



FAKULTET ELEKTROTEHNIKE
STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING,
MECHANICAL ENGINEERING
AND NAVAL ARCHITECTURE

Rudjera Boškovića bb, Split



LABORATORIJ ZA BIOMEHANIKU
AUTOMATIKU I SUSTAVE

LABORATORY FOR BIOMECHANICS
AND AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

KOLEGIJ SIGNALI I SUSTAVI

OPIS KONTINUIRANIH LTI SUSTAVA PRIJENOSNIM FUNKCIJAMA

Vježba br. 5.

Ak. god. 2007/08.

UVOD

U ovoj vježbi naučit ćemo kako u Matlabu zadati prijenosnu funkciju kontinuiranog LTI sustava, kako računati prijenosne funkcije serijskog i paralelnog spoja dvaju ili više sustava, kako odrediti polove, nule i residuume prijenosne funkcije, te kako odrediti odziv sustava opisanog prijenosnom funkcijom na jediničnu odskočnu pobudu, Dirac-ov impuls ili neku proizvoljnu pobudu. Svaki zadatak će se rješavati tako da se napravi m – skripta koja će sadržavati rješenje zadatka i koji će se pohraniti pod imenom *Zad_x.mdl* ili *Zad_x.m* (pri čemu je x redni broj zadatka). Nakon što se napiše pojedina m-skripta, neka se pohrani u direktorij s imenom studenta. Za uspješno odrađenu vježbu potrebno je točno riješiti sve postavljene zadatke i rješenja demonstrirati nastavniku.

Napomena: Radi uspješnijeg rješavanja zadataka, na vježbama je korisno imati skriptu i bilješke s predavanja i auditornih vježbi.

NAREDBE ZA ODREĐIVANJE PRIJENOSNE FUNKCIJE SUSTAVA: *PRINTSYS*, *SERIES*, *PARALLEL*, *CLOOP*, *FEEDBACK*

***PRINTSYS()*:**

```
>> % printsys(br, naz): ispis prijenosne funkcije sustava u obliku razlomka s  
>> % polinomima u brojniku i nazivniku, npr:  
  
>> br=[1 2]; naz=[2 3 0 1];  
>> printsys(br, naz)  
  
num/den =  
      s + 2  
-----  
2 s^3 + 3 s^2 + 1
```

***SERIES()*:**

```
>> % [num,den]=series(num1,den1,num2,den2): računanje serijske veze  
>> % dviju prijenosnih funkcija pri čemu su:  
>> % num1,den1    brojnik i nazivnik prijenosne funkcije G1(s)  
>> % num2,den2    brojnik i nazivnik prijenosne funkcije G2(s)  
>> % num,den      brojnik i nazivnik prijenosne funkcije koja je  
>> %              serijska veza gornje dvije, G1(s) i G2(s)  
  
>> % primjer:      G1(s) =  $\frac{s+1}{s+2}$     G2(s) =  $\frac{1}{500s^2}$   
  
>> num1=[1 1]; den1=[1 2];  
>> num2=[1]; den2=[500 0 0];  
>> [num,den]=series(num1,den1,num2,den2);  
>> printsys(num,den)
```

```
num/den =
      s + 1
-----
500 s^3 + 1000 s^2
```

PARALLEL():

```
>> % [num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2): računanje paralelne veze
>> % dviju prijenosnih funkcija pri čemu su:
>> % num1,den1    brojnik i nazivnik prijenosne funkcije G1(s)
>> % num2,den2    brojnik i nazivnik prijenosne funkcije G2(s)
>> % num,den      brojnik i nazivnik prijenosne funkcije koja je
>> %               paralelna veza gornje dvije, G1(s) i G2(s)
```

```
>> % primjer:  G1(s) =  $\frac{s+1}{s+2}$     G2(s) =  $\frac{s+3}{s+4}$ 
```

```
>> num1=[1 1]; den1=[1 2];
>> num2=[1 3]; den2=[1 4];
>> [num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2);
>> printsys(num,den)
```

```
num/den =
  2 s^2 + 10 s + 10
-----
    s^2 + 6 s + 8
```

