UČITELJSKI FAKULTET U SOMBORU

dr Aleksandar Petojević

KURS IZ MATEMATIKE I
TEORIJA I REŠENI ZADACI

Sombor, 2003.

Glava 1

Matematička logika

1.1 Teorija

Definicija 1. *Iskazi su one rečenice o kojima ima smisla govoriti da li su tačne ili su netačne (imaju samo jednu iskaznu vrednost).*

Notacija 1. *Za označavanje iskaza koristimo slova* $p, q, r...$.

Definicija 2. *Disjunkcija redom iskaza* p, q *jeste iskaz "*p *ili* q *". Disjunkcija je netačan iskaz samo ako su i iskaz* p *i iskaz* q *netačni. U svim ostalim slučajevima je tačan iskaz. Disjunkciju "*p *ili* q*" označavamo* $p \vee q$.

Definicija 3. *Konjukcija redom iskaza* p, q *jeste iskaz "*p *i* q*". Konjukcija je tačan iskaz samo ako su i iskaz* p *i iskaz* q *tačni. U svim ostalim slučajevima je netačan iskaz. Konjukciju "*p *i* q*" označavamo* $p \wedge q$.

Definicija 4. *Implikacija redom iskaza* p, q *jeste iskaz "ako* p*, onda* q*". Implikacija je netačan iskaz samo ako je iskaz* p *tačan i iskaz* q *netačan. U svim ostalim slučajevima je tačan iskaz. Implikaciju "ako* p *onda* q*" označavamo* $p \Rightarrow q$.

Definicija 5. *Ekvivalencija redom iskaza* p, q *jeste iskaz "*p *ako i samo ako* q*". Ekvivalencija je tačan iskaz samo ako su i iskaz* p *i iskaz* q *tačni ili iskaz* p *i iskaz* q *netačni. U svim ostalim slučajevima je netačan iskaz. Ekvivalenciju "*p *ako i samo ako* q*" označavamo* $p \Leftrightarrow q$.

Definicija 6. *Negacija iskaza* p *jeste iskaz "nije* p*". Negacija iskaza* p *je tačan iskaz ako je iskaz* p *netačan, a netačan iskaz ako je iskaz* p *tačan. Negaciju "nije* p*" označavamo* $\neg p$.

Definicija 7. *Skup* $\{p, q, r, ... \; \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, (, \;)\}$ *zovemo azbuka. Elemente tog skupa nazivamo:*

$p, q, r, ...,$	*iskazna slova,*
$\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg,$	*znaci logičkih operacija,*
$(,)$	*pomoćni znaci.*

Definicija 8. *Iskazne formule (složeni iskazi) se definišu na sledeći način:*

1. *Iskazna slova su iskazne formule (ili kraće formule).*
2. *Ako su* A *i* B *formule, onda su i* $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B), (A \Leftrightarrow B)$, $\neg A$, *formule.*
3. *Formule se mogu obrazovati samo konačnom primenom 1. i 2.*

Notacija 2. *Po dogovoru o izostavljanju zagrada u formulama imamo:*

1. *izostavljanje spoljnih zagrada: umesto* $(p \vee q)$ *pišemo* $p \vee q$,
2. *prioritet operacija* $\Rightarrow$ *i* $\Leftrightarrow$*: umesto* $(p \vee q) \Rightarrow r$ *pišemo* $p \vee q \Rightarrow r$,
3. *umesto* $(...((p_1 \vee p_2) \vee p_3)... \vee p_{n-1}) \vee p_n$; *pišemo* $p_1 \vee p_2 \vee p_3 ... \vee p_{n-1} \vee p_n$.

Definicija 9. *Uređenu šestorku* $(\{\top, \bot\}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg)$ *kod koje je prva komponenta dvočlan skup* $\{\top, \bot\}$, *ostale osim poslednje, binarne operacije skupa* $\{\top, \bot\}$, *a poslednja unarna, definisane sledećim Kelijevim tablicama:*

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

	$\neg$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

zovemo iskazna algebra.

Napomena 1. *Iskazna slova* $p, q, r, ...$ *interpretiramo kao elemente skupa* $\{\top, \bot\}$ *iskazne algebre.*

Definicija 10. *Neka iskazna slova* p_i *uzimaju vrednosti iz skupa* $\{\top, \bot\}$. *Tada*

1. *Vrednost formule* p_i *je vrednost iskaznog slova* p_i *(u oznaci* $v(p_i)$.*)*
2. *Ako je* $v(A)$ *vrednost formule* A *i* $v(B)$ *vrednost formule* B, *onda su* $v(A) \vee v(B)$, $v(A) \wedge v(B)$, $v(A) \Rightarrow v(B)$, $v(A) \Leftrightarrow v(B)$, $\neg v(A)$ *vrednosti formula* $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, *i* $\neg A$ *redom.*

Napomena 2. *Ako je formula A sagrađena od slova p_1, $p_2, ...p_n$ (što ćemo nadalje označavati sa $A(p_1, p_2, ...p_n)$), tada ona za svaki izbor pomenutih slova dobija vrednost $\top$ ili $\bot$. Pošto se radi o uređenim n-torkama, takvih mogućnosti imamo 2^n (varijacije sa ponavljanjem n-te klase od 2 elementa). Na osnovu toga, svakoj formuli $A(p_1, p_2, ...p_n)$ odgovara jednoznačno istinitosna funkcija:*

$$f(A) : \{\top, \bot\}^n \to \{\top, \bot\}.$$

Na taj način dobijamo istinitosne tablice formule, u kojima ćemo umesto $v(p)$ radi jednostavnosti pisati kratko p.

Definicija 11. *Za formulu A kažemo da je tautologija ako za sve vrednosti svojih iskaznih slova formula A ima vrednost $\top$ (označavamo sa $\models A$). Formula koja za sve vrednosti iskaznih slova ima vrednost $\bot$ se naziva kontradikcija.*

Teorema 1. *Ako je $\models A$ i $\models A \Rightarrow B$ onda je $\models B$.*

Teorema 2. *Ako je $\models A(p_1, p_2, ..., p_n)$ i $B_1, B_2, ..., B_n$ su iskazne formule, onda je $\models A(B_1, B_2, ..., B_n)$.*

Teorema 3. *Ako su A i B formule i C formula koja ima formulu A kao podformulu (u oznaci $C(A)$) tada važi $\models A \Leftrightarrow B \Rightarrow (C(A) \Leftrightarrow C(B))$.*

Napomena 3. *Da bismo dokazali da je neka formula tautologija možemo koristiti jedan od sledeća tri metoda:*

1. *metod tablice istinitosti (ako u tablici istinitosti u stubcu te formule imamo sve vrednosti $\top$, formula je tautologija),*

2. *metod svođenja na protivrečnost (pogodna za formule oblika $A \Rightarrow B$),*

3. *metod dovođenja formule na konjuktivnu formu; opšti slučaj se sastoji u sledećem:*
   ako formula A sadrži znak $\Leftrightarrow$, taj znak otklanjamo pomoću tautologije $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, zatim znak $\Rightarrow$ otklanjamo pomoću tautologije $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$. Sada imamo formulu koja sadrži znakove $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Pomoću tautologija

$$p \vee (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\neg(p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \vee \neg q$$

formulu A svodimo na formulu oblika $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$ *(konjuktivna forma), gde su formule* A_i, $0 < i < n+1$ *oblika* $p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_k$, *i pri tome su* p_j *slova ili negacije slova početne formule A.*

Definicija 12. *Rečenicu "x ima svojstvo B", gde je x objekat određenog skupa, a B je neko svojstvo (relacija) označavamo sa* $B(x)$. *Uopšte, ako je B relacija dužine n nekog određenog skupa, rečenicu "*$(x_1, x_2, ..., x_n)$ *ima svojstvo B" označavamo sa* $B(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Definicija 13. *Rečenicu "Za svaki* $x \in A$, $B(x)$*" označavamo sa* $(\forall x)B(x)$, *gde* $\forall$ *nazivamo univerzalni kvantifikator.*
Rečenicu "Postoji $x \in A$, $B(x)$*" označavamo sa* $(\exists x)\,B(x)$, *gde* $\exists$ *nazivamo egzistencijalni kvantifikator.*

Teorema 4. *Navedeni kvantifikatori zadovoljavaju sledeće formule:*

$$\neg(\forall x)B(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)\neg B(x)$$

$$\neg(\exists x)B(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)\neg B(x)$$

$$(\forall x)(B(x) \wedge C(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)B(x) \wedge (\forall x)C(x)$$

$$(\forall x)(B(x) \vee C(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)B(x) \vee (\forall x)C(x)$$

$$(\exists x)(B(x) \wedge C(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)B(x) \wedge (\exists x)C(x)$$

$$(\exists x)(B(x) \vee C(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)B(x) \vee (\exists x)C(x)$$

1.2 Zadaci

1. *Koje od datih rečenica jesu iskazi:*

1) *Zemlja je zvezda.*

2) *Zemlja je zvezda ili nebesko telo.*

3) *Na kojoj si godini studija?*

4) $8 > 4$.

5) $(x-1)^3 = 8$.

Za rečenice koje jesu iskazi odrediti njihovu istinitosnu vrednost.

Rešenje: 1) jeste i vrednost je $\perp$; 2) jeste i vrednost je $\perp \vee \top = \top$; 3) nije; 4) jeste i vrednost je $\top$; 5) nije, jer za $x = 3$ rečenica ima tačnu vrednost, a za recimo $x = 5$ netačnu.

2. *Sledeće iskaze napisati elementima azbuke (Definicija 7) i ispitati istinitosnu vrednost*

1) *Zemlja je zvezda i zemlja je nebesko telo.*

2) *Zemlja je zvezda ili je zemlja nebesko telo.*

3) *Ako je zemlja zvezda onda je zemlja nebesko telo.*

4) *Zemlja je zvezda ako i samo ako je zemlja nebesko telo.*

5) *Zemlja nije zvezda.*

Rešenje: Označimo iskaze

$$p: \text{Zemlja je zvezda} \quad \text{i} \quad q: \text{Zemlja je nebesko telo.}$$

Tada je

1) $p \wedge q$, $\quad \perp \wedge \top = \perp$,

2) $p \vee q$, $\quad \perp \vee \top = \top$,

3) $p \Rightarrow q$, $\quad \perp \Rightarrow \top = \top$,

4) $p \Leftrightarrow q$, $\quad \perp \Leftrightarrow \top = \perp$,

5) $\neg p$, $\qquad \neg\bot = \top$.

3. *Odrediti istinitosnu vrednost formula:*

1) $(10 : 3 - 1 < 2 + 3 \cdot 2) \wedge (-(-8 - 4) : 2 = 7) \Leftrightarrow (-3 - 4 \cdot 4 > 2)$,

2) $(0,6 : 0,02 = 0,3) \Rightarrow ((0,1 + 0,2 - 0,4 > 0,5) \vee (0,1 \cdot 0,2 < 0,3))$,

3) $\neg\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} < \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} > \frac{1}{2}\right)$.

Rešenje:

1) $\top \wedge \bot \Leftrightarrow \bot \;=\; \bot \Leftrightarrow \bot \;=\; \top$,

2) $\bot \Rightarrow (\bot \vee \top) \;=\; \bot \Rightarrow \top \;=\; \top$,

3) $\neg\top \Leftrightarrow \top \;=\; \bot \Leftrightarrow \top \;=\; \bot$.

4. *Napisati istinitosnu tablicu za formulu* $((p \Rightarrow q) \vee \neg r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$.

