

# 1 Općenito o iterativnim metodama za rješavanje nelinearnih jednažbi

Računanje nultočka nelinearnih funkcija jedan je od najčešćih zadataka primijenjene matematike.

Općenito, neka je zadana funkcija

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad I \subseteq \mathbb{R}.$$

Tražimo sve one  $x \in I$  za koje vrijedi

$$f(x) = 0.$$

Takve točke  $x$  zovu se **rješenja** (korijeni) pripadne jednažbe ili **nultočke** funkcije  $f$ .

U pravilu pretpostavljamo da je funkcija  $f$  neprekidna na intervalu  $I$  i da su joj nultočke izolirane. Naime, u protivnom bi postojao problem konvergencije.

Traženje nultočka na zadanu točnost sastoji se od dvije faze:

- **izolacije jedne nultočke ili više njih**, tj. nalaženje intervala unutar kojeg se nalazi barem jedna nultočka funkcije
- **iterativno nalaženje nultočke** do na traženu točnost.

Prva faza traženja je teža i provodi se na temelju analize toka funkcije  $f$ .

Postoji mnoštvo metoda za nalaženje nultočka nelinearnih funkcija do na zadanu točnost, no razlikuju se po tomu hoće li uvijek konvergirati i (ako konvergiraju) po brzini konvergencije. Općenito, brže metode nemaju sigurnu konvergenciju, dok je sporije metode imaju. Brzina konvergencije se opisuje pomoću reda konvergencije metode.

**DEFINICIJA.** Niz iteracija  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  **konvergira** prema točki  $\alpha$  s redom konvergencije  $p$ ,  $p \geq 1$ , ako vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq c |\alpha - x_{n-1}|^p, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

za neki  $c > 0$ . Ako je  $p = 1$ , onda kažemo da niz **konvergira linearno** prema  $\alpha$ . U tom slučaju je nužno da je  $c < 1$  i obično se  $c$  naziva **faktorom linearne konvergencije**.

Relacija (1) nije uvijek prikladna za linearne iterativne algoritme, no indukcijom se može pokazati da je za slučaj  $p = 1$  i  $c < 1$  nejednakost (1) ekvivalentna s

$$|\alpha - x_n| \leq c^n |\alpha - x_0|, \quad n \in \mathbb{N},$$

što je katkad mnogo lakše dokazati nego (1). I u ovom slučaju govorimo o linearnoj konvergenciji s faktorom  $c$ .

## 2 Metoda polovljenja (bisekcije)

Najjednostavnija metoda nalaženja nultočaka nelinearne funkcije je **metoda polovljenja**. Ona funkcionira za sve neprekidne funkcije, no zato ima i najlošiju **ocjenu pogreške**.

Osnovna pretpostavka za primjenu algoritma polovljenja je neprekidnost funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b]$  uz dodatni uvjet

$$f(a) f(b) < 0.$$

Ovaj uvjet nam osigurava da funkcija  $f$  ima na intervalu  $[a, b]$  barem jednu nultočku. Naravno, ako je

$$f(a) f(b) > 0$$

to ne znači da  $f$  nema nultočaka na  $[a, b]$  : može ih imati paran broj ili nultočku parnog reda. U prvom slučaju možemo riješiti problem boljom separacijom intervala  $[a, b]$  , no u drugom slučaju metoda polovljenja neće dati rješenje.

Algoritam polovljenja je vrlo jednostavan: označimo s  $\alpha$  prvu nultočku funkcije  $f$  i definiramo

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Neka je  $n \geq 1$ . U  $n$ -tom koraku algoritma konstruiramo interval  $[a_n, b_n]$  komu je duljina polovina duljine prethodnog intervala  $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ , ali tako da nultočka ostane unutar intervala  $[a_n, b_n]$ . Konstrukcija intervala  $[a_n, b_n]$  sastoji se u raspolavljanju intervala  $[a_{n-1}, b_{n-1}]$  točkom  $x_{n-1}$  i to tako da je

$$\begin{aligned} a_n &:= x_{n-1}, & b_n &:= b_{n-1}, & f(a_{n-1}) f(x_{n-1}) &> 0, \\ a_n &:= a_{n-1}, & b_n &:= x_{n-1}, & f(a_{n-1}) f(x_{n-1}) &< 0. \end{aligned}$$

Postupak zaustavljamo kad je ispunjen uvjet

$$|\alpha - x_n| \leq \varepsilon.$$

No kako ćemo znati da to vrijedi ako ne znamo  $\alpha$ ? Jer je  $x_n$  polovište intervala  $[a_n, b_n]$  i  $\alpha \in [a_n, b_n]$ , to je

$$|\alpha - x_n| \leq |b_n - x_n| = b_n - x_n,$$

pa je u stvari dovoljno postaviti zahtjev

$$b_n - x_n \leq \varepsilon.$$

### **ALGORITAM** (*Metoda polovljenja*)

$x := (a + b) / 2$

**while**  $b - x > \varepsilon$  **do**

**begin**;

**if**  $f(x) * f(b) < 0.0$  **then**

$a := x$ ;

**else**

$b := x$ ;

$x := (a + b) / 2$ ;

