MODELI RAČUNARSTVA - JEZIČNI PROCESORI 1

Siniša Srbljić, Sveučilište u Zagrebu

2. REGULARNI JEZICI

- 2.1. KONAČNI AUTOMATI
- 2.2. REGULARNI IZRAZI
- 2.3. SVOJSTVA REGULARNIH IZRAZA
- 2.4. GRAMATIKA

2. REGULARNI JEZICI

- REGULARNI JEZIK I KONAČNI AUTOMAT
  - jezik je regularan ako postoji konačni automat koji ga prihvaća
  - time je definirana istovjetnost konačnih automata i regularnih jezika
- REGULARNI JEZICI
  - jednostavni, prihvaćaju ih konačni automati

2.1. Konačni automati

- KONAČNI AUTOMATI
  - deterministički konačni automat (DKA, DFA)
  - nedeterministički konačni automat (NKA, NFA)
  - NKA s ε prijelazima (ε-NKA, ε-NFA)
  - svi su konačni automati jednako sposobni

2.1.1. Deterministički konačni automat

- DKA (DFA)
  - opisuje rad mnogih tehničkih sustava
  - teorija KA ima znatnu ulogu u gradnji tih sustava
  - npr. digitalna elektronika, leksička analiza, računala
  - primjenjuju se za modeliranje u medicini, biologiji, psihologiji ...

Deterministički konačni automat

- DKA ČINI
  - skup stanja Q s početnim stanjem $q_0 \in Q$ i skupom prihvatljivih stanja $F \subseteq Q$
  - funkcija prijelaza δ: $Q \times \Sigma \rightarrow Q$ jednoznačno određena znakom na ulazu iz skupa Σ i stanjem iz skupa Q

$$\mathrm{dka} = \left(Q, \Sigma, \delta, q_0, F\right)$$

Deterministički konačni automat

- DEFINIRAMO FUNKCIJU

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^{*} \rightarrow Q$$

  - koja definira stanje automata nakon čitanja ulaznog niza
  - skup Σ^* sadrži sve moguće nizove ulaznih znakova uključujući i prazan niz
  - ako su $w,x,y,z \in \Sigma^*$, $a,b \in \Sigma$ i $p,q \in Q$ vrijedi:

$$(1) \qquad \hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$$

$$(2) \qquad \hat{\delta}(q, wa) = \delta\left(\hat{\delta}(q, w), a\right)$$

Deterministički konačni automat

- Vrijedi
  - iz (1) da automat mijenja stanje ako se desi ulazni znak
  - uvrštavanjem u (2) w=ε dobije se

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon a) = \hat{\delta}(q, a) = \delta\left(\hat{\delta}(q, \varepsilon), a\right) = \delta(q, a)$$

  - slijedi da su obje funkcije iste, tj. opisuju iste prijelaze
  - u daljem tekstu koristi se oznaka δ za obje funkcije

Deterministički konačni automat

- PRIHVAĆANJE ULAZNOG NIZA
  - DKA prihvaća niz ako je

$$\delta(q_0, x) = p, \qquad p \in F$$

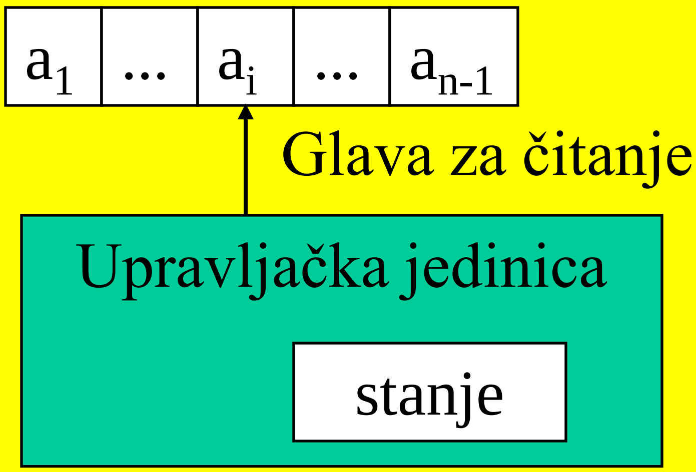
  - DKA prihvaća skup L(dka) $\subseteq \Sigma^*$

$$L(dka) = \{x \mid \delta(q_0, x) \in F\}$$

  - za nizove koji nisu u skupu L(dka) kaže se da ih DKA ne prihvaća

Deterministički konačni automat

- MODEL DKA

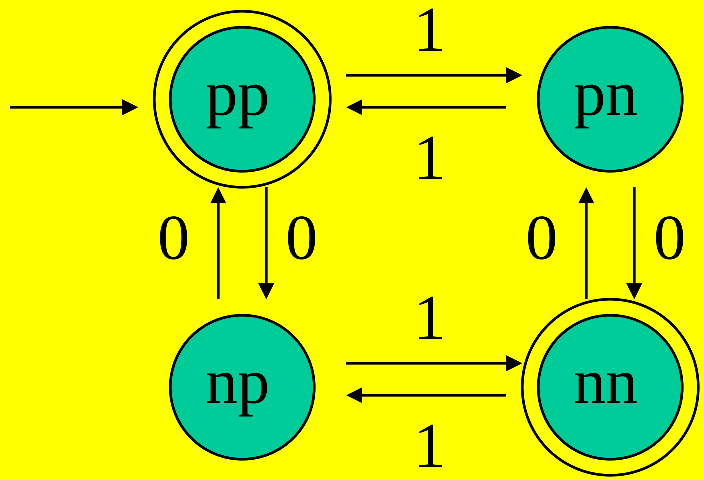


  - Traka je konačna
  - Glava samo čita i ne može pisati
  - Glava se pomiče samo u desno

Deterministički konačni automat

- PRIMJER DKA
  - prihvaća nizove s parnim brojem nula i jedinica ili neparnim brojem nula i jedinica

$$Q = \{pp, np, pn, nn\},\ \ \Sigma = \{0,1\},\ \ q_0 = pp,\ F = \{pp, nn\}$$



Deterministički konačni automat

- PRIMJER DKA - tablica prijelaza

	Ulazni znak: 0	Ulazni znak: 1	Prihvatljivost: ⊥
Stanje pp	np	pn	1
pn	nn	pp	0
np	pp	nn	0
nn	pn	np	1

Deterministički konačni automat

- PRIMJER DKA - trajektorija prihvaćanja niza

$$\delta(\mathrm{pp},1011) = \delta(\delta(\mathrm{pp},101),1) = \delta(\delta(\delta(\mathrm{pp},10),1),1) =$$
$$= \delta(\delta(\delta(\delta(\mathrm{pp},1),0),1),1) = \delta(\delta(\delta(\mathrm{pn},0),1),1) =$$
$$= \delta(\delta(\mathrm{nn},1),1) = \delta(\mathrm{np},1) = \mathrm{nn}$$

  – grafički:

$$\mathrm{pp} \xrightarrow{1} \mathrm{pn} \xrightarrow{0} \mathrm{nn} \xrightarrow{1} \mathrm{np} \xrightarrow{1} \mathrm{nn}$$

