DISKRETNA MATEMATIKA

RIJEŠENI ISPITNI ZADATCI SA FERA
(STARI KOLEGIJ DM)

Xan McGregor

I KONTROLNA ZADAĆA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

28.04.1998.

1.(25 bod.)

Zadan je ternarna logička operacija:

$$(A, B, C)^* = A \wedge B \vee C.$$

Odredi tablicu istinitosti za formulu

$$((A, B, A)^*, B \implies C, \neg C)^*.$$

Nađi joj disjunktivnu ili konjunktivnu formu. Minimiziraj izraz.

2.(25 bod.)

Odredi Booleovu funkciju E tako da za trobitni ulaz A, B, C koji predstavlja znamenke binarnog broja $(ABC)_2$ vrijedi

$$E = 1 \iff (ABC)_2 \equiv 1 \pmod 4 \quad \text{ili} \quad (ABC)_2 \equiv 2 \pmod 4$$

Minimiziraj broj operacija.

3.(25 bod.)

Odredi prirodne brojeve k za koje vrijedi tvrdnja:

broj je djeljiv s k onda i samo onda ako mu je suma znamenki u sustavu s bazom 7 djeljiva s k.

4.(25 bod.)

U hotel u jedno malo planinsko mjesto stiglo je n sudionika nekog savjetovanja. Sve sobe u hotelu su jednokrevetne i imaju krasan pogled na vrhove, ali ih samo b od ukupno n ima balkon. v sudionika savjetovanja su VIP i moraju dobiti sobu s balkonom. Među sudionicima savjetovanja je i s studenata kojima se trebaju dati sobe bez balkona . Ostale sudionike može se smjestiti bilo kako.

Na koliko načina se mogu sudionici tog savjetovanja smjestiti u sobe, ako je $v \leq b$ i $s \leq n - b$?

Dozvoljena je uporaba računala.

Vrijeme pisanja zadaće je 60 min.

A-201

1. kontrolna zadaća iz DISMAT-a
24. travnja 1999.

1. **(25 bodova)**
Zadan je tročlani skup logičkih operacija koji čine disjunkcija, ekvivalencija, i ekskluzivna disjunkcija. Dokazati da je taj skup sustav izvodnica algebre sudova. Pomoću navedenih operacija napisati formulu algebre sudova

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

2. **(25 bodova)**
U apstraktnoj Booleovoj algebri minimizirati izraz

$$(A + \overline{BC})(A + \overline{B})(\overline{\overline{A}B} + C\overline{B}A).$$

3. **(25 bodova)**
Dokazati tvrdnju: ako su p i $8p^2 + 1$ prosti brojevi, onda je i $8p^2 + 2p + 1$ prost broj. (Neobvezni naputak: pogledati najprije za koje su proste brojeve ispunjeni uvjeti tvrdnje.)

4. **(25 bodova)**
Koliko ima n-teroznamenkastih brojeva koji imaju barem 3 neparne znamenke ($n > 3$)? Obrazložiti rješenje!

Primjedba (pročitati studentima): Dozvoljena je uporaba, a zabranjena posudba računala. Na prvu stranicu arka papira napisati ime i prezime, matični broj, te grupu (4A, 4B, 4C ili 4D). Studenti koji su predmet odslušali ranije upisuju pored grupe i školsku godinu na koju se ta grupa odnosi.

1. kontrolna zadaća iz DISMAT-a
15. travnja 2000.

1. **(30 bodova)**

Odrediti Booleovu funkciju F koja za ulazne varijable A, B, C i D na izlazu daje 1 ako je broj

$$n = (ABCD)_2 + (BADC)_2 + (CBDA)_2 + (DBAC)_2$$

neparan, a 0 ako je n paran. Minimizirati broj operacija od F.

2. **(30 bodova)**

a) Postoji li prirodni broj n, takav da njegova 4. potencija pri dijeljenju s 3 dade kvocijent koji je prim broj i ostatak 0?
b) Postoji li prirodni broj m, takav da njegova 4. potencija pri dijeljenju s 3 dade kvocijent koji je prim broj i ostatak 1?
Tvrdnje dokazati, a u slučaju pozitivnog odgovora naći sve takve brojeve n odnosno m.

3. **(40 bodova)**

Dana je riječ POPOKATEPETL.
a) Koliko se različitih riječi može sastaviti od svih njenih 12 slova, tako da se u sastavljenoj riječi pojavi slijed slova PETAK?
b) Koliko se različitih riječi može sastaviti od svih njenih 12 slova tako da sastavljena riječ bude po abecedi ispred riječi PARIZ?

Primjedbe: Dozvoljena je uporaba, a zabranjena posudba računala.

Student je na prvu stranicu arka papira, uz uobičanjene podatke, dužan napisati prezime predavača (Šparac ili Žubrinić) i prezime voditelja auditornih vježbi (Brnetić ili Pavčević).

Prva kontrolna zadaća iz Diskretne matematike

26. 4. 2001.

1. **(2 boda)** Zadana je binarna logička operacija $\diamond$ tablicom istinitosti

A	B	$A \diamond B$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Dokazati da je skup $\{\neg, \diamond\}$ sustav izvodnica algebre sudova.

2. **(2 boda)** Minimizirati izraz

$$[\prod_{i=1}^{n-1} (\overline{A_i} + A_{i+1})] \cdot [\prod_{i=1}^{n-1} (A_i + A_{i+1})]$$

u apstraktnoj Booleovoj algebri.

3. **(3 boda)** Odrediti posljednje dvije znamenke u prikazu broja 123^{321} u oktalnoj bazi.

4. **(3 boda)** Poznato je da standardna kutija za jaja ima 10 mjesta i da se jaja u nju slažu u 2 reda po 5 komada. Iz velike zdjele s 20 žutih, 24 crvene i 26 plavih pisanica moramo izabrati njih 10 i složiti ih u standardnu kutiju tako da u svakom redu budu zastupljene sve tri boje. Pritom sva mjesta u kutiji razlikujemo, kao i sva jaja, budući da imaju nalijepljene preslikače. Koliko različitih kutija s pisanicama možemo složiti?

Primjedba Dozvoljeno je korištenje, a zabranjeno posuđivanje džepnih računala.

RJEŠENJA 1. KONTROLNIH ZADAĆA IZ DISKR. MAT.

1998

[1] $A \wedge (B \Rightarrow C) \vee \neg C$

K.F $= (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) = A \vee \neg C$

[2] $(B+C)\cdot\overline{B\cdot C}$

[3] $7 \equiv 1 \pmod{k}$, $k \mid 7-1$, $k = 2,3,6$ (i 1)

[4] $\binom{b}{v} v! \binom{n-b}{s} s! (n-v-s)! = \binom{n-v-s}{b-v} \cdot b!(n-b)!$

1999

[1.] $\{\neg, \vee\}$ - SUST. IZV. i $\neg A = (A \veebar A) \Leftrightarrow A$

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv A \Leftrightarrow B$

[2.] $A + \overline{B}$

[3.] p i $8p^2+1$ PROSTI JEDINO ZA $p = 3$. $\Rightarrow 8p^2+2p+1 = 79$ - PROST

[4.] $9 \cdot 10^{n-1} - 5^{n-1}(2n^2+3n+4)$

2000

[1] $A\overline{D} + \overline{A}D = \overline{AD} \cdot (A+D)$

[2] a) NE

b) DA $n=2$

[3] a) $\frac{8!}{2!2!} = 20160$

b) $\frac{7 \cdot 11! + 3 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9!}{3! \cdot (2!)^3} = 6\,002\,640$

2001

[1] $\{\neg, \wedge\}$ - SUST. IZV i $A \wedge B = A \diamond (\neg B)$

[2] $A_2 A_3 \cdots A_n$

[3] 73 $\quad ((73)_8 = 59)$

[4] NE RJEŠAVATI!!

1. Kontrolna zadaća iz Diskretne matematike

12.4.2002

1.(2 boda) Odredite Booleovu funkciju F koja za ulazne varijable A, B, C na izlazu daje 1 ako je

$$(AB)_2 + (BC)_2 = (ABC)_2.$$

2. (3 boda) Neka je $\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Dani su predikati $P(x, y, z) \equiv 4x + y = z$, $R(x, y, z) \equiv x = y = z$, $S(x, y) \equiv x > 2y$, $Q(x) \equiv$ *x je paran*. Za koliko trojki $(x, y, z) \in \mathcal{D}^3$ je sljedeća formula istinita:

$$Q(x) \Longrightarrow ((P(x, y, z) \vee R(x, y, z)) \Longrightarrow S(x, 2)).$$

3.(2 boda) Neka su x, y elementi Booleove algebre sa svojstvom $x + \bar{y} = \bar{y}$. Pokaži da je $xy = 0$.

4. (3 boda) Postoje li prosti brojevi p *i* q takvi da se broj pq može zapisati u obliku $pq = n^2 - 5n + 6$, gdje je n prirodan broj?

Zabranjena je uporaba priručnika i računala .

Rezultati su

1. KONTROLNA ZADAĆA (DISMAT, 12.4.2002)

---

① $(AB)_2 + (BC)_2 = (ABC)_2 \Rightarrow$

$2A + B + 2B + C = 4A + 2B + C \Rightarrow B = 2A \Rightarrow A = B = 0$

$\Rightarrow F = 1$ za $A = B = C = 0$, ili $A = B = 0, C = 1 \Rightarrow$

$F(A,B,C) = \underline{\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}\,C} = \bar{A}\,\bar{B} = \overline{A+B}$ ✓

---

② $\underbrace{Q(x)}_{\top} \Rightarrow \left(\underbrace{(P(x,y,z) \vee R(x,y,z))}_{\top} \Rightarrow \underbrace{S(x,2)}_{\perp} \right)$

$Q(x) \equiv \top \Rightarrow x \in \{2,4,6,8,10\}$
$S(x,2) \equiv \perp \Rightarrow x \le 4$
$\Rightarrow x \in \{2,4\}$

$P \vee R \equiv \top \Rightarrow 4x + y = z$ ili $x = y = z$

$x = 2 \Rightarrow (2,1,9), (2,2,10), (2,2,2)$
$x = 4 \Rightarrow (4,4,4)$
$\Rightarrow 1000 - 4 = \underline{996}$ ✓ trojki daje istinitu formulu

---

③ $x + \bar{y} = \bar{y} \,/\, y \Rightarrow xy + y\bar{y} = y\bar{y} \Rightarrow xy = 0$

---

④ $pq = n^2 - 5n + 6 = (n-2)(n-3)$ i neka $p > q$

$\Rightarrow p = n-2,\ q = n-3 \Rightarrow$ jedan paran $\Rightarrow \underline{p=3}, \underline{q=2}$ ✓

1.KONTROLNA ZADAĆA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

07.04.2004.

1. **(2 boda)** Dokazati da je skup

$$P = \{p(t) = at + b : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

svih polinoma stupnja najviše jedan s cjelobrojnim koeficijentima prebrojiv.

2. **(3 boda)** Neka je $\mathcal{U} = \{1, 2, \ldots, 100\}$ univerzalni skup na kojem su zadani sljedeći predikati

$$\begin{aligned}
P(x,y) &\equiv y \text{ je djeljiv s } x \\
Q(x,y,z) &\equiv y + z \geqslant x \\
R(x,y,z) &\equiv y + z \text{ je djeljiv s } x \\
S(x,y,z) &\equiv \text{Barem jedan od brojeva } x, y, z \text{ je strogo veći od 50.}
\end{aligned}$$

Za koliko uređenih trojki $(x, y, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ je formula algebre predikata

$$(\forall x \;\; Q(x,y,z)) \wedge \neg S(y, 15, z) \Rightarrow \neg P(x,z) \vee R(x,y,5)$$

istinita?

3. **(2 boda)** Odrediti Booleovu funkciju koja za trobitni ulaz A, B, C na izlazu daje 1 ako broj $(ABC)_2$ pri djeljenju s 3 daje ostatak 1, a 0 inače.

4. **(3 boda)** Naći sve cijele brojeve $x, y \in \mathbb{Z}$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$$xy = 20 - 3x + y.$$

RJEŠENJA 1.KONTROLNE ZADAĆE IZ DISKRETNE MATEMATIKE

07.04.2004.

1. Da bi se dokazalo da je skup P prebrojiv treba konstruirati dvije injekcije

$$f : \mathbb{N} \to P$$

$$g : P \to \mathbb{N}.$$

Injekcija f jednostavno prirodnom broju n pridružuje konstantan polinom $p(t) = n$.

Injekciju g konstruira se na sljedeći način. Neka je $p(t) = at + b \in P$. Cijele brojeve a i b može se na jedinstven način zapisati u obliku $a = p_1 a'$ i $b = p_2 b'$ gdje su $p_1, p_2 \in \{\pm 1\}$, a $a', b' \in \mathbb{N}_0$ uz dogovor $p_1, p_2 = 1$ za $a', b' = 0$. Time je P parametriziran s p_1, p_2, a', b'. Tada se funkcija g definira formulom

$$g(p) = 2^{p_1+1} 3^{a'} 5^{p_2+1} 7^{b'}$$

što je injekcija zbog jedinstvenosti rastava na proste faktore.

2. Zadana formula je lažna ako i samo ako su predikati $P(x, z)$ i $\forall x\ Q(x, y, z)$ istiniti, a predikati $R(x, y, 5)$ i $S(y, 15, z)$ lažni.

Predikat $\forall x\ Q(x, y, z)$ je istinit ako i samo ako vrijedi $y + z \geqslant 100$, a $S(y, 15, z)$ je laž ako i samo ako vrijedi $y, z \leqslant 50$. Stoga su ova dva uvjeta ispunjena ako i samo ako je $y = z = 50$. Nadalje, uzimajući u obzir $y = z = 50$, predikat $P(x, z)$ je istinit ako i samo ako je 50 djeljiv s x to jest $x \in \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$. Međutim, $R(x, y, 5)$ je lažan ako i samo ako 55 nije djeljiv s x, pa otpadaju mogućnosti $1, 5$.

Dakle, zadana formula je lažna ako i samo ako $x \in \{2, 10, 25, 50\}$, $y = 50$ i $z = 50$, a to je za 4 uređene trojke. Stoga je formula istinita za $100^3 - 4 = 999996$ trojki.

3. Disjunktivna forma zadane Booleove funkcije je

$$F(A, B, C) = (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C).$$

4. Zadana jednadžba se može pisati u obliku

$$(x - 1)(y + 3) = 17.$$

Budući da su u zagradama cijeli brojevi, a 17 je prost jednadžba ima četiri rješenja:

(i) $x - 1 = 1$ i $y + 3 = 17$, odnosno $x = 2$ i $y = 14$,

(ii) $x - 1 = 17$ i $y + 3 = 1$, odnosno $x = 18$ i $y = -2$,

(iii) $x - 1 = -1$ i $y + 3 = -17$, odnosno $x = 0$ i $y = -20$,

(iv) $x - 1 = -17$ i $y + 3 = -1$, odnosno $x = -16$ i $y = -4$.

PRVI KOLOKVIJ IZ DISKRETNE MATEMATIKE
07.04.2005.

1. **(2 boda)** Zadan je ternarni operator algebre sudova

$$(A, B, C)^* = A \wedge B \vee C.$$

Koristeći tablicu istinitosti za formulu

$$\mathcal{F} \equiv ((A, B, A)^*, B \Rightarrow C, \neg C)^*$$

odrediti konjunktivnu formu od $\mathcal{F}$ te zatim minimizirati broj operacija.

2. **(2 boda)** Da li je skup svih vektora $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ iz V^3 sa cjelobrojnim koordinatama $a, b, c \in \mathbb{Z}$ prebrojiv? Dokazati tvrdnju!

3. **(2 boda)** Odrediti Booleovu funkciju F koja za ulazne varijable A, B, C i D na izlazu daje 1 ako je broj jedinica na ulazu jednak $(ABCD)_2$, a 0 inače.

4. **(4 boda)** Odrediti sve proste brojeve x, y i z koji zadovoljavaju jednadžbu

$$2^{x+1} + y^2 = z^2.$$

RJEŠENJA 1.KONTROLNE ZADAĆE IZ DISKRETNE MATEMATIKE

11.04.2005.

1. $\mathcal{F} \equiv (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) = A \vee \neg C$.

2. Prebrojivost zadanog skupa S dobije se konstrukcijom injekcija $f : \mathbb{N} \to S$ i $g : S \to \mathbb{N}$.

   Na primjer, za f se može uzeti

   $$f(n) = n\vec{i} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

   što je očito injekcija.

   Obratno, da bi definirali g koeficijente $a, b, c \in \mathbb{Z}$ rastavimo na $a = p_1 a'$, $b = p_2 b'$, $c = p_3 c'$, gdje su $p_1, p_2, p_3 \in \{\pm 1\}$ predznaci, a $a', b', c' \in \mathbb{N}_0$ apsolutne vrijednosti brojeva a, b, c. Pritom, ako je neki od koeficijenata jednak nuli, za njegov predznak uzmimo 1. Tada se g definira kao

   $$g(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) = 2^{p_1+1} 3^{a'} 5^{p_2+1} 7^{b'} 11^{p_3+1} 13^{c'} \quad \forall a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \in S.$$

   To je injekcija zbog jedinstvenosti rastava na proste faktore.

3. Disjunktivna forma zadane Booleove funkcije je

   $$F(A, B, C, D) = (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D) + (\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}).$$

4. Zadana jednadžba se može pisati u obliku

   $$2^{x+1} = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y).$$

   1. Način: Kvadrat prirodnog broja koji nije djeljiv s 3 daje pri djeljenju s 3 ostatak 1. Stoga ako su i y i z prosti brojevi različiti od 3 onda je razlika njihovih kvadrata $z^2 - y^2$ djeljiva s 3. Međutim, na lijevoj strani je potencija od 2 pa zbog jedinstvenosti rastava na proste faktore u tom slučaju jednadžba nema rješenja. Preostaje provjeriti slučaj $z = 3$ i slučaj $y = 3$.