Rešenje: U opštem slučaju, neka je broj različitih iskaznih slova u formuli n (Napomena 2). Tada zadatak za jedno, dva, tri ili četiri različita slova počinjemo da rešavamo na sledeći način:

p	$\cdots$
$\top$	$\cdots$
$\bot$	$\cdots$

p	q	$\cdots$
$\top$	$\top$	$\cdots$
$\top$	$\bot$	$\cdots$
$\bot$	$\top$	$\cdots$
$\bot$	$\bot$	$\cdots$

p	q	r	$\cdots$
$\top$	$\top$	$\top$	$\cdots$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\cdots$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\cdots$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\cdots$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\cdots$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\cdots$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\cdots$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\cdots$

p	q	r	s	$\cdots$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\cdots$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\cdots$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\cdots$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\cdots$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\cdots$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\cdots$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\cdots$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\cdots$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\cdots$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\cdots$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\cdots$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\cdots$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\cdots$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\cdots$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\cdots$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\cdots$

U našem zadatku tablica istinitosti je data sa:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\neg r$	$(p \Rightarrow q) \vee \neg r$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \vee \neg r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

5. *Navesti jednu formulu koja je kontradikcija kao i njenu tablicu istinitosti.*

Rešenje: Najjednostavnija kontradikcija je oblika $p \wedge \neg p$, dok je njena tablica istinitosti:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$

6. *Koristeći tri različita metoda (Napomena 3) pokazati da su sledeće formule tautologije:*

1) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ *(zakon uklanjanja $\Leftrightarrow$)*

2) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ *(zakon uklanjanja $\wedge$)*

3) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(zakon komutacije za $\wedge$)*

Rešenje: Zadatak 1) rešićemo tablicom istinitosti, zadatak 2) svođenjem na kontradikciju, a 3) pomoću konjuktivne forme. Označimo sa

$$A(p,q) = (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

Tada je

1)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$	$A(p,q)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

2) Pretpostavimo da formula nije tautologija. Tada postoji izbor vrednosti iskaznih slova da je $\top \Rightarrow \bot = \bot$. Odnosno $(p \wedge q) = \top$ i $p = \bot$. Na osnovu poslednje dve jednakosti imamo da je $\bot \wedge q = \top$, što je kontradikcija za ma koju vrednost iskaznog slova q.

3) Svođenjem na konjuktivnu formu pokazaćemo da je i poslednja formula tautologija:

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p) \qquad \text{(početna formula)}$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p) \wedge (q \wedge p) \Rightarrow (p \wedge q) \quad \text{(zakon uklanjanja } \Leftrightarrow\text{)}$$

Na osnovu zakona $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ imamo

$$\neg(p \wedge q) \vee (q \wedge p) \wedge \neg(q \wedge p) \vee (p \wedge q).$$

Na osnovu zakona $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg q \vee \neg p$ imamo

$$(\neg p \vee \neg q) \vee (q \wedge p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \vee (p \wedge q).$$

Na osnovu zakona $p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ imamo

$$(\neg p \vee \neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q),$$

što je konjuktivna forma. Iz poslednje formule na osnovu zakona

$$\neg p \vee p = \top \vee q = \top$$

imamo

$$\top \wedge \top \wedge \top \wedge \top = \top,$$

pa je početna formula tautologija.

7. *Matematičkim jezikom iskazati sledeće rečenice:*

1) Proizvod pozitivnog i negativnog realnog broja je negativan realan broj.

2) Postoji broj x da je njegov kub manji od -8.

3) Zbir dva prirodna broja je prirodan broj.

4) Ako je prirodan broj deljiv sa deset, onda je on deljiv i sa dva i sa pet.

5) Za svaki prirodan broj x postoji prirodan broj y takav da je $2x + 5 = y$.

Rešenje:

1) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^-)(x \cdot y \in \mathbb{R}^-)$,

2) $(\exists x)(x^3 < -8)$,

3) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(x + y \in \mathbb{N})$,

4) $(\forall x \in \mathbb{N})(10|x \Rightarrow (2|x \wedge 5|x))$,

5) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(2x + 5 = y)$.

8. *Govornim jezikom iskazati sledeće formule:*

1) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(y > x)$,

2) $(\forall x \in \mathbb{N})\neg(x \leq -1)$,

3) $(\exists y \in \mathbb{R})(0,1 < x < 0,2)$.

Rešenje:

1) Za svaki prirodan broj x, postoji prirodan broj y koji je veći od njega.

2) Svaki prirodan broj je veći od -1.

3) Postoji realan broj x između brojeva $0,1$ i $0,2$.

Glava 2

Skupovi

2.1 Teorija

Napomena 1. *Skup je osnovni pojam i on se ne može definisati. Intuitivno, pod skupom podrazumevamo sve objekte udružene prema određenim zajedničkim osobinama.*
Pojam skupa je uveo nemački matematičar Georg Kantor (1845 - 1918) 1870. godine. Ovde se nećemo baviti aksiomatskim zasnivanjem teorije skupova, već samo intuitivnim.

Notacija 1. *Skupove označavamo velikim slovima latinice $A, B, C, ...$, dok njihove elemente označavamo malim slovima $a, b, c, ...$. Ukoliko element a pripada skupu A to ćemo označavati sa $a \in A$, dok je u suprotnom oznaka $a \notin A$.*

Napomena 2. *Skupovi se zadaju:*

1) *analitički - navođenjem njegovih elemenata između velikih zagrada,*

2) *sintetički - navođenjem svojstava koja zadovoljavaju elementi,*

3) *Venovim dijagramom (zatvorena amorfna kriva).*

Napomena 3. *Broj elemenata skupa može biti konačan ili beskonačan. Konačan skup koji nema elemenata nazivamo prazan skup i to obeležavamo sa $\emptyset$ ili $\{\}$. Broj elemenata konačnog skupa A nazivamo kardinalni broj skupa A i obeležavamo ga sa $card(A)$.*

Definicija 1. *Dva skupa A i B su jednaka ako i samo ako imaju iste elemente i to označavamo sa $A = B$. (U suprotnom $A \neq B$.)*

$$A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Teorema 1. *Za skupove A, B i C važi:*

1) $A = A$,

2) $A = B \Rightarrow B = A$,

3) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$.

Definicija 2. *Skup A je podskup skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, ako je svaki element skupa A i element skupa B. (U suprotnom $A \not\subseteq B$)*

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Skup A je pravi podskup skupa B ako su skupovi A i B različiti i skup A je podskup skupa B.

$$A \subset B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (A \neq B \wedge A \subseteq B).$$

Teorema 2. *Za skupove A, B i C važi:*

1) $A \subseteq A$,

2) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$,

3) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$,

4) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Definicija 3. *Partitivan skup skupa A je skup svih podskupova A, u oznaci $P(A)$. ($\emptyset \in P(A)$).*

$$P(A) = \{S | S \subseteq A\}.$$

Definicija 4. *Unija skupova A i B, u oznaci $A \cup B$, je skup svih elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova A i B.*

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \Big\{ x | x \in A \vee x \in B \Big\}$$

ili

$$(\forall x)(x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B).$$

Teorema 3. *Za skupove A, B i C važi:*

1) $A \cup B = B \cup A$,

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

3) $A \cup A = A$,

4) $A \cup \emptyset = A$,

5) $A \subseteq A \cup B, \ \ B \subseteq A \cup B$,

6) $A \subseteq B \ \ \Rightarrow \ \ A \cup B = B$.

Definicija 5. *Presek skupova A i B, u oznaci $A \cap B$, je skup svih elemenata koji pripadaju i skupu A i skupu B.*

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{x | x \in A \wedge x \in B\Big\}$$

ili

$$(\forall x)(x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B).$$

Definicija 6. *Dva skupa su disjunktna ako im je presek prazan skup.*

Teorema 4. *Za skupove A, B i C važi:*

1) $A \cap B = B \cap A$,

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

3) $A \cap A = A$,

4) $A \cap \emptyset = \emptyset$,

5) $A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B$

6) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

Teorema 5. *Za proizvoljne skupove A, B i C važi:*

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Definicija 7. *Razlika skupova A i B, u oznaci $A \setminus B$, je skup koji sadrži elemente skupa A koji ne pripadaju skupu B.*

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

ili

$$(\forall x)(x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B)$$

Teorema 6. *Za skupove A, B i C važi:*

1) $A \setminus B \subseteq A, \quad A \setminus \emptyset = A,$

2) $A \subseteq B \iff A \setminus B = \emptyset,$

3) $A \neq B \Rightarrow A \setminus B \neq B \setminus A,$

4) $C \setminus (C \setminus A) \subseteq A,$

5) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B),$

6) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$

Definicija 8. *Simetrična razlika skupova A i B, u oznaci $A \triangle B$, je skup $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, tj.*

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Teorema 7. *Za skupove A, B i C važi:*

1) $A \triangle A = \emptyset,$

2) $A \triangle \emptyset = A,$

3) $A \triangle B = B \triangle A,$

4) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C),$

5) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$

Definicija 9. *Neka je $A \subset B$. Komplement skupa A u odnosu na skup B, u oznaci $C_B A$ ili u daljem tekstu $\overline{A}$, je skup svih elemenata skupa B koji nisu elementi skupa A.*

$$\overline{A} = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$$

ili

$$(\forall)(x \in \overline{A} \iff x \in B \wedge x \notin A).$$

Teorema 8. *Ako su A i B podskupovi nekog univerzalnog skupa X tada je:*

1) $\overline{\overline{A}} = A$,

2) $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A}$,

3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

4) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Definicija 10. *Uređen par (a, b) je par elemenata gde je a prvi, a b drugi element para (bitan poredak). Element a se naziva i prva kordinata, a element b druga kordinata.*

Definicija 11. *Dva uređena para (a, b) i (c, d) su jednaka ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$, tj.*

$$(a, b) = (c, d) \iff (a = c \wedge b = d).$$

Definicija 12. *Dekartov (direktan) proizvod redom skupova A i B, u oznaci $A \times B$, je skup svih uređenih parova (a, b) čija je prva kordinata iz skupa A, a druga iz skupa B.*

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

ili

$$(\forall (a, b))((a, b) \in A \times B \iff a \in A \wedge b \in B).$$

Napomena 4. *Proizvodi $A \times B$ i $B \times A$ nisu uvek jednaki. Po definiciji je $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$, dok je $A \times B = B \times A$ samo ako je $A = B$.*

Napomena 5. *Za tri proizvoljna skupa A, B i C važi*

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C$$

kao i

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\}\ .$$

Napomenimo i da je

$$A \times A = A^2,$$

$$A^{n-1} \times A = A^n.$$

2.2 Zadaci

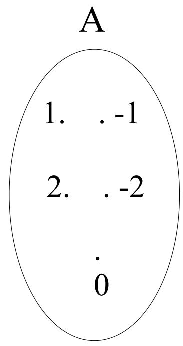
1. *Navesti skup A čiji su elementi brojevi $-2, -1, 0, 1, 2$ na tri različita načina.*

Rešenje:

1) analitički $\quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

2) sintetički $\quad A = \{x | x \in Z \wedge |x| \leq 2\}$,

3) Veneov dijagram:



sl.1

2. *Da li su skupovi $A = \{a, b, d, a\}$ i $B = \{a, b, d\}$ jednaki?*

Rešenje: Pošto je $A = \{a, b, d, a\} = \{a, b, d, \}$ sledi da je $A = B$.

3. *Za dati skup navesti bar dva prava podskupa $A = \{1, a, b, 3, d\}$.*

Rešenje: Mogući traženi skupovi su $B = \{1, d\}$ i $C = \{1, 3, a\}$.

4. *Za skupove*

$$A = \{x | x \in N \wedge 3 < x < 9\}$$

i

$$B = \{x | x \in N \wedge (x < 5 \vee x = 7)\}$$

naći:

1) $A \cup B$,

2) $A \cap B$*,*

3) $A \backslash B$*,*

4) $A \triangle B$*.*

i skupove predstaviti Veneovim dijagramom.