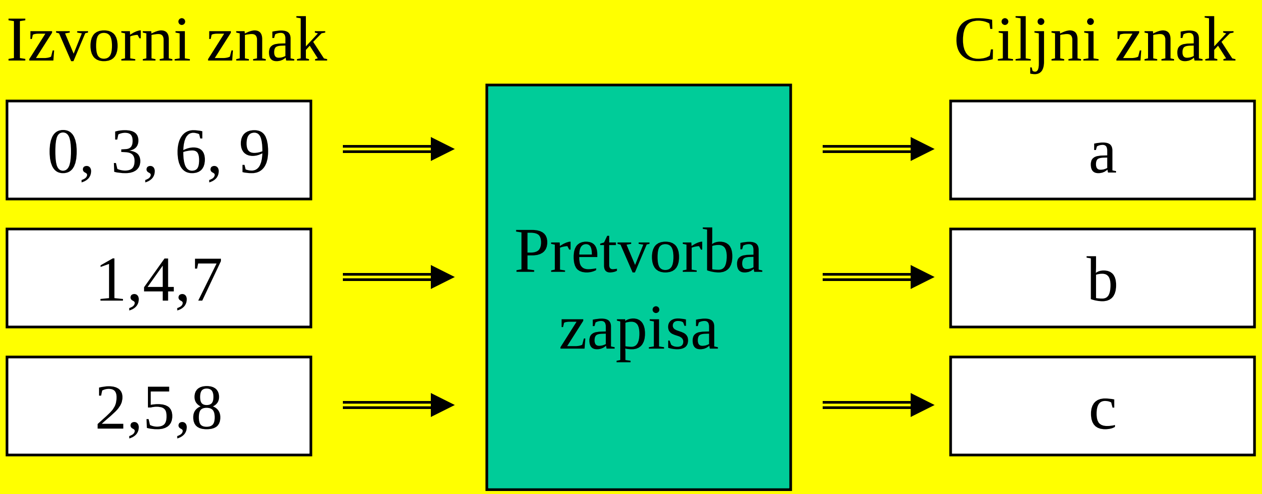
Deterministički konačni automat

- PROGRAMSKO OSTVARENJE DKA
  - DKA je matematički model
  - može se ostvariti programskim jezikom
  - treba postići učinkovitost ostvarenja
  - razmatra se način zapisa znakova, stanja i funkcije prijelaza

Izvorni niz → Pretvorba zapisa → Ciljni zapis → Konačni automat

Deterministički konačni automat

- PRIMJER PRETVORBE ZAPISA DKA
  - DKA s ulaznim nizom D={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
  - prihvaća nizove (brojeve) djeljive s 3



Deterministički konačni automat

- PRIMJER DKA - tablica prijelaza nakon pretvorbe

		Ulazni znak			Prihvatljivost
		a	b	c	⊥
	S	S	J	D	1
Stanje	J	J	D	S	0
	D	D	S	J	0

⊥ = oznaka kraja ulaznog niza

Deterministički konačni automat

- ZAPIS STANJA
  - dva načina
  - zapisom u **varijablu -** izravan način
  - zapis **dijelom programa -** posredan način
- ZNAK ⊥
  - kraj niza, označava da je pročitan zadnji znak niza
  - automat donosi odluku i ispisuje poruku
    o prihvatljivosti niza

Deterministički konačni automat

- PRIMJER IZRAVNOG ZAPISA STANJA

```
Tablica[PP,0] = NP;
Tablica[PP,1] = PN;
Tablica[PP,⊥] = 1;
......
Stanje=PP;
Pročitaj(Znak);
dok(Znak != ⊥)
{
    Stanje=Tablica[Stanje,Znak];
    Pročitaj(Znak);
}
Ispiši(Tablica[Stanje,⊥], Stanje);
```

Deterministički konačni automat

- PRIMJER NEIZRAVNOG ZAPISA STANJA

```
.....
PP: Pročitaj(Znak);
    ako(Znak == ⊥)
          Ispiši(”Prihvaća se! P1 P0”);
    ako(Znak == 0)
          Skoči NP;
    inače
          Skoči PN;
NP: Pročitaj(Znak);
    ako(Znak == ⊥)
......
```

Deterministički konačni automat

- ZAPIS FUNKCIJE PRIJELAZA
  - dva načina
  - zapisom **vektorski**
  - zapis **listom**
- VEKTORSKI ZAPIS FUNKCIJE PRIJELAZA
  - za svako stanje jedan vektor
  - za svaki znak jedan element vektora
  - kod izravnog zapisa stanja element vektora je stanje
  - kod neizravnog zapisa stanja element vektora je adresa
  - koristi se naredba `switch` ili `case`

Deterministički konačni automat

- PRIMJER VEKTORSKOG ZAPISA FUNKCIJE PRIJELAZA

	0	1
Izravno PP:	NP	PN
Neizravno PP:	adrNP	adrPN

- ZAPIS FUNKCIJE PRIJELAZA LISTOM
  - postiže se učinkovito korištenje memorije
  - unosi se lista parova znak,stanje
  - troši se više vremena

2.1.2. Minimizacija konačnog automata

- EKVIVALENTNOST DKA (DFA)
  - postoji beskonačno DKA koji prihvaćaju isti jezik
  - učinkovito: izgraditi DKA sa što manjim brojem stanja
- ISTOVJETNOST STANJA (ekvivalentnost)
  - stanje p DKA M istovjetno je stanju p’ DKA M’ ako M u p prihvaća isti skup nizova kao M’ u p’
  - vrijedi:

$$\delta(p,w)\in F \wedge \delta'(p',w)\in F' \;\text{ ili }\; \delta(p,w)\notin F \wedge \delta'(p',w)\notin F'$$

Minimizacija konačnog automata

- TRANZITIVNOST ISTOVJETNOSTI
  - iz p=q i q=r slijedi p=r
- SMANJIVANJE BROJA STANJA
  - grupu istovjetnih stanja zamijeniti jednim
  - prvo istovjetna stanja označiti istim imenom
  - sve prijelaze označiti tim imenom
  - u skupu Q ostaviti samo jedno stanje
  - po potrebi funkciju prijelaza

Minimizacija konačnog automata

- EKVIVALENTNOST AUTOMATA M i N
  - M i N su istovjetni ako su istovjetna njihova početna stanja
- UVJETI ISTOVJETNOSTI STANJA p i q
  - **uvjet podudarnosti**:
    p i q moraju biti prihvatljiva ili neprihvatljiva
  - **uvjet napredovanja**:
    za bilo koji znak, slijedeća stanja $\delta(p,a)= \delta(q,a)$
- ODREĐIVANJE ISTOVJETNOSTI STANJA p i q
  - tri algoritma

Minimizacija konačnog automata

- ODREĐIVANJE ISTOVJETNOSTI STANJA p i q
  PRVI ALGORITAM (primitivne tablice)
  – primjenjuje uvjete istovjetnosti iterativno
  – neučinkovit, zahtjeva ispitivanje svih parova stanja
  1 provjeri uvjet podudarnosti
  2 za svaki znak formiraj zasebni stupac
  3 provjeri uvjet napredovanja i za svaki novi par različitih stanja stvori novi redak
  4 provjeri uvjet podudarnosti za svaki novi par, ako uvjet nije zadovoljen prvi par nije istovjetan
  5 ako nema novog para, prvi par je istovjetan

Minimizacija konačnog automata

- PRIMJER ISTOVJETNOSTI STANJA p i q
  PRVI ALGORITAM (primitivne tablice)

	c	d	⊥
p0	p0	p3	0
p1	p2	p5	0
p2	p2	p7	0
p3	p6	p7	0
p4	p1	p6	1
p5	p6	p5	0
p6	p6	p3	1
p7	p6	p3	0

	c	d
p0,p1	p0,p2	p3,p5
p0,p2	p0,p2	p3,p7
p3,p5	p6	p5,p7
p3,p7	p6	p3,p7
p5,p7	p6	p3,p5

p0=p1=p2

p3=p5=p7

Minimizacija konačnog automata

- PRIMJER ISTOVJETNOSTI STANJA p i q
  PRVI ALGORITAM (primitivne tablice)

	c	d	⊥
p0	p0	p3	0
p3	p6	p3	0
p4	p1	p6	1
p6	p6	p3	1

PAZI: stanje p4 je nedostupno

Minimizacija konačnog automata

- ODREĐIVANJE ISTOVJETNOSTI STANJA p i q **DRUGI** ALGORITAM (Huffman-Mealy)
  – dijeli skup stanja Q na podskupove korištenjem uvjeta podudarnosti

  1 podijeli Q na dva podskupa na osnovu uvjeta podudarnosti (pripadnost skupu F)

  2 provjeri zatvorenost podskupova:
  podijeli podskup tako da su u novom podskupu p i q:
  $\delta(p,a) \in G_i \;\wedge\; \delta(q,a) \in G_i$

  3 ako nema novih podskupova, stanja u podskupovima su istovjetna

Minimizacija konačnog automata

- PRIMJER ISTOVJETNOSTI STANJA p i q
  DRUGI ALGORITAM (Huffman-Mealy)

	c	d	⊥
p0	p0	p3	0
p1	p2	p5	0
p2	p2	p7	0
p3	p6	p7	0
p4	p1	p6	1
p5	p6	p5	0
p6	p6	p3	1
p7	p6	p3	0

p0,p1,p2,p3,p5,p7 ; p4,p6

p0,p1,p2 ; p3,p5,p7 ; p4 ; p6

p0=p1=p2

p3=p5=p7

Isti automat!

