
Iskazna logika

Iskazi i iskazne formule

Obično se **iskaz** definiše kao nešto što ima osobinu da je **tačno** ili **netačno**, i to samo jedno od toga.

Pri tome, iskazi se zadaju rečenicama. Na primer, rečenicom
"3 je delitelj broja 18"

je zadat jedan iskaz.

Ova definicija je neformalna i nije dovoljno operativna – za datu rečenicu nije uvek lako odrediti da li je njome zadat iskaz ili ne.

Na primer, rečenicom "Ovo što upravo izgovaram je laž" nije zadat iskaz, iako na prvi pogled izgleda suprotno.

Naime, na osnovu forme ove rečenice bi se lako moglo zaključiti da se njome nešto tvrdi, a to nije tačno.

Zbog toga u iskaznoj logici pojam iskaza koristimo kao osnovni pojam, pojam koji se ne definiše.

U iskaznoj logici pojedinačne iskaze označavamo slovima

$$p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots$$

Ova slova nazivamo **iskazna slova** ili **iskazne promenljive**.

Od jednostavnijih iskaza grade se složeniji iskazi, upotrebom **logičkih veznika**

nije, i, ili, ako ... onda, ako i samo ako,

pri čemu se u iskaznoj logici za ove veznike koriste posebne oznake

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow.$$

Značenje veznika precizira se u nastavku.

Negacija, konjunkcija i disjunkcija

Negacija iskaza p je iskaz **nije** p .

Ovaj iskaz označava se sa $\neg p$, što se izgovara i **ne** p .

Negacija tačnog iskaza je netačan iskaz i obratno, negacija netačnog je tačan iskaz.

Konjunkcija iskaza p i q je iskaz **p i q** , u oznaci $p \wedge q$.

Iskaz $p \wedge q$ je tačan samo u slučaju kada su i p i q tačni iskazi.

U ostalim slučajevima konjunkcija je netačan iskaz.

Disjunkcija iskaza p i q je iskaz **p ili q** , u oznaci $p \vee q$.

Iskaz $p \vee q$ je tačan ako je bar jedan od iskaza p i q tačan, a netačan je samo ako su oba iskaza p i q netačni.

Ovo se razlikuje od upotrebe veznika "ili" u svakodnevnom životu, gde on često ima **isključivi smisao** – iskaz " p ili q " je tačan ukoliko je tačan iskaz p ili q , i to samo jedan od njih.

Takva vrsta disjunkcije se naziva **ekskluzivna disjunkcija** ili **isključiva disjunkcija**, i piše se "**ili** p ili q ".

Primer 1.2 Neka su iskazi p i q zadati sa

p : " $\sqrt{2}$ je racionalan broj",

q : " $\sqrt{2}$ je broj koji je veći od nule".

Iskaz $\neg p$ je zadat sa

$\sqrt{2}$ nije racionalan broj

i on je tačan (jer je p netačan iskaz).

Iskaz $\neg q$ je zadat sa

$\sqrt{2}$ nije broj koji je veći od nule

i on je netačan.

Po gornjim definicijama $p \wedge q$ je netačan, a $p \vee q$ tačan iskaz.

Implikacija

Implikacija iskaza p i q je iskaz **ako p onda q** , u oznaci $p \Rightarrow q$.

Ovaj iskaz je neistinit jedino u slučaju kada je p tačan, a q netačan iskaz. U svim ostalim slučajevima ovaj iskaz je tačan.

Iskaz p naziva se **premisa**, **pretpostavka** ili **antecedent**.

Iskaz q naziva se **zaključak** ili **konsekvent**.

Izraz $p \Rightarrow q$ čita se još i kao

p iz q sledi;

p povlači (implicira) q ;

p samo ako q ;

q ako p ;

p je dovoljno za q ;

q je potrebno za p .

Primer 1.3 Neka su iskazi p i q zadati sa

p : broj n je deljiv sa 21

q : broj n je deljiv sa 7

Implikacija $p \Rightarrow q$ je tačan iskaz, bilo koji prirodan broj n da smo izabrali, čak i u slučaju da je, na primer, $n = 5$.

Prema definiciji implikacije, ako je iskaz p netačan, onda je iskaz $p \Rightarrow q$ tačan, nezavisno od tačnosti iskaza q .

Drugim rečima, iz netačne pretpostavke može da sledi bilo koji iskaz.

Ovakvo shvatanje odudara od upotrebe veznika "ako ... onda ..." u svakodnevnom životu.

Naime, bilo je rasprava oko toga da li implikacija $p \Rightarrow q$ uopšte ima smisla ako između iskaza p i q nema neke suštinske veze.

Na primer, neka je

p : voda mrzne na 100°C

q : Bombaj je glavni grad Argentine

Sa matematičke tačke gledišta, $p \Rightarrow q$ je istinit iskaz.

Međutim, neki bi smatrali da implikacija $p \Rightarrow q$ uopšte nema smisla, jer između iskaza p i q ne postoji nikakva veza.

Matematička tačka gledišta je pobedila iz dva razloga:

1. Zato što matematičku logiku ne interesuje značenje iskaza p i q , već samo njihova istinitost, tj. uslovi pod kojima istinitost iskaza p povlači istinitost iskaza q .

Drugim rečima, u matematičkoj logici istinitost implikacije $p \Rightarrow q$ ne zavisi od značenja iskaza p i q , već samo od njihove istinitosti.

2. Zato što se ovakvo gledište pokazalo veoma korisno za primenu u nauci – u nauci se često srećemo sa nekim hipotezama koje je nemoguće eksperimentalno proveriti, ali bi se mogle proveriti neke posledice koje se mogu izvući iz tih hipoteza.

