FAKULTET ELEKTROTEHNIKE
STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING,
MECHANICAL ENGINEERING
AND NAVAL ARCHITECTURE

Rudjera Boškovića bb, Split

LABORATORIJ ZA BIOMEHANIKU
AUTOMATIKU I SUSTAVE

LABORATORY FOR BIOMECHANICS
AND AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

KOLEGIJ
SIGNALI I SUSTAVI

VREMENSKI ODZIVI KONTINUIRANIH LTI SUSTAVA OPISANIH DIFERENCIJALNIM JEDNADŽBAMA

Vježba br. 4.

Ak. god. 2008/09.

UVOD

U ovoj vježbi ćemo naučiti kako pomoću Matlaba odrediti vremenski odziv (izlazni signal) kontinuiranog, linearnog, vremenski nepromjenjivog sustava na različite pobudne signale, primjenom Laplace-ove transformacije. Svaki zadatak će se rješavati tako da se napravi m – skripta ili Simulink model (ovisno o zadatku) koji će sadržavati rješenje zadatka i koji će se pohraniti pod imenom *Zad_x.mdl* ili *Zad_x.m* (pri čemu je x redni broj zadatka).
Prije no što započne s rješavanjem zadataka, svaki student treba u work direktoriju Matlaba napraviti novi direktorij i nazvati ga svojim imenom (ime_prezime). Nakon što napiše pojedini Simulink model ili m-skriptu, neka ih pohrani u kreirani direktorij. Za uspješno odrađenu vježbu potrebno je točno riješiti sve postavljene zadatke i rješenja demonstrirati nastavniku.

Napomena: Radi uspješnijeg rješavanja zadataka, na vježbama je korisno imati skriptu i bilješke s predavanja i auditornih vježbi.

OPERACIJE NAD SIMBOLIČKIM VARIJABLAMA

Budući da ćemo u ovoj vježbi dosta koristiti operacije nad simboličkim varijablama, u uvodu ćemo ukratko objasniti rad sa simoličkom varijablama. Jedan od mnogih programskih paketa/toolbox-ova u Matlab-u, Symbolic Toolbox, podržava simboličku matematiku. Njegove mogućnosti možemo pogledati naredbom *help symbolic*, dok naredba *symintro* daje kratki uvod s primjerima.

Simboličke naredbe definiraju se naredbom *syms*:

```
>> syms x y z s t  <ent>      % definirali smo 5 simboličkih  varijabli
```

Matlab-ove naredbe na simboličkim varijablama izvršavaju se simbolički (općenito, tj. ne računa se brojčana vrijednost nekog matematičkog izraza):

```
>> x=[3 4i 6+5j; -23 45j  8+3j]        <ent>
x =
   3.0000              0 + 4.0000i       6.0000 + 5.0000i
 -23.0000              0 +45.0000i      8.0000 + 3.0000i

>> z=x+3*y
 z =                          % matrica z će biti prikazana u
                              % simboličkom, općenitom obliku (umjesto da se računaju
                              % brojčane vrijednosti svakog pojedinog člana matrice)
 [     3+3*y,   4*i+3*y, 6+5*i+3*y  ]
 [   -23+3*y,  45*i+3*y, 8+3*i+3*y]

>> det(z(:,1:2))

ans =
 227*i+78*y+123*i*y
```

```
% ako, međutim varijabli y pridijelimo neku brojčanu vrijednost, i za matricu z
% biti će dane izračunate vrijednosti:

y =3
>> z=x+3*y
z =
  12.0000           9.0000 + 4.0000i      15.0000 + 5.0000i
 -14.0000           9.0000 +45.0000i    17.0000 + 3.0000i
```