CLOOP():

```
>> % [num,den]=cloop(num1,den1,sign): računanje prijenosne funkcije zatvorene
>> % petlje s jediničnom povratnom vezom pri čemu su:
>> % num1,den1    brojnik i nazivnik prijenosne funkcije direktne grane, G(s)
>> % sign:        predznak povratne veze (+1 ili -1), po defaultu -1
>> % num,den      brojnik i nazivnik prijenosne funkcije zatvorene petlje
```

```
>> % primjer: Računanje prijenosne funkcije zatvorene petlje sustava s negativnom
>> % jediničnom povratnom vezom čija je prijenosna
```

```
>> % funkcije direktne grane: G1(s) =  $\frac{1}{s^2 + s + 1}$ 
```

```
>> num1=[1]; den1=[1 1 1];
>> [num,den]=cloop(num1,den1);
>> printsys(num,den)
```

$$\frac{\text{num/den} = 1}{s^2 + s + 2}$$

FEEDBACK():

```
>> % [num,den]=feedback(num_G,den_G,num_H,den_H,sign): računanje
>> % prijenosne funkcije sustava s povratnom vezom, pri čemu su:
>> % num_G,den_G: brojnik i nazivnik prijenosne funkcije direktne grane, G(s)
>> % num_H,den_H: brojnik i nazivnik prijenosne funkcije povratne grane, H(s)
>> % sign: predznak povratne veze (+1 ili -1), po defaultu -1
>> % num,den: brojnik i nazivnik prijenosne funkcije zatvorene petlje

>> % primjer: Računanje prijenosne funkcije zatvorene petlje sustava
>> % u čijoj je direktnoj grani:  $G(s) = \frac{1}{500s^2}$ , a u povratnoj  $H(s) = \frac{s+1}{s+2}$ :

>> num_G=[1]; den_G=[500 0 0];
>> num_H=[1 1]; den_H=[1 2];
>> [num,den]=feedback(num_G,den_G,num_H,den_H);
>> printsys(num,den)

num/den =
      s + 2
-----
500 s^3 + 1000 s^2 + s + 1
```

NAREDBE ZA ODREĐIVANJE POLOVA, NULA I RESIDUUMA SUSTAVA: PZMAP, RESIDUE

PZMAP()

```
>> % računanje i crtanje polova i nula prijenosne funkcije u kompleksnoj ravnini

>> % pzmap(num,den): crtanje
>> % [P,Z]=pzmap(num,den): računanje polova i nula, pri čemu su:
>> % P: matrica polova
>> % Z: matrica nula

>> % primjer: računanje i crtanje polova i nula prijenosne funkcije:
>> %  $G(s) = \frac{s^2 + 5s + 4}{s^3 + 7s^2 + 13s + 9}$ 

>> num=[1 5 4]; den=[1 7 13 9];
```

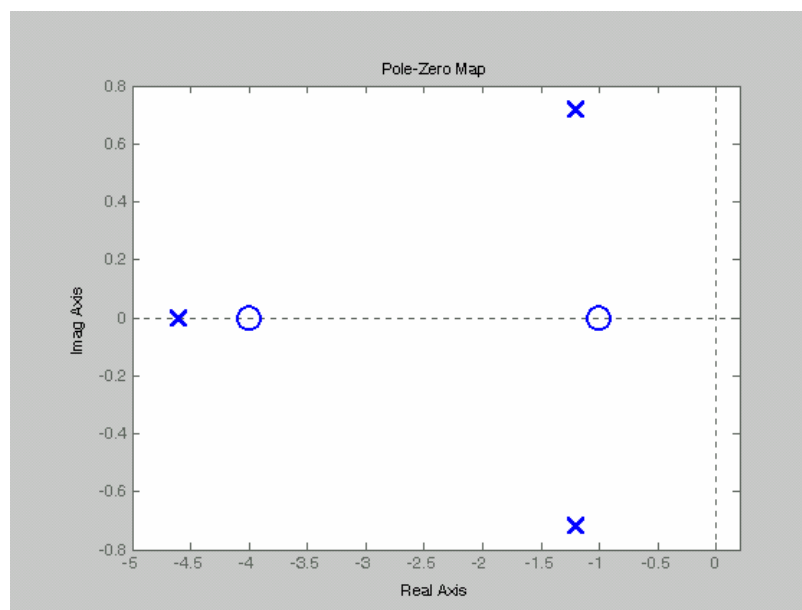
```

>> [P,Z]=pzmap(num,den)           % računanje
P =
-4.5987
-1.2007 + 0.7180i
-1.2007 - 0.7180i
Z =
-4
-1

>> pzmap(num,den)                 % crtanje, rezultat prikazan slikom 1.

```

Slika 1. prikazuje razmještaj polova i nula u kompleksnoj ravnini.