Ovakvo gledište dozvoljava da iz tih hipoteza izvode posledice bez obzira na to što ne znamo da li su te hipoteze istinite ili ne.

Ovo se naziva **hipotetički karakter naučnih teorija**.

U svakodnevnom životu veznik "ako ...onda ..." se često koristi da naznači da ne verujemo da premisa može da bude istinita.

Na primer,

Ako položiš ispit, onda ću pojesti svoj šešir

znači sumnju da će student o kome se radi položiti ispit, a ne implikaciju dva iskaza.

Ekvivalencija

Ekvivalencija iskaza p i q je iskaz p ako i samo ako q , u oznaci $p \Leftrightarrow q$.

Ekvivalencija je tačan iskaz ako su p i q ili oba tačna ili oba netačna. U preostalim slučajevima ekvivalencija je netačan iskaz.

Ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$ po istinitosti odgovara rečenici

ako p onda q i ako q onda p ,

Odnosno $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$ se formuliše i kao

p je ekvivalentno sa q .

Primer 1.5

a) Rečenice

Trouglovi \mathcal{T}_1 i \mathcal{T}_2 su podudarni

Trouglovi \mathcal{T}_1 i \mathcal{T}_2 imaju podudarne po dve stranice i njima zahvaćen ugao

zadaju ekvivalentne iskaze.

Ta činjenica se formuliše i kao jedan od opštih stavova o podudarnosti trouglova

Dva trougla su podudarna ako i samo ako imaju podudarne po dve stranice i njima zahvaćeni ugao

b) Ekvivalencijom se u matematici često definišu novi termini, polazeći od već poznatih.

Prirodan broj različit od jedinice je **prost** ako i samo ako je deljiv samo sa sobom i sa jedinicom.

Ovom rečenicom definisan je **prost broj** poznatim pojmovima koji čine sadržaj drugog iskaza ekvivalencije.

Dakle, iako ova rečenica ima formu iskaza, njome nije zadat iskaz, već definicija.

Ako je jasno da je u pitanju definicija, u odgovarajućoj rečenici se često izostavlja deo **samo ako**, iako se podrazumeva da i taj pravac važi.

S obzirom na uočenu vezu između implikacije i ekvivalencije, iskaz $p \Leftrightarrow q$ formuliše se i na sledeći način:

p je potrebno i dovoljno za q .

Iskazne formule

Cilj iskazne logike je da se upotrebom matematičke simbolike prevaziđu problemi koji mogu da nastanu zbog nemogućnosti da na zadovoljavajući način definišemo pojam iskaza.

To znači da složeni iskazi, u kojima se javlja više jednostavnijih iskaza i više veznika, treba da se formiraju prema precizno utvrđenim pravilima. Pri njihovom utvrđivanju najpre se određuje **jezik** koji čine

- ★ simboli $p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots$ kojima se označavaju iskazi. Kao što smo rekli, oni se zovu **iskazna slova**;
- ★ simboli $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ i \Leftrightarrow kojima se označavaju logički veznici. Sećamo se da se oni zovu **znaci logičkih operacija**;
- ★ znaci $($ i $)$ (zgrade), koje nazivamo **pomoćni znaci**.

Za znak \neg kažemo da je **unaran**, a za ostale znake logičkih operacija da su **binarni** znaci.

Uz pomoć iskaznih slova, veznika i pomoćnih znaka mogu se obrazovati **izrazi**, pod čime podrazumevamo konačne nizove tih simbola.

Neke od tih izraza nazivamo iskaznim formulama.

Naime, pojam **iskazne formule** definiše se induktivno, pomoću sledećih pravila:

1. Iskazna slova su iskazne formule.
2. Ako su A i B iskazne formule, onda su iskazne formule i izrazi $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$.
3. Iskazne formule su samo oni izrazi koji se mogu formirati primenom pravila 1. i 2. konačan broj puta.

Primer 1.6 Izrazi

$$p, \neg\neg r, (p \wedge q), (\neg p \Rightarrow q), ((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge \neg p))$$

su primeri iskaznih formula.

Iskazne formule nisu, na primer, izrazi

$$(p \wedge), (\Rightarrow p \Rightarrow).$$

Svaku podreč, odnosno podniz, iskazne formule koji je i sam iskazna formula nazivamo njenom **podformulom**.

Na primer, $\neg r$ i $(p \Rightarrow \neg q)$ su podformule iskazne formule

$$((p \wedge \neg r) \vee \neg(p \Rightarrow \neg q)).$$

Prema definiciji, izraz oblika $A \Rightarrow B$, gde su A i B formule, nije formula, jer nema spoljnih zagrada oko tog iskaza.

Međutim, mi uvodimo **konvenciju o brisanju zagrada** koja obezbeđuje da i takvi izrazi budu formule i olakšava nam rad sa formulama.

Konvenciju o brisanju zagrada čine sledeća pravila:

1. Izostavljaju se spoljne zagrade, kao na primer u izrazima $(p \wedge q)$, $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$ i slično.

2. Ako su A_1, A_2, \dots, A_n iskazne formule, onda se umesto

$$(\dots ((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \dots \wedge A_{n-1}) \wedge A_n$$

piše

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \dots \wedge A_{n-1} \wedge A_n$$

i slično za veznik \vee . Ovo se zove uklanjanje zagrada u odnosu na asocijativnost u desno.

3. Uvodi se dogovor o redosledu veznika, prema kome su \wedge i \vee ispred \Rightarrow i \Leftrightarrow .

Na osnovu toga se veznici \wedge i \vee odnose na najmanju formulu koja ih okružuje, pa se, imajući to u vidu, određuju formule na koje se odnose veznici \Rightarrow i \Leftrightarrow .

