

Prebrojavanja

1

1.1 Uvod i osnovni principi

Primjer 1.1.1 Ana je pozvala na rođendansku zabavu Peru, Karla, Dijanu, Evu, Zdenka i Franju. Kad su gosti stigli, međusobno su se rukovali. Do koliko rukovanja je došlo?

Rješenje: Kako se svaki od njih sedmero rukovao s preostalih šestoro, dolazimo do broja

$$\underbrace{6 + \dots + 6}_{7 \text{ puta}} = 6 \cdot 7 = 42.$$

Ali time smo svako rukovanje brojali dvaput, pa je pravi odgovor $42/2 = 21$. \square

Tada krenu sjesti za stol. Ana sjedne za čelo stola, a ostali se dogovore da će se razmještati za stolom svakih pola sata sve dok ne isprobaju sve različite razmještaje. Koliko će trajati njihova zabava?

Rješenje: Dakle, treba odrediti broj različitih razmještaja. Krenimo od stolice koja je zdesna Ani. Na tu stolicu može sjesti bilo tko od šestoro gostiju. Ukoliko je, recimo, Pero sjeo do Ane, na sljedeću stolicu zdesna može sjesti bilo tko od preostalih petoro gostiju. Ako Karlo sjedne na stolicu zdesna Ani, opet imamo pet mogućnosti za sljedeću stolicu, dakle broj načina na koje možemo posjesti ljude na prve dvije stolice je

$$\underbrace{5 + \dots + 5}_{6 \text{ puta}} = 6 \cdot 5 = 30.$$

Slično, bez obzira tko je sjeo na prve dvije stolice, na treću stolicu može sjesti bilo tko od preostalih četvero gostiju, što nam daje $6 \cdot 5 \cdot 4$ mogućnosti. Nastavimo li tim putem rezonirati, stižemo do $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ mogućnosti. Dakle, njihova zabava će trajati 360 sati, što je 15 dana. \square

Poslije večere dolazi ples (radi se o staromodnim ljudima koji plešu u parovima i par uvijek čine ljudi različitih spolova). Koliko se mogućih parova može formirati?

Rješenje: Kako postoje tri djevojke, a svaka može odabrati jednog od četvorice dečakiju, dolazimo do broja od $3 \cdot 4 = 12$ različitih parova. \square

Poslije nekoliko dana plesanja Ana, Pero, Karlo i Dijana odluče igrati bridge. U nekom trenutku Karlo kaže: čini mi se da sam dobio iste karte kao i u prethodnom dijeljenju. To mi se čini teško moguće, odvrati Dijana. Koliko je to vjerojatno? (Špil ima 52 karte, svaki igrač dobija 13 karata.)

Rješenje: Rezoniramo na sljedeći način. Zamislimo da Karlo vuče jednu po jednu kartu iz špila. Prva karta može biti bilo koja od 52 karte, druga karta bilo koja od preostalih 51, ... Dakle, dolazimo do $52 \cdot 51 \cdots 40$ mogućnosti za 13 karata. Ali ovdje smo ubrojili i mnogo istih „ruku”. Ukoliko, na primjer, Eva kibicira i gleda u Karlove karte nakon što ih je on posložio i pokuša pogoditi kojim ih je redom izvukao, dolazi do $13 \cdot 12 \cdots 1 = 13!$ mogućnosti. To znači da je broj različitih „ruku” u bridge–u jednak

$$\frac{52 \cdot 51 \cdots 40}{13!} = 635013559600.$$

Dakle, stvarno je mala vjerojatnost da je Karlo izvukao dvaput za redom iste karte. \square

Na koncu odluče igrati šah. Ana, koja je odlučila da će samo gledati, namjesti tri šahovske ploče. Na koliko načina se mogu složiti parovi? (Ne računamo kao različito sparivanje ukoliko dva čovjeka za istom pločom zamijene mjesta i nije važno koji par sjedi za kojom pločom.)

Rješenje (prva verzija): Krenemo od broja 720 koji nam je dao broj različitih razmještaja za stolom. Taj broj ćemo podijeliti s brojem razmještaja za stolom koje smatramo istim u kontekstu šahovskih parova. Najprije, možemo tri šahovske ploče posložiti na šest različitih načina tako da ne mijenjamo šahovske parove. Također, svaki par može, ali i ne mora, promijeniti strane, što daje $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ različitih načina. Dakle, 720 razmještaja dolazi u grupu od $6 \cdot 8 = 48$, pa je traženi broj $720/48 = 15$. \square

Rješenje (druga verzija): Kako je Pero najmlađi, pustimo njega prvog da odredi svog partnera. On to može učiniti na pet načina. Tko je najmlađi među ostalim bira sljedeći i može odabrati partnera na tri načina, i time smo odredili parove. Dakle, traženi broj je $5 \cdot 3 = 15$. \square

Ostatak ovog poglavlja ćemo potrošiti na formalizaciju i generalizaciju problema iz prethodnog primjera.

Ono što možemo uočiti je da umjesto Ane i njenog društva možemo gledati bilo koji skup od sedam elemenata, na primjer $\{1, 2, \dots, 7\}$. Očita generalizacija gornjih problema je da umjesto broja sedam uzmemo proizvoljan $n \in \mathbb{N}$. Stoga ćemo se u nastavku poglavlja (a i cijelog kolegija) baviti prebrojavanjem različitih objekata vezanih za skup $\{1, 2, \dots, n\}$ za proizvoljan prirodan broj n . Osnovni principi kojima ćemo se služiti su sljedeći.

Princip dvostrukog brojanja Ukoliko isti skup prebrojimo na dva različita načina, odgovori će se poklapati.

Princip bijekcije Dva skupa su iste veličine (imaju isti broj elemenata, isti kardinalitet) akko postoji bijekcija između njih.

Princip sume Broj elemenata unije međusobno disjunktih skupova jednak je sumi broja elemenata skupova. Formalno, za S_1, \dots, S_n , $S_i \cap S_j = \emptyset$ za $i \neq j$, vrijedi

$$\left| \bigcup_{i=1}^n S_i \right| = \sum_{i=1}^n |S_i|. ^1$$

Princip produkta (jednostavna formulacija) Broj elemenata unije m međusobno disjunktih skupova, od kojih svaki ima n elemenata je nm .

Princip produkta (općenita formulacija)

Skupovna verzija Neka je $n \in \mathbb{N}$, a S_1, \dots, S_n konačni skupovi. Tada vrijedi

$$\left| \prod_{i=1}^n S_i \right| = \prod_{i=1}^n |S_i|,$$

gdje $\prod_{i=1}^n S_i = S_1 \times \dots \times S_n$ označava Kartezijev produkt skupova S_1, \dots, S_n .

Funkcijska verzija Neka je S skup funkcija f s $\{1, 2, \dots, n\}$ u neki skup X . Prepostavimo da postoji k_1 izbora za vrijednost $f(1)$, k_2 izbora za vrijednost $f(2)$, ..., k_n izbora za vrijednost $f(n)$. Tada je broj elemenata skupa S $k_1 \cdots k_n$.

Računalna verzija Neka je S skup lista duljine n sa svojstvima:

- postoji izbor od k_1 različitih prvih elemenata liste u S ,
- za svaki $i > 1$ i svaki izbor prvih $i - 1$ elemenata liste u S , postoji izbor od k_i različitih i -tih elemenata liste

Tada postoji $k_1 \cdots k_n$ listi u S .

Princip kvocijenta Ukoliko skup S ima particiju od q skupova, od kojih svaki ima r elemenata, onda vrijedi $q = |S|/r$.

Princip kvocijenta je zapravo samo reformulacija principa produkta, ali dobro ga je imati na umu kao zaseban princip.

Princip razlike Ukoliko je X konačan skup i $S \subseteq X$, onda je $|X \setminus S| = |X| - |S|$.

Svi ovi principi su jednostavne posljedice osnovnih svojstava skupova.

¹Ovdje (a tako ćemo i nadalje) koristimo notaciju $|S|$ = broj elemenata skupa S .

Zadatak 1.1

Koje smo principe zapravo koristili pri rješavanju problema iz Primjera 1.1.1?

Još dva principa ćemo koristiti u ovom kolegiju. Prvi smo već sreli pa ćemo ga samo navesti.

Princip (matematičke) indukcije

Drugi princip je

Dirichletov princip Ukoliko skup S koji ima više od n elemenata particioniramo u n skupova (tj. odaberemo particiju skupa S koja ima n elemenata), tada barem jedan element particije ima više od jednog elementa.

Dokaz trivijalno slijedi po kontrapoziciji.

Postoji i generalizacija ovog principa. Ukoliko skup S koji ima više od kn elemenata particioniramo u n skupova, tada barem jedan element particije ima barem $k + 1$ elemenata. Dokaz je, naravno, identičan.

Zadatak 1.2

Pokažite da u skupu od šestero ljudi postoji barem troje ljudi koji se svi međusobno znaju, ili barem troje ljudi od kojih se nitko međusobno ne pozna (Pretpostavljamo da ukoliko osoba A zna osobu B , onda i osoba B zna osobu A .)

1.2 Broj podskupova

Sada ćemo formulirati naš prvi opći kombinatorni problem: Koliko ima podskupova skupa s n elemenata? Ili formalnije: Koji je kardinalitet partitivnog skupa skupa S , ako je $|S| = n$?

Krenimo od malih skupova.

Prazan skup (koji je isto skup) ima samo jedan podskup: \emptyset .

Jednočlan skup, recimo $\{a\}$, ima dva podskupa: $\emptyset, \{a\}$.

Dvočlani skup, recimo $\{a, b\}$, ima četiri podskupa: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.

Tročlani skup, recimo $\{a, b, c\}$, ima osam podskupova: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$.

Dakle, imamo sljedeću tablicu:

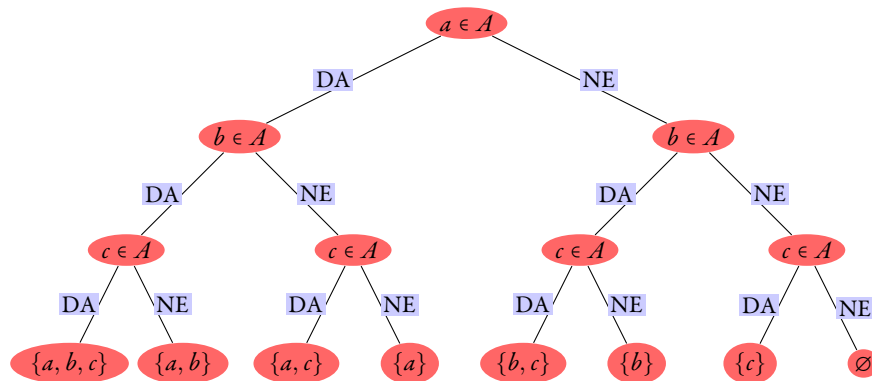
broj elemenata	0	1	2	3
broj podskupova	1	2	4	8

Pomoću ove tablice možemo lako naslutiti da je traženi broj 2^n , što ćemo i dokazati (i to na više načina).

Pretpostavimo da je skup koji nas zanima $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Kreirajmo sada neki podskup od A . U njega možemo, ali i ne moramo uključiti element a_1 , dakle u ovom koraku možemo donijeti dvije različite odluke. Bez obzira što odlučili o a_1 , možemo ali i ne moramo uključiti a_2 u taj podskup, znači opet imamo dvije različite odluke, stoga po principu produkta broj mogućnosti vezanih za a_1 i a_2 je $2 \cdot 2 = 4$. Sada nastavimo ovim rezoniranjem i dolazimo do 2^n . Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 1.2.1 *Skup od n elemenata ima 2^n podskupova.*

Prethodni dokaz ovog teorema možemo ilustrirati sljedećim dijagramom za slučaj skupa $\{a, b, c\}$.



Dokaz (druga verzija): U ovom dokazu ćemo numerirati podskupove, tj. naći ćemo bijekciju s $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ u $\mathcal{P}(S)$. Ideju ćemo opet ilustrirati na skupu $\{a, b, c\}$. Za odgovarajući podskup gledamo njegove elemente jedan po jedan i pišemo 1 ukoliko podskup sadrži a , a 0 ukoliko ne sadrži, i tako dalje za b i c . Dakle, podskupu $\{a, c\}$ pridružujemo trojku brojeva 101. Na taj način svakom podskupu pridružujemo jedan niz od tri brojke. Kako se ti nizovi sastoje od nula i jedinica, trebali bi nas podsjetiti na binarni zapis brojeva. Ukoliko izbrišemo vodeće nule iz našeg zapisa, uistinu i dobijemo binarni zapis:

$$\begin{aligned}
 \emptyset &\iff 000 \iff (0)_2 = 0 \\
 \{c\} &\iff 001 \iff (1)_2 = 1 \\
 \{b\} &\iff 010 \iff (10)_2 = 2 \\
 \{b, c\} &\iff 011 \iff (11)_2 = 3 \\
 \{a\} &\iff 100 \iff (100)_2 = 4 \\
 \{a, c\} &\iff 101 \iff (101)_2 = 5 \\
 \{a, b\} &\iff 110 \iff (110)_2 = 6 \\
 \{a, b, c\} &\iff 111 \iff (111)_2 = 7
 \end{aligned}$$

Time smo konstruirali traženu bijekciju za $n = 3$.

Lako se vidi da ovaj postupak možemo proširiti na proizvoljan n . Formalno, konstruiramo bijekciju između partitivnog skupa skupa S i skupa funkcija sa S u $\{0, 1\}$. Funkcija f_Y koja odgovara skupu Y je zadana pomoću

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & x \in Y, \\ 0 & x \notin Y. \end{cases}$$

Obratno, funkciji $f: S \rightarrow \{0, 1\}$ odgovara skup $Y = \{x \in S : f(x) = 1\}$. Funkcija f_Y se zove karakteristična funkcija skupa Y .

Ukoliko je (a uvijek to možemo pretpostaviti) $S = \{0, 1, \dots, n-1\}$, tada funkciju $f: S \rightarrow \{0, 1\}$ možemo predstaviti pomoću n -torke $(f(0), \dots, f(n-1))$. Dakle, podskupove od S možemo predstaviti n -torkama koje se sastoje od nula i jedinica.

Sljedeći korak je da predstavimo te n -torke kao zapis u bazi 2 cijelog broja $N = f(n-1)2^{n-1} + \dots + f(1)2 + f(0)$. □

Zadatak 1.3

Dovršite prethodni dokaz.

Ova verzija dokaza nam daje zgodnu numeraciju podskupova od $\{0, \dots, n-1\}$. Odgovarajući podskup S_k lako konstruiramo iz binarnog zapisa broja k . Također, skup S_k ovisi samo o k , a ne o n .

