DIGITALNI SUSTAVI ZA OBRADU SIGNALA

DSOS12

Julije Ožegović
FESB Split

DIGITALNI SUSTAVI ZA OBRADU SIGNALA

- UVOD: ANALOGNI I DIGITALNI SUSTAVI
- I. OSNOVE DIGITALNE OBRADE SIGNALA
- II. DIGITALNI FILTRI U VREMENSKOM
  I FREKVENCIJSKOM PODRUČJU
- III. STRUKTURA DIGITALNIH SUSTAVA
  ZA OBRADU SIGNALA
- IV. DIGITALNA OBRADA SIGNALA U PRIMJENI

I. OSNOVE DIGITALNE OBRADE SIGNALA

- 1. DIGITALNA OBRADA SIGNALA
- 2. SUSTAVI ZA DIGITALNU OBRADU SIGNALA
- 3. ANALIZA U VREMENSKOM PODRUČJU
- 4. DIGITALNA KONVOLUCIJA
- 5. ANALIZA U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU
- 6. TRANSFORMACIJA APERIODIČKIH DIGITALNIH SEKVENCI
- 7. Z TRANSFORMACIJA

3. ANALIZA U VREMENSKOM PODRUČJU

- 3.1. VREMENSKI OPIS SIGNALA
- 3.2. LTI ODZIV NA IMPULS
- 3.3. LTI ODZIV NA STEP

3.1. VREMENSKI OPIS SIGNALA

- SVOJSTVA VREMENSKE OBRADE
- SIGNAL KAO SUMA IMPULSA
- SVOJSTVA SUME IMPULSA

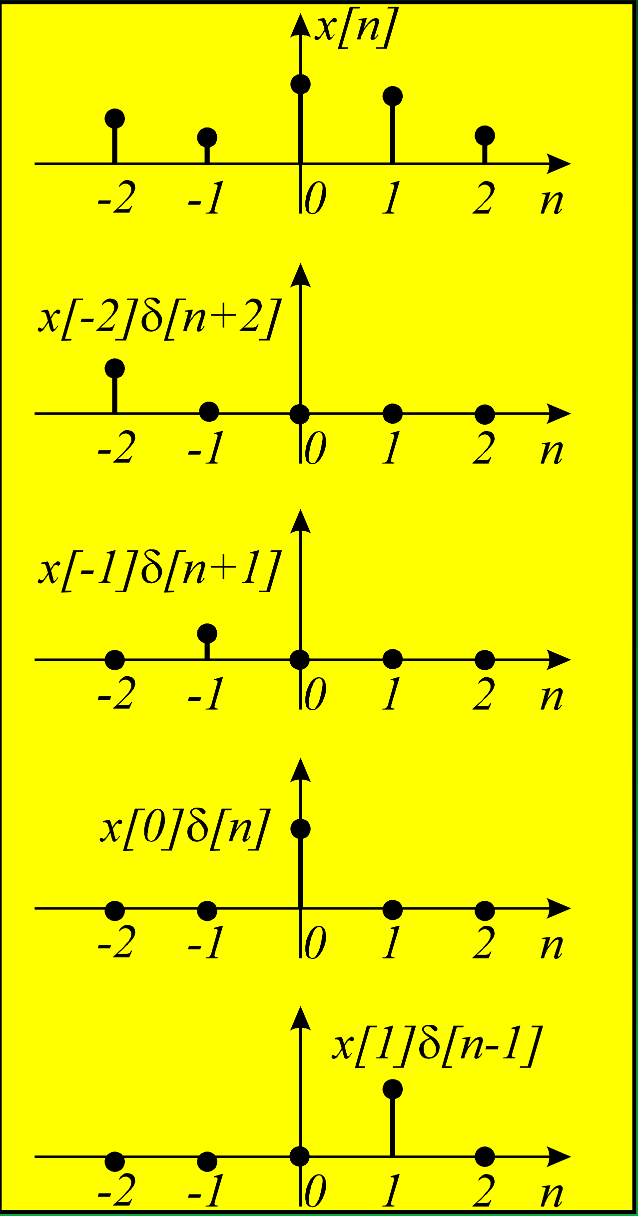
- SVOJSTVA VREMENSKE OBRADE

- Vremenska obrada pruža tehnike:
  - opis signala kao niz impulsa $x_k \cdot \delta[n-k]$
  - opis sustava kao odziv na impuls h[k] ili step
  - konvolucijsku sumu kao tehniku izračunavanja odziva $y[n] = h[n]*x[n]$
  - kontinuirano konvolucija je integral
  - diskretno je samo suma odziva na pojedinačni impuls
- Analiza:
  - vremenska obrada omogućava analizu, sinteza se obavlja na osnovu zahtjeva u frekvencijskom području