Na primer, umesto $p \Rightarrow (q \wedge r)$ pišemo $p \Rightarrow q \wedge r$, umesto

$$(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee r)$$

pišemo

$$p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg p \vee r$$

i slično.

Kaže se još i da veznici \Rightarrow i \Leftrightarrow "jače razdvajaju" od veznika \wedge i \vee .

Definicija podformule se odnosi samo na iskaznu formulu kod koje nisu uklonjene zagrade.

Na primer, $p \Rightarrow q$ nije podformula formule $p \Rightarrow q \wedge r$.

Iskazna algebra, interpretacija

Osnovno svojstvo iskaza, ma kako složen bio, jeste da je on tačan ili netačan.

Da bi se pravila za određivanje istinitosti precizno formalizovala, uvodi se sledeća matematička struktura.

Iskazna algebra je dvoelementni skup $\{\top, \perp\}$ čiji se elementi redom čitaju **te** i **ne te**, zajedno sa jednom unarnom operacijom \neg i četiri binarne operacije \wedge , \vee , \Rightarrow i \Leftrightarrow , definisanim sledećim tablicama:

	\neg
\top	\perp
\perp	\top

\wedge	\top	\perp
\top	\top	\perp
\perp	\perp	\perp

\vee	\top	\perp
\top	\top	\top
\perp	\top	\perp

\Rightarrow	\top	\perp
\top	\top	\perp
\perp	\top	\top

\Leftrightarrow	\top	\perp
\top	\top	\perp
\perp	\perp	\top

Navedene operacije označavaju se isto kao odgovarajući logički veznici, jer su njima motivisane.

Međutim, to nisu isti pojmovi: znak \wedge u iskaznoj formuli $p \wedge q$ je zamena za veznik **i**, a oznaka \wedge u gornjoj tablici označava operaciju na skupu $\{\top, \perp\}$.

Da ponovimo još jednom, **iskazna algebra** je uređena šestorka

$$(\{\top, \perp\}, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow).$$

Njeni elementi \top i \perp odgovaraju istinitosnim vrednostima iskaza, kako se definiše u nastavku.

Primetimo da svaka iskazna formula može sadržati samo konačno mnogo iskaznih slova.

Sa druge strane, broj iskaznih slova koja se javljaju u svim formulama ne može se ograničiti nijednim prirodnim brojem, jer se uvek može napraviti nova formula sa većim brojem iskaznih slova.

Drugim rečima, za formiranje svih iskaznih formula nije dovoljan konačan skup iskaznih slova.

Međutim, za formiranje svih iskaznih formula dovoljan je **prebrojiv skup** iskaznih slova

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$$

Zato nadalje podrazumevamo da iskaznih slova ima prebrojivo mnogo i da gornja lista jeste lista svih iskaznih slova.

Neka je A iskazna formula. Njena istinitost pre svega zavisi od istinitosti iskaznih slova koja se u njoj javljaju.

Zato određivanje istinitosne vrednosti formule A mora početi dodeljivanjem izvesnih istinitosnih vrednosti svim iskaznim slovima koja se u njoj javljaju. To se može formalizovati na sledeći način.

Najpre uvodimo pojam **valuacije**, koja se definiše kako proizvoljno preslikavanje $v : \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\} \rightarrow \{\top, \perp\}$.

Vrednost $v(p_i)$ naziva se **istinitosna vrednost** iskaznog slova p_i .

Drugim rečima, valuacija je dodeljivanje **istinitosnih vrednosti** svim iskaznim slovima, mada je, kada se ograničimo samo na formulu A , za nju bitna istinitisna vrednost samo onih iskaznih slova koja se u njoj javljaju.

Inače, dodeljivanje istinitosnih vrednosti iskaznim slovima koja učestvuju u formuli A zove se **interpretacija** formule A .

Neka je sada v proizvoljna valuacija. **Vrednost iskazne formule A u valuaciji v** definiše se induktivno (po **složenosti formule A**), na sledeći način:

1. Ako formula A jeste iskazno slovo p , onda je

$$v(A) \stackrel{\text{def}}{=} v(p).$$

2. Ako je $A = \neg B$ i poznata je vrednost $v(B)$, onda je

$$v(A) \stackrel{\text{def}}{=} \neg v(B),$$

a ako je $A = B * C$, gde je $*$ jedan od logičkih veznika $\wedge, \vee, \Rightarrow$ i \Leftrightarrow , i poznate su vrednosti $v(B)$ i $v(C)$, onda je

$$v(A) \stackrel{\text{def}}{=} v(B) * v(C).$$

Primetimo da vrednosti na desnoj strani jednakosti jesu iz skupa $\{\top, \perp\}$, a da znaci $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ i \Leftrightarrow na desnoj strani predstavljaju operacije u iskaznoj algebri.

Dakle,

$$\begin{aligned}v(B \wedge C) &= v(B) \wedge v(C), & v(B \vee C) &= v(B) \vee v(C), \\v(B \Rightarrow C) &= v(B) \Rightarrow v(C), & v(B \Leftrightarrow C) &= v(B) \Leftrightarrow v(C).\end{aligned}$$

Uočimo još jednom da vrednost formule zavisi od valuacije u kojoj se posmatra - u različitim valuacijama ona može imati različite vrednosti.

Takođe, istinitosna vrednost složenih formula određuje se tako što se najpre odrede istinitosne vrednosti jednostavnijih formula koje je grade, polazeći od iskaznih slova.

Ako u nekoj valuaciji vrednost formule jeste \top , onda kažemo da je formula **tačna** u toj valuaciji, a ako joj je vrednost \perp , formula je **netačna** u toj valuaciji.