Dokaz (treća verzija): Dokazat ćemo teorem pomoću indukcije. Baza indukcije je očito zadovoljena. Pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za skupove s $n-1$ elemenata. Neka je S skup s n elemenata. Fiksirajmo neki element $a \in S$. Podijelimo podskupove od S u dvije klase: oni koji sadrže a i oni koji ne sadrže a . Oni podskupovi koji ne sadrže a su podskupovi skupa $S' = S \setminus \{a\}$ koji ima $n-1$ elemenata, stoga takvih podskupova ima 2^{n-1} . Oni podskupovi koji sadrže a se mogu napisati kao unija od $\{a\}$ i nekog podskupa iz S' , stoga i takvih ima 2^{n-1} . Dakle, po principu sume, broj poskupova od S je $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$, čime smo dokazali korak indukcije. □

Dokaz (četvrta verzija): Neka je $F(n)$ broj podskupova n -članog skupa. Uočimo da sve podskupove od $\{0, \dots, n\}$ možemo dobiti iz podskupova skupa $\{0, \dots, n-1\}$ tako da svaki takav skup proširimo na dva moguća načina: ili ništa ne dirajući ili ubacujući element n . Dakle, vrijedi relacija $F(n) = 2F(n-1)$. Kako je $F(0) = 1$, lako se vidi da je $F(n) = 2^n$. □

Zbog čega smo dokazivali teorem 1.2.1 na toliko različitih načina? Zbog toga što je svaki dokaz ilustrirao jednu tehniku dokazivanja kombinatornih teorema:

prvi dokaz svođenje dokaza na prebrojavanje nezavisnih odluka

drugi dokaz svođenje dokaza na nalaženje bijekcije s podskupa prirodnih brojeva u skup koji prebrojavamo

treći dokaz dokazivanje pomoću matematičke indukcije

četvrti dokaz kreiranje rekurzivne formule

Sve te metode ćemo često koristiti u nastavku kolegija.

1.3 Broj podskupova fiksirane veličine (binomni koeficijenti)

Teorem 1.3.1 *Neka je S n -člani skup. Broj podskupova s k ($0 \leq k \leq n$) elemenata od S je $\binom{n}{k} = n! / k!(n-k)!$.*

Napomena: Podsjetimo se da je po konvenciji $0! = 1$.

Dokaz: Na koliko načina možemo iz skupa S odabrati k elemenata? Očito postoji n mogućih izbora za „prvi” element, $(n-1)$ za „drugi” element,..., te $(n-k+1)$ za „ k -ti” element, tj. po principu produkta $n(n-1)\cdots(n-k+1) = n! / (n-k)!$ mogućnosti. Ali mi smo riječi prvi, drugi, ... stavili u navodnike zbog toga što u podskupu elementi nisu uređeni, tj. ne razlikujemo koji element je prvi, drugi itd. Stoga dobijeni broj moramo podijeliti s brojem različitih redoslijeda k elemenata koje smo izabrali. Rezonirajući kao gore, vidimo da imamo k izbora za „prvi” element, $k-1$ izbora za „drugi” element, itd. Dakle, ukupno imamo $k!$ izbora za redoslijed. Time smo dokazali teorem. \square

S ovom kombinatornom interpretacijom binomnih koeficijenata, cijeli niz identiteta s binomnim koeficijentima se može i kombinatorno dokazati.

Propozicija 1.3.2 *Vrijede sljedeće identitete:*

$$(a) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$(b) \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1},$$

$$(c) \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k},$$

$$(d) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

$$(e) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dokaz: (a) Odabir podskupa s k elemenata je ekvivalentan odabiru $n-k$ elemenata (odabiru podskupa $A \subset S$ odgovara odabir podskupa $S \setminus A$).

(b) Poslužit ćemo se sportskim žargonom pri dokazu. Između n sportaša želimo odabrati k -članu ekipu u kojoj će jedan sportaš biti kapetan momčadi. Iz teorema 1.3.1 znamo da ekipu možemo odabrati na $\binom{n}{k}$ načina. Za svaki mogući izbor ekipe, kapetana možemo izabrati na k načina. To odgovara lijevoj strani izraza. Alternativno, možemo najprije izabrati kapetana (to možemo učiniti na n načina), a onda izabrati ostatak ekipe (njih $k-1$ između preostalih $n-1$ sportaša.) To odgovara desnoj strani izraza. Princip dvostrukog brojanja kaže da dva različita brojanja moraju dovesti do istog rezultata, čime smo dokazali tvrdnju.

- (c) Pretpostavimo da imamo razred s $n + 1$ učenika, od kojih je jedan na neki način izdvojen od ostalih, te (opet) želimo izabrati ekipu od k učenika. To možemo napraviti ili tako da uključimo tog izdvojenog učenika (a u tom slučaju trebamo izabrati preostalih $k - 1$ učenika između preostalih n), ili ga možemo izbaciti iz kombinacija za ekipu (u tom slučaju trebamo izabrati cijelu ekipu između preostalih n učenika).
- (d) Ovo je jednostavno — svih podskupova po teoremu 1.2.1 ima 2^n .
- (e) Desna strana odgovara broju načina na koji možemo izabrati ekipu od n članova od $2n$ sportaša. Pretpostavimo sada da se među $2n$ sportaša nalazi n dječaka i n djevojčica. Na koliko načina možemo odabrati ekipu od k djevojčica i $n - k$ dječaka? Ovaj broj je očito $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} =$ po dijelu (a) $= \binom{n}{k}^2$. Sada samo sumiramo po mogućem broju djevojčica u ekipi (formalno gledano, primijenimo princip sume). \square

Zadatak 1.4

Probajte dokazati propoziciju 1.3.2 koristeći algebarske tehnike.

Katkada se k -člani podsup skupa S naziva **k -kombinacija** skupa S . Dakle, $\binom{n}{k}$ je broj k -kombinacija n -članog skupa.

Prošle godine smo sreli binomne koeficijente u tzv. binomnom teoremu.

Teorem 1.3.3 (Binomni teorem)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \text{ za } n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

Relaciju (1.1) nazivamo binomnom formulom.

Dokaz: Promotrimo izraz

$$\underbrace{(a + b) \cdots (a + b)}_{n \text{ puta}}.$$

Ovaj izraz možemo raspisati tako da iz svake zagrade odaberemo ili a ili b , i to na sve moguće načine, te pomnožimo izabrane članove i onda sve sumiramo. Izraz b^k se dobija kada je b odabrano iz k zagrada, a a iz $n - k$ zagrada (čim smo izabrali b iz k zagrada, odmah smo izabrali i a iz $n - k$ zagrada). Postoji $\binom{n}{k}$ načina na koji možemo izabrati tih k b -ova, pa je koeficijent uz $a^{n-k} b^k$ upravo $\binom{n}{k}$. \square

Zadatak 1.5

Dajte algebarski dokaz teorema 1.3.3. Uputa: indukcija!

Cijeli niz činjenica o binomnim koeficijentima se može dobiti koristeći binomni teorem. Na prijer, propozicija 1.3.2 (d) odmah slijedi ukoliko u binomnu formulu uvrstimo $a = 1$, $b = 1$.

Korolar 1.3.4 Za $n > 0$, broj podskupova n -članog skupa s parnim i neparnim brojem elemenata je jednak (dakle, 2^{n-1}).

Dokaz (algebarski): Ubacimo $a = 1, b = -1$ u binomnu formulu:

$$0 = (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \quad \text{povlači} \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ paran}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ neparan}}} \binom{n}{k}. \quad \square$$

Dokaz (kombinatorni): Ukoliko je n neparan, tada je k paran akko je $n - k$ neparan, stoga svaki odabir skupa s parnim brojem elemenata je (uzimanjem komplementa) automatski i odabir skupa s neparnim brojem elemenata, tj. imamo bijekciju sa skupa podskupova s parnim brojem elemenata u skup podskupova s neparnim brojem elemenata, čime smo dokazali tvrdnju za slučaj da je n neparan.

Ukoliko je n paran, gornji postupak nije moguć. Stoga promotrimo preslikavanje $A \mapsto A \Delta \{n\}$, gdje je $A \subset \{1, \dots, n\}$, a Δ označava simetričnu razliku (ovo preslikavanje ubacuje n u A ukoliko $n \notin A$, a ukoliko je $n \in A$, onda ga izbacuje). Ovo preslikavanje je bijekcija na partitivnom skupu od $\{1, \dots, n\}$, te mijenja kardinalitet skupa za 1, tj. prebacuje skupove s parnim brojem elemenata u skupove s neparnim brojem elemenata i obrnuto. Time smo dokazali tvrdnju korolara. \square

Zadatak 1.6

Dokažite da je $A \mapsto A \Delta \{n\}$ bijekcija na partitivnom skupu od $\{1, \dots, n\}$.

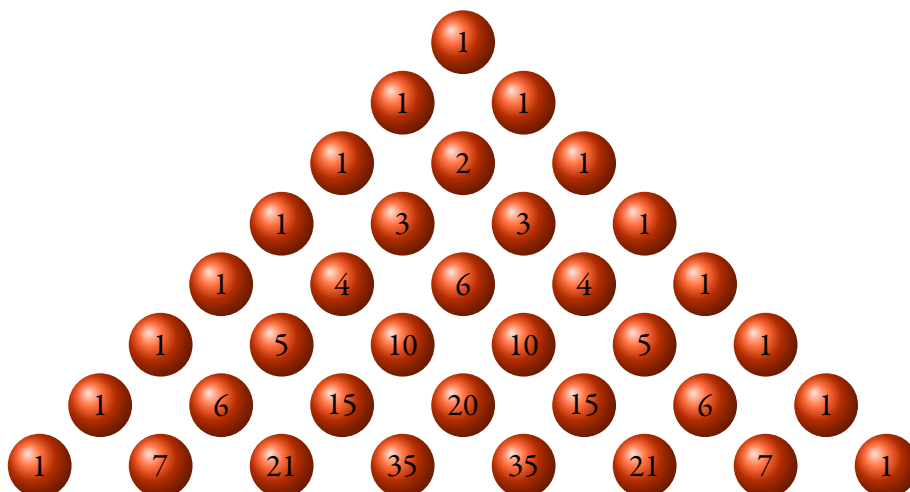
Korolar 1.3.4 možemo i generalizirati.

Korolar 1.3.5 Neka je n djeljiv s 8. Tada je broj podskupova čiji je broj elemenata djeljiv s 4 jednak $2^{n-2} + 2^{(n-2)/2}$.

Dokaz: Označimo s A traženi broj, a s B broj podskupova čiji je broj elemenata kongruentan s 2 (mod 4). Iz korolara 1.3.4 slijedi $A + B = 2^{n-1}$.

Uvrstimo $a = 1, b = i$ u binomnu formulu. Budući je $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, a n je višekratnik broja 8, slijedi $(1 + i)^n = 2^{n/2}$. Dakle, $2^{n/2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k$. Uzimajući u obzir da je $i^k = 1, i, -1, -i$ za redom $k \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$, slijedi $A - B = 2^{n/2}$. Rješavanjem linearnog sustava dvije jednačbe s dvije nepoznanice dolazimo do tražene formule. \square

Propozicija 1.3.2 (c) omogućava da konstruiramo tzv. „Pascalov trokut” (ne, Pascal nije prvi koji ga je konstruirao).



Svaki element osim prvog i zadnjeg u retku je dobijen zbrajanjem dva broja koja su iznad njega. k -ti element u n -tom retku je $\binom{n}{k}$ (krećemo od nultog retka i nultog stupca).

Nešto rijetka verzija Pascalovog trokuta je Pascalov desni trokut:

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	

tj.

Sada se na primjer Propozicija 1.3.2 (d) može iskazati kao tvrdnja da je suma elemenata u n -tom retku Pascalovog trokuta jednaka 2^n (opet krećemo od nultog retka).

Što dobijemo kad zbrajamo elemente po stupcima? Probajmo npr. zbrojiti elemente u drugom stupcu (i tu krećemo od nultog): $1 + 3 + 6 + 10 = 20$, a taj broj se javlja u sljedećem retku i sljedećem stupcu zdesna. To nas dovodi do sljedećeg rezultata.

Teorem 1.3.6 (Chu Shih–Chieh) *Neka je $n \geq k$. Tada vrijedi*

$$\sum_{r=k}^n \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \quad (1.2)$$

Dokaz (algebarski):

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} &= \left[\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} \right] + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} \\
 &= \left[\binom{k+1}{k+1} + \binom{k+1}{k} \right] + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} \\
 &= \left[\binom{k+2}{k+1} + \binom{k+2}{k} \right] + \binom{k+3}{k} + \cdots + \binom{n}{k} \\
 &= \binom{k+3}{k+1} + \cdots + \binom{n}{k} = \cdots = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \\
 &= \binom{n+1}{k+1}.
 \end{aligned}$$

Ovdje smo na više mjesta koristili propoziciju 1.3.2 (c). \square

Dokaz (kombinatorni): Neka je zadan skup $S = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Tada desna strana formule (1.2) odgovara broju $k+1$ -članih podskupova skupa S . Označimo s \mathcal{P} skup $k+1$ -članih podskupova od S , te definirajmo sljedeće skupove:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_1 &= \{A \subseteq \mathcal{P} : x_1 \in A\}, \\
 \mathcal{P}_2 &= \{A \subseteq \mathcal{P} : x_1 \notin A, x_2 \in A\}, \\
 \mathcal{P}_3 &= \{A \subseteq \mathcal{P} : x_1, x_2 \notin A, x_3 \in A\}, \\
 &\vdots \\
 \mathcal{P}_{n-k+1} &= \{A \subseteq \mathcal{P} : x_1, x_2, \dots, x_{n-k} \notin A, x_{n-k+1} \in A\}.
 \end{aligned}$$

Lako se vidi da skupovi $\mathcal{P}_i, i = 1, \dots, n-k+1$ čine particiju skupa \mathcal{P} , te da vrijedi $|\mathcal{P}_i| = \binom{n+1-i}{k}$, čime smo našli kombinatorni prikaz lijeve strane formule (1.2). \square

Specijalan slučaj teorema 1.3.6 je formula za zbroj prvih n brojeva:

$$1 + 2 + \cdots + n = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \cdots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ali pomoću teorema 1.3.6 možemo naći formulu za $\sum_{k=1}^n k^p$, za bilo kakav $p \in \mathbb{N}$! Na primjer, za $p = 2$ postupak je sljedeći. Služeći se formulom

$$k^2 = k + k(k-1) = \binom{k}{1} + 2\binom{k}{2}$$

traženu sumu možemo ovako izračunati:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} + 2 \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zadatak 1.7

Kako bi ste došli do formule za $p > 2$?

Često se javlja potreba da se da približna ocjena za faktorijel nekog broja. U tu svrhu se obično koristi **Stirlingova formula**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Preciznije, vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = 1.$$

Primjer 1.3.7 Dokažite kombinatornim argumentima relaciju $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$.

Rješenje: Lijeva strana: neka je dan n -člani skup S . Biramo uređeni par (X, Y) , gdje je X m -člani podskup od S , a Y k -člani podskup od X .

Desna strana: najprije odabiremo k -člani podskup Y od S , onda od preostalih elemenata biramo $m - k$ -člani podskup Z , te kreiramo uređeni par $(Z \cup Y, Y)$. \square

Primjer 1.3.8 Dokažite kombinatornim argumentima relaciju (tzv. Vandermondeovu konvoluciju)

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Rješenje: Desna strana odgovara broju odabira r -članog podskupa $m + n$ -članog skupa S . Lijeva strana također odgovara broju odabira r -članog podskupa $m + n$ -članog skupa S , s time da odabiremo r -člane podskupove na sljedeći način. Particioniramo skup S na dva skupa A i B , gdje je A m -člani, a B n -člani skup. Svaki odabir r -članog skupa od S odgovara odabiru k -članog podskupa od A i $r - k$ -članog podskupa od B , za proizvoljan k između (i uključivo) 0 i r . \square

Primjer 1.3.9 Dokažite kombinatornim argumentima relaciju

$$\sum_{i \geq 0} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje: Po konvenciji $\binom{n}{m} = 0$ za $m > n$.