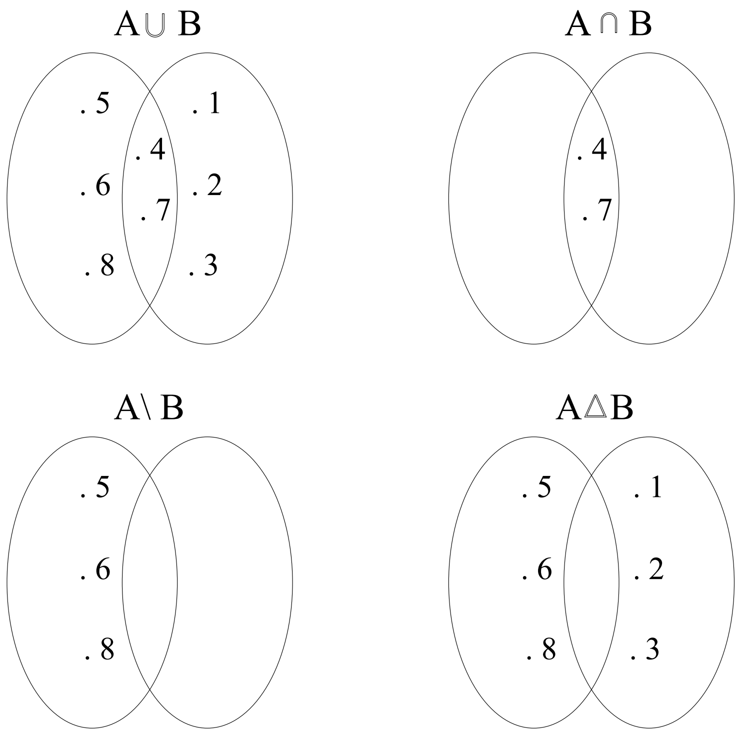
Rešenje: Pošto je $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, imamo

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

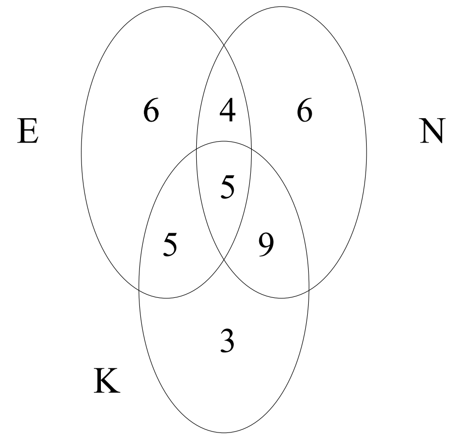
2) $A \cap B = \{4, 7\}$,

3) $A \backslash B = \{5, 6, 8\}$

4) $A \triangle B = \{5, 6, 8, 1, 2, 3\}$



sl.2



sl.3

5. *Od 38 učenika jednog razreda 20 učenika govori engleski jezik, a 24 nemački. Engleski, nemački i kineski govori 5, engleski i nemački 9, samo nemački 6, a engleski i kineski 10. Koliko učenika govori samo kineski?*

Rešenje: Na osnovu Veneovog dijagrama (sl.3) vidimo da samo kineski govore 3 učenika.

6. *Za skup* $A = \{1, 2, 3\}$ *naći* $P(A)$.

Rešenje:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\ \}.$$

7. *Dokazati da važi relacija:*

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

Rešenje: Neka je x proizvoljan element skupa $A \cup (A \cap B)$, tj. neka je $x \in A \cup (A \cap B)$. Na osnovu definicije unije skupova zaključujemo da je x elemenat bar jednog od skupova A i $A \cap B$. To znači da je $x \in A \vee x \in (A \cap B)$. Koristeći definiciju preseka zaključujemo da važi $x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B)$. Sada nije teško zaključiti da je $x \in A$. Prema tome, proizvoljan element x skupa $A \cup (A \cap B)$ je takođe član skupa A. Na osnovu definicije podskupa imamo da je

$$A \cup (A \cap B) \subseteq A \tag{1}$$

Dokažimo da relacija važi i u obrnutom smeru:
Pretpostavimo da je y ma koji element skupa A, tj. $y \in A$. Na osnovu definicije unije zaključujemo da je tada $y \in A \cup (A \cap B)$. Dakle, proizvoljan element $y \in A$ je takođe element skupa $A \cup (A \cap B)$. Koristeći definiciju podskupa zaključujemo da važi

$$A \subseteq A \cup (A \cap B) \tag{2}$$

Na osnovu (1) i (2) i definicije jednakosti skupova sledi da važi

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

Navedeni dokaz mogao je teći i kraće na sledeći način:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (A \cap B) &\iff x \in A \vee (x \in A \cap B) \\ &\iff x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \\ &\iff x \in A. \end{aligned}$$

8. *Dokazati:*

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} x \in A \triangle B &\iff x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &\iff x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A) \\ &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\ &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\iff (x \in A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \in [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \\ &\iff (A \triangle B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)) \end{aligned}$$

i obrnuto, da je $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset A \triangle B$, pa sledi da je

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

9. *Pokazati relaciju:*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \\ &\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}, \end{aligned}$$

pa je

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B},$$

i obrnuto

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \cap \overline{B} &\Rightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \\ &\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in \overline{A \cup B}, \end{aligned}$$

tj.

$$\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

10. *Neka je* $A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b\}$. *Odrediti* $A \times B$ *i* $B \times A$.

Rešenje:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\},$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

11. *Neka su* A, B, C *proizvoljni skupovi. Dokazati da važe sledeće skupovne jednakosti:*

1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Rešenje: Pokazaćemo samo prvu, dok se druga dokazuje analogno

$$\begin{aligned} (\forall x, y), (x, y) \in (A \cup B) \times C &\iff x \in (A \cup B) \wedge y \in C \\ &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \\ &\iff (x, y) \in (A \times C) \vee (x, y) \in (B \times C) \\ &\iff (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C). \end{aligned}$$

Glava 3

Relacije

3.1 Teorija

Definicija 1. *$n-$arna relacija, u oznaci ρ, je svaki podskup Dekartovog proizvoda n skupova.*

Napomena 1. *U zavisnosti od broja n iz prethodne definicije razlikujemo: unarnu ($n = 1$), binarnu ($n = 2$), ternarnu ($n = 3$), $\cdots$*

Notacija 1. *Ako je $\rho \subset A \times B$ i $(a, b) \in \rho$, kažemo da je a u relaciji sa b i to označavamo sa $a\rho b$.*

Napomena 2. *Binarna relacija skupa A je svaki podskup skupa A^2.*

Napomena 3. *Relacije možemo predstaviti:*

1) opisivanjem (tekstualno),

2) skupom,

3) pomoću grafa,

4) navođenjem matematičko-logičkog uslova,

5) tabelarno.

Definicija 2. *Neka je $\rho \subset A^2$. Za relaciju ρ se kaže da je:*

1) refleksivna ako $(\forall x \in A)(x\rho x)$,

2) simetrična ako $(\forall x, y \in A)(x\rho y \Rightarrow\ y\rho x)$, *3) antisimetrična ako* $(\forall x, y \in A)(x\rho y \land y\rho x \Rightarrow \; x = y)$,

4) tranzitivna ako $(\forall x, y, z \in A)(x\rho y \land y\rho z \Rightarrow \; x\rho z)$.

Definicija 3. *Unija binarnih relacija* ρ_1 *i* ρ_2*, u oznaci* $\rho_1 \cup \rho_2$*, je skup:*

$$\rho_1 \cup \rho_2 = \{(x, y) | (x, y) \in \rho_1 \lor (x, y) \in \rho_2\}.$$

Definicija 4. *Presek binarnih relacija* ρ_1 *i* ρ_2*, u oznaci* $\rho_1 \cap \rho_2$*, je skup:*

$$\rho_1 \cap \rho_2 = \{(x, y) | (x, y) \in \rho_1 \land (x, y) \in \rho_2\}.$$

Definicija 5. *Inverzna binarna relacija relacije* ρ*, u oznaci* ρ^{-1}*, je skup svih onih i samo onih uređenih parova* (y, x)*, za koje je* $(x, y) \in \rho$

$$(y, x) \in \rho^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \rho$$

Definicija 6. *Binarna relacija* ρ *definisana na skupu* A *je relacija ekvivalencije ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna (RST).*
Relaciju koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna nazivamo relacija poretka (RAT).

Notacija 2. *Uobičajena oznaka za relaciju ekvivalencije je simbol* " $\sim$ " *(tilda), dok je za relaciju poretka* " $\leq$ "*.*
Relacija za koju važi $\rho = \emptyset$ *je poznata kao prazna relacija, a ako je* $\rho = A^2$*, onda je* ρ *puna relacija.*

Teorema 1. *Za neprazan skup* A*, presek proizvoljne neprazne familije relacija ekvivalencije jeste relacija ekvivalencije skupa* A*.*

Definicija 7. *Skup* A *na kome je definisana relacija poretka* $\leq$ *naziva se parcijalno uređen skup. Ako pored toga za svaka dva elementa* x *i* y *skupa* A *važi i:*

$$x \leq y \lor y \leq x$$

kažemo da su elementi x *i* y *uporedivi, a da je skup* A *totalno uređen.*

Definicija 8. *Neka je* $\leq$ *relacija poretka na skupu* A*,* $S \subset A$ *i* $x \in A$*. Element* a *je majoranta (gornje ograničenje) skupa* S *ako je* $x \leq a$ *za sve* $x \in S$*. Ako je* $a \in S$*, onda* a *nazivamo maksimum skupa* S*.*
Element a *je minoranta (donje ograničenje) skupa* S *ako je* $a \leq x$ *za sve* $x \in S$*. Ako je* $a \in S$*, onda* a *nazivamo minimum skupa* S*.*

Definicija 9. *Neka je $\leq$ relacija poretka na skupu A. Element $a \in S \subset A$ nazivamo maksimalan element skupa S, ako ne postoji $x \in S$ takav da je $a \leq x$ i $x \neq a$, tj.*

$$a \in S \subset A \text{ je maksimalan element skupa } S \Leftrightarrow \neg(\exists x \in S)(a \leq x \wedge x \neq a)$$

ili

$$a \in S \subset A \text{ je maksimalan element skupa } S \Leftrightarrow (\forall x \in S)(a \leq x \Rightarrow x = a).$$

Analogno se definiše minimalni element skupa S.

Napomena 4. *Maksimum (minimum) skupa S i maksimalni (minimalni) element skupa S su različiti pojmovi.*

Teorema 2. *Ako skup ima maksimum (minimum) onda je on jedinstven. Skup može imati više maksimalnih (minimalnih) elemenata.*

Definicija 10. *Totalno uređen skup je dobro uređen relacijom $\leq$ ako svaki njegov neprazan skup ima minimum.*

Definicija 11 *Klasa ekvivalencije elemenata $x \in A$ relacije $\sim$ definisana na skupu A, u oznaci C_x, je skup svih elemenata skupa A koji su u relaciji $\sim$ sa elementima x*

$$C_x = \{y | x \in A \wedge x \sim y\}.$$

Teorema 3. *Neka je $\sim$ klasa ekvivalencije skupa A i C_x klasa ekvivalencije elementa $x \in A$. Tada je za proizvoljne $a, b \in A$*

1) $a \in C_a$,
2) $a \sim b \Leftrightarrow C_a = C_b$.

Definicija 12. *Količnik skup relacije " $\sim$ ", definisane na skupu A, u oznaci $A/_\sim$, je skup svih klasa ekvivalencije relacije " $\sim$ "*

$$A/_\sim = \{C_x | x \in A\}.$$

3.2 Zadaci

1. *Navesti neke primere relacija.*

Rešenje:

1) " manje od " u skupu realnih brojeva,

2) " deljivo sa " u skupu celih brojeva,

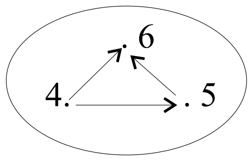
3) " leži na " između tačaka i pravih u ravni.