Primer 1.7 Posmatrajmo iskaznu formulu $p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$.

Iskazna slova koja se u njoj javljaju su p , q i r . Dodelimo im redom vrednosti \top, \perp, \perp . To je jedna intepretacija date formule.

Sada imamo da je

$$\begin{aligned} v(p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)) &= v(p) \wedge (v(q) \Leftrightarrow \neg v(r)) = \\ &= \top \wedge (\perp \Leftrightarrow \neg \perp) = \\ &= \top \wedge (\perp \Leftrightarrow \top) = \\ &= \top \wedge \perp = \perp. \end{aligned}$$

Dakle, u datoj interpretaciji ova formula je netačna.

Za neke druge vrednosti iskaznih slova p , q i r , tj. za neku drugu interpretaciju, trebalo bi, razume se, ponovo odrediti vrednost formule, i može se desiti da tada formula bude i tačna.

Da bi se odredile vrednosti formule za **sve interpretacije** koriste se **tablice istinitosti** ili **istinitosne tablice**.

Budući da svakoj interpretaciji formule odgovara jedan raspored simbola \top i \perp po slovima formule, u tablicu se unose svi ti rasporedi.

Za svaki raspored određuju se vrednosti podformula i na kraju vrednost same formule.

Ako različitih iskaznih slova u formuli ima n , onda svaki raspored simbola \top i \perp po slovima jeste jedna uređena n -torka tih simbola.

Svih rasporeda, pa tako i svih interpretacija formule, ima dakle 2^n .

Primer 1.8 Vratimo se na formulu $p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$ iz Primera 1.7.

Svih interpretacija te formule ima $2^3 = 8$, i vrednost formule za svaku od tih interpretacija određena je sledećom istinitosnom tablicom:

p	q	r	$\neg r$	$q \Leftrightarrow \neg r$	$p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$
\top	\top	\top	\perp	\perp	\perp
\top	\top	\perp	\top	\top	\top
\top	\perp	\top	\perp	\top	\top
\top	\perp	\perp	\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\perp	\perp	\perp
\perp	\top	\perp	\top	\top	\perp
\perp	\perp	\top	\perp	\top	\perp
\perp	\perp	\perp	\top	\perp	\perp

Primeru 1.7 odgovara interpretacija u četvrtoj vrsti.

Kanonske forme

Ako je A formula u kojoj učestvuju iskazna slova p_1, \dots, p_n , tada to ističemo pišući $A(p_1, \dots, p_n)$ umesto A .

Ako je $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{\top, \perp\}^n$ proizvoljna n -torka elemenata iz skupa $\{\top, \perp\}$, tada stavljamo

$$A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \stackrel{\text{def}}{=} v(A),$$

gde je $v(A)$ vrednost formule A u interpretaciji $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (tj. $v(p_i) = \alpha_i$, za svaki i , $1 \leq i \leq n$).

Dakle, formula A određuje preslikavanje $f_A : \{\top, \perp\}^n \rightarrow \{\top, \perp\}$, definisano sa

$$f_A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \stackrel{\text{def}}{=} A(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

koje nazivamo **istinitosna funkcija** formule A .

Obratan problem je da se za proizvoljno preslikavanje

$$f : \{\top, \perp\}^n \rightarrow \{\top, \perp\}$$

odredi iskazna formula $A(p_1, \dots, p_n)$, čija bi istinitosna funkcija bilo preslikavanje f .

Dokazaćemo da takva formula postoji.

Naime, dokazaćemo da se svako preslikavanje $f : \{\top, \perp\}^n \rightarrow \{\top, \perp\}$ (tj. n -arna operacija na skupu $\{\top, \perp\}$) može na poseban način izraziti pomoću operacija \wedge, \vee i \neg iskazne algebre.

Najpre uvodimo oznaku

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = \top \\ \neg x, & \alpha = \perp \end{cases}$$

Tvrđenje 1.1 Za proizvoljno preslikavanje $f : \{\top, \perp\}^n \rightarrow \{\top, \perp\}$ važi

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{\top, \perp\}^n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}. \quad (\star)$$

Pre nego što pređemo na dokaz, primetimo da se u ovoj jednakosti javljaju isključivo operacije iskazne algebre (a ne iskazni veznici).

Na primer, za $n = 2$, gornja jednakost u razvijenom obliku izgleda ovako:

$$f(x_1, x_2) = (f(\top, \top) \wedge x_1^\top \wedge x_2^\top) \vee (f(\top, \perp) \wedge x_1^\top \wedge x_2^\perp) \vee \\ (f(\perp, \top) \wedge x_1^\perp \wedge x_2^\top) \vee (f(\perp, \perp) \wedge x_1^\perp \wedge x_2^\perp),$$

odnosno,

$$f(x_1, x_2) = (f(\top, \top) \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (f(\top, \perp) \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee \\ (f(\perp, \top) \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (f(\perp, \perp) \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2).$$

Dokaz Tvrdjenja 1.1: Za proizvoljne $b_1, \dots, b_n \in \{\top, \perp\}$ kao vrednosti promenljivih x_1, \dots, x_n , tim redom, vrednost preslikavanja f je $f(b_1, \dots, b_n) \in \{\top, \perp\}$, a izraz na desnoj strani postaje

$$\bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{\top, \perp\}^n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge b_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge b_n^{\alpha_n}.$$

Uzimajući u obzir da za $x \in \{\top, \perp\}$ važi

$$x^\alpha = \top \text{ ako i samo ako je } x = \alpha,$$

kao i činjenicu da je konjunkcija tačna ako i samo ako su svi njeni članovi tačni, zaključujemo da je

$$b_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge b_n^{\alpha_n} = \top \text{ ako i samo ako je } \alpha_i = b_i \text{ za sve } i.$$

U svim ostalim slučajevima je vrednost tog izraza \perp . Tako dobijamo da gornja disjunkcija postaje

$$\perp \vee \dots \vee (f(b_1, \dots, b_n) \wedge \top) \vee \dots \vee \perp = f(b_1, \dots, b_n),$$

pa je tvrdjenje dokazano.