Lijeva strana odgovara broju odabira parnog podskupa n -članog skupa $S = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Do nekog parnog podskupa skupa S , možemo doći i tako da biramo hoće li a_1 biti element tog skupa, hoće li a_2 biti element tog skupa, ... Kada dođemo do elementa a_n , više nemamo mogućnost odabira: ili smo do sada odabrali neparan broj elemenata te moramo odabrati a_n , ili smo da sada odabrali paran broj elemenata te ne možemo odabrati a_n . Dakle, donijeli smo $n - 1$ odabira između dviju opcija. \square

Primjer 1.3.10 Dokažite kombinatornim argumentima relaciju

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje: Desna strana odgovara broju odabira uređenog para (x, A) , gdje je x element n -članog skupa S , a A je podskup skupa $S \setminus \{x\}$.

Lijeva strana odgovara broju odabira uređenog para (x, B) , gdje je B i -člani podskup od S , a x neki element iz B , gdje je i bilo koji broj između (i uključivo) 0 i n .

No, svaki odabir uređenog para (x, A) , gdje je x element n -članog skupa S , a A je podskup skupa $S \setminus \{x\}$ odgovara odabiru uređenog para (x, B) , gdje je $B = A \cup \{x\}$, i obrnuto: svaki odabir uređenog para (x, B) , gdje je B i -člani podskup od S , a x neki element iz B , gdje je i bilo koji broj između (i uključivo) 0 i n odgovara odabiru uređenog para (x, A) , gdje je $A = B \setminus \{x\}$. \square

Primjer 1.3.11 Neka su $k, n \in \mathbb{N}$. Izračunajte kombinatornim argumentom

$$\sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \binom{r}{k}.$$

Rješenje: Izraz možemo interpretirati kao broj odabira r -članih skupova n -članog skupa, te k -članih podskupova odabranog r -članog skupa, gdje je r proizvoljan broj između (i uključivo) k i n .

No mogli smo prvo odabrati k -člani podskup n -članog skupa (što možemo napraviti na $\binom{n}{k}$ načina), a zatim odlučiti koje ćemo preostale elemente uključiti u nadskup izabranog k -članog skupa (što, zaključujući kao u primjeru 1.3.9, možemo napraviti na 2^{n-k} načina). \square

Zadatak 1.8

Dokažite kombinatornim argumentima relaciju

$$\sum_{i=0}^{r+1} \binom{m-i}{r-i+1} = \binom{m}{r}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 1.9

Dokažite kombinatornim argumentima relaciju

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}_0.$$

1.4 Permutacije

Postoje dva načina na koja možemo shvatiti pojam permutacije. Neka je X konačan skup. Permutacija od X (u aktivnom smislu) je bijekcija s X u X . Da bi smo objasnili pasivan smisao, pretpostavimo da su elementi u X uređeni, npr. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Tada je pasivna

reprezentacija permutacije π uređena n -torka $(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n))$. Katkad koristimo i ovakav zapis za permutaciju:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}, \text{ gdje je } y_i = \pi(x_i), i = 1, \dots, n.$$

Teorem 1.4.1 *Broj permutacija n -članog skupa je $n!$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je n -člani skup skup $\{1, \dots, n\}$. Tada je permutacija uređena n -torka brojeva iz $\{1, \dots, n\}$. Postoji n -mogućnosti za izbor prvog elementa, $n - 1$ mogućnosti za izbor drugog elementa, itd. \square

Postoji još jedan, kraći zapis permutacije, tzv. **ciklički zapis**. Najprije ćemo uvesti pojam ciklusa. Kažemo da je permutacija π **ciklus** ili ciklička permutacija ukoliko vrijedi

$$x_1 \mapsto x_2 \mapsto \dots \mapsto x_n \mapsto x_1,$$

gdje su x_1, \dots, x_n elementi od X u nekom redoslijedu. Ciklus zapisujemo $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ (ne miješati s pasivnom formom permutacije!).

Kako je $(x_i \ \dots \ x_n \ x_1 \ \dots \ x_{i-1})$ očito isti ciklus kao i $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$, ciklički zapis nije jedinstven.

Propozicija 1.4.2 *Svaka se permutacija može zapisati kao kompozicija ciklusa na međusobno disjunktним skupovima. Ta reprezentacija je jedinstvena, do na redoslijed ciklusa i odabira početnih točaka ciklusa.*

Napomena: U ovom slučaju svaki ciklus nadopunjavamo do funkcije na cijelom početnom skupu tako da na ostatku skupa ciklus djeluje kao identiteta.

Dokaz: Dokaz će biti konstruktivne prirode. Neka je π permutacija na skupu X . Sljedeći algoritam konstruira tražene cikluse:

SVE DOK postoji element iz X koji nije ni u jednom ciklusu

- ▶ odaberi neki takav x
- ▶ neka je m najmanji prirodan broj takav da je $\pi^m(x) = x$
- ▶ konstruiraj ciklus $(x \ \pi(x) \ \dots \ \pi^{m-1}(x))$

VRATI sve konstruirane cikluse

Pokažimo sada da ovaj algoritam zaista generira tražene cikluse. Najprije ćemo pokazati da je $(x \ \pi(x) \ \dots \ \pi^{m-1}(x))$ zaista ciklus. Problem može nastati jedino ukoliko $\pi^i(x) = \pi^j(x)$ za $0 < i < j < m$. Ali budući je π bijekcija, slijedilo bi $x = \pi^{j-i}(x)$, što je u kontradikciji s izborom broja m .

Pokažimo sada da konstruirani ciklusi koriste međusobno disjunktne skupove elemenata iz X . Pretpostavimo da je

$$\pi^i(x) = \pi^j(y) \tag{1.3}$$

i pretpostavimo da je x izabran prije y . Ukoliko je $\pi^m(y) = y$, tada iz (1.3) slijedi

$$\pi^m(x) = \pi^{j+(m-i)}(y) = \pi^{j-i}(\pi^m(y)) = \pi^{j-i}(y),$$

dakle $\pi^{m+i-j}(x) = y$, što je u kontradikciji s činjenicom da smo pretpostavili da y nije u ciklusu od x .

Očito je da svaki element od X leži u nekom od konstruiranih ciklusa.

Konačno, kompozicija ovih ciklusa jednaka je π . Zaista, neka je $z \in X$ proizvoljan. Tada postoji y iz nekog ciklusa i $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $z = \pi^i(y)$. Tada se djelovanje permutacije π na element z podudara s djelovanjem ciklusa koji sadrži y , dok drugi ciklusi nemaju efekta na z (u svjetlu dane napomene). \square

Primjer 1.4.3 Permutacija

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

se u cikličkoj notaciji može zapisati kao $(1\ 3\ 4)(2\ 6)(5)$. To je jedna od 36 različitih verzija za ovu permutaciju (ima $3! = 6$ načina da posložimo cikluse i $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mogućnosti za izbor početnih točaka). Katkada se jednočlani ciklusi, kao gore (5) ne zapisuju.

Broj permutacija n -članog skupa koji se sastoji od k ciklusa se naziva Stirlingov broj prve vrste, u oznaci $s(n, k)$ (katkada se koristi definicija po kojoj je $(-1)^{n-k}s(n, k)$ broj permutacija n -članog skupa koji se sastoji od k ciklusa).

Neka je S skup od n elemenata, a $k \leq n$. Za uređenu k -torku (x_1, \dots, x_k) međusobno različitih elemenata iz S kažemo da je **k -permutacija** (ili parcijalna permutacija).

Na k -permutaciju možemo gledati kao na pasivnu formu injekcije $\{1, \dots, k\} \rightarrow S$ (očito $\{1, \dots, k\}$ možemo zamijeniti s bilo kojim k -članim skupom kojem smo nekako poredali elemente). Stoga je pitanje koliko ima k -permutacija skupa S ekvivalentno pitanju koliko ima injekcija s k -članog u n -člani skup.

Teorem 1.4.4 Broj k -permutacija n -članog skupa je $n!/(n-k)!$.

Dokaz: Promotrimo injekciju $f: \{1, \dots, k\} \rightarrow S$, gdje je $|S| = n$. Za $f(1)$ možemo uzeti bilo koji element iz S , dakle imamo n mogućnosti. Za $f(2)$ možemo uzeti bilo koji element iz $S \setminus \{f(1)\}$, dakle imamo $n - 1$ mogućnosti. Nastavljajući ovaj postupak, u konačnici dolazimo do izbora $f(k)$ za koji možemo uzeti bilo koji element iz $S \setminus \{f(1), \dots, f(k-1)\}$, dakle imamo $n - (k-1)$ mogućnosti. Princip produkta nam daje $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = n!/(n-k)!$ mogućnosti odabira funkcije f . \square

Katkada se broj k -permutacija n -članog skupa zapisuje kao $P(n, k)$ ili P_k^n .

Primjer 1.4.5 Dokažite kombinatornim argumentima relaciju

$$P(n, k) = nP(n-1, k-1).$$

Rješenje: Lijeva strana odgovara broju odabira uređenih k -torki n -članog skupa S . Desnu stranu možemo interpretirati opet kao broj odabira uređenih k -torki skupa S , s time da najprije odaberemo prvi element k -torke, recimo x , a onda odaberemo uređenu $(k-1)$ -torku skupa $S \setminus \{x\}$. \square

Primjer 1.4.6 Dokažite kombinatornim argumentima relaciju $P(n+1, k) = P(n, k) + P(n, k-1)$.

Rješenje: Lijeva strana odgovara broju odabira uređenih k -torku $n+1$ -članog skupa S . Neka je $x \in S$ proizvoljan, ali fiksiran element iz S . Desnu stranu možemo interpretirati kao broj odabira uređenih k -torki skupa S , s time da da skup uređenih k -torku podijelimo u dvije klase: klasu onih k -torki sastavljenu od elemenata skupa $S \setminus \{x\}$, i klasu onih k -torki skupa S koje sadrže x . Kako x može doći na bilo koje od k mjesta u k -torci, dolazimo do traženog izraza. \square

1.5 Multiskupovi i multinomni koeficijenti

Na općenito pitanje:

Na koliko načina se može odabrati k objekata iz skupa od n objekata?

odgovor možemo dati tek ukoliko preciziramo:

- (a) da li je redoslijed važan ili ne?
- (b) smije li se neki objekt više puta pojaviti kao izbor (dozvoljavamo li ponavljanja)?

To nas dovodi do sljedećeg teorema.

Teorem 1.5.1 Broj odabira k objekata iz skupa od n objekata je dan sljedećom tablicom

		(„kombinacije”)	
		redoslijed važan	redoslijed nevažan
ponavljanja dozvoljena		n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ponavljanja dozvoljena	nisu	$n!/(n-k)!$	$\binom{n}{k}$

Dokaz: Stupac „redoslijed važan” je lako riješiti. Ukoliko su ponavljanja dozvoljena, postoji n izbora za svaki od k objekata. Ukoliko ponavljanja nisu dozvoljena, traženi broj je broj k -permutacija n -članog skupa.

U stupcu „redoslijed nevažan” ukoliko ponavljanja nisu dozvoljena, zapravo brojimo k -podskupove n -skupa. Preostali element tablice je nešto teže izračunati, pa ćemo dokaz napraviti pomoću dvije leme. \square

Lema 1.5.2 Broj mogućnosti izbora k objekata iz n -članog skupa uz mogućnost ponavljanja i nevažan redoslijed je jednak broju načina odabira n nenegativnih cijelih brojeva čiji je zbroj jednak k .

Dokaz: Neka nam je dano k objekata iz skupa a_1, \dots, a_n . Neka je x_i broj ponavljanja objekta a_i . Tada je $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n x_i = k$.

Obrnuto, brojevima x_1, \dots, x_n , $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $x_1 + \dots + x_n = k$ pridružimo izbor objekata tako da objekt a_i izaberemo x_i puta.

Lema 1.5.3 Broj n -torki nenegativnih cijelih brojeva x_1, \dots, x_n za koje vrijedi $x_1 + \dots + x_n = k$ je dan s $\binom{n+k-1}{k}$.

Dokaz: Zamislimo $n + k - 1$ praznina, i onda njih $n - 1$ označimo. Neka je x_1 broj praznina prije prve oznake, x_i broj praznina između $(i-1)$ -e i i -te oznake, za $2 \leq i \leq n-1$ i x_n broj praznina poslije $(n-1)$ -e oznake. Tada je $x_i \geq 0$, $\sum x_i = (n+k-1) - (n-1) = k$.

Obrnuto, neka su dani x_1, \dots, x_n koji zadovoljavaju uvjete iz iskaza leme. Tada stavimo oznaku poslije x_1 praznina, poslije x_2 praznina, ..., poslije x_{n-1} daljnjih praznina. Dakle, ostalo je još x_n praznina, budući je broj preostalih praznina dan s

$$n + k - 1 - (x_1 + \dots + x_{n-1}) - (n - 1) = n + k - 1 - (k - x_n) - (n - 1) = x_n.$$

Grafički prikaz postupka je dan na sljedećoj slici:

$$\underbrace{\square \dots \square}_{x_1} \underbrace{\square \dots \square}_{x_2} \underbrace{\square \dots \square}_{x_3} \dots \underbrace{\square \dots \square}_{x_n}$$

$$\text{Broj izbora oznaka je očito } \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{n+k-1-(n-1)} = \binom{n+k-1}{k}.$$

□

Primjer 1.5.4 Neka je $n = 3$, $k = 4$. Tada $\square \square \square \square \square$ odgovara vrijednostima $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Obrnuto, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$ odgovara sljedećoj slici: $\square \square \square \square \square$.

Primjer 1.5.5 Dokažite kombinatornim argumentom relaciju $n^3 = \binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje: Lijeva strana odgovara broju odabira uređene trojke n -članog skupa S , uz moguća ponavljanja.

Skup uređenih trojaka skupa S , uz moguće ponavljanja, možemo podijeliti u tri klase:

- trojke u kojima su svi elementi isti — takvih očito ima $n = \binom{n}{1}$,
- trojke u kojima su dva elementa ista — takvih ima $2 \cdot \binom{n}{2} \cdot 3$, budući dva elementa možemo odabrati na $\binom{n}{2}$ načina, na dva načina možemo odlučiti koji će se element ponavljati, te postoji tri načina kako ih poredati $((x, x, y), (x, y, x), (y, x, x))$,

- trojke u kojima su svi elementi različiti — takvih ima $3! \cdot \binom{n}{3}$, budući tri elementa možemo odabrati na $\binom{n}{3}$ načina, te ih možemo poredati na $3!$ načina. \square

Katkada se odabir k objekata iz n -članog skupa, uz ponavljanja i nevažan redoslijed zove **k -kombinacija s ponavljanjem**.

Da bi smo formalizirali pristup kombinatornim problemima koja uključuju ponavljanja, uvesti ćemo pojam multiskupa. To je objekt poput skupa, ali u kojem se elementi mogu ponavljati. Precizno, **konačni multiskup** M na skupu S je uređeni par $M = (S, m)$, gdje je $m : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ funkcija za koju je $\sum_{x \in S} m(x)$ konačan broj. Za $x \in S$ se broj $m(x)$ zove *kratnost od x* . Broj elemenata multiskupa M , u oznaci $|M|$ je $\sum_{x \in S} m(x)$.

Obično umjesto $\{a, a, b, c, c, d, d, d\}$ pišemo $\{a^2, b, c^2, d^3\}$.

Ako su $M = (S, m)$ i $M' = (S, m')$ dva multiskupa na istom skupu, onda kažemo da je M' *podmultiskup od M* (u oznaci $M' \subseteq M$) ako je $m'(x) \leq m(x)$ za sve $x \in S$.

Sada možemo prethodni rezultat ovako formulirati:

Neka je $k \in \mathbb{N}$ i S n -člani skup. Neka je $M = (S, m)$ multiskup takav da je $m(x) \geq k$ za svaki $x \in S$. Tada je broj k -podmultiskupova od M jednak $\binom{n+k-1}{k}$.