2. *Neka je dat skup $A = \{4, 5, 6\}$ i relacija $\rho \subseteq A^2$ data sa $x\rho y$ ako i samo ako je x manji od y. Predstaviti relaciju ρ na preostala četiri načina.*

Rešenje:

1) skupom: $\rho = \{(4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$,

2) pomoću grafa:



sl.4

3) navođenjem matematičko-logičkog uslova:

$$\rho = \{(x, y) | x, y \in A \wedge x < y\},$$

4) tabelarno:

ρ	4	5	6
4	$\perp$	$\top$	$\top$
5	$\perp$	$\perp$	$\top$
6	$\perp$	$\perp$	$\perp$

gde prva kolona predstavlja x, a prva vrsta y.

3. *Ispitati svojstva binarnih relacija na skupu* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *i prikazati prvu preko grafa.*

1) $\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (4,4)\}$,

2) $\rho_2 = \{(1,3), (2,4), (3,1), (4,2), (1,1)\}$,

3) $\rho_3 = \{(1,1), (2,2), (3,4), (2,3)\}$,

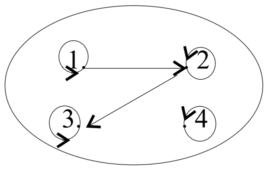
4) $\rho_4 = \{(1,2), (2,4), (1,4), (4,4)\}$,

5) $\rho_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,3), (1,3)\}$,

6) $\rho_6 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1)\}$.

Rešenje:

1) refleksivna,



sl.5

2) simetrična,

3) antisimetrična,

4) tranzitivna,

5) refleksivna, antisimetrična i tranzitivna,

6) refleksivna, simetrična i tranzitivna.

4. *Na skupu prirodnih brojeva* $\mathbb{N}$ *zadata je relacija* ρ *na sledeći način:*

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow x \textit{ je činilac od } y.$$

Ispitati relaciju ρ.

Rešenje: Za svako $x \in \mathbb{N}$, x je činilac od x. Ako je x činilac od y i y činilac od x onda je $x = y$. Na kraju, ako je x činilac od y i y činilac od z onda je x činilac od z. Na osnovu izloženog data relacija ρ je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, pa je ovo relacija poretka.

5. *Na skupu* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *za date relacije*

$$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,2)\},$$

$$\rho_2 = \{(5,4), (4,3), (1,2), (2,2), (1,3)\},$$

naći: $\rho_1 \cup \rho_2$ *i* $\rho_1 \cap \rho_2$.

Rešenje:

1) $\rho_1 \cup \rho_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,2), (5,4), (4,3), (2,2)\}$,

2) $\rho_1 \cap \rho_2 = \{(1,2), (1,3)\}$.

6. *Na skupu* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *za relaciju*

$$\rho = \{(a,d), (b,c), (b,d)\}$$

naći inverznu relaciju ρ^{-1}.

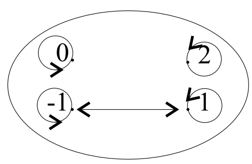
Rešenje: $\rho^{-1} = \{(d,a), (c,b), (d,b)\}$.

7. *Neka je na skupu* $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ *definisana binarna relacija*

$$\rho = \{(x,y) \mid |x| = |y| \}.$$

Ispitati preko grafa da li je ovo relacija ekvivalencije i ako jeste odrediti količnički skup.

Rešenje:



sl.6

Pošto je ovo relacija ekvivalencije količnički skup je:

$$A/_{\sim} = \{\ \{-1,1\},\{0\},\{2\}\ \}.$$

8. *Neka je na skupu A definisana relacija ekvivalencije "∼". Tada su svake dve klase ekvivalencije relacije " ∼ " ili jednake ili disjunktne. Dokazati.*

Rešenje: Neka su $x, y \in A$. Treba dokazati da je ili

$$C_x = C_y$$

ili

$$C_x \cap C_y = \emptyset.$$

Ako pretpostavimo da je $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, tada treba dokazati da je $C_x = C_y$. Neka važi naša pretpostavka. Tada

$$\begin{aligned}(\exists z \in A)\, z \in C_x \cap C_y \quad &\Rightarrow \quad z \in C_x \wedge z \in C_y\\ &\Rightarrow \quad z \sim x \wedge z \sim y\\ &\Rightarrow \quad x \sim z \wedge z \sim y\\ &\Rightarrow \quad x \sim y.\end{aligned}$$

Prema tome, ako je $z \in C_x$, onda je $z \sim x$, što zajedno sa $x \sim y$ daje $z \sim y$, a odavde $z \in C_y$. Pokazali smo da je $C_x \subseteq C_y$. Slično dokazujemo i da je $C_y \subseteq C_x$, pa je tada $C_x = C_y$.

9. *Neka je* $A = \{\{3,7\},\ \{7,8\},\ \{3,7,8\}\}$ *i neka je relacija* $\leq$ *relacija* $\subset$. *Koji su elementi skupa A u odnosu na navedenu relaciju uporedivi?*

Rešenje: Uočavamo da elementi $\{3,7\}$ i $\{7,8\}$ nisu uporedivi, zato što nije $\{3,7\} \subset \{7,8\}$, kao i obrnuto $\{7,8\} \not\subset \{3,7\}$. Ukoliko ove elemente upoređujemo sa $\{3,7,8\}$, uočavamo da su uporedivi, jer je $\{3,7\} \subset \{3,7,8\}$.

Glava 4

Preslikavanja

4.1 Teorija

Definicija 1. *Neka je* X *neprazan skup. Binarnu relaciju* $f \subseteq X \times Y$ *nazivamo preslikavanje skupa* X *u skup* Y*, u oznaci* $f : X \to Y$ *(ili* $X \xrightarrow{f} Y$*), ako svakom elementu* $x \in X$ *odgovara jedan i samo jedan element* $y \in Y$ *takav da je* $(x, y) \in f$*, tj.*

$$f : X \to Y \iff (\forall x \in X)(\forall y, z \in Y)\,((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow\ y = z)\,.$$

Napomena 1. *Pojam preslikavanja (funkcionalna relacija), kao i pojam skupa, spada u fundamentalne pojmove matematike. Jasno je, dakle, da se i ovde, kao kod relacija, radi o uspostavljanju određenih veza između elemenata dva skupa. Svakako, i ove veze imaju neke svoje osobenosti i osobine. Kod relacija smo imali da jedan element skupa* X *može biti povezan sa više različitih elemenata skupa* Y*, dok kod preslikavanja imamo da je jedan element skupa* X *u vezi sa najviše jednim elementom skupa* Y*. Uz to se pretpostavlja da je svaki element skupa* X *u vezi sa nekim elementom skupa* Y*.*

Notacija 1. *Činjenicu da* $(x, y) \in f$ *možemo simbolički zapisati i sa* $y = f(x)$*. Element* $f(x)$ *skupa* Y *se naziva vrednost preslikavanja* f *u tački* x*. Uobičajeno je, mada i pogrešno, da se preslikavanje* f *identifikuje sa vrednosti tog preslikavanja u tački* x*, tj. sa* $f(x)$*. Tako, na primer, kažemo "preslikavanje* $\sin x$*", a treba reći "preslikavanje* $\sin$*". Ovo "nekorektno" izražavanje je često podesno i zato ga primenjujemo bez ustručavanja. Tako se, vrlo često, i umesto "preslikavanje" koristi termin "funkcija". Poznato* *je da se za preslikavanje*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \left((x, y) \in f \subseteq \mathbb{R}^2\right)$$

kaže da je to "realna funkcija" ili jednostavno "funkcija". Međutim, postoje preslikavanja koja nisu funkcije. Tako je preslikavanje f koje proizvoljan element skupa X preslikava u proizvoljan element skupa Y poznato kao operator, dok je preslikavanje koje proizvoljan element iz X postupkom f preslikava u skup brojeva poznato kao funkcional (tu se skup elemenata koji nisu brojevi preslikava u skup brojeva, na primer: određeni integral).
Funkciju označavamo sa $y = f(x)$, a to je vrednost funkcije u tački x. Za ovako definisano preslikavanje kažemo da je funkcija jednog argumenta x.

Definicija 2. *Skup uređenih parova $(x, f(x))$ pretstavljen tačkama u kordinatnom sistemu naziva se grafik funkcije f.*

Notacija 2. *Elemente skupa X koji se preslikaju u skup Y nazivamo originali ili likovi, a elemente $f(x) \in Y$ nazivamo slike originala x. Sam skup X nazivamo skup originala ili domen od f, dok slike elemenata x nazivamo skup vrednosti preslikavanja f ili kodomen za f.*
Skup svih slika preslikavanja $f : X \to Y$ označavamo sa $f(X)$, tj. sa $f(X) = \{f(x)|x \in X\}$. Prema definicji preslikavanja sledi da je $f(X) \subset Y$.
Preslikavanje $f : X \to Y$, tj. $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...\}$ možemo označiti i na slede ci način:

$$f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... \\ y_1 & y_2 & ... \end{pmatrix}.$$

U prvoj vrsti su elementi skupa X (originali), a u drugoj odgovarajuće slike iz skupa Y.

Definicija 3. *Preslikavanje $f : X \to Y$ je preslikavanje skupa X "na" skup Y (sirjektivno preslikavanje), u oznaci $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$, ako je $f(X) = Y$, tj.*

$$f : X \xrightarrow{\text{na}} Y \iff f(X) = Y$$

ili

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y = f(x)).$$

Definicija 4. *Preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ je "jedan - jedan" (obostrano-jednoznačno ili injektivno) preslikavanje, u oznaci $f : X \xrightarrow{1-1} Y$, ako različitim originalima odgovaraju različite slike*

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

tj.

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2).$$

Definicija 5. *Ako je preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ "1-1" i "na" tada kažemo da je f bijektivno preslikavanje (bijekcija).*

Definicija 6. *Bijektivno preslikavanje $f : X \rightarrow X$ skupa X na samog sebe zovemo i transformacija skupa X. Ako je X konačan skup, onda za bijektivno preslikavanje $f : X \rightarrow X$ kažemo da je permutacija skupa X. Ukoliko je $(\forall x \in X)(f(x) = x)$ preslikavanje nazivamo identičko i označavamo ga sa I_X.*

Definicija 7. *Preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ je konstantno preslikavanje ako se svi elementi skupa X preslikavaju u jedan i samo jedan element skupa Y, tj.*

$$(\forall x \in X) \;\; (\exists c \in Y) \; f(x) = c\,.$$

Definicija 8. *Neka su data tri neprazna skupa X, Y i Z i neka su data preslikavanja $g : X \longrightarrow Y$ i $f : Y \longrightarrow Z$. Tada za preslikavanje $h : X \longrightarrow Z$ određeno sa $(\forall x \in X) \;\; h(x) = f(g(x))$, a u oznaci $h = f \circ g$ kažemo da je proizvod (slaganje, kompozicija) preslikavanja f i g. Funkcija h je složena funkcija.*

Teorema 1. *Kompozicija preslikavanja nije komutativna. (Komutativnost ne važi čak ni tada kada je $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow X$).*

Teorema 2. *Neka su data preslikavanja $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ i $h : Z \rightarrow S$. Tada važi da je*

$$(h \circ g) \;\circ\; f = h \circ (g \circ f).$$

Definicija 9. *Neka je $f : X \rightarrow Y$ bijektivno preslikavanje, a I_X identičko preslikavanje skupa X. Preslikavanje $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, a koje ima osobinu da je $f^{-1} \circ f = I_X$, je inverzno preslikavanje preslikavanja f.*

Definicija 10. *Neka su data dva skupa X i Y. Skupovi X i Y su ekvivalentni, u oznaci $X \sim Y$, ako postoji bijekcija skupa X na skup Y*

Definicija 11. *Neka je dat skup X i njegov pravi podskup X' $(X' \subset X)$. Za skup X kažemo da je beskonačan ako je ekvivalentan nekom svom pravom podskupu X'. U protivnom, skup X je konačan.*

Definicija 12. *Za skup X kažemo da je prebrojiv skup ako je ekvivalentan skupu prirodnih brojeva.*

4.2 Zadaci

1. *Neka su dati skupovi* $X = \{1, 2, 3\}$ *i* $Y = \{a, b, c\}$. *Neka su sada* f_1, f_2 *i* f_3 *podskupovi skupa* $X \times Y$ *definisani sa :*

1) $f_1 = \{(1, a), (2, c), (3, c)\}$,

2) $f_2 = \{(1, b), (1, c), (2, d), (3, a)\}$,

3) $f_3 = \{(2, c), (3, b)\}$.