**end**;

Iz konstrukcije same metode lako se ocijeni pogreška  $n$ -te aproksimacije nultočke. Vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq b_n - x_n = \frac{1}{2} (b_n - a_n) = \frac{1}{2^2} (b_{n-1} - a_{n-1}) = \cdots = \frac{1}{2^{n+1}} (b - a), \quad (2)$$

odnosno

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2^n} (b - x_0).$$

Desna strana ove nejednakosti daje nam naslutiti da će konvergencija biti dosta spora. Relacija (2) nam omogućava da unaprijed odredimo koliko će koraka biti potrebno da bismo postigli željenu točnost  $\varepsilon$ . Naime, da bi vrijedilo  $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$  dovoljno je zahtijevati

$$\frac{1}{2^{n+1}} (b - a) \leq \varepsilon.$$

Jednostavnim računom dobijemo

$$n \geq \frac{\log(b - a) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ako je funkcija  $f$  još i neprekidno derivabilna na  $[a, b]$ , možemo dobiti dinamičku ocjenu udaljenosti aproksimacije nultočke od prave nultočke. Po *Teoremu srednje vrijednosti* za funkciju  $f$  vrijedi

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\xi)(x_n - \alpha),$$

pri čemu je  $\xi$  između  $\alpha$  i  $x_n$ . Koristeći činjenicu da je  $f(\alpha) = 0$  dobijemo

$$|f(x_n)| = |f'(\xi)| |x_n - \alpha|,$$

odakle slijedi

$$|x_n - \alpha| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi)|}.$$



Pretpostavimo li da možemo dati ocjenu

$$|f'(\xi)| \geq m_1, \quad m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|,$$

ako je  $m_1 \neq 0$  dobijemo

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Dakle, želimo li postići da vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \varepsilon,$$

dovoljno je zahtijevati

$$|f(x_n)| \leq m_1 \varepsilon.$$

### 3 Metoda pogrešnog položaja (*Regula falsi*)

Metoda koja nastaje kao prirodna posljedica ubrzavanja metode polovljenja je tzv. **regula falsi**. I ona sama je konvergentna čim se barem jedna nultočka funkcije  $f$  nalazi unutar intervala  $[a, b]$ .

Pretpostavimo opet da je funkcija  $f$  neprekidna na intervalu  $[a, b]$  i da vrijedi

$$f(a) f(b) < 0.$$

Aproksimiramo funkciju  $f$  pravcem  $p$  koji prolazi točkama  $T_1(a, f(a))$  i  $T_2(b, f(b))$ . Njezova je jednađžba

$$y - f(b) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} (x - b),$$

odnosno

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Nultočku  $\alpha$  funkcije  $f$  možemo aproksimirati nultočkom tog pravca, nazovimo je  $x_0$ . Nakon toga pomaknemo ili točku  $a$  ili točku  $b$  u  $x_0$ , no tako da nultočka  $\alpha$  ostane unutar novodobivenog intervala. Postupak ponavljamo sve dok ne dobijemo željenu točnost  $\varepsilon$ . Točka  $x_0$  se dobije jednostavno iz jednadžbe pravca  $p$  kao

$$x_0 = b - f(b) \frac{b - a}{f(b) - f(a)} = a - f(a) \frac{a - b}{f(a) - f(b)},$$

ili drugačije zapisano

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f[a, b]} = a - \frac{f(a)}{f[a, b]}, \quad (3)$$

gdje je

$$f[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

prva podijeljena razlika funkcije  $f$  u točkama  $a$  i  $b$ .

Ipak, postoji nekoliko ozbiljnih problema s ovom metodom. Pogledajmo kakav je red konvergencije. Iz relacije (3) imamo

$$\begin{aligned}
 \alpha - x_0 &= \alpha - b + \frac{f(b)}{f[a, b]} = (\alpha - b) \left[ 1 + \frac{f(b)}{(\alpha - b) f[a, b]} \right] \\
 &= (\alpha - b) \left[ 1 + \frac{f(b) - f(\alpha)}{(\alpha - b) f[a, b]} \right] \\
 &= (\alpha - b) \left[ 1 + (b - \alpha) \frac{f[b, \alpha]}{(\alpha - b) f[a, b]} \right] \\
 &= (\alpha - b) \left[ 1 - \frac{f[b, \alpha]}{f[a, b]} \right] = (\alpha - b) \frac{f[a, b] - f[b, \alpha]}{f[a, b]} \\
 &= -(\alpha - b)(\alpha - a) \frac{f[a, b, \alpha]}{f[a, b]}.
 \end{aligned}$$

Podsjetimo se da je

$$f[a, b, \alpha] = \frac{f[b, \alpha] - f[a, b]}{\alpha - a}.$$

Ako je funkcija  $f$  neprekidno derivabilna, onda po Teoremu srednje vrijednosti imamo

$$f[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Slično, ako je funkcija  $f$  još i dvaput neprekidno derivabilna, onda po Teoremu srednje vrijednosti imamo

$$f[a, b, \alpha] = \frac{f[b, \alpha] - f[a, b]}{\alpha - a} = \frac{1}{2}f''(\eta), \quad \eta \in [m, M],$$

pri čemu je

$$m = \min \{a, b, \alpha\}, \quad M = \max \{a, b, \alpha\}.$$

Iskoristimo li ovo dobijemo ocjenu

$$\alpha - x_0 = -(\alpha - b)(\alpha - a) \frac{f''(\eta)}{2f'(\xi)}.$$

Sada ćemo na jednom slučaju pokazati kako se provodi analiza konvergencije ove metode.