Uvedimo sada pojam permutacije multiskupova. Neka je $M = (S, m)$ multiskup. Analogno pojmu permutacije skupa, svaku uređenu n -torku (x_1, \dots, x_n) , gdje su $x_i \in S$ zovemo **permutacija multiskupa M** . Za razliku od permutacija skupa, ovdje je dozvoljeno da neki elementi x_i budu isti, ali ne smije biti više ponavljanja od kratnosti tog elementa.

Teorem 1.5.6 *Neka je $M = \{x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \dots, x_k^{n_k}\}$ zadani multiskup. Neka je $n = n_1 + \dots + n_k$. Tada je broj permutacija od M jednak*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Napomena: Katkada se koristi oznaka

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!},$$

uz $n = n_1 + \dots + n_k$, i taj broj zovemo **multinomni koeficijent**.

Dokaz: Trebamo odrediti na koliko načina možemo sastaviti uređenu n -torku s elementima iz M . Prvo odaberemo na koja ćemo mjesta staviti elemente x_1 (njih n_1), tj. trebamo odabrati n_1 mjesta od njih n , a to možemo napraviti na $\binom{n}{n_1}$ načina. Dalje odredimo na koja ćemo mjesta staviti elemente x_2 ; sada trebamo odabrati n_2 mjesta od njih $n - n_1$, što možemo napraviti na $\binom{n-n_1}{n_2}$ načina. Nastavljanjem ovog postupka, te pomoću principa

produkta dolazimo do zaključka da je broj permutacija dan s

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k} =$$

$$\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{(n-n_1-n_2-n_3)!n_3!} \dots$$

$$\cdot \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{(n-n_1-n_2-\dots-n_k)!n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}. \quad \square$$

Slično kao i binomni koeficijenti, i multinomni koeficijenti se javljaju pri raspisivanju algebarskih izraza.

Teorem 1.5.7 (Multinomni teorem) *Vrijedi*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{0 \leq r_1, r_2, \dots, r_k \leq n \\ r_1 + \dots + r_k = n}} \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k},$$

za sve $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 1.10

Dokažite kombinatorno teorem 1.5.7. Dokaz je analogan dokazu binomnog teorema 1.3.3.

Često se u enigmatskim časopisima pojavljuju anagrami, tj. pitanja koliko se različitih riječi može formirati pomoću slova iz neke zadane riječi. Naravno, bit zagonetke je da riječi trebaju pripadati nekom zadanom jeziku (tj. trebaju se nalaziti u standardnom rječniku tog jezika). Postoje dvije strategije za rješavanje ovog problema:

- najprije formiramo sve potencijalne riječi, a onda potražimo nalazi li se neka od njih u rječniku,
- prolazimo kroz rječnik, i provjeravamo za svaku riječ da li je sastavljena od slova iz zadane riječi.

Da bismo procijenili koja je metoda bolja, trebamo znati broj potencijalnih riječi i broj riječi u rječniku. Broj potencijalnih riječi možemo izračunati pomoću teorema 1.5.6.

Primjer 1.5.8 Ukoliko je zadana riječ MATEMATIKA, broj potencijalnih riječi je $\binom{10}{2,3,2,1,1,1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

Zadatak 1.11

Koliko ima potencijalnih riječi ukoliko ne moramo iskoristiti sva slova?

1.6 Particije skupova (Relacije na skupovima)

Prisjetimo se sljedećeg rezultata.

Teorem 1.6.1 *Neka je R relacija ekvivalencije na skupu X . Tada klase ekvivalencije formiraju particiju skupa X . Obrnuto, za danu particiju skupa X , postoji jedinstvena relacija ekvivalencije čije su klase elementi particije.*

Dakle, broj particija skupa jednak je broju relacija ekvivalencije na tom skupu. Taj broj ćemo zvati **Bellov broj**.

Prije nego li se pozabavimo Bellovim brojevima, prisjetimo se još jednog pojma vezanog za relacije. Kažemo da je relacija R totalni uređaj ukoliko je relacija refleksivna, antisimetrična, tranzitivna i zadovoljava svojstvo trihotomije (za x, y vrijedi ili $(x, y) \in R$ i/ili $(y, x) \in R$ i/ili $x = y$).

Teorem 1.6.2 *Broj totalnih uređaja na n -skupu je $n!$.*

Napomena: Zapravo ćemo pokazati da za dani uređaj R na n -skupu, njegove elemente možemo numerirati x_1, \dots, x_n tako da vrijedi $(x_i, x_j) \in R$ akko $i \leq j$, i to možemo učiniti na jedinstveni način.²

Dokaz: Neka je X n -člani skup i R uređaj na X . Prvo ćemo pokazati da postoji „zadnji” element u X , element x takav da, ukoliko je $(x, y) \in R$, onda nužno $y = x$. Pretpostavimo da takav x ne postoji. Tada za svaki x postoji $y \neq x$ takav da $(x, y) \in R$. Krenimo s $x = x_1$, i odaberimo x_2, x_3, \dots takve da vrijedi $(x_i, x_{i+1}) \in R$, za sve i . Iz tranzitivnosti i refleksivnosti slijedi $(x_i, x_j) \in R$ za sve $i \leq j$. Kako je X konačan, u nekom trenutku dolazimo do x_j takvog da vrijedi $x_i = x_j$ za neki $i < j$. No tada $(x_{j-1}, x_j) \in R$ i $(x_j, x_{j-1}) = (x_i, x_{j-1}) \in R$, budući je $i \leq j - 1$. Iz antisimetričnosti slijedi $x_j = x_{j-1}$, što je u kontradikciji s konstrukcijom niza.

Taj „zadnji” element niza je jedinstven. Zaista, pretpostavimo da je i z „zadnji” element. Tada ili $(x, z) \in R$ ili $(z, x) \in R$. U oba slučaja slijedi $x = z$.

Označimo „zadnji” element s x_n . Tada zbog trihotomije vrijedi $(x, x_n) \in R$ za sve x . Sada nastavljamo tako da nađemo „zadnji” element skupa $X \setminus \{x_n\}$, koji označimo s x_{n-1} , itd.

U konačnici smo dobili jedinstveni način numeracije elemenata iz X . Nadalje, očito svakoj numeraciji elemenata iz X odgovara jedan totalni uređaj (zadan s $(x_i, x_j) \in R$ ako $i \leq j$). Dakle, broj totalnih uređaja odgovara broju uređenih n -torki iz X , tj. broju permutacija. \square

Vratimo se pitanju broja particija. S B_n ćemo označavati n -ti Bellov broj (to je broj particija n -skupa ili broj relacija ekvivalencije n -skupa). Lako se vidi da je $B_3 = 5$ (particije od $\{1, 2, 3\}$ su $\{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$). Slično vidimo da je $B_2 = 2$, $B_1 = 1$, a po definiciji stavljamo $B_0 = 1$.

²To znači i da se naš intuitivni pojam uređaja poklapa s formalnom definicijom.

Za razliku od broja podskupova i permutacija, ne postoji jednostavna formula za Bellove brojeve. Jedan način računanja Bellovih brojeva je dan sljedećim teoremom.

Teorem 1.6.3 *Vrijedi*

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Dokaz: Neka je $X = \{1, \dots, n\}$ i uzmimo neku particiju A_1, \dots, A_l od X . Neka je A_j skup koji sadrži element n . Dakle, $A_j = Y \cup \{n\}$, gdje je $Y \subseteq \{1, \dots, n-1\}$. Ostali A_i , $i \neq j$ čine particiju skupa $\{1, \dots, n-1\} \setminus A_j$. Skupovi Y i A_i , $i \neq j$ potpuno određuju particiju.

Ukoliko je $|Y| = k-1$ postoji $\binom{n-1}{k-1}$ mogućnosti za izbor skupa Y , te B_{n-k} mogućnosti za izbor ostalih elemenata particije. Kako za k možemo uzeti bilo koji broj između (i uključivo) 1 i n , slijedi tražena formula. \square

Pojam particije možemo povezati s još jednim fundamentalnim pojmom u matematici: sa surjekcijama. Neka je $f: A \rightarrow B$ surjekcija, $|A| = m$, $|B| = n$. Na primjer, $A = \{1, \dots, m\}$, $B = \{1, \dots, n\}$. Tada $A = \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(j)$, i $f^{-1}(i) \cap f^{-1}(j) = \emptyset$ za $i \neq j$. Zaista, prvo svojstvo slijedi iz surjektivnosti, dok $k \in f^{-1}(i) \cap f^{-1}(j)$ povlači $f(k) = i$ i $f(k) = j$, dakle $i = j$. Zapravo, vrijedi i više.

Propozicija 1.6.4 *Funkcija $f: A \rightarrow B$ je surjekcija akko je $\{f^{-1}(y) : y \in B\}$ particija od A .*

Zadatak 1.12

Dovršite dokaz propozicije 1.6.4.

Kod surjekcija vidimo da je broj elemenata particije jednak kardinalitetu kodomene.

Broj particija od k elemenata n -skupa označava se sa $S(n, k)$ i zove **Stirlingovim brojem druge vrste**. Očito je $S(n, k) = 0$ za $k = 0$ ili $k > n$. Također se lako vidi da vrijedi $S(n, 1) = S(n, n) = 1$. Nadalje, $B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$.

Teorem 1.6.5 *Vrijedi*

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k), \quad \text{za sve } k, n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz: Particije skupa $X = \{1, 2, \dots, n+1\}$ od k elemenata možemo podijeliti u dvije skupine: one za koje je skup $\{n+1\}$ element particije, i ostale. Brojanje particija u prvoj skupini je jednostavno: ostalih n elemenata od X možemo particionirati u $k-1$ skupova na $S(n, k-1)$ načina.

Ukoliko $\{n+1\}$ nije član particije, tada izbacivanjem elementa $n+1$ iz elementa particije u kojoj se nalazi dovodi do stvaranja particije od k elemenata skupa $\{1, \dots, n\}$, recimo A_1, \dots, A_k . Tu istu particiju skupa $\{1, \dots, n\}$ bi dobili da smo izbacili element

$n + 1$ iz bilo kojeg od skupova A_1, \dots, A_k . Drugim riječima, svakoj k -članjoj particiji od $\{1, \dots, n\}$ odgovara točno k različitih k -članih particija skupa X . Dakle, postoji točno $kS(n, k)$ particija od X kod kojih $\{n + 1\}$ nije član particije. \square

Teorem 1.6.5 nam daje mogućnost zapisa „Stirlingovog trokuta”.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	3	1		
4	1	7	6	1	
5	1	15	25	10	1

Teorem 1.6.6 Broj surjekcija sa skupa A , $|A| = n$ u skup B , $|B| = k$ je $k!S(n, k)$.

Dokaz: Možemo pretpostaviti $k \leq n$, $A = \{1, \dots, n\}$, $B = \{1, \dots, k\}$. Svaka surjekcija f generira particiju $\bigcup_{i=1}^k f^{-1}(i)$. Ali toj particiji odgovara više surjekcija; da bi A_1 bio element particije generirane funkcijom f , nije nužno da je $A_1 = f^{-1}(1)$. Kako particije nisu uređene, skup A_1 može odgovarati skupu $f^{-1}(j)$ za bilo koji $j \in \{1, \dots, k\}$. Dakle, postoji k mogućnosti za izbor broja j_1 takvog da je $A_1 = f^{-1}(j_1)$, $k - 1$ mogućnosti za izbor broja j_2 takvog da je $A_2 = f^{-1}(j_2)$, itd. Stoga se svaka od $S(n, k)$ k -članih particija n -članog skupa može urediti na $k!$ načina, tj. postoji $k!$ različitih surjekcija koje odgovaraju toj particiji. \square

Zadatak 1.13

Dokažite: broj rasporeda n različitih kuglica u k jednakih kutija tako da niti jedna kutija ne ostane prazna je $S(n, k)$.

Primjer 1.6.7 Dokažite relaciju $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

Rješenje: Relaciju ćemo dokazati kombinatornim argumentom. Lijeva strana odgovara broju particija n -članog skupa S na dva dijela. Dvočlanu particiju $\{A, B\}$ skupa S možemo odrediti tako da za svaki element skupa S biramo da li se nalazi u A ili B . Takvih odabiramo imamo 2^n . No time smo računali i odabire $\{S, \emptyset\}$ i $\{\emptyset, S\}$. Konačan broj odabira dobijemo kad broj odabira $2^n - 2$ podijelimo s 2, budući smo dvaput brojali svaku particiju (particija $\{A, B\}$ je jednaka particiji $\{B, A\}$). \square

Primjer 1.6.8 Dokažite relaciju $S(n, n - 1) = \binom{n}{2}$

Rješenje: Koliko ima $n - 1$ -članih particija n -članog skupa? U svakom članu particije se nalazi točno jedan element, osim u jednom koji sadrži točno dva elementa. Broj traženih particija odgovara broju odabira ta dva elementa. \square

Primjer 1.6.9 Dokažite analogon Chu Shih–Chiehovog teorema:

$$S(n+1, k+1) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} S(i, k), \text{ za sve } n \geq k.$$

Rješenje: Lijeva strana odgovara broju odabira $k+1$ -članih particija $n+1$ -članog skupa S .

Neku $k+1$ -članu particiju skupa S možemo odabrati na sljedeći način. Izdvojimo neki element $x \in S$. On se mora nalaziti u nekom članu particije A . Ako A ima m elemenata, onda ga možemo odabrati na $\binom{n}{m-1}$ načina. Preostaje nam particionirati skup $S \setminus A$ na k dijelova, što možemo napraviti na $S(n+1-m, k)$ načina. Dakle lijeva strana je jednaka broju

$$\sum_{m=1}^{n+1} \binom{n}{m-1} S(n+1-m, k).$$

Zamijenom indeksa $i \rightarrow n+1-m$ dobijamo

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i} S(i, k) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S(i, k) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} S(i, k),$$

budući $S(i, k) = 0$ za $i < k$. □

1.7 Generiranje kombinatornih objekata

Ukoliko neki problem zahtjeva ispitivanje svih objekata neke vrste (podskupovi, permutacije, ...) potreban nam je algoritam koji će generirati te objekte. Obično je konceptualno najjednostavniji rekurzivni algoritam. Npr. sljedeći algoritam generira partitivni skup od $\{1, \dots, n\}$. Uočite kako algoritam nalikuje dokazu rekurzivne relacije $F(n+1) = 2F(n)$, $F(0) = 1$ iz teorema 1.2.1.

Ako je $n = 0$, vrati $\{\emptyset\}$.

INACE

- ▶ generiraj partitivni skup od $\{1, \dots, n-1\}$
- ▶ napravi kopiju svakog podskupa i dodaj mu element n
- ▶ vrati sve kreirane skupove

Simbolički se ovaj algoritam može prikazati na sljedeći način:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) = \{Y, Y \cup \{n\} : Y \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n-1\})\} \text{ za } n > 0$$

Na sličan način, koristeći rekurzivne relacije

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$,
- $n! = n(n-1)!$,

$$\bullet B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k},$$

možemo konstruirati algoritme za k -podskupove, permutacije i particije.

Ali postoji problem s ovim pristupom: čak i za nevelike vrijednosti broja n , broj objekata je vrlo velik, te može biti toliko velik da ne stane u memoriju. Ono što trebamo su algoritmi koji generiraju jedan po jedan objekt, dakle nerekurzivno. Takvi algoritmi će imati ovakav oblik:

Generiraj prvi objekt
 PONAVLJAJ
 ► procesiraj dani objekt
 ► generiraj novi objekt SVE DOK nisu izgenerirani svi objekti

Važno je primjetiti da ovakav algoritam pretpostavlja da objekti imaju nekakav poredak (uređaj), tj. sam algoritam generira neki poredak (uređaj) objekata.

