

predavanje 7 (1. dio): Energija elektromagnetskog vala. Interakcija elektromagnetskog zračenja i tvari.

1. Kako glasi jednačba koja opisuje električno i magnetsko polje kod ravnog elektromagnetskog vala. Koja je razlika između ravnog vala i kuglastog vala. Kako nastaju elektromagnetski valovi? Koja je veza između smjera širenja vala, titranja električnog i magnetskog polja? Koji je izraz za brzinu elektromagnetskih valova? (obavezno) (smiksano od pitanja na kraju lekcije i iz popisa)

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow E_x(z, t) = E_0 \sin(\omega t - kz)$$
$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow B_y(z, t) = B_0 \sin(\omega t - kz)$$

valne jednačbe za električno i magnetsko polje, i njihova rješenja

Razlika između ravnog i kuglastog vala je u tome što je kao ravnog vala amplituda konstanta i ne ovisi o putu, a kod kuglastog opada.

Elektromagnetski val nastaje kad se naboj ubrzava, tj. kad postoji promjena vektora brzine naboja (elektrona). Najjednostavniji izvor elektromagnetskog vala je otvoreni LC titrajni krug. Titranje električnog i magnetskog polja prenosi se iz otvorenog titrajnog kruga u okolni prostor.

Pri širenju elektromagnetskih valova električno i magnetsko polje međusobno su okomiti, a okomiti su i na smjer širenja vala. Pri tom vektor električnog i magnetskog polja titraju u fazi.

Brzina širenja elektromagnetskih valova u sredstvu s određenom dielektričnošću ϵ i permeabilnošću μ je:

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$$

2. Što je Poyntingov vektor. Kako glasi jednačba električnog polja (magnetskog) polja ravnog elektromagnetskog vala, a kako sfernog vala? (obavezno)

Elektromagnetski val prenosi energiju kroz prostor.

Gustoća toka energije, tj. intenzitet elektromagnetskog vala, je energija koju ravni elektromagnetski val u jedinici vremena prenese kroz jedinicu površine.

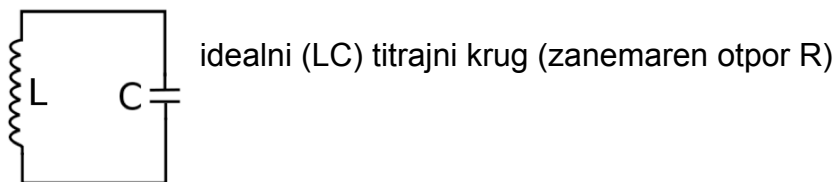
Gustoća toka energije je vektorska veličina, a smjer joj je jednak smjeru širenja vala i zove se Poyntingov vektor:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Drugo podpitanje neznam (nije se ni nalazilo na popisu pitanja za 2007/2008)

3. Nacrtajte električni titrajni krug i objasnite elektromagnetske titraje. Objasnite analogiju između mehaničkih i električnih titrajnih sistema.

Elektromagnetski titraji nastaju u električnome titrajnom krugu koji se sastoji od kondenzatora kapaciteta C , zavojnice induktiviteta L i otpornika R . Takav se krug često skraćeno zove RLC-krug. Ponekad se omski otpor kruga može zanemariti i promatrati titrajni LC-krug.



U prvom koraku kondenzator se nabije nabojem Q_0 .

Tada je energija kondenzatora: $\frac{Q_0^2}{2C}$

U drugom koraku, kondenzator se spoji u krug s zavojnicom. Tada se energija iz kondenzatora prelazi u zavojnicu i obratno. U titrajnom su krugu nastali elektromagnetski titraji perioda T .

U idealnom LC-krugu ($R = 0$) zbroj energije kondenzatora (električne energije) i energije zavojnice (magnetske energije) je konstanta:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konst.} \quad (1)$$

gdje je $Q = Q(t)$ trenutni naboj kondenzatora [$C=As$], dok je $I = I(t)$ jakost struje [A].