Korištenjem simboličkih izraza mogu se definirati i simboličke funkcije koje se potom mogu derivirati, integrirati, crtati, transformirati i sl. Primjer:

```
» syms a x <ent>                          % simboličke varijable a i x
» f = cos(a * x)*sin(3*x)  <ent>  % definiramo simboličku funkciju f(x)
f =
cos(a*x)*sin(3*x)

» diff(f)                          <ent>   % derivacija funkcije f po varijabli x
ans =
-sin(a*x)*a*sin(3*x)+3*cos(a*x)*cos(3*x)

» int_f=int(f)                   <ent>  % neodređeni integral funkcije f po varijabli x
int_f =
-1/2/(a+3)*cos((a+3)*x)+1/2/(a-3)*cos((a-3)*x)
```

Simboličke funkcije se mogu raspisati i u Taylorov red:

```
>> taylor(f,10) <ent>  % naredba ispisuje prvih 10 članova Taylorovog reda
                              % funkcije f(x)
ans =
3*x+(-9/2-3/2*a^2)*x^3+(9/4*a^2+81/40+1/8*a^4)*x^5+(-81/80*a^2-3/16*a^4-243/560-
1/240*a^6)*x^7+(1/13440*a^8+243/1120*a^2+243/4480+27/320*a^4+1/160*a^6)*x^9
```

Nama će u analizi signala i sustava biti najzanimljivije određivanje **Laplace-ovih transformacija jednadžbi koje opisuju sustav**. Laplaceova transformacija određuje se naredbom *laplace()*:

```
>> y=cos(3*x)
 y =
 cos(3*x)

>> Y=laplace(y)     % Laplaceova transformacija funkcije y(x)
 Y =
 s/(s^2+9)
```

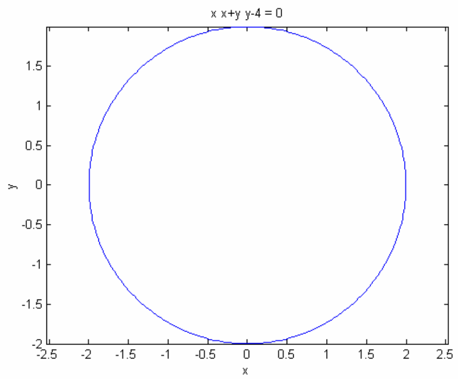
```
% ili, npr, za malo složeniju funkciju:
>> y=t*sin(t)*cos(5*t)

y =
 t*sin(t)*cos(5*t)

>> Y=laplace(y)    % Laplaceova transformacija funkcije y(t)
 Y =
 6/(s^2+36)^2*s-4/(s^2+16)^2*s
```

Inverzna Laplace-ova transformacija računa se naredbom *ilaplace():*

```
>> ilaplace(9/(s*s+9))
 ans =
 9^(1/2)*sin(9^(1/2)*t)
```

Simboličke funkcije mogu se i crtati korištenjem naredbe *ezplot('f')*, pri čemu je f funkcija koju želimo nacrtati. Npr, definirajmo jednadžbu kružnice radijusa 2 i nacrtajmo je:

```
>> ezplot('x*x+y*y-4')
>> axis equal
```



Pomoću naredbe *help ezplot* proučiti mogućnosti naredbe. Također, pomoću naredbe *help axis equal* vidjeti što radi naredba *axis equal*.

ODREĐIVANJE ODZIVA KONTINUIRANOG SUSTAVA OPISANOG DIFERENCIJALNOM JEDNADŽBOM POMOĆU LAPLACE-ove TRANSFORMACIJE

Kroz tri slijedeća riješena primjera objasnit ćemo kako možemo riješiti diferencijalnu jednadžbu pomoću Laplace-ove transformacije te kako odrediti izlazni signal iz sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom kad na ulaz dovedemo različite pobude.

Zad 1.
a) Vremenski kontinuirani LTI sustav opisan je slijedećom diferencijalnom jednadžbom:
$d^3y(t)/dt^3 + dy(t)/dt = x(t)$,
pri čemu je x(t) pobuda sustava (ulazni signal), a y(t) vremenski odziv sustava (izlazni signal).

