Predavanje 3: Mehanički valovi. Superpozicija valova.

1. Što je val? Navedite nekoliko podjela valova? Što su valna fronta i valna zraka? Napišite jednadžbu transverzalnog vala na žici i njeno rješenje. Što je fazna brzina vala? Koliko iznose brzina i akceleracija pojedine čestice sredstva? (obavezno)

Val - poremećaj sredstva koji se određenom brzinom širi kroz prostor.
Imamo više vrsta valova:
- Mehanički valovi (ponašaju se prema Newtonovim zakonima i mogu postojati samo unutar nekog sredstva)
- Elektromagnetski valovi (ne zahtjevaju medij za prenošenje, putuju kroz vakuum brzinom svjetlosti)
- Valovi materije (valovi pridruženi elektronima, protonima atomima, molekulama).

Podjela valova

1. podjela: - transverzalni valovi (čestice sredstva titraju okomito na smjer širenja vala)
- longitudinalni valovi (čestice sredstva titraju u smjeru širenja vala)

2. podjela: - Putujući valovi (gibaju se u određenom smjeru i pri tom se energija prenosi sa čestice na česticu)
- stojni valovi (neke čestice titraju, a neke stalno miruju; valna slika se ne mijenja s vremenom; energija se ne širi prostorom)

3. podjela: - linearni valovi (npr. val na žici)
- površinski valovi (npr. val na vodi)
- prostorni valovi (npr. zvučni val)

Valna fronta je geometrijsko mjesto točaka do kojih dopire titranje u određenom trenutku.
Valne zrake su pravci po kojima se titraji šire od čestice do čestice. Zrake su okomite na valne fronte.

Jednadžbu transverzalnog vala na žici glasi:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$ gdje je s elongacija, v brzina vala.

Rješenje ove jednadžbe je izraz za elongaciju čestice na mjestu x u trenutku t:

$$s(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_o)$$ gdje je $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ valni broj.

Fazna brzina vala je brzina kojom se širi faza vala. Ona je jednaka umnošku valne duljine λ i frekvencije f: $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$

Kada val prelazi iz jednog iz jednog sredstva u drugo ili se prostire kroz nehomogeno sredstvo, brzina i valna duljina mu se mijenjaju, a frekvencija ostaje ista.

Brzina i akceleracija pojedine čestice sredstva računaju se deriviranjem elongacije po vremenu, pomoću relacija:

$$u(x,t) = \frac{\partial s}{\partial t} = A\omega\cos(\omega t - kx + \varphi_o)$$ (brzina čestice)

$$a(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -A\omega^2\sin(\omega t - kx + \varphi_o)$$ (akceleracija čestice)

2. **Kako glasi opći matematički zapis vala koji se širi nadesno, odnosno na lijevo?**

Predpostavimo da u izvoru vala, u kojem odaberemo ishodište koordinatnog sustava, čestica harmonički titra po zakonu

$$s(x=0,t) = A\sin(\omega t) = A\sin\frac{2\pi}{T}t$$

gdje je A amplituda titranja, ω kružna frekvencija, a T period titranja. Titranje će se širiti iz ishodišta i do neke će točke P, udaljene za x od ishodišta, val doći nakon vremena

$t' = \frac{x}{v}$ gdje je v brzina vala.

Što je točka dalje od izvora vala, val će kasnije stići te će razlika u fazi izmedu njezina titranja i titranja čestice biti veća. Kad val dođe do čestice na mjestu x, ona će početi, dakle, harmonički titrati istom frekvencijum ω, ali s razlikom u fazi u odnosu naprema titranju čestice na izvoru.