Pretpostavimo da je  $\alpha$  jedini korijen funkcije  $f$  unutar  $[a, b]$  i da vrijedi  $f'(\alpha) \neq 0$ . Također pretpostavimo da je  $f''(x) \geq 0$  za sve  $x \in [a, b]$  (tj. da je  $f$  konveksna na  $[a, b]$ ). Ako je  $f'(x) > 0$  za sve  $x \in [a, b]$ , onda je  $f$  konveksna rastuća funkcija, a spojnica točaka  $T_1(a, f(a))$  i  $T_2(b, f(b))$  je uvijek iznad grafa funkcije  $f$ . Iz početnih uvjeta dobijemo da je

$$\alpha - x_0 = -(\alpha - b)(\alpha - a) \frac{f''(\eta)}{2f'(\xi)} > 0,$$

pa će se u sljedećem koraku pomaknuti  $a$ . Isto će se dogoditi i u svim narednim koracima. Dakle,  $b$  je fiksna, a  $\alpha$  je stalno desno od aproksimacije  $x_n$ . To znači da vrijedi

$$\alpha - x_n = -(\alpha - b)(\alpha - a_n) \frac{f''(\eta_n)}{2f'(\xi_n)}.$$

Uzimanjem apsolutnih vrijednosti s desna i lijeva dobijemo da je konvergencija metode *regula falsi* u ovom slučaju linearna. Lako se vidi da je moguće naći primjere kod kojih metoda polovljenja konvergira brže nego metoda *regula falsi*.

## 4 Metoda sekante

Ako, slično kao kod *regule falsi*, graf funkcije  $f$  aproksimiramo sekantom, ali pri tom ne zahtijevamo da nultočka funkcije  $f$  ostane "zatvorena" unutar poljednje dvije iteracije, dobit ćemo **metodu sekante**. Time smo izgubili svojstvo sigurne konvergencije, ali se nadamo da će metoda konvergirati brže nego *regula falsi*.

U ovoj metodi počinjemo s dvije početne točke  $x_0$  i  $x_1$ , te povlačimo sekantu kroz točke  $T_0(x_0, f(x_0))$  i  $T_1(x_1, f(x_1))$ . Ta sekanta siječe os  $x$  u točki  $x_2$ . Postupak nastavljamo provlačenjem sekante kroz točke  $T_1(x_1, f(x_1))$  i  $T_2(x_2, f(x_2))$ . Formule za metodu sekante dobiju se iteriranjem početne formule za *regulu falsi*, pa tako dobivamo

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Iskoristimo li za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$  ocjenu

$$\alpha - x_n = -(\alpha - b)(\alpha - a_n) \frac{f''(\eta_n)}{2f'(\xi_n)},$$

dobit ćemo red konvergencije metode sekante uz odgovarajuće pretpostavke. Vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)(\alpha - x_{n-1}) \frac{f''(\eta_n)}{2f'(\xi_n)}. \quad (4)$$

**TEOREM.** Neka su  $f$ ,  $f'$  i  $f''$  neprekidne na nekom intervalu  $I \subset \mathbb{R}$ , pri čemu  $I$  sadrži jednostruku nultocku  $\alpha$ . Ako su početne iteracije  $x_0$  i  $x_1$  izabrane dovoljno blizu nultocke  $\alpha$ , onda niz iteracija  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  dobiven metodom sekante konvergira prema  $\alpha$  s redom konvergencije  $p$ , gdje je

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$



**DOKAZ.** Primijetimo da jednostrukost nultočke  $\alpha$  osigurava ispunjenje uvjeta  $f'(\alpha) \neq 0$ . Također, za neki  $\varepsilon > 0$  postoji okolina  $O = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset I$  nultočke  $\alpha$ , takva da je  $f'(x) \neq 0$  za sve  $x \in O$ . U tom slučaju je dobro definiran broj

$$M = \frac{\max_{x \in O} |f''(x)|}{2 \min_{x \in O} |f'(x)|}.$$

Zbog relacije (4) za sve  $x_0, x_1 \in O$  vrijedi

$$|\alpha - x_2| \leq M |\alpha - x_1| |\alpha - x_0|.$$

Da bismo skratili zapis označimo s

$$e_n = \alpha - x_n.$$

grešku  $n$ -te iteracije aproksimacije nultočke  $\alpha$ . Sada prethodnu nejednakost možemo nakon množenja s  $M$  pisati kao

$$M |e_2| \leq M^2 |e_1| |e_0|.$$

Pretpostavimo da su  $x_0, x_1 \in O$  izabrani toliko blizu nultočke  $\alpha$  da vrijedi