      Ako je $z = 3$ onda zbog očite nejednakosti $y < z$ slijedi da je $y = 2$. Ali tada bi $z^2 - y^2 = 5$, a to nije potencija od 2, pa ni u ovom slučaju jednadžba nema rješenja.

      Ako je $y = 3$ onda je $z > 3$ i jednadžba glasi

      $$2^{x+1} = (z - 3)(z + 3).$$

      Opet zbog jedinstvenosti rastava na proste faktore izrazi $z - 3$ i $z + 3$ moraju biti potencije od 2, a njihova razlika je $(z + 3) - (z - 3) = 6$.

Kako je već razlika $2^4 - 2^3 = 8 > 6$ direktnom provjerom slijedi da je taj uvjet ispunjen jedino za

$$z - 3 = 2,$$

$$z + 3 = 8,$$

odnosno $z = 5$. Na kraju se iz jednadžbe izračuna da je $x = 3$.

2. Način: Zbog jedinstvenosti rastava na proste faktore i očitih tvrdnji da je $y < z$ te $z - y < z + y$ slijedi da su obe zagrade na desnoj strani potencije broja 2. Neka je

$$z - y = 2^k,$$

$$z + y = 2^l,$$

gdje su $0 \leqslant k < l \leqslant x + 1$ i vrijedi $k + l = x + 1$. Zbrajanjem i oduzimanjem gornjih jednadžbi dobiva se

$$y = 2^{l-1} - 2^{k-1} = 2^{k-1}(2^{l-k} - 1),$$

$$z = 2^{l-1} + 2^{k-1} = 2^{k-1}(2^{l-k} + 1).$$

Zbog $k < l$ izraz $2^{l-k} + 1 > 1$ pa da bi z bio prost mora biti $k = 1$, pa onda i $l = x$. Stoga je

$$y = 2^{x-1} - 1,$$

$$z = 2^{x-1} + 1.$$

Sada je jasno $(x > 1)$ da su brojevi $y = 2^{x-1} - 1$, 2^{x-1} i $z = 2^{x-1} + 1$ tri uzastopna prirodna broja pa je točno jedan od njih djeljiv s 3. Ali kako to nije 2^{x-1} jer je potencija od 2, a y i z su prosti i $y < z$ slijedi da je $y = 3$. Tada se odmah iz gornje dvije jednadžbe dobije i $x = 3$, $z = 5$.

Dakle, jedino rješenje jednadžbe u skupu prostih brojeva je $x = 3$, $y = 3$, $z = 5$.

PRVI KOLOKVIJ IZ DISKRETNE MATEMATIKE
13.04.2005.

1. **(2 boda)** Dokazati da je skup svih jediničnih kružnica u ravnini s cjelobrojnim koordinatama središta prebrojiv.

2. **(2 boda)** Neka su x i y elementi apstraktne Booleove algebre za koje vrijedi

$$x + y = y.$$

   (a) Dokazati da je tada $x \cdot y = x$.

   (b) Ako je $y \neq 0$ da li mora biti $x = 0$? Obrazložiti odgovor!

3. **(3 boda)** Odrediti Booleovu funkciju F koja za ulazne varijable A, B i C na izlazu daje 1 ako u binarnom brojevnom sustavu vrijedi jednakost

$$(AB)_2 + (BC)_2 = (ABC)_2,$$

a 0 inače. Minimizirati broj operacija.

4. **(3 boda)** Odrediti sve prirodne brojeve x, y i z od kojih niti jedan nije djeljiv s 3, te sve proste brojeve p takve da vrijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 = p^2.$$

RJEŠENJA 1. KOLOKVIJA IZ DISKRETNE MATEMATIKE
13.04.2005.

1. Svaka kružnica u zadanom skupu S određena je svojim središtem.

   1. NAČIN Prebrojivost skupa S dobije se konstrukcijom injekcija $f : \mathbb{N} \to S$ i $g : S \to \mathbb{N}$.

      Na primjer, za f se može uzeti

      $$f(n) = \text{kružnica sa središtem (n,0)},$$

      što je očito injekcija.

      Obratno, da bi definirali g uočimo da su središta kruňica određena parovima cijelih brojeva koje možemo pisati kao predznak ± 1 puta prirodni broj ili nula (uz dogovor da za nulu uzmemo predznak 1 i 0). Tada je

      $$g(p_1 n_1, p_2 n_2) = 2^{p_1+1} 3^{n_1} 5^{p_2+1} 7^{n_2}$$

      dobro definirana injekcija.

   2. NAČIN Središta kružnica možemo složiti u niz na sljedeći način: krenemo od ishodišta, zatim se pomaknemo za 1 u desno u točku (1,0), napravimo 'krug' oko ishodišta čime pokupimo točke

      $$(1,1), (0,1), (-1,1), (-1,0), (-1,-1), (0,-1), (1,-1).$$

      Zatim se pomaknemo u desno u točku $(2,0)$, opet napravimo 'krug' itd. Na taj način sva središta smo složiti u niz.

2. (a) $x \cdot y = x \cdot (x + y) = x$ po zakonu apsorpcije.

   (b) Ne, na primjer $x = y \neq 0$ zadovoljava uvjet zadatka.

3. Disjunktivna forma zadane Booleove funkcije je

   $$F(A, B, C) = (\bar{A}\bar{B}C) + (\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = \overline{A + B}.$$

4. Brojevi x, y, z nisu djeljivi s 3 pa njihovi kvadrati pri djeljenju s tri daju ostatak 1 jer

   $$(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1.$$

   Stoga je zbroj $x^2 + y^2 + z^2$ djeljiv s 3, a to je moguće jedino ako je i p^2 djeljiv s 3. Jedini prost broj djeljiv s 3 je $p = 3$. Stoga preostaje odrediti prirodne brojeve x, y, z takve da vrijedi

   $$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Očito $x, y, z \leqslant 2$ pa su sva rješenja

$$x = 1, y = 2, z = 2, p = 3,$$

$$x = 2, y = 1, z = 2, p = 3,$$

$$x = 2, y = 2, z = 1, p = 3.$$

2. kontrolna zadaća iz Diskretne matematike

17.5.2002

1. (3 boda) Na koliko načina možemo 10 čokolada podijeliti Kreši, Igoru, Marijani, Siniši i Pini, tako da Pina dobije jednu čokoladu više nego Marijana?

2. (2 boda) Unutar jednakostraničnog trokuta stranice 1 nasumce odaberemo 13 točaka. Pokažite da postoje 4 točke koje su sadržane u krugu promjera 1.

3. (2 boda) Nadjite funkciju izvodnicu za niz $a_n = (n-1)^2,\ n \geq 0$.

4. (3 boda) Nadjite opće rješenje rekurzije:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3 \cdot 2^n - \frac{n}{2},\ n \geq 2,$$

$$a_0 = a_1 = 1.$$

Zabranjena je uporaba priručnika i računala .

Rezultati su

Rezultati 2. kontrolne zadaće iz Diskretne matematike

17.5.2002

1. zadatak

$$\sum_{m=0}^{4} \binom{11-2m}{2} = 125.$$

2. zadatak Trokut podijelimo na četiri jednaka jednakostranična trokuta stranice $\frac{1}{2}$ Oko svakog opišemo kružnicu koja ima radijus manji od $\frac{1}{2}$.

3. zadatak

$$f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 1}{(1-x)^3}$$

.

4. zadatak

$$a_n = (3 - \frac{11}{4}n + \frac{3}{2}n^2)2^n - \frac{1}{2}n - 2.$$

2. KONTROLNA ZADAĆA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

12.05.2004.

1. **(1+1+1 bod)** Odrediti koje su od sljedećih algebarskih struktura polugrupe, koje monoidi, a koje grupe:

   (a) skup svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uz operaciju kompozicije funkcija;

   (b) skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, gdje je $x \in \mathbb{R}$, uz operaciju množenja matrica;

   (c) otvoreni interval $\langle 0, 1\rangle$ uz operaciju množenja realnih brojeva.

   Dokazati tvrdnje! Poznata svojstva kompozicije funkcija, množenja matrica i množenja realnih brojeva ne treba dokazivati.

2. **(3 boda)** Funkcija
$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8$$
   zadana je pravilom
$$f(n) = \text{ostatak pri dijeljenju broja } 2n \text{ s } 8.$$
   Koristeći svojstva kongruencija dokazati da je f homomorfizam grupa $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ te odrediti jezgru i sliku od f.

3. **(2+1+1 bod)** U konačnom polju od 25 elemenata konstruiranom pomoću ireducibilnog polinoma $q(t) = t^2 + t + 1$ izračunati:

   (a) multiplikativni inverz elementa $2t + 3$,

   (b) aditivni red elementa $2t + 3$,

   (c) $(2t + 3)^2 \cdot_{25} (t + 4) \cdot_{25} (2t + 3)^{-3}$.

RJEŠENJA 2. KONTROLNE ZADAĆE IZ DISKRETNE MATEMATIKE
12.05.2004.

1. (a) Kompozicija dviju funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ponovo takva funkcija. Asocijativnost uvijek vrijedi za kompoziciju funkcija. Neutralni element je identiteta odnosno funkcija $e(x) = x$. Međutim, nema svaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ svoj inverz, jer to svojstvo imaju samo bijekcije. Dakle, ova algebarska struktura je monoid (pa i polugrupa), ali nije grupa.

   (b) Produkt dviju matrica zadanog oblika je

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   što je opet matrica tog oblika. Množenje matrica je asocijativno. Neutralni element je jedinična matrica. Svaka matrica zadanog oblika ima inverz jer joj je determinanta jednaka 1. Taj inverz je jednak

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   što je opet matrica zadanog oblika. Dakle, ova algebarska struktura je grupa (pa i monoid i polugrupa).

   (c) Produkt dva realna broja iz zadanog intervala je ponovo realan broj iz tog intervala. Množenje realnih brojeva je asocijativno. Međutim, jedini mogući neutralni element za množenje realnih brojeva je broj 1, a on nije element zadanog intervala. Dakle, ova algebarska struktura je polugrupa, ali nije monoid (pa ni grupa).

2. Funkcija f je homomorfizam ako vrijedi

$$f(n+m) = f(n) +_8 f(m)$$

   za sve $n, m \in \mathbb{Z}$, odnosno ako je ostatak pri dijeljenju broja $2(n+m) = 2n + 2m$ s 8 jednak ostatku pri dijeljenju s 8 zbroja ostataka brojeva $2n$ i $2m$ pri dijeljenju s 8. Ta jednakost ostataka je posljedica činjenice da se kongruencije mogu zbrajati.

   Jezgra od f je skup svih cijelih brojeva n takvih da je $2n$ djeljiv s 8. Dakle,

$$Ker f = 4\mathbb{Z}.$$

   Slika od f je skup svih ostataka koje parni brojevi mogu dati pri dijeljenju s 8. Dakle,

$$Im f = \{0, 2, 4, 6\}.$$

3. (a) $(2t+3)^{-1} = 4t+3$,
   (b) aditivni red od $2t+3$ je 5,
   (c) množenje u polju je komutativno pa je zadani produkt jednak

$$(t+4) \cdot_{25} (2t+3)^{-1} = (t+4) \cdot_{25} (4t+3) = 3.$$

2. KOLOKVIJ IZ DISKRETNE MATEMATIKE
12.05.2005.

1. **(2 boda)** Neka je $(G, *)$ komutativna konačna grupa neparnog reda jednakog n. Dokazati da tada vrijedi

$$g_1 * g_2 * \ldots * g_n = e_G,$$

gdje su $g_1, g_2, \ldots, g_n$ svi međusobno različiti elementi grupe G.

2. **(3 boda)** Naći sve podgrupe grupe $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ te sve homomorfizme grupa

$$f : (\mathbb{Z}_4, +_4) \to (\mathbb{Z}_4, +_4).$$

Za dobivene homomorfizme odrediti jezgru i sliku.

3. **(1+2+2 boda)** Konačno polje od $49 = 7^2$ elemenata konstruirano je koristeći ireducibilni polinom $q(t) = t^2 + 1$. Izračunati:

   (a) karakteristiku polja,

   (b) multiplikativni red elementa $5t$,

   (c) multiplikativni inverz od $4t + 3$.

RJEŠENJA 2. KOLOKVIJA IZ DISKRETNE MATEMATIKE
12.05.2005.

1. U grupi neparnog reda nema elemenata reda 2 pa je, osim za neutralni element, $g \neq g^{-1}$. Koristeći komutativnost grupe elemente $g_1, \ldots, g_n$ poredamo tako da su element grupe i njegov inverz jedan do drugoga. Svi takvi parovi daju neutralni element pa je tvrdnja dokazana.

2. Podgrupe su $\{0\}, \{0,2\}, \mathbb{Z}_4$. Homomorfizmi su određeni slikom elementa 1 koji generira cijelu grupu. Ima ih 4 i to

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, \\ f_2(x) &= x, \\ f_3(x) &= \text{ostatak pri dijeljenju } 2x \text{ s } 4, \\ f_4(x) &= \text{ostatak pri dijeljenju } 3x \text{ s } 4. \end{aligned}$$

Jezgre su redom

$$\begin{aligned} Ker(f_1) &= \mathbb{Z}_4, \\ Ker(f_2) &= \{0\}, \\ Ker(f_3) &= \{0,2\}, \\ Ker(f_4) &= \{0\}, \end{aligned}$$

a slike

$$\begin{aligned} Im(f_1) &= \{0\}, \\ Im(f_2) &= \mathbb{Z}_4, \\ Im(f_3) &= \{0,2\}, \\ Im(f_4) &= \mathbb{Z}_4. \end{aligned}$$

3. **(1+2+2 boda)**
   (a) 7,
   (b) 12,
   (c) $6t + 6$.

DRUGI KOLOKVIJ IZ DISKRETNE MATEMATIKE
11.05.2006.

1. **(3 boda)** Koliko ima n–znamenkastih brojeva ($n \geqslant 3$) koji imaju točno 3 parne znamenke? Obrazložiti odgovor.

2. **(3 boda)** Na koliko načina je moguće podijeliti 25 jednakih jabuka trima djevojčicama i dvojici dječaka ako svaka djevojčica mora dobiti barem 4 jabuke, a svaki dječak najviše 7 jabuka. Obrazložiti odgovor.

3. **(2 boda)** U ravnini je zadano 25 pravaca. Svaki od njih obojan je jednom od tri boje: crvenom, žutom ili zelenom. Također, svaki od njih prolazi jednom od četiri zadane točke: A, B, C ili D. Dokazati:

   (a) da postoji barem devet pravaca obojenih istom bojom,

   (b) da postoji barem tri pravca obojena istom bojom koji prolaze istom točkom.

4. **(2 boda)** Naći opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n, \qquad n \geqslant 2.$$

RJEŠENJA 2. KOLOKVIJA IZ DISKRETNE MATEMATIKE
11.05.2006.

1. Razlikujemo dva slučaja ovisno o tome da li je parna znamenka na prvom mjestu ili nije. Ako je parna znamenka na prvom mjestu onda tu znamenku možemo izabrati na 4 načina. Mjesto za preostale dvije parne znamenke možemo izabrati na $\binom{n-1}{2}$ načina, a njih same na 5^2 načina. Neparne znamenke za preostalih $n-3$ mjesta možemo odabrati na 5^{n-3} načina. Dakle, po teoremu o uzastopnom prebrojavanju u ovom slučaju ima
$$4 \cdot \binom{n-1}{2} \cdot 5^{n-1}$$
brojeva.

   Ako parna znamenka nije na prvom mjestu, onda mjesta za 3 parne znamenke možemo odabrati na $\binom{n-1}{3}$ načina, a njih same na 5^3 načina. Neparne znamenke za preostalih $n-3$ mjesta možemo odabrati na 5^{n-3} načina. Dakle, po teoremu o uzastopnom prebrojavanju u ovom slučaju ima
$$\binom{n-1}{3} 5^n$$
brojeva.

   Dakle, rješenje je
$$4 \cdot \binom{n-1}{2} \cdot 5^{n-1} + \binom{n-1}{3} 5^n.$$

2. Zadatak ćemo riješiti koristeći funkcije izvodnice. Funkcija izvodnica za svaku djevojčicu je
$$f(x) = x^4 + x^5 + x^6 + \ldots = x^4 \cdot \frac{1}{1-x},$$
a za svakog dječaka
$$g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^7 = \frac{1-x^8}{1-x}.$$
Stoga treba naći koeficijent uz x^{25} za
$$F(x) = f(x)^3 g(x)^2 = x^{12}(1-x^8)^2(1-x)^{-5} =$$
$$x^{12}\left[1 - 2x^8 + x^{16}\right]\left[1 - \binom{-5}{1}x + \binom{-5}{2}x^2 - \binom{-5}{3}x^3 + \ldots\right],$$
a to je
$$-1 \cdot \binom{-5}{13} + 2 \cdot \binom{-5}{5}.$$

3. (a) Po Dirichletovom principu za $n = 25$ pravaca i $m = 3$ boje slijedi da postoji barem

$$\lfloor \frac{25-1}{3} \rfloor + 1 = 9$$

pravaca iste boje.

(b) Po Dirichletovom principu od tih $n = 9$ pravaca barem

$$\lfloor \frac{9-1}{4} \rfloor + 1 = 3$$

prolazi kroz jednu od $m = 4$ točke.

4. $a_n = (\alpha + \beta n)2^n + n + 4$.

3. kontrolna zadaća iz Diskretne matematike

4.6.2002

1. (2 boda) U grupi šesnaestih korijena iz jedinice nadjite sve elemente reda 8.

2. (2 boda) Neka su $\alpha = (12)(345)$ i $\gamma = (1452)(3)$ permutacije u S_5. Nadjite $\beta \in S_5$ takav da je $\alpha\beta = \gamma$.

3. (3 boda) Zadana je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

nad poljem $\mathbf{Z}_7$. Nadjite A^{-1} nad $\mathbf{Z}_7$.

4.(3 boda) Nad poljem $GF(4)$ koje je konstruirano pomoću ireducibilnog polinoma $q(t) = t^2 + t + 1$ ispitati da li postoji rješenje jednadžbe $x^2 = t + 1$. Ako rješenje postoji pronadjite ga i ispitajte jedinstvenost rješenja.