- SIGNAL KAO SUMA IMPULSA

- Signal opisujemo koristeći impuls:
  - pojedini uzorak signala je zapravo impuls
    - amplitude x[n]
    - pomaknut iz 0 na mjesto n

$$x[k]\cdot\delta[n-k]$$



SIGNAL KAO SUMA IMPULSA

- Ukupni signal
  - je suma pojedinačnih impulsa

$$x[n] = \cdots x[-2]\cdot\delta[n+2] + x[-1]\cdot\delta[n+1] + x[0]\cdot\delta[n] + \\ + x[1]\cdot\delta[n-1] + x[2]\cdot\delta[n-2]\cdots$$

  - ili kraće

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k]$$

- SVOJSTVA SUME IMPULSA

- Svojstvo selektiranja
  - za konkretni n

$$x[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[4-k]$$

  - odnosno pomaknuti impuls δ[n-k]selektira odnosno bira vrijednost x[n] iz niza vrijednosti

3.2. LTI ODZIV NA IMPULS

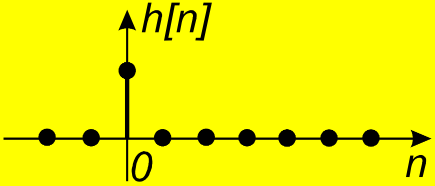
- DEFINICIJA ODZIVA NA IMPULS
- OBLICI ODZIVA NA IMPULS I SVOJSTVA LTI

- DEFINICIJA ODZIVA NA IMPULS

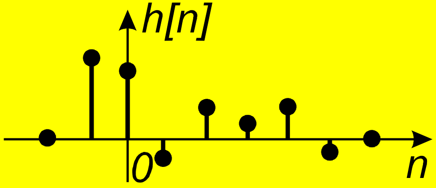
- Ispitujemo odziv LTI na impuls:
  - impuls je sigurno vremenski ograničen!
  - pobuda postoji samo u n=0 s amplitudom 1, inače je 0
  - svaki odziv na jedinični impuls je isključivo karakteristika sustava, jer impuls završava istog trenutka
  - možemo kazati da impuls donosi trenutni impuls energije na LTI, a dalje je stvar LTI da stabilizira svoj izlaz
- Značaj odziva na impuls:
  - iskazuje svojstvo sustava
  - značajan za LTI i označava s h[n]

- OBLICI ODZIVA NA IMPULS I SVOJSTVA LTI

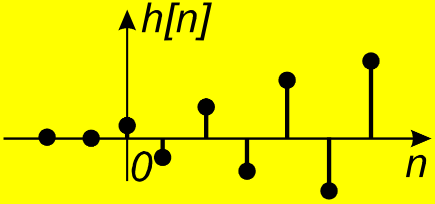
- Svojstva LTI i oblik impulsnog odziva
  - bez memorije:



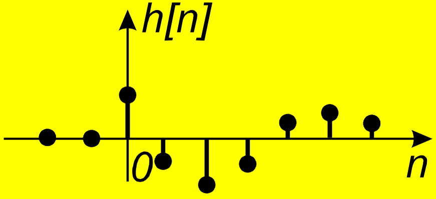
  - nekauzalan, starta prije pobude



  - nestabilan,
    izlaz se raspiruje

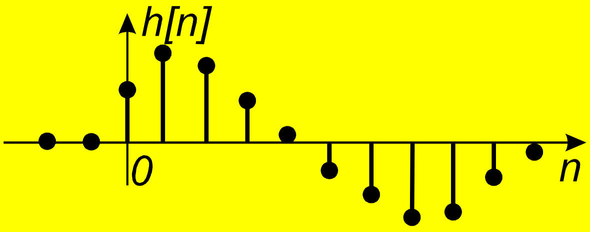


  - stabilan, kauzalan, s memorijom:



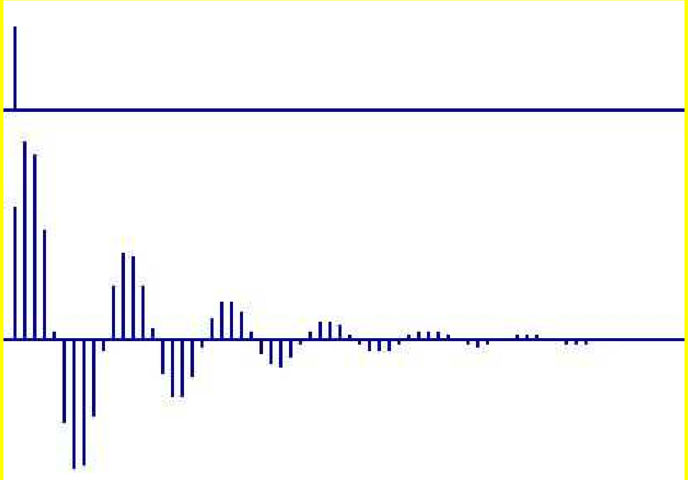
PRIMJER IMPULSNOG ODZIVA

- Odziv rekurzivnog filtra aritmetički:
  - zadan: $y[n]=1{,}5\cdot y[n-1]-0{,}85\cdot y[n-2]+x[n]$
  - uvrstimo $x[n]=\delta[n]$
  - slijedi $y[n]=1{,}5\cdot y[n-1]-0{,}85\cdot y[n-2]+\delta[n]$
  - izračunamo niz izlaza: 1 1,5 1,4 ...



PRIMJER IMPULSNOG ODZIVA

- Odziv rekurzivnog filtra programom:
  - zadan: $y[n] = 1{,}5 \cdot y[n-1] - 0{,}85 \cdot y[n-2] + x[n]$
  - program 4:
    $$y[n] = a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2] + a_3 \cdot y[n-3] + \\ + b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2]$$
  - parametri: 1.5, –0.85, 0 i 1, 0, 0
  - stabilan, kauzalan,
  - uočavamo prirodnu frekvenciju



3.3. LTI ODZIV NA STEP

- DEFINICIJA ODZIVA NA STEP
- ZNAČAJ ODZIVA NA STEP

- DEFINICIJA ODZIVA NA STEP

- Ispitujemo odziv LTI na step
  - ako je step u[n] pomična suma impulsa,
    odziv na step s[n] je pomična suma jediničnih odziva

$$s[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[m]$$

  - a h[n] je diferencija prvog reda od s[n]

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

- ZNAČAJ ODZIVA NA STEP

- Ispitujemo odziv LTI na step
  - odziv na step daje istu informaciju kao odziv na impuls
  - step kao pobuda je čest signal, formira niz impulsa
  - često se koristi u automatskoj regulaciji
    za ispitivanje regulatora
  - jasno prikazuje istosmjerni odziv sustava
  - moguće primijeniti kao osnovu za konvoluciju,
    iako je odziv na impuls mnogo češće u uporabi
  - program 4: preurediti tako da popuni
    pobudno polje jedinicama

4. DIGITALNA KONVOLUCIJA

- 4.1. KONVOLUCIJSKA SUMA
- 4.2. SVOJSTVA KONVOLUCIJE
- 4.3. PRIJELAZNE POJAVE U LTI SUSTAVIMA
- 4.4. JEDNADŽBE DIFERENCIJA