$$\delta = \max \{M |e_1|, M |e_0|\} < 1,$$

iz čega odmah slijedi

$$M |e_2| \leq \delta^2 < \delta,$$

pa je

$$|e_2| < \frac{\delta}{M} = \max \{|e_1|, |e_0|\} \leq \varepsilon,$$

odnosno

$$x_2 \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] = O.$$

Primjenimo li ovaj argument induktivno, dobijemo

$$\begin{aligned} M |e_3| &\leq M^2 |e_2| |e_1| \leq \delta^2 \cdot \delta = \delta^3, \\ M |e_4| &\leq M^2 |e_3| |e_2| \leq \delta^3 \cdot \delta^2 = \delta^5, \end{aligned}$$

i općenito

$$M |e_{n+1}| \leq M^2 |e_n| |e_{n-1}| \leq \delta^{q_n} \cdot \delta^{q_{n-1}} = \delta^{q_{n+1}},$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + q_{n-1}, \quad n \geq 1, \\ q_0 &= q_1 = 1. \end{aligned}$$

Dakle, vidimo da se radi o rekurziji za Fibonaccijeve brojeve, pa se lako izračuna eksplicitno rješenje

$$q_n = c_0 r_0^n + c_1 r_1^n.$$

Pri tom je

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, & r_1 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \\ c_0 &= \frac{1}{\sqrt{5}}r_0, & c_1 &= -\frac{1}{\sqrt{5}}r_1. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \quad n \geq 0.$$

Kako je  $r_0 \approx 1.618$  i  $r_1 \approx -0.618$ , to vidimo da  $r_1$  teži k nuli kada  $n$  teži prema beskon-ačnosti, pa je za velike  $n$

$$q_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} (1.618)^{n+1}.$$

No vratimo se na grešku  $e_n$ . Vidjeli smo da je

$$M |e_n| \leq \delta^{q_n}, \quad n \geq 0,$$

pa budući da je  $0 < \delta < 1$  i za velike  $n$  broj  $q_n$  teži k beskonačnosti, to vrijedi  $|e_n| \rightarrow 0$ , tj.

$$x_n \rightarrow \alpha, \quad n \rightarrow \infty \quad \blacksquare$$

Napominjemo da je ovaj dokaz bitno pojednostavljen i nije posve korektan!

Mane ove metode su da ona bitno ovisi o dobrom odabiru početnih aproksimacija, te da se lako može javiti poznati problem "*kraćanja*" u brojniku i (posebno) nazivniku kvocijenta

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

kada  $x_n \rightarrow \alpha$ . Također, budući da iteracije s obje strane ne zatvaraju nultočku  $\alpha$  nije lako reći kada treba zaustaviti proces.

## 5 Metoda tangente (Newtonova metoda)

Ako graf funkcije  $f$  aproksimiramo tangentom umjesto sekantom, dobili smo **metodu tangente** ili **Newtonovu metodu**. Slično kao i kod metode sekante time smo izgubili sigurnu konvergenciju, no nadamo se da će metoda brzo konvergirati.

Pretpostavimo da je zadana početna točka  $x_0$ . Ideja metode je povući tangentu u točki  $T_0(x_0, f(x_0))$  i definirati novu aproksimaciju  $x_1$  u točki gdje tangenta siječe os  $x$ . Općenito bi to išlo ovako: u točki  $x_n$  napiše se jednačba tangente

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Nultočka joj je

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

pa stavimo  $x_{n+1} := x$ .

Primijetimo da je ova metoda usko vezana uz metodu sekante jer je

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Do Newtonove metode možemo doći i korištenjem razvoja u Taylorov red funkcije  $f$  oko točke  $x_n$  uz pretpostavku da je  $f$  dvaput neprekidno derivabilna na u nekoj okolini nultočke  $\alpha$ . Vrijedi

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2,$$

pri čemu je  $\xi_n$  između  $x$  i  $x_n$ . Uvrštavanjem  $x = \alpha$  dobivamo

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2.$$

Uz pretpostavku da je  $f'(x_n) \neq 0$  dobijemo

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Kako je

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

to dobivamo

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Iz ove zadnje jednakosti odmah vidimo da je Newtonova metoda, kada konvergira, kvadratno konvergentna. Ipak, takav zaključak vrijedi samo ako  $f'(x_n)$  ne teži k nuli tijekom procesa, tj. ako je  $f'(\alpha) \neq 0$  ili drugim riječima ako je nultočka  $\alpha$  jednostruka.



**TEOREM.** Neka su  $f, f'$  i  $f''$  neprekidne na intervalu  $I \subset \mathbb{R}$ , pri čemu  $I$  sadrži jedinstvenu nultocku  $\alpha$  funkcije  $f$ . Ako je početna iteracija  $x_0$  izabrana dovoljno blizu nultocke  $\alpha$ , onda niz iteracija  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  dobiven Newtonovom metodom konvergira prema  $\alpha$  s redom konvergencije  $p = 2$ . Štoviše, vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

**DOKAZ.** Izaberimo okolinu  $O = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset I$  nultocke  $\alpha$  i neka je

$$M = \frac{\max_{x \in O} |f''(x)|}{2 \min_{x \in O} |f'(x)|}.$$

Za sve  $x_0 \in O$  korištenjem jednakosti

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

u posebnom slučaju  $n = 0$  dobijemo

$$|\alpha - x_1| \leq M |\alpha - x_0|^2,$$

odnosno

$$M |\alpha - x_1| \leq (M |\alpha - x_0|)^2.$$

Izaberimo  $x_0 \in O$  tako da zadovoljava uvjet  $M |\alpha - x_0| < 1$ . Tada vrijedi

$$M |\alpha - x_1| \leq M |\alpha - x_0|,$$

odnosno

$$|\alpha - x_1| \leq |\alpha - x_0| \leq \varepsilon,$$

pa i  $x_1$  leži u okolini  $O$ .

