ izomorfan parcijalno poredanom skupu $(Y, \leq_2)$ ako postoji bijekcija $f : X \to Y$ koja čuva poredak tako da vrijedi

$$(\forall x, y \in X) (\quad x \leq_1 y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq_2 f(y) \quad) \quad .$$

10. Što je to mreža, a što potpuna mreža? Kako definiramo operacije zbrajanja i množenja u mreži i koja su im svojstva? Što je to distributivna, a što komplementirana mreža? (Sve ilustrirati jednostavnim primjerom)

Definicija: Parcijalno poredan skup $(X, \leq)$ zove se **mreža** ako za svaki par elemenata $a, b \in X$ postoji $\inf\{a, b\}$ i $\sup\{a, b\}$.

Primjer: Partitivni skup $(2^X, \subseteq)$ je mreža, a pripadna operacija zbrajanja je unija, a operacija produkta presjek.

Definicija: Parcijalno poredan skup $(X, \leq)$ naziva se **potpuna mreža** ako svaki njegov podskup (konačan ili beskonačan) ima infimum i supremum. Svaka potpuna mreža onda ima $\inf X$ koji se zove nula i $\sup X$ koji se zove jedinica.

Primjer: Mreža D_{30} svih djelitelja broja 30, s relacijom djeljivosti kao relacijom poretka, je potpuna mreža u kojoj je nula 1, a jedinica 30.

Operacije **zbrajanja** i **množenja** u mreži definiramo pomoću izraza:

$$a + b = \sup\{a, b\} \quad \text{i} \quad a \cdot b = \inf\{a, b\}$$

Teorem: Za operacije $+$ i $\cdot$ na mreži $(X, \leq)$ vrijede svojstva:

1. Idempotentnost zbrajanja i množenja: $a + a = a$, $a \cdot a = a$
2. Asocijativnost: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Komutativnost: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
4. Apsortivnost ili svojstvo upijanja: $a \cdot (a + c) = a$, $a + (a \cdot c) = a$
5. $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$

Definicija: Za potpunu mrežu $(X, \leq)$ kažemo da je **distributivna mreža** ako u njoj vrijede zakoni distribucije:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{i} \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

Primjer: Mreža D_{12} svih djelitelja broja 12, s relacijom djeljivosti kao relacijom poretka, je potpuna mreža u kojoj je nula 1, a jedinica 12. To je distributivna mreža.

Definicija: Za potpunu mrežu $(X, \leq)$ kažemo da je **komplementirana mreža** ako svaki $a \in X$ ima komplement $\bar{a}$, odnosno ako vrijedi:

$$a + \bar{a} = 1 \quad \text{i} \quad a \cdot \bar{a} = 0$$

Primjeri:

- Mreža D_{12} nije komplementirana, npr. $a = 2$ nema komplement.
- Distributivna i komplementirana potpuna mreža je Booleova algebra $(X, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1)$

11. Kako na Booleovoj algebri definiramo relaciju $\leq$ i koja su joj svojstva? Što je atom?

Definicija: Neka je $(B, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1)$ Booleova algebra. Za $a, b \in B$ kažemo da je $a \leq b$ ako je $a \cdot b = a$.

Propozicija: Neka su a, b, c, d bilo koji elementi Booleove algebre B. Relacija $\leq$ ima slijedeća svojstva:

1) $(B, \leq)$ je parcijalno poredan skup
2) $a \leq b$ onda i samo onda ako je $a + b = b$
3) ako je $a \leq b$ i $c \leq d$, onda je $a\,c \leq b\,d$
4) $a\,b = \inf\{a, b\}$, $a + b = \sup\{a, b\}$
5) $a \leq b$ onda i samo onda ako je $\bar{b} \leq \bar{a}$

Definicija: Element $a \neq 0$ u Booleovoj algebri B naziva se **atom** Booleove algebre ako iz $x \leq a$ slijedi $x = 0$ ili $x = a$. Drugim riječima, atomi su oni elementi koji pokrivaju nulu.

Primjer: U algebri $2^{\{a, b, c\}}$ atomi su jednočlani podskupovi $\{a\}$, $\{b\}$ i $\{c\}$. Za $C \subseteq \{a\}$ vrijedi da je $C = \emptyset$ ili $C = \{a\}$.

Napomena: Svaka konačna Booleova algebra ima neprazan skup atoma.