Definirajte neodređeni integral i primitivnu funkciju. Dokažite da se primitivne funkcije razlikuju do na konstantu. Navedite i dokažite osnovna svojstva neodređenog integrala.

Definicija 1.1 Neka je dan interval I i funkcija $f : I \to \mathbb{R}$. Svaku neprekidnu funkciju $F : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I$, nazivamo **primitivnom funkcijom** za funkciju f na intervalu I.

Teorem 1.2 Ako za danu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ postoji primitivna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$, onda je i svaka funkcija $G : I \to \mathbb{R}$, $G = F + C$, gdje je $C \in \mathbb{R}$ konstanta, primitivna za funkciju f. Štoviše, ako su $F, G : I \to \mathbb{R}$ primitivne funkcije za f, onda je $G = F + C$, za neki $C \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.3 Za danu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$, skup svih njezinih primitivnih funkcija na intervalu (ili njihovoj uniji) I nazivamo **neodređenim integralom** funkcije f na intervalu I i označujemo s $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Skraćeno pišemo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \; x \in I,$$

gdje F neka (bilo koja) primitivna funkcija za f na I, a C oznaka za opću konstantu.

Osnovna svojstva:

Teorem 1.4 Neka je $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, tj. $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I$ Tada na I vrijedi:

a) $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ ("deriviranjem integrala dobivamo integrand");

b) $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$ ("diferenciranje poništava integriranje");

c) $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$ ("integriranje poništava diferenciranje do na konstantu").

Teorem 1.5 Neka funkcije $f_{1,2} : I \to \mathbb{R}$, dopuštaju primitivne funkcije na intervalu I, te neka su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ konstante. Tada i funkcija $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : X \to \mathbb{R}$ dopušta primitivnu funkciju na I i vrijedi

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + C. \quad (1)$$

Dokaz.
Neka je $F_i : I \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f_i za $i = 1, \ldots, n$. To znači da je $(F_i(x))' = f_i(x)$ za svaki $x \in I \setminus A_i$, pri čemu je A_i prebrojiv podskup od I, odnosno $\int f_i(x)\,dx = F_i(x) + C_i$. Dakle, jednakost

$$\alpha_1 F_1(x) + \cdots + \alpha_n F_n(x))' = \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$$

vrijedi za svaki $x \in I \setminus \bigcup_{i=i}^n A_i$. Kako je skup $\bigcup_{i=i}^n A_i$ također prebrojiv, zaključujemo da je funkcija $\alpha_1 F_1(x) + \cdots + \alpha_n F_n(x)$ jedna primitivna funkcija funkcije $\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$. Stoga vrijedi

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x))\,dx = \alpha_1 F_1(x) + \cdots + \alpha_n F_n(x) + K$$

Formulirajte teoreme o supstituciji u neodređenom integralu.

Teorem 2.1 Neka za funkciju f postoji neka primitivna funkcija na intervalu I. Nadalje, neka je $\varphi : J \to I$, J - interval, strogo monotona i derivabilna surjekcija. Tada je

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C, \quad (17)$$

gdje je Φ primitivna funkcija za funkciju $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na J. Drugačijim zapisom,

$$\int ((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(t)\,\mathrm{d}t = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(t) + C.$$

- Teorem 2.1 jamči da se, pod navedenim uvjetima, zadani integral smije rješavati zamjenom $x = \varphi(t)$ i $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, tj.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \equiv$$

$$= \Phi(t) + C = \Phi\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C = F(x) + C.$$

Teorem 2.2 Neka je G primitivna funkcija za funkciju g na intervalu J, tj. $G'(t) = g(t)$, $t \in J$, te neka je $\psi : I \to J$, I - interval, derivabilna funkcija. Tada je

$$\int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)\,\mathrm{d}x = G(\psi(x)) + C. \qquad (18)$$

Dokaz: Promotrimo funkcije $f(x) = g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$ i $F(x) = G(\psi(x))$. Budući je $G'(t) = g(t)$, $t \in J$ imamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= (G(\psi(x)))' = G'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) \\ &= g(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = f(x) \end{aligned}$$

za svaki $x \in I$, a to se i tvrdilo.

Teorem 2.2 kazuje da ako se u podintegralnoj funkciji $f(x)$ prepozna izraz oblika $g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$ i ako znamo da je $\int g(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + C$, onda je

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= G(\psi(x)) + C = G(\psi(x)) + C.$$

Dokažite formulu za parcijalnu integraciju u neodređenom integralu.