Induktivnom primjenom istog argumenta dobivamo

$$|\alpha - x_n| \leq \varepsilon, \quad M |\alpha - x_n| < 1$$

za sve  $n \in \mathbb{N}$ .

Da bismo dokazali konvergenciju iskoristimo opet jednakost

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Imamo

$$M |\alpha - x_{n+1}| \leq (M |\alpha - x_n|)^2, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

pa indukcijom lako pokažemo

$$M |\alpha - x_n| \leq (M |\alpha - x_0|)^{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{M} (M |\alpha - x_0|)^{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Budući vrijedi

$$M |\alpha - x_0| < 1,$$

odmah dobijemo  $x_n \rightarrow \alpha$  kada  $n \rightarrow \infty$ , a kako  $\xi_n$  leži između  $x_n$  i  $\alpha$  slijedi i da  $\xi_n \rightarrow \alpha$  kada  $n \rightarrow \infty$ .

Zbog toga je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} = - \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \quad \blacksquare$$

Prethodni teorem nam daje dovoljne uvjete za **lokalnu konvergenciju** Newtonove metode prema jednostrukoj nultočki  $\alpha$ . Konvergencija je lokalna jer je postavljen uvjet da početna aproksimacija  $x_0$  mora biti dovoljno blizu nultočke  $\alpha$ . Veličina  $\varepsilon$  određena je uvjetom

$$M |\alpha - x_0| < 1$$

koji osigurava konvergenciju metode.

Da bismo izveli ocjenu greške opet ćemo iskoristiti Taylorov teorem. Za dvije susjedne iteracije u Newtonovoj metodi vrijedi

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2} (x_n - x_{n-1})^2,$$

pri čemu je  $\xi_{n-1}$  između  $x_{n-1}$  i  $x_n$ . Po definiciji iteracija u Newtonovoj metodi vrijedi

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

pa je

$$f(x_n) = \frac{f''(\xi_{n-1})}{2} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Promotrimo sada slučaj  $I = [a, b]$ . Pod pretpostavkom da su  $f''$  i  $f'$  neprekidne na  $[a, b]$  one zasigurno na njemu postižu i svoj minimum i svoj maksimum. Označimo li

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, \quad m = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|,$$

dobijemo

$$f(x_n) \leq \frac{M}{2} (x_n - x_{n-1})^2,$$

a kao i kod metode bisekcije ako je  $m \neq 0$  iz Teorema srednje vrijednosti dobijemo i ocjenu

$$|x_n - \alpha| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

Kombinacijom ovih dviju ocjena dobivamo

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M}{2m} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Ako je  $\varepsilon$  gornja ograda za apsolutnu grešku (tj. tražena točnost), onda test

$$\frac{M}{2m} (x_n - x_{n-1})^2 \leq \varepsilon,$$

ili (u drugoj formi zapisa)

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{M}},$$

garantira da je

$$|x_n - \alpha| \leq \varepsilon.$$

Naravno, možemo koristiti i prije spomenuti test

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \leq \varepsilon.$$

U prethodnim ocjenama za lokalnu konvergenciju koristili smo pretpostavke da su  $f$ ,  $f'$  i  $f''$  neprekidne sve  $x \in [a, b]$  i da je  $m \neq 0$ . No kako je  $m = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ , to znači da je

$$|f'(x)| > 0, \quad x \in [a, b],$$

pa je  $f$  strogo monotona na  $[a, b]$ . Ako još i druga derivacija  $f''$  ima svojstvo da joj je predznak isti na cijelom segmentu  $[a, b]$ , onda možemo dobiti i uvjete za **globalnu konvergenciju** Newtonove metode.

**TEOREM.** Neka su  $f$ ,  $f'$  i  $f''$  neprekidne na segmentu  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , pri čemu je  $f(a)f(b) < 0$ , i neka  $f'$  i  $f''$  nemaju nultočaka u  $[a, b]$  (tj. imaju stalan predznak na  $[a, b]$ ). Ako polazna iteracija  $x_0 \in [a, b]$  zadovoljava uvjet

$$f(x_0)f''(x_0) > 0,$$

onda niz iteracija dobiven Newtonovom metodom konvergira prema (jedinствenoj jednostrukoj) nultočki  $\alpha$  funkcije  $f$ .