Pretpostavimo da funkcija f iz gornjeg tvrđenja nije jednaka \perp za sve uređene n -torke iz $\{\top, \perp\}^n$, tj. da u njenoj tablici ima bar jedan znak \top .

Ako se tada sa desne strane jednakosti (\star) izostave svi izrazi

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$$

za koje je $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \perp$, jednakost i dalje važi, s obzirom da je u iskaznoj algebri $x \vee \perp = x$.

Ako se u preostalim članovima disjunkcije izostave izrazi

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

(vrednost svakog od njih je \top) jednakost ponovo ostaje očuvana, jer je $\top \wedge x = x$. Tako se dobija izraz

$$\bigvee_{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \top} x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}. \quad (\clubsuit)$$

Ako je f konstantno jednaka \perp , onda poslednji izraz za nju očito ne postoji; u tom slučaju dodeljujemo joj $x_1 \wedge \neg x_1$.

Izraz (\clubsuit) je iskazna formula (to je i $x_1 \wedge \neg x_1$), pa je gornjom analizom dokazano sledeće tvrđenje koje se odnosi na problem sa početka odeljka.

Tvrđenje 1.2 Ako je $f : \{\top, \perp\}^n \rightarrow \{\top, \perp\}$ proizvoljna n -arna operacija na skupu $\{\top, \perp\}$ koja nije konstantno jednaka \perp , onda se istinitosna vrednost iskazne formule (\clubsuit) u svakoj interpretaciji poklapa sa odgovarajućom vrednošću preslikavanja f .

Ako je $f(x_1, \dots, x_n) = \perp$ za sve $(x_1, \dots, x_n) \in \{\top, \perp\}^n$, onda na isti način vrednosti iskazne formule $x_1 \wedge \neg x_1$ odgovaraju vrednostima preslikavanja f .

Iskazna formula koja se u obliku (\clubsuit) pridružuje preslikavanju f zove se **kanonska disjunktivna forma** tog preslikavanja.

Napomena Kanonska disjunktivna forma se može i čisto sintaktički definisati u odnosu na slova p_1, \dots, p_n kao formula $(K_1) \vee \dots \vee (K_m)$, gde su K_i različite konjunkcije svih navedenih slova sa negacijom ili bez nje.

Ukoliko se ne zahteva da u svakoj konjunkciji učestvuju uvek sva slova koja se u formuli javljaju, formula se zove **disjunktivna forma**.

Formula

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

je jedna kanonska disjunktivna forma u odnosu na promenljive p, q i r , a

$$\neg p \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

je primer disjunktivne forme.

Primer 1.9 Neka je $f : \{\top, \perp\}^3 \rightarrow \{\top, \perp\}$, gde je

p	q	r	$f(p, q, r)$	
\top	\top	\top	\perp	
\top	\top	\perp	\top	*
\top	\perp	\top	\top	*
\top	\perp	\perp	\perp	
\perp	\top	\top	\perp	
\perp	\top	\perp	\top	*
\perp	\perp	\top	\perp	
\perp	\perp	\perp	\perp	

Da bi odredili formulu koja odgovara preslikavanju f , najpre izdvojamo one interpretacije slova p, q, r za koje funkcija f ima vrednost \top (one označene sa *).

Zatim se za svaku takvu trojku $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{\top, \perp\}^3$ obrazuje konjunkcija $p^\alpha \wedge q^\beta \wedge r^\gamma$.

Konačno, disjunkcija tih izraza jeste iskazna formula

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r).$$

Osim kanonske disjunktivne forme preslikavanja, možemo govoriti i o **kanonskoj disjunktivnoj formi** iskazne formule A – to je zapravo kanonske disjunktivna forma preslikavanja njene istinitosne funkcije f_A .

Takođe, možemo govoriti i o **kanonskoj konjuktivnoj formi** preslikavanja i formule.

Do njih možemo doći iz kanonske disjunktivne forme korišćenjem De Morganovih zakona, o kojima govorimo u narednom odeljku.

Tautologije

Iskazna formula je **tautologija**, ako je tačna u svakoj valuaciji, odnosno interpretaciji.

U njenoj tablici istinitosti poslednja kolona, koja odgovara celoj formuli, sastoji se samo od simbola \top .

Jednostavan primer tautologije je formula $p \vee \neg p$.

Ta formula zove se **Zakon isključenja trećeg** (**Tertium non datur**) i opisuje poznato pravilo logičkog mišljenja koje primenjujemo u klasičnoj dvovalentnoj logici.

Sve tautologije su više ili manje poznati logički zakoni.

U nastavku je naveden spisak poznatijih tautologija sa njihovim nazivima.

Zakon isključenja trećeg (Tertium non datur)

$$p \vee \neg p$$

Kao što smo rekli, ovo je zakon na kome počiva klasična **dvovalentna logika** – logika sa samo dve moguće istinitosne vrednosti \top i \perp .

U novije vreme izučavaju se i neke logike sa više mogućih istinitosnih vrednosti – **intuicionistička logika** (koja je trovalentna), **polivalentne logike**, **modalne logike** itd.

Zakon neprotivrečnosti

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

Naravno, i ovo je jedan od osnovnih logičkih zakona koji kaže da neprotivrečnosti nisu dozvoljene.