Derivacijom jednadžbe (1) po vremenu dobije se da je:

$$\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0$$

Budući da je $I = \frac{dQ}{dt}$, slijedi da je: $\frac{Q}{C} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0$

ili drukčije pisano: $\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (2)$

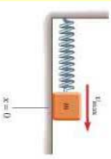
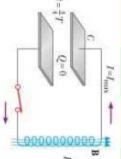
Ta je jednadžba analogna jednadžbi harmoničkog oscilatora u mehanici:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$$

Na osnovi analogije slijedi da je rješenje jednadžbe (2):

$$Q = Q_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

gdje je kružna frekvencija slobodnih elektromagnetskih titraja: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Mehanički sistem		Električni sistem	
Pomak, s		Naboj, Q	
Masa, m		Induktivitet, L	
Brzina, $v=ds/dt$		Struja, $I=dQ/dt$	
Konstanta opruge, k		Recipročna vrijednost kapaciteta, $1/C$	
Sila, F		Elektromotorna sila, \mathcal{E}	
Vlastita frekvencija, $\omega_0^2=k/m$		Vlastita frekvencija, $\omega_0^2=1/LC$	
Koeficijent otpora, b		Otpor, R	
Koeficijent prigušenja, $\delta=b/(2m)$		Koeficijent prigušenja, $\delta=R/(2L)$	

tablica analogije

4. Kako nastaje elektromagnetski valovi? Koja je veza između smjera širenja vala i titranja električnog i magnetskog polja? Koji je izraz za brzinu elektromagnetskih valova? Pretpostavite smjer širenja vala i smjer titranja električnog polja, te napišite valnu jednadžbu za električno i magnetsko polje i pripadajuća rješenja. Koja je veza između električnog i magnetskog polja u elektromagnetskom valu? (pitanje nije na službenom popisu pitanja za 2007/2008 godinu).

Elektromagnetski val nastaje kad se naboj ubrzava, tj. kad postoji promjena vektora brzine naboja (elektrona). Najjednostavniji izvor elektromagnetskog vala je otvoreni LC titrajni krug. Titranje električnog i magnetskog polja prenosi se iz otvorenog titrajnog kruga u okolni prostor.

Titranje električnog i magnetskog polja prenosi se iz otvorenog titrajnog kruga (što se postiže povećavanjem razmaka između ploča kondenzatora i zavoja zavojnice; ovaj se uređaj naziva i titrajući dipol) u okolni prostor.

Oko kruga nastaje elektromagnetsko polje; otvoreni je titrajni krug izvor elektromagnetskih valova. Pri širenju elektromagnetskih valova električno i magnetsko polje međusobno su okomiti, a okomiti su i na smjer širenja vala. Pri tom vektor električnog i magnetskog polja titraju u fazi.

Valna jednadžba za širenje elektromagnetskih valova dobije se iz Maxwellovih jednadžbi.

Uz pretpostavu da se elektromagnetski valovi šire u zsmjeru, a vektor električnog polja titra u xsmjeru, valne jednadžbe za električno i magnetsko polje, i njihova rješenja su:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow E_x(z, t) = E_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow B_y(z, t) = B_0 \sin(\omega t - kz)$$

Pri širenju elektromagnetskih valova, električno polje inducira magnetsko i obratno.

Brzina širenja elektromagnetskih valova u sredstvu s određenom dielektričnošću ϵ i permeabilnošću μ je:

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$$

Brzina širenja elektromagnetskog vala u vakuumu ($\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$) iznosi:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)) (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Pri prijelazu elektromagnetskog vala iz sredstva u kojem se širi jednom brzinom u sredstvo u kojem se širi nekom drugom brzinom mijenja se valna duljina vala.

5. Iz Maxwellovih jednadžbi u diferencijalnom obliku izvedite valne jednadžbe za električno i magnetsko polje i nađite njihova rješenja. (pitanje nije na službenom popisu pitanja za 2007/2008 godinu).

◆ Maxwellove jednadžbe u homogenom i izotropnom sredstvu bez naboja i struja:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad \text{operator nabra}$$

◆ Primijenimo operaciju rotor ($\nabla \times$) na (3) Maxwellovu jednadžbu:

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{iz prve (1) Maxwellove jed.}$$

◆ Deriviramo jednadžbu (4) po vremenu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Brzina širenja elektromagnetskog vala u vakuumu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Brzina širenja elektromagnetskog vala u sredstvu

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

- Na isti način se dobije i valna jednačba za magnetsko polje, tako da se jednačba (3) derivira po vremenu a da se na jednačbu (4) primijeni operator "rotacije".