**DOKAZ.** Uočimo najprije da uvjeti teorema osiguravaju postojanje i jedinstvenost jednodruke nultočke  $\alpha$ .

Pretpostavimo, na primjer, da je za sve  $x \in [a, b]$  ispunjeno  $f'(x) > 0$  i  $f''(x) > 0$ . Tada je  $f$  monotono rastuća i zbog početnog uvjeta  $f(a)f(b) < 0$  mora vrijediti  $f(a) < 0$  i  $f(b) > 0$ . Jer je  $f''$  pozitivna i vrijedi  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ , to za početnu iteraciju  $x_0$  mora vrijediti  $f(x_0) > 0$ . U praksi možemo uzeti  $x_0 = b$ , jer je to jedina točka za koju sigurno znamo da ispunjava taj uvjet.

Neka je  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  niz iteracija generiran Newtonovom metodom iz startne točke  $x_0$  za koju vrijedi  $f(x_0) > 0$ . Dakle imamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

i znamo da je  $x_0 > \alpha$  (zbog monotonosti funkcije  $f$ ). Tvrdimo da vrijedi  $\alpha < x_n \leq x_0$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dokaz provodimo matematičkom indukcijom čiju bazu već imamo. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za  $n \in \mathbb{N}_0$ . Po pretpostavci je  $f(x_n) > 0$  i  $f'(x_n) > 0$ , pa je  $x_{n+1} < x_n$ , što pokazuje da naš niz iteracija monotono pada. Posebno iz toga slijedi  $x_{n+1} \leq x_0$  jer je po pretpostavci indukcije  $x_n \leq x_0$ .

Dokažimo još i lijevu nejednakost u dvostrukoj nejednakosti

$$\alpha < x_{n+1} \leq x_0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Po Taylorovoj formuli vrijedi

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2,$$

pri čemu je  $\xi_n \in (\alpha, x_n) \subset [a, b]$ . Zbog  $f''(\xi_n) > 0$  imamo

$$f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) < 0,$$

tj.

$$\alpha < x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

odakle slijedi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \alpha.$$

Time je dokazan korak indukcije, pa i sama tvrdnja.

Uočimo da smo usput dokazali i monotonost niza  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Dokažimo sada da je limes ovog niza upravo nultočka  $\alpha$ .

Kako je, dakle, niz  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  monotonno padajući i omeđen odozdo (s  $\alpha$ ), to postoji

$$\alpha' := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

za kojeg vrijedi

$$\alpha \leq \alpha' \leq x_0,$$

pa je  $\alpha' \in [a, b]$ . Prijelazom na limes u formuli za Newtonove iteracije dobijemo

$$\alpha' = \alpha' - \frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')},$$

odakle zbog  $f'(\alpha') \neq 0$  slijedi  $f(\alpha') = 0$ . Kako je  $\alpha$  jedina nultočka funkcije  $f$  iz  $[a, b]$  slijedi

$$\alpha' = \alpha.$$

Preostali slučajevi s obzirom na predznake  $f'$  i  $f''$  dokažu se analogno ■

Napomenimo da uvjet

$$f'(x_0) f''(x_0) > 0$$

ima vrlo jednostavno geometrijsko značenje: gledajući graf funkcije  $f$  početnu iteraciju  $x_0$  trebamo izabrati na "*strmijoj*" strani funkcije.

Računanje korištenjem Newtonove metode može trajati duže nego računanje po metodi sekante iako Newtonova metoda ima veći red konvergencije nego metoda sekante. Objašnjenje leži u činjenici da se za svaki korak Newtonove metode mora izračunati i vrijednost funkcije i vrijednost derivacije u danoj iteraciji, dok se u metodi sekante računa samo vrijednost funkcije.

Metode koje nemaju sigurnu konvergenciju katkad se kombiniraju s metodom polovljenja na sljedeći način:

- izračunamo novu iteraciju po bržoj metodi i ako nije izašla iz danog intervala nastavimo dalje;
- u protivnom napravimo jedan iteracijski korak metodom polovljenja, a zatim se opet vratimo na bržu metodu.

## 6 Metoda jednostavne iteracije

Neka je  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  neka zadana funkcija. Pretpostavimo da tražimo rješenje jednadžbe

$$x = g(x)$$

koje ćemo označiti s  $\alpha$ . Definirajmo **jednostavnu iteracijsku funkciju** (jednostavnu u smislu da "pamti" samo jednu prethodnu iteraciju) s

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

pri čemu je neki  $x_0 \in D$  na neki način odabrana prva iteracija (početna aproksimacija za  $\alpha$ ). Primijetimo da Newtonova metoda pripada klasi jednostavnih iteracija jer je u tom slučaju funkcija  $g$  definirana s

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Točke za koje vrijedi  $x = g(x)$  nazivaju se **čvrstim (fiksni)** točkama funkcije  $g$ . Misimo najčešće zainteresirani za rješavanje jednadžbe oblika  $f(x) = 0$ , no lako je uočiti da se iz problema  $f(x) = 0$  jednostavno prelazi na problem  $x = g(x)$ .

**PRIMJER.** Pretpostavimo da želimo riješiti jednadžbu

$$x^2 - a = 0, \quad a > 0,$$

ali prelaskom na rješavanje jednadžbe oblika  $x = g(x)$ . To možemo napraviti na više načina:

- $x = x^2 + x - a,$
- $x = a/x, \quad x \neq 0,$
- $x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right).$

Prirodno se nameće pitanje kako se ponašaju razne jednostavne iteracije.

