predavanje 6: Faradayev zakon indukcije. Ampereov zakon. Maxwellove jednadžbe. Elektromagnetski titraji i valovi.

1. **Napišite i ukratko objasnite Maxwellove jednadžbe u integralnom i diferencijalnom obliku (obavezno).**

◆ Gaussov zakon za električno polje

Tok električnog pomaka kroz bilo koju zatvorenu površinu S jednak je algebarskom zbroju naboja koji se nalaze unutar te zatvorene površine:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

Prva Maxwellova jednadžba

◆ Gaussov zakon za magnetsko polje

Tok magnetske indukcije kroz bilo koju zatvorenu površinu S jednak je nuli (tj. ne postoji izolirani magnetski naboj):

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

Druga Maxwellova jednadžba

◆ Faradeyev zakon elektromagnetske indukcije

Brzina promjene toka magnetske indukcije kroz petlju jednaka je elektromotornoj sili induciranoj u petlji, ili ***vremenski promjenjivo magnetsko polje stvara kružno električno polje***:

$$\oint_K \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S}$$

Treća Maxwellova jednadžba

◆ Poopćeni Ampereov zakon

Linijski integral magnetskog polja po zatvorenoj krivulji jednak je zbroju provodne i pomačne struje koju ta petlja sadržava, ili, u odsutnosti provodnih struja, ***vremenski promjenjivo električno polje stvara kružno magnetsko polje***:

$$\oint_K \vec{H}\mathrm{d}\vec{s} = \iint_S \vec{J}\mathrm{d}\vec{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{D}\mathrm{d}\vec{S}$$

Četvrta Maxwellova jednadžba

	Diferencijalni
1.	$\mathrm{div}\vec{D} = \rho$
2.	$\mathrm{div}\vec{B} = 0$
3.	$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4.	$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

2. **Kako glasi sila na naboj u elektromagnetskom polju i o čemu ovisi gustoća energije električnog i magnetskog polja? (obavezno)**

Elektrostatska sila na naboja q_1 u prisustvu q_2:

$$\vec{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_o \qquad k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 8{,}9875\times 10^9\, Nm^2/C^2$$

Električno polje u nekoj točki prostora je definirano kao električna sila koja djeluje na pozitivni probni naboj u toj točki podijeljen s tim probnim nabojem:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_o} = k_e \frac{q}{r^2}\vec{r}_o \qquad \vec{F} = q\vec{E}$$

Sila na naboj koji se giba brzinom v u magnetskom polju B:

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

Ukupna sila na naboj u elektromagnetskom polju:

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$$

gdje je E – električno polje, a B – magnetska indukcija (gustoća magnetskog polja).

Gustoća energije u električnom polju proporcionalna je kvadratu iznosa električnog polja u danoj točki.

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Gustoća energije magnetskog polja proporcionalna je kvadratu iznosa magnetskog polja u danoj točki.

$$u_m = \frac{1}{2}\mu H^2$$

3. Objasnite Gaussov zakon za električno i magnetsko polje.

Za električno polje:

Veza između električnog polja i naboja koji proizvode to polje može se iskazati jednostavnom i korisnom relacijom tzv. **Gaussovim zakonom.** Silnice električnog polja su zamišljene linije u prostoru čije su tangente u ma kojoj točki kolinearne s vektorom jakosti električnog polja.

Tok električnog polja (skalar) kroz površinu S u tom se slučaju definira kao ϕ=εES=DS, gdje je vektor gustoće električnog toka jednak: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

Ako je kut ϑ između normale na površinu i silnica različit od 0, tada je tok:

$$\Phi = \vec{D} \cdot \vec{E} = DS\cos\vartheta$$

Tok električnog polja može se zorno predočiti brojem silnica koje prolaze kroz okomitu površinu S, a iznos vektora $\vec{D}$

brojem silnica kroz jediničnu okomitu površinu.

Zamislimo li kuglu i točkasti naboj Q unutar nje, tok električnog polja je u tom slučaju jednostavno izračunati: silnice okomito probadaju kuglinu površinu, a iznos vektora D jednak je u svim točkama kugline plohe. Zato je tok električnog polja jednak umnošku iznosa vektora D i ukupne površine kugle tj:

$\Phi = 4R^2\pi D$ gdje je R polumjer kugle.