$s(x,t) = A\sin\omega(t - t') = A\sin\omega(t - \frac{x}{v})$ (predpostavivši da se pri širenju ne mijenja amplituda)

Koristeći se relacijom: ω=2πf=2π/T i v=f*λ, dobijamo:

$$s(x,t) = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

Uvođenjem valnog broja $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$ valna funkcija poprima oblik:

$$s(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

Ove jednadžbe opisuju ravni val koji se širi slijeva na desno, tj. U pozitivnom smjeru osi x. Ako val putuje s desna nalijevo, u negativnom smjeru osi x, tada se s porastom vremena koordinata x smjanjuje.

$$s(x,t) = A\sin\omega(t + \frac{x}{v}) = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) = A\sin(\omega t + kx)$$

3. **Objasnite izraze za brzine širenja:**
   a) transverzalnih poremećaja na zategnutom elastičnom užetu (žici),
   b) longitudinalnih poremećaja u štapu,
   c) longitudinalnih poremećaja u plinu,
   d) longitudinalnih poremećaja u tekućini.

- Brzina širenja vala (fazna brzina) bilo kojeg mehaničkog vala, transverzalnog ili longitudinalnog, ovisi o elastičnosti (za pohraniti potencijalnu energiju) i tromosti sredine (za pohraniti kinetičku energiju) u kojoj se val širi.
- Dakle, možemo uopčiti izraz za brzinu transverzalnog vala na napetoj žici, pišući:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elasticna svojstva sredine}}{\text{tromost sredine}}}$$

- Ako je sredstvo zrak i val je longitudinalan (val zvuka), možemo pretpostaviti da je tromost sredine (što odgovara veličini μ kod valova na žici) volumna gustoća zraka ρ.
- Kako zvuk prolazi kroz zrak, potencijalna energija je pridružena periodičkim kompresijama i ekspanzijama malih volumena zraka.
- Razumno je dakle pretpostaviti da će volumni modul elastičnosti zraka,

$\boxed{B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}}$, igrati ulogu elastičnog svojstva sredine u gornjem izrazu.

$$v=\sqrt{\frac{\text{elasticna svojstva sredine}}{\text{tromost sredine}}}$$

- Sličnim razmatranjem kao kod žice, polazeći od Newtonovog zakona gibanja, dolazi se do valne jednadžbe oblika $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$ iz koje se onda zaključuje za brzine širenja vala u sredstvu:

Transverzalni valovi na žici $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$	Longitudinalni valovi u tekućinama $v=\sqrt{\frac{B}{\rho}}$
Longitudinalni valovi u čvrstom tijelu $v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$	Longitudinalni valovi u plinovima $v=\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}=\sqrt{\kappa\frac{RT}{M}}$

$F[N]$ – napetost žice
$\mu\left[\frac{kg}{m}\right]$ - linijska gustoca

$E\left[\frac{N}{m^2}\right]$ – Youngov modul elasticnos ti
$\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ - volumna gustoca (štapa)

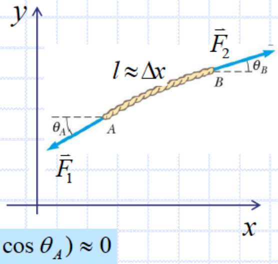
$B\left[\frac{N}{m^2}\right]=-\frac{\Delta p}{\Delta V/V}$ – volumni modul elasticnosti
ρ - gustoca tekucine

$B=\kappa p\left[\frac{N}{m^2}\right]$ – volumni modul elasticnos ti plina

4. **Izvedite i objasnite jednadžbu transverzalnog vala na žici. Navedite i objasnite njeno rješenje.**

(matematički nismo toliko obrazovani da bi ovo mogli u potpunosti shvatiti, ali na moje pitanje profesoru dali trebamo ovo učiti odgovorio je da moramo ☹)

- Ako zategnuta žica (u smjeru osi *x*) ne titra, sile koje djeluju na jedan i drugi kraj se poništavaju.
- Promatrajmo element žice duljine *l* napete silom *F (napetost žice).*
- **Pretpostavimo da je amplituda vala tako mala da se element žice moze samo malo otkloniti od osi x, pri prolasku vala.**
- Masa djelića žice duljine $l\approx\Delta x$:
  $\Delta m=\mu\Delta x$, $\mu=m/L$ – linijska gustoća žice, *m*- masa žice, *L* - duljina žice