Za podskupove jedan nerekurzivni algoritam je opisan sljedećim kôdom:

Prvi podskup je $Y = \emptyset$
 SLJEDEĆI PODSKUP poslije Y
 ► nađi zadnji element i koji nije u Y (gledajući od kraja)
 ► ukoliko nema takvog objekta, onda je Y zadnji podskup
 ► izbaci iz Y sve elemente poslije i , dodaj i u Y , te vrati ovaj skup

Primjer 1.7.1 Za $\{1, 2, 3\}$ generirani skupovi će biti redom $\emptyset, \{3\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$.

Drugi način generiranja podskupova je da iskoristimo drugu verziju dokaza teorema 1.2.1: za svaki broj N između 0 i $2^n - 1$, napišimo broj N u bazi 2, dani zapis interpretirajmo kao niz (a_1, \dots, a_n) , te kreirajmo podskup $Y = \{j : a_j = 1\}$. Ovaj postupak ima dodatnu prednost što nam omogućava „slučajan pristup” podskupovima; nismo ovisni o njihovom poretku.

Važno je uočiti da ova dva algoritma ne kreiraju isti poredak podskupova.

U slučaju k -podskupova postoje dva „prirodna” uređaja. Npr. za $n = 5, k = 3$:

123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345
 123, 124, 134, 234, 125, 135, 235, 145, 245, 345

Prvi niz možemo generirati sljedećim algoritmom (za $k = 3, n$ proizvoljan):

ZA i IZ $(1, \dots, n - 2)$
 ZA j IZ $(i + 1, \dots, n - 1)$
 ZA j IZ $(i + 1, \dots, n - 1)$
 ZA l IZ $(j + 1, \dots, n)$
 ► procesiraj $\{i, j, l\}$

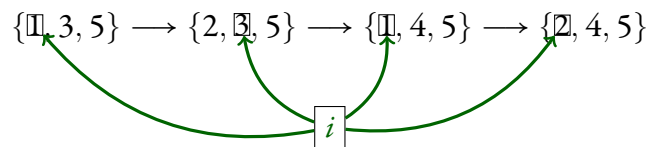
Problem s ovim algoritmom je što ovisi o izboru broja k (postoji kompliciranija verzija koja nema tu manu).

Drugi uređaj ima jednu prednost: najprije dolaze 3-podskupovi od $\{1, 2, 3, 4\}$ u njihovom prirodnom poretku, onda dolaze podskupovi koji sadrže 5, dobijeni tako da dodajemo 5 2-podskupovima od $\{1, 2, 3, 4\}$. Sljedeći algoritam opisuje generiranje k -podskupova u ovom poretku.

Prvi podskup je $Y = \{1, \dots, k\}$
 SLJEDEĆI PODSKUP poslije $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ (gdje je $y_1 < \dots < y_k$) je

- nađi prvi i takav da je $y_i + 1 \notin Y$
- povećaj y_i za 1, stavi $y_j = y_i$ za $j < i$ i vrati novi Y
- ovaj postupak propada ukoliko je $i = k, y_k = n$; u tom slučaju $Y = \{n - k + 1, \dots, n\}$ je zadnji skup

Primjer 1.7.2



Prvi poredak nazivamo **leksikografskim** poretkom: ukoliko simbole $1, \dots, n$ shvatimo kao slova alfabet, a svaki k -podskup kao riječ, onda prvi poredak odgovara leksikografskom uređaju. Drugi poredak nazivamo **obrnutim leksikografskim** poretkom: opet simbole $1, \dots, n$ shvatimo kao slova alfabet, ali u obrnutom poretku (npr. $5 \rightarrow a, 4 \rightarrow b, 3 \rightarrow c, 2 \rightarrow d, 1 \rightarrow e$), obrnemo ih, te ih upišemo u rječnik u obrnutom redoslijedu.

	abc	abd	abe	acd	ace	ade	bcd	bce	bde	cde
Primjer 1.7.3	543	542	541	532	531	521	432	431	421	321
	345	245	145	235	135	125	234	134	124	123

I za permutacije postoji više „prirodnih” poredaka. Sljedeći algoritam generira permutacije u leksikografskom poretku:

Prva permutacija je dana s $x_i = i, i = 1, \dots, n$
 SLJEDEĆA PERMUTACIJA poslije (x_1, \dots, x_n) je

- nađi najveći j za koji je $x_j < x_{j+1}$ (idući od kraja)
- ako takav j ne postoji, gotovi smo
- izmjeni vrijednost od x_j s vrijednošću najmanjeg x_k koji je veći od x_j uz $k > j$
- obrni niz vrijednosti od x_{j+1}, \dots, x_n i vrati permutaciju

Kako točno radi ovaj algoritam?

Prva dva koraka j je najmanji indeks takav da smo već generirali sve permutacije koje počinju s (x_1, \dots, x_j, \dots) . Dakle, sljedeća permutacija će povećati vrijednost od x_j .

Zadnja dva koraka Budući $x_{j+1} > \dots > x_n$, element x_k je najmanji element veći od x_j koji može doći poslije x_1, \dots, x_{j-1} u permutaciji. Prije promjene imamo

$$x_{j+1} > \dots > x_{k-1} > x_k > x_j > x_{k+1} > \dots > x_n,$$

a poslije promjene imamo

$$x_{j+1} > \dots > x_{k-1} > x_j > x_k > x_{k+1} > \dots > x_n.$$

Primjer 1.7.4 Neka je trenutna permutacija $(4, 3, 6, 5, 2, 1)$. Algoritam prvo nalazi $j = 2$, $x_j = 3$. Trenutna permutacija je zadnja (u leksikografskom poretku) od permutacija oblika $(4, 3, \dots)$, te treba slijediti prva oblika $(4, 5, \dots)$, tj. $(4, 5, 1, 2, 3, 6)$. Zaista, algoritam nalazi $k = 4$, $x_k = 5$ (kako su vrijednosti poslije x_j opadajuće, možemo ići od kraja tražeći prvi broj veći od x_j). Tada zamjenimo vrijednosti na drugoj i četvrtoj poziciji, što nam daje $(4, 5, 6, 3, 2, 1)$; te konačno obrnemo vrijednosti na pozicijama od 3 do 6, što nam daje $(4, 5, 1, 2, 3, 6)$.

Primjer 1.7.5

$$\begin{aligned} 12 \underset{3}{4} &\longrightarrow 1243 \\ 1 \underset{2}{4} 3 &\longrightarrow 1342 \longrightarrow 1324 \\ 13 \underset{2}{4} &\longrightarrow 1342 \\ 1 \underset{3}{4} 2 &\longrightarrow 1432 \longrightarrow 1423 \end{aligned}$$

Napomena: Ovaj algoritam vrijedi i za permutacije multiskupova, a poznavali su ga još u staroj Indiji (Nārāyaṇa Paṇḍita, 14. stoljeće).

Leksikografski poredak se obično generira sljedećim algoritmom:

1. Nađi najveći j takav da se x_j može povećati.
2. Povećaj x_j , ali što je moguće manje.
3. Nađi leksikografski „najkraći” način da se x_1, \dots, x_j nadopuni.

Što učiniti ako želimo doći do npr. 2092-te permutacije (u leksikografskom poretku) brojeva $1, \dots, 9$?

Pretpostavimo da je prvi broj u permutaciji 1 (najmanji koji imamo). Ostaje nam 8 brojeva. Kako se maksimalna permutacija koja počinje s 1 nalazi na 40320-om mjestu ($8! = 40320$), a $2092 < 40320$, znamo da se u našoj permutaciji na prvom mjestu nalazi 1.

Sada stavimo sljedeći najmanji broj na drugo mjesto, dakle 2. Maksimalna permutacija koja počinje s $(1, 2, \dots)$ zauzima 5040-to mjesto. Budući je $2092 < 5040$, 2 se zaista nalazi na drugom mjestu u našoj permutaciji. Sada stavimo 3 na treće mjesto. Maksimalna permutacija koja počinje s $(1, 2, 3, \dots)$ se nalazi na 720-om mjestu. Kako je $2092 > 720$, to znači da je permutacija na 2092-om mjestu „veća” od svih permutacija koje počinju s $(1, 2, 3, \dots)$.

Stoga zamijenimo 3 s 4. Maksimalna permutacija koja počinje s $(1, 2, 4, \dots)$ se nalazi na mjestu $720 + 720 = 1440$, što je i dalje manje od 2092. Zato umjesto 4 stavimo 5. Maksimalna permutacija koja počinje s $(1, 2, 5, \dots)$ se nalazi na mjestu broj $1440 + 720 = 2160$, što je veće od 2092. Dakle, naša permutacija počinje s $(1, 2, 5, \dots)$.

Stavljajući minimalni slobodan broj u našu permutaciju, dolazimo do permutacije koja počinje s $(1, 2, 5, 3, \dots)$. Maksimalna permutacija koja tako počinje se nalazi na mjestu broj $1440 + 5! = 1570$, stoga zamijenimo 3 s 4, što nas dovodi do maksimalne pozicije broj $1440 + 120 + 120 = 1690$. Kako smo dobili broj koji je i dalje manji od 2092, umjesto 4 stavljamo 6, što nam daje maksimalnu poziciju broj 1810. Stavljajući umjesto 6 broj 7, dolazimo do maksimalne pozicije broj 1930. Kako i 8 daje broj koji je manji od 2092, stavljamo na koncu 9, i dobijamo maksimalnu poziciju broj 2170, što znači da naša permutacija počinje s $(1, 2, 5, 9, \dots)$.

Nastavljanjem ovog postupka, stižemo do permutacije $(1, 2, 5, 9, 6, 3, 7, 8, 4)$.

Zadatak 1.14

Probajte obrazložiti gornji „algoritam”.

Rekurzije, funkcije izvodnice i formula uključivanja–isključivanja

2

2.1 Uvod

U ovom poglavlju ćemo proučavati tri važne tehnike koje se često koriste pri rješavanju kombinatornih problema.

Rekurzivna relacija izražava vrijednost funkcije f u točki n , $n \in \mathbb{N}$ u terminima vrijednosti funkcije f u točkama k , $k < n$. Jedan jednostavan primjer smo već vidjeli: broj $F(n)$ podskupova n -skupa zadovoljava relaciju $F(n+1) = 2F(n)$. Ova relacija, zajedno s početnom vrijednosti $F(0) = 1$, jedinstveno određuje vrijednost od $F(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Korištenje funkcija izvodnica je često povezano s rekurzivnim relacijama, ali su takve funkcije i drugdje vrlo korisne. **Funkcija izvodnica** je formalni red potencija čiji su koeficijenti članovi nekog brojevnog niza. Osnovnu ideju ćemo ilustrirati na prethodnoj rekurziji. Definiramo (formalno) funkciju $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n)t^n$. Tada je

$$2t\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2F(n)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n+1)t^{n+1} = \varphi(t) - 1.$$

Dakle, $\varphi(t) = \frac{1}{1-2t}$. Ova funkcija ima (geometrijski) razvoj $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2t)^n$. Usporedimo li ovaj red s početnim, slijedi $F(n) = 2^n$. Kako red $\sum_{n=0}^{\infty} (2t)^n$ konvergira za $|t| < 1/2$, naša manipulacija je bila korektna.

Pretpostavimo da je zadana familija skupova, te da je dan broj elemenata koji se nalaze u presjeku bilo koje moguće podfamilije. Tada imamo dovoljno podataka da izračunamo koliko elemenata se ne nalazi ni u jednom od skupova zadane familije skupova. **Formula uključivanja–isključivanja**, skraćeno FUI (eng. PIE) je formula za izračunavanje tog broja. U najjednostavnijem slučaju FUI se svodi na sljedeću skupovnu relaciju:

$$|X \setminus (A \cup B)| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

2.2 Fibonaccijevi brojevi

U 13. stoljeću je talijanski matematičar Leonardo da Pisa, zvan Fibonacci, proučavao sljedeći (nerealističan) problem.

Seljak uzgaja zečeve. Svaki par zečeva, starih barem dva mjeseca, dobiju svakog mjeseca par mladih: zeca i zečicu. Zečevi nikad ne umiru. Ako na početku krećemo s jednim novorođenim parom, koliko će biti ukupno parova zečeva nakon n mjeseci?

Za male vrijednosti od n možemo lako izračunati traženi broj. Za općeniti n možemo ovako razmišljati: broj novih parova je jednak broju parova koji su mjesec dana prije imali barem dva mjeseca. Ukoliko s F_n označimo broj parova u n -tom mjesecu, onda iz prethodnog razmišljanja slijedi rekurzivna formula

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (2.1)$$

Kako znamo da je $F_1 = F_2 = 1$, možemo izračunati F_n , za bilo koji n . Zgodno je definirati $F_0 = 0$, tako da (2.1) vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Brojeve F_n zovemo Fibonaccijevim brojevima (ime im je dao francuski matematičar Lucas).

Fibonaccijevi brojevi su jako česti u matematici, a naročito u kombinatorici. Na primjer, promotrimo sljedeći problem. Na koliko načina se može prirodni broj n zapisati kao suma jedinica i dvojki?

Označimo s J_n taj broj. Očito je $J_1 = 1, J_2 = 2, J_3 = 3$. Neka je $n \geq 2$. Svaki rastav od n mora završavati s 1 ili 2. Ako završava s 1, preostali brojevi daju $n - 1$, a ako završava s 2 preostali brojevi daju $n - 2$. Dakle, $J_n = J_{n-1} + J_{n-2}$. Ukoliko definiramo $J_0 = 1$, opet dobijemo Fibonaccijeve brojeve (pomaknute za jedno mjesto, tj. $J_n = F_{n+1}$).

Formula za Fibonaccijeve brojeve je jedan primjer rekurzivne relacije, točnije, tročlane rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima. Općenito, $(k + 1)$ -člana rekurzivna relacija (ili kraće rekurzija), izražava vrijednost $F(n)$ funkcije F u terminima k prethodnih vrijednosti $F(n - 1), F(n - 1), \dots, F(n - k)$; koja je linearna ukoliko ima oblik

$$F(n) = a_1(n)F(n - 1) + a_2(n)F(n - 2) + \dots + a_k(n)F(n - k),$$

a s konstantnim koeficijentima ukoliko su a_1, \dots, a_k konstantne funkcije.

ČINJENICA: Funkcija koja zadovoljava $(k + 1)$ -članu rekurziju je jedinstveno određena svojim vrijednostima u prvim k prirodnih brojeva.

Fibonaccijevi brojevi zadovoljavaju cijeli niz identiteta koji se obično dokazuju matematičkom indukcijom.