Tautološke implikacije

Zakon odvajanja – Modus ponendo ponens, ili kraće, samo **Modus ponens**

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

Ovo je zakon na kome počiva osnovno pravilo deduktivnog zaključivanja u iskaznoj logici, i uopšte u matematici.

Ovaj zakon kaže da iz pretpostavki da važe stavovi p i $p \Rightarrow q$ zaključujemo da važi i q , što radimo kadgod koristimo deduktivno zaključivanje.

Videćemo da Modus ponens predstavlja osnovno pravilo zaključivanja u iskaznom računu i jedno od dva osnovna pravila zaključivanja u predikatskom (kvantifikatorskom) računu.

Modus tollendo tollens

$$\neg q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$$

Na ovom zakonu temelji se **metod opovrgivanja** – ukoliko smo ustanovili da se iz neke pretpostavke (u ovom slučaju p) može izvesti pogrešan zaključak (ovde je to q), onda zaključujemo da je pretpostavka pogrešna.

Ovaj metod se naširoko koristi u empirijsko-deduktivnim naukama.

Modus tollendo ponens

$$\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$$

Zakon pojednostavljivanja

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

Zakon hipotetičkog silogizma

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Zakon svođenja na apsurd – Reductio ad absurdum

$$(p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg p$$

Ovaj zakon veoma često koristimo u matematičkim dokazima – ako, polazeći od neke pretpostavke, dođemo do kontradikcije, to znači da nam ta pretpostavka nije bila dobra, odnosno da važi suprotno.

Istina iz proizvoljnog – Verum ex quolibet

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

Iz lažnog proizvoljno

$$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Ovaj zakon pokazuje da, ako bi neka matematička teorija bila protivrečna, tj. ako bi se u njoj mogla dokazati kontradikcija, onda ta teorija ne bi bila besmislena samo zbog te činjenice, već i zbog toga što bi onda svako drugo tvrđenje u toj teoriji bilo teorema.

Pirsov zakon

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$$

Zakon zaključivanja iz suprotnog – Ex contrario

$$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$$

I ovo je zakon koji često koristimo u matematičkim dokazima – ako pretpostavimo da neki iskaz p ne važi, i iz toga zaključimo da on ipak mora da važi, onda iz svega toga zaključujemo da je p tačan iskaz.

U suštini, ovo se svodi na Zakon svodjenja na apsurd jer iskazi $\neg p$ i $\neg p \Rightarrow p$ zajedno daju kontradikciju (tj. iskaz $\neg p \wedge (\neg p \Rightarrow p)$ je kontradikcija).

Tautološke ekvivalencije

Zakon dvostruke negacije

$$p \Leftrightarrow \neg\neg p$$

Ovaj zakon koristimo za uprošćavanje logičkih izraza, eliminacijom višestruke upotrebe negacije.

Zakon kontrapozicije

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

Ovo je još jedan od zakona koje često koristimo u dokazima.

De Morganovi zakoni

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

De Morganovi zakoni nam kažu kako negacija "prolazi" kroz konjunkciju i disjunkciju.

Ako iskoristimo Zakon dvojne negacije i tranzitivnost ekvivalencije, iz De Morganovih zakona dolazimo do tautologija

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

One se koriste za eliminaciju veznika \wedge ili \vee , tj. za zamenu veznika \wedge veznicima \neg i \vee , odnosno veznika \vee veznicima \neg i \wedge .

Zakoni ekvivalencije za implikaciju, disjunkciju i konjunkciju

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$p \vee q \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$$

Prvi zakon se koristi za eliminaciju implikacije, njenom zamenom negacijom i disjunkcijom.

Drugi se koristi za eliminaciju disjunkcije, njenim izražavanjem pomoću implikacije.

Treći zakon služi za eliminaciju konjunkcije i njeno izražavanje pomoću negacije i implikacije.

Zakon negacije implikacije

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Zakon ekvivalencije

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Zakon unošenja i iznošenja

$$(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

Zakoni komutativnosti

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

Zakoni apsorpcije

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

Zakoni idempotentnosti

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

Zakoni asocijativnosti

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

Zakoni distributivnosti

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Ako se u tautološkim ekvivalencijama ekvivalencija zameni jednakošću, onda dobijamo odgovarajuće zakone koji važe u **iskaznoj algebri**.

Napred smo koristili pomove **tautološke implikacije** i **tautološke ekvivalencije**. Sada dajemo precizne definicije tih pojmova.

Ako su A i B iskazne formule i $A \Rightarrow B$ je tautologija, onda tu formulu nazivamo **tautološka implikacija** i kažemo da iskaz koji odgovara formuli A **tautološki implicira** iskaz dat formulom B .

Slično, ako je $A \Leftrightarrow B$ tautologija, onda se ta formula naziva **tautološka ekvivalencija**, a za iskaze koji odgovaraju formulama A i B kaže se da su **tautološki ekvivalentni**.

Napomenimo da je u jezik pogodno uvesti i simbole \top i \perp , koje shvatamo kao konstantne simbole, ili redom kao zamene za formule $p \vee \neg p$ i $p \wedge \neg p$. U svakom slučaju, ti znaci interpretiraju se kao isto označene konstante iskazne algebre.

Tada su tautologije i formule

$$p \wedge \top \Leftrightarrow p, \quad p \vee \perp \Leftrightarrow p, \quad (p \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top \quad \text{i slično.}$$

Osobine tautologija

Tvrđenje 1.3 Ako su formule A i $A \Rightarrow B$ tautologije, onda je tautologija i formula B .

Dokaz: Neka su A i $A \Rightarrow B$ tautologije.