Zabranjena je uporaba priručnika i računala .

Rezultati su

Rezultati 3. kontrolne zadaće iz Diskretne matematike
4.6.2002

1. zadatak $C_{16} = \{z_k |\ k = 0, 1, 2, ..., 15\}$ gdje je $z_k = \cos\frac{2k\pi}{16} + i\sin\frac{2k\pi}{16}$.
Elementi reda 8 su:

$$e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}.$$

2. zadatak $\beta = \alpha^{-1}\gamma$, pa je stoga $\beta = (135)(2)(4)$.

3. zadatak

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

4. zadatak Jedino rješenje je $p(t) = t$, tj, $t^2 = t + 1$.

Zabranjena je uporaba priručnika i računala .

Rezultati su

3. KONTROLNA ZADAĆA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

02.06.2004.

1. **(2 boda)** Koliko ima pozitivnih djelitelja broja 126000 koji nisu potpuni kvadrati?

2. **(3 boda)** Koliko ima n–znamenkastih prirodnih brojeva ($n \geqslant 3$) koji sadrže barem jednu znamenku 2 i barem jednu znamenku 3 i barem jednu znamenku 0?

3. **(3 boda)** Od 50 jednakih kuglica 20 ih je obojano crveno, a 30 plavo. Na koliko načina je moguće rasporediti kuglice u četiri različite kutije označene s A, B, C i D tako da su ispunjena sva tri sljedeća uvjeta:

   (i) u kutijama A i B broj crvenih kuglica je paran, a plavih neparan;

   (ii) u kutijama C i D broj crvenih kuglica je neparan, a plavih paran;

   (iii) u svakoj od kutija A i D ima najviše 11 kuglica svake boje?

4. **(2 boda)** Naći opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-1)^{n-3}, \qquad n \geqslant 2.$$

RJEŠENJA 3. KONTROLNE ZADAĆE IZ DISKRETNE MATEMATIKE

02.06.2004.

1. Broj $126000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ ima ukupno $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 120$ pozitivnih djelitelja. Među njima su potpuni kvadrati oni kod kojih se svaki prosti faktor javlja paran broj puta pa takvih ima $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Dakle, pozitivnih djelitelja broja 126000 koji nisu potpuni kvadrati ima $120 - 12 = 108$.

2. Neka je S skup svih n–znamenkastih brojeva, te neka su A_1, A_2 i A_3, redom, skupovi n–znamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 2, 3 i 0. Tada je je broj n–znamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 2, 3 i 0 zapravo jednak $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$ i može se izračunati pomoću formule uključivanja i isključivanja.

   Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju vrijedi $|S| = 9 \cdot 10^{n-1}$, $|A_1| = |A_2| = 8 \cdot 9^{n-1}$ i $|A_3| = 9^n$ jer nula nikad ne smije biti na prvom mjestu. Slično, za presjeke po dva skupa vrijedi $|A_1 \cap A_2| = 7 \cdot 8^{n-1}$, $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 8^n$ te za presjek sva tri skupa $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 7^n$.

   Stoga,

   $$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = 9 \cdot 10^{n-1} - (2 \cdot 8 \cdot 9^{n-1} + 9^n) + (7 \cdot 8^{n-1} + 2 \cdot 8^n) - 7^n.$$

3. Budući da su raspodjele crvenih i plavih kuglica međusobno nezavisne posebno se računa broj raspodjela svake boje.

   Funkcija izvodnica za raspodjelu crvenih kuglica u kutije glasi

   $$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x^2 + \ldots + x^{10})(1 + x^2 + \ldots)(x + x^3 + \ldots)(x + x^3 + \ldots + x^{11}) \\ &= \frac{1 - x^{12}}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{x}{1 - x^2} \cdot \frac{x(1 - x^{12})}{1 - x^2} \\ &= x^2(1 - 2x^{12} + x^{24}) \left(1 - \binom{-4}{1} x^2 + \binom{-4}{2} x^4 - \binom{-4}{3} x^6 + \ldots \right). \end{aligned}$$

   Analogno se dobije da je i funkcija izvodnica za plave kuglice upravo jednaka $f(x)$. Stoga je rješenje zadatka produkt koeficijenata uz x^{20} i x^{30} u redu potencija $f(x)$ odnosno

   $$\left[-\binom{-4}{9} + 2\binom{-4}{3} \right] \cdot \left[\binom{-4}{14} - 2\binom{-4}{8} + \binom{-4}{4} \right].$$

4. Opće rješenje je

   $$a_n = (\lambda + \mu n)(-1)^n - \frac{1}{2} n^2 (-1)^n, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. KOLOKVIJ IZ DISKRETNE MATEMATIKE
06.06.2005.

1. **(3 boda)** Na turnir u tenisu prijavilo se $2n$ ljudi. Na koliko načina se mogu izvući parovi prvog kola, ako poredak parova i poredak ljudi u jednom paru nije bitan?

2. **(3 boda)** Koliko ima mogućih izvlačenja u lotu 6 od 45 kod kojih je barem jedan par izvučenih brojeva susjedan?

3. **(4 boda)** Riješiti rekurzivnu relaciju

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n - 2^{n+1}, \qquad n \geqslant 2,$$

uz početne uvjete $a_0 = 3$ i $a_1 = 5$.

RJEŠENJA 3. KOLOKVIJA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

06.06.2005.

1. Najprije odaberimo par po par u nekom poretku pa dobiveni broj podijelimo s brojem poredaka parova. Prvi par možemo odabrati na $\binom{2n}{2}$ načina, drugi na $\binom{2n-2}{2}$,..., n–ti na $\binom{2}{2}$ načina. Broj poredaka n parova ima $n!$. Dakle, broj izvlačenja parova prvog kola ima

$$\frac{\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}}{n!}$$

2. Ukupno ima $\binom{45}{6}$ izvlačenja. Treba oduzeti ona izvlačenja kod kojih nema susjednih brojeva. Takva izvlačenja prebrojimo tako da 39 kuglica poredamo u niz, a preostalih 6 ubacujemo među njih. Pritom pozicija ubačene kuglice određuje izvučeni broj. Ukupno ima 40 mjesta za kuglice i nikoje dvije ne smiju doći na isto mjesto jer bi to dalo susjedne brojeve. Dakle, izvlačenja bez susjednih brojeva ima $\binom{40}{6}$. Stoga je rješenje

$$\binom{45}{6} - \binom{40}{6}.$$

3. $a_n = (1-2n)2^n + n + 4 + n^2 2^n$.

TREĆI KOLOKVIJ IZ DISKRETNE MATEMATIKE

07.06.2006.

1. **(2 boda)** Neka je S zadana točka u ravnini. Dokazati da je skup svih rotacija sa središtem u točki S grupa uz kompoziciju.

2. **(3 boda)** Neka je $G = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$.

   (a) Dokazati da je G grupa uz operaciju množenja kompleksnih brojeva.

   (b) Odrediti sve elemente reda 4 u grupi G.

   (c) Dokazati da za svaki prirodni broj n grupa G sadrži podgrupu reda n.

3. **(2 boda)** Da li u simetričnoj grupi S_4 postoji podgrupa reda 3? Ako je odgovor da naći jednu takvu podgrupu, a ako je odgovor ne obrazložiti zašto.

4. **(3 boda)** U konačnom polju od 25 elemenata konstruiranom koristeći ireducibilni polinom $q(t) = t^2 + t + 1$ odrediti sve elemente multiplikativnog reda 3.

RJEŠENJA 3. KOLOKVIJA IZ DISKRETNE MATEMATIKE
07.06.2006.

1. Kompozicija dviju rotacija sa središtem u S je rotacija sa središtem u S, asocijativnost vrijedi uvijek za kompoziciju, neutralni element je identiteta (rotacija za nula stupnjeva), inverz rotacije je rotacija oko iste točke u suprotnom smjeru za jednaki kut. Dakle, skup svih rotacija sa središtem u S je grupa uz operaciju kompozicije.

2. (a) Skup G je podskup grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ pa možemo primjeniti kriterij za podgrupe. Za sve $z_1, z_2 \in G$ vrijedi

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1,$$

a za svaki $z \in G$ vrijedi

$$|z^{-1}| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1.$$

Stoga je G podgrupa po kriteriju.

(b) Elementi reda 4 moraju zadovoljavati jednadžbu

$$z^4 = 1$$

čija rješenja su ± 1, $\pm i$. Međutim, jedino $\pm i$ su zaista reda 4 (1 je reda 1, -1 reda 2).

(c) Za svaki prirodni broj n grupa $(C_n, \cdot)$ n–tih korijena iz jedinice je podgrupa od G reda n.

3. U S_4 postoji podgrupa reda 3. Svaka podgrupa generirana elementom reda 3 je takva. Stoga npr.

$$\{(1)(2)(3)(4), (1,2,3)(4), (1,3,2)(4)\}$$

je podgrupa od S_4 reda 3.

4. Multiplikativnog reda 3 su elementi t i $4t + 4$.

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

10.6.2002

1. (3 boda) Utvrdi ispravnost sljedećeg zaključivanja.
Ako Kristijan jede Neven spava. Ako Andrea trči Kristijan jede. Kristijan jede i Andrea ne trči. Ako Neven spava Andrea trči, stoga ako Kristijan ne jede Andrea ne trči.

2. (2 boda) Ako je prirodni broj a relativno prost sa 13 pokažite da broj 13 dijeli broj $a^{120} - 1$.

3. (4 boda) Na koliko načina možemo 5 kolača od višnje, 13 kolača od jabuke i 2 kolača od jagode podijeliti na 6 ljudi tako da:
a) svatko dobije po barem jedan kolač, a nitko dva od jagode,
b) nitko ne dobije skup kolača u kojima postoje kolači od višnje i jagode.

4. (3 boda) Nadjite broj rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$

gdje je $x_1 > 0$ paran, $x_2 \geq 0$, $x_3 > 0$ neparan.

5. (3 boda) Neka je (a_n) niz koji zadovoljava rekurziju

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 3,\ n \geq 0,\ a_0 = 1.$$

Pokažite da je svaki član tog niza kvadrat nekog prirodnog broja.

6. (2 boda) Neka je zadan skup $M = \{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \textit{ realan broj}\}$. Da li je taj skup grupa sa obzirom na standarno množenje matrica, a da li je grupa s obzirom na standarno zbrajanje matrica?

7. (3 boda) Nad poljem $GF(8)$ koje je konstruirano pomoću ireducibilnog polinoma $p(t) = t^3 + t + 1$ pronadjite sva rješenja jednadžbe

$$x^2 + x(t^2 + t) + t + 1 = 0$$

.

Zabranjena je uporaba priručnika.

Rezultati su

Upute i rješenja pismenog ispita iz Diskretne matematike

10.6.2002

1. zad Iz konjunktivne normalne forme se zaključi da funkcija F ima vrijednost 1 ako i samo ako je točno jedna varijabla ima vrijednost 1. Disjunktivna normalna forma je dana izrazom

$$ABCD + AB\overline{C}\overline{D} + AC\overline{B}\overline{D} + AD\overline{B}\overline{C}+$$

$$A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + BC\overline{A}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D}$$

$$CD\overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}.$$

2. zad Imamo $3^6 \equiv 1(mod\ 7)$, pa je $3^{600} \equiv 1(mod\ 7)$ i $3^{120} \equiv 1(mod\ 7)$, odavde je $3^{721} \equiv 3(mod\ 7)$.

3. zad Funkcija je surjekcija, a nije bijekcija jer npr. $f(31) = f(13) = 4$.

4. zad Sa $A_k,\ A_t,\ A_g$ označimo skup učenika koji sviraju klavir, trubu, gitaru. Imamo $|A_k \cup A_t \cup A_g| = r$,

$$|A_k \cup A_t \cup A_g| = |A_g| + |A_k| + |A_t| - |A_g \cap A_t| - |A_g \cap A_k| - |A_t \cap A_k|.$$

Odavde dobivamo $|A_g| = r - d - e + a + b + c$ pa je

$$|A_t \cup A_g| = |A_t| + |A_g| - |A_g \cap A_t| = r + b + c - d.$$

5. zad

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = (1 - \sqrt{3})(2^n - 1) + n\sqrt{3}.$$

6. zad $(\mathbf{Z}, *)$ nije grupa jer ne postoji neutralni element. Pokažimo to! Pretpostavimo da postoji neutralni element e. Tada je $3ae = a$ za svaki cijeli broj a. Stavimo $a = 1$, dobivamo $e = \frac{1}{3} \in \mathbf{Z}$ što je kontradikcija.

7. zad $x_1 = 0$, $x_2 = t^2 + 1$

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

10.7.2002

1. (2 boda) Odrediti Booleovu funkciju $F(A, B, C, D)$ koja na izlazu daje 1 ako je broj

$$(ABCD)_2 + (BCDA)_2 + (CDAB)_2 + (DABC)_2$$

djeljiv s 6, a nije djeljiv sa 9. U suprotnom $F(A, B, C, D)$ na izlazu daje 0.

2. (3 boda) Neka je n prirodni broj. Neka su p i q prosti brojevi relativno prosti sa n. Da li je tada

$$n^{pq-p-q+1} \equiv (pq + 1)(mod\ pq)?$$

Obrazložite svoje tvrdnje.

3. (3 boda) Na raspolaganju imamo n kamenčića, 1 lopticu i m boja ($m > 3$). Na koliko načina možemo napraviti ogrlicu od obojenih kamenčića i neobojene kuglice ako iskoristimo sve kamenčiće i kuglicu, uzimajući u obzir estetski razlog da susjedni kamenčići ne smiju biti jednako obojeni?

4. (3 boda) Koliko ima prirodnih brojeva većih od 100, a manjih od 850 koji su djeljivi sa 7, ili 11, ili 13?

5. (3 boda) Naći broj rješenja sustava

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1$$

u skupu prirodnih brojeva.

6. (3 boda) Neka je G konačna grupa. Da li je skup $Z = \{z \in G \mid zg = gz \text{ za svaki } g \in G\}$ podgrupa od G? Obrazložite odgovor.

7. (3 boda) Da li je polinom $p(x) = x^3 + 3x^2 + x + 4$ ireducibilan nad $GF(7)$? Obrazložite svoje tvrdnje.

Zabranjena je uporaba priručnika.

Rezultati su

Rezultati pismenog ispita iz Diskretne matematike

10.7.2002

(1. zad) $(ABCD)_2 + (BCDA)_2 + (CDAB)_2 + (DABC)_2 = 15 \cdot (A + B + C + D)$ zato je $F = 1$ kada je $A + B + C + D \in \{2, 4\}$, pa je $F = AB\bar{C}\bar{D} + AC\bar{B}\bar{D} + AD\bar{B}\bar{C} + BC\bar{A}\bar{D} + BD\bar{A}\bar{C} + CD\bar{A}\bar{B}$.

(2. zad) $n^{\varphi(pq)} \equiv 1(mod\ pq)$ i $pq + 1 \equiv 1(mod\ pq)$, iz tranzitivnosti slijedi da je kongruencije točna.

(3. zad) $n!m(m-1)^{n-1}$

(4. zad) Primjenom formule uključenja-isključenja imamo rezultat 210.

(5. zad) 11 različitih rješenja.

(6. zad) Neka su $w, z \in Z$, tada je $wzg = zwg =$ (z komutira sa svima iz G) $= zgw = ... = gwz$. Neka je sada $z \in Z$ tada je $(z^{-1}g)^{-1} = g^{-1}z = zg^{-1}$, zato je $z^{-1}g = (zg^{-1})^{-1} = gz^{-1}$. Stoga je $Z \leq G$.

(7. zad) Izračunati $p(0), p(1), ..., p(6)$ i ispitai da li su svi različiti od nule. Ako su svi različiti od nule tada je polinom ireducibilan.

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

29. 8. 2002.

1. (3 boda) Neka je $F(A,B,C,D,E)$ Booloeova funkcija koja ima vrijednost 1 ako je $(ABCDE)_2$ kvadrat nekog prirodnog broja, a 0 inače. Nadjite perfektnu konjunktivnu i disjunktivnu formu funkcije F.

2. (2 boda) Da li je funkcija $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Z}$ zadana formulom

$$f(n) = \begin{cases} [\sqrt{n}] - 1 & ,\text{za } n > 0 \\ 0 & , n = 0 \end{cases}$$

surjekcija, injekcija, bijekcija?

3. (3 boda) Odrediti znamenku jedinice, (krajnju desnu znamenku) broja $3^{5^{10528}}$ zapisanog u dekadskom sustavu.

4. (4 boda) Nadjite broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21,$$

gdje je $-4 \leq x_1, x_4 \leq 4$, $-5 \leq x_2 \leq 5$, $x_3 \geq 0$.

5. (2 boda) 5100 kuglica, od kojih 300 crnih, a ostale bijele smješteno je u nekoliko kutija, tako da je u svakoj najviše 3 crne kuglice. Pokažite da postoje dvije kutije s jednakim brojem kuglica.

6. (4 boda) Na koliko načina može buba koja se nalazi ishodištu koordinatnog sustava doći do točke $(8,8)$ ako joj se pri svakom pokretu barem jedna koordinata poveća za 1, ali tako da ne prolazi točkom $(3,2)$ u kojoj se odmara pauk?

7. (2 boda) Izračunajte α^{-2} gdje je $\alpha = (123)(45)(6)$ element simetrične grupe S_6.

Zabranjena je uporaba priručnika.

Rezultati su

Diskretna matematika, rješenja i upute

29. 8. 2002.

1. zad. $F(A,B,C,D,E) = 1$ ako je $(ABCDE)_2 \in \{1,4,9,16,25\}$, pa je konjunktivna forma $F = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}\ E + \overline{A}\ \overline{B}\ C\ \overline{D}\ E + A\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}\ \overline{E} + A\ B\ \overline{C}\ \overline{D}\ \overline{E}$. Disjunktivna forma ima 27 faktora i pronadje se slično kao konjunktivna.