Primjenom Laplace-ove transformacije odrediti i nacrtati vremenske odzive sustava (sve na istoj slici) kad na ulaz dovedemo slijedeće pobude:
1) $x1(t) = \delta(t)$
2) $x2(t) = u(t)$
3) $x3(t) = t$
4) $x4(t) = \sin(t)$
Svi početni uvjeti jednaki su nuli!

b) Provjeriti dobivena rješenja pomoću Simulinka: nacrtati blok dijagram sustava u Simulinku, na ulaz dovesti tražene pobude, izvršiti simulacije, te dobivene odzive usporediti s odzivima dobivenim pod a).

Rješenje pod a):

Odredit ćemo Laplace-ovu transformaciju zadane jednadžbe (pritom ćemo uzeti u obzir nulte početne uvjete) i izrazit ćemo odziv sustava u s – području, Y(s):

$d^3y(t)/dt^3 + dy(t)/dt = x(t) \quad / \; L \quad => \quad s^3Y(s)+sY(s) = X(s) \quad => \quad Y(s) = X(s)/(s^3+s)$

Sad ćemo u dobiveni izraz uvrstiti zadane pobude:

1) $x1(t) = \delta(t) \;\; => \;\; X1(s)=1$
$Y1(s) = 1/(s^3+s)$

Sad ćemo u Matlabu, pomoću inverzne Laplaceove transformacije odrediti vremenski odziv sustava i nacrtati ga:

```
>> syms s t;                    % definiranje simboličkih varijabli
>> Y1=1/(s^3+s)                 % definiranje odziva u s-području, Y1(s)
>> y1 = ilaplace(Y1)            % određivanje inverzne Laplace-ove transformacije


>> ezplot(y1, [0,10])           % crtanje odziva y1(t) na vremenskom intervalu
                                % 0 <= t <= 10
```

2) x2(t) = u(t) => X2(s)=1/s

$Y2(s) = 1/(s^4+s^2)$

```
>>  Y2 =  1/(s^4+s^2)
>>  y2 = ilaplace(Y2)

>> hold on; ezplot(y2, [0,10])          % naredba hold on zadržat će prethodni graf i
                                           preko njega nacrtati novi
```

3) x3(t) = t => $X3(s)=1/s^2$

$Y3(s) = 1/(s^5+s^3)$

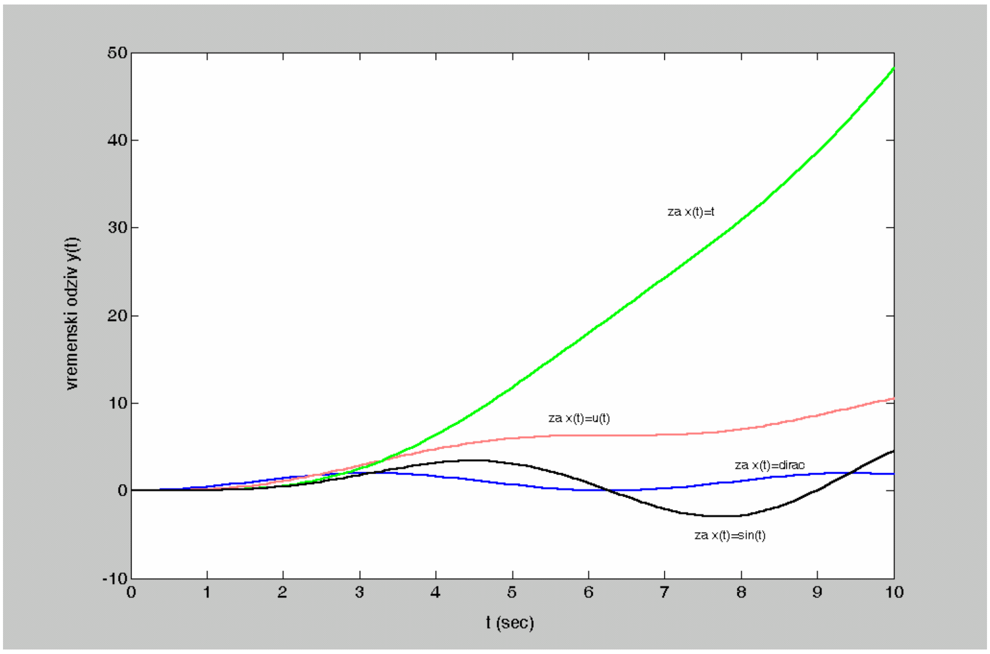
```
>>  Y3 =  1/(s^5+s^3)
>>  y3 = ilaplace(Y3)

>> hold on; ezplot(y3, [0,10])
```