Budući da je unutar kugle točkasti naboj Q, polje na površini kugle:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}$$

Kako je D=εE, onda je tok:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot 4R^2\pi = Q$$

Tok električnog polja kroz bilo koju zatvorenu plohu proizvoljnog oblika jednak ukupnom naboju unutar te plohe.

Ako je ploha proizvoljnog oblika, električno polje u svim točkama plohe S nije konstantno, plohu ćemo podijeliti na male površine ΔS, tako male da možemo predpostaviti das u ravne id a je polje u svakoj točki ΔS konstantno.

$$\Phi = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum \vec{D}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \qquad d\phi_E = \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Kada iz plohe izlazi onoliko silnica koliko je u plohu ušlo, ukupni je tok jednak nuli.

Kao što je rečeno, tok električnog polja kroz bilo koju zatvorenu plohu proizvoljnog oblika jednak ukupnom naboju unutar te plohe, stoga proizlazi:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

Ako naboj Q izrazimo prostornom gustoćom naboja u volumenu V (koji obuhvaća ploha površine S) tada jednadžba poprima oblik:

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$ (prva Maxwellova jednadžba)

Za magnetsko polje:

Tok magnetskog polja je definiran na isti način kao i tok električnog polja, i također se može predočiti silnicama koje prolaze kroz neku plohu.

$$\Phi_B = BS$$

Dakle magnetski tok jednak je produktu magnetske indukcije (gustoće magnetkog toka) i površine okomite na smjer magnetskih silnica.

Ako silnice homogenog magnetskog polja ne padaju okomito na površinu S već pod nekim kutem ϑ, tada je tok:

Općenito plohu možemo podijeliti na infenitezimalno male elemente dS i tok polja izračunati integralom po površini kroz koju računamo tok:

$$\Phi_B = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$$ (plošni integral vektora magnetske indukcije)

Jedinica magnetskog toka iznosi: Tm^2=Vs=Wb (veber)

Općenito tok vektorskog polja kroz zatvornu plohu jednak je zbroju svih izvora unutar plohe, međutimmagnetske silnice su zatvorene; broj silnica koje ulaze u neku zatvorenu plohu jednak je broju silnica koje izlaze iz te plohe. Drugim riječima, magnetski tok kroz bilo koju zatvorenu plohu jednak je nuli:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$ (druga Maxwellova jednadžba)

4. Objasnite Faradyev zakon indukcije.

1820. godine H. C. Oersted opazio da naboj u gibanju (električna struja) proizvodi magnetsko polje da bi onda 1831. godine M. Farady otkrio da promjenjivo magnetsko polje stvara električno polje. Kao primjer može uvlačenje magnetskog štapa u zavojnicu zbog čega se na njezinim krajevima inducira elektromotorna sila, odnosno kroz strujni krug poteče struja. Ti i slični pokusi pokazuju da se u petlji od jednog (ili više) zavoja inducira elektromotorna sila uvijek kad se kroz petlju mijenja tok magnetskog polja. Inducirana je elektromotrna sila to veća što je promjena toka brža i veća i što je broj zavoja veći. Mjerenja pokazuju da je inducirana elektromotorna sila razmjerna brzini promjene magnetskog toka kroz petlju (zavoj žice):

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ako umjesto jednoga zavojnica ima N zavoja, tada je:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}$$

gdje je Ψ=nΦ ukupni (ulančeni) tok.

I to je Faradayev zakon indukcije. Negativan predznak je posljedica zakona o održavanju energije.

Značenje predznaka minus najbolje objašnjava Lenzovo pravilo:

Smjer inducirane elektromotorne sile uvijek je takav da struja što zbog nje protječe petljom, proizvodi magnetski učinak kojim nastoji poništiti uzrok koji ju je izazvao, to je u biti posljedica zakona očuvanja energije.

Faradayev zakon indukcije možemo napisati i u obliku treće Maxwellove jednadžbe:

$$\oint_K \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$ (treća Maxwellova jednadžba)

Prvi integral računa se po zatvorenoj krivulji K, a drugi po plohi S obuhvačenoj tom krivuljom.