Parcijalna integracija se sastoji u tomu da se pogodnim izborom realnih funkcija $x \mapsto g(x)$ i $x \mapsto h(x)$, takvih da je $g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$, i primjenom diferencijala na produktnu funkciju $x \mapsto g(x)h(x)$, integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ili bitno pojednostavni ili da postane nepoznanicom u lako rješivoj jednadžbi.

Teorem 2.3 Ako su funkcije $g, h : I \to \mathbb{R}$, neprekidno derivabilne, onda vrijedi

$$\int g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = g(x)h(x) - \int h(x)g'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (19)$$

Teorem 2.3 Ako su funkcije $g, h : I \to \mathbb{R}$, neprekidno derivabilne, onda vrijedi

$$\int g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = g(x)h(x) - \int h(x)g'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (19)$$

Napomena: Uobičajilo se uvesti pokrate $g(x) = u$ i $h(x) = v$ pa formula (19) ima i zapis

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

Dokaz.
Neka je $F : I \to R$ primitivna funkcija funkcije $u(x)\,v'(x)$ na intervalu I, odnosno F je neprekidna i vrijedi

$$F'(x) = u(x)\,v'(x), \qquad x \in I \setminus A,$$

pri čemu je $A \subset I$ konačan ili prebrojiv skup. Zbog derivabilnosti funkcija u i v je i funkcija $u(x)\,v(x)$ neprekidna na intervalu I. Stoga je funkcija

$$G(x) = u(x)\,v(x) - F(x)$$

neprekidna na intervalu I te za svaki $x \in I \setminus A$ vrijedi

$$\begin{aligned} G'(x) &= u'(x)\,v(x) + u(x)\,v(x) - F'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) - u(x)\,v'(x) \\ &= u'(x)\,v(x). \end{aligned}$$

Dakle, G je primitivna funkcija funkcije $u'\,v$ na intervalu I pa je

$$F(x) = u(x)\,v(x) - G(x)$$

i teorem je dokazan.

Što je integral racionalne funkcije i kako ga riješavamo?

Integral racionalne funkcije je oblika

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \, \mathrm{d}x$$

gdje su $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stupnja m i n, redom, koji nemaju zajedničkih nul-točaka.

Razlikujemo slučajeve:

- $n = 0 \Longrightarrow \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S(x)$ je polinom (dobivamo sumu tabličnih integrala);
- Ako je $m < n$ onda je $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ prava racionalna funkcija;
- Ako je $m \geq n$ onda, dijeljenjem, dobivamo

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \, \mathrm{d}x = \int \left(S(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)} \right) \mathrm{d}x$$

gdje je $S(x)$ polinom a $\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$ prava racionalna funkcija.

Kada je binomni integral elementarno rješiv i kako ga riješavamo?

$$\int x^s (a + bx^r)^p \, \mathrm{d}x, \quad p, r, s \in \mathbb{Q}.$$

Teorem 3.1 Binomni integral (1) je elementarno rješiv onda i samo onda, ako je barem jedan od brojeva

$$p, \frac{s+1}{r}, \frac{s+1}{r} + p$$

cijeli broj.

Riješavamo ga uvodeći supsistucije:

$p \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad x = t^n, \ n -$ (najmanji) zajed. nazivnik od s i r;

$\dfrac{s+1}{r} \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad a + bx^r = t^n, \ n -$ nazivnik od p;

$\dfrac{s+1}{r} + p \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad ax^{-r} + b = t^n, \ n -$ nazivnik od p;

Kako se provodi i čemu služi integriranje pomoću razvoja u red funkcija i potencija?

Teorem 4.1 *Neka su $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ preslikavanja, $n \in \mathbb{N}$, i neka red funkcija $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jednoliko konvergira prema funkciji*

$$s : [a, b] \to \mathbb{R}, \ s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

onda s dopušta primitivnu funkciju na $[a, b]$ i ona se može dobiti integriranjem "član po član", tj.

$$\int s(x) \, \mathrm{d}x \equiv \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x) \, \mathrm{d}x + C.$$

Posebice, za red potencija $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na njegovu intervalu konvergencije vrijedi

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

Integriranjem redova funkcija i posebice, redova potencija mogu se izračunati mnogi elementarno nerješivi integrali.