2. zad. f nije surjekcija jer je $Im(f) \subseteq \mathbf{N}_0$, nije ni injekcija jer je $f(2) = f(3) = 0$.

3. zad $3^5 \equiv 3\ (mod\ 10)$ pa je $(3^5)^5 \equiv 3^5 \equiv 3(mod\ 10)$. Dakle $3^{5^2} \equiv 3(mod\ 10)$,...,$3^{5^{10528}} \equiv 3(mod\ 10)$.

4. zad. Pomoću funkcija izvodnica imamo rješenje:

$$\binom{-4}{34} + \binom{-4}{23} + 2\binom{-4}{25} + 2\binom{-4}{14} + \binom{-4}{16} + \binom{-4}{5}$$

5. zad Neka je n broj kutija. Očito je $n \geq 100$. Za $n = 100$ i $m = 5100$ postoji $[\frac{m-1}{n}] - 1$ kutija sa istim brojem kuglica.

6. zad Sa $N((0,0),(3,2))$ označimo broja putanja od točke $(0,0)$ do točke $(3,2)$, a neka N ukupni broj traženih putanja. Tada je

$$N = N((0,0),(8,8)) - N((0,0),(3,2)) \cdot N((3,2),(8,8)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{8} \frac{(16-k)!}{k![(8-k)]^2} - (\sum_{k=0}^{2} \frac{(5-k)!}{k!(3-k)!(2-k)!})(\sum_{k=0}^{5} \frac{(11-k)!}{k!(5-k)!(6-k)!})$$

7. zad $\alpha^{-2} = (123)(4)(5)(6)$.

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

6. 9. 2002.

1.(3 boda) Konstruirajte bijekciju izmedju skupa $\{n \mid n \in \mathbf{N},\ n \equiv 1 (mod\, 3)\}$ i skupa cijelih brojeva $\mathbf{Z}$.

2. (2 boda) Neka su $E(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $F(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $H(a_1, a_2, a_3, a_4)$ neke Booleove funkcije. Pokažite da izraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_1 E(a_1, a_2, a_3, a_4) + a_2 F(a_1, a_2, a_3, a_4) +$$

$$+ a_3 G(a_1, a_2, a_3, a_4) + a_4 H(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

ne ovisi o funkcijama $E,\ F,\ G,\ H$.

3. (3 boda) Pronadjite sve prirodne brojeve m takve da je broj $(m-1)(m-5)$ potencija broja 2.

4. (3 boda) Na koliko načina možemo 30 studenata podijeliti na 4 skupine tako da u prve dvije skupine imamo po 5 studenata, a u preostale dvije po 10, a na koliko ako barem dvojica od izabrane trojice studenata moraju biti u istoj skupini?

5. (4 boda) Nadjite funkciju izvodnicu niza zadanog rekurzivnom relacijom

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n - \frac{1}{n+1} + 2n,\ n \geq 0$$

$$a_0 = a_1 = 1.$$

6. (2 boda) Neka je G konačna grupa i $g \in G$ neki element. Da li je skup $H = \{x \mid x \in G,\ xg = gx\}$ podgrupa grupe G? Dokažite svoje tvrdnje.

7. (3 boda) Nad poljem $\mathbf{Z}_5$ riješiti sustav

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1,$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1.$$

Zabranjena je uporaba priručnika.

Rezultati su

Diskretna matematika, rješenja i upute

6. 9. 2002.

1. zad. Ako je $n \equiv 1(mod\ 3)$ tada je $n = 3k + 1$ za neko $k \geq 0$. Neka je $\varphi(3k + 1) = l + 1$ ako je k neparan, tj. $k = 2l + 1$, a $\varphi(3k + 1) = -l$ ako je k paran, tj. $k = 2l$. Lagano se utvrdi da je φ tražena bijekcija.

2. zad. Koristimo pravilo apsorpcije. Dobivamo $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

3. zad. Pretpostavimo da je $(m - 1)(m - 5) = 2^n$ za neki prirodni broj n. Tada po osnovnom teoremu aritmetike imamo $m - 1 = 2^r$ i $m - 5 = 2^s$ za neke r, s. Tada je $2^s + 4 = 2^r$, tj. $2^2(2^{s-2} + 1) = 2^r$. Očito je $r > 2$, pa je nužno $s = 2$, dakle imamo $m = 9$.

4. zad. Ukupni broj razdioba je

$$\binom{30}{5}\binom{25}{5}\binom{20}{10}\binom{10}{10}.$$

Sada razlikujemo slučajeve sa su odabrani studenti u skupini od 5 studenata, i kad su u skupini od 10 studenata. U tom slučaju ukupni broj razdioba je

$$\binom{3}{2}\binom{27}{3}\binom{25}{5}\binom{20}{10} + \binom{3}{2}\binom{27}{8}\binom{20}{10}\binom{10}{5} +$$
$$+\binom{27}{2}\binom{25}{5}\binom{20}{10} + \binom{27}{7}\binom{20}{10}\binom{10}{5}.$$

5. zad. Funkcija izvodnica je

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x - 2x^2}(1 + 3x - xln|1 - x| + \frac{2x^3}{(1 - x)^2}).$$

6. zad. Ako su x i y u skupu H tada je

$$xyg = (\text{y i g komutiraju}) = xgy = gxy,$$

dakle $xy \in H$. Dalje je $xg = gx$ pa je nakon množenja sa desne strane sa x^{-1} ispunjeno $xgx^{-1} = g$, dakle $gx^{-1} = x^{-1}g$. Zaključujemo da je $x^{-1} \in H$, dakle H je podgrupa od G.

7. zad. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$.

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

25.9.2002

1. **(2 boda)** Odredite Booleovu funkciju $F(A, B, C)$ koja na izlazu daje 1 ako je $(ABC)_3 \equiv 1(mod\ 2)$, a 0 inače.

2. **(3 boda)** Neka je zadano n točaka u ravnini gdje je $n \geq 3$. Neka je A skup svih dužina sa krajevima u tim točkama. Neka je B skup svih točaka sa cjelobrojnim koordinatama koje su smještene unutar i na stranicama trokuta PQR gdje je $P(0, 0)$, $Q(n-2, 0)$, $R(0, n-2)$. Da li postoji bijekcija izmedju skupova A i B?

3. **(3 boda)** Neka je n prirodni broj koji pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 2. Pokažite da je
$$\sum_{k=1}^{n} k \equiv 0(mod\ 3).$$

4. **(3 boda)** Nadjite broj različitih riječi koje se mogu sastaviti od slova riječi $OTORINOLARINGOLOGIJA$. Koliko ima različitih riječi koje u sebi imaju niz $GRINGO$?

5. **(3 boda)** Odredite rekurzivnu relaciju čije je opće rješenje dano sa
$$a_n = \alpha(-1)^n + \beta 3^n + \gamma cos\frac{n\pi}{2} + \delta sin\frac{n\pi}{2}.$$

6. **(3 boda)** Neka je p prost broj. Nadjite broj elemenata reda p u grupi G reda p.

7. **(3 boda)** Pokažite da je skup
$$\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$$
polje uz standardne operacije zbrajanja i množenja realnih brojeva.

Zabranjena je uporaba priručnika.

Rezultati su

Upute i rješenja pismenog ispita iz Diskretne matematike

25.9.2002

1. zad Vrijedi $F(A,B,C)=1$ ako i samo ako je $9A+3B+C$ neparan broj. Konjunktivna normalna forma dana je izrazom

$$F=(A+B+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C).$$

2. zad Jasno je $|A|=\binom{n}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)$. Točke koje leže unutar i na stranicama trokuta PQR imaju koordinate $(0,0),(0,1),(1,0),(2,0),(0,2),(1,1)$... Ukupan broj tih točaka je

$$1+2+3+4+...+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)=\binom{n}{2}=|A|.$$

Dakle postoji bijekcija izmedju skupova A i B.

3. zad Kako je $n\equiv 2(mod\ 3)$ vrijedi $n=3l+2$ za neki $l\geq 0$. Dalje je

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}(3l+2)(3l+3).$$

Očito je $(3l+2)(l+1)$ uvijek paran broj, dakle 3 dijeli sumu.

4. zad Ukupni broj riječi je

$$\frac{20!}{2^5 3!5!}.$$

Ukupni broj riječi koje sadrže zadani niz je

$$\frac{15!}{2^3 4!}.$$

5. zad Karakteristična jednadžba rekurzivne relacije je

$$(x+1)(x-3)(x+i)(x-i)=x^4-2x^3-2x^2-2x-3.$$

Zaključujemo da je

$$a_{n+4}=2a_{n+3}+2a_{n+2}+2a_{n+1}+3a_n.$$

6. zad Neka je $x \in G$ reda a. Tada je $\langle x \rangle$ podgrupa grupe G reda a. Dakle a dijeli p, pa je $a \in \{1, p\}$. Ako je $a = 1$ tada je a jedinični element grupe G, a inače je $a = p$ jer je p prost broj. Ukupni broj elemenata reda p je $p - 1$.

7. zad Stavimo oznaku $\mathbf{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$. Lako se vidi da je $(\mathbf{Q}[\sqrt{5}], +)$ abelova grupa. Par $(\mathbf{Q}[\sqrt{5}]\backslash\{0\}, \cdot)$ je grupa jer je množenje asocijativno zbog asocijativnost množenja u $\mathbf{R}$. Neutralni element je 1, a ako je $b \neq 0$ imamo

$$(a + b\sqrt{5})^{-1} = -\frac{ad}{b} + \frac{a^2 d + b}{5b^2}\sqrt{5},$$

ako je $b = 0$ tada je $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Očito je da zbog distributivnosti u $\mathbf{R}$ vrijedi i distributivnost u $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$. Zaključujemo da je $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$ polje.

Pismeni ispit iz iz DISMAT-a

12.9.2003.

1. (2 boda) Pojednostavite izraz u Booleovoj algebri:

$$A(A + A_1) + A(A_1 + A_2) + A(A_2 + A_3) + ...A(A_{1000} + A_{1001}).$$

2. (3 boda) Neka su p, q, r prosti brojevi veći od 2. Kada je $pq+pr+qr+p+q+r$ prost broj? Obrazložite svoje tvrdnje.

3. (4 boda) Pokažite da je skup prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ ekvipotentan skupu $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. (Uputa: Koristite Cantorov teorem.)

4. (3 boda) Na tulumu se okupilo m djevojaka i m momaka. No n djevojaka ne želi plesati. Na koliko se načina ostali mogu složiti u plesne parove?

5. (3 boda) Na koliko načina možemo 30 učenika podijeliti u tri jednakobrojne skupite tako da jedna skupina sadi cvijeće, druga kosi travu, a treća reže grane. Na koliko načina možemo napraviti podjelu na jednakobrojne skupine ako svi kose travu.

6. (2 boda) Nadjite funkciju izvodnicu niza zadanog rekurzijom:

$$a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0,\ a_0 = a_1 = 0.$$

7. (3 boda) Definirajte operaciju $\circ : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tako da $(\mathbf{N}, \circ)$ bude grupa.

Zabranjena je uporaba priručnika.

Rezultati su u ponedjeljak u 12.00

Upute i rješenja pismenog ispita iz DISMAT-a

12.9.2003.

1. Koristimo pravilo apsorpcije. Dobivamo

$$A^2 + AA_1 + AA_1 + AA_2 + AA_2 + ... + AA_{1001} + AA_{1001} = A.$$

2. Brojevi p, q, r su neparni pa je promatrana suma paran broj, stoga nije prost jer je djeljiv sa 2, a sam je veći od 2.

3. Promotrimo funkciju $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definiranu formulom

$$f(n) = (n, 1).$$

To je injekcija. Zato je $|\mathbf{N}| \leq |\mathbf{N} \times \mathbf{N}|$. Definirajmo $g : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ izrazom

$$g(n, m) = 2^n 3^m,$$

očito uvedena funkcija je injekcija, pa je ispunjena druga nejednakost. Po Cantorovom teoremu vrijedi tvrdnja.

4. Pogledajte vježbe.

5. Pogledajte vježbe.

6. Pogledajte vježbe.

7. (3 boda) Zamislite da broj 1 "glumi" nulu u cijelim brojevima, a parni prirodni brojevi "glume" pozitivne cijele brojeve, npr.$2 \to 1, 4 \to 2, 6 \to 3$, dok neparni "glume" negativne cijele brojeve, npr. $3 \to (-1), 5 \to (-2), 7 \to (-3), 9 \to (-4)$. Sada imitirajte zbrajenje u cijelim brojevima i pokažite da je dobivena struktura grupa.

Pismeni ispit iz iz DISMAT-a

1.10.2003.

1. **(2 boda)** Odredite Booleovu funkciju koja ima tri ulaza A, B, C i vrijednost 1 ako je $10 + (ABC)_2$ prost broj,a vrijednost 0 inače.

2. **(3 boda)** Nadjite zadnju znamenku broja 3^{1234}.

3. **(4 boda)** Pokažite da je skup $\{x \mid x > 0,\ x \in \mathbb{R}\}$ ekvipotentan skupu realnih brojeva. Pokažite svoje tvrdnje.

4. **(3 boda)** Koliko postoji uredjenih $k-$torki $(x_1, x_2, ..., x_k)$ sa elementima iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$, sa svojstvom $1 \leq x_1 < x_2 < ... < x_k \leq n$?

5. **(3 boda)** Na ispitu je bilo 28 zadataka. Svaki student je točno riješio po 7 zadataka i za svaki par zadataka postoje točno dva studenta koji su ga riješili. Koliko je bilo studenata na ispitu?

6. **(2 boda)** Nadjite funkciju izvodnicu niza zadanog rekurzijom:

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0,\ a_0 = 5,\ a_1 = 1.$$

7. **(3 boda)** U grupi C_{18} (18−korijeni jedinice) nadjite sve elemente reda 3 i sve elemente reda 18. Postoji li u toj grupi element reda 5? Obrazložite svoje tvrdnje.

Zabranjena je uporaba priručnika.

Rezultati su danas u 14.00

Upute i rješenja pismenog ispita iz DISMAT-a

1.10.2003.

1. $F = \overline{A}\ \overline{B}\ C + \overline{A}\ B\ C + A\ B\ C.$

2. $3^4 \equiv\ 1\ (mod\ 10)$, odavde nakon potenciranja sa 308 imamo $3^{1232} \equiv\ 1\ (mod\ 10)$. Imamo $3^2 \equiv\ 9\ (mod\ 10)$, odavde zaključujemo da je zadnja znamenka 9.

3. Funkcija $f(x) = \ln(x)$ je bijekcija i preslikava sve strogo pozitivne realne brojeve u realne brojeve.

4. $\binom{n}{k}$

5. Brojimo trojke (student koji je riješio dva zadatka, zadatak prvi, zadatak drugi). Imamo relaciju (s je broj studenata)

$$\binom{28}{2} \cdot 2 = s \cdot \binom{7}{2},$$

odavde je $s = 7$.

6. $f(x) = \frac{16x+5}{x^2+3x+1}$.

7. Neka je $C_{18} = \{1, a, a^2, ..., a^{17}\}$. Elementi reda 3 su $a^6,\ a^{12}$. Elementi reda 18 su oni čija je potencija relativno prosta sa 18, a ti su: $a,\ a^5,\ a^7,\ a^{11},\ a^{13},\ a^{17}$. Promatrana grupa nema elemente reda 5 jer red elementa dijeli red grupa.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
05.11.2003.

1. (**2 boda**) Odrediti Booleovu funkciju $F(A,B,C)$ koja na izlazu daje 1 ako je $(ABC)_3 \equiv 1(mod\ 2)$, a 0 inače.

2. (**3 boda**) Izračunati ostatak pri dijeljenju broja 3^{721} sa 7.

3. (**3 boda**) Neka je

$$f : \{n \mid n \in \mathbf{N},\ 10 \leq n \leq 99\} \to \{1, 2, ..., 18\}$$

funkcija koja element domene preslika u sumu njegovih znamenki u dekadskom zapisu. Da li je funkcija f surjekcija? Da li je bijekcija? Obrazložiti odgovore.

4. (**3 boda**) Naći broj različitih riječi koje se mogu sastaviti koristeći sva slova riječi

$$O\ T\ O\ R\ I\ N\ O\ L\ A\ R\ I\ N\ G\ O\ L\ O\ G\ I\ J\ A.$$

Koliko među njima ima različitih riječi koje sadrže niz $GRINGO$?

5. (**3 boda**) Niz (a_n) je zadan rekurzivnom relacijom

$$a_{n+1} = 2a_n - \sqrt{3}, \quad \text{za} \quad n \geq 1$$

i početnim uvjetom $a_1 = 1$. Izračunati sumu prvih n članova tog niza.

6. (**3 boda**) Da li je skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ grupa uz operaciju $*$ definiranu formulom

$$a * b = 3ab \quad \text{za} \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

gdje je na desnoj strani obično množenje cijelih brojeva? Obrazložiti odgovor.

7. (**3 boda**) U polju $\mathbb{Z}_5$ riješiti sustav jednadžbi

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

05.11.2003.

1. $F(A,B,C) = (A+B+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$.

2. Ostatak je 3.

3. Funkcija je surjekcija jer je svaki broj u kodomeni jednak zbroju znamenki nekog dvoznamenkastog broja (iz domene). Funkcija nije injekcija, pa stoga ni bijekcija jer npr. $f(11) = f(20) = 2$.

4. Broj svih riječi je jednak
$$\frac{20!}{5!3!(2!)^5},$$
a onih koje sadrže niz $GRINGO$ ima
$$\frac{15!}{4!(2!)^3}.$$

5. Opći član niza je
$$a_n = \frac{1-\sqrt{3}}{2}2^n + \sqrt{3}$$
pa je suma
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = (1-\sqrt{3})2^n + (n+1)\sqrt{3} - 1.$$

6. Nije grupa jer npr. nema neutralni element.

7. $x = 2$, $y = 1$, $z = 4$.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
02.02.2004.

1. **(2 boda)** Odrediti Booleovu funkciju $F(A, B, C, D, E, F)$ koja ima vrijednost 1 ako je $(ABC)_2 = (DEF)_2$, a 0 inače.