Pretpostavimo da B nije tautologija. Tada postoji valuacija v takva da je $v(B) = \perp$, odakle, zbog činjenice da je A tautologija, dobijamo da je

$$v(A \Rightarrow B) = v(A) \Rightarrow v(B) = \top \Rightarrow \perp = \perp,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $A \Rightarrow B$ tautologija.

Dakle, zaključujemo da B mora biti tautologija.

Tvrđenje 1.4 Ako je $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ tautologija a B je formula dobijena iz A zamenom tih iskaznih slova redom formulama A_1, A_2, \dots, A_n , onda je i B tautologija.

Dokaz: Neka je A tautologija i neka je v proizvoljna valuacija.

Za svaki i , $1 \leq i \leq n$, neka je $v(A_i) = \alpha_i$. Prema definiciji formule B imamo da je

$$v(B) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \top,$$

jer je A tautologija.

Prema tome, dokazali smo da je i B tautologija.

Primer 1.10 Formula $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge \neg B))$ je tautologija jer se može dobiti iz tautologije $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ zamenom promenljivih p i q formulama A i $B \wedge \neg B$, tim redom.

Tvrđenje 1.5 Neka su A_1 , A i B formule takve da je A podformula neke formule A_1 , i neka je B_1 formula dobijena iz A_1 zamenom podformule A formulom B . Tada je tautologija i formula

$$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Leftrightarrow B_1).$$

Dokaz: Neka je v proizvoljna valuacija.

Ako je $v(A) \neq v(B)$, tada je $v(A \Leftrightarrow B) = \perp$, pa je

$$v((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Leftrightarrow B_1)) = \top.$$

Ukoliko je $v(A) = v(B)$, onda je i $v(A_1) = v(B_1)$, jer se formule A_1 i B_1 razlikuju samo u podformulama A i B . Prema tome,

$$v((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Leftrightarrow B_1)) = \top \Rightarrow \top = \top.$$

Ovim smo dokazali da je $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Leftrightarrow B_1)$ tautologija.

Prethodno tvrđenje se može formulisati i kao: **Ako su formule A i B tautološki ekvivalentne, onda su to i A_1 i B_1 .**

Da je formula A tautologija, zapisuje se kraće sa $\models A$.

U dokazu da je neka formula tautologija, često se koristi sledeće

Tvrđenje 1.6 Ako je $\models A \Leftrightarrow B$ i $\models A$, onda je i $\models B$.

Dokaz: Jednostavan je i ostavlja se za vežbu.

Tvrđenje 1.7 $\models A \wedge B$ ako i samo ako je istovremeno $\models A$ i $\models B$.

Tvrđenje 1.8

a) $\models A \Leftrightarrow A$;

b) ako je $\models A \Leftrightarrow B$, onda je $\models B \Leftrightarrow A$;

c) ako je $\models A \Leftrightarrow B$ i $\models B \Leftrightarrow C$, onda je $\models A \Leftrightarrow C$.

Napomena. Izrazi koji se ovde i nadalje javljaju i sadrže znak \models nisu formule u teoriji iskaza.

Oni pripadaju jeziku kojim govorimo o iskaznim formulama i služe za sažeto zapisivanje nekih tvrđenja o njima.

Iskazna formula je **kontradikcija** ako nije tačna ni u jednoj interpretaciji.

Takva je na pr. formula $p \wedge \neg p$.

Očigledno, ako je A kontradikcija, onda je $\neg A$ tautologija i obratno.

Za iskaznu formulu se kaže da je **zadovoljiva** ako postoji interpretacija u kojoj je tačna.

Hipoteze i posledice

Na osnovu pravila logičkog zaključivanja se obično iz poznatih iskaza - premisa, izvode zaključci.

U iskaznoj logici se taj pojam precizno definiše, kao što sledi.

Neka su A_1, A_2, \dots, A_n i B iskazne formule.

Za formulu B kažemo da je **semantička posledica** skupa formula A_1, A_2, \dots, A_n ukoliko važi da kad god su u nekoj valuaciji tačne sve formule A_1, A_2, \dots, A_n , onda je u toj valuaciji tačna i formula B .

To beležimo kraće sa

$$A_1, A_2, \dots, A_n \models B,$$

ili sa $A \models B$ kada je $n = 1$ i $A_1 = A$.

U tom slučaju formule A_1, A_2, \dots, A_n nazivamo **hipotezama** ili **pretpostavkama**, tj. kažemo da je B **semantička posledica** skupa hipoteza A_1, A_2, \dots, A_n .

Napomena U nazivu "semantička posledica" treba istaći prefiks "**semantička**".

On treba da označi da, kada se B izvodi kao zaključak iz skupa hipoteza A_1, A_2, \dots, A_n , vodimo računa o **istinitosti tih hipoteza**.

Kasnije ćemo uvesti i pojam "**sintaksičke posledice**" skupa hipoteza A_1, A_2, \dots, A_n .

U tom slučaju, pri izvođenju formule B kao zaključka iz skupa hipoteza A_1, A_2, \dots, A_n , neće nas zanimati istinitost tih hipoteza, već ćemo voditi računa jedino o tome da li smo prilikom izvođenja koristili **dozvoljena pravila izvođenja** ili ne.

Primer 1.11 $p \vee q, p \Rightarrow r \models q \vee r$

Ovo zaključujemo iz sledeće tablice istinitosti, gde su vrste u kojima su obe formule $p \vee q$ i $p \Rightarrow r$ tačne označene su zvezdicom

p	q	r	$p \vee q$	$p \Rightarrow r$	$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$	$q \vee r$	
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	*
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	
⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	*
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	*
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	*
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	

Primetimo da su obe formule $p \vee q$ i $p \Rightarrow r$ tačne ako i samo ako je tačna njihova konjunkcija $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$, pa važi

$$p \vee q, p \Rightarrow r \models q \vee r$$

ako i samo ako važi

$$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \models q \vee r.$$

To će, u opštijem obliku, biti dokazano u jednom od narednih tvrđenja.