Propozicija 2.2.1 *Vrijede sljedeće relacije:*

$$(a) \sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1,$$

$$(b) \sum_{k=0}^n F_{2k+1} = F_{2n+2},$$

$$(c) F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}.$$

Dokaz: Identitete (a) i (b) se jednostavno dokazuju korištenjem matematičke indukcije, dok je dokaz relacije (c) nešto složeniji. Najprije raspišemo lijevu stranu relacije (c).

$$\begin{aligned} F_n^2 + F_{n-1}^2 &= (F_{n-1} + F_{n-2})^2 + F_{n-1}^2 = F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + 2F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-1}^2 \\ &= F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + F_{n-1}(F_{n-2} + F_{n-1}) + F_{n-1}F_{n-2} \\ &= F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + F_n F_{n-1} + F_{n-1}F_{n-2}. \end{aligned}$$

Oдавde vidimo da nam, da bi smo iskoristili princip matematičke indukcije, treba i relacija

$$F_n F_{n-1} + F_{n-1} F_{n-2} = F_{2n-2}.$$

Sada ćemo simultano dokazati ove dvije relacije koristeći matematičku indukciju. Baze se lako provjere. Pretpostavimo sada da vrijedi

$$F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 = F_{2n-3} \quad \text{i} \quad F_n F_{n-1} + F_{n-1} F_{n-2} = F_{2n-2}.$$

Tada

$$\begin{aligned} F_n^2 + F_{n-1}^2 &= F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + F_n F_{n-1} + F_{n-1} F_{n-2} = F_{2n-3} + F_{2n-2} \\ &= F_{2n-1}, \\ F_{n+1} F_n + F_n F_{n-1} &= (F_n + F_{n-1}) F_n + (F_{n-1} + F_{n-2}) F_{n-1} \\ &= F_n^2 + F_{n-1}^2 + F_{n-1} F_n + F_{n-2} F_{n-1} = F_{2n-1} + F_{2n-2} \\ &= F_{2n}. \end{aligned} \quad \square$$

Pogledajmo sada kako možemo riješiti rekurziju za Fibonaccijeve brojeve. Dati ćemo dvije metode, koje ćemo kasnije generalizirati.

Prva metoda: Kako je naša rekurzija linearna, ukoliko nađemo neka rješenja, tada će i njihova linearna kombinacija opet biti rješenje.

Zaista, neka F i G zadovoljavaju rekurziju. Definiramo $H_n = aF_n + bG_n$. Tada

$$\begin{aligned} H_n &= a(F_{n-1} + F_{n-2}) + b(G_{n-1} + G_{n-2}) = (aF_{n-1} + bG_{n-1}) + (aF_{n-2} + bG_{n-2}) \\ &= H_{n-1} + H_{n-2}. \end{aligned}$$

Vrijednosti od a i b možemo odabrati tako što iskoristimo početne vrijednosti od F .

No kako naći bilo kakvo rješenje naše rekurzije?

Probajmo se malo igrati kalkulatorom. Znamo da Fibonaccijevi brojevi brzo rastu. Ali koliko brzo? Izračunajmo omjere susjednih Fibonaccijevih brojeva:

$$\frac{1}{1} = 1, \frac{2}{1} = 2, \frac{3}{2} = 1.5, \frac{5}{3} = 1.6, \frac{8}{5} = 1.6, \frac{13}{8} = 1.625, \frac{21}{13} = 1.615, \frac{34}{21} = 1.619 \dots, \frac{55}{34} = 1.617 \dots, \frac{89}{55} = 1.618 \dots, \frac{144}{89} = 1.617 \dots, \frac{233}{144} = 1.618 \dots, \frac{377}{233} = 1.618 \dots$$

Izgleda da je taj omjer približno 1.618, ako ignoriramo prvih nekoliko vrijednosti. To znači da se Fibonaccijevi brojevi ponašaju (otprilike) kao geometrijski niz. Stoga je razumno probati s $F_n = c\alpha^n$.

Iz rekurzije (2.1) slijedi $\alpha^{n-1}(\alpha^2 - \alpha - 1) = 0$. Rješenja kvadratne jednadžbe $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ su $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Kako i $F_n^1 = c_1\alpha_1^n$ i $F_n^2 = c_2\alpha_2^n$ zadovoljavaju rekurziju, to je i $F_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n$ rješenje rekurzije (2.1). Uvrštavanjem početnih uvjeta $F_0 = 0, F_1 = 1$ slijedi $c_1 + c_2 = 0, c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 1$, odakle slijedi $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Stoga

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Napomena: Vrijedi $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618 \dots$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618 \dots$. Dakle, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ je dominantan član.

Druga metoda: Definiramo funkciju φ pomoću reda potencija $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} t\varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} t^n, \\ t^2\varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} t^n. \end{aligned}$$

Kako je $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, „skoro” pa da vrijedi $\varphi(t) = (t + t^2)\varphi(t)$. Lako se provjeri da vrijedi $(t + t^2)\varphi(t) = \varphi(t) - t$, dakle $\varphi(t) = \frac{t}{1-t-t^2}$.

Sada rastavimo $\frac{t}{1-t-t^2}$ na parcijalne razlomke. Neka je $1 - t - t^2 = (1 - \alpha t)(1 - \beta t)$. Tada su α i β rješenja jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$, dakle $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Sljedeći korak je da nađemo koeficijente a i b tako da vrijedi

$$\frac{t}{1-t-t^2} = \frac{a}{1-\alpha t} + \frac{b}{1-\beta t}.$$

Standardnim postupkom dolazimo do $a = \frac{1}{\sqrt{5}}, b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Dakle,

$$\varphi(t) = \frac{a}{1-\alpha t} + \frac{b}{1-\beta t} = a \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n t^n + b \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a\alpha^n + b\beta^n) t^n.$$

Uspoređivanjem koeficijenata u dva rastava funkcije φ u red potencija slijedi

$$F_n = a\alpha^n + b\beta^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

2.3 Linearne rekurzije

Procedura za rješavanje opće linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima je slična onoj za Fibonaccijeve brojeve. Promotrimo rekurziju

$$F(n) = a_1 F(n-1) + a_2 F(n-2) + \dots + a_k F(n-k). \quad (2.2)$$

Kao i kod Fibonaccijevih brojeva, pokušajmo naći rješenje oblika $F(n) = \alpha^n$. Uvrštavanjem slijedi da α mora biti korijen jednadžbe

$$x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \dots - a_k = 0. \quad (2.3)$$

Jednadžbu (2.3) zovemo **karakterističnom jednadžbom** pridruženoj (2.2).

Ukoliko ova jednadžba ima k različitih realnih korijena, dobivamo k nezavisnih rješenja rekurzije. Uzimanjem njihove linearne kombinacije, i ubacivanjem k početnih vrijednosti od F , dobivamo k linearnih jednadžbi s k nepoznanica, koje imaju jedinstveno rješenje (kao što ste vidjeli na kolegiju Linearna algebra 1). Time smo dobili traženo rješenje.

No ukoliko se neki korijeni ponavljaju (zanemarit ćemo slučaj nerealnih korijena), nećemo dobiti odgovarajući broj rješenja. U tom slučaju radimo sljedeće. Neka je, na primjer, α korijen kratnosti d . Tada se može lako provjeriti da d funkcija $n \mapsto \alpha^n$, $n \mapsto n\alpha^n$, ..., $n \mapsto n^{d-1}\alpha^n$ zadovoljava rekursiju (2.2). Na taj način dolazimo do traženog broja (partikularnih) rješenja.

Općenito, nema jednostavne formule za rješenje linearne rekurzije. No ako je rekursija oblika

$$F(n) = a_1F(n-1) + a_2F(n-2) + \dots + a_kF(n-k) + g(n),$$

onda znamo da se opće rješenje može dobiti kao suma općeg rješenja pripadne homogene rekurzije (2.2) i nekog partikularnog rješenja (analogno situaciji kod rješenja nehomogenog sustava linearnih jednadžbi). Ukoliko je g polinom, onda će partikularno rješenje biti oblika: rj. hom. rekurzije + polinom.

Primjer 2.3.1 (Hanojski tornjevi) Imamo n kolutova, različitih veličina, koji se nalaze poslagani na štapu, od najvećeg prema najmanjem, s tim da je najveći na dnu. Imamo još dva štapa, i želimo sve kolutove prebaciti na drugi štap, jedan po jedan, tako da kolutovi budu u istom rasporedu. Ni u jednom trenutku ni jedan kolut ne smije biti smješten iznad manjeg koluta. Pitanje je koji je minimalan potreban broj koraka?

Drveni model Hanojskih tornjeva za $n = 8$ možete vidjeti na slici 2.1.

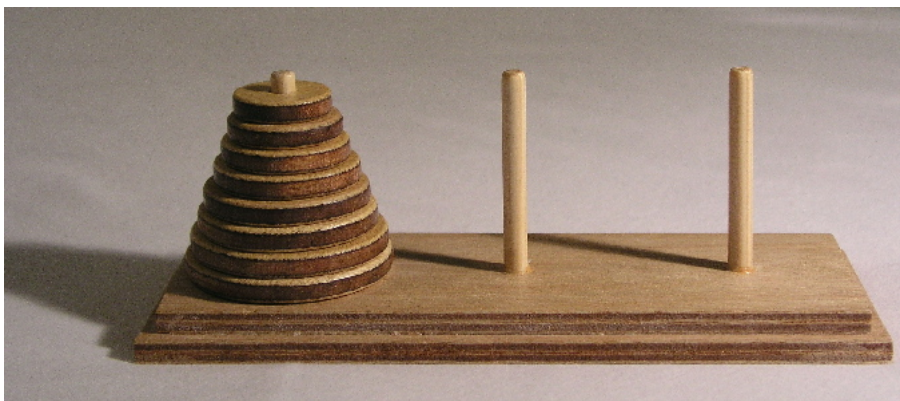
Označimo s a_n traženi broj koraka za n kolutova. Očito je $a_1 = 1$. Nadalje, $a_2 = 3$: prebacimo prvi kolut na drugi štap, drugi kolut na treći štap, a onda manji kolut prebacimo na veći.

A za proizvoljan n ? Jasno je da bi smo mogli pomaknuti najmanji kolut, treba nam jedan prazan štap, što znači da smo svih $n-1$ ostalih kolutova pomakli na drugi štap. Da bi smo došli u ovu fazu, treba nam a_{n-1} koraka. Tada pomaknemo najveći kolut na slobodni štap, i onda nam još treba a_{n-1} koraka da stavimo $n-1$ ostalih kolutova na najveći kolut.

Dakle, $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

Rješenje pripadne homogene rekurzije je očito $c2^n$. Trebamo još naći neko partikularno rješenje. Probajmo s $a_n = c2^n + b$. Uvrštavanjem slijedi $b = -1$, a iz $a_1 = 1$ slijedi $c = 1$. Dakle, $a_n = 2^n - 1$.

Ovaj problem je povezan s legendom o vijetnamskom ili indijskom hramu u kojem svećenici prebacuju 64 zlatna diska s jednog stupa na drugi po gore opisanim pravilima.



Slika 2.1: Hanojski tornjevi

Legenda kaže da će u trenutku kada dovrše proces doći do smaka svijeta. Uz pretpostavku da se jedno prebacivanje može napraviti za jednu sekundu, proces bi trajao otprilike $5.82 \cdot 10^{11}$ godina. Više o problemu Hanojskih tornjeva možete pročitati u Wikipedijinom članku http://en.wikipedia.org/wiki/Towers_of_hanoi.

Primjer 2.3.2 (Deranžmani) Deranžman nekog skupa je permutacija tog skupa koja nema fiksnih točaka.

Neka je $d(n)$ broj deranžmana skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Svaki deranžman broj n preslikava u neki broj $i < n$. Očito je da se isti broj deranžmana dobije za svaku vrijednost od i ($1 \leq i \leq n - 1$), stoga možemo doći do $d(n)$ tako da izračunamo broj deranžmana koji preslikavaju n u i , te taj broj pomnožimo s $n - 1$. Neka je π deranžman takav da je $\pi(n) = i$. Tada imamo dva slučaja:

1. slučaj: $\pi(i) = n$, tj. i i n se zamjenjuju. Tada se π na ostatku skupa opet ponaša kao deranžman. Dakle, takvih deranžmana ima $d(n - 2)$.

2. slučaj: $\pi(i) \neq n$; recimo $\pi(j) = n, j \neq i$. Definiramo permutaciju π' na $\{1, \dots, n - 1\}$ formulom

$$\pi'(k) = \begin{cases} \pi(k), & k \neq j, \\ i, & k = j. \end{cases}$$

Permutacija π' je opet deranžman. S druge strane, svaki deranžman π' skupa $\{1, \dots, n - 1\}$ se može „proširiti” do deranžmana skupa $\{1, \dots, n\}$ na sljedeći način:

$$\pi(k) = \begin{cases} \pi'(k), & k \text{ takav da je } \pi'(k) \neq i, \\ i, & k = n, \\ n, & k \text{ takav da je } \pi'(k) = i. \end{cases}$$

Dakle, takvih deranžmana ima $d(n - 1)$.

Dobili smo rekurziju

$$d(n) = (n - 1)(d(n - 1) + d(n - 2)). \quad (2.4)$$

Početne vrijednosti za ovu rekurziju su $d(1) = 0, d(2) = 1$.

Teorem 2.3.3 *Broj deranžmana n -skupa je dan formulom*

$$d(n) = n! \left(\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right) = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Napomena: U teoremu 2.3.3 $\lfloor \cdot \rfloor$ je oznaka za najbliži cijeli broj.

Dokaz: Da bi smo dokazali teorem, trebamo pokazati da funkcija $f(n) = n! \left(\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right)$ zadovoljava rekurziju za $d(n)$ i pripadne početne uvjete.

Lako se provjeri $f(1) = 0, f(2) = 1$. Nadalje

$$\begin{aligned} (n-1)(f(n-1) + f(n-2)) &= (n-1)(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} + (n-1)(n-2)! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!} \\ &= (n-1)(n-2)! ((n-1) + 1) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + (n-1)(n-1)! \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= n! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^n (n-1) = n! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^{n-1} \frac{n!}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{n!}{n!} = f(n). \end{aligned}$$

Još treba dokazati drugu jednakost u (2.5):

$$\left| d(n) - \frac{n!}{e} \right| = n! \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right| < n! \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

(Red $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$ alternira i opadajući je pa apsolutnoj vrijednosti; stoga je razlika između n -tog člana i sume reda manja od $(n+1)$ -og člana.) \square

No kako smo uopće došli do formule (2.5)?

Krenimo od rekurzije (2.4) koju možemo zapisati u obliku

$$d(n) - nd(n-1) = -(d(n-1) - (n-1)d(n-2)).$$

Iteriranjem ove relacije slijedi

$$\begin{aligned} d(n) - nd(n-1) &= -(d(n-1) - (n-1)d(n-2)) \\ &= (-1)^2(d(n-2) - (n-2)d(n-3)) \\ &= \dots \\ &= (-1)^{n-2}(d(2) - 2d(1)) = (-1)^{n-2} \\ &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Dakle

$$d(n) - nd(n-1) = (-1)^n.$$

Oдавде slijedi

$$\frac{d(i)}{i!} - \frac{d(i-1)}{(i-1)!} = \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Sumiranjem gornje relacije po svim i od 2 do n , dobijamo

$$\frac{d(n)}{n!} - \frac{d(1)}{1!} = \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Primjer 2.3.4 (Involucije) Koliko ima permutacija n -skupa sa svojstvom da su svi pripadni ciklusi duljine 1 ili 2?

Označimo taj broj sa $s(n)$. Lako se vidi da vrijedi $s(3) = 4$ (takve permutacije su $(1)(2)(3)$, $(12)(3)$, $(13)(2)$, (123)), $s(2) = 2$, $s(1) = 1$.

Opet ćemo takve permutacije podijeliti u dvije klase:

A one kojima je n fiksna točka, i

B one kojima n nije fiksna točka.

Involucija u klasi **A** ima očito $s(n-1)$. Za involucije u klasi **B** razmišljamo na sljedeći način. Ako takva permutacija preslikava n u i , tada, po pretpostavci, sadrži ciklus $(i n)$, a na preostalih $n-2$ brojeva djeluje kao permutacija s ciklusima duljine 1 ili 2. Kako postoji $n-1$ izbora za i , takvih permutacija ima $(n-1)s(n-2)$.