2. **(2 boda)** Neka je $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ univerzalni skup. Za koliko trojki $(x, y, z) \in \mathcal{U}^3$ predikat

$$S(x, y, z) \equiv (x = y = z) \Rightarrow (x \text{ nije djeljiv sa}10)$$

nije istinit.

3. **(3 boda)** Pokazati da za svaki prosti broj p i za svaki broj $k \in \{1, ..., p-1\}$ vrijedi

$$\binom{p}{k} \equiv 0(mod\ p).$$

4. **(4 boda)** Na slikarsko natjecanje došlo je 10 slikara, njih 5 su donijeli po jednu sliku, 3 su donijela po 2 slike, a 2 slikara su priložila po 3 slike. Postoji jedna prva nagrada, jedna druga i jedna treća nagrada. Na koliko načina možemo podijeliti nagrade slikama ako

   (a) najviše po jedna slika svakog slikara može dobiti nagradu,

   (b) proizvoljan broj slika svakog slikara može dobiti nagradu?

   (Sve tri nagrade moraju biti podijeljene i pojedina slika ne može dobiti više od jedne nagrade).

5. **(3 boda)** U jednoj sobi je n ljudi. Dokazati da postoje dvije osobe iz te sobe sa jednakim brojem poznanika u toj skupini. (Broj poznanika jedne osobe može biti 0, a poznanstvo je simetrično, tj. ako A poznaje B, tada i B poznaje A. Isključuje se poznanstvo sa samim sobom.)

6. **(3 boda)** U grupi S_4 naći sve elemente reda 3 i reda 4.

7. **(3 boda)** Dokazati da je skup svih kvadratnih matrica reda 2 sa elementima iz skupa $\mathbb{R}$ prsten s jedinicom, ali nije polje. Asocijativnost množenja ne morate pokazivati.

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

02.02.2004.

1.

$$\begin{aligned} F(A,B,C,D,E,F) &= \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\bar{E}F + \bar{A}B\bar{C}\bar{D}E\bar{F} + \\ &= \bar{A}BC\bar{D}EF + A\bar{B}\bar{C}D\bar{E}\bar{F} + A\bar{B}CD\bar{E}F + \\ &= AB\bar{C}DE\bar{F} + ABCDEF. \end{aligned}$$

2. Predikat nije istinit ako i samo ako vrijedi $x = y = z$ i x je djeljiv s 10, a to znači za 10 trojki $(10k, 10k, 10k)$ gdje je $k = 1, \dots, 10$.

3. Binomni koeficijent

$$\binom{p}{k} = p \cdot \frac{(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$$

je prirodan broj. Budući da je p prost i $k < p$ broj p nema zajedničkog djelitelja s brojem $k!$ pa razlomak u gornjem izrazu mora biti prirodan broj kojeg označimo s N. Dakle,

$$\binom{p}{k} = pN$$

i time je tvrdnja dokazana.

4. (a) Najprije se odabere 3 nagrađene slike, a zatim odredi njihov poredak. Pri odabiru slika javlja se više slučajeva ovisno o tome koliko slika je donio slikar čiju smo sliku odabrali. Ti slučajevi su sadržaj velike vitičaste zagrade u rješenju. Poredak slika se dobije permutiranjem 3 odabrane slike na 3! načina.

$$\left\{\binom{5}{3} + \binom{5}{2}\left[\binom{3}{1}\cdot 2\right] + \binom{5}{2}\left[\binom{2}{1}\cdot 3\right] + \right.$$

$$\binom{5}{1}\left[\binom{3}{2}\cdot 2^2\right] + \binom{5}{1}\left[\binom{3}{1}\cdot 2\right]\left[\binom{2}{1}\cdot 3\right] + \binom{5}{1}\left[\binom{2}{2}\cdot 3^2\right] +$$

$$\left.\left[\binom{3}{3}\cdot 2^3\right] + \left[\binom{3}{2}\cdot 2^2\right]\left[\binom{2}{1}\cdot 3\right] + \left[\binom{3}{1}\cdot 2\right]\left[\binom{2}{2}\cdot 3^2\right]\right\} \cdot 3!.$$

(b) U ovom slučaju se jednostavno odabere 3 različite od 17 slika pazeći na poredak pa je rješenje

$$17 \cdot 16 \cdot 15.$$

5. Pojedini čovjek može imati između 0 i $n-1$ poznanika. Međutim, zbog simetričnosti, ako netko ima 0 poznanika onda nitko ne može imati svih $n-1$ ljudi za poznanike. Također, ako netko ima $n-1$ poznanika onda nitko ne može imati 0 poznanika. U svakom od ta dva slučaja mogući broj poznanika pojedinog čovjeka je $n-1$. Budući da je broj ljudi u sobi jednak n prema Dirichletovom principu postoje dva s jednakim brojem poznanika.

6. U S_4 permutacije reda 3 su ciklusi duljine 3, a reda 4 ciklusi duljine 4. Dakle, permutacije reda 3 su

$$(123), (213), (124), (214), (234), (324),$$

a reda 4 su

$$(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432).$$

7. Kvadratne matrice reda 2 čine komutativnu grupu obzirom na zbrajanje zbog toga što je zbrajanje definirano po komponentama, a realni brojevi čine grupu obzirom na zbrajanje. Množenjem dvaju kvadratnih matrica reda 2 dobiva se ponovo matrica reda 2. To množenje je asocijativno i ima za neutralni element jediničnu matricu. Dakle, kvadratne matrice reda 2 čine prsten s jedinicom.

   Kvadratne matrice reda 2 ne čine polje jer npr. množenje nije asocijativno.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
20.02.2004.

1. **(3 boda)** Zadan je tročlani skup logičkih operacija koji se sastoji od ekvivalencije, konjunkcije i ekskluzivne disjunkcije. Dokazati da je taj skup sustav izvodnica algebre sudova. Prikazati operaciju implikacije pomoću elemenata toga skupa.

2. **(2 boda)** Za koliko različitih n-torki $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Booleova funkcija
$$F(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
poprima vrijednost 1?

3. **(2 boda)** Odrediti sve proste brojeve p takve da su $p + 11$ i $p + 17$ prosti brojevi. Dokazati tvrdnju!

4. **(4 boda)** Koliko se različitih riječi može složiti od svih slova riječi
$$KOMBINATORIKA$$
tako da nikoja dva ista slova ne budu susjedna?

5. **(3 boda)** Unutar pravilnog šesterokuta stranice duljine 2 nalazi se 25 točaka. Dokazati da postoji geometrijski lik površine 1.8 koji sadrži barem 5 od tih točaka.

6. **(3 boda)** Neka je $f(x)$ funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$. Pomoću te funkcije izraziti funkciju izvodnicu niza $b_n = n^4 a_n$.

7. **(3 boda)** Konačno polje $GF(16)$ konstruirano je nad ireducibilnim polinomom
$$p(t) = t^4 + t^3 + 1.$$
Naći aditivni i multiplikativni inverz elementa
$$q(t) = t^2 + t + 1$$
u tom polju.

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

20.02.2004.

1. Budući da negacija i konjunkcija čine skup izvodnica algebre sudova dovoljno je negaciju prikazati pomoću zadanih operacija, a to se može na primjer na sljedeći način

$$\neg A \equiv (A \veebar A) \Leftrightarrow A.$$

Implikacija se može prikazati kao

$$A \Rightarrow B \equiv$$

$$\{[A \wedge ((B \veebar B) \Leftrightarrow B)] \veebar [A \wedge ((B \veebar B) \Leftrightarrow B)]\} \Leftrightarrow [A \wedge ((B \veebar B) \Leftrightarrow B)] .$$

2. $F(x_1, \ldots, x_n) = 1$ osim za $(0, \ldots, 0)$. Dakle za $2^n - 1$ n–torki.

3. Svaki $p > 2$ je neparan pa su brojevi $p + 11$ i $p + 17$ složeni jer su parni i veći od 2. Stoga, jedino za $p = 2$ se dobiva $p + 11 = 13$ i $p + 17 = 19$, a to su prosti brojevi.

4. Koristeći formulu uključivanja i isključivanja broj takvih riječi je

$$\frac{13!}{2^4} - 4 \cdot \frac{12!}{2^3} + \binom{4}{2} \cdot \frac{11!}{2^2} - \binom{4}{3} \cdot \frac{10!}{2} + \binom{4}{4} \cdot 9!$$

5. Šesterokut se podijeli dugim dijagonalama na 6 sukladnih jednakostraničnih trokuta čija stranica je duljine 2. Po Dirichletovom principu od 25 točaka bar 5 ih se nalazi unutar jednog od tih trokuta, a njihova površina iznosi $\sqrt{3} < 1.8$.

6. Uzastopnim deriviranjem se dobije

$$x^4 f^{iv}(x) + 6x^3 f'''(x) + 7x^2 f''(x) + x f'(x)$$

7. Aditivni inverz je

$$t^2 + t + 1,$$

a multiplikativni

$$t^3 + t^2 + t.$$

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
20.04.2004.

1. **(3 boda)** Konstrukcijom bijekcije između skupova

$$2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ i } 3\mathbb{N} = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

dokazati njihovu ekvipotentnost. Dokazati bijektivnost konstruiranog preslikavanja!

2. **(2 boda)** Zadana je Booleova funkcija

$$F(A, B, C) = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC.$$

Naći njenu konjunktivnu formu.

3. **(2 boda)** Bez uporabe računala naći ostatak pri dijeljenju broja 317^{258} s 15.

4. **(2 boda)** Na koliko se načina može 27 zainteresiranih gledatelja smjestiti u kino-dvoranu s numeriranim sjedalima, ako u dvorani ima 5 redova sjedala, s po 7 mjesta u svakome redu?

5. **(4 boda)** Na koliko je načina moguće podijeliti 40 jabuka na petoro djece tako da svako dijete dobije paran broj jabuka, i to barem dvije, ali najviše 12?

6. **(3 boda)** Naći opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_{n+3} = 2a_{n+1} + 4a_n + 5\,.$$

7. **(4 boda)** Dokazati da je skup

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

prsten s jedinicom, uz standardne operacije zbrajanja i množenja matrica. Da li je P polje? Obrazložiti tvrdnju! Sva pravila za operacije zbrajanja i množenja matrica dozvoljeno je koristiti bez dokaza.

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

20.04.2004.

1. Funkciju $f : 2\mathbb{Z} \to 3\mathbb{N}$ definiramo s
$$f(2k) = \begin{cases} 3 \cdot 2k, & k > 0; \\ 3 \cdot 2|k| + 1, & k \leqslant 0. \end{cases}$$
gdje je $2k \in 2\mathbb{Z}$. Ta funkcija je surjekcija jer se u njenoj slici nalaze svi prirodni brojevi oblika $6n$ i $6n + 3$. Za injektivnost najprije se uoči da se pozitivni brojevi iz skupa $2\mathbb{Z}$ preslikavaju u prirodne brojeve oblika $6n$, a negativni i nula u prirodne brojeve oblika $6n+3$. Stoga je dovoljno pokazati injektivnost odvojeno za ta dva podskupa od $2\mathbb{Z}$.

   Ako pretpostavimo da je $f(2k_1) = f(2k_2)$ za $k_1, k_2 > 0$ onda slijedi $3(2k_1) = 3(2k_2)$, odnosno $k_1 = k_2$, pa je u tom slučaju f injektivna. Ako pretpostavimo da je $f(2k_1) = f(2k_2)$ za $k_1, k_2 \leqslant 0$ onda slijedi $3(2|k_1| + 1) = 3(2|k_2| + 1)$, odnosno $k_1 = k_2$, pa je i u tom slučaju f injektivna.

2. Konjunktivna forma glasi
$$F(A,B,C) = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}).$$

3. Ostatak je 4. Primjeni se Eulerov teorem.

4. To su varijacije bez ponavljanja $V_{35}^{27} = \frac{35!}{8!}$.

5. Koristeći funkcije izvodnice broj načina podjele jednak je koeficijentu uz x^{40} u izrazu
$$(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12})^5.$$
Dobije se
$$-\binom{-5}{15} + \binom{5}{1} \cdot \binom{-5}{9} - \binom{5}{2} \cdot \binom{-5}{3} = 651.$$

6. Opće rješenje je
$$a_n = C_1 2^n + C_2 2^{n/2} \cos(\frac{3n\pi}{4}) + C_3 2^{n/2} \sin(\frac{3n\pi}{4}) - 1.$$

7. Obzirom na zbrajanje skup P čini komutativnu grupu jer se zbrajanjem dviju matrica zadanog oblika ponovo dobije matrica istog oblika, asocijativnost i komutativnost su naslijeđene, neutralni element je nulmatrica, a inverzni element za matricu $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ je suprotna matrica $\begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$.

Obzirom na množenje skup $P \setminus \{0\}$ čini također komutativnu grupu jer množenjem dvaju matrica zadanog oblika dobije se

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix},$$

što je opet matrica istog oblika, asocijativnost je naslijeđena, komutativnost se provjeri iz gornje formule za množenje, neutralni element je jedinična matrica, a inverz se dobiva po formuli

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Važno je napomenuti da za matricu različitu od nulmatrice, formula za inverz je dobra jer je $a^2 + b^2 > 0$.

Na kraju direktnim računom (s općenitim matricama iz P) dokazuje se distributivnost. Time smo dokazali da je $(P, +, \cdot)$ polje.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
14.06.2004.

1. **(2 boda)** Odrediti sve vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom
$$f(x) = x^3 + ax^2 + 3$$
bijekcija.

2. **(2 boda)** Odrediti Booleovu funkciju koja za trobitni ulaz A, B, C na izlazu daje 1 ako je $(ABC)_2 < (ACB)_2$, a 0 inače. Minimizirati broj operacija.

3. **(3 boda)** Dokazati da je broj $n^3 + 20n$ djeljiv s 48 za svaki paran prirodan broj n.

4. **(1+2+1 bod)** Na stolu je 8 crvenih, 7 zelenih i 5 žutih kuglica.
   (a) Na koliko načina se mogu odabrati 3 kuglice različitih boja?
   (b) Na koliko načina se mogu odabrati 3 kuglice tako da među njima nedostaje kuglica točno jedne boje?
   (c) Ako su zelene kuglice raspoređene u 3 kutije, dokazati da postoji kutija u kojoj se nalaze barem 3 zelene kuglice.

5. **(3 boda)** Naći opće rješenje rekurzivne relacije
$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2} - n + 6 \cdot 5^n\,.$$

6. **(3 boda)** Koliko u simetričnoj grupi S_5 ima elemenata (permutacija) reda 3, a koliko reda 4? Navesti sve elemente (permutacije) reda 4 koji imaju fiksnu točku 2. Obrazložiti sve svoje tvrdnje!

7. **(3 boda)** U konačnom polju s 25 elemenata konstruiranom pomoću ireducibilnog polinoma $q(t) = t^2 + t + 1$ riješiti sustav jednadžbi
$$\begin{array}{rcrcl} (t+4) \cdot_{25} x & +_{25} & 4 \cdot_{25} y & = & 0 \\ (4t+1) \cdot_{25} x & +_{25} & t \cdot_{25} y & = & 1 \end{array}$$
gdje su x, y nepoznati elementi tog polja.

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

14.06.2004.

1. Funkcija f je polinom trećeg stupnja pa će biti bijekcija ako je monotona na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Monotonost znači da je derivacija $f'(x) = 3x^2 + 2ax$ nenegativna ili nepozitivna na cijelom $\mathbb{R}$, a to će biti ako za diskriminantu od f' vrijedi
$$D = 4a^2 \leqslant 0.$$
Dakle, $a = 0$.

2. $$F(A, B, C) = \neg B \wedge C.$$

3. Broj n je paran pa je oblika $n = 2k$ za neki prirodni broj k. Tada je
$$n^3 + 20n = 8k^3 + 40k = 8k(k^2 + 5),$$
pa je dovoljno dokazati da je broj $k(k^2 + 5)$ djeljiv sa 6 za svaki prirodni broj k.

   Najprije, ako je k paran onda je i $k(k^2 + 5)$ paran, a ako je k neparan onda je $k^2 + 5$ paran pa je također $k(k^2 + 5)$ paran. Stoga je $k(k^2 + 5)$ djeljiv s 2 za svaki prirodan broj k.

   Nadalje, ako je k djeljiv s 3 onda je i $k(k^2 + 5)$ djeljiv s tri, a ako k nije djeljiv s 3 onda k^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 pa je $k^2 + 5$ djeljiv s 3 što znači da je i produkt $k(k^2 + 5)$ djeljiv s 3. Stoga je $k(k^2 + 5)$ djeljiv s 3 za svaki prirodni broj k.

   Time je dokazano da je $k(k^2 + 5)$ djeljiv s $2 \cdot 3 = 6$ za svaki prirodni broj k kao što je i trebalo.

4. (a) Po teoremu o uzastopnom prebrojavanju $8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$.

   (b) Ukupan broj odabira 3 kuglice je $\binom{8+7+5}{3} = \binom{20}{3}$. Od tog broja treba oduzeti slučaj u kojem su sve tri kuglice različite boje iz (a) dijela zadatka i tri slučaja u kojima su sve kuglice jedne boje. Dakle, rješenje je
   $$\binom{20}{3} - 280 - \binom{8}{3} - \binom{7}{3} - \binom{5}{3} = 759.$$
   Drugi način rješavanja ovog zadatka je da se odvojeno prebroje svi slučajevi u kojima su dvije kuglice jedne boje, a treća druge i zatim zbroje. Na taj način se dobije
   $$\binom{8}{2}\binom{7}{1}+\binom{8}{1}\binom{7}{2}+\binom{8}{2}\binom{5}{1}+\binom{8}{1}\binom{5}{2}+\binom{7}{2}\binom{5}{1}+\binom{7}{1}\binom{5}{2} = 759.$$

(c) Po Dirichletovom principu postoji kutija s barem $\lfloor \frac{7-1}{3} \rfloor + 1 = 3$ kuglice.