Koji od navedenih podskupova su preslikavanja?

Rešenje: Uočavamo, imajući na umu definiciju preslikavanja, da je f_1 preslikavanje skupa X u skup Y, dok f_2 i f_3 to nisu. f_2 ne ispunjava taj uslov jer je $(1, b) \in f_2$ i $(1, c) \in f_2$, tj. elementu $1 \in X$ odgovaraju elementi $b, c \in X$. Kod f_3 imamo da je $1 \in X$, a da nema sliku u Y, tj. $f_3(1)$ ne postoji. Znamo da definicija preslikavanja obezbeđuje da jedan original ima tačno jednu sliku, ali je dopušteno da dva različita originala imaju istu sliku ($f_1(2) = f_1(3) = c$).

2. *Za skupove* X *i* Y *iz predhodnog zadatka navesti jedan primer preslikavanja* $f : Y \longrightarrow X$.

Rešenje:

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. *Navesti dva primera preslikavanja "na".*

Rešenje:

1) Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pri čemu je

$$f = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y = x^3\}$$

Navedeno preslikavanje (funkcija) je "na". x je nezavisno promenljiva ili argument, a y je zavisno promenljiva.

2) Preslikavanje skupa $X = \{1, 2, 3, 4\}$ na skup $Y = \{a, b, c\}$ koje je zadato je sa

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & a & c \end{pmatrix}.$$

4. *Navesti dva primeras preslikavanja "1-1".*

Rešenje:

1) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pri čemu je

$$f(x) = 5x - 1.$$

Tada je zaista

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; 5x_1 - 1 = 5x_2 - 1 \;\Rightarrow\; 5x_1 = 5x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

2) Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$. Tada je preslikavanje $f : A \to B$ dato sa

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$

"1-1" preslikavanje.

5. *Navesti primer bijektivnog preslikavanja f skupa $X = \{1, 3, 5, 7\}$ na skup $Y = \{a, b, c, d\}$.*

Rešenje:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$$

6. *Neka je $X = Y = \{a, b\}$. Odrediti sva preslikavanja skupa X u skup Y (tj. u isti skup $X = Y$).*

Rešenje: To su sledeća preslikavanja:

1)

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix}$$

2)

$$f_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}$$

3)

$$f_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

4)

$$f_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

7. *Neka je sada* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *preslikavanje skupa realnih brojeva u samog sebe i neka jedefinisano sa*

$$f = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}.$$

Objasniti rečima navedeno preslikavanje.

Rešenje: Ovo znači da se svakom realnom broju x dodeljuje kao slika njegov kvadrat x^2.

Zavisnost između originala x i odgovarajuće slike y data je određenim zakonom pridruživanja. Ovaj zakon možemo iskazati formulom $f(x) = x^2$, tj. $y = x^2$. Tada za funkciju f kažemo da je zadata analitički, tj. da je to analitički prikaz realne funkcije.
Svakako, funkcije se zadaju analitički ukoliko je to moguće. Za ove funkcije, čiji su domen i kodomen skupovi realnih brojeva kažemo i da su numeričke funkcije. Za kodomen se kod njih uzima maksimalan podskup skupa realnih brojeva na kome je definisana formula kojom je zadata funkcija, odnosno skup svih realnih brojeva x za koje $f(x)$ ima smisla u skupu realnih brojeva ($f(x) \in \mathbb{R}$).

8. *Navesti tri primera funkcija i jedan primer koji to nije.*

Rešenje:

1) Prva je realna funkcija f definisana sa $f(x) = |\sqrt{x}|$ i ima za domen skup $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \subseteq R$.

2) Preslikavanje $f = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$ je funkcija.

3) Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je poznata kao niz brojeva.

4) $f = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = y^2\}$ nije funkcija, jer je jasno da je $(2, 2) \in f$ i $(2, -2) \in f$.

9. *Neka su dati skupovi* $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ *i* $Z = \{d, e, k\}$, *kao i preslikavanje*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ e & k \end{pmatrix}$$

Naći proizvod preslikavanja $h = f \circ g$.

Rešenje:

$$h = f \circ g = \begin{pmatrix} a & b \\ e & k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix} = f(g(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ e & k & k \end{pmatrix}.$$

10. *Za preslikavanja $f(x) = 4x - 6$ i $g(x) = 3x^2 + 4x$ naći:*

1) $f(g(x)) =?$

2) $g(-10x + 5f(x)) =?$

Rešenje:

1) $f(g(x)) = f(3x^2 + 4x) = 4(3x^2 + 4x) - 6 = 12x^2 + 16x - 6.$

2) $g(-10x+5f(x)) = g(-10x+5(4x-6)) = g(10x-30) = 3(10x-30)^2 + 4(10x - 30) = 300x^2 - 1760x + 2580.$

11. *Dokazati Teoremu 2.*

Rešenje: $((h \circ g) \circ f : X \to S$ kao i $h \circ (g \circ f) : X \to S$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

1)

$$(\forall x \in X)\ \ ((h \circ g) \circ f)\ \ (x) = h \circ g(f(x)) = h\,(g(f(x)))$$

$$\Rightarrow ((h \circ g) \circ f)\,(x) = h(g(f(x)))$$

2)

$$(\forall x \in X)\ (h \circ (g \circ f))(x) = h\,((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

$$\Rightarrow (h \circ (g \circ f))\ (x) = h(g(f(x))).$$

Iz 1) i 2) sledi tvrđenje.

12. *Neka je f preslikavanje $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ određeno formulom $f(x) = 3x - 2$. Naći inverzno preslikavanje.*

Rešenje: Za nalaženje inverznog preslikavanja potrebno je najpre utvrditi da je dato preslikavanje "na" i "$1-1$" preslikavanje. Pošto je $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(y = f(x))$ navedeno preslikavanje je "na". Pokažimo da je i "$1-1$". Treba pokazati da iz $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. U konkretnom primeru imamo da je za x_1 $f(x_1) = 3x_1 - 2$, a za x_2 je $f(x_2) = 3x_2 - 2$. Poštujući jednakost $f(x_1) = f(x_2)$, dobijamo da je $3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, tj. iz $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ za sve $x_1, x_2 \in R$, što znači da je f "1-1" preslikavanje. Kako smo utvrdili neophodan uslov, to sada prelazimo na određivanje formule za f^{-1}. U tom cilju polazimo od jednakosti $f^{-1}(f(x)) = x$, a što nas dovodi do jednačine posebne vrste, do takozvane funkcionalne jednačine, jer je nepoznata funkcija. Rešavamo je na sledeći način. Za izraz $3x-2$ uvodimo novi izraz, na primer a, tj. $a = 3x-2$. Sada, rešavanjem te jednačine po x dobijamo da je:

$$\begin{aligned} f^{-1}(3x-2) = x \quad & \Rightarrow \quad \left(a = 3x - 2 \Rightarrow a + 2 = 3x \Rightarrow \frac{a+2}{3} = x\right) \\ & \Rightarrow \quad f^{-1}(a) = \frac{a+2}{3}, \end{aligned}$$

tj. ako koristimo uobičajenu oznaku x, imaćemo da je inverzna funkcija datoj funkcija

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}.$$

13. *Da li je skup svih prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ beskonačan?*

Rešenje: Skup $\mathbb{N}$ je beskonačan, jer je ekvivalentan svom pravom podskupu $P = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$. Zaista, postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow P$ definisana formulom $f(x) = 2x$, a koja je bijekcija skupa $\mathbb{N}$ na skup P.

14. *Navesti jedan prebrojiv skup.*

Rešenje: Na osnovu prethodnog zadatka, pošto je funkcija $f(x) = 2x$ bijekcija, skup svih parnih brojeva je prebrojiv.

Glava 5

Algebarske strukture

5.1 Teorija

Definicija 1. *Neka je* A *neprazan skup i* $n \geq 1$ *prirodan broj. Pod* n *-arnom operacijom* ω *na nepraznom skupu* A *podrazumevamo preslikavanje* $f : A^n \to A$. *Pri tome za svako* $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ *postoji jedno* $a_{n+1} \in A$, *tako da je* $((a_1, ..., a_n),\ a_{n+1}) \in \omega$, *tj.* $\omega(a_1, ..., a_n) = a_{n+1}$.
Broj n *se zove arnost ili rang operacije* ω.

Napomena 1. *Specijalno za* $n = 1$ *imamo unarnu a za* $n = 2$ *imamo binarnu operaciju.*
Kako je A^2 *skup uređenih parova čije su komponente elementi skupa* A, *a* u *oblika* (x, y), *to odnos između njih zapisujemo i sa* $\omega(u) = z$. *Dakle, svakom paru elemenata* $x, y \in A$ *pridružuje se jedan element* $z \in A$ *takav da je* $\omega(x, y) = z$ *ili* $x\omega y = z$. *Same binarne operacije obeležavamo uglavnom sa* $+$, $\cdot$, $*$, $\circ$ *ili na neki drugi način. Tako umesto* $\omega(x, y)$ *pišemo npr.* $x * y$, *tj.* $x * y = z$.

Definicija 2. *Parcijalna (delimična) binarna operacija skupa* A *je preslikavanje nekog pravog podskupa skupa* A^2 *u skup* A.

Napomena 2. *Operacije se prikazuju pomoću Kelijevih tablica. Sledeća Kelijeva tablica definiše jednu binarnu operaciju* $*$ *na skupu* $\{a, b\}$*:*

$*$	a	b
a	a	b
b	a	a

Prema ovoj tablici je: $a * a = a,\ a * b = b,\ b * a = a$ *i* $b * b = a$.

Definicija 3. *Kada je na skupu definisana jedna ili više operacija, tada kažemo da je zadata algebarska struktura.*

Definicija 4. *Za skup* $A \subseteq X$ *kažemo da je zatvoren u odnosu na operaciju* $\circ$ *definisanu na skupu* X *ako je*

$$(\forall x, y \in A)\ (x \circ y \in A)\,.$$

Definicija 5. *Neka je* A *neprazan skup. Uređenu dvojku* $(A, \circ)$ *nazivamo grupoid ako je skup* A *zatvoren u odnosu na operacija* $\circ$ *tj.*

$$(\forall x, y)(x, y \in A \Rightarrow x \circ y \in A).$$

Definicija 6. *Neka je* $(A, \circ)$ *grupoid. Tada*

ako važi	*onda je grupoid* A
$(\exists e \in A)(\forall x \in A)(x \circ e = e \circ x = x)$	*sa jedinicom* e *(ili sa neutralnim elementom)*
$(\exists 0 \in A)(\forall x \in A)(x \circ 0 = 0 \circ x = 0)$	*sa nulom* 0
$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \circ y = y \circ x)$	*komutativan (ili Abelov)*
$(\forall x \in A)(\forall z \in A)(\forall y \in A)$ $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$	*asocijativan*
$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)$ $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$ $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$	*distributivan*
$(\forall x \in A)(x \circ x = x)$	*idenpotentan*
$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)$ $x \circ y = x \circ z \Rightarrow y = z$ $y \circ x = z \circ x \Rightarrow y = z$	*kancelativan*

Definicija 7. *Neka su na skupu* A *definisane dve binarne operacije* $\circ$ *i* $*$*. Kažemo da je operacija* $\circ$ *levo distributivna u odnosu na operaciju* $*$ *ako je*

$$(\forall x, y, z \in A)\ \ x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)\,.$$

Operacija $\circ$ *je desno distributivna u odnosu na operaciju* $*$ *ako je*

$$(\forall x, y, z \in A)\ \ (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)\,.$$

Za operaciju $\circ$ kažemo da je distributivna u odnosu na operaciju $*$ ako je i levo i desno distributivna u odnosu na operaciju $*$.