Definirati određeni integral i navesti mu osnovna svojstva?

- **Definicija 1.1** Neka je $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ i neka je segment $[a,b]$ točkama $a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b$ podijeljen na n-jednakih dijelova duljine $\triangle x = \frac{b-a}{n}$, te neka je $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. **Određeni integral funkcije** f **od** a **do** b definiramo kao graničnu vrijednost integralnih suma[2] $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x$ i označavamo sa $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x \tag{1}$$

Teorem 1.7 (Svojstva određenog integrala)

a) $\int\limits_a^b c\,\mathrm{d}x = c\,(b-a)\,,\ \ c \in \mathbb{R}$ konstanta,

b) $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$

c) $\int\limits_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$

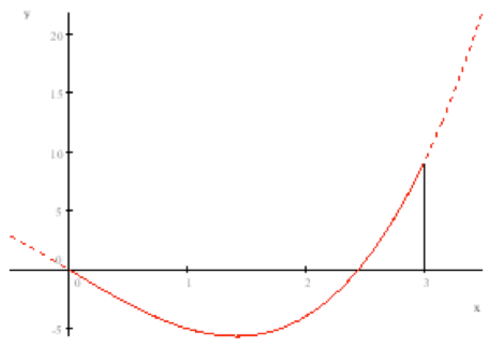
d) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

- $f(x)$ **integrand**;
- a **donja granica**;
- b **gornja granica**;
- sam postupak računanja nazivamo **integracijom.**

Što geometrijski predstavlja Riemannova suma neprekidne funkcije koja na segmentu [a, b] poprima pozitivne vrijednosti, a što funkcije koja poprima pozitivne i negativne vrijednosti? Ilustrirati skicom.

Napomena 1.5 Ukoliko je $f(x) \geq 0$ za $x \in [a,b]$, Riemannova suma $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ daje aproksimaciju površine ravninskog lika ispod krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$ sumom površina pravokutnika, a integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ daje pravu površinu P tog lika.

Ukoliko je $f(x) \leq 0$ za $x \in [a,b]$ integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ daje $-P$, a ukoliko f mijenja predznak na intervalu $[a,b]$ integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ daje razliku površina.



Slika prikazuje f(x) koja mijenja predznak

Izrecite i dokažite Newton-Leibnitzovu formulu?

Teorem 2.2 Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[a,b]$ i neka za nju postoji primitivna funkcija $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ takva da je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in (a,b)$. Tada vrijedi Newton-Leibnitzova formula:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Uobičajena oznaka je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\,|_{x=a}^{x=b}$$

Dokaz. Neka je $g(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ proizvoljna gornja suma. Jednakost $F'(x) = f(x)$ znači da je f brzina kojom se F mijenja. Kako je na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ brzima kojom se F mijenja uvijek manja ili jednaka M_i, zaključujemo da će se na čitavom intervali funkcija F promijeniti najviše za $M_i \Delta x_i$. Drugim riječima,

$$M_i \Delta x_i \geq F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Zbrajajući ove nejednakosti za $i = 1, 2, \ldots, n$ imamo

$$g(f, D) \geq \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

Slično, za proizvoljnu donju sumu vrijedi

$$d(f, D) \leq F(b) - F(a).$$

Dakle, broj $F(b) - F(a)$ je veći ili jednak od svake donje sume, a manji ili jednak od svake gornje sume, pa je teorem dokazan. ∎

Iz teorema zaključujemo da se određeni integral može riješiti tako da se nađe neodređeni integral podintegralne funkcija, a onda uvrste granice. Newton-Leibnitzovu formulu još zapisujemo kao

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b.$$

Formulirajte i dokažite teoreme o supstituciji u određenom integralu.