- Krećemo od II Newtonovog zakona, zanima nas jednadžba gibnja djelića žice Δm, $\Delta m\vec{a}=\vec{F}_2-\vec{F}_1$:
- Sila u smjeru osi *x* (za male amplitude vala):

$$F_x=F_{2x}-F_{1x}=F\cos\theta_B-F\cos\theta_A=F(\cos\theta_B-\cos\theta_A)\approx 0$$

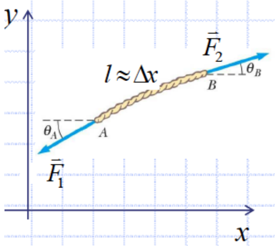
- Sila u smjeru osi *y* ($\sin\alpha\approx tg\alpha;\alpha<<1$):

$$F_y=F_{2y}-F_{1y}=F(\sin\theta_B-\sin\theta_A)\approx F(tg\theta_B-tg\theta_A)=F(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_B}-\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_A})$$

120, Fizika 2, Predavanje 3 5

- Jednadžba gibnja djelića žice $\Delta m=\mu\Delta x$, duž y-osi, je dakle:

$$F_y=F(\sin\theta_B-\sin\theta_A)\approx F(tg\theta_B-tg\theta_A)=F(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_B}-\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_A})$$



$$\Delta m a_y=F_y$$

$$\Delta m a_y=\mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=F_y=F(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_B}-\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_A})$$

$$\frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_B}-\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_A})}{\Delta x}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

Valna Jednadžba $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \rightarrow v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ Fazna brzina

120, Fizika 2, Predavanje 3 6

5. **Nađite izraze za snagu i intenzitet harmničkog vala.**

Dok se val širi kroz sredstvo on prenosi energiju u smjeru svog širenja. Ukupna enerija čestice koja harmonički titra iznosi:
$E=E_k+E_p=1/2*k*A^2=1/2*m*\omega^2*A^2$
Nakon nekog vremena Δt val prijeđe udaljenost vΔt i ustitra sve čestice u promatranom volumenu ΔV=SvΔt. Ukupna energija u elementu volumena ΔV jednaka je zbroju energija titranja svih čestica

$$\Delta E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 n\Delta V = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 \rho\Delta V$$
gdje je n broj čestica u jedinici volumena,a nm=ρ gustoća sredstva.

Gustoća energije, tj. Energija po jedinici volumena oznagava se:
$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho(2\pi f)^2 A^2 \rightarrow \left[\frac{J}{m^3}\right]$$

Budući da je energija prenesena valnim gibanjem kroz površinu S i predana česticama sredstva u elementu volumena ΔV jednaka wΔV=SwvΔt, energija u jedinici vremena (snaga) prenesena kroz površinu S jednaka je:
$$P = \frac{wSv\Delta t}{\Delta t} = wSv$$ odnosno za harmonički ravni val:

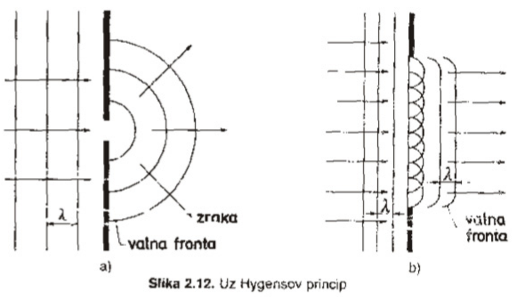
$$P = \frac{1}{2}\rho(2\pi f)^2 A^2 Sv$$

Energija koju val prenese u jedinici vremena kroz jedinicu površine okomitu na smjer širenja vala, tj. gustoća energijskog toka (ili intezitet vala) iznosi:
$$I = \frac{\Delta E}{S\Delta t} = \frac{P}{S} = wv$$ što za harmoniči val iznosi:

$$I = \frac{1}{2}\rho(2\pi f)^2 A^2 v \rightarrow \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