Sl 1.

RESIDUE()

```

>> % [R,P,k]=residue(num,den): računanje residuuma i njima odgovarajućih polova
>> % pri razvoju prijenosne funkcije u parcijalne razlomke, pri čemu su:
>> % num, den:      brojnik i nazivnik prijenosne funkcije
>> % R:             matrica residuuma
>> % P             matrica odgovarajućih polova
>> % k             direktni član, bez pola, npr:

>> %    $G(s) = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} + k(s)$ 
>> %   R=[r1  r2  ...  rn ]
>> %   P=[p1  p2  ...  pn ]

```

```
>> %   primjer: Razvoj u parcijalne razlomke prijenosne funkcije:
```

```
>> %    $G(s) = \frac{s + 9}{s^2 + 7s + 6}$ 
```

```
>> num=[1 9]; den=[1 7 6];
```

```
>> [R,P,K]=residue(num,den)
```

```
R =
```

```
  -0.6000
```

```
  1.6000
```

```
P =
```

```
  -6
```

```
  -1
```

```
k =
```

```
 []
```

NAREDBE ZA ODREĐIVANJE VREMENSKOG ODZIVA SUSTAVA: *STEP*, *IMPULSE*, *LSIM*

STEP()

```
>> % računanje i crtanje vremenskog odziva sustava na jediničnu odskočnu pobudu
```

```
>> % y=step(num, den, t) računanje odziva sustava, y(t), pri čemu su:
```

```
>> %           num, den: brojnik i nazivnik prijenosne funkcije
```

```
>> %           t: vremenski vektor za kojega računamo odziv; opcijski
```

```
>> %           argument (ako nije zadan, Matlab ga automatski
```

```
>> %           određuje)
```

```
>> %           y: izračunati odziv sustava
```

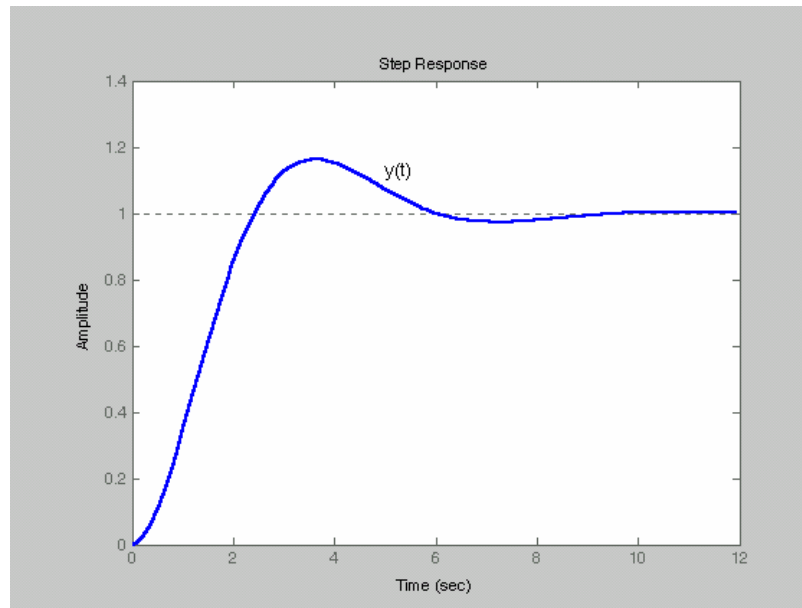
```
>> % step(num, den, t) crtanje vremenskog odziva
```

```
>> % primjer: Odziv na step sustava čija je prijenosna funkcija:  $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$ 
```

```
>> num=[1]; den=[1 1 1];
```

```
>> step(num,den);           % crtanje odziva, slika 2.
```

Slika 2. prikazuje odziv sustava:



Sl. 2.

IMPULSE()