5. **Objasnite Biot-Savartov zakon odnosno Amperov zakon.**

Biot-Savartov zakon omogućuje izračun magnetskog polja koje proizvodi naboj koji se giba (struja):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{s} \times \vec{r}_0}{r^2}$$ $$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\ m / A}$$

Cirkulacija vektorskog polja linijski je integral po zatvorenoj krivulji projekcije vektora na krivulju u svakoj njezinoj točki. Tako je cirkulacija vektora jakosti magnetskog polja po krivulji K:

$$\oint_K \vec{H}\cdot d\vec{s}$$

Uzmimo cirkulaciju jakosti magnetskog polja dugog ravnog vodiča kojim teče struja I i neka zatvorena krivulja bude kružica (silnica) oko vodiča. U svakoj točki te kružnice magnetsko je polje tangecijlno na kružnicu i po iznosu konstanto i jednako H=I/(2πr). Stoga je cirkulacija vektora jakosti magnetskog polja H jednaka:

$$\oint_K \vec{H}\cdot d\vec{s} = \oint_K \frac{I}{2\pi r} ds = \frac{I}{2\pi r}\oint_K ds$$

Budući da je

$\oint_K ds$ po kružnici jednak opsegu kružnice 2πr, proizlazi → $\oint_K \vec{H}\cdot d\vec{s} = I$

Cirkulacija je u tom slučaju jednaka jakosti struje koja prolazi kroz krivulju. Može se dokazati da to vrijedi za bilo koju krivulju. Ako krivulja K obuhvaća više struja, tad možemo pisati:

$\oint_K \vec{H}\cdot d\vec{s} = \sum I$ ili $\oint_K \vec{B}\cdot d\vec{S} = \mu \sum I$

To je Amperov zakon ili zakon protjecanja:
Cirkulacija magnetskog polja H, po ma kojoj zatvorenoj krivulji, jednaka je jakosti struje što protječe kroz površinu koju ta krivulja obuhvaća:

$$\oint_K \vec{H}\cdot d\vec{s} = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S}$$ $$\vec{J} = \rho\,\vec{v};\ \rho\text{ - gustoca naboja},\quad \vec{v}\text{ - brzina naboja}$$

J. C. Maxwell (1865) je proširio pojam električne struje, uveo je pojam struje pomaka (pomačne struje), pa tzv. Ampère-Maxwell zakon glasi:

$$\vec{j}_{pom} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_K \vec{H}\mathrm{d}\vec{s} = \iint_S \vec{J}\mathrm{d}\vec{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{D}\mathrm{d}\vec{S}$$

6. Objasnite pojam struje pomaka.

Promatramo li nabijanje i izbijanje kondezatora. Dok se kondezator nabija, vodičem teče struja, a na pločama kondezatora prikuplja se naboj i pojačava električno polje između ploča gdje nema provodne struje. Da bi prvo Kirchhoffovo pravilo vrijedilo i za kondezator, kažemo da provodna struja, koja vodičem dolazi do ploča kondezatora, nastavlja teći između ploča kao **struja pomaka**. Promjenu električnog polja između ploča tumačimo kao struju pomaka. Da bi važila jednadžba kontinuiteta struje (koja proizlazi iz zakona o očuvanju naboja), provodna struja i struja pomaka moraju biti jednake.

Zamislimo neku zatvorenu plohu koja obuhvaća pozitivno nabijenu ploču kondezatora. Prema Gaussovom zakonu je:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$$

Provodna struja je jednaka struji pomaka:

$$I_{pr} = \frac{dQ}{dt} = I_{pom}$$

Uvrstivši prvu jednadžbu u drugu, dobivamo:

$$I_{pom} = \frac{d}{dt}\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \frac{d\Phi_D}{dt}$$ (struja pomaka kroz zatvorenu površinu oko ploče)

Struja pomaka kroz odabranu površinu S jednaka je:

$$I_{pom} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

---

izvedba i pojašnjenje 4. Maxwellove jednadžbe, neznam jeli ovo treba naučit i ako treba, za koje onda pitanje (je li za peto ili šesto pitanje jer se temelji na oba dva)

Kao što i provodna struja, tako i struja pomaka uzrokuje magnetske efekte. Zato u amperovom zakonu, koji povezuje električnu struju i magnetsko polje koje ona proizvodi, moramo napisati obje struje i provodnu i pomočnu:

$$\oint_K \vec{H}\cdot d\vec{S} = I_{pr} + I_{pom} = I_{pr} + \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$$ gdje je krivulja K rub plohe površine S.