4.1. KONVOLUCIJSKA SUMA

- DEFINICIJA KONVOLUCIJE
- IZRAČUNAVANJE KONVOLUCIJE
- KOMUTATIVNOST KONVOLUCIJE
- EKSPLICITNA I IMPLICITNA KONVOLUCIJA

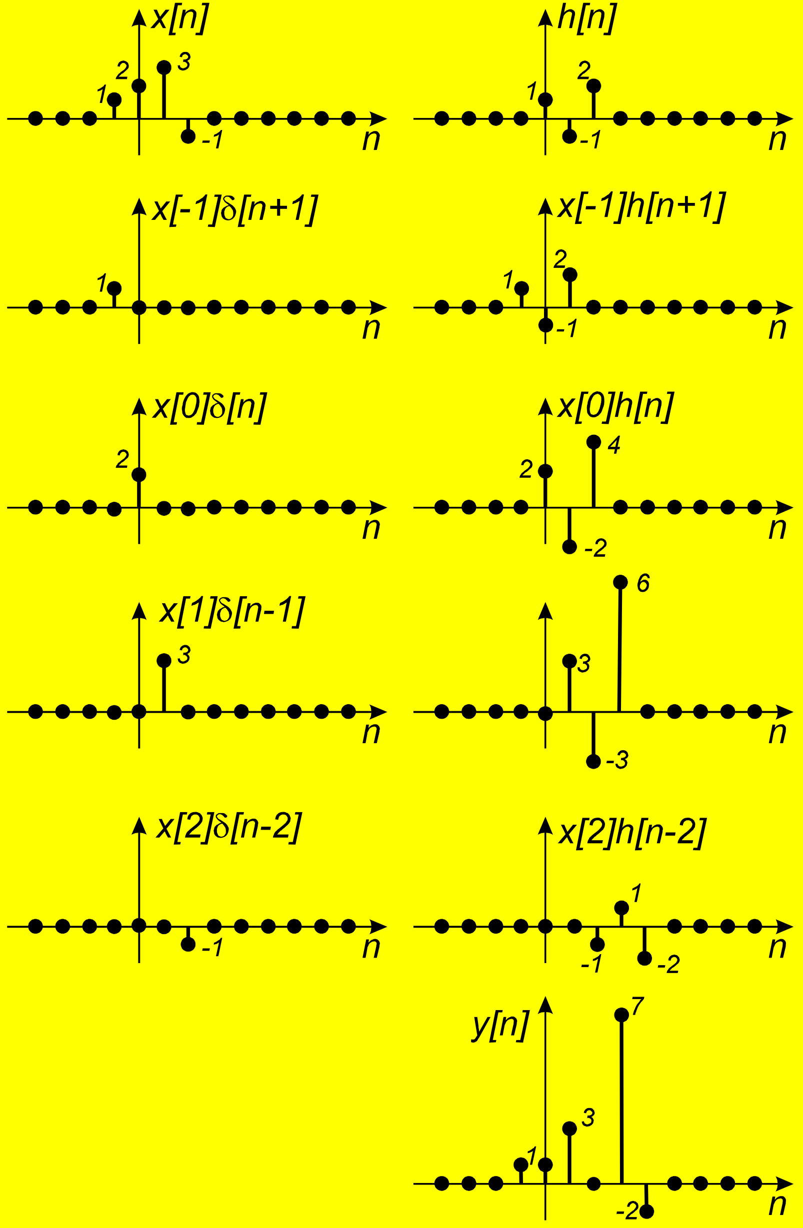
- DEFINICIJA KONVOLUCIJE

- Odziv LTI kao suma jediničnih odziva
  - ulazni signal je niz impulsa
  - svaki ulazni impuls generira svoj odziv h[n] pomaknut prema vremenu ulaznog impulsa
  - neki izlaz y[n] je suma komponenti odziva svih dotadašnjih pobuda u tom trenutku

$$y[n] = \cdots + x[-2]\cdot h[n+2] + x[-1]\cdot h[n+1] + x[0]\cdot h[n] +$$
$$+ x[1]\cdot h[n-1] + x[2]\cdot h[n-2] + \cdots$$

  - to je **konvolucijska suma**

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k]$$


x[n]
h[n]
x[-1]δ[n+1]
x[-1]h[n+1]
x[0]δ[n]
x[0]h[n]
x[1]δ[n-1]
x[2]δ[n-2]
x[2]h[n-2]
y[n]
n