4) x4(t) = sin (t) => $X4(s)=1/(s^2+1)$

$Y4(s) = 1/(s^5+2s^3+s)$

```
>>  Y4 =  1/(s^5+2*s^3+s)
>>  y4 = ilaplace(Y4)

>> hold on; ezplot(y4, [0,10])
```

Odzivi za sva 4 slučaja prikazani su na slici 1:



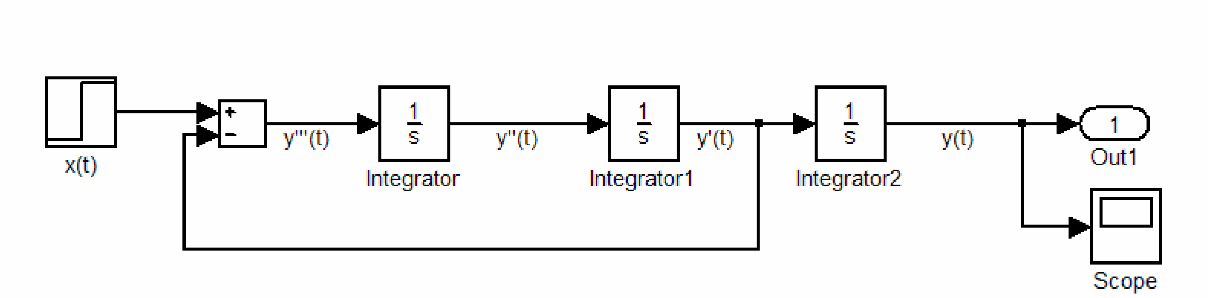
Sl. 4.1: *Vremenski odzivi sustava na različite pobude*

Rješenje pod b):

Trebamo prvo u Simulinku nacrtati shemu sustava opisanog jednadžbom $d^3y(t)/dt^3 + dy(t)/dt = x(t)$. Shema se najlakše crta ako u jednadžbi izlučimo najveću derivaciju izlaznog signala:

$d^3y(t)/dt^3 = x(t) - dy(t)/dt$

Na temelju gornje relacije crtamo shemu koja je prikazana na slici 4.2. Na slici vidimo da je simbol bloka za integriranje 1/s (jer je operacija integriranja u vremenskom području jednaka dijeljenju sa 's' u s-području).



Sl. 4.2: *Shema sustava u Simulinku*

Samostalno na ulaz dovesti tražene pobude, provesti simulaciju i provjeriti da li se odzivi podudaraju s odzivima na slici 4.1.

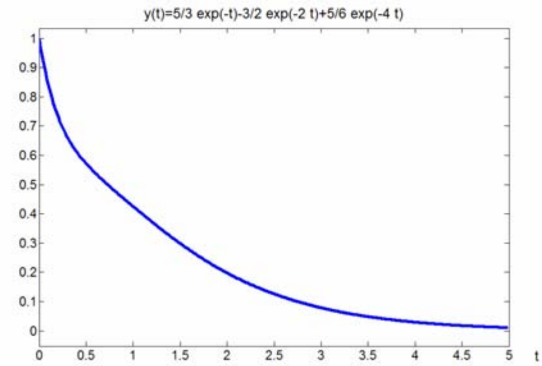
Zad 2.
Metodom Laplace-ove transformacije riješiti diferencijalnu jednadžbu:
$y'' + 3y' + 2y = 5e^{-4t}$ uz $y(0)=1$ i $y'(0)=-2$, te nacrtati $y(t)$ za $t=[0,15]$.