Definicija 8. *Za element x grupoida $(A, \circ)$ sa jediničnim elementom e, element x^{-1} je inverzni ako važi:*

$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e.$$

Definicija 9. *Grupoid $(A, \circ)$ nazivamo polugrupa (ili semigrupa) ako je operacija $\circ$ asocijativna.*

Definicija 10. *Polugrupu $(A, \circ)$ nazivamo grupa ako ona ima neutralni element i ako svaki element ima inverzni.*

Teorema 1. *Neka je $(A, \circ)$ grupa. Tada je za sve $x, y, z \in A$*

$$x \circ y = x \circ z \wedge y \circ a = z \circ a \Rightarrow y = z.$$

Teorema 2. *Neka je $(A, \circ)$ grupa. Tada za sve $a, b \in A$ jednačine*

$$a \circ x = b \text{ i } y \circ a = b$$

imaju jedinstveno rešive po x i po y.

Definicija 11. *Grupu $(A, \circ)$ nazivamo komutativna ili Abelova grupa ako je operacija $\circ$ komutativna.*

Definicija 12. *Uređenu trojku $(A, *, \circ)$, gde je A neoprazan skup, a $*$ i $\circ$ dve binarne operacije skupa A nazivamo prsten, ako je*

1. *$(A, *)$ Abelova grupa*
2. *$(A, \circ)$ polugrupa*
3. *$\circ$ distributivna u odnosu na $*$.*

Definicija 13. *Prsten $(A, *, \circ)$ zovemo polje, ako je $(A \backslash \{e_\circ\}, \circ)$ Abelova grupa, gde je $e_\circ$ neutralni element operacije $\circ$.*

Definicija 14. *Preslikavanje $f : A \rightarrow B$ se naziva homomorfizam strukture $(A, \circ)$ u $(B, \star)$ ako važi:*

$$(\forall x, y \in A) \ (\ f(x \circ y) = f(x) \star f(y) \ ).$$

Ako je uz to preslikavanje $f(x)$ bijekcija, onda se naziva izomorfizam. Ovako preslikavanje definisano na istoj algebarskoj strukturi se naziva automorfizam.

5.2 Zadaci

1. *Navesti primere unarne, binarne, ternarne i n-arne operacije.*

Rešenje:

1) Unarna: Operacija $\omega(x) = -x$ na skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$.

2) Binarna: Na skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ imamo operacije zbira $\omega_1(x, y) = x + y$ i proizvoda $\omega_2(x, y) = x \cdot y$.

3) Ternarna: Na skupu celih brojeva definišimo operaciju ω na sledeći način $\omega(x, y, z) = x + y - z$.
Ova ista operacija na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ nije ternarna operacija, jer recimo $\omega(2, 3, 7)$ nije prirodan broj.

4) n-arna: Na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ može se definisati operacija na sledeći način : svakoj uređenoj n-torci prirodnih brojeva pridružujemo njihov najveći zajednički delilac.

2. *Navesti primere delimične (parcijalne, uslovne) operacije.*

Rešenje:

1) Operacija oduzimanje je, u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, delimična operacija, jer je izraz $x-y$ određen u skupu $\mathbb{N}$ pod uslovom $x > y$. Dakle, operacija oduzimanje je preslikavanje skupa

$$\{(x, y)|x, y \in \mathbb{N} \wedge x > y\} \subset \mathbb{N}^2$$

u skupu $\mathbb{N}$.

2) Deljenje je delimična operacija u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, jer je izraz $\frac{x}{y}$ definisan pod uslovom da je $y \neq 0$.

3. *Na skupu* $A = \{1, 2, 3, 6\}$ *navesti primer operacije* $\circ$ *za koju važi da je* $(\forall x \in A)(x \circ x = x)$.

Rešenje: Opraciju ćemo definisati tablicom:

$\circ$	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

Prema ovoj tablici je $2 \circ 3 = 6$, $3 \circ 3 = 3$, $6 \circ 3 = 6$ ...
Primećujemo da je ova operacija definisana i sa $x \circ y = NZS(x, y)$, gde je NZS oznaka za najveći zajednički sadržilac dva broja.

4. *Da li je svaki neprazan podskup A skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zatvoren u odnosu na operaciju NZS? Navesti još neke primere.*

Rešenje: Jeste, jer je ispunjen uslov

$$(\forall x, y \in A)\; x\; NZS\; y \in A\,.$$

Skup svih parnih celih brojeva zatvoren je u odnosu na operacije "+" i "·". Međutim, to ne važi za skup neparnih celih brojeva.

5. *Ako za operaciju $\circ$ postoji neutralni element, tada je on jedinstven. Dokazati.*

Rešenje: Pretpostavimo da postoje dva neutralna elementa e i e_1 ($e \neq e_1$). Tada je

$$(e \circ e_1 = e_1 \circ e = e \;\;\wedge\;\; e_1 \circ e = e \circ e_1 = e_1) \;\;\Rightarrow\;\; e = e_1$$

što je protivurečno pretpostavci da je $e \neq e_1$.
Zadatak je dokazan svođenjem na protivurečnost.

6. *Za operacije sabiranje i množenje u skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ odrediti neutralne elemente.*

Rešenje: To su brojevi 0 i 1 respektivno.

7. *Neka je na skupu A definisana neka asocijativna operacija za koju postoji neutralni element e. Ako pri tom postoji i inverzni element x^{-1} elementa $x \in A$, tada je on jedinstven. Dokazati.*

Rešenje: Dokaz izvodimo polazeći od protivurečne pretpostavke. Neka postoje dva inverzna elementa x_1^{-1} i x_2^{-1} ($x_1^{-1} \neq x_2^{-1}$) elementa x. Tada je

$$\left(x_1^{-1} \circ x\right) \circ x_2^{-1} = e \circ x_2^{-1} = x_2^{-1} \wedge \;\; x_1^{-1} \circ \left(x \circ x_2^{-1}\right) = x_1^{-1} \circ e = x_1^{-1}.$$

Kako je operacija $\circ$ asocijativna, to je i

$$\left(x_1^{-1} \circ x\right) \circ x_2^{-1} = x_1^{-1} \circ \left(x \circ x_2^{-1}\right)\,,$$

a što znači da je i $x_1^{-1} = x_2^{-1}$, što je protivrečno pretpostavci da je $x_1^{-1} \neq x_2^{-1}$.

8. *Navesti primer polugrupe i komutativne grupe.*

Rešenje:

1) Grupoid $(\mathbb{N}, +)$ je polugrupa.

2) Grupoid $(\mathbb{Z}, +)$ je komutativna grupa, a $(\mathbb{Z}, \cdot)$ nije grupa. Takođe, $(\mathbb{Q}, +)$ je komutativna grupa, a $(\mathbb{Q}, \cdot)$ nije grupa.

9. *Ispitati osobine algebarske strukture* $(A, \circ)$ *na skupu* $A = \{e, a, b, c\}$, *gde je operacija* $\circ$ *datas tablicom:*

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Rešenje:

1) Iz tablice se neposredno proverava da je $(\forall x, y \in A)\ (x \circ y \in A)$ pa je skup A zatvoren u odnosu na operaciju $\circ$. Sledi da je $(A, \circ)$ grupoid.

2) Operacija $\circ$ je asocijativna. Na primer

$$a \circ (b \circ c) = a \circ a = e = c \circ c = (a \circ b) \circ c.$$

Sledi da je $(A, \circ)$ polugrupa.

3) Pošto je $e \circ e = e$, $e \circ a = a \circ e = a$, $e \circ b = b \circ e = b$ i $e \circ c = c \circ e = c$ imamo da je element e jedinični element grupoida $(A, \circ)$.

4) Svaki element $x \in A$ ima svoj inverzni x^{-1} i on je $x^{-1} = x$.

5) Operacija $\circ$ je komutativna, jer je: $a \circ b = c = b \circ a$, $a \circ c = b = c \circ a$ i $b \circ c = a = c \circ b$.

Na osnovu 2), 3), 4) i 5) imamo da je $(A, \circ)$ komutativna grupa.

10. *Navesti primere algebarskih struktura koji su prsten i polje.*

Rešenje:

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je prsten celih brojeva.

2) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je polje racionalnih brojeva.

11. *Na skupu* $A = \{0, 1, 2, 3\}$ *date su operacije* $*$ *i* $\circ$ *tablicama:*

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\circ$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Dokazati da je $(A, *, \circ)$ *prsten.*

Rešenje: Da bi smo pokazali da je struktura $(A, *, \circ)$ prsten potrebno je pokazati da je

1) struktura $(A, *)$ komutativna grupa,

2) struktura $(A, \circ)$ polugrupa,

3) $\circ$ distributivna u odnosu na $*$.

1) a) Iz tablice se uočava da je $(\forall x, y \in A)$ $(x * y \in A)$ pa je skup A zatvoren u odnosu na operaciju $*$. Sledi da je $(A, *)$ grupoid.

b) Operacija $*$ je asocijativna. Na primer

$$0 * (1 * 2) = 0 * 3 = 3 = 1 * 2 = (0 * 1) * 2.$$

Sledi da je $(A, *)$ polugrupa.

c) Pošto je $0*0 = 0$, $0*1 = 1*0 = a$, $0*2 = 2*0 = 2$ i $0*3 = 3*0 = 3$ imamo da je element $e_* = 0$ jedinični element grupoida $(A, *)$.

d) Svaki element $x \in A$ ima svoj inverzni x^{-1} i to: za $x = 0$ inverzni je $x^{-1} = 0$, za $x = 1$ inverzni je $x^{-1} = 3$, za $x = 2$ inverzni je $x^{-1} = 2$.

e) Operacija $*$ je komutativna jer je: $1*2 = 3 = 2*1$, $1*3 = 0 = 3*1$ i $2 * 3 = 1 = 3 * 2$.

Na osnovu *b*), *c*), *d*) i *e*) imamo da je $(A, *)$ komutativna grupa.

2) struktura $(A, \circ)$ polugrupa,

a) Iz tablice se uočava da je $(\forall x, y \in A)$ $(x \circ y \in A)$ pa je skup A zatvoren u odnosu na operaciju $\circ$. Sledi da je $(A, \circ)$ grupoid.

b) Operacija $\circ$ je asocijativna. Na primer

$$3 \circ (1 \circ 2) = 3 \circ 2 = 2 = 1 \circ 2 = (3 \circ 1) \circ 2.$$

Sledi da je $(A, *)$ polugrupa.

c) Imamo da je $2 \circ 2 = 0$ i $2 \neq 0$.

Na osnovu *b*) i *c*) imamo da je $(A, \circ)$ najviše polugrupa.

3) Da je $\circ$ distributivna u odnosu na $*$ proveravamo zamenom direktno iz tablica.