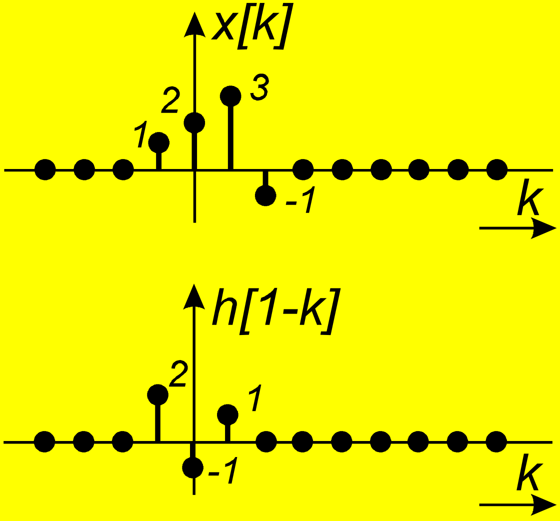
- IZRAČUNAVANJE KONVOLUCIJE

- Analiziramo konvoluciju i izračunamo y[n]
  - polazimo od konvolucijske sume

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

  - izračunamo y[1]=3

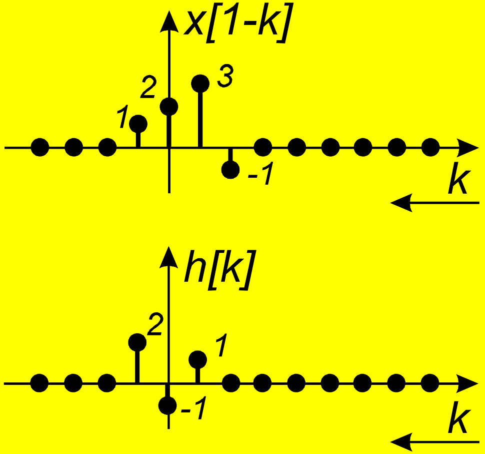
$$y[1] = x[-1] \cdot h[2] + x[0] \cdot h[1] + \\ + x[1] \cdot h[0]$$



  - to je kao da smo odziv okrenuli naopako od trenutka izlaza i nakon toga zbrojili umnoške

IZRAČUNAVANJE KONVOLUCIJE

- Efekt filtriranja
  - vrijednost y[n] je suma impulsa pobude pomnoženih sa impulsima odziva uzetog unatrag
  - to je filtar gdje je obrnuti odziv zapravo skup težinskih faktora filtra
  - sumaciju možemo obaviti s desna na lijevo



$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot x[n-k]$$

  - uvijek odziv crtamo obrnuto

- KOMUTATIVNOST KONVOLUCIJE

- Dvije formule za konvoluciju
  - x[n] i h[n] su zamijenili mjesta

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] \qquad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot x[n-k]$$

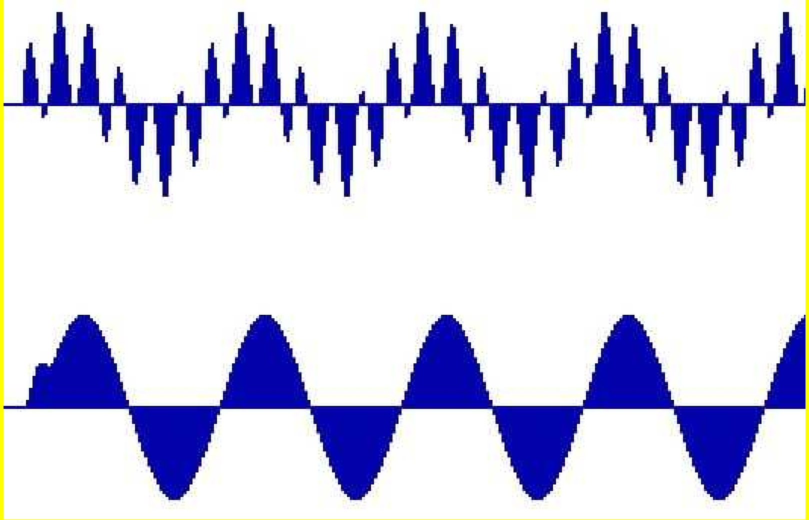
  - konvolucija je komutativna, simbol *

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

  - signali i odzivi su ravnopravni
  - izlaz je isti ako imamo pobudu h[n] i odziv x[n]

PRIMJER KONVOLUCIJE

- Program 5
  - izračunava eksplicitnu konvoluciju
  - popuniti polja x pobudom i h odzivom
  - u primjeru se filtrira signal od dvije komponente
  - uočavamo prijelaznu pojavu zbog naglog početka pobude



- EKSPLICITNA I IMPLICITNA KONVOLUCIJA

- Optimizacija računanja
  - računamo konvolucijsku sumu to je **eksplicitna** konvolucija
    $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$
  - jednostavni filtar s usrednjavanjem možemo efikasno računati rekurzivnom formulom
    $$y[n] = \sum_{k=0}^{4} 0{,}2 \cdot x[n-k]$$

$$y[n] = y[n-1] + 0{,}2 \cdot \{x[n] - x[n-4]\}$$

  - to je **implicitna** konvolucija
  - za neke sustave nije moguće pronaći rekurzivnu formulu