Teorem 4.1 Neka za (neprekidnu) funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ postoji neka primitivna funkcija na intervalu $I = [a, b]$. Nadalje, neka je $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ (ili $\varphi : [\beta, \alpha] \to [a, b]$) strogo monotona i neprekidno derivabilna surjekcija, tako da je $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$, tada je

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(sup)}$$

Teorem 4.2 Neka se (neprekidna) funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dade napisati u obliku $f(x) = g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$, gdje je g neka neprekidna funkcija i ψ neka neprekidno derivabilana funkcija. Tada je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \text{(sup)}$$

Parcijalna integracija se prenosi direktno:

Teorem 4.3 Ako su funkcije $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidno derivabilne, onda vrijedi

$$\int_a^b g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)h(x)]\big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b h(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

nema se sto vise dokazivat, niti sam naisao u knjizi na ikakve dokaze

Napomena: Ukoliko funkcija ima neku simetriju (parna, neparna funkcija), te ako su granice integracije simetrične obzirom na ishodište, tada vrijedi:

- $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ ukoliko je f parna funkcija;
- $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ukoliko je f neparna funkcija.

Izrecite i dokažite teorem srednje vrijednosti za određeni integral. Koja je geometrijska interpretacija tog integrala?

Teorem 2.4 [Teorem srednje vrijednosti] Ako su funkcije $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidne i $g(x) \neq 0$, tada postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx}.$$

Posebno (uz $g(x) \equiv 1$) vrijedi

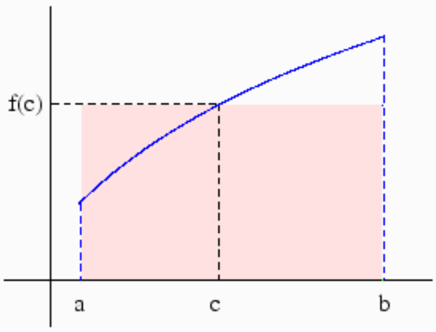
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dokaz.
Neka su F i G primitivne funkcije funkcija f i g na segmentu $[a, b]$, redom. Kako su f i g neprekidne, to su F i G derivabilne na (a, b). Pored toga, $G'(x) = g(x) \neq 0$. Dakle, funkcije F i G ispunjavaju uvjete Cauchyjevog teorema, pa postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx}$$

i prva tvrdnja teorema je dokazana. Druga tvrdnja slijedi iz prve ako uzmemo $g(x) \equiv 1$.

Grafička interpretacija druge tvrdnje teorema je slijedeća: površina između funkcija $f(x)$ i x-osi od a do b jednaka je površini pravokutnika s bazom $b-a$ i visinom $f(c)$, s time što površina i visina mogu biti i negativne (slika 2.7). Vrijednost $f(c)$ je srednja vrijednost funkcije f na intervalu $[a, b]$.



Slika 2.7: Teorem srednje vrijednosti

Kako definiramo nepravi integral prve i druge vrste? Kako ih računamo?

U definiciji određenog integrala $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pretpostavili smo:

- segment $[a,b]$ je konačan;
- $f(x)$ je na tom segmentu ili neprekidna ili ima konačno uklonjivih prekida ili prekida prve vrste).

– Ako prvi uvjet "popravimo" i pretpostavimo da je interval "beskonačan" (neomeđen), dobivamo nepravi integral (I. tipa).

– Ako drugi uvjet "popravimo" i pretpostavimo da je $f(x)$ na segmentu $[a,b]$ neograničena (ima konačno prekida druge vrste) dobivamo nepravi integral (II. tipa).

---

a) Ako postoji $\int\limits_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ za $\forall t \geq a$, tada je

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \lim_{t\to\infty} \int\limits_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Ako postoji $\int\limits_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za $\forall t \leq b$, tada je

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \lim_{t\to-\infty} \int\limits_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ako limes u a) (u b)), postoji (konačan je), onda kažemo da nepravi integral I. tipa $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, ($\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$), konvergira. U suprotnom kažemo da divergira.

c) Definiramo još nepravi integral I. tipa oblika

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \int\limits_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

gdje je a bilo koji realan broj. Ako oba integrala

$\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ i $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiraju, kažemo da $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira. U suprotnom (tj. ako barem jedan divergira) kažemo da $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ divergira.

---

a) Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a,b)$ i $\lim\limits_{x\to b^{-0}} f(x) = \pm\infty$ (slika 2), tada je

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon\to0^+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(1.a.)}$$

b) Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na $(a,b]$ i $\lim\limits_{x\to a^{+0}} f(x) = \pm\infty$ tada je

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon\to0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(2.b.)}$$

Ako limes (1.a) ((2.b.)), postoji (konačan je), onda kažemo da nepravi integral II. tipa $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ($\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$), konvergira. U suprotnom kažemo da divergira.

c) Ako je $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ funkcija, osim u točki $c \in (a,b)$ gdje je $\lim\limits_{x\to c^{-0}} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim\limits_{x\to c^{+0}} f(x) = \pm\infty$, definiramo nepravi integral II. tipa

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to0^+} \int_{c+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(3.c.)}$$

Ako oba limesa u (3.c.) postoje, kažemo da $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira. U suprotnom (tj. ako barem jedan ne postoji) kažemo da $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ divergira.