Minimizacija konačnog automata

- ODREĐIVANJE ISTOVJETNOSTI STANJA p i q **TREĆI** ALGORITAM (tablica implikanata)
  - traži neistovjetna stanja primjenom algoritma:

  1 označi sve neistovjetne parove stanja na osnovu uvjeta podudarnosti (pripadnost skupu F)

  2 za sve neoznačene parove p,q za sve ulazne simbole:
  ako je $\delta(p,a)$, $\delta(q,a)$ označen označi p,q
  označi rekurzivno sve parove u listi p,q i dalje
  inače za sve znakove a
  ako je $(\delta(p,a) != \delta(q,a))$
  dodaj p,q u listu $\delta(p,a)$, $\delta(q,a)$ (implikanti)

Minimizacija konačnog automata

- PRIMJER ISTOVJETNOSTI STANJA p i q
  TREĆI ALGORITAM (tablica implikanata)

	c	d	⊥
p0	p0	p3	0
p1	p2	p5	0
p2	p2	p7	0
p3	p6	p7	0
p4	p1	p6	1
p5	p6	p5	0
p6	p6	p3	1
p7	p6	p3	0

p1							
p2							
p3	X	X	X				
p4	**X**	**X**	**X**	**X**			
p5	X	X	X		**X**		
p6	**X**	**X**	**X**	**X**	X	**X**	
p7	X	X	X		**X**		**X**
	p0	p1	p2	p3	p4	p5	p6

p0=p1=p2

p3=p5=p7

Minimizacija konačnog automata

- NEDOHVATLJIVA STANJA
  - stanje p je nedohvatljivo ako ne postoji niz w: $\delta(q_0,w)=p$
  - odbacivanjem nedohvatljivih stanja dobije se istovjetni DKA s manjim brojem stanja

1 u listu dohvatljivih stanja DS upiši q_0

2 proširi DS sa skupom stanja $\{p|\ p=\delta(q_0,a)$, za sve $a\in\Sigma\}$

3 za sva stanja $q_i\in$DS proširi DS sa skupom stanja $\{p|\ p=\delta(q_i,a) \wedge p\notin DS$, za sve $a\in\Sigma\}$

Minimizacija konačnog automata

- NEDOHVATLJIVA STANJA - PRIMJER

	c	d	⊥
p0	p0	p3	0
p3	p6	p3	0
p4	p1	p6	1
p6	p6	p3	1

(1) DS={p0}
(2) DS={p0,p3}
(3) DS={p0,p3,p6}
stanje p4 je nedostupno

	c	d	⊥
p0	p0	p3	0
p3	p6	p3	0
p6	p6	p3	1

Minimizacija konačnog automata

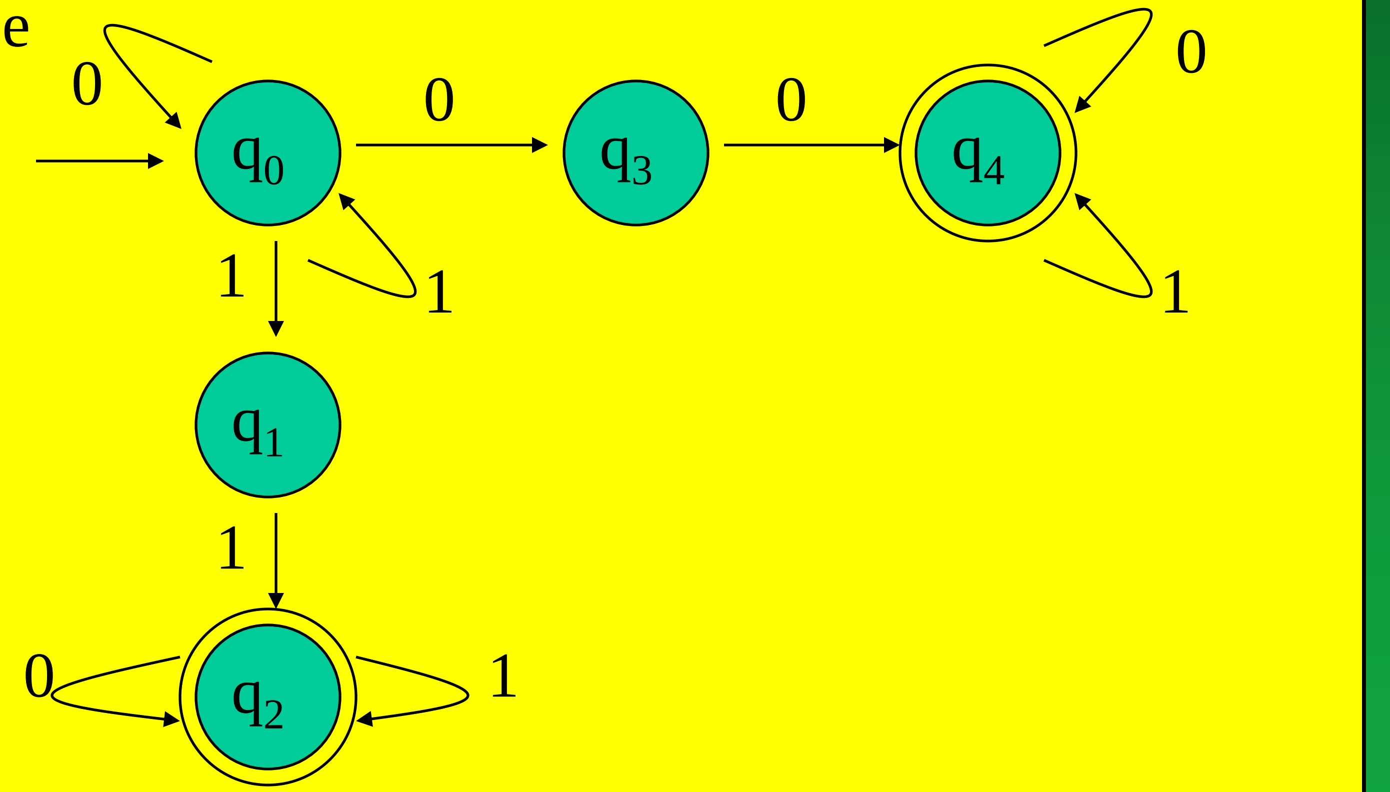
- DKA S MINIMALNIM BROJEM STANJA
  - odbacivanjem istovjetnih i nedostupnih stanja dobije se istovjetni DKA s minimalnim brojem stanja
  - ne postoji drugi DKA koji prihvaća isti jezik, a koji ima manje stanja
  - optimalno je najprije odbaciti nedostupna stanja pa onda tražiti i odbaciti istovjetna stanja

2.1.3. Nedeterministički konačni automat

- NEDETRMINISTIČKI KONAČNI AUTOMAT NKA (NFA)
  - funkcija prijelaza je nedeterministička
  - umjesto: $\delta(q,a)=p$ imamo: $\delta(q,a)=\{p_0, p_1, ...\}$
  - $\{p_0, p_1, ...\}$ može biti prazan
  - za bilo koji NKA N moguće je izgraditi DKA D tako da vrijedi: L(N) = L(D)
- PRIMJENA NKA
  - za neke jezike je lakše zadati NKA
  - nakon zadavanja konstruiramo minimalni DKA

Nedeterministički konačni automat

- PRIMJER NKA
  - prihvaća nizove koji imaju barem dvije uzastopne nule ili jedinice



Nedeterministički konačni automat

- PRIMJER NKA
  - tablica prijelaza:

	0	1	⊥
q0	{q0,q3}	{q0,q1}	0
q1	{}	{q2}	0
q2	{q2}	{q2}	1
q3	{q4}	{}	0
q4	{q4}	{q4}	1

Prazni skup {} ili ∅ znači da za taj par nema prijelaza

Nedeterministički konačni automat

- NKA
  - ne označava slučajne događaje
  - DKA: za niz w postoji samo jedna staza $p=\delta(q_0,w)$; niz se prihvaća ako staza završi prihvatljivim stanjem
  - NKA: za niz w postoji više staza
  - tijekom rada provjeravaju se sve staze; niz se prihvaća ako makar jedna staza završava prihvatljivim stanjem:

$$q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_3 \xrightarrow{0} q_4 \xrightarrow{1} q_4; \qquad q_4 \in F$$

$$q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_1; \qquad q_1 \notin F$$

Nedeterministički konačni automat

- RAD NKA
  - za niz 1010 moguće je ispisati sve staze, 1010 nije prihvaćen:

$$q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} \varnothing; \qquad \varnothing$$

$$q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_3 \xrightarrow{1} \varnothing; \qquad \varnothing$$

$$q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} \varnothing; \qquad \varnothing$$

$$q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_3; \qquad q_3 \notin F$$

$$q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_0; \qquad q_0 \notin F$$

Nedeterministički konačni automat

- RAD NKA SE OPISUJE
  - svaki put kad imamo više mogućih prijelaza, stvori se toliki broj DKA koji paralelno obrađuju ulazni niz
  - niz se prihvaća ako staza makar jednog DKA završi prihvatljivim stanjem
  - npr. niz 1010 se ne prihvaća:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
q_0 & \xrightarrow{1} & q_0 & \xrightarrow{0} & q_0 & \xrightarrow{1} & q_0 & \xrightarrow{0} & q_0 \\
{}_1\downarrow & & {}_0\downarrow & & {}_1\downarrow & & {}_0\downarrow & & \\
q_1 & & q_3 & & q_1 & & q_3 & & \\
{}_0\downarrow & & {}_1\downarrow & & {}_0\downarrow & & & & \\
\varnothing & & \varnothing & & \varnothing & & & &
\end{array}
$$

Nedeterministički konačni automat

- RAD NKA PRIMJER
  - npr. niz 01001 se prihvaća, $q_4 \in F$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
q_0 & \xrightarrow{0} & q_0 & \xrightarrow{1} & q_0 & \xrightarrow{0} & q_0 & \xrightarrow{0} & q_0 & \xrightarrow{1} & q_0 \\
{}_0\downarrow & & {}_1\downarrow & & {}_0\downarrow & & {}_0\downarrow & & {}_1\downarrow & & \\
q_3 & & q_1 & & q_3 & & q_3 & & q_1 & & \\
{}_1\downarrow & & {}_0\downarrow & & {}_0\downarrow & & {}_1\downarrow & & & & \\
\varnothing & & \varnothing & & q_4 & & \varnothing & & & & \\
 & & & & {}_1\downarrow & & & & & & \\
 & & & & q_4 & & & & & &
\end{array}
$$

Nedeterministički konačni automat

- NKA ČINI
  - skup stanja Q s početnim stanjem $q_0 \in Q$ i skupom prihvatljivih stanja $F \subseteq Q$
  - funkcija prijelaza δ: $Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ određena znakom na ulazu iz skupa Σ i skupom stanja iz skupa Q
  - 2^Q je skup svih podskupova skupa stanja Q

$$\mathrm{nka} = \left(Q, \Sigma, \delta, q_0, F\right)$$

Nedeterministički konačni automat

- DEFINIRAMO FUNKCIJU

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^{*} \rightarrow 2^{Q}$$

  - koja definira stanje automata nakon čitanja ulaznog niza
  - vrijedi:

(1) $$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$$

(2) $$\hat{\delta}(q, wa) = P = \{p \mid r \in \hat{\delta}(q, w) \Rightarrow p \in \delta(r, a)\}$$

Nedeterministički konačni automat

- Vrijedi
  - iz (1) da automat mijenja stanje ako se desi ulazni znak
  - uvrštavanjem u (2) w=ε dobije se

$$\hat{\delta}(q,\varepsilon a)=\hat{\delta}(q,a)=P=\{p \mid p\in\delta(q,a)\}=\delta(q,a)$$

  - slijedi da su obje funkcije iste, tj. opisuju iste prijelaze
  - u daljem tekstu koristi se oznaka δ za obje funkcije

Nedeterministički konačni automat

- PRIHVAĆANJE ULAZNOG NIZA
  - NKA prihvaća niz ako je u P makar jedno stanje iz F:

$$\delta(q_0, x) = P; \qquad P \cap F \neq \emptyset$$

  - NKA prihvaća skup L(Nka) $\subseteq \Sigma^*$

$$L(nka) = \left\{ x \middle| \delta(q_0, x) \cap F \neq \emptyset \right\}$$

  - za nizove koji nisu u skupu L(nka) kaže se da ih NKA ne prihvaća

Nedeterministički konačni automat

- NADALJE PROŠIRIMO FUNKCIJU

$$\delta : 2^{Q} \times \Sigma^{*} \rightarrow 2^{Q}$$

  - koja definira stanje automata nakon čitanja ulaznog niza polazeći iz nekog od podskupa stanja $P \in 2^{Q}$
  - vrijedi:

$$\delta(P, w) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, w); \; P \subseteq Q$$

Nedeterministički konačni automat

- IZGRADNJA DKA IZ ZADANOG NKA
  - Za bilo koji NKA $M=\{Q,\Sigma,\delta,q_0,F\}$ moguće je izgraditi istovjetni DKA $M'=\{Q',\Sigma',\delta',q_0',F'\}$
  - NKA i DKA su istovjetni ako prihvaćaju isti jezik $L(M)=L(M')$
  - ako je $Q=\{q_0,\ldots,q_i\}$ izgradimo $Q'=2^Q$, $[p_0,\ldots,p_j]\in Q'$, $p_k\in Q$; pa vrijedi:
    $Q'=\{[\varnothing], [q_0],\ldots, [q_i], [q_0, q_1],\ldots, [q_0, q_j],\ldots, [q_0,\ldots,q_j] \}$
  - F'=skup svih $[p_0,\ldots,p_j]$ gdje je barem jedan $p_k\in F$
  - početno stanje je $q_0'=[q_0]$

Nedeterministički konačni automat

- IZGRADNJA DKA IZ ZADANOG NKA
  - funkcija prijelaza DKA jest: $\delta'([p_0,\ldots,p_l],a) = [r_0,\ldots,r_j]$ ako i samo ako je $\delta(\{p_0,\ldots,p_l\},a) = \{r_0,\ldots,r_j\}$
  - mnoga stanja dobivenog DKA su nedostupna, pa ih eliminiramo
  - DKA minimiziramo radi učinkovite programske realizacije

Nedeterministički konačni automat

- PRIMJER IZGRADNJE DKA IZ NKA
  - zadan je NKA $M=(\{q_0,q_1\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$

	0	1	⊥
q0	{q0,q1}	{q1}	0
q1	{}	{q0,q1}	1

  - $Q'=\{[\varnothing], [q_0], [q_1], [q_0, q_1]\}$
  - $F'=\{[q_1], [q_0, q_1]\}$; $q_0'=[q_0]$
  - δ' je:

$\delta'([q_0], 0)=[q_0, q_1]$ $\delta'([q_0], 1)=[q_1]$

$\delta'([q_1], 0)=[\varnothing]$ $\delta'([q_1], 1)=[q_0, q_1]$

$\delta'([q_0, q_1], 0)=[q_0, q_1]$ $\delta'([q_0, q_1], 1)=[q_0, q_1]$

$\delta'([\varnothing], 0)=[\varnothing]$ $\delta'([\varnothing], 1)=[\varnothing]$

Nedeterministički konačni automat

- PRIMJER IZGRADNJE DKA IZ NKA (nastavak)
  - dobiven je DKA M'=(Q', {0,1}, δ', [q_0], {[q_1], [q_0, q_1]})