**LEMA.** Neka je funkcija  $g$  neprekidna na  $[a, b]$  i neka je

$$(\forall x \in [a, b]) \quad a \leq g(x) \leq b,$$

ili kraće  $g([a, b]) \subseteq [a, b]$ . Tada jednostavna iteracija  $x = g(x)$  ima barem jedno rješenje na  $[a, b]$ .

**DOKAZ.** Za neprekidnu funkciju  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu s  $G(x) = g(x) - x$  vrijedi

$$G(a) \geq 0, \quad G(b) \leq 0,$$

pa ona nužno mijenja predznak na  $[a, b]$ . To znači da  $G$  ima nultočku na  $[a, b]$ , pa postoji rješenje jednačbe  $x = g(x)$  na  $[a, b]$ .

**LEMA.** Neka je funkcija  $g$  neprekidna na  $[a, b]$  i neka je  $g([a, b]) \subseteq [a, b]$ . Nadalje, neka postoji konstanta  $\lambda \in (0, 1)$  takva da vrijedi

$$(\forall x, y \in [a, b]) \quad |g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|$$

(drugim riječima pretpostavimo da je  $g$  Lipshitzova za  $\lambda \in (0, 1)$ , odnosno da je **kontrakcija**). Tada jednostavna iteracija  $x = g(x)$  ima jedinstveno rješenje  $\alpha$  na  $[a, b]$ . Također, niz iteracija  $x_n = g(x_{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , konvergira prema  $\alpha$  za proizvoljni  $x_0 \in [a, b]$ .

**DOKAZ.** Prema prethodnoj lemi znamo da postoji barem jedno rješenje  $\alpha \in [a, b]$  jednadžbe  $x = g(x)$ . Pokažimo da je ono jedinstveno. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom: pretpostavimo da postoje dva različita rješenja  $\alpha$  i  $\beta$ . Za njih tada vrijedi  $\alpha = g(\alpha)$  i  $\beta = g(\beta)$ .



Iz ovoga i pretpostavke da je  $g$  kontrakcija slijedi

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| \leq \lambda |\alpha - \beta|,$$

odnosno

$$(1 - \lambda) |\alpha - \beta| \leq 0.$$

Budući je po pretpostavci  $\lambda \in (0, 1)$ , tj.  $1 - \lambda > 0$ , to mora biti  $|\alpha - \beta| = 0$ , što je u kontradikciji s pretpostavkom da je  $\alpha \neq \beta$ . Dakle, ne mogu postojati dva različita rješenja.

Dokažimo još konvergenciju jednostavnih iteracija za proizvoljni  $x_0 \in [a, b]$ . Uočimo da  $x_{n-1} \in [a, b]$  povlači  $x_n = g(x_{n-1}) \in [a, b]$ . Dalje, vrijedi

$$|\alpha - x_n| = |g(\alpha) - g(x_{n-1})| \leq \lambda |\alpha - x_{n-1}|,$$

iz čega indukcijom slijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \lambda^n |\alpha - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ako pustimo da  $n$  teži u beskonačno, onda zbog  $\lambda \in (0, 1)$  slijedi  $\lambda^n \rightarrow 0$ , pa  $x_n \rightarrow \alpha$  ■

No pogledajmo što se događa ako  $g$  ima još neke "lijepo" osobine. Ako je  $g$  derivabilna na  $(a, b)$ , onda po *Teoremu srednje vrijednosti* za bilo koje  $x, y \in [a, b]$  postoji odgovarajući  $\xi \in (a, b)$  takav da vrijedi

$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y).$$

Definirajmo

$$\lambda = \max_{x \in (a, b)} |g'(x)|.$$

Tada možemo pisati

$$(\forall x, y \in [a, b]) \quad |g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|,$$

tj.  $g$  je Lipshitzova za tako odabrani  $\lambda$ . No primijetimo da takav  $\lambda$  može biti i veći ili jednak 1, tj.  $g$  ne mora biti kontrakcija.

**TEOREM.** Neka je funkcija  $g$  neprekidno derivabilna na  $(a, b)$ , neka je ispunjeno  $g([a, b]) \subseteq [a, b]$ , te neka je

$$\lambda = \max_{x \in (a, b)} |g'(x)| < 1.$$

Tada vrijedi:

1. Jednadžba  $x = g(x)$  ima točno jedno rješenje  $\alpha \in [a, b]$ .
2. Za proizvoljni  $x_0 \in [a, b]$  niz jednostavnih iteracija  $x_n = g(x_{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , konvergira prema  $\alpha$  i vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \lambda^n |\alpha - x_0|, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(\alpha).$$

**DOKAZ.** Sve tvrdnje slijede direktno iz prethodnoga osim tvrdnje o brzini konvergencije.

Vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = g(\alpha) - g(x_n) = g'(\xi_n)(\alpha - x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

pri čemu je  $\xi_n$  odabran između  $\alpha$  i  $x_n$ . Budući da  $x_n \rightarrow \alpha$  kada  $n \rightarrow \infty$ , to onda i  $\xi_n \rightarrow \alpha$  (jer se interval "steže"). Dakle, vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(\xi_n) = g'(\alpha).$$

**TEOREM.** Neka je  $\alpha$  rješenje jednadžbe  $x = g(x)$  i neka je  $g$  neprekidno derivabilna na nekoj okolini  $O$  točke  $\alpha$ . Nadalje, neka je ispunjeno  $|g'(\alpha)| < 1$  i neka je početna iteracija  $x_0$  izabrana dovoljno blizu  $\alpha$ . Tada vrijede sve tvrdnje prethodnog teorema.