5. Opće rješenje je

$$a_n = \lambda(-1)^n + \mu 5^n + \frac{1}{8}n + \frac{7}{32} + n \cdot 5^{n+1}.$$

6. Elementi reda 3 sastoje se od ciklusa duljine 3 i dvije fiksne točke. Stoga se brojeve koji ulaze u ciklus može odabrati na $\binom{5}{3} = 10$ načina, a posložiti ih u ciklus na $\frac{3!}{3} = 2$ načina. Dakle, elemenata reda 3 u S_5 ima $10 \cdot 2 = 20$.

   Elementi reda 4 sastoje se od ciklusa duljine 4 i jedne fiksne točke. Stoga se brojeve koji ulaze u ciklus može odabrati na $\binom{5}{4} = 5$ načina, a posložiti ih u ciklus na $\frac{4!}{4} = 6$ načina. Dakle, elemenata reda 4 u S_5 ima $5 \cdot 6 = 30$.

   Ako je poznato da element reda 4 fiksira broj 2 onda treba preostale brojeve $1, 3, 4, 5$ rasporediti u ciklus. To se može na 6 načina i to:

$$(1,3,4,5), (1,3,5,4), (1,4,3,5), (1,4,5,3), (1,5,3,4), (1,5,4,3).$$

7. Zbrajanjem jednadžbi dobije se y, a zatim uvrštavanjem u prvu x. Rješenje je

$$\begin{aligned} x &= 2t + 2, \\ y &= 3t + 1. \end{aligned}$$

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
02.07.2004.

1. **(2 boda)** Dokazati da je skup

$$S = \{y = kx : k \in \mathbb{Z}\}$$

svih pravaca kroz ishodište s cjelobrojnim koeficijentom smjera prebrojiv.

2. **(3 boda)** Iz sustava jednadžbi

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & \cdot & y & = & y \end{array}$$

u apstraktnoj Booleovoj algebri izračunati x. Da li je tim sustavom y jedinstveno određen? Obrazložiti odgovor.

3. **(3 boda)** Odrediti barem četiri prirodna broja n za koje je

$$\varphi(n) = 72,$$

gdje je φ Eulerova funkcija.

4. **(3 boda)** Na koliko načina se može 25 (jednakih) jabuka i 13 (jednakih) krušaka podijeliti na petero (različite) djece ako svako dijete mora dobiti barem jednu krušku i svako dijete osim jednog unaprijed određenog paran broj jabuka? Obrazložiti odgovor.

5. **(3 boda)** Unutar kocke sa stranicom duljine $\sqrt{3}$ zadano je 25 točaka. Dokazati da postoji kugla radijusa $\frac{3}{4}$ koja sadrži barem 4 od zadanih točaka.

6. **(3 boda)** Odrediti funkciju izvodnicu niza zadanog rekurzivnom relacijom

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + n^2, \quad n \geqslant 2$$

i početnim uvjetima $a_0 = a_1 = 1$.

7. **(3 boda)** Dokazati da je funkcija $f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$ zadana formulom

$$f(x) = sgn(x)$$

homomorfizam grupa, te mu odrediti sliku i jezgru.

Funkcija signum je definirana sa

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{za} \quad x > 0, \\ -1, & \text{za} \quad x < 0. \end{cases}$$

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

02.07.2004.

1. Funkcija koja pravcu $y = kx$ pridružuje njegov koeficijent smjera $k \in \mathbb{Z}$ je bijekcija sa skupa S na skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ koji je prebrojiv. Stoga je S prebrojiv.

2. Dodavanjem x na obje strane druge jednadžbe sustava, korištenjem svojstva apsorpcije i prve jednadžbe, dobije se
$$x = (x \cdot y) + x = x + y = 1.$$
Uvrštavanjem $x = 1$ u sustav prva jednadžba postaje $1 = 1$, a druga $y = y$ pa y nije jedinstveno određen nego može biti proizvoljan element Booleove algebre.

3. Neka je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ rastav na proste faktore. Tada je
$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1).$$
Iz gornjeg rastava se vidi da za proste brojeve p_i mora $p_i - 1$ dijeliti 72 i α_i može biti veći od 1 samo za $p_i = 2, 3$ jer $72 = 2^3 3^2$.

   Koristeći te uvjete mogu se dobiti sva rješenja zadane jednadžbe, a među njima su na primjer:

   - $p_1 = 73, \alpha_1 = 1 \Rightarrow n = 73$,
   - $p_1 = 73, \alpha_1 = 1, p_2 = 2, \alpha_2 = 1 \Rightarrow n = 146$,
   - $p_1 = 37, \alpha_1 = 1, p_2 = 2, \alpha_2 = 2 \Rightarrow n = 148$,
   - $p_1 = 19, \alpha_1 = 1, p_2 = 2, \alpha_3 = 3 \Rightarrow n = 152$...

4. Najprije podijelimo svakom djetetu po jednu krušku i unaprijed određenom djetetu jednu jabuku. Tada preostalih 12 parova jabuka i preostalih 8 krušaka dijelimo na petero djece. To su kombinacije s ponavljanjem
$$\overline{C}_5^{12} \overline{C}_5^{8}.$$

5. Kocka stranice $\sqrt{3}$ rastavi se na 8 sukladnih manjih kockica stranice $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tada po Dirichletovom principu postoji kockica koja sadrži barem
$$\left\lfloor \frac{25 - 1}{8} \right\rfloor + 1 = 4$$
točke, a radijus opisane kugle toj kockici je upravo
$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{3} = \frac{3}{4}.$$

6. Koristeći $n^2 = n(n-1) + n$ nehomogeni dio daje drugu i prvu derivaciju geometrijskog reda. Na taj način dobije se funkcija izvodnica

$$f(x) = \frac{1 - 2x + 4x^2 - x^3}{(1-x)^3(1-x-2x^2)}.$$

7. Promatrajući četiri slučaja u ovisnosti o predznacima brojeva $x, y \in \mathbb{R}$ dobije se

$$sgn(xy) = sgn(x)sgn(y),$$

pa je sgn homomorfizam. Jezgru čine svi pozitivni realni brojevi jer upravo njima funkcija signum pridružuje 1 što je neutralni element druge grupe. Slika je jednaka $\{\pm 1\}$.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
15.07.2004.

1. **(1+1+1 bod)** Koji su od sljedećih skupova prebrojivi, a koji neprebrojivi:
   (a) skup svih pravaca u ravnini koji prolaze ishodištem;
   (b) skup svih orjentiranih dužina u ravnini čiji krajevi imaju cjelobrojne koordinate;
   (c) skup svih elipsa sa središtem u ishodištu čije duljine poluosi su prirodni brojevi.

   Obrazložiti odgovore!

2. **(3 boda)** Odrediti Booleovu funkciju koja za četverobitni ulaz A, B, C, D na izlazu daje 1 ako vrijedi $(AB)_2 = (CD)_2$, a 0 inače. Dobivenu funkciju napisati koristeći samo operacije $\wedge, \Leftrightarrow$.

3. **(3 boda)** Odrediti sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi $\varphi(2n) = \varphi(n)$.

4. **(3 boda)** Za okrugli stol oko kojeg je $2n$ stolica sjeda n žena i n muškaraca. Na koliko načina oni mogu sjesti tako da nikoje dvije žene ne sjede jedna do druge?

5. **(3 boda)** Rješiti rekurzivnu relaciju

$$a_n + a_{n-1} = (-1)^{n+1} \quad n \geqslant 1,$$

   uz početni uvjet $a_0 = 2$.

6. **(3 boda)** Naći sve podgrupe grupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ uz operaciju definiranu formulom

$$(a, b) * (c, d) = (a +_2 c, b +_2 d).$$

7. **(2 boda)** U konačnom polju od $25 = 5^2$ elemenata konstruiranom pomoću ireducibilnog polinoma $q(t) = t^2 + t + 1$ izračunati

$$(4t + 3) \cdot_{25} (2t + 2).$$

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

15.07.2004.

1. (a) Neprebrojiv jer se može parametrizirati s koeficijentom smjera koji je realan broj.
   (b) Prebrojiv jer se može parametrizirati s uređenim četvorkama cijelih brojeva.
   (c) Prebrojiv jer se može parametrizirati s uređenim parovima duljina poluosi što su prirodni brojevi.
2. $F(A, B, C, D) = (A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow D)$.
3. Neka je $n = 2^r m$ gdje je m neparan prirodni broj, a $r \in \mathbb{N}_0$. Tada je

   $$\varphi(n) = \varphi(2^r)\varphi(m)$$

   $$\varphi(2n) = \varphi(2^{r+1})\varphi(m)$$

   pa jednakost $\varphi(2n) = \varphi(n)$ vrijedi ako i samo ako

   $$\varphi(2^r) = \varphi(2^{r+1}).$$

   Ali za $r \geqslant 1$ je $\varphi(2^r) = 2^{r-1}$ pa je jedino moguće rješenje $r = 0$ jer tada $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$. Dakle, jednakost $\varphi(2n) = \varphi(n)$ vrijedi za sve neparne prirodne brojeve.
4. Da bi uvjet bio ispunjen žene moraju sjesti na svaku drugu stolicu, a muškarci između njih. Budući da je stol okrugli, to znači da žene mogu sjesti na $(n-1)!$ načina, a zatim muškarci na $n!$ načina pa je ukupan broj načina po teoremu o uzastopnom prebrojavanju jednak $(n-1)!n!$.
5. $a_n = 2(-1)^n - n(-1)^n$.
6. Sve podgrupe su

   $$\{(0,0)\},$$

   $$\{(0,0),(0,1)\}, \{(0,0),(1,0)\}, \{(0,0),(1,1)\},$$

   $$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$
7. $t + 3$.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
06.09.2004.

1. **(2 boda)** Odrediti Booleovu funkciju koja za trobitni ulaz A, B, C na izlazu daje 1 ako je broj $(ABC)_2$ djeljiv s 3, a 0 inače.

2. **(3 boda)** Dokazati da je za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ i za svaki prost broj $p > n$ broj
$$(n!)^{2p-2} - 1$$
djeljiv s p.

3. **(3 boda)** Na šahovskoj ploči 8×8 u lijevom donjem kutu nalazi se figura koja se u jednom potezu može pomaknuti za jedno polje desno ili gore. Na koliko načina može ta figura doći do desnog gornjeg kuta ploče ako ne smije preći preko polja na presjeku trećeg retka i petog stupca?

4. **(3 boda)** Riješiti rekurzivnu relaciju
$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^n \quad n \geqslant 2,$$
uz početne uvjete $a_0 = a_1 = 1$.

5. **(3 boda)** Naći sve podgrupe grupe
$$G = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$
svih parnih ostataka pri dijeljenju s 12 uz operaciju $+_{12}$ definiranu formulom $a +_{12} b =$ ostatak pri dijeljenju broja $a + b$ s 12.

6. **(3 boda)** Naći barem tri homomorfizma $f : G \to G$ gdje je $(G, +_{12})$ grupa iz prethodnog zadatka.

7. **(3 boda)** U konačnom polju od 49 elemenata konstruiranom pomoću ireducibilnog polinoma $q(t) = t^2 + t + 3$ naći multiplikativni inverz elementa $5t + 6$.

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

06.09.2004.

1. $F(A, B, C) = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$.

2. Prost broj p je strogo veći od n pa nije djelitelj od $n!$. Stoga po malom Fermatovom teoremu vrijedi
$$(n!)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$
pa kvadriranjem slijedi tvrdnja.

3. Ukupan broj puteva iz lijevog donjeg do desnog gornjeg kuta odgovara nizu od 14 poteza od čega 7 gore i 7 dolje. Stoga je taj broj jednak $P_{14}^{7,7}$.

   Od toga treba oduzeti one puteve koji prolaze 'zabranjenim' poljem. Broj takvih puteva po teoremu o uzastopnom prebrojavanju jednak je produktu broja puteva od lijevog donjeg kuta do 'zabranjenog' polja i broja puteva od 'zabranjenog' polja do desnog gornjeg kuta. Kao i za ukupan broj puteva to su permutacije s ponavljanjem pa je rješenje
$$P_{14}^{7,7} - P_{9}^{5,4} \cdot P_{5}^{2,3}.$$

   Napomena: u ovom rješenju ploča je numerirana kao matrica tj. lijevi gornji kut je polje (1,1). U slučaju drugačije numeracije dobiva se različito rješenje, ali postupak je isti.

4. $a_n = (1-n)2^n + \frac{1}{2}n^2 2^n$.

5. $\{0\}, \{0, 4, 8\}, \{0, 6\}, G$.

6. Homomorfizmi su na primjer
$$f(g) = 0 \quad \forall g \in G,$$
$$f(g) = g \quad \forall g \in G,$$
$$f(g) = g +_{12} g \quad \forall g \in G, ...$$

7. $4t + 2$.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE

14.09.2004.

1. **(3 boda)** Koje su od sljedećih funkcija injekcije, surjekcije, bijekcije:

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(k) = k^2 + 1;$

   (b) $g : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}, \quad g(k) = \begin{cases} 4k, & \text{za } k > 0, \\ 4|k| + 2, & \text{za } k \leqslant 0; \end{cases}$

   (c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad h(k) = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{za } k \text{ paran}, \\ -\frac{k-1}{2}, & \text{za } k \text{ neparan}. \end{cases}$

   Dokazati svoje tvrdnje!

2. **(2 boda)** Odrediti Booleovu funkciju koja za četverobitni ulaz A, B, C, D na izlazu daje 1 ako je broj $(AB)_2 < (CD)_2$, a 0 inače.

3. **(3 boda)** Ako prirodni broj n ima prost broj pozitivnih djelitelja dokazati da je n potencija prostog broja.

4. **(3 boda)** Koliko rješenja u skupu prirodnih brojeva ima nejednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 2004?$$

5. **(3 boda)** Riješiti rekurzivnu relaciju

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n,$$

   uz početne uvjete $a_0 = 0$ i $a_1 = 8$.

6. **(3 boda)** Dokazati da je skup

$$H = \{\alpha \in S_6 : \alpha(6) = 6\}$$

   svih permutacija iz S_6 (tj. od 6 elemenata) koje fiksiraju element 6 podgrupa od S_6. Da li je H normalna podgrupa? Obrazložiti odgovor!

7. **(3 boda)** Skup $G = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ je grupa uz operaciju množenja realnih brojeva. Neka je funkcija $f : G \to G$ zadana formulom

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in G.$$

   Dokazati da je f homomorfizam grupa te mu naći jezgru i sliku.

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

14.09.2004.

1. (a) f nije injekcija jer npr. $f(-1) = f(1) = 2$, a nije ni surjekcija jer ne postoji cijeli broj $k \in \mathbb{Z}$ za koji je npr. $f(k) = k^2 + 1 = 3$. Stoga f nije ni bijekcija.

   (b) g je injekcija jer nenegativne cijele brojeve preslikava u različite višekratnike od 4, a negativne cijele brojeve u različite prirodne brojeve koji daju ostatak 2 pri dijeljenju s 4. Međutim g nije surjekcija, pa stoga ni bijekcija, jer ne postoji cijeli broj $k \in \mathbb{Z}$ za koji je npr. $h(k) = -1$.

   (c) h je injekcija jer parne prirodne brojeve preslikava u različite pozitivne cijele brojeve, a neparne prirodne brojeve u različite nepozitivne cijele brojeve. Funkcija h je i surjekcija jer za svaki pozitivan $z \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f(2z) = z$, a za svaki nepozitivan $z \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f(2|z|+1) = -|z| = z$.

2.

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C,D) &= (A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge D) \\
&= (\neg A \wedge B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \\
&= (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D).
\end{aligned}
$$

3. Prirodni broj $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ ima $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ pozitivnih djelitelja. Budući da su $\alpha_i + 1 > 1$ ovaj broj je prost ako i samo ako postoji samo jedan prosti faktor i pritom je odgovarajući $\alpha + 1$ prost. Dakle, ne samo da je dokazano da je $n = p^\alpha$, nego i to da je $\alpha = p' - 1$ za neki prost broj p'.

4. Broj rješenja zadane nejednadžbe jednak je broju rješenja u skupu prirodnih brojeva jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2004,$$

a on je jednak broju rješenja u skupu $\mathbb{N}_0$ jednadžbe

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1999.$$

Stoga je rješenje $\overline{C}_5^{1999}$.

5. $a_n = -4 + 4 \cdot 2^n + 2 \cdot n2^n$.

6. Neka su $\alpha, \beta \in H$. Dakle, $\alpha(6) = \beta(6) = 6$. Tada je

$$\alpha \circ \beta(6) = \alpha(\beta(6)) = \alpha(6) = 6,$$

$$\alpha^{-1}(6) = 6,$$

pa su $\alpha \circ \beta$ i α^{-1} elementi od H. Po kriteriju za podgrupe slijedi da je H podgrupa.

H nije normalna jer npr. za $\alpha = (5, 6) \in S_6$ i $\beta = (1, 5) \in H$ vrijedi

$$\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}(6) = \alpha \circ \beta(5) = \alpha(1) = 1$$

pa $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \notin H$.

7. Funkcija f je homomorfizam jer

$$f(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = f(x)f(y).$$

Jezgru čine oni $x \in G$ za koje je $x^2 = 1$, a to su $Ker(f) = \{\pm 1\}$. Sliku čine svi kvadrati realnih brojeva iz G, a to su $Im(f) = \mathbb{R}_{>0}$.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
24.09.2004.

1. **(2 boda)** Odrediti Booleovu funkciju koja za n–bitni ulaz $A_1, A_2, \ldots, A_n$ na izlazu daje 0 ako su svi ulazi jednaki, a 1 inače. Minimizirati broj operacija.

2. **(3 boda)** Koje sve ostatke može dati zbroj prvih n prirodnih brojeva pri dijeljenju s 10? Obrazložiti odgovor!

3. **(2 boda)** Naći ostatak pri dijeljenju broja 317^{258} s 15.

4. **(4 boda)** Na koliko je načina moguće podijeliti 40 jabuka na petoro djece tako da svako dijete dobije paran broj jabuka, i to barem dvije, ali najviše 12?