Navedite i objasnite kriterije konvergencije nepravog integrala.

Poredbeni kriterij za nepravi integral glasi (usporedi [M1, teorem 6.10]): ako je $0 \leq f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in (a,b)$, pri čemu su a i b granice nepravog integrala, tada vrijedi slijedeće:

(i)

konvergencija integrala $\int_a^b g(x)\,dx$ povlači konvergenciju integrala $\int_a^b f(x)\,dx$;

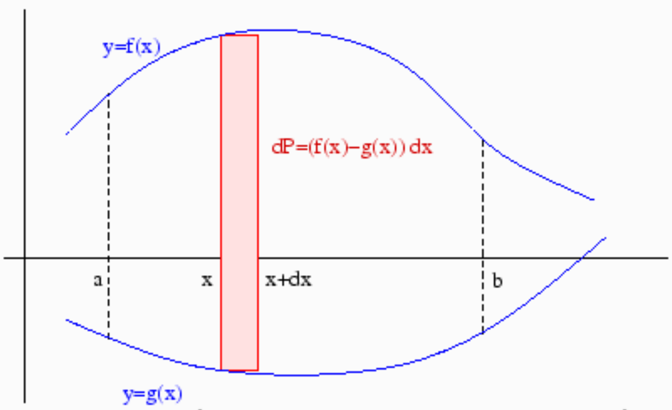
(ii)

divergencija integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ povlači divergenciju integrala $\int_a^b g(x)\,dx$.

Teorem o apsolutnoj konvergenciji za nepravi integral glasi (usporedi [M1, teorem 6.11]): konvergencija integrala $\int_a^b |f(x)|\,dx$ povlači konvergenciju integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

Objasniti računanje površine ravninskog lika u Kartezijevim, parametarskim i polarnim (za polarni se tražio u nekim zadacima i izvod) koordinatama?

Površinu između krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$ od točke a do točke b računamo kao beskonačnu (integralnu) sumu beskonačno malih elemenata površine (slika 2.12). Elementi površine su beskonačno mali pravokutnici s bazom dx i visinom $f(x) - g(x)$.



Slika 2.12: Povr�ina ravninskog lika i element povr�ine

Površina se računa formulom

$$P = \int_{[a,b]} dP = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx. \qquad (2.1)$$

Parametarski:

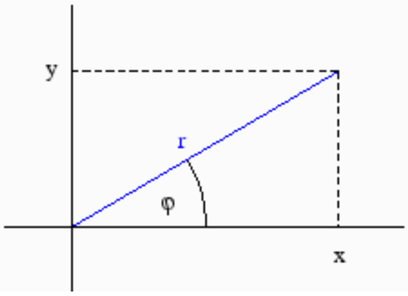
Ukoliko je krivulja parametarski zadana $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ ($x(t)$ je injekcija, Slika 5.) tada je površinu na slici naznačenog lika izračunavamo na način

$$P = \int_\alpha^\beta y(t) x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Kod parametarski zadane krivulje računamo površinu između te krivulje i pravca x=c, (c element realnih). Pri tome treba voditi računa o tome je li x=x(t) rastuća ili padajuća funkcija i ovisno o tome postaviti integral, odnosno odabrati granice integriranje tako da je prirast dx=x'dt nenegativan.

Polarni (izvod):

U polarnom koordinatnom sustavu točka $T=(x,y)$ zadaje se pomoću kuta φ kojeg polu-pravac koji izlazi iz ishodišta i prolazi točkom T zatvara s x-osi i udaljenošću r točke T od ishodišta (slika 2.17).



Transformacije iz polarnog u Kartezijev koordinatni sustav vrše se prema formulama

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Transformacije iz Kartezijevog u polarni koordinatni sustav vrše se prema formulama

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

pri čemu se kvadrant u kojem se nalazi kut φ odredi sa slike ili iz kombinacije predznaka od x i y. Vidimo da je polarni koordinatni sustav, kao i gornje formule, identične formulama za trigonometrijski oblik kompleksnog broja iz [M1, �1.8.1].