**DOKAZ.** Definirajmo interval  $I = [a, b] = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset O$ , gdje je  $\varepsilon > 0$  odabran tako je  $x_0 \in I$  i da vrijedi

$$\max_{x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]} |g'(x)| = \lambda < 1,$$

(ovo je moguće ispuniti zbog uvjeta  $|g'(\alpha)| < 1$  i zbog pretpostavke da je početna iteracija  $x_0$  izabrana dovoljno blizu  $\alpha$ ). Tada je  $g(I) \subseteq I$ . Naime, ako je  $x \in I$ , tj.  $|\alpha - x| \leq \varepsilon$ , onda za neki  $\xi$  između  $\alpha$  i  $x$  slijedi

$$|\alpha - g(x)| = |g(\alpha) - g(x)| = |g'(\xi)| |\alpha - x| \leq \lambda |\alpha - x| \leq \lambda \varepsilon \leq \varepsilon,$$

pa je  $g(x) \in I$ . Dakle, zaista se može primijeniti prethodni teorem, pa odmah slijede i njegove tvrdnje.

Vratimo se na primjer  $x^2 - a = 0$ ,  $a > 0$ .

- U slučaju da smo izabrali zapis  $x = x^2 + x - a$ , imali bismo  $g(x) = x^2 + x - a$ , pa bi imali  $g'(x) = 2x + 1$ . Znamo da je pozitivna nultočka ove funkcije  $\alpha = \sqrt{a}$ , pa bi imali  $g'(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a} + 1 > 1$ . Dakle, proces ne bi konvergirao.
- U slučaju  $x = a/x$  imali bismo  $g'(x) = -a/x^2$ , pa je  $g'(\sqrt{a}) = -1$  i opet nema konvergencije.
- U slučaju  $x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$  imali bismo  $g'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right)$ , pa je  $g'(\sqrt{a}) = 0$ , što je dobro.

I na kraju promotrimo kako postići da jednostavne iteracijske funkcije budu višeg reda konvergencije.

**TEOREM.** Neka je  $\alpha$  rješenje jednadžbe  $x = g(x)$  i neka je funkcija  $g$   $p$  ( $p \geq 2$ ) puta neprekidno derivabilna na nekoj okolini  $O$  točke  $\alpha$ . Nadalje, pretpostavimo da vrijedi

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0.$$

Ako je početna iteracija  $x_0$  izabrana dovoljno blizu  $\alpha$ , onda iteracijska funkcija

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ima red konvergencije  $p$  i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

**DOKAZ.** Uočimo najprije da su uvjeti ovog teorema jači nego uvjeti prethodnog teorema, pa odmah možemo zaključiti da niz jednostavnih iteracija konvergira prema  $\alpha$ . Razvijmo sada funkciju  $g$  u red okolini točke  $\alpha$  do uključivo potencije reda  $(p - 1)$  i napišimo ostatak. Uvrstimo za argument  $x = x_n$ . Dobijemo

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g(x_n) \\ &= g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \cdots + \frac{g^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x_n - \alpha)^{p-1} + \frac{g^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p, \end{aligned}$$

gdje je  $\xi_n$  neka točka između  $x_n$  i  $\alpha$ . Iskoristimo li činjenicu da je  $\alpha$  čvrsta točka i pretpostavku  $g'(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ , dobijemo

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{g^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p,$$

odnosno



$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{g^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p.$$

Kako  $x_n \rightarrow \alpha$  kada  $n \rightarrow \infty$ , to onda i  $\xi_n \rightarrow \alpha$  (jer se interval "steže"), pa dobijemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

Iz gornje relacije se vidi da je ta konvergencija reda  $p$  ■

Korištenjem prethodnog teorema možemo analizirati i Newtonovu metodu za koju je

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Deriviranjem slijedi

$$g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

i

$$g''(x) = \frac{(f'(x))^2 f''(x) + f(x) f'(x) f'''(x) - 2f(x) (f''(x))^2}{(f'(x))^4} f'(x),$$

pa je uz pretpostavku da je  $\alpha$  nultočka funkcije  $f$  i da je  $f'(\alpha) \neq 0$  (što osigurava jednostrukost) ispunjeno

$$g'(\alpha) = 0, \quad g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Ako je  $f''(\alpha) \neq 0$ , onda je red konvergencije Newtonove metode jednak 2. No ako je  $f'(\alpha) \neq 0$  i  $f''(\alpha) = 0$ , onda je red konvergencije barem 3.