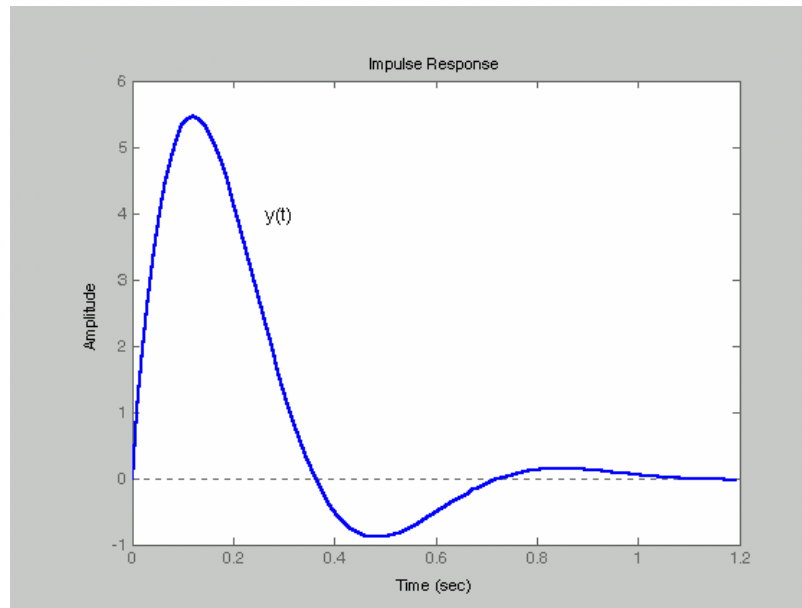
```
>> % računanje i crtanje vremenskog odziva sustava na Dirac-ov impuls
>> % y=impulse(num, den, t)   računanje odziva sustava, y(t), pri čemu
>> %                           num, den, t i y imaju isto značenje kao u naredbi
>> %                           step()

>> % impulse(num, den, t)     crtanje vremenskog odziva

>> % primjer: Odziv na Dirac-ov impuls sustava čija je prijenosna funkcija:
>> %  $G(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$ 

>> num=[100]; den=[1 10 100];
>> impulse(num,den);          % crtanje odziva, slika 3.
```

Slika 3. prikazuje odziv sustava:



Sl. 3

LSIM()

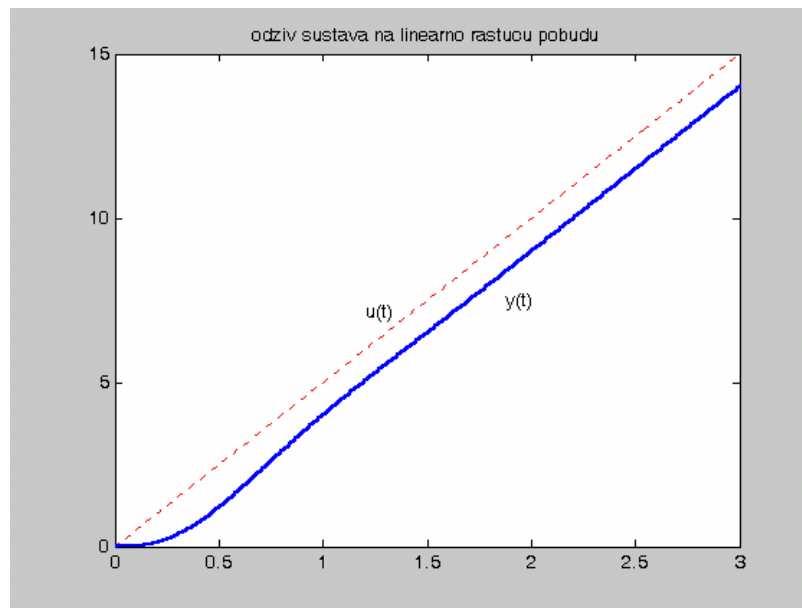
```
>> % računanje i crtanje vremenskog odziva sustava na proizvoljno zadanu ulaznu
>> % funkciju:
>> % y=lsim(num, den,u, t)   računanje odziva sustava, y(t), pri čemu su
>> %                          num, den, t i y imaju isto značenje kao u naredbi
>> %                          step()
>> %                          u: zadani ulaz, u(t)

>> % lsim(num, den, t)       crtanje vremenskog odziva

>> % primjer: Odziv na ulaznu funkciju u(t)=5t sustava čija je prijenosna funkcija:
>> %  $G(s) = \frac{25}{s^2 + 5s + 25}$ 

>> num=[25]; den=[1 5 25];
>> t=0:0.01:3;                % definiranje vremenskog vektora
>> u=5*t;                     % definiranje ulazne funkcije
>> y=lsim(num,den,u,t);        % računanje odziva
>> plot(t,u,'r',t,y,'Linewidth',2) % crtanje pobude i odziva, slika 4.
>> title('odziv sustava na linearno rastucu pobudu')
```

Slika 4. prikazuje odziv sustava:

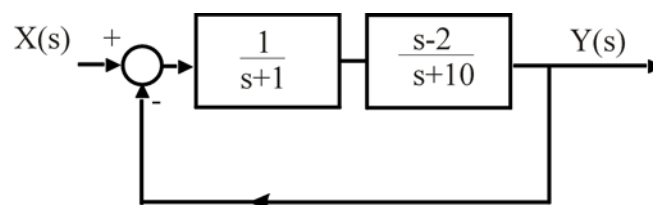


Sl. 4

Zad 1.