Dakle, rekurzija za $s(n)$ je

$$s(n) = s(n-1) + (n-1)s(n-2).$$

Propozicija 2.3.5 Vrijedi

(a) broj $s(n)$ je paran za $n \geq 2$,

(b) $s(n) > \sqrt{n!}$ za $n \geq 2$.

Dokaz: Obje tvrdnje ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Za bazu uzimamo $n = 2, 3$. Lako se provjeri da su u oba slučaja baze zadovoljene.

(a) Pretpostavimo da su $s(n-1)$ i $s(n-2)$ parni brojevi. Tada je broj $s(n)$ očito paran.

(b) Pretpostavimo da vrijedi $s(n-1) > \sqrt{(n-1)!}$ i $s(n-2) > \sqrt{(n-2)!}$. Tada

$$\begin{aligned} s(n) &= s(n-1) + (n-1)s(n-2) > \sqrt{(n-1)!} + (n-1)\sqrt{(n-2)!} \\ &= \sqrt{(n-1)!} \left(1 + \sqrt{n-1}\right) > \sqrt{(n-1)!}\sqrt{n} = \sqrt{n!}. \end{aligned}$$

(Relacija $1 + \sqrt{n-1} > \sqrt{n}$ slijedi iz $(1 + \sqrt{n-1})^2 = n + 2\sqrt{n-1}$.)

□

Napomena: (b) je prilično dobra ocjena.

2.4 Funkcije izvodnice

S redovima koji će se javljati pri korištenju funkcija izvodnica baratati ćemo isključivo kao s formalnim redovima potencija, tj. neće nas zanimati pitanje konvergencije redova. Također, koristiti ćemo operacije zbrajanja, množenja, integriranja i deriviranja redova koristeći sljedeće formule:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n \right), \\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right), \text{ gdje su } c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}, \\ \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n, \\ \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} t^n. \end{aligned}$$

Primjer 2.4.1 Odredite funkcije izvodnice za sljedeće nizove:

- a) $a_n = 1$,
- b) $a_n = n$,
- c) $a_n = 3n + 5$,
- d) $a_n = 2^n$,
- e) $a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ paran,} \\ 1, & n \text{ neparan.} \end{cases}$,
- f) $a_n = \frac{1}{n+2}$.

Rješenje: a) U ovom slučaju formulu za funkciju izvodnica direktno dobijemo korištenjem formule za sumu geometrijskog reda: $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
b) Funkcija izvodnica je dana redom $f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$. Krenut ćemo od geometrijskog reda (tj. reda iz a) dijela), koji ćemo najprije derivirati, te potom pomnožiti s x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \implies \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \implies \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} = f_2(x).$$

c) Očito za traženu funkciju izvodnicu $f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 5)x^n$ vrijedi
 $f_3(x) = 3f_2(x) + 5f_1(x) = \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{5}{1-x}$.

d) I ovdje ćemo se poslužiti geometrijskim redom:

$$f_4(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}.$$

e) I ovdje se postupak svodi na korištenje formule za sumu geometrijskog reda:

$$f_5(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{x}{1-x^2}.$$

f) Opet krećemo od geometrijskog reda, koji ćemo najprije pomnožiti s x , potom integrirati (po x), te na koncu podijeliti s x^2 :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} &\implies \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \int \frac{x}{1-x} dx = -x - \ln(1-x) \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{x - \ln(1-x)}{x^2}. \quad \square\end{aligned}$$

Primjer 2.4.2 Nađite funkciju izvodnicu za niz (a_n) koji zadovoljava rekurzivnu relaciju $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 5^n$, uz početne uvjete $a_0 = 0, a_1 = 1$. Uz pomoć funkcije izvodnice nađite formulu za opći član niza (a_n) .

Rješenje: Definiramo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Lako se vidi da vrijedi $xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$, $x^2 f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$. Stoga

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2}) x^n = f(x) - a_0 - a_1 x - 5(xf(x) - a_0 x) + 6x^2 f(x) = f(x)(1 - 5x + 6x^2) - x.$$

S druge strane

$$\sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (5x)^n = (5x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \frac{25x^2}{1-5x}.$$

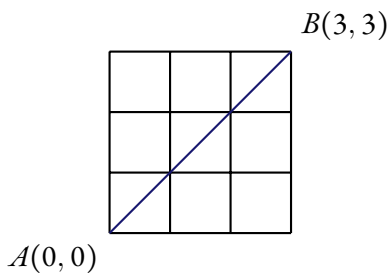
Dakle vrijedi $f(x)(1 - 5x + 6x^2) - x = \frac{25x^2}{1-5x}$, odakle slijedi $f(x) = \frac{20x^2 + x}{(1-5x)(1-5x+6x^2)}$.

Rastavimo funkciju f na parcijalne razlomke: $f(x) = \frac{A}{1-5x} + \frac{B}{1-2x} + \frac{C}{1-3x}$ (budući $1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x)$). Standardnim postupkom dobijamo $A = \frac{25}{6}, B = \frac{22}{3}, C = -\frac{23}{2}$, dakle $f(x) = \frac{25}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n + \frac{22}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - \frac{23}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$, što povlači $a_n = \frac{25}{6} 5^n + \frac{22}{3} 2^n - \frac{23}{2} 3^n$. \square

Catalanovi i Bellovi brojevi će nam poslužiti kao ilustracije upotrebe funkcija izvodnica u kombinatorici.

2.4.1 Catalanovi brojevi

Catalanovi brojevi se javljaju pri prebrojavanju zapanjujuće mnogo kombinatornih objekata. Jedan od problema gdje se javljaju Catalanovi brojevi je sljedeći.



Na koliko različitih načina možem doći od A do B , koristeći se crtama, tako da uvijek idemo desno ili gore, te tako da se nikad ne prelazi dijagonalu AB ?

Drugi problem gdje se javljaju Catalanovi brojevi je sljedeći. Na koliko načina možemo napisati sumu od n članova korištenjem zagrada, a tako da sumu možemo izračunati zbrajanjem po dva člana u svakom koraku? Na primjer, za $n = 4$ imamo pet mogućnosti: $((a + b) + c) + d$, $((a + (b + c)) + d)$, $(a + ((b + c) + d))$, $(a + (b + (c + d)))$ i $((a + b) + (c + d))$. (U slučaju algebarskih sustava koji nisu asocijativni, ovi izrazi bi u pravilu imali različite vrijednosti.)

Riješimo najprije ovaj problem, pa ćemo se onda vratiti na problem broja puteva.

Neka je Z_n traženi broj. Svaki izraz u zagradi ima oblik $(E_1 + E_2)$, gdje su E_1 i E_2 izrazi u zagradama koji imaju (recimo) k i $n - k$ članova, za neki $1 \leq k \leq n - 1$. Postoji Z_k mogućnosti za E_1 i Z_{n-k} za E_2 . Zbrajanjem po svim mogućim k -ovima dolazimo do sljedeće (nelinearne) rekurzije:

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n-1} Z_k Z_{n-k}, \quad n \geq 2.$$

Vratimo se na problem puteva.

Odgovor na pitanje je 5, a ti putevi su: $DGDGDG$, $DGDDGG$, $DDGGDG$, $DDGDGG$, $DDGGGG$, gdje je D oznaka za „desno”, a G za „gore”.

Što je s brojem „desno—gore” puteva u kvadratu $n \times n$ koji se nalaze ispod dijagonale? Označimo taj broj puteva s p_n . Svaki „dobar” put od $A(0, 0)$ do $B(n, n)$ mora „dotaći” dijagonalu barem jedanput (u A) prije dolaska u točku B . Pretpostavimo da je $C(m, m)$ točka u kojoj je put zadnji put dotakao dijagonalu prije dolaska u točku B . Očito je $0 \leq m < n$. Postoji p_m mogućnosti za izbor puta od A do C . Tada put mora doći do $D(m + 1, m)$, te na koncu doći do $E(n - 1, n - 1)$, ali ne smije otići iznad linije DE , jer inače C ne bi bila zadnja točka gdje se dotiče dijagonala. Kako su D i E nasuprotni vrhovi kvadrata sa stranicama duljine $n - m - 1$, postoji p_{n-m-1} „dobrih” puteva od D do E . Kako je $0 \leq m \leq n - 1$, slijedi

$$p_n = \sum_{m=0}^{n-1} p_m p_{n-m-1}. \quad (2.6)$$

Skicu gornjeg postupka možete pogledati na slici 2.2.

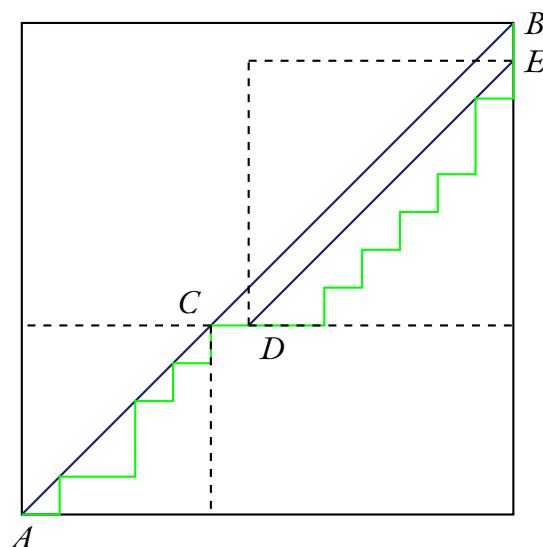
Koja je veza između p_n i Z_n ? Kako je $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^n Z_k Z_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} Z_{k+1} Z_{n-k}$, uz oznaku $C_k = Z_{k+1}$, slijedi $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$. Dakle, rekurzija za brojeve C_n je ista kao i za brojeve p_n . Kako je $C_1 = Z_2 = p_1 = 1$, $C_2 = Z_3 = p_2 = 2$, slijedi $C_n = Z_{n+1} = p_n$, i te brojeve zovemo **Catalanovim brojevima**. Konvencija je da definiramo $C_0 = 1$.

Nađimo sada formulu za C_n . Neka je $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$. Tada je

$$F^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad \text{gdje je } a_n = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} = C_{n+1}.$$

Ovdje smo iskoristili relaciju (2.6). Dakle,

$$tF^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} t^{n+1} = F(t) - 1,$$



Slika 2.2: broj „dobrih” puteva

tj. $tF^2(t) - F(t) + 1 = 0$. Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe slijedi

$$F(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4t}}{2t}.$$

Koji predznak odabrati? Znamo da vrijedi $F(0) = C_1 = 1$. Ako odaberemo $+$ predznak, tada vrijedi

$$\begin{aligned} 1 = F(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4t}}{2t} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{1 - \sqrt{1 - 4t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t}{2t(1 - \sqrt{1 - 4t})} = \infty. \end{aligned}$$

S druge strane, ako odaberemo $-$ predznak, dobijemo $\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = 1$. Dakle

$$F(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}.$$

Još nam ostaje razviti ovu funkciju u red. Ovdje ćemo se poslužiti **poopćenim binomnim teoremom**, koji kaže

$$(1 + t)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} t^n, \text{ za svaki } r \in \mathbb{R},$$

gdje je „binomni koeficijent” $\binom{r}{n}$ definiran s

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}, \text{ uz konvenciju } \binom{r}{0} = 1.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2t} (1 - (1 - 4t)^{1/2}) = \frac{1}{2t} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4t)^n \right) \\ &= \frac{1}{2t} \left(1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n 4^n t^n \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^{n+1} 4^n t^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n+1} (-1)^n 4^{n+1} t^n. \end{aligned}$$

Stoga

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2} \binom{1/2}{n+1} (-1)^n 4^{n+1} = \frac{1}{2} (-1)^n 4^{n+1} \frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - n)}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} (-1)^n 4^{n+1} \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{2} \right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2} \right) \\ &= (-1)^n 4^n \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} (-1)^n = \frac{1}{(n+1)!} 2^n (2n-1)!! \\ &= (\text{vidi Zadatak 2.3}) = \frac{1}{(n+1)!} 2^n \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{Dakle, } Z_n = C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}, p_n = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Zadatak 2.1

Korištenjem poopćenog binomnog teorema dokažite da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n.$$

Zadatak 2.2

Korištenjem poopćenog binomnog teorema dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-3/2}{n} x^n.$$

Zadatak 2.3

Dokažite $(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Gdje se još javljaju Catalanovi brojevi?

Na primjer, C_{n-2} je broj načina na koji možemo podijeliti konveksan n -terokut u trokute povlačeći $n-3$ međusobno nepresijecajućih dijagonala, što je prvi dokazao Euler. Za $n=5$ postoji $C_3 = 5$ načina:



2.4.2 Bellovi brojevi

Probajmo sada naći funkciju izvodnicu za Bellove brojeve.

Lako se vidi da se rekurzija (1.4) može i ovako napisati:

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i. \quad (2.7)$$

Definiramo $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n$. Ovdje se ispostavlja da uobičajeni „trikovi” ne prolaze. Stoga je potreban novi pristup: pomnožimo funkciju F s funkcijom $t \mapsto e^t$. Tada

$$\begin{aligned} F(t)e^t &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^n B_r \frac{1}{(n-r)!} \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{r=0}^n B_r \frac{n!}{(n-r)!} \right) t^n. \end{aligned}$$

Sada smo vrlo blizu situacije u kojoj bi mogli iskoristiti (2.7), ali nema načina da ubacimo nedostajući $r!$ u desnu stranu. Stoga, promijenimo malo pravila: ako ne možemo naći zatvorenu formulu za $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n$, probajmo naći zatvorenu formulu za $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$.

S novom funkcijom F dobivamo slijedeće

$$\begin{aligned} F(t)e^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{r=0}^n B_r \frac{n!}{r! (n-r)!} \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_r \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_{n+1} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{B_n}{n!} t^{n-1} = F'(t). \end{aligned}$$

Stoga $F'(t)/F(t) = e^t$, što povlači $\ln F(t) = e^t + C$, tj.

$$F(t) = e^{e^t + C}.$$

Iz $F(0) = B_0 = 1$ slijedi $C = -1$, dakle

$$F(t) = e^{e^t - 1}.$$

Funkcije izvodnice oblika $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ zovemo **eksponencijalnim funkcijama izvodnica** (EFI). EFI je zapravo funkcija izvodnica za niz $\frac{a_n}{n!}$.

Čemu uvoditi novu vrstu funkcija izvodnica? Ukoliko ne možemo naći običnu funkciju izvodnica, i EFI može dobro doći. Na primjer, iz

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n &= e^{e^t - 1} = e^{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r!}} = \prod_{r=1}^{\infty} e^{\frac{t^r}{r!}} = \prod_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^r}{r!} \right)^k \frac{1}{k!} \right) \\ &= \left(1 + \frac{t^1}{1!} + \left(\frac{t^1}{1!} \right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{t^1}{1!} \right)^3 \frac{1}{3!} + \dots \right) \times \left(1 + \frac{t^2}{2!} + \left(\frac{t^2}{2!} \right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{t^2}{2!} \right)^3 \frac{1}{3!} + \dots \right) \times \\ &\quad \times \left(1 + \frac{t^3}{3!} + \left(\frac{t^3}{3!} \right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{t^3}{3!} \right)^3 \frac{1}{3!} + \dots \right) \times \dots, \end{aligned}$$

uspoređujući koeficijente od t^n na objema stranama, slijedi

$$B_n = \sum_{1 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 + \dots + k \cdot r_k = n} \frac{n!}{(1!)^{r_1} r_1! (2!)^{r_2} r_2! \dots (k!)^{r_k} r_k!}.$$

Kao i za obične funkcije izvodnice, i kod eksponencijalnih funkcija izvodnica često pripadne redove deriviramo (npr. kao u slučaju Bellovih brojeva), integriramo, zbrajamo, množimo itd. Ulogu geometrijskog reda ovdje igra red $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Za eksponencijalnu funkciju izvodnicu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ vrijedi

$$f'(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n,$$

$$\int f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n!} x^n,$$

dakle, deriviranje i integriranje eksponencijalne funkcije izvodnice se svodi na pomak pripadnog niza za jedno mjesto ulijevo ili udesno.