Tvrđenje 1.9 $A \models B$ ako i samo ako je $\models A \Rightarrow B$.

Dokaz: Pretpostavimo da važi $A \models B$.

Neka je data proizvoljna valuacija v . Ako je $v(A \Rightarrow B) = \perp$, onda mora biti $v(A) = \top$ i $v(B) = \perp$.

Međutim, to nije moguće, jer iz $v(A) = \top$ sledi $v(B) = \top$, s obzirom da važi $A \models B$.

Dakle, zaključujemo da mora biti $v(A \Rightarrow B) = \top$, za proizvoljnu valuaciju v , što znači da je $\models A \Rightarrow B$.

Obratno, neka je $\models A \Rightarrow B$ i v je valuacija takva da je $v(A) = \top$.

Ukoliko bi bilo $v(B) = \perp$, tada bi bilo i $v(A \Rightarrow B) = \perp$, što protivreči pretpostavci da je $\models A \Rightarrow B$.

Prema tome, zaključujemo da je $v(B) = \top$, čime smo dokazali da je $A \models B$.

Opštije od ovog tvrđenja je sledeće tvrđenje koje se dokazuje na sličan način.

Tvrđenje 1.11 Neka je $n > 1$. Tada je $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \models B$ ako i samo ako $A_1, \dots, A_{n-1} \models A_n \Rightarrow B$.

Ovo tvrđenje predstavlja nešto što veoma često koristimo u svakodnevnoj matematičkoj praksi.

Naime, kada iz nekih pretpostavki A_1, \dots, A_{n-1} izvodimo neki zaključak koji ima oblik implikacije, $A_n \Rightarrow B$, mi to često radimo tako što premisu A_n priključujemo hipotezama, i iz pretpostavki A_1, \dots, A_{n-1}, A_n dokazujemo B .

Tvrđenje 1.10 $A_1, \dots, A_n \models B$ ako i samo ako $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B$.

Dokaz: Kao što smo već napomenuli, sve formule A_1, \dots, A_n su tačne u nekoj valuaciji ako i samo ako je u toj valuaciji tačna formula $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$. Imajući u vidu ovu napomenu i definiciju semantičke posledice, tvrđenje možemo smatrati dokazanim.

Za skup formula $\{A_1, \dots, A_n\}$ kažemo da je **neprotivrečan** ako postoji neka valuacija u kojoj su sve te formule tačne.

Sa druge strane, za ovaj skup formula kažemo da je **protivrečan**, ili da je **kontradiktoran**, ako ni u jednoj valuaciji sve formule iz tog skupa ne mogu biti istovremeno tačne, odnosno ako je u svakoj valuaciji bar jedna od njih netačna.

Umesto **skup formula**, kaže se i da su same **formule** protivrečne, odnosno neprotivrečne.

Tvrđenje 1.12 Ako je neka kontradikcija posledica formula A_1, \dots, A_n , onda su te formule protivrečne.

Dokaz: Ako je B kontradikcija i $A_1, \dots, A_n \models B$, onda prema Tvrđenjima 1.9 i 1.10 imamo da važi $\models A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$.

Odavde zaključujemo da konjunkcija $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ mora biti netačna u svakoj interpretaciji, jer je takva i formula B , čime smo dobili da bar jedna od formula A_1, \dots, A_n mora biti netačna, pa su te formule protivrečne.

Naravno, važi i obratno tvrđenje, s obzirom da se iz protivrečnog skupa hipoteza može izvesti bilo koja formula, pa time i kontradikcija.

Zakon svođenja na protivrečnost, tj. tautologija

$$(p \Rightarrow q \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p,$$

može se proširiti na izvođenje zaključaka iz hipoteza.

Naime, ako se iskaz p zameni formulom $A \wedge \neg B$, i ako se kontradikcija $q \wedge \neg q$ označi sa C , a negacija konjunkcije se predstavi odgovarajućom implikacijom, dobija se formula

$$((A \wedge \neg B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B).$$

Tumačenje ovog pravila daje naredno tvrđenje, pri čemu je umesto A uzeto više formula – hipoteza.

Tvrđenje 1.13 Ako se neka kontradikcija može izvesti kao posledica hipoteza $A_1, \dots, A_n, \neg B$, onda je B posledica hipoteza A_1, \dots, A_n .

Na ovom tvrđenju se zasniva poznati **metod indirektnog dokaza**, o kome će biti reči na jednom od narednih predavanja.

Dokaz: Neka je C neka kontradikcija i neka je

$$A_1, \dots, A_n, \neg B \models C.$$

Prema Tvrđenju 1.11 imamo da važi

$$A_1, \dots, A_n \models \neg B \Rightarrow C.$$

Neka je sada v proizvoljna valuacija u kojoj su tačne sve formule A_1, \dots, A_n . Tada je $v(\neg B \Rightarrow C)$, i kako je $v(C) = \perp$, jer je C kontradikcija, to mora biti $v(\neg B) = \perp$, odnosno $v(B) = \top$.

Prema tome, dokazali smo da važi $A_1, \dots, A_n \models B$.

Sadržaj

- ▶ Iskazi
- ▶ Iskazne formule
- ▶ Iskazna algebra, interpretacija
- ▶ Kanonske forme
- ▶ Tautologije
- ▶ Osobine tautologija
- ▶ Hipoteze i posledice