Provodnu struju možemo prikazati i gustoćom struje J:

$$I_{pr} = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$ koju uvrstimo u prethodnu relaciju:

$$\oint_K \vec{H}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$$ i to je četvrta Maxwellova jednadžba.

7. Izvedite izraze za gustoću energije električnog/magnetskog polja.

Za električno polje:

U prostoru u kojem postoji električno polje, postoji i energija pridružena tom polju. Zamislimo pločasti kondenzator čiji je napon jednak nuli, a želimo ga nabiti nabojem Q kako bi ostvarili razliku potencijala U. Nabijanje kondenzatora zahtjeva ulaganje rada, jer treba od negdje donijeti naboj na ploče kondenzatora. Rad potreban da se naboj dQ prenese s jedne ploče na drugu pri naponu U između ploča je:

$$dW = UdQ = \frac{Q}{C}dQ$$ jer je Q=C*U.

Integracijom dobijamo ukupni rad potreban za nabijanje kondezatora kapaciteta C nabojem Q, odnosno do napona U:

$$W=\int_0^Q \frac{Q}{C}dQ=\frac{Q^2}{2C}=\frac{CU^2}{2}=\frac{QU}{2}$$

Rad potreban za nabijanje kondezatora pretvara se u potencijalnu energiju električnog polja unutar kondezatora:

$$E_{el}=\frac{CU^2}{2}$$

Ako umjesto kapaciteta C pišemo C=ε_0 ε_r S/d, za kapacitet pločastog kondezatora te primijenimo vezu U=Ed dobit će mo:

$$E_{el}=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}\frac{U^2}{2}=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}\frac{E^2d^2}{2}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 V$$

gdje je V=Sd volumen kondezatora. Iz ove jednadžbe lako dobijemo gustoću energije homogenog električnog polja u vakuumu:

$$u_e=\frac{dE_{el}}{dV}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}ED \qquad \left[\frac{As}{Vm}\cdot\frac{V^2}{m^2}=\frac{J}{m^3}\right]$$

Budući da izraz za gustoću energije ne ovisi o geometrijskim veličinama, on vrijedi ne samo za pločasti kondezator nego općenito za bilo koje električno polje.

Za magnetsko polje:

Kad zavojnicu priključimo na izvor napona, struja ne postigne odmah maksimalnu vrijednost, jer se u zavojnici inducira napon koji se protivi porastu struje (Lenzovo pravilo). Inducirani napon samoindukcije na krajevima zavojnice dan je izrazom:

$$U_L=-L\frac{dI}{dt}$$

Da bi se kroz zavojnicu uspostavila stalna struja iznosa I, potrebno je uložiti određeni rad, koji se očituje kao potencijalna energija magnetskog polja zavojnice. Ako isključimo izvor napona i spojimo zavojnicu na otpornik, struja neće odmah pasti na nulu, nego će se postepneno smanjivati obavljajući rad na otporniku. Taj rad je jednak radu koji smo utrošili za stvaranje magnetskog polja.

$U_L=-L\frac{dI}{dt}$ - inducirani napon u zavojnici

Snaga koja se predaje zavojnici je : $P=U_L i=Li\frac{di}{dt}$

Energija koja se preda zavojnici u intervali dt je Pdt

odnosno $dE_{pm}=Lidi$

Ukupna rad koji treba uložiti da se uspostavi stalna struja u zvojnici iznosa I je :

$$E_{pm}=L\int_0^I idi=\frac{1}{2}LI^2$$

$$L=\mu\frac{N^2S}{l}\rightarrow E_{pm}=\mu\frac{N^2S}{2l}I^2$$

$$B=\mu\frac{NI}{l}\rightarrow E_{pm}=\frac{1}{2\mu}B^2Sl$$

$$u_m=\frac{E_{pm}}{Sl}=\frac{1}{2\mu}B^2=\frac{1}{2}\mu H^2$$