Glava 6

Jednačine sa jednom nepoznatom

6.1 Teorija

Definicija 1. *Jednakost iskaza A i B je logički sud koji izražava da je vrednost iskaza A jednaka vrednosti iskaza B, u oznaci $A = B$.*

Napomena 1. *Jednakosti su izrazi spojeni znakom $=$. Jednakosti, kao iskazne rečenice, mogu biti tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$), u oznaci*

$$v(A = B) = \begin{cases} \top \\ \perp \end{cases}$$

Iskaze A i B možemo da zamenimo algebarskim izrazima koji u sebi mogu sadržati jednu ili više promenljivih.

Definicija 2. *Neka su A i B algebarski izrazi koji sadrže n-promenjivih. Tada kažemo da je jednakost $A = B$ jednačina sa n-nepoznatih.*

Napomena 2. *Za $n = 1$ ima jednačinu sa jednom nepoznatom.*

Definicija 3. *Ako je jednačina tačna za ma koje vrednosti promenljivih, tada kažemo da se radi o identitetu.*

Definicija 4. *One brojne vrednosti promenljivih za koje se jednačina sa jednom nepoznatom prevodi u brojnu jednakost, nazivaju se rešenja (koreni) jednačine.*

Napomena 3. *Prema tome, rešiti jednačinu znači naći sva njena rešenja ili se uveriti u to da ona nema rešenja. Sam problem rešavanja jednačine je uslovljen pojmom ekvivalentnosti jednačina, o čemu nam govori sledeća definicija:*

Definicija 5. *Dve jednačine sa istom promenljivom su ekvivalentne ako je svako rešenje jedne od njih, rešenje i druge jednačine i obrnuto.*

Teorema 1. *Neka su A, B i C bilo koji brojevi ili algebarski racionalni izrazi. Tada su tačna sledeća tvrđenja:*

1) $A = C \Rightarrow (A = B \iff C = B)$,

2) $B = C \Rightarrow (A = B \iff A = C)$,

3) $A = B \iff (A + C = B + C)$,

4) $C \neq 0 \Rightarrow (A = B \iff AC = BC)$,

5) svaki član jednačine se može preneti sa jedne strane znaka jednakosti na drugu, ako mu se promeni znak.

Napomena 4. *Jednačinu, ekvivalentnu sa jednačinom oblika*

$$ax = b$$

gde su a i b realni brojevi a x nepoznata, nazivamo linearna jednačina sa jednom nepoznatom. Brojevi a i b su parametri ili koeficijenti.

Teorema 2. *U zavisnosti od parametara linearne jednačine imamo sledeće moguće slučajeve za njeno rešenje:*

1) Ako je $a \neq 0$ imamo da je $\frac{b}{a}$ jedino rešnje, pa je data jednačina jednačina sa jedinstvenim rešenjem.

2) Ako je $a = 0$ i $b \neq 0$ tada jednačina nema rešenja pa je nemoguća.

3) Ako je $a = 0$ i $b = 0$, tada je svaki realan broj rešenje date jednačine, pa je ona neodređena.

6.2 Zadaci

1. *Neka je* $A(x) = x$, $B(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}}$ *i* $C(x) = 2 - 3x$. *Šta pretstavljaju jednakosti:*

1) $A = B$,

2) $A = C$.

Rešenje: Zaključujemo da je jednakost $A = B$ identitet, jer su vrednosti ovih izraza jednake ma za koje $x \neq 0$, dok jednakost $A = C$ nije identitet, jer je jednostavno naći vrednosti za x, za koje su ti izrazi različiti. Na primer, za $x = 0 \Rightarrow A(0) = 0$, a $C(0) = 2$, itd. Jasno je da jednakost $A = C$ možemo, za neke vrednosti x, transformisati u brojnu jednakost. To postižemo tako što iz $A = C \Rightarrow x = 2 - 3x$, a odavde sledi da za $x = \frac{1}{2}$ jednakost $A = C$ prelazi u brojnu jednakost.

2. *Da li su sledeće jednačine ekvivalentne?*

1) $x - 3 = 0$ *i* $1 + x = 4$,

2) $x^2 - 9 = 0$ *i* $x - 3 = 0$.

Rešenje:

1) $x - 3 = 0$ i $1 + x = 4$ su ekvivalentne jer im je koren broj $x = 3$.

2) Jednačine $x^2 - 9 = 0$ i $x - 3 = 0$ nisu ekvivalentne, mada je $x = 3$ koren i jedne i druge, ali $x = -3$ je koren samo prve jednačine.

(Rešavanje jednačine se svodi na to da se ona svede na sebi ekvivalentnu jednačinu iz koje se mogu uočiti rešenja).

3. *Dokazati teoremu 1.*

Rešenje:

1) ($\Longrightarrow$) Pretpostavimo da je $A = C$. Ako je $A = B$ onda, na osnovu simetrije i tranzitivnosti, zaključujemo da je $C = B$.
($\Longleftarrow$) Ako je $C = B$, to na osnovu tranzitivnosti sledi da je $A = B$. Iz navedenog sledi da važi

$$A = C \Rightarrow (A = B \iff C = B)$$

što je i trebalo dokazati.

3) ($\Rightarrow$) Neka je $A = B$. Kako je jednakost saglasna sa operacijom sabiranje, to dodavanjem C na obe strane dobijamo da je $A+C = B+C$.
($\Leftarrow$) Ako važi $A+C = B+C$, tada dodavanjem $(-C)$ sa obe strane dobijamo da je

$$A+C+(-C) = B+C+(-C) \;\Rightarrow\; A+C-C = B+C-C \Rightarrow A = B\,.$$

Preostala tvrđenja se analogno dokazuju.

4. *Rešiti po* x *jednačinu:*

$$\frac{1}{2}x - 5 = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}\,.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}x - 5 = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \;/\cdot 6 \\ \Longleftrightarrow\quad & 3x - 30 = x - 2 \;/ + (-x) \\ \Longleftrightarrow\quad & 2x - 30 = 2 \;/ + 30 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2x = 28/ : 2 \\ \Longleftrightarrow\quad & x = 14. \end{aligned}$$

Dakle, imamo ekvivalenciju

$$\frac{1}{2}x - 5 = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \iff x = 14\,.$$

Odavde neposredno zaključujemo da je broj 14 rešenje polazne jednačine.

5. *Dokazati da je jednačina*

$$3x - 4 = 5x + 2$$

linearna jednačina sa jednom nepoznatom.

Rešenje:

$$\begin{aligned} & 3x - 4 = 5x + 2 \\ \Longleftrightarrow\quad & 3x - 5x = 4 + 2 \\ \Longleftrightarrow\quad & -2x = 6 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2x = 28/ : 2 \\ \Longleftrightarrow\quad & x = 14. \end{aligned}$$

6. *Rešiti po x jednačine:*

1) $x + 2 = 8$,

2) $2x - 1 = x + 2$.

Rešenje:

1)

$$\begin{aligned} & x + 2 = 8 \\ \iff\ & x + 2 - 2 = 8 - 2 \\ \iff\ & x = 6. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & 2x - 1 = x + 2 \\ \iff\ & 2x - x - 1 = x - x + 2 \\ \iff\ & x - 1 = 2 \\ \iff\ & x - 1 + 1 = 2 + 1 \\ \iff\ & x = 3. \end{aligned}$$

7. *Za* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ *rešiti po x jednačinu:*

$$\frac{x-a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{2(a^2-b^2)}{ab}.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} A \iff\ & \frac{x-a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{2(a^2-b^2)}{ab} \ / \cdot ab \\ \iff\ & a(x-a) - b(x-b) = 2(a^2-b^2) \\ \iff\ & ax - a^2 - bx + b^2 = 2a^2 - 2b^2 \\ \iff\ & (a-b)x = 3(a^2-b^2) \\ \iff\ & (a-b)x = 3(a-b)\ (a+b) \end{aligned}$$

Sada razlikujemo sledeće mogućnosti:

1) Ako je $a - b \neq 0$, tj. $a \neq b$, tada jednačina A ima jedinstveno rešenje $3(a + b)$, jer je

$$(a-b)x = 3(a-b)(a+b) \iff x = 3(a+b)$$

2) Ako je $a - b = 0$, tj. $a = b$, tada je jednačina A ekvivalentna jednačini $0 \cdot x = 0$, pa je svaki realan broj njeno rešenje, odnosno, jednačina je identitet.

8. *Marko je tri puta mlađi od svog brata, a zajedno imaju 68 godina. Koliko godina ima Marko, a koliko njegov brat?*

Rešenje: Označimo broj godina Marka sa promenjivom x. Tada je

$$x + 3x = 68 \Leftrightarrow 4x = 68 \Leftrightarrow x = \frac{68}{4} \Leftrightarrow x = 17.$$

Marko ima 17 godina, a njegov brat $3 \cdot 17 = 51$ godinu.

9. *Na prvoj polici se nalazi x knjiga, na drugoj tri puta manje a na trećoj pet puta više nego na prvoj. Ako bi se trećoj polici dodalo 8 knjiga na njoj bi bilo 83 knjige. Koliko se knjiga nalazi na sve tri polici?*

Rešenje: Na trećoj polici ima $83 - 8 = 75$ knjiga. Pošto na trećoj polici ima pet puta više knjiga nego na prvoj imamo da je

$$5x = 75 \Leftrightarrow x = \frac{75}{5} \Leftrightarrow x = 15.$$

Pošto na prvoj polici ima 15 knjiga, a na drugoj tri puta manje, broj knjiga na drugoj polici je

$$\frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{15}{3} \Leftrightarrow 5.$$

Ukupno znači ima $15 + 5 + 75 = 95$ knjiga na sve tri police.

10. *Ako u posudu dodamo 18 litara vode dobićemo količinu vode koja je četiri puta veća od količine vode koja bi se dobila kada bi iz posude odvadili 24 litra vode. Koliko litara vode ima trenutno u posudi?*

Rešenje: Označimo broj litara vode u posudi promenjivom x. Imamo da je

$$\begin{aligned}(x + 18) = 4(x - 24) \quad &\Leftrightarrow \quad x + 18 = 4x - 96 \\ &\Leftrightarrow \quad 96 + 18 = 4x - x \Leftrightarrow 114 = 3x \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{114}{3} \Leftrightarrow x = 38.\end{aligned}$$

11. *Nina ima šest puta više dinara od Maje. Ako Nina potroši 24 dinara, a Maja zaradi 18 dinara tada je količnik preostalog novca Nine i Maje jednak broju dva. Koliko je imala novca Nina, a koliko Maja?*

Rešenje: Neka je broj novca koji ima Maja x. Tada

$$\begin{aligned}\frac{6x-24}{x+18} = 2 \Leftrightarrow 6x-24 = 2(x+18) \quad &\Leftrightarrow \quad 6x-24 = 2x+36 \\ &\Leftrightarrow \quad 6x-2x = 36+24 \Leftrightarrow 4x = 60 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{60}{4} \Leftrightarrow x = 15.\end{aligned}$$

Maja je imala 15 dinara, a Nina $6 \cdot 15 = 90$ dinara.

Glava 7

Sistemi linearnih jednačina

7.1 Teorija

Definicija 1. *Neka je* $n \in N$ *i* $a_{ij} \in R,\ i, j = 1, 2, ..., n$. *Determinanta reda* n, *u oznaci* D, *je kvadratna šema oblika:*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7.1}$$

Definicija 2. *Neka su* $i, j = 1, 2, ..., n$. *U determinanti* D, *datom sa (7.1):*

1) a_{ij} *su koeficijenti determinante.*

2) $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}$ *su elementi* $j-$*te kolone.*

3) $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ *su elementi* $i-$*te vrste.*

4) $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ *su elementi glavne dijagonale.*

5) $a_{n1}, a_{(n-1)2}, ..., a_{1n}$ *su elementi sporedne dijagonale.*

6) D_{ij}, $(n \geq 2)$ *je minor ili subdeterminanta elementa* a_{ij} *determinante* D, *koja se dobija od* D *izostavljanjem* $i-$*te vrste i* $j-$*te kolone. Minor* D_{ij} *je reda* $n-1$.