Rješenje:
Kad na zadanu diferencijalnu jednadžbu primijenimo Laplace-ovu transformaciju (u obzir uzmemo i početne uvjete), te izlučimo Y(s), dobit ćemo:

$Y(s)=(s^2+5s+9) / ((s+1)(s+2)(s+4))$

```
>> syms s t;
>> y=ilaplace((s^2+5*s+9) / ((s+1)*(s+2)*(s+4)))

>> ezplot(y, [0,5])
```

Rješenje y u funkciji vremena prikazano je slikom 2:



Sl. 4.3: *Rješenje diferencijalne jednadžbe, y(t), iz zadatka 2*

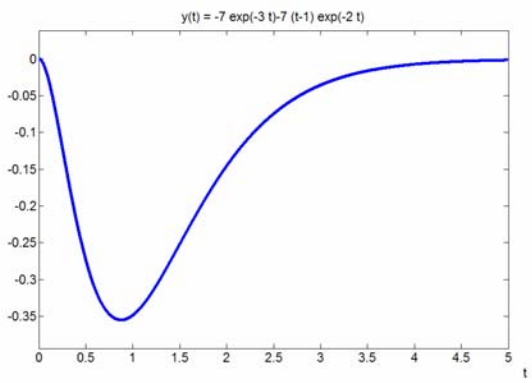
Zad 3.
Odrediti i nacrtati vremenski odziv sustava y(t), ako je sustav opisan diferencijalnom jednadžbom $y''+4y'+4y=3x'+2x$
Zadano je: $x(t)=e^{-3t}$, a $y(0)=y'(0)=0$

Rješenje:
Prebacit ćemo zadanu jednadžbu u s-područje. Pritom je $x(0)=e^{-3t}\big|_{t=0}=1$:
$s^2Y(s) + 4sY(s) + 4Y(s) = 3(sX(s) – x(0)) + 2X(s)$

Nakon što uvrstimo u gornju jednadžbu: $X(s)=1/(s+3)$ i sredimo izraz, dobit ćemo:
$Y(s)= -7 / ((s+3)(s+2)^2)$

```
>> syms s t;
>> y = ilaplace(-7/(s+3)/(s+2)^2)

>> ezplot(y, [0,5])
```

Odziv sustava prikazan je na slicislikom 4.4:



Sl. 4.4: *Vremenski odziv sustava, y(t), iz zadatka 3.*

ZADACI ZA SAMOSTALNO RJEŠAVANJE:

Zad 4.

a) Napisati Matlab program (m-skriptu) koji će metodom Laplace-ove transformacije odrediti i nacrtati odziv sustava zadanog diferencijalnom jednadžbom $d^2y/dt^2 + y = 3x$, pri čemu je $x(t)=\delta(t)$. Svi početni uvjeti su nula.

b) U Simulinku nacrtati shemu sustava i provjeriti rješenje pod a)

Zad 5.
a) Napisati program (m-datoteku) koji će metodom Laplace-ove transformacije odrediti i nacrtati odziv sustava zadanog diferencijalnom jednadžbom $d^2y/dt^2 + dy/dt + 5y = e^{-t}$, pri čemu je $y(0)=y'(0)= -1$.

b) U Simulinku nacrtati shemu sustava i provjeriti rješenje pod a)

Zad 6.
a) Napisati program (m-datoteku) koji će metodom Laplace-ove transformacije odrediti i nacrtati odziv sustava zadanog diferencijalnom jednadžbom
$d^2y/dt^2 + y - dx/dt = 0$, pri čemu je $x(t)= e^{-5t}$; $y(0)=y'(0)=1$.