	0	1	⊥
[q0]	[q0,q1]	[q1]	0
[q1]	[∅]	[q0,q1]	1
[q0,q1]	[q0,q1]	[q0,q1]	1
[∅]	[∅]	[∅]	0

Nedeterministički konačni automat

- ISTOVJETNOST DKA I NKA
  - DKA M’ izgrađen je na temelju NKA M
  - dokazujemo da je L(M)=L(M’) indukcijom:

    (i) $\delta'([q_0], w)=[r_0,\ldots, r_j]$

    ako i samo ako je $\delta(q_0, w)=\{r_0,\ldots, r_j\}$
  - najprije dokažemo (i) za $|w|=0$, tj. $w= \varepsilon$:

    DKA i NKA ne mogu mijenjati stanje za $w= \varepsilon$ i $q_0'=[q_0]$

    $\delta(q_0, \varepsilon)=\{q_0\}$; $\delta'([q_0], \varepsilon)=[q_0]$
  - pretpostavimo da (i) vrijedi za $x\in\Sigma^*$,

    a onda dokažemo za xa, $a\in\Sigma$

Nedeterministički konačni automat

- ISTOVJETNOST DKA I NKA (nastavak)
  - (1) $\delta'([q_0], x)=[p_0,..., p_j]$
    ako i samo ako je $\delta(q_0, x)=\{p_0,..., p_j\}$
  - obzirom na tehniku izgradnje DKA iz NKA:
    funkcija prijelaza DKA jest: $\delta'([p_0,...,p_l],a) = [r_0,...,r_j]$
    ako i samo ako je $\delta(\{p_0,...,p_l\},a) = \{r_0,...,r_j\}$
  - vrijedi
    (2) $\delta'([p_0,..., p_j], a)=[r_0,..., r_j]$
    ako i samo ako je $\delta(\{p_0,..., p_j\}, a)=\{r_0,..., r_j\}$

Nedeterministički konačni automat

- ISTOVJETNOST DKA I NKA (nastavak)
  - pa zaključujemo:

    (3) $\delta'([q_0], xa)=[r_0,..., r_j]$

    ako i samo ako je $\delta(q_0, xa)=\{r_0,..., r_j\}$
  - obzirom da je

    $\delta'([q_0], w) \in F'$ ako i samo ako

    $\delta(q_0, w)$ sadrži makar jedno stanje iz F
  - slijedi da NKA M i DKA M' prihvaćaju isti jezik

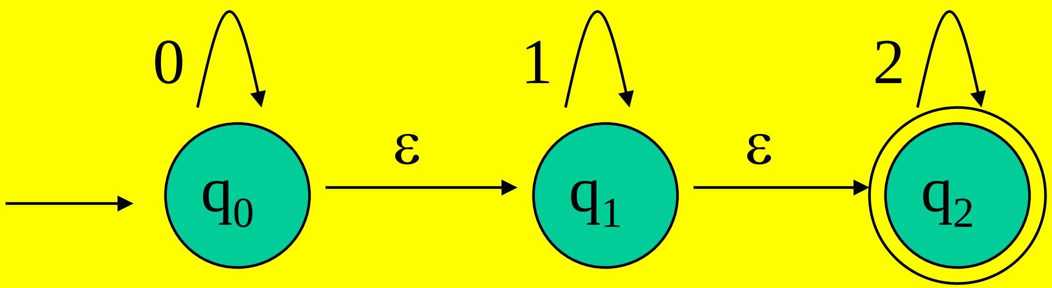
    odnosno L(M)=L(M')

2.1.4. Nedeterministički konačni automat s ε prijelazima (ε-NKA)

- ε-NKA
  - omogućimo promjenu stanja a da NKA ne pročita niti jedan ulazni znak, tj. za prazni niz ε (epsilon)
  - promjena stanja bez čitanja znaka naziva se ε-prijelaz
  - NKA i ε-NKA su istovjetni, postoji algoritam pretvorbe
  - sinteza: ε-NKA → NKA → DKA → minimalni DKA
  - prihvaća niz ako postoji najmanje jedan slijed prijelaza iz početnog stanja u prihvatljivo stanje, uključivo ε-prijelaze, uz uvjet da se pročitaju svi znakovi niza

ε - Nedeterministički konačni automat

- PRIMJER ε-NKA
  - prihvaća nizove koji
    - započinju proizvoljnim brojem nula,
    - nastavljaju proizvoljnim brojem jedinica i
    - završavaju proizvoljnim brojem dvojki
  - $L=\{0^n1^m2^l \mid n,m,l \geq 0\}$, uključuje i prazni niz ε



ε - Nedeterministički konačni automat

- PRIMJER ε-NKA (nastavak)
  - prazni niz se prihvaća

$$q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2; \quad q_2 \in F$$

  - niz 002 se prihvaća

$$q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \xrightarrow{2} q_2; \quad q_2 \in F$$

  - niz 122 se prihvaća

$$q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \xrightarrow{2} q_2 \xrightarrow{2} q_2; \quad q_2 \in F$$

  - niz 01210 se ne prihvaća

$$q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \xrightarrow{2} q_2 \xrightarrow{1} \varnothing; \quad \varnothing \notin F$$

ε - Nedeterministički konačni automat

- PRIMJER ε-NKA (nastavak)
  - tablica prijelaza:

	0	1	2	ε	⊥
q0	{q0}	∅	∅	{q1}	0
q1	∅	{q1}	∅	{q2}	0
q2	∅	∅	{q2}	∅	1

Prazni skup {} ili ∅ znači da za taj par nema prijelaza

ε - Nedeterministički konačni automat

- ε-NKA ČINI
  - skup stanja Q s početnim stanjem $q_0 \in Q$ i skupom prihvatljivih stanja $F \subseteq Q$
  - funkcija prijelaza δ: $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$ određena znakom na ulazu iz skupa Σ prošireno sa ε i skupom stanja iz skupa Q
  - 2^Q je skup svih podskupova skupa stanja Q

$$\varepsilon - nka = \left(Q, \Sigma, \delta, q_0, F\right)$$

ε - Nedeterministički konačni automat

- DEFINIRANJE FUNKCIJE

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^{*} \rightarrow 2^{Q}$$

  - zahtijeva definiranje funkcije ε-OKRUŽENJE(q) (eng. ε-closure)
  - stanju q $\in$Q dodjeljujemo skup R $\subseteq$Q tako da R sadrži sva ona stanja u koja q prelazi isključivo ε-prijelazom

ε-OKRUŽENJE(q) = {p| p jest q ili ε-NKA prelazi iz q u p isključivo ε-prijelazom}

ε - Nedeterministički konačni automat

- ZA PRIMJER
  - ε-OKRUŽENJE pridružuje skupove:

    ε-OKRUŽENJE(q0) = {q0, q1, q2}
    ε-OKRUŽENJE(q1) = {q1, q2}
    ε-OKRUŽENJE(q2) = {q2}

- ZA SKUP P

$$\varepsilon - \text{OKRUŽENJE}(P) = \bigcup_{q \in P} \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}(q); \quad P \subseteq Q$$

ε - Nedeterministički konačni automat

- DEFINIRAMO FUNKCIJU

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$$

  – uključujemo i ε-prijelaze pa imamo:

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}\{q\}$$

$$\hat{\delta}(q, wa) = \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}\{P\}; \; P = \left\{ p \,\middle|\, r \in \hat{\delta}(q, w) \Rightarrow p \in \delta(r, a) \right\}$$

  – za skupove stanja vrijedi:

$$\delta(R, a) = \bigcup_{q \in R} \delta(q, a)$$

$$\hat{\delta}(R, w) = \bigcup_{q \in R} \hat{\delta}(q, w)$$

ε - Nedeterministički konačni automat

- DEFINIRAMO FUNKCIJU
  - skupovi nisu nužno isti:

$$\delta(q_0, \varepsilon) \lesseqgtr \hat{\delta}(q_0, \varepsilon)$$

  - na primjer:

$$\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_1\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$$