Traženje površine likova zadanih u polarnom koordinatnom sustavu prikazano je na Slici 2.18. U polarnom koordinatnom sustavu krivulju zadajemo formulom

$$r = f(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}.$$

Zbog prirode samog sustava obično tražimo površinu između krivulje $r=f(\varphi)$ i zraka $\varphi=\varphi_1$ i $\varphi=\varphi_2$.

Shodno tome, element površine u polarnom koordinatnom sustavu je kružni isječak radijusa r s kutom $d\varphi$, odnosno

$$dP = \frac{1}{2} r^2\, d\varphi.$$

Kao i Kartezijevim koordinatama, površina je jednaka beskonačnoj (integralnoj) sumi beskonačno malih elemenata površine, odnosno

$$P = \int\limits_{[\varphi_1,\varphi_2]} dP = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Izvesti formulu za računanje duljine luka ravninske krivulje u Kartezijevim koordinatama, parametarskim i polarnim koordinatama.

Postupak računanja duljine luka ravninske krivulje još se naziva rektifikacija krivulje. Slično kao i kod računanja površine, duljinu luka krivulja $y=f(x)$ od točke $x=a$ do točke $x=b$ računamo kao beskonačnu (integralnu) sumu beskonačno malih elemenata duljine ds. Formula za element duljine slijedi iz Pitagorinog poučka i činjenice da se funkcija u okolini neke točke može aproksimirati njenom tangentom (slika 2.21),

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+y'^2}\,dx. \quad (2.4)$$

Ovdje po dogovoru uzimamo da je duljina luka pozitivna ako x raste, odnosno ako je dx pozitivan. Dakle, duljina luka krivulje $y=f(x)$ od točke $x=a$ do točke $x=b$ računa se formulom

$$S=\int_{[a,b]} ds=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Parametarski:

Kod parametarski zadane krivulje

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \qquad t\in\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R},$$

element duljine je dan s

$$dS=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt,$$

pa se duljina luka računa formulom

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

Iz ove formule slijedi da je duljina luka pozitivna kada je dt nenegativan, odnosno kada t raste.

Polarni:

Krivulju zadanu u polarnim koordinatama: $r=r(\varphi), \qquad \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2],$

prvo pomoću transformacija prebacimo u parametarski oblik $x=r\cos\varphi=r(\varphi)\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi=r(\varphi)\sin\varphi.$

Sada je: $\dot{x}=r'(\varphi)\cos\varphi+r(\varphi)(-\sin\varphi), \qquad \dot{y}=r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi,$

Odnosno:

$$\begin{aligned}\dot{x}^2+\dot{y}^2 &= (r'(\varphi))^2\cos^2\varphi+r^2(\varphi)\sin^2\varphi-2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\\ &\quad +(r'(\varphi))^2\sin^2\varphi+r^2(\varphi)\cos^2\varphi+2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\\ &= (r'(\varphi))^2+r^2(\varphi).\end{aligned}$$

Dakle, duljinu luka krivulje u polarnim koordinatama računamo formulom

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi^2}\sqrt{r'^2+r^2}\,d\varphi.$$

Izvesti formulu za univerzalnu trigonometrijsku supstituciju.

Univerzalna trigonometrijska supstitucija

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \tag{1.4}$$

vrijedi za $x/2 \in (-\pi/2, \pi/2)$ odnosno za $x \in (-\pi, \pi)$. Dakle,

$$x = 2\operatorname{arctg} t$$

pa je

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Adicioni teorem [M1, �4.6.5] daje

$$\sin x = 2\,\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\,t\cos^2\frac{x}{2},$$

a osnovni trigonometrijski identitet daje

$$\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right) = 1,$$

odnosno

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Dakle,

$$\sin x = \frac{2\,t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Opisana supstitucija vrijedi za $x \in (-\pi, \pi)$, a za ostala područja je potrebno izvršiti odgovarajuće prilagodbe formula. Potreba za takvim modifikacijama se često javlja kod određenog integrala, u kojem granice integracije određuju područje na kojem supstitucija mora vrijediti. Slična napomena vrijedi i za ostale trigonometrijske supstitucije.