5. **(3 boda)** Naći opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2} - n + 6 \cdot 5^n.$$

6. **(3 boda)** Koristeći svojstva množenja matrica kao poznata dokazati da je skup G svih regularnih matrica iz $\mathcal{M}_{2,2}$ grupa uz operaciju množenja matrica. Da li je skup svih matrica iz $\mathcal{M}_{2,2}$ determinante jedan podgrupa od G? Obrazložiti odgovor!

   Napomena: $\mathcal{M}_{2,2}$ je skup svih realnih 2×2 matrica.

7. **(3 boda)** Dokazati da je skup

$$P = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

   komutativni prsten s jedinicom uz uobičajene operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva. Da li je P polje? Obrazložiti odgovor!

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

24.09.2004.

1. $F(A_1, A_2, \ldots, A_n) = (A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \wedge \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$.

2. Zbroj prvih n prirodnih brojeva je jednak
$$\frac{n(n+1)}{2}.$$
Zadnja znamenka produkta $n(n+1)$ može biti 0, 2 i 6. Stoga, nakon dijeljenja s 2 zadnja znamenka može biti 0, 1, 3, 5, 6 i 8. Provjera pokazuje da se sve te zadnje znamenke zaista pojavljuju.

3. Primjenom Eulerovog teorema dobije se da je ostatak 4.

4. Korištenjem funkcija izvodnica traženi broj načina jednak je koeficijentu uz x^{40} u razvoju funkcije
$$f(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12})^5,$$
a to je
$$-\binom{-5}{15} + \binom{5}{1} \cdot \binom{-5}{9} - \binom{5}{2} \cdot \binom{-5}{3} = 651.$$

5. Opće rješenje je
$$a_n = \lambda(-1)^n + \mu 5^n + \frac{1}{8}n + \frac{7}{32} + n \cdot 5^{n+1}.$$

6. Produkt dvije regularne matrice je regularna matrica, asocijativnost množenja vrijedi, neutralni element je jedinična matrica i svaka regularna matrica ima svoj inverz pa je skup svih regularnih matrica iz $\mathcal{M}_{2,2}$ grupa.

   Po Binet–Cauchyjevom teoremu produkt dvije matrice determinante 1 je opet matrica determinante 1 i inverz matrice determinante 1 je matrica determinante 1 pa je skup svih matrica iz $\mathcal{M}_{2,2}$ determinante 1 podgrupa grupe svih regularnih matrica iz $\mathcal{M}_{2,2}$.

7. Skup $P \subset \mathbb{C}$ pa se može primijeniti kriterij. Za $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in P$ vrijedi $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \in P$ te $-z_1 = -a - bi \in P$. Stoga je $(P, +)$ komutativna grupa.

   Nadalje, $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i \in P$, asocijativnost i komutativnost množenja, te distributivnost množenja prema zbrajanju su naslijeđene, a neutralni element je $1 \in P$. Stoga je $(P, +, \cdot)$ komutativni prsten s jedinicom.

   No, $(P, +, \cdot)$ nije polje jer npr. $2^{-1} = \frac{1}{2} \notin P$.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE

30.09.2004.

1. **(2 boda)** Cantorovim dijagonalnim postupkom dokazati da je skup svih nizova prirodnih brojeva neprebrojiv.

2. **(2 boda)** Neka je $\mathcal{U} = \{1, 2, \ldots, 100\}$ univerzalni skup. Za koliko trojki $(x, y, z) \in \mathcal{U}^3$ je predikat

$$P(x, y, z) \equiv (x = y = z) \Rightarrow (x \text{ nije djeljiv s } 2)$$

   istinit?

3. **(2+2 boda)**

   (a) Dokazati da je produkt pet uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv sa 120.

   (b) Koje sve ostatke može produkt pet uzastopnih prirodnih brojeva dati pri dijeljenju sa 7? Obrazložiti odgovor!

4. **(3 boda)** Koliko ima dvadeseteroznamenkastih prirodnih brojeva koji sadrže svaku od znamenki $0, 1, \ldots, 9$ točno dva puta?

5. **(3 boda)** Naći opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} - 2n + 5 \cdot 3^n.$$

6. **(1+2 boda)** Neka je p neparan prost broj i $(G, *)$ grupa reda p.

   (a) Odrediti sve podgrupe od G.

   (b) Ako je poznato da je G komutativna dokazati da je

$$g_1 * g_2 * \ldots * g_p = e,$$

   gdje su $g_1, g_2, \ldots g_p$ različiti elementi grupe G.

7. **(3 boda)** U konačnom polju od 16 elemenata konstruiranom pomoću ireducibilnog polinoma $q(t) = t^4 + t^3 + 1$ naći aditivni i multiplikativni inverz elementa $t^2 + t + 1$.

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

30.09.2004.

1. Pretpostavimo da je skup svih nizova prirodnih brojeva prebrojiv odnosno da ga se može posložiti u niz

$$(a^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, (a^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}, (a^{(3)})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$$

   gdje $(a^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ označava k–ti niz, a njegovi članovi su $a_n^{(k)}, n \in \mathbb{N}$.

   Tada Cantorovim dijagonalnim postupkom konstruiramo novi niz $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ koji nije u gornjem nizu i time dobivamo kontradikciju. Točnije za k–ti član niza $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ odaberemo bilo koji prirodni broj b_k različit od broja $a_k^{(k)}$. Time smo osigurali da se za svaki $k \in \mathbb{N}$ niz $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ razlikuje od niza $(a^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ u k–tom članu.

2. Predikat je lažan ako i samo ako vrijedi $x = y = z$ i x je djeljiv s 2, odnosno za trojke oblika $(2k, 2k, 2k)$ gdje je $k = 1, 2, \ldots 50$. Stoga je predikat lažan za 50 trojki pa je istinit za $100^3 - 50 = 999950$ trojki.

3. (a) Među pet uzastopnih prirodnih brojeva točno jedan je djeljiv s 5, barem jedan s 3, te barem dva s 2 od čega barem jedan s 4. Stoga je njihov produkt djeljiv s $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 120$.

   (b) Ako je $n \equiv 0, 1, 2, 5, 6 \pmod 7$ onda je jedan od brojeva

$$n-2, n-1, n, n+1, n+2$$

   djeljiv sa 7 pa je i njihov produkt djeljiv sa 7.
   Ako je $n \equiv 3 \pmod 7$ onda je

$$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \equiv 1 \pmod 7,$$

   a ako je $n \equiv 4 \pmod 7$ onda je

$$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \equiv 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 \equiv 6 \pmod 7.$$

   Dakle, produkt pet uzastopnih prirodnih brojeva može dati ostatke 0, 1 i 6 pri dijeljenju sa 7.

4. Od svih nizova zadanih znamenki treba oduzeti one koji počinju s 0. Dakle,

$$P_{20}^{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2} - P_{19}^{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2} = \frac{20!}{(2!)^{10}} - \frac{19!}{(2!)^9}.$$

5. $a_n = (\lambda + \mu n)2^n - 2n - 8 + 45 \cdot 3^n$.

6. (a) Red podgrupe dijeli red grupe pa su jedine moguće podgrupe od G reda 1 i p, a to su $\{e\}$ i G.

   (b) Grupa G je neparnog reda pa nema elemenata reda 2. Stoga za svaki $g \in G$ osim za neutralni element vrijedi $g \neq g^{-1}$. Budući da je grupa komutativna u zadanom produktu se pokrate svi takvi parovi elementa i njegovog inverza i dobije se e.

7. Aditivni inverz je
$$t^2 + t + 1,$$
a multiplikativni
$$t^3 + t^2 + t.$$

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
01.07.2005.

1. **(2 boda)** Dokazati da je kartezijev produkt konačno mnogo prebrojivih skupova prebrojiv.

2. **(2 boda)** Odrediti Booleovu funkciju $F(A, B, C)$ koja na izlazu daje 1 ako je $(ABC)_3 \equiv 1(mod\ 2)$, a 0 inače.

3. **(3 boda)** Bez upotrebe kalkulatora odrediti ostatak pri dijeljenju broja 317^{258} s 15.

4. **(4 boda)** Na koliko je načina moguće podijeliti 40 jabuka na petoro djece tako da svako dijete dobije paran broj jabuka, i to barem dvije, ali najviše 12?

5. **(3 boda)** Odrediti funkciju izvodnicu niza zadanog s

$$a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n + \frac{1}{n+1}, \quad n \geqslant 0,$$

   i početnim uvjetima $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

6. **(3 boda)** Odrediti sve podgrupe simetrične grupe S_3.

7. **(3 boda)** U konačnom polju od 16 elemenata konstruiranom pomoću ireducibilnog polinoma $q(t) = t^4 + t^3 + 1$ naći aditivni i multiplikativni inverz elementa $t^2 + t + 1$.

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

01.07.2005.

1. Neka su $A_1, \ldots, A_k$ zadani skupovi. Oni su prebrojivi pa njihove elemente možemo poredati u niz. Neka je
$$A_i = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots\}.$$
Tada je funkcija $f : A_1 \times \ldots \times A_k \to \mathbb{N}$ definirana formulom
$$f(a_{n_1}^{(1)}, a_{n_2}^{(2)}, \ldots, a_{n_k}^{(k)}) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k},$$
gdje su $p_1, \ldots, p_k$ različiti prosti brojevi, injekcija.

2. $F(A,B,C) = (A+B+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$.

3. Ostatak je 4. Primijeni se Eulerov teorem.

4. Koristeći funkcije izvodnice broj načina podjele jednak je koeficijentu uz x^{40} u izrazu
$$(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12})^5.$$
Dobije se
$$-\binom{-5}{15} + \binom{5}{1} \cdot \binom{-5}{9} - \binom{5}{2} \cdot \binom{-5}{3} = 651.$$

5. $$f(x) = \frac{-x^2 ln|1-x| + x + 1}{1 - x + 2x^2}.$$

6. Red grupe je 6 pa osim trivijalnih mogu postojati jedino podgrupe reda 2 i 3. Podgrupe reda 2 se dobiju od elemenata reda 2 i to su $\{Id, (1,2)\}$, $\{Id, (1,3)\}$ i $\{Id, (2,3)\}$. Podgrupa reda 3 se dobije od preostalih elemenata i to je $\{Id, (1,2,3), (1,3,2)\}$.

7. Aditivni inverz je
$$t^2 + t + 1,$$
a multiplikativni
$$t^3 + t^2 + t.$$

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
02.09.2005.

1. **(2 boda)** Da li je skup svih nizova prirodnih brojeva prebrojiv ili neprebrojiv? Obrazložiti odgovor!

2. **(2 boda)** Odrediti Booleovu funkciju koja za n–bitni ulaz $A_1, A_2, \ldots, A_n$ na izlazu daje 0 ako su svi ulazi jednaki, a 1 inače. Minimizirati broj operacija.

3. **(3 boda)** Neka je p prost broj. Odrediti sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
$$x^2 + xy = p.$$

4. **(3 boda)** Na koliko načina se može 25 (jednakih) jabuka i 13 (jednakih) krušaka podijeliti na petero (različite) djece ako svako dijete mora dobiti barem jednu krušku i svako dijete osim jednog unaprijed određenog paran broj jabuka? Obrazložiti odgovor.

5. **(4 boda)** Unutar kvadrata stranice 1 odabrane su 33 točke. Dokazati da postoji krug radijusa $\frac{\sqrt{2}}{8}$ koji prekriva barem tri odabrane točke.

6. **(3 boda)** Za sljedeće algebarske strukture odrediti da li su grupoid, polugrupa, monoid i grupa:

   (a) zatvoreni interval $[-2, 2]$ uz operaciju zbrajanja,

   (b) skup dijagonalnih matrica $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ uz operaciju množenja matrica,

   (c) skup svih bijekcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uz operaciju kompozicije funkcija.

   Dokazati svoje tvrdnje!

7. **(3 boda)** U polju $\mathbb{Z}_7$ zadan je sustav jednadžbi
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & 5z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & \lambda z & = & 3 \end{array}$$
ovisan o parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$. Za koju vrijednost parametra λ taj sustav nema rješenja?

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

02.09.2005.

1. Skup svih nizova prirodnih brojeva je neprebrojiv. Da bi to dokazali, pretpostavimo suprotno to jest da je skup svih nizova prirodnih brojeva prebrojiv odnosno da ga se može posložiti u niz

$$(a^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, (a^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}, (a^{(3)})_{n\in\mathbb{N}}, \dots$$

   gdje $(a^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ označava k–ti niz, a njegovi članovi su $a_n^{(k)}, n \in \mathbb{N}$.

   Tada Cantorovim dijagonalnim postupkom konstruiramo novi niz $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ koji nije u gornjem nizu i time dobivamo kontradikciju. Točnije za k–ti član niza $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ odaberemo bilo koji prirodni broj b_k različit od broja $a_k^{(k)}$. Time smo osigurali da se za svaki $k \in \mathbb{N}$ niz $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ razlikuje od niza $(a^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ u k–tom članu.

2. $F(A_1, A_2, \dots, A_n) = (A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \wedge \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)$.

3. Rastav na faktore lijeve strane daje

$$x(x + y) = p.$$

   Budući da je p prost moguća su 4 slučaja:

$$x = 1, x + y = p \Rightarrow x = 1, y = p - 1,$$

$$x = p, x + y = 1 \Rightarrow x = p, y = 1 - p,$$

$$x = -1, x + y = -p \Rightarrow x = -1, y = -p + 1,$$

$$x = -p, x + y = -1 \Rightarrow x = -p, y = -1 + p.$$

4. Najprije podijelimo svakom djetetu po jednu krušku i unaprijed određenom djetetu jednu jabuku. Tada preostalih 12 parova jabuka i preostalih 8 krušaka dijelimo na petero djece. To su kombinacije s ponavljanjem

$$\overline{C}_5^{12}\overline{C}_5^{8}.$$

5. Podijelimo kvadrat na 16 kvadratića duljine stranice $\frac{1}{4}$. Po Dirichletovom principu u jednom takvom kvadratiću nalazi se barem $\left[\frac{33-1}{16}\right] + 1 = 3$ točke. Radijus kruga opisanog tom kvadratiću je upravo $\frac{\sqrt{2}}{8}$ pa je time tvrdnja dokazana.

6. (a) Budući da je npr. $2 + 2 = 4 \notin [-2, 2]$ ovo nije niti grupoid.

(b) Produkt dvaju dijagonalnih matrica je opet dijagonalna matrica, asocijativnost za množenje matrica vrijedi, neutralni element je jedinična matrica koja je isto dijagonalna. Međutim nema svaka dijagonalna matrica svoj inverz jer je i npr. nulmatrica dijagonalna. Stoga je ovo monoid, ali nije grupa.

(c) Kompozicija dvaju bijekcija je opet bijekcija, asocijativnost uvijek vrijedi za kompoziciju, neutralni element je identiteta, svaka bijekcija ima inverz i to svoju inverznu funkciju. Dakle, ovo je grupa.

7. Sustav nema rješenja za $\lambda = 2$.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE
12.06.2006.

1. (**2 boda**) Odrediti Booleovu funkciju koja za tri ulazne varijable A, B i C na izlazu daje 1 ako postoji konačno polje koje ima
$$q = (ABC)_2 + (10)_2$$
elementa, a nulu inače.

2. (**3 boda**) Naći sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
$$xy = 2x + y + 1.$$

3. (**3 boda**) Na beskonačnoj šahovskoj ploči nalazi se figura koja se u jednom potezu može pomaknuti za jedno polje desno ili gore. Koliko različitih puteva može preći ta figura u točno 10 poteza?

4. (**3 boda**) Na kolokvij iz diskretne matematike izašlo je 400 studenata. Kolokvij se sastojao od tri zadatka. Asistent je zadao toliko težak kolokvij da nitko nije riješio sva tri zadatka. Ipak, svaki student je riješio barem jedan zadatak, a dva zadatka riješilo je 150 studenata. Ako je poznato da je drugi zadatak riješilo 100, a treći 150 studenata, koliko je studenata riješilo prvi zadatak?

5. (**3 boda**) Naći rješenje rekurzivne relacije
$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-1)^n, \quad n \geqslant 2$$
uz početne uvjete $a_0 = 0$ i $a_1 = -3/2$.

6. (**3 boda**) Koje su od sljedećih algebarskih struktura grupe:
   (a) $G_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ uz operaciju množenja kompleksnih brojeva,
   (b) $G_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ uz operaciju $*$ definiranu formulom
$$z_1 * z_2 = \frac{z_1 \cdot z_2}{2}.$$
   Obrazložiti odgovore.

7. (**3 boda**) U konačnom polju od $125 = 5^3$ elemenata konstruiranom pomoću ireducibilnog polinoma $q(t) = t^3 + t^2 + 1$ odrediti multiplikativni inverz elementa $2t^2$.

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

12.06.2006.

1. Konačno polje od q elemenata postoji ako i samo ako je $q = p^n$ gdje je p prost, $n \in \mathbb{N}$. Budući da je q iz zadatka između 2 i 9, izlaz je 1 ako je q jednak 2, 3, 4, 5, 7, 8 ili 9. Dakle, izlaz je nula jedino ako je q jednak 6. Tada $(ABC)_2 = 4$ odnosno $A = 1$, $B = C = 0$ pa je

$$F(A, B, C) = \overline{A} + B + C.$$

2. Jednadžba se može zapisati u obliku

$$(x - 1)(y - 2) = 3,$$

pa ima četiri rješenja

$$(x, y) \in \{(2, 5), (4, 3), (0, -1), (-2, 1)\}.$$

3. 1. Način. U svakom potezu figura odlučuje u kojem će od dva moguća smjera napraviti potez. Stoga po teoremu o uzastopnom prebrojavanju u 10 poteza figura može napraviti 2^{10} različitih puteva.