Primjer 2.4.3 Odredite eksponencijalne funkcije izvodnice za sljedeće nizove:

- a) $a_n = n!$,
- b) $a_n = a^n$,
- c) $a_n = n^2$,
- d) $a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ neparan,} \\ 1, & n \text{ paran.} \end{cases}$

Rješenje: a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}$.

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n = e^{ax}$.

c) Uvrštavanjem dobijamo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n$. Da bi smo došli do zatvorene formule za f krenut ćemo od reda za eksponencijalnu funkciju, kojeg ćemo najprije derivirati, potom pomnožiti s x , ponovno derivirati, te na koncu opet pomnožiti s x :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x &\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x e^x \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x + x e^x \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{(n-1)!} = x e^x + x^2 e^x. \end{aligned}$$

Dakle, $f(x) = x e^x + x^2 e^x$.

d) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x$. □

Primjer 2.4.4 Odredite niz čija je eksponencijalna funkcija izvodnica dana funkcijom $f(x) = (1 - 2x)^{-3/2}$.

Rješenje: Razvit ćemo funkciju f u red korištenjem poopćenog binomnog teorema: $(1 - 2x)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3/2}{n} (-2x)^n$. Raspišimo izraz $\binom{-3/2}{n}$:

$$\binom{-3/2}{n} = \frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-2)\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!} = \frac{1}{2^n}(-1)^n \frac{(2n+1)!!}{n!}.$$

Stoga $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{n!} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n!} x^n$, dakle traženi niz je $a_n = (2n+1)!!$. \square

I neki drugi nizovi osim Bellovih brojeva imaju EFI jednostavnog oblika, na primjer

Zadatak 2.4

Dokažite da je EFI za deranžmane dana s $F(t) = e^{-t}(1-t)^{-1}$.

Zadatak 2.5

Dokažite da je EFI za Stirlingove brojeve druge vrste $S(n, r)$ dana s $F(t) = \frac{1}{r!}(e^t - 1)^r$.

U pravilu, rijetki su nizovi za koje je bilo koja vrsta funkcije izvodnice dana lijepom zatvorenom formulom.

Još jedna vrsta funkcija izvodnica koje imaju važnu ulogu u matematici je **Dirichletova funkcija izvodnica**, koja nizu (a_n) pridružuje funkciju $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$. Ukoliko je, na primjer, $a_n = 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, pridružena Dirichletova funkcija izvodnica se zove **Riemannova zeta funkcija**, u oznaci $\zeta(s)$, koja ima važnu ulogu u teoriji brojeva budući

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prost}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

2.5 Složenost algoritama za sortiranje

Kao ilustraciju korištenja rekurzija i funkcija izvodnica u primjenjenoj matematici, izračunati ćemo složenost za tri popularna algoritma za sortiranje: bubblesort, megesort i quicksort.

2.5.1 Bubblesort

Usporedimo prva dva elementa iz liste, zamijenjujući ih ukoliko nisu u traženom poretku. Tada usporedimo drugi i treći element liste, opet ih zamijenjujući ukoliko nisu u traženom poretku. Ovaj postupak provodimo dok ne dođemo do kraja liste. Tada ponovimo isti postupak za prvih $n - 1$ brojeva, pa za prvih $n - 2$, ...

Ukupan broj uspoređivanja je

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n,$$

dakle bubblesort ima složenost $O(n^2)$.

2.5.2 Mergesort

Ideja algoritma je da podijelimo listu na dva (otprilike) jednaka dijela, koja sortiramo, a onda ih spojimo.

Proces spajanja dviju lista duljina l i m zahtijeva najviše $l + m - 1$ uspoređivanja. Zaista, pretpostavimo da imamo dvije takve liste, složene u rastućem poretku. Usporedimo prve elemente u listama i manji upišemo u novu listu, izbacujući ga iz stare liste. Sada ponovimo ovaj proces, ...

Prije nego što dođe do spajanja, dvije liste možemo sortirati rekurzivno koristeći gornju metodu. Neka je t_n broj uspoređivanja potrebnih da sortiramo listu od n elemenata ovom metodom. Ukoliko n podijelimo u $l + k$, tada $t_n = t_l + t_k + l + k - 1 = t_l + t_k + n - 1$. Ukoliko uzmemo $n = 2^m$ (da bi smo uvijek mogli podijeliti listu na dva jednaka dijela), dolazimo do rekurzije

$$t_{2^m} = 2t_{2^{m-1}} + (2^m - 1).$$

Stavimo $a_m = t_{2^m}$. Tada vrijedi $a_m = 2a_{m-1} + (2^m - 1)$. Rješenje pripadne homogene rekurzije je očito $A2^m$.

Nađimo sada neko partikularno rješenje. Probat ćemo s rješenjem oblika $a_m = Bm2^m + C$ (rješenje oblika $a_m = B2^m + C$ neće proći budući je $a_m = 2^m$ rješenje homogene rekurzije):

$$Bm2^m + C = 2B(m-1)2^{m-1} + 2C + 2^m - 1 \Rightarrow 0 = -B2^m + 2^m - 1 + C,$$

odakle slijedi $B = C = 1$, tj. $a_m = m2^m + 1$.

Dakle, opće rješenje je $a_m = A2^m + m2^m + 1$. Iz $a_1 = 1$ (za sortiranje liste koja se sastoji od dva elementa je potrebno samo jedno uspoređivanje) slijedi $A = -1$, stoga $a_m = 2^m(m-1) + 1$. Dakle,

$$t_{2^m} = 1 + 2^m(m-1), \text{ tj. } t_n = 1 + n(\log_2 n - 1).$$

Stoga mergesort ima složenost $O(n \log_2 n)$, što je bitno bolje od $O(n^2)$ složenosti bubblesorta.

2.5.3 Quicksort

Algoritam za quicksort se može zapisati na sljedeći način:

Neka je a prvi element liste.

- Podijelimo ostatak liste u dva dijela L^- , L^+ koji se sastoje od elemenata manjih, tj. većih od a .
- Sortiramo L^- i L^+ .
- Vratimo (sortirane) L^- i L^+ .

Želimo izračunati prosječan broj uspoređivanja, uz uvjet da su svi poretci liste jednako vjerojatni. Sljedeće pretpostavke su važne za izračunavanje (prosječne) složenosti:

- prvi element a ima jednaku vjerojatnost da bude prvi, drugi, ..., n -ti najmanji element,
- liste L^- i L^+ imaju slučajan poredak (svi poretci su jednako vjerojatni).

Neka je q_n prosječan broj uspoređivanja potrebnih da sortiramo listu od n elemenata. Tada vrijedi

$$q_n = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (q_{k-1} + q_{n-k}).$$

Zaista, prvi korak zahtijeva $n - 1$ uspoređivanja; ukoliko je a k -ti najmanji element, drugi korak zahtijeva u prosjeku $q_{k-1} + q_{n-k}$ uspoređivanja, te taj broj moramo usrednjiti po svim mogućim vrijednostima od k .

Ova rekurzija se može pojednostaviti (raspisivanjem sume) na

$$q_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q_k, \quad (2.8)$$

gdje je $q_0 = 0$.

Želimo naći funkciju izvodnicu niza (q_n) . Neka je $Q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$. Množenjem relacije (2.8) s nt^n i sumiranjem po n dolazimo do sljedeće relacije

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n q_n t^n}_{\text{Iz (2.9) slijedi}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) t^n}_{\text{Iz (2.9) slijedi}} + 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} q_i \right) t^n}_{\text{Iz (2.9) slijedi}}. \quad (2.9)$$

Iz (2.9) slijedi

$$\overbrace{tQ'(t)} = \overbrace{\frac{2t^2}{(1-t)^3}} + \overbrace{\frac{2tQ(t)}{1-t}}. \quad (2.10)$$

Zadatak 2.6

Provjerite da relacija (2.10) zaista odgovara relaciji (2.9).

Množeći relaciju (2.10) s $\frac{(1-t)^2}{t}$ dolazimo do jednadžbe

$$(1-t)^2 Q'(t) = \frac{2t}{1-t} + 2Q(t)(1-t),$$

odakle slijedi

$$\frac{2t}{1-t} = (1-t)^2 Q'(t) - 2Q(t)(1-t) = \left((1-t)^2 Q(t) \right)',$$

što, uz $Q(0) = 0$ povlači

$$(1-t)^2 Q(t) = -2(t + \ln(1-t)),$$

dakle

$$Q(t) = \frac{-2(t + \ln(1-t))}{(1-t)^2}. \quad (2.11)$$

Kako iz (2.11) slijedi

$$Q(t) = 2 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots \right) (1 + 2t + 3t^2 + \dots),$$

dobijamo

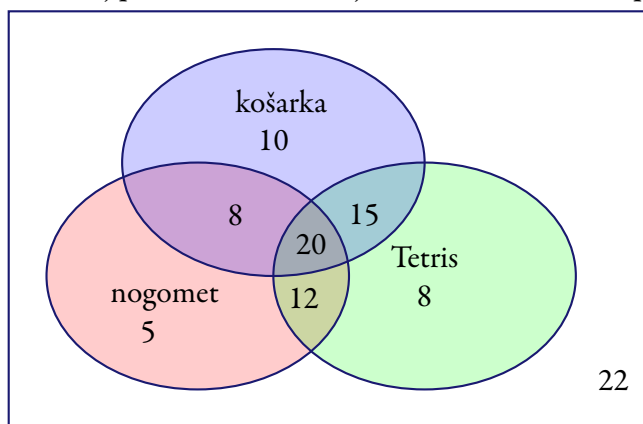
$$q_n = 2 \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} (n-i+1) = 2(n+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - 4n.$$

Dobru aproksimaciju za q_n možemo dobiti ako zamjenimo $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ s $\ln n$ (suma je aproksimacija površine ispod krivulje $y = 1/x$ od $x = 1$ do $x = n$), što nam daje $q_n \sim 2(n+1) \ln n - 4n$, dakle $q_n = 2n \ln n + O(n)$.

2.6 Formula uključivanja–isključivanja

Primjer 2.6.1 U skupini od 100 studenata, njih 45 igraju nogomet, 53 igraju košarku i 55 igraju Tetris. Nadalje, njih 28 igraju nogomet i košarku, 32 igraju nogomet i Tetris, 35 igraju košarku i Tetris, te njih 20 igraju sve tri igre. Koliko studenata ne igra ni jednu igru?

Ovaj problem možemo riješiti tako da nacrtamo pripadni Vennov dijagram:



Brojeve upisujemo u odgovarajuća područja tako što krenemo od broja elemenata presjeka sva tri skupa, onda računamo broj elemenata za presjeke dvaju skupova dok na koncu ne dođemo do broja elemenata koji nisu ni u jednom skupu.

Formula uključivanja–isključivanja (skraćeno FUI) je formula koja formalizira gornji postupak.

Neka je X univerzalni skup i neka je A_1, \dots, A_n familija podskupova od X . Ukoliko je $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ pišemo

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i, \text{ uz konvenciju } A_\emptyset = X.$$

Teorem 2.6.2 *Neka je A_1, \dots, A_n familija podskupova skupa X . Tada je broj elemenata od X koji ne leže ni u jednom od skupova $A_i, i = 1, \dots, n$, dan s*

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} |A_I|. \quad (2.12)$$

Dokaz: Za svaki $x \in X$ izračunati ćemo koliko je njegov „doprinos” sumi u (2.12), tj. koji je zbroj koeficijenata skupova A_I u (2.12) koji ga sadrže.

Pri tome pod „doprinosom” sumi, mislimo na sljedeću elementarnu činjenicu:

$$\sum_{x \in X} \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases} = |A|,$$

koja povlači sljedeći zapis sume u (2.12):

$$\begin{aligned} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} |A_I| &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \sum_{x \in X} \begin{cases} 1, & x \in A_I, \\ 0, & x \notin A_I \end{cases} \\ &= \sum_{x \in X} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \begin{cases} 1, & x \in A_I, \\ 0, & x \notin A_I \end{cases}. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da $x \in X$ nije ni u jednom od skupova $A_i, i = 1, \dots, n$. Tada je jedini član sume kojem x pridonosi $I = \emptyset$, i doprinos je $(-1)^0 = 1$.

Inače, neka je $J = \{i : x \in A_i\}$ neprazan, $j = |J|$. Tada je $x \in A_I$ točno onda kada je $I \subseteq J$. Dakle, doprinos od x je dan s

$$\sum_{I \subseteq J} (-1)^{|I|} = \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} = 0,$$

budući postoji $\binom{j}{i}$ skupova oblika A_I za $|I| = i$.

Dakle, elementi od X koji se ne nalaze ni u jednom od skupova $A_i, i = 1, \dots, n$ pridonose 1 sumi, dok ostali elementi pridonose 0 sumi, što znači da suma (2.12) daje broj elemenata skupa X koji se ne nalaze ni u jednom od skupova $A_i, i = 1, \dots, n$. \square

Teorem 2.6.3 *Broj surjekcija s n -skupa u k -skup je dan formulom*

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \quad (2.13)$$

Dokaz: Neka je X skup svih preslikavanja s $\{1, \dots, n\}$ u $\{1, \dots, k\}$. Dakle, $|X| = k^n$. Za $i = 1, \dots, k$ neka je A_i skup preslikavanja f za koje se i ne nalazi u slici od f .

Tada za svaki $x, f(x)$ može biti bilo koji od $k - 1$ brojeva različitih od i , dakle $|A_i| = (k - 1)^n$. Općenito, A_I će se sastojati od svih preslikavanja čija slika ne sadrži elemente od I , dakle $|A_I| = (k - |I|)^n$.

Preslikavanje iz X je surjekcija ako i samo ako ne leži ni u jednom od skupova A_i . Stoga iz teorema 2.6.2 slijedi da je broj surjekcija dan s

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} (k - |I|)^n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (k - i)^n,$$

budući postoji $\binom{k}{i}$ skupova I kardinalnosti i , gdje i ide od 0 do k . \square

Teorem 2.6.4 *Broj deranžmana skupa $\{1, \dots, n\}$ je dan s*

$$n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Dokaz: Ovoga puta je X skup svih permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$, a A_i je skup permutacija kojima je i fiksna točka, $i = 1, \dots, n$. Vrijedi $|A_i| = (n - 1)!$, te $|A_I| = (n - |I|)!$.

Permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$ je deranžman ako i samo ako ne leži ni u jednom od skupova A_i , $i = 1, \dots, n$. Stoga je po teoremu 2.6.2 broj deranžmana dan s

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} (n - |I|)! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (n - i)! = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!}. \quad \square$$

Jedna od posljedica teorema 2.6.3 je i sljedeća formula za Stirlingove brojeve druge vrste:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k - i)^n. \quad (2.14)$$

Zaista, formula odmah slijedi iz teorema 1.6.6.

Nadalje, iz (2.14) slijedi sljedeća formula za Bellove brojeve

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k - i)^n.$$