ε - Nedeterministički konačni automat

- DEFINIRAMO FUNKCIJU
  - također nisu nužno isti skupovi:

$$\delta(q_0, a) \lesseqgtr \hat{\delta}(q_0, a)$$

  - pa razlikujemo te dvije funkcije; za primjer:

$$\delta(q_0,1) = \{\ \} = \varnothing$$

$$\hat{\delta}(q_0,1) = \hat{\delta}(q_0, \varepsilon 1) = \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}\left(\delta\left(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon),1\right)\right)$$

$$= \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}\left(\delta\left(\{q_0, q_1, q_2\},1\right)\right) =$$

$$= \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}\left(\delta(q_0,1) \cup \delta(q_1,1) \cup \delta(q_2,1)\right)$$

$$= \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}\left(\varnothing \cup \{q_1\} \cup \varnothing\right) =$$

$$= \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}\left(\{q_1\}\right) = \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}(q_1) = \{q_1, q_2\}$$

ε - Nedeterministički konačni automat

- DEFINIRAMO FUNKCIJU
  - u funkciji $\delta(q_0, a)$ 1 je znak za koji nema prijelaza iz q_0
  - u funkciji $\hat{\delta}(q_0, a)$ za 1 možemo definirati prelaze:

$$q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{1} q_1; \qquad q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2$$

ε - Nedeterministički konačni automat

- IZGRADNJA NKA IZ ZADANOG ε-NKA
  - Za bilo koji ε-NKA $M=\{Q,\Sigma,\delta,q_0,F\}$ moguće je izgraditi istovjetni NKA $M'=\{Q',\Sigma',\delta',q_0',F'\}$
  - ε- NKA i NKA su istovjetni ako prihvaćaju isti jezik $L(M)=L(M')$
  - izgradimo $Q'= Q =\{q_0,\ldots,q_i\}$
  - početno stanje je $q_0'=q_0$
  - $F'=F\cup\{q_0\}$ ako ε-OKRUŽENJE(q0) sadrži barem jedno stanje $p_k\in F$, inače $F'=F$
  - $\delta'(q,a)=\hat{\delta}(q,a)$

ε - Nedeterministički konačni automat

- PRIMJER IZGRADNJE NKA IZ ε-NKA
  - izgradimo Q' = Q = {q0, q1, q2}
  - početno stanje je $q_0' = q_0$
  - $F' = F \cup \{q_0\} = \{q_2\} \cup \{q_0\} = \{q0, q2\}$
    jer je
    ε-OKRUŽENJE(q0)$\cap$F = {q0, q1, q2}$\cap\{q_2\} = \{q_2\}$
  - funkcija δ': $\delta'(q_0, 0) = \{q_0, q_1, q_2\}$ jer je:

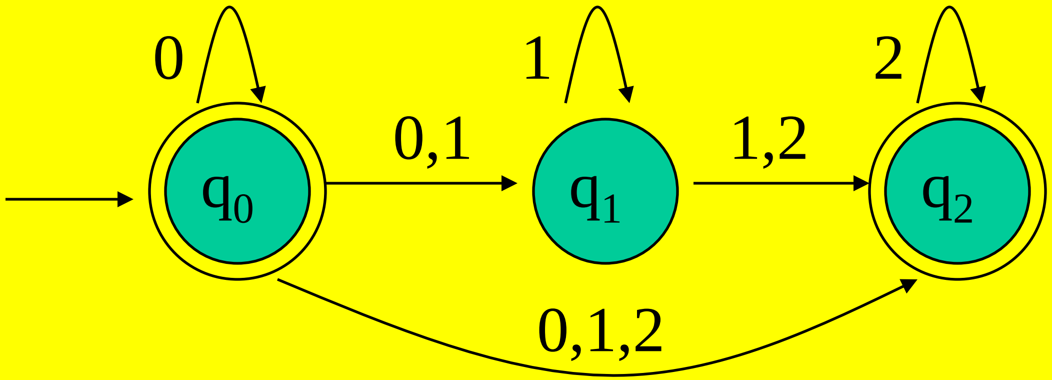
$$\hat{\delta}(q_0, 0) = \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}\left(\delta\left(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), 0\right)\right) = \{q_0, q_1, q_2\}$$

itd.

ε - Nedeterministički konačni automat

- PRIMJER IZGRADNJE NKA IZ ε-NKA
  - dobije se NKA:

	0	1	2	⊥
q0	{q0,q1,q2}	{q1,q2}	{q2}	1
q1	∅	{q1,q2}	{q2}	0
q2	∅	∅	{q2}	1



ε - Nedeterministički konačni automat

- DOVRŠIMO PRIMJER IZGRADNJOM DKA
  - dobije se:

    $Q'' = \{[\varnothing],[q_0],[q_1],[q_2],[q_0,q_1],[q_0,q_2],[q_1,q_2],[q_0,q_1,q_2]\}$

    $F'' = \{[q_0],[q_2],[q_0,q_1],[q_0,q_2],[q_1,q_2],[q_0,q_1,q_2]\}$

	0	1	2	⊥
[∅]	[∅]	[∅]	[∅]	0
[q0]	[q0,q1,q2]	[q1,q2]	[q2]	1
[q1]	[∅]	[q1,q2]	[q2]	0
[q2]	[∅]	[∅]	[q2]	1
[q0,q1]	[q0,q1,q2]	[q1,q2]	[q2]	1
[q0,q2]	[q0,q1,q2]	[q1,q2]	[q2]	1
[q1,q2]	[∅]	[q1,q2]	[q2]	1
[q0,q1,q2]	[q0,q1,q2]	[q1,q2]	[q2]	1

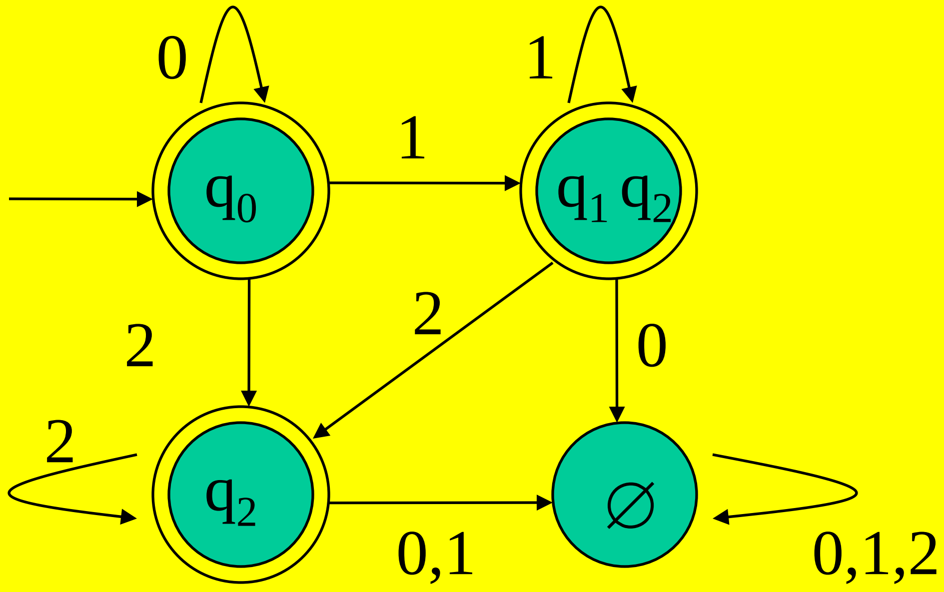
ε - Nedeterministički konačni automat

- DOVRŠIMO PRIMJER IZGRADNJOM DKA
  - izbacimo nedostupna stanja:
    NS''={$[q_1],[q_0,q_1],[q_0,q_2]$}; $[q_0]$ je početno stanje
  - eliminirajmo ekvivalentna stanja:
    $[q_0]\equiv[q_0,q_1,q_2]$}

	0	1	2	⊥
[∅]	[∅]	[∅]	[∅]	0
[q0]	[q0]	[q1,q2]	[q2]	1
[q2]	[∅]	[∅]	[q2]	1
[q1,q2]	[∅]	[q1,q2]	[q2]	1