   2. Način. Ako u putu figure ima k poteza desno i $10 - k$ gore, onda takvih puteva ima

$$P_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

   Budući da k može biti između 0 i 10 dobivamo

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{n}{k} = (1 + 1)^{10} = 2^{10}.$$

4. Primijenimo formulu uključivanja i isključivanja. Neka je A_i skup studenata koji su riješili i–ti zadatak. Tada

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - \big(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|\big) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \quad (*)$$

   Prema uvjetima zadatka vrijedi:

   - $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ jer nitko nije riješio sva tri zadatka,
   - $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 400$ jer je svaki student riješio barem jedan zadatak,
   - $|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 150$ jer je dva zadatka riješilo 150 studenata, a ovi presjeci od po dva skupa su disjunktni jer nitko nije riješio sve,

- $|A_2| = 100$,
- $|A_3| = 150$.

Uvrštavanjem u $(*)$ dobivamo $|A_1| = 300$.

5. $a_n = n(-1)^n + \frac{1}{2}n^2(-1)^n$

6. (a) $(G_1, \cdot)$ je monoid, ali nije grupa. Naime, za $z_1, z_2 \in G_1$ vrijedi

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \leqslant 1 \cdot 1 = 1,$$

asocijativnost vrijedi za množenje kompleksnih brojeva, neutralni element je 1. Međutim, elementi $z \in G_1$ za koje $|z| < 1$ nemaju inverz jer je

$$|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} > 1.$$

(b) $(G_2, *)$ je grupa. Naime, za $z_1, z_2 \in G_2$ vrijedi

$$|z_1 * z_2| = |\frac{z_1 z_2}{2}| = \frac{|z_1||z_2|}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2,$$

asocijativnost vrijedi jer

$$(z_1 * z_2) * z_3 = \frac{z_1 z_2}{2} * z_3 = \frac{\frac{z_1 z_2}{2} z_3}{2} = \frac{z_1 z_2 z_3}{4},$$

$$z_1 * (z_2 * z_3) = z_1 \frac{z_2 z_3}{2} = \frac{z_1 \frac{z_2 z_3}{2}}{2} = \frac{z_1 z_2 z_3}{4},$$

neutralni element je $e = 2$ jer

$$e * z = \frac{2z}{2} = z,$$

svaki element $z \in G_2$ ima inverz $z^{-1} = \overline{z}/2$ jer

$$z * \frac{\overline{z}}{2} = \frac{z\overline{z}}{2} = \frac{|z|^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 = e.$$

Uvjete $z * e = z$ za neutralni element i $\frac{\overline{z}}{2} * z = e$ ne treba provjeravati jer je $*$ komutativna

$$z_1 * z_2 = \frac{z_1 z_2}{2} = \frac{z_2 z_1}{2} = z_2 * z_1.$$

7. **(3 boda)** $2t + 2$

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE

30.06.2006.

1. **(3 boda)** Neka je S prebrojiv skup. Dokazati da je skup svih injekcija $f : \mathbb{N} \to S$ neprebrojiv.

2. **(3 boda)** Na univerzalnom skupu $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ zadani su predikati

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &\equiv x + y \text{ je djeljivo sa } z, \\ Q(x, y) &\equiv |x - y| \geqslant 2, \\ R(x, y, z) &\equiv z \text{ je najveći zajednički djelitelj od } x \text{ i } y. \end{aligned}$$

   Za koliko parova $(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ je formula algebre predikata

$$P(x, y, 30) \Rightarrow \Big[Q(x, 15) \vee \neg R(x, y, x)\Big]$$

   istinita?

3. **(2 boda)** Bez upotrebe kalkulatora odrediti zadnje dvije znamenke broja 199^{199}.

4. **(2 boda)** Na koliko načina se može 20 jednakih kuglica rasporediti u 7 različitih kutija tako da barem jedna kutija ostane prazna?

5. **(4 boda)** Koliko se različitih 'riječi' može napisati pomoću svih slova riječi
   K O M B I N A T O R I K A
   kod kojih nikoja dva ista slova nisu jedno do drugog?

6. **(2 boda)** Neka je
$$G = \{\alpha \in S_6 : \alpha(3) = 3\}$$
   podskup simetrične grupe S_6.
   (a) Dokazati da je G podgrupa od S_6.
   (b) Odrediti red od G.

7. **(4 boda)** Na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zadane su dvije operacije $*$ i $\cdot$ formulama

$$\begin{aligned} (a, b) * (c, d) &= (a + 2^b c, b + d), \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac, bd), \end{aligned}$$

   gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, a operacije na desnoj strani uobičajene operacije zbrajanja, množenja i potenciranja realnih brojeva. Da li je $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *, \cdot)$ prsten? Obrazložiti odgovor!

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

30.06.2006.

1. Injekcija $f : \mathbb{N} \to S$ nije ništa drugo nego niz elemenata iz S čiji su svi clanovi različiti. Stoga možemo primijeniti Cantorov dijagonalni postupak. Pretpostavimo da je skup svih injekcija iz $\mathbb{N}$ u S prebrojiv te ih složimo u niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zatim induktivno definiramo novu injekciju g koja ima svojstvo da je $g(n)$ različito od $f_n(n)$ i svih konačno mnogo vrijednosti $g(1), g(2), \ldots, g(n-1)$ funkcije g u prethodnim točkama. Time smo se osigurali da je g injekcija te da se razlikuje od svih u nizu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i dobili kontradikciju.

2. Prebrojimo za koliko parova je implikacija lažna. To će biti ako je $P(x, y, 30)$ istina, $Q(x, 15)$ laž i $R(x, y, x)$ istina. Dobije se da je laž za 3 para (x, y), pa je istina za 9997.

3. Zadnje dvije znamenke su ostatak pri dijeljenju sa 100. Stoga modulo 100 je
$$199^{199} \equiv (-1)^{199} = -1 = 99.$$

4. Od ukupnog broja rasporeda oduzmemo one kod kojih nema praznih kutija. Dakle,
$$\overline{C}_7^{20} - \overline{C}_7^{20-7}.$$

5. Riječ KOMBINATORIKA ima po dva slova K, O, I, A, a ostala po jedno. Stoga primijenimo formulu uključivanja isključivanja. S je skup svih riječi, a s A_1, A_2, A_3 i A_4 označimo skupove riječi sa susjednim slovima K, O, I, A, respektivno. Tada treba prebrojati
$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4|,$$
što je po formuli uključivanja i isključivanja jednako
$$|S| - \binom{4}{1}|A_i| + \binom{4}{2}|A_i \cap A_j| - \binom{4}{3}|A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$
U tom izrazu sve skupove čine riječi koje imaju određen broj istih slova jedno pored drugog. Stoga ih možemo prebrojati koristeći permutacije s ponavljanjem tretirajući takva slova kao jedno. Dobiva se
$$\begin{aligned} |S| &= P_{13}^{2,2,2,2}, \\ |A_i| &= P_{12}^{2,2,2}, \\ |A_i \cap A_j| &= P_{11}^{2,2}, \\ |A_i \cap A_j \cap A_k| &= P_{10}^{2}, \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= P_9. \end{aligned}$$

6. Po kriteriju za podgrupe G je grupa jer

$$\alpha \circ \beta(3) = \alpha(3) = 3,$$

$$\alpha^{-1}(3) = 3.$$

   Red od G je $5! = 120$ jer se sastoji od svih permutacija skupa $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ od 5 elemenata.

7. Na vjezbama smo dokazali da je $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$ grupa (naravno, na pismenom ispitu to treba ipak dokazati!). Nadalje, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \cdot)$ je polugrupa (dokazati!). Međutim, ne vrijedi komutativnost operacije $*$, niti distributivnost $\cdot$ prema $*$ pa $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *, \cdot)$ nije prsten.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE

13.07.2006.

1. (**2 boda**) Ako su skupovi S_1 i S_2 prebrojivi dokazati da je i njihov Kartezijev produkt $S_1 \times S_2$ prebrojiv.

2. (**3 boda**) Odrediti Booleovu funkciju koja za četiri ulazne varijable A, B, C, D na izlazu daje 1 ako broj $13^{(ABCD)_2}$ daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5, a nulu inače. Minimizirati broj operacija.

3. (**2 boda**) Koliko ima dvadeseteroznamenkastih prirodnih brojeva koji sadrže svaku od znamenki $0, 1, \ldots, 9$ točno dva puta?

4. (**4 boda**) Od 50 jednakih kuglica 20 ih je obojano crveno, a 30 plavo. Na koliko načina je moguće rasporediti kuglice u četiri različite kutije označene s A, B, C i D tako da su ispunjena sva tri sljedeća uvjeta:

   (i) u kutijama A i B broj crvenih kuglica je paran, a plavih neparan;

   (ii) u kutijama C i D broj crvenih kuglica je neparan, a plavih paran;

   (iii) u svakoj od kutija A i D ima najviše 11 kuglica svake boje?

5. (**4 boda**) Riješiti rekurzivnu relaciju

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n - 2^{n+1}, \qquad n \geqslant 2,$$

   uz početne uvjete $a_0 = 3$ i $a_1 = 5$.

6. (**2 boda**) U simetričnoj grupi S_6 zadan je element $\alpha = (1, 2, 3)(4, 5)(6)$. Izračunati α^{-2}.

7. (**3 boda**) Neka u nekomutativnom monoidu $(G, *)$ jednadžba $a * x = b$ (ovdje je x nepoznanica) ima jedinstveno rješenje za sve $a, b \in G$. Dokazati da je tada $(G, *)$ grupa.

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

13.07.2006.

1. Skupovi S_1 i S_2 su prebrojivi pa sve njihove elemente možemo složiti u nizove. Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvi nizovi za S_1 i S_2, respektivno. Zadatak možemo riješiti na dva načina:

   1. NAČIN. Konstrukcijom injekcija $f:\mathbb{N}\to S_1\times S_2$ i $g: S_1\times S_2\to\mathbb{N}$. Prva injekcija se jednostavno dobije na primjer
   $$f(n)=(a_n,b_n).$$
   Za drugu injekciju iskoristimo jedinstvenost rastava na proste faktore i definiramo
   $$g(a_i,b_j)=2^i3^j.$$
   Funkcija g je injekcija jer ako su prirodni brojevi 2^i3^j i $2^{i'}3^{j'}$ jednaki onda je zbog jedinstvenosti rastava na proste faktore $i=i'$ i $j=j'$ odnosno $(a_i,b_j)=(a_{i'},b_{j'})$.

   2. NAČIN. Uređene parove $(a_i,b_j)\in S_1\times S_2$ složimo u beskonačnu matricu tako da se (a_i,b_j) nalazi na presjeku i–tog retka i j–tog stupca. Tada možemo sve elemente tablice posložiti u niz kao u dokazu prebrojivosti skupa $\mathbb{Q}$ na vježbama.

2. Budući da 13 nije djeljivo s 5 vrijedi mali Fermatov teorem pa je
   $$13^{5-1}\equiv 1 \pmod{5}.$$
   Provjeri se da 13^1, 13^2, 13^3 ne daju ostatak 1 pri dijeljenju s 5. Stoga je izlaz Booleove funkcije 1 ako i samo ako je $(ABCD)_2$ djeljiv s 4 odnosno $C=D=0$. Dakle,
   $$F(A,B,C,D)=\overline{C}\cdot\overline{D}=\overline{C+D}.$$

3. Od svih nizova zadanih znamenki treba oduzeti one koji počinju s 0. Dakle,
   $$P_{20}^{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2}-P_{19}^{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2}=\frac{20!}{(2!)^{10}}-\frac{19!}{(2!)^9}.$$

4. Budući da su raspodjele crvenih i plavih kuglica međusobno nezavisne posebno se računa broj raspodjela svake boje.

   Funkcija izvodnica za raspodjelu crvenih kuglica u kutije glasi
   $$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^2+\ldots+x^{10})(1+x^2+\ldots)(x+x^3+\ldots)(x+x^3+\ldots+x^{11}) \\ &= \frac{1-x^{12}}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{x(1-x^{12})}{1-x^2} \\ &= x^2(1-2x^{12}+x^{24})\left(1-\binom{-4}{1}x^2+\binom{-4}{2}x^4-\binom{-4}{3}x^6+\ldots\right). \end{aligned}$$

Analogno se dobije da je i funkcija izvodnica za plave kuglice upravo jednaka $f(x)$. Stoga je rješenje zadatka produkt koeficijenata uz x^{20} i x^{30} u redu potencija $f(x)$ odnosno

$$\left[-\binom{-4}{9}+2\binom{-4}{3}\right]\cdot\left[\binom{-4}{14}-2\binom{-4}{8}+\binom{-4}{4}\right].$$

5. $a_n = (-1+2n)2^n + n + 4 - n^2 2^n$.

6. $\alpha^{-2} = (1,2,3)(4)(5)(6)$.

7. Neka je $g \in G$ proizvoljan. Da bi dokazali da je G grupa treba dokazati da g ima inverz u G jer su ostali aksiomi grupe ispunjeni već u monoidu.

   Zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje za bilo koje $a, b \in G$. Stoga za $a = g$ i $b = e$ (e je neutralni element monoida), dobivamo da postoji jedinstveni $x \in G$ takav da vrijedi

$$g * x = e. \tag{$*$}$$

   Dalje, za $a = x$ i $b = e$, dobivamo da postoji jedinstveni $y \in G$ takav da vrijedi

$$x * y = e. \tag{$**$}$$

   Ali tada koristeći činjenicu da je G monoid te jednakosti $(*)$ i $(**)$ mora vrijediti

$$y = e * y = (g * x) * y = g * (x * y) = g * e = g.$$

   Dakle, jednakost $(**)$ je zapravo

$$x * g = e.$$

   Time smo dokazali da je x jedinstveni element iz G za koji vrijedi

$$g * x = x * g = e,$$

   pa je x zapravo inverz od g.

   NAPOMENA: Kad bi znali da je G komutativan onda bi bilo dovoljno dobiti $a * x = e$ jer druga jednakost slijedi iz komutativnosti i drugi dio dokaza ne bi bio potreban.

PISMENI ISPIT IZ DISKRETNE MATEMATIKE

04.09.2006.

1. (**3 boda**) Dokazati da binarna operacija $*$ zadana tablicom istinitosti

A	B	$A * B$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

čini bazu algebre sudova.

2. (**3 boda**) Neka je $n = p_1^2 p_2^2 p_3^2$ gdje su p_1, p_2, p_3 različiti prosti brojevi. Dokazati da je tada $\varphi(n)$ djeljiv s $4p_1p_2p_3$.

3. (**3 boda**) Koliko rješenja u skupu prirodnih brojeva ima nejednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 2006 \quad ?$$

4. (**3 boda**) Naći opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_{n+3} = 2a_{n+1} + 4a_n + 5\,.$$

5. (**3 boda**) Koliko ima elemenata reda 3 u simetričnoj grupi S_6?

6. (**2 boda**) Neka je $(G, *)$ polugrupa te neka su $e_1, e_2 \in G$ elementi koji zadovoljavaju uvjet za neutralni element

$$a * e_1 = e_1 * a = a \quad \forall a \in G,$$

$$a * e_2 = e_2 * a = a \quad \forall a \in G.$$

Dokazati da je tada $e_1 = e_2$.

7. (**3 boda**) U konačnom polju od 16 elemenata konstruiranom pomoću ireducibilnog polinoma $q(t) = t^4 + t^3 + 1$ naći aditivni i multiplikativni inverz elementa $t^2 + t + 1$.

RJEŠENJA PISMENOG ISPITA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

04.09.2006.

1. Operacija $*$ čini bazu algebre sudova jer vrijedi

$$\neg A \equiv A * A,$$

$$A \vee B \equiv \neg(A * B) \equiv (A * B) * (A * B),$$

a na vježbama smo dokazali da je $\{\neg, \vee\}$ baza algebre sudova.

2. Po formuli za Eulerovu funkciju

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= p_1^2 p_2^2 p_3^2 \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \\ &= p_1(p_1 - 1)p_2(p_2 - 1)p_3(p_3 - 1).\end{aligned}$$

Dobiveni izraz je očito djeljiv s $p_1p_2p_3$, a budući da su p_1, p_2, p_3 različiti, barem dva su neparni pa umanjeni za jedan postaju parni što daje faktor 4.

3. Broj rješenja zadane nejednadžbe jednak je broju rješenja u skupu prirodnih brojeva jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2006,$$

a on je jednak broju rješenja u skupu $\mathbb{N}_0$ jednadžbe

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 2001.$$

Stoga je rješenje $\overline{C}_5^{2001}$.

4. Opće rješenje je

$$a_n = C_1 2^n + C_2 2^{n/2} \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + C_3 2^{n/2} \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - 1.$$

5. Element simetrične grupe S_6 reda tri u zapisu pomoću disjunktnih ciklusa jednak je ili produktu dva ciklusa duljine tri ili ciklusu duljine tri (s tri fiksne točke).

Produkt dva disjunktna ciklusa duljine tri biramo u tri koraka: najprije odaberemo tri elementa za prvi ciklus na $\binom{6}{3}$ načina, zatim ih složimo u ciklus na $3!/3 = 2$ načina, te na kraju preostala tri elementa složimo u drugi ciklus na $3!/3 = 2$ načina. Međutim, ciklusi komutiraju, a to nismo uzeli u obzir. Stoga po teoremu o uzastopnom prebrojavanju dobivamo

$$\frac{\binom{6}{3} 2^2}{2!} = 40$$

produkata dva disjunktna ciklusa.

Ciklus duljine tri biramo u dva koraka: najprije odaberemo tri elementa koja tvore ciklus na $\binom{6}{3}$ načina, te ih zatim složimo u ciklus na $3!/3 = 2$ načina. Preostali elementi su fiksne točke. Stoga dobivamo

$$\binom{6}{3} 2 = 40$$

ciklusa duljine tri.

Dakle, elemenata reda tri u S_6 ima 80.

6. Budući da vrijedi $e_1 * a = a$ za svaki $a \in G$, posebno za $a = e_2$ dobivamo

$$e_1 * e_2 = e_2. \tag{$*$}$$

S druge strane, $a * e_2 = a$ za svaki $a \in G$ pa za $a = e_1$ dobivamo

$$e_1 * e_2 = e_1. \tag{$**$}$$

Iz $(*)$ i $(**)$ slijedi upravo $e_1 = e_2$.

7. Aditivni inverz je

$$t^2 + t + 1,$$

a multiplikativni

$$t^3 + t^2 + t.$$