4.2. SVOJSTVA KONVOLUCIJE

- -KOMUTATIVNOST
- - ASOCIJATIVNOST
- - DISTRIBUTIVNOST
- - PARALELNI I SERIJSKI SUSTAVI

- KOMUTATIVNOST KONVOLUCIJE

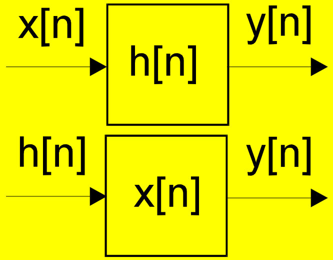
- Pokazana je ranije
  - x[n] i h[n] su zamijenili mjesta

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] \qquad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

  - konvolucija je komutativna, simbol *

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

  - signali i odzivi su ravnopravni
  - izlaz je isti ako imamo pobudu h[n] i odziv x[n]



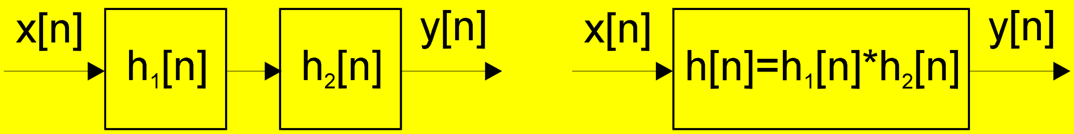
- ASOCIJATIVNOST KONVOLUCIJE

- Konvolucija je asocijativna
  - svejedno je kako se grupiraju članovi konvolucije

$$x[n]*\{h_1[n]*h_2[n]\}=\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]$$

  - znači da se dva serijska sustava mogu zamijeniti jednim
  - ukupni impulsni odziv jednak je konvoluciji odziva:

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]$$



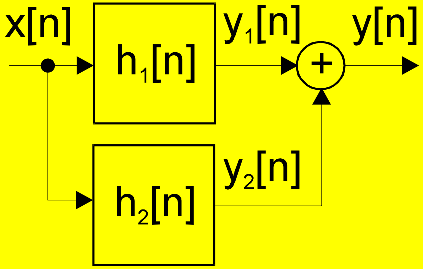
- DISTRIBUTIVNOST KONVOLUCIJE

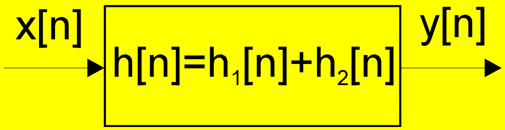
- Konvolucija je distributivna
  - obzirom na superpoziciju vrijedi

$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = \{x[n] * h_1[n]\} + \{x[n] * h_2[n]\}$$

  - znači da se dva paralelna sustava mogu zamijeniti jednim
  - ukupni impulsni odziv jednak je sumi odziva:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$





4.3. PRIJELAZNE POJAVE U LTI SUSTAVIMA

- EFEKAT KONAČNOSTI
- PRIJELAZNE POJAVE
- PRIMJER PRIJELAZNE POJAVE

- EFEKT KONAČNOSTI

- LTI i signali su konačnog trajanja
  - **LTI** je uključen u nekom trenutku,
    a nakon toga je isključen
  - U trenutku uključenja memorija je prazna
  - **Signal** započne u nekom trenutku, a nakon toga nestane
  - Ako prije ranije bilo signala,
    kod uključenja signala je memorija LTI prazna
  - Kod isključenja signala memorija LTI je puna,
    pa LTI generira izlazni signal dok se memorija ne isprazni