Zadan je sustav s negativnom jediničnom povratnom vezom prikazan na slici.

- Izračunati pomoću Matlaba prijenosnu funkciju zatvorene petlje te prikazati rezultat s `printsys` naredbom
- Pronaći odziv sustava na jediničnu pobudu.



Rješenje:

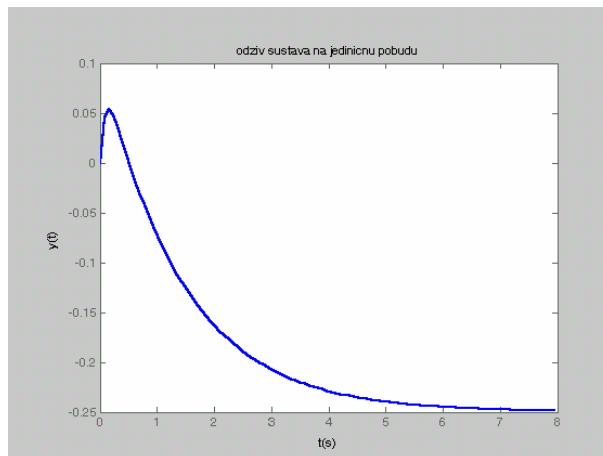
```
% m-datoteka: odziv_sustava.m
br_G1=[1]; naz_G1=[1 1];
br_G2=[1 -2]; naz_G2=[1 10];
[br_G,naz_G]=series(br_G1,naz_G1,br_G2,naz_G2); % prijenosna funkcija
                                                % direktne grane
[br_W,naz_W]=cloop(br_G,naz_G); % prijenosna funkcija sustava
printsys(br_W,naz_W)
step(br_W,naz_W);
title('odziv sustava na jedinicnu pobudu')
xlabel('t(s)')
```

```
ylabel('y(t)')  
% kraj m-datoteke
```

Komandni mod Matlaba:

```
>> odziv_sustava  
num/den = % rezultat naredbe printsys  
      s - 2  
-----  
s^2 + 12 s + 8
```

Odziv sustava prikazan je slikom 5:



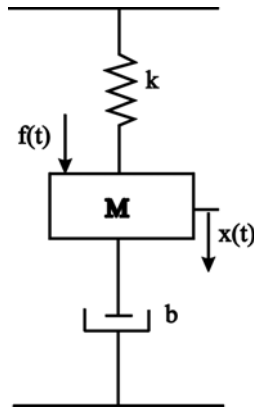
Sl.5.

Zad 2.

Zadan je mehanički sustav s oprugom, prikazan na slici. Odrediti i nacrtati pomak mase M ako na nju djelujemo:

- a) konstantnom silom od 5N.
- b) silom oblika $f(t)=3\sin(t)$

Zadano je: $M=10\text{kg}$; $k=1\text{N/m}$; $b=0.5\text{Ns/m}$



Rješenje:

Prijenosnu funkciju odredit ćemo kao omjer pomaka i narinute sile:

$$Mx''(t) = f(t) - kx(t) - bx'(t) / L$$

$$s^2MX(s) = F(s) - kX(s) - bsX(s)$$

$$X(s)[s^2M + bs + k] = F(s)$$

tj:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k} = \frac{1}{10s^2 + 0.5s + 1}$$

Za određivanje odziva sustava (pomaka $x(t)$) koristit ćemo naredbu *lsim()*:

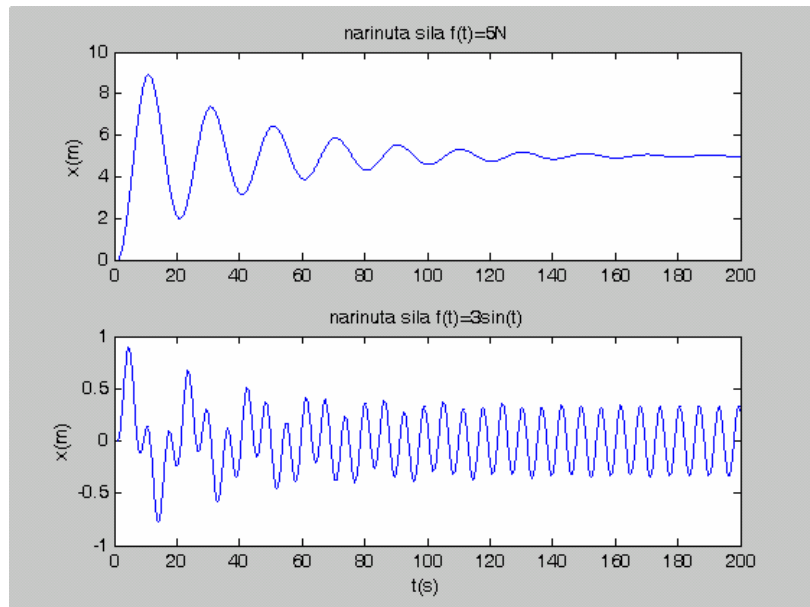
$x = \text{lsim}[br, naz, u, t];$

pri čemu su: $u=f(t)$ narinuta sila, a $x=x(t)$ pomak mase:

```
% m-datoteka: pomak_mase.m
br=[1]; naz=[10 0.5 1];
t=1:0.1:200;
% rješenje pod a):
u=5*ones(1,length(t)) % vektor kojemu su svi elementi=5; duljina vektora
                        % odgovara duljini vremenskog vektora t
y_a=lsim(br,naz,u,t);
% rješenje pod b):
u=3*sin(t);
y_b=lsim(br,naz,u,t);
% crtanje odziva
```

```
subplot(211); plot(t,y_a); title('narinuta sila f(t)=5N'), ylabel('x(m)')
subplot(212); plot(t,y_b); title('narinuta sila f(t)=3sin(t)'), xlabel('t(s)'), ylabel('x(m)')
% kraj m-datoteke
```

Odzivi sustava će biti:

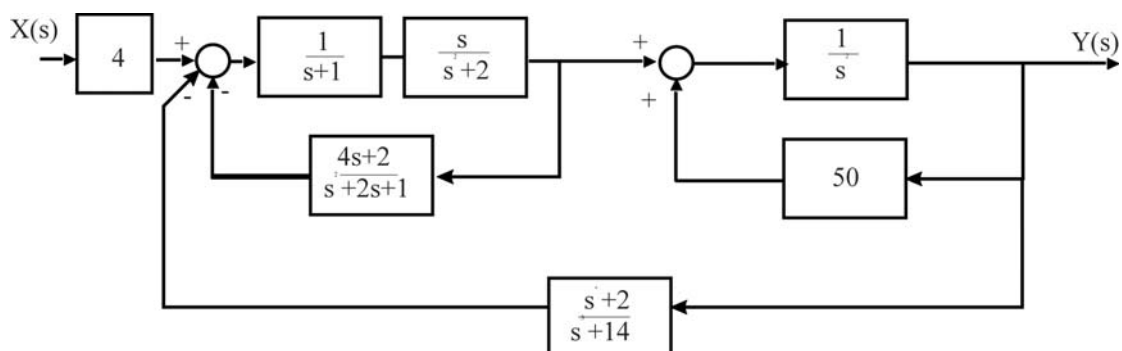


Sl. 6.

ZADACI ZA SAMOSTALNO RJEŠAVANJE:

Zad 4.

Sustav je prikazan blok dijagramom na slici.



- a) Pomoću Matlaba reducirati blok dijagram te izračunati prijenosnu funkciju sustava $W(s)=Y(s)/X(s)$
- b) Nacrtati dijagram polova i nula prijenosne funkcije (naredba `pzmap()`)
- c) Izračunati polove i nule prijenosne funkcije koristeći naredbu `roots()` te usporediti rezultate s rješenjem pod b)

Zad 5.

Prijenosna funkcija direktne grane sustava s negativnom jediničnom povratnom vezom je:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 4s^2 + 6s + 10}$$

Koristeći Matlab odrediti prijenosnu funkciju zatvorene petlje i izračunati korijene karakteristične jednačbe (nul točke nazivnika).

Zad 6.

Zadana je prijenosna funkcija sustava:

$$T(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Pomoću Matlaba izračunati polove prijenosne funkcije, te nacrtati odzive kad na ulaz dovedemo:

- a) step funkciju
- b) Diracov impuls
- c) sinusnu pobudu: $x(t)=5\sin(3t)$