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = -\Delta \vec{B} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{B} = -\mu\epsilon \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Maxwellove jednačbe za električno i magnetsko polje po komponentama. Za svaku komponentu vrijedi jednačba:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

6. Izvedite izraz za i gustoću toka energije elektromagnetskog vala (Poyntingov vektor), te za intenzitet elektromagnetskog vala? Kolika je njegova srednja vrijednost?

Elektromagnetski val može prenositi energiju kroz prostor. Radiovalovi prenose energiju od odašiljača do prijemnika, toplinska i svjetlosna energija preko elektromagnetskih valova dolazi od Sunca, itd.

Promatramo li infinitezimalni valjak baze površine S i debljine dz=vdt. Ukupna gustoća energije elektromagnetskog polja je zbroj gustoće energije električnog polja i gustoće energije magnetskog polja:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E_x^2 + \frac{1}{2} \mu H_y^2$$

Kako je već dokazano da su električno i magnetsko polje povezani, onda slijedi da je:

$$w = \epsilon E_x^2 = \mu H_y^2$$

U vremenu dt kroz površinu S prođe energija: Pdt=wdV=wSdz=wSvdt, te je gustoća toka energije (intenzitet) tj. snaga po jediničnoj površini jednaka: P=vw. **(ovdje je sad P gustoća toka energije)**

Uvrštavajući dobivamo: P=vεE_x²=vμH_y²=E_xH_y

Gustoća toka energije, tj. intenzitet elektromagnetskog vala je energija koju ravni elektromagnetski val u jedinici vremena prenese kroz jedinicu površine.

Gustoća toka je vektorska veličina, a smjer joj je jednak smjeru širenja vala i zove se Poyntingov vektor:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}).$$

Srednja gustoća energije jednaka je polovici maksimalne vrijednosti:

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \epsilon E_x^2$$

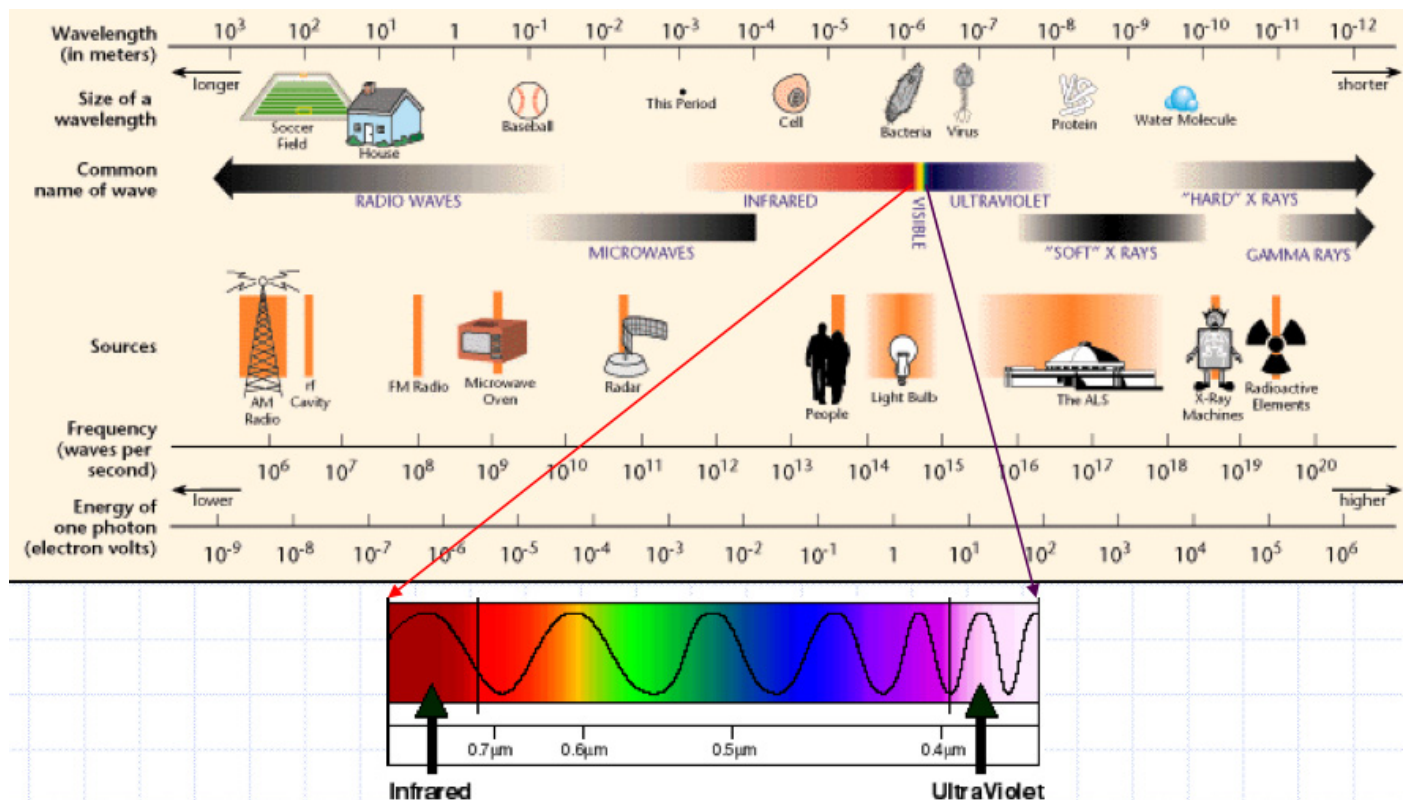
Budući da je $P = v \cdot w$ i iznos Poyntingova vektora ravnog harmoničkog vala mijenja se kao kvadrat funkcije sinus:

$$P = v \varepsilon E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz)$$

Gustoća energije harmoničkog elektromagnetskog vala mijenja se s vremenom. Srednja gustoća energije jednaka je polovici maksimalne vrijednosti:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_0^2 = \frac{1}{2} E_0 H_0$$

7. Opišite spektar elektromagnetskih valova.



Elektromagnetski spektar sastoji se od radio valova, mikrovalova, infracrvene, vidljive i ultraljubičaste svjetlosti, X zraka, i gama zraka. Ne postoji oštra granica između ovih skupina, spektar je kontinuiran, a tek naša osjetila ili učinci na materiju mogu odvojiti jednu skupinu od druge. Svjetlost je vidljivo područje elektromagnetskog zračenja valnih duljina od 0.004 do 0.008 mm. Pri ljubičastom kraju spektra nastaje ultraljubičasto područje frekvencije $8 \cdot 10^{14} - 2,4 \cdot 10^{16}$ koje naš oko ne može apsorbirati. Izaziva dermatološke efekte: preplanulost, aktivira sintezu D vitamina, ali izaziva i rak kože. Sloj ozona (O_3) apsorbira ultraljubičasto zračenje $\lambda < 320 \text{ nm}$ i tako štiti Zemlju. Na crveni kraj spektra nastavlja se infracrveno zračenje valne duljine približno 1 - 780 nm, a frekvencije oko 300 GHz – 385 THz. Mikrovalovi prolaze kroz Zemljinu atmosferu, i jako su korisni za svemirsku komunikaciju. Koriste se i u domaćinstvu (mikrovalne pećnice). X- zrake: $f = 2,4 \cdot 10^{16}$ do $5 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$, $\lambda \sim$ manja od dimenzija atoma. Individualni fotoni ovog zračenja imaju energiju od 100 eV do 0.2 MeV, tako da svaki pojedini foton može ostvariti interakciju s materijom. Kombinacijom računala i X- zračenja omogućila je tehniku CT (computer tomography). Gama zračenje je najintenzivnije, izvori gama zrake su pobuđene jezgre (radioaktivni atomi), nuklearne eksplozije. Gama zrake ne prolaze kroz atmosferu i ubijaju žive stanice (liječenje raka, Co-bomba).