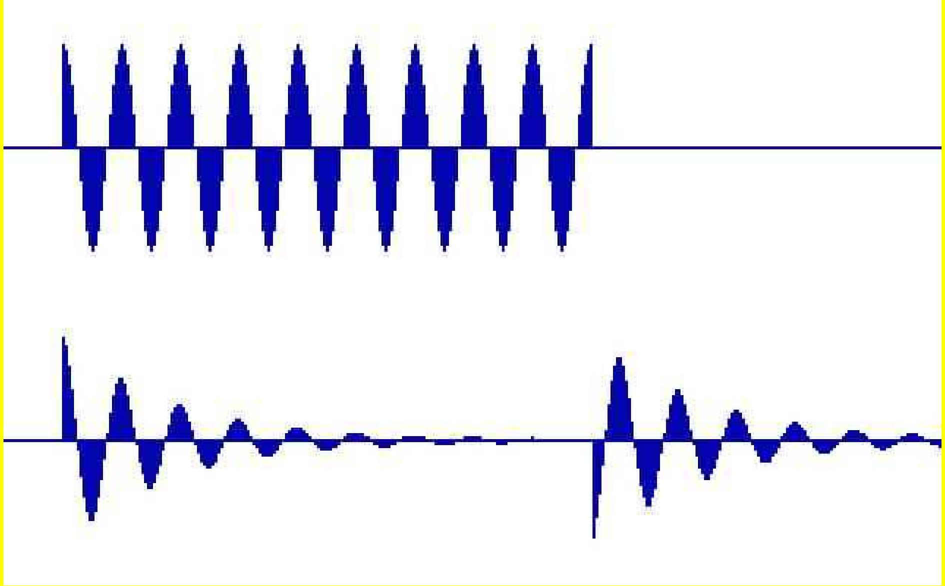
- PRIJELAZNE POJAVE

- Konačnost uzrokuje prijelazne pojave
  - **Početna** prijelazna pojava
    - nastaje kod uključenja signala, kad je memorija LTI prazna
    - traje dok se memorija LTI ne napuni, a to je vrijeme trajanja odziva
  - **Završna** prijelazna pojava
    - nastaje kod isključenja signala, a memorija LTI je puna
    - traje dok se memorija LTI ne isprazni,
      a to je vrijeme trajanja odziva
  - Posljedica prijelaznih pojava:
    - početna pojava može zamaskirati stvarno ponašanje sustava
    - završna pojava može utjecati na odziv slijedećeg signala
    - prijelazna pojava je karakteristika sustava

- PRIMJER PRIJELAZNE POJAVE

- Notch filtar
  - Program 6: signal 50Hz započne pa prestane

$$y[n] = 1{,}8523 \cdot y[n-1] - 0{,}94833 \cdot y[n-2] + x[n] - 1{,}9021 \cdot x[n-1] + x[n-2]$$



4.4. JEDNADŽBE DIFERENCIJA

- OPĆI OBLIK JEDNADŽBE DIFERENCIJA
- RUBNI UVJETI
- PARTIKULARNO I HOMOGENO RJEŠENJE ODZIVA

- OPĆI OBLIK JEDNADŽBE DIFERENCIJA

- Rekurzivni i nerekurzivni članovi:
  - Formule koje smo susretali su oblika:

$$y[n] = a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2] + a_3 \cdot y[n-3] +$$
$$+ b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2]$$

  - ili generalno

$$a_0 \cdot y[n] + a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2] + \cdots =$$
$$= b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] + \cdots$$

  - odnosno sustav **reda N**:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x[n-k]$$

- RUBNI UVJETI

- Pretpostavke o početku rada LTI:
  - Jednadžba diferencija u potpunosti definira sustav
  - Potrebne su dodatne informacije:
    - da li su svi rekurzivni članovi jednaki nuli
    - odnosno da li je memorija prazna
  - To su rubni uvjeti
  - U situaciji da postoje zaostali podaci prethodnog odziva
    - utjecaj je nadalje ovisan o karakteristici sustava

- PARTIKULARNO I HOMOGENO RJEŠENJE ODZIVA

- Generalno promatramo odziv LTI:
  - Dio odziva koji nastaje dominantno kao svojstvo LTI
    - zaostaci prethodnog signala, nakon njegovog završetka
    - početna prijelazna pojava nakon početka novog signala
  - Dijelimo odziv na dvije komponente:
    - partikularno rješenje, ovisi o ulaznom signalu
    - homogeno rješenje, ovisi o LTI
    - potpuni odziv je suma ta dva odziva

- PARTIKULARNO I HOMOGENO RJEŠENJE

- PARTIKULARNO RJEŠENJE:
  - Odziv stacionarnog stanje
  - Sadrži frekvencije kao ulazni signal (svojstvo LTI)
- HOMOGENO RJEŠENJE:
  - Odziv prijelazne pojave i zaostatka signala
  - Određen je svojstvima LTI
  - Sadrži karakterističnu frekvenciju LTI
- KONVOLUCIJA:
  - Kombinira homogeno i partikularno rješenje, nije ih lako razlikovati