7) Transponovana determinanta determinante D, *u oznaci* D' *je determinanta oblika*

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

8) $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, *je kofaktor ili algebarski komplement elementa* a_{ij} *determinante* D.

Definicija 3. *Svakoj determinanti* D *dodeljujemo jedan realan broj i nazivamo ga vrednost determinante* D. *Ova vrednost se takođe obeležava istim simbolom kao determinanta i računa se na sledeći način:*

1)

$$D = |a_{11}| = a_{11},$$

2)

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad n \geq 2.$$

Teorema 1. *Neka je* $n \geq 2$. *Tada:*

1) $D = D'$.

2) Ako dve vrste (ili dve kolone) promene mesta determinanta menja znak.

3) Determinanta se množi realnim brojem tako što se svaki element jedne vrste (kolone) pomnoži tim brojem.

4) Ako su u determinati svi elementi jedne vrste (kolone) jednaki 0, *tada je* $D = 0$.

5) Ako su u determinanti dve vrste (kolone) proporcionalne, tada je $D = 0$.

6) Ako je svaki element $k-$*te vrste (kolone) determinante* D*, reda* n*, prikazan kao zbir dva sabirka,*

$$a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

onda je

$$D = D_1 + D_2,$$

gde su determinante D_1 *i* D_2 *reda* n *i sve vrste (kolone) sem* $k-$*te su im kao kod determinante* D*, dok je* $k-$*ta vrsta (kolona) determinante* D_1 *upravo* $b_{k1}, b_{k2}, ..., b_{kn}$*, a* D_2 *je* $c_{k1}, c_{k2}, ..., c_{kn}$.

7) Determinanta ne menja vrednost ako elemente jedne vrste (kolone) pomnožimo brojem i dodamo nekoj drugoj vrsti (koloni).

Definicija 4. *Neka su* $m, n \in N$, $a_{ij}, b_i \in R$, $i = 1, 2, ..., m$ *i* $j = 1, 2, ..., n$. *Za promenljive* $x_1, x_2, ..., x_n$ *šemu:*

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{7.2}$$

nazivamo linearan sistem od m *jednačina sa* n *promenljivih (nepoznatih). Brojevi* a_{ij} *su koeficijenti uz promenljive, a* b_i *su slobodni članovi.*

Definicija 5. *Ako je* $b_i = 0$ *za* $i = 1, 2, \ldots m$ *sistem (7.2) se naziva homogen.*

Definicija 6. *Uređena* $n-$*torka realnih brojeva* $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ *takva da je svaka jednačina sistema zadovoljena za* $x_= r_1, x_2 = r_2, \ldots, x_n = r_n$ *naziva se rešenje sistema linearnih jednačina.*

Teorema 2. *Svaki sistem homogenih linearnih jednačina ima uvek jedno rešenje* $(0, 0, \ldots, 0)$. *To rešenje se naziva trivijalno, dok su ostala ako postoje, netrivijalna.*

Definicija 7. *Sistem linearnih jednačina je*

1) saglasan (moguć), ako ima bar jedno rešenje. Saglasan sistem je:

  a) određen, ako ima samo jedno rešenje,

  b) neodređen, ako ima vise rešenja.

2) protivrečan (nemoguć), ako nema ni jedno rešenje.

Definicija 8. *Elementarne transformacije sistema linearnih jednačina su:*

1) zamena mesta bilo koje dve jednačine,

2) množenje bilo koje jednačine sistema brojem različitim od nule,

3) dodavanje jednačine, prethodno pomnožene bilo kojim brojem, nekoj drugoj jednačini.

Definicija 9. *Za dva sistema linearnih jednačina kažemo da su ekvivalentna ako je rešenje jednog sistema rešenje i drugog, i obrnuto.*
Svaka dva protivrečna sistema su ekvivalentna.

Teorema 3. *Ako na sistemu linearnih jednačina izvršimo konačan broj elementarnih transformacija dobijamo ekvivalentan sistem.*

Teorema 4. (Gausov sistem eliminacije) *Neka je dat sistem (7.2).*

1) *Ako je* $a_{11} \neq 0$ *pređemo na korak* 2), *u suprotnom, ako je* $a_{11} = 0$ *elementarnom transformacijom stavimo prvu jednačinu kod koje je* $a_{i1} \neq 0$ *kao prvu i izvršimo reindeksaciju sistema u obliku (7.2).*

2) *Prvu jednačinu množimo redom sa* $-\frac{a_{k1}}{a_{11}}$, $k = 2, 3, \ldots, m$ *i dodajemo* $k-$*oj jednačini. Nakon ovog koraka dobijamo ekvivalentan sistem:*

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a^1_{22}x_2 & + \ldots + & a^1_{2n}x_n & = b^1_2 \\ \ldots & & & & \\ & a^1_{m2}x_2 & + \ldots + & a^1_{mn}x_n & = b^1_m \end{array} \tag{7.3}$$

3) *Ako su u sistemu (7.3) u nekoj jednačini svi koeficijenti jednaki nuli. Tada ako je i slobodan član jednak nuli, jednačina se izbacuje i vrši se opet preindeksacija, dok ako je slobodan član različit od nule polazni sistem je protivrečan.*

4) *U sistemu (7.3) posmatrajmo podsistem*

$$\begin{array}{c} a^1_{22}x_2 + \ldots + a^1_{2n}x_n = b^1_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^1_{m2}x_2 + \ldots + a^1_{mn}x_n = b^1_m \end{array}$$

Broj jednačina ovog sistema je $\leq m - 1$. *Ako izvršimo reindeksaciju u obliku sistema (7.2) onda ponovimo korake od* 1) *do* 4) *na ovako novodobijenom sistemu.*

5) *Nakon s ponovljanja koraka od* 1) *do* 4) *polazni sistem (7.2) je ekvivalentan sistemu oblika:*

   a)

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a^s_{22}x_2 & + \ldots + & a^s_{2n}x_n & = b^s_2 \\ \ldots & & & & \\ & & & a^s_{mn}x_n & = b^s_m \end{array}$$

   ili sistemu oblika:

b)

$$\begin{array}{lllllll}
a_{11}x_1+ & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1t}x_n & +\ldots+ & a_{1n}x_n & =b_1 \\
 & a^s_{22}x_2 & +\ldots+ & a^s_{2t}x_t & +\ldots+ & a^s_{2n}x_n & =b^s_2 \\
\ldots & & & & & & \\
 & & & a^s_{mt}x_t & +\ldots+ & a^s_{mn}x_n & =b^s_m
\end{array}$$

gde je $t < n$.

6) *U slučaju pod a) koji se inače naziva trougaoni sistem, sistem je saglasan i određen. Polazeći od zadnje jednačine prema prvoj računamo vrednosti promenljivih* $x_j, \;\; j = 1, ...n$.
U slučaju pod b) imamo saglasan i neodređen sistem sa stepenom slobode $n - t$.

Definicija 10. *Neka je dat sistem (7.2) kod koga je* $m = n$, *tj.*

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array} \tag{7.4}$$

Tada je:

1)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinanta sistema.

2) $D_i, \; i = 1, 2, \ldots n$, *su determinante koje se dobijaju kada se* $i-$*ta kolona determinante sistema zameni sa kolonom koju čine slobodni članovi sistema (7.4), tj.* $b_j, \;\; j = 1, 2, \ldots n$.

Teorema 5. (Crammerovo pravilo) *Neka je dat sistem (7.4). Tada*

1) *Ako je* $D = 0$ *tada je sistem protivrečan ili neodređen.*

2) *Ako je* $D \neq 0$ *tada je sistem određen, a njegova rešenja se dobijaju pomoću formule:*

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{7.5}$$

7.2 Zadaci

1. *Rešiti sistem jednačina:*

1) Gausovim sistemom eliminacije

2) pomoću determinanti

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -4 \\ -6x_1 + 8x_2 &= 22 \end{aligned}$$

Rešenje:

1)

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -4 & / \cdot 3 \\ -6x_1 & + & 8x_2 & = & 10 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -4 \\ & - & x_2 & = & -2 \\ \hline 2x_1 & - & 3x_2 & = & -4 \\ & & x_2 & = & 2 \\ \hline \end{array}$$

Pa iz prve jednačine imamo da je $2x_1 - 3 \cdot 2 = -4$, odnosno $x_1 = 1$. Konačno rešenje je $(x_1, x_2) = (1, 2)$.

2) Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - (-3) \cdot (-6) = 16 - 18 = -2\,.$$

Pošto je $D \neq 0$ sistem je određen.

$$D_1 = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 8 - (-3) \cdot 10 = -32 + 30 = -2\,,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - (-4) \cdot (-6) = 20 - 24 = -4\,.$$

Pa na osnovu formule

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

imamo $x_1 = \frac{-2}{-2} = 1$ i $x_2 = \frac{-4}{-2} = 2$.

2. *Rešiti sistem jednačina*

1) Gausovim sistemom eliminacije

2) pomoću determinanti

$$\begin{aligned} 6x_1 + \ \ 24x_2 &= -30 \\ -x_1 - \ \ 4x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Rešenje:

1)

$$\begin{array}{rrcrl} 6x_1+ & 24x_2 & = & -30 & /:6 \\ -x_1- & 4x_2 & = & 5 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} 6x_1+ & 24x_2 & = & -30 \\ & 0 & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

Dobijeni sistem je ekvivalentan sistemu

$$\begin{array}{rrcr} 6x_1+ & 24x_2 & = & -30 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} -x_1- & 4x_2 & = & 5 \\ \hline \end{array}$$

Dati sistem je saglasan i neodređen, a njegova rešenja su oblika:

$$(x_1, x_2) = (4a - 5, a),$$

gde je parametar $a \in \mathbb{R}$.

2) Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -24 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-4) - 24 \cdot (-1) = -24 + 24 = 0\,.$$

Pošto je $D = 0$ sistem je ili protivrečan ili nedređen. U daljem postupku moramo primeniti Gausov sistem eliminacije.

3. *Rešiti sistem jednačina:*

1) Gausovim sistemom eliminacije

2) pomoću determinanti

$$\begin{aligned} 9x_1 + \ 3x_2 &= 18 \\ -3x_1 - \ \ x_2 &= 22 \end{aligned}$$

Rešenje:

1)

$$\begin{array}{rrcll} 9x_1+ & 3x_2 & = & 18 & / : 3 \\ -3x_1- & x_2 & = & 22 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} 9x_1+ & 3x_2 & = & 18 \\ & 0 & = & 24 \\ \hline \end{array}$$

Iz poslednje jednačine imamo da je sistem protivrečan.

2) Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3) = -9 + 9 = 0\,.$$

Pošto je $D = 0$ sistem je ili protivrečan ili nedređen. U daljem postupku moramo primeniti Gausov sistem eliminacije.

4. *Rešiti sistem jednačina:*

1) Gausovim sistemom eliminacije

2) pomoću determinanti

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \end{array}$$

Rešenje:

1)

$$\begin{array}{rcrcrcll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 & / \cdot (-1) / \cdot (-2) \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 & \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 5 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 & \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 & / \cdot (3) \\ & & -3x_2 & + & 2x_3 & = & -1 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
 & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\
 & & & + & 8x_3 & = & 8 \\
\hline
x_1 & + & x_2 & + & 1 & = & 3 \\
 & & x_2 & + & 2\cdot 1 & = & 3 \\
 & & & & x_3 & = & 1 