6. **Kako glasi Huygensov princip?**

Huygensov princip širenja valova glasi: svaka točka valne fronte izvor je novog kuglastog "elementarnog" vala; anvelopa svih elementarnih valova je nova valna fronta.
Ako je pukotina mnogo šira od valne duljine, tada iza dijela valne fronte koja dođe na pukotinu nastaje mnogo elementarnih valova čijom superpozicijom iza pukotine nastaju paralelne valne fronte.
Ako je pukotina reda veličine valne duljine, valovi se ogibaju iza pukotine, ulaze u prostor «geometrijske sjene», to više što je pukotina manja. U prostoru iza pukotine postoje mjesta gdje je titranje maksimalno (tzv.maksimumi ogiba) i mjesta gdje titranja nema (minimumi ogiba). Ogib (difrakcija) tipična je valna pojava i dokaz valne prirode neke pojave.



Slika 2.12. Uz Hygensov princip

7. Što je to polarizacija vala.

Uravnini okomitoj na pravac širenja transverzalnog vala ima beskonačno mnogo pravaca duž kojih djelići sredstva mogui zvoditi titranje.
Longitudinalni val se bitno razlikuje od transverzalnog po tome što djelići sredstva mogu titrati samo u jednom smjeru duž smjera širenja vala.
Stoga ima smisla govoriti samo o polarizaciji transverzalnih valova.
Vektor elongacije transverzalnog vala može se prikazati kao superpozicija dvaju međusobno okomitih vektora, duž smjerova definiranih s jediničnim vektorima, koji su međusobno okomiti i okomiti na os x-smjer širenja vala.

$$\boxed{\vec{u}(x,t) = (A_1\vec{n}_1 + A_2\vec{n}_2)\sin(\omega t - kx)}$$

Val je linearno polariziran ako se titranje odvija uvijek duž istog pravca.
Val je cirkularno (kružno) polariziran ako se titranje odvija čas duž jednog čas duž drugog pravca opisujući kružnicu u ravnini okomitoj na smjer širenja vala.
Kružno polariziran val semože prikazati superpozicijom dvaju linearno polariziranih jednostavnih harmoničkih valova jednakih amplituda i faza, koji titraju duž dva međusobno okomita pravca a pomaknuti su u fazi za π/2.

$$\vec{u}(x,t) = A\sin(\omega t - kx)\vec{n}_1 + A\sin(\omega t - kx - \frac{\pi}{2})\vec{n}_2$$

8. Objasnite Fourierovu analizu valnog gibanja.

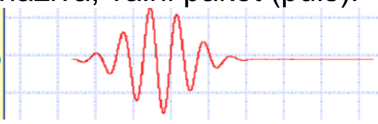
Francuski fizičar Joseph Fourier je našao lijepu matematičku tehniku kako se bilo koji valni oblik dade izraziti sumom harmoničkih valova.
Svaka periodična funkcija vremena f(t) s periodom T može prikazati kao zbroj harmoničkih titranja frekvencije f, 2f, 3f, ..., nf.
Valno gibanje je također periodična funkcija u vremenu i prostoru te se i na periodičnu funkciju f(t-x/v) može primijeniti Fourierova analiza:

$$f(x \mp \frac{v}{t}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega(x \mp \frac{v}{t}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega(x \mp \frac{v}{t})$$

U praksi se amplitude (*an* i*bn*) članova višeg reda obično sve više smanjuju tako da se Fourierov red često sastoji od samo nekoliko prvih članova.
Rastavljanje nesinusne periodične funkcije u njezine harmoničke komponente zove se i spektralna analiza.

Svako valno gibanje se može predočiti odgovarajućom superpozicijom jednostavnih harmoničkih valova. Ako umjesto zbroja po diskretnom frekventnom spektru integriramo harmoničke valove po svim frekvencijama u području od ω1do ω2, tj. po kontinuiranom području frekvencija, dobit ćemo grupu valova ili, kako se često naziva, valni paket (puls):

$$u(x,t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} A(\omega)\sin\omega(t - \frac{x}{v})d\omega$$



Dobiveno je valno gibanje ograničeno u intervalu od Δxi kako vrijeme raste, širi se određenom brzinom kroz prostor. Što je pritom interval frekvencije Δω veći, to je širina valnog paketa manja.