ε - Nedeterministički konačni automat

- DOVRŠIMO PRIMJER IZGRADNJOM DKA
  - nacrtajmo graf DKA:



ε - Nedeterministički konačni automat

- ISTOVJETNOST ε-NKA I NKA
  - NKA M' izgrađen je na temelju ε-NKA M
  - dokazujemo da je L(M)=L(M') indukcijom:

(i) $$\delta'(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, x)$$

(ii) $\delta'(q_0, x)$ sadrži stanje iz F' ako i samo ako

$\hat{\delta}(q_0, x)$ sadrži stanje iz skupa F

ε - Nedeterministički konačni automat

- ISTOVJETNOST ε-NKA I NKA
  - budući da je $\delta'(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$

    a $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}(q_0)$

    tvrdnja $\delta'(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, x)$

    nije nužno istinita za $x=\varepsilon$
  - zato indukcija kreće sa $|x|=1$

ε - Nedeterministički konačni automat

- ISTOVJETNOST ε-NKA I NKA

i-a) za niz |x|=1 vrijedi na temelju konstrukcije NKA

$$\delta'(q_0, a) = \hat{\delta}(q_0, a)$$

i-b) za niz wa pretpostavljamo induktivnu hipotezu:

$$P = \delta'(q_0, w) = \hat{\delta}(q_0, w)$$

pa na osnovu definicije NKA $\delta'(q_0, wa) = \delta'(\delta'(q_0, w), a)$
vrijedi:

$$\delta'(\delta'(q_0, w), a) = \delta'(P, a)$$

ε - Nedeterministički konačni automat

- ISTOVJETNOST ε-NKA I NKA

  prema definiciji funkcije δ’ NKA

$$\delta'(P,a) = \bigcup_{q\in P} \delta'(q,a)$$

  na temelju konstrukcije NKA slijedi:

$$\bigcup_{q\in P} \delta'(q,a) = \bigcup_{q\in P} \hat{\delta}(q,a)$$

  pa vrijedi:

$$\bigcup_{q\in P} \hat{\delta}(q,a) = \hat{\delta}(P,a) = \hat{\delta}\left(\hat{\delta}(q_0,w),a\right) = \hat{\delta}(q_0,wa)$$

ε - Nedeterministički konačni automat

- ISTOVJETNOST ε-NKA I NKA

  (ii) dokazujemo da $\delta'(q_0, x)$ sadrži stanje iz F'

  ako i samo ako $\hat{\delta}(q_0, x)$ sadrži stanje iz skupa F

  obzirom da je F'=F ili F'=F$\cup\{q_0\}$ zapravo dokazujemo da je za niz x

$$q_0 \in \hat{\delta}(q_0, x) : \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}(q_0) \subseteq \hat{\delta}(q_0, x)$$

  vrijedi za prazni niz:

$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}(q_0)$$

ε - Nedeterministički konačni automat

- ISTOVJETNOST ε-NKA I NKA

  za neprazni niz x≠ε pišemo x=wa i pretpostavimo

  $$q_0 \in \delta'(q_0, x)$$

  želimo dokazati da $\hat{\delta}(q_0, x)$ sadrži sva stanja iz ε-OKRUŽENJA(q_0)

  obzirom na (i) vrijedi:

  $$q_0 \in \delta'(q_0, x) \Rightarrow q_0 \in \hat{\delta}(q_0, x)$$

  i obzirom da:

  $$\hat{\delta}(q_0, x) = \varepsilon - \text{OKRUŽENJE}\left(\delta\left(\hat{\delta}(q_0, w)\right), a\right)$$

  uključuje p iz $\hat{\delta}(q_0, x)$ uključivo ε-OKRUŽENJA(p)

  dokazano je

  $$\varepsilon - \text{OKRUŽENJE}(q_0) \subseteq \hat{\delta}(q_0, x)$$

2.1.5. Konačni automati s izlazom

- DKA (DFA) s izlazom
  - izlaz je ograničen funkcijom (0,1) koja označava da li se niz prihvaća ili odbacuje
  - funkcija izlaza proširuje se na dva načina:
    - Moore = izlaz je funkcija stanja
    - Mealy = izlaz je funkcija stanja i ulaza
  - za Mealy je moguće izgraditi istovjetni Moore i obrnuto
  - Mealy i Moore automati su istovjetni ako za bilo koji ulazni niz daju jednake izlazne nizove

Konačni automati s izlazom

- Moore automat
  - formalno se zadaje šestorkom

$$\mathrm{MoDka} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$$

  - Q je skup stanja, $q_0 \in Q$ početno stanje
  - Σ je konačan skup ulaznih znakova,
  - Δ je konačan skup izlaznih znakova,
  - δ je funkcija prijelaza $Q \times \Sigma \to Q$,
  - λ je funkcija izlaza $Q \to \Delta$

Konačni automati s izlazom

- Moore automat
  - za ulazni niz $a_1a_2...a_n$ ($n \geq 0$, $a_i \in \Sigma$) prelazi stazu

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$$

  - pri tome generira niz izlaznih simbola:

$$\lambda(q_0)\lambda(q_1)\lambda(q_2)\cdots\lambda(q_{n'1})\lambda(q_n)$$

  - za prazni niz ε Moore automat daje izlaz $\lambda(q_0)$

Konačni automati s izlazom

- Moore automat
  - DKA

$$M' = \left(Q', \Sigma', \delta', q_0', F'\right)$$

    je poseban slučaj Moore automata sa $\Delta=\{0,1\}$
  - pri tome je:

$$\lambda'\left(q' \in F\right) = 1 \qquad ; \qquad \lambda'\left(q' \notin F\right) = 0$$

  - niz se prihvaća ako je $\lambda(q')=1$

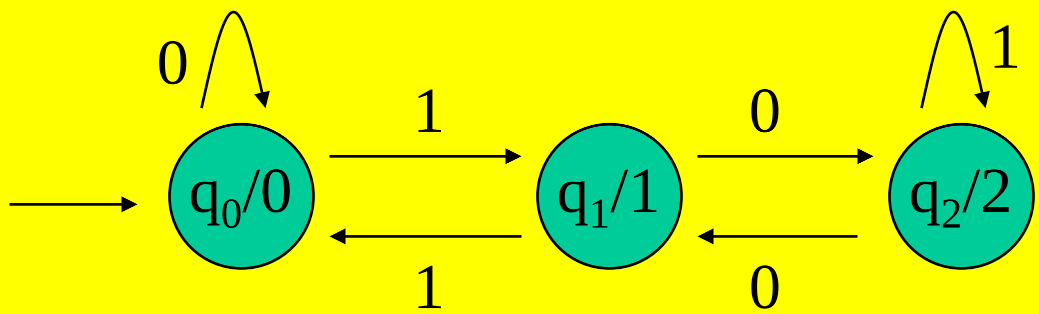
Konačni automati s izlazom

- Moore automat - primjer
  - Za niz koji predstavlja binarni broj potrebno je izgraditi Moore automat koji za pročitani prefiks niza daje ostatak dijeljenja broja s 3
  - Vrijedi tablica:

w	w0	w1
$i/3$	$(2i)/3$	$(2i+1)/3$
0	0	1
1	2	0
2	1	2

Konačni automati s izlazom

- Moore automat - primjer
  - Formiramo automat



  - za niz 1010 imamo:

$$\xrightarrow{\varepsilon} \underset{\substack{\varepsilon \\ 0}}{q_0/0} \xrightarrow{1} \underset{\substack{1 \\ 1}}{q_1/1} \xrightarrow{0} \underset{\substack{10 \\ 2}}{q_2/2} \xrightarrow{1} \underset{\substack{101 \\ 5}}{q_2/2} \xrightarrow{0} \underset{\substack{1010 \\ 10}}{q_1/1}$$

Konačni automati s izlazom

- Mealy automat
  - formalno se zadaje šestorkom

$$\text{MeDka} = \left(Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0\right)$$

  - Q je skup stanja, $q_0 \in Q$ početno stanje
  - Σ je konačan skup ulaznih znakova,
  - Δ je konačan skup izlaznih znakova,
  - δ je funkcija prijelaza $Q \times \Sigma \rightarrow Q$,
  - λ je funkcija izlaza $Q \times \Sigma \rightarrow \Delta$

Konačni automati s izlazom

- Mealy automat
  - za ulazni niz $a_1a_2...a_n$ ($n \geq 0$, $a_i \in \Sigma$) prelazi stazu

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$$

  - pri tome generira niz izlaznih simbola:

$$\lambda(q_0, a_1)\lambda(q_1, a_2)\lambda(q_2, a_3)\cdots\lambda(q_{n-1}, a_n)$$

  - za prazni niz ε Mealy automat **ne** daje izlaz

Konačni automati s izlazom

- Konstrukcija Mealy iz zadanog Moore automata
  - za prazni niz ε Moore M daje a Mealy M’ ne daje izlaz
  - istovjetnost se definira:

$$bT_{M'}(w) = T_M(w); \qquad b = \lambda(q_0)$$

    za niz nakon početnog simbola b Moore automata

  - za Mealy automat gradi se izmijenjena funkcija izlaza:

$$\lambda'(q,a) = \lambda(\delta(q,a)); \qquad \forall q \in Q, a \in \Sigma$$

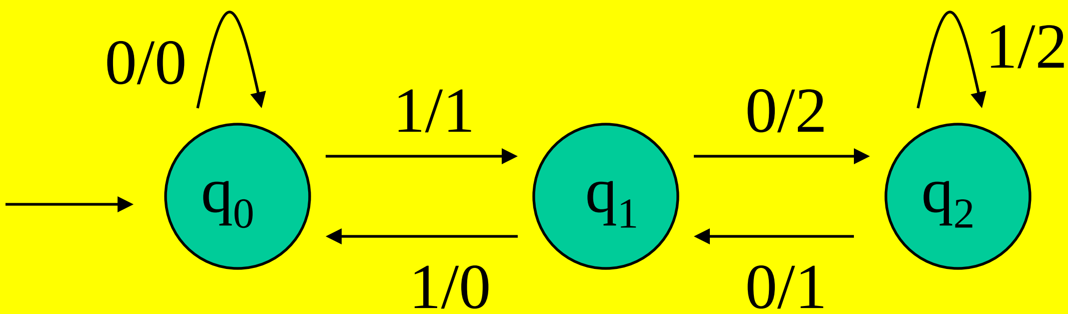
Konačni automati s izlazom

- Konstrukcija Mealy iz zadanog Moore - primjer
  - za raniji primjer ostatka dijeljenja s 3 vrijedi:

$$\lambda'(q_0,0)=0; \qquad \lambda'(q_0,0)=\lambda(\delta(q_0,0))=\lambda(q_0)=0$$
$$\lambda'(q_0,1)=1; \qquad \lambda'(q_0,1)=\lambda(\delta(q_0,1))=\lambda(q_1)=1$$
$$\lambda'(q_1,0)=2; \qquad \lambda'(q_1,0)=\lambda(\delta(q_1,0))=\lambda(q_2)=2$$
$$\lambda'(q_1,1)=0; \qquad \lambda'(q_1,1)=\lambda(\delta(q_1,1))=\lambda(q_0)=0$$
$$\lambda'(q_2,0)=1; \qquad \lambda'(q_2,0)=\lambda(\delta(q_2,0))=\lambda(q_1)=1$$
$$\lambda'(q_2,1)=2; \qquad \lambda'(q_2,1)=\lambda(\delta(q_2,1))=\lambda(q_2)=2$$

Konačni automati s izlazom

- Konstrukcija Mealy iz zadanog Moore - primjer
  - nacrtamo graf:



  - za niz 1010 imamo

$$\xrightarrow{\varepsilon} q_0 \xrightarrow{1/1} q_1 \xrightarrow{0/2} q_2 \xrightarrow{1/2} q_2 \xrightarrow{0/1} q_1$$

ε	1	10	101	1010
0	1	2	5	10

Konačni automati s izlazom

- Konstrukcija Moore iz zadanog Mealy
  - iz Mealy M izgradimo Moore automat M' tako da je:
  - $Q' = Q \times \Delta$; $[q,b] \in Q'$, $q \in Q$ i $b \in \Delta$
  - $q_0' = [q_0, b_0]$; $b_0 \in \Delta$ je proizvoljan
  - $\delta'([q,b],a) = [\delta(q,a), \lambda(q,a)]$; $q \in Q$, $b \in \Delta$, $a \in \Sigma$
  - $\lambda'([q,b]) = b$; $q \in Q$, $b \in \Delta$

Konačni automati s izlazom

- Konstrukcija Moore iz zadanog Mealy
  - Ako Mealy M za niz $a_1a_2...a_n$ ($n \geq 0$, $a_i \in \Sigma$) daje niz:

$$\lambda(q_0, a_1)\lambda(q_1, a_2)\lambda(q_2, a_3)\cdots\lambda(q_{n-1}, a_n) = b_1 b_2 \cdots b_n$$

  - izgrađeni Moore prelazi stazu

$$\begin{aligned}
&[q_0, b_0], \delta'([q_0, b_0], a_1), \cdots, \delta'([q_{n-1}, b_{n-1}], a_n) = \\
&[q_0, b_0], [\delta(q_0, a_1), \lambda(q_0, a_1)], \cdots, [\delta(q_{n-1}, a_n), \lambda(q_{n'1}, a_n)] = \\
&[q_0, b_0], [q_1, b_1], \cdots, [q_n, b_n]
\end{aligned}$$

  - i daje izlazni niz

$$\lambda'[q_0, b_0], \lambda'[q_1, b_1], \cdots, \lambda'[q_n, b_n] = b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$$

Konačni automati s izlazom

- Konstrukcija Moore iz zadanog Mealy - primjer
  - skup stanja Q’ je

$$Q' = \{[q_0,0],[q_0,1],[q_0,2],[q_1,0],[q_1,1],[q_1,2],[q_2,0],[q_2,1],[q_2,2]\}$$

  - početno stanje q_0’ je $q' = [q_0,0]$ i funkcija prijelaza je:

$$\delta'([q_0,0],0) = [q_0,0];$$
$$\delta'([q_0,0],1) = [q_1,1];$$
$$\delta'([q_1,0],0) = [q_2,2];$$
$$\delta'([q_1,0],1) = [q_0,0];$$
$$\delta'([q_2,0],0) = [q_1,1];$$
$$\delta'([q_2,0],1) = [q_2,2];$$

$$\delta'([q_0,1],0) = [q_0,0];$$
$$\delta'([q_0,1],1) = [q_1,1];$$
$$\delta'([q_1,1],0) = [q_2,2];$$
$$\delta'([q_1,1],1) = [q_0,0];$$
$$\delta'([q_2,1],0) = [q_1,1];$$
$$\delta'([q_2,1],1) = [q_2,2];$$

$$\delta'([q_0,2],0) = [q_0,0]$$
$$\delta'([q_0,2],1) = [q_1,1];$$
$$\delta'([q_1,2],0) = [q_2,2]$$
$$\delta'([q_1,2],1) = [q_0,0];$$
$$\delta'([q_2,2],0) = [q_1,1]$$
$$\delta'([q_2,2],1) = [q_2,2];$$

Konačni automati s izlazom

- Konstrukcija Moore iz zadanog Mealy - primjer
  - odbacimo nedostupna stanja i dobijemo polazni Moore:

$$\delta'([q_0,0],0)=[q_0,0]; \qquad \delta'([q_0,0],1)=[q_1,1];$$
$$\delta'([q_1,1],0)=[q_2,2]; \qquad \delta'([q_1,1],1)=[q_0,0];$$
$$\delta'([q_2,2],0)=[q_1,1] \qquad \delta'([q_2,2],1)=[q_2,2];$$

  - funkcija izlaza je:

$$\lambda'([q_0,0])=0; \qquad \lambda'([q_0,0])=0;$$
$$\lambda'([q_1,1])=1; \qquad \lambda'([q_1,1])=1;$$
$$\lambda'([q_2,2])=2 \qquad \lambda'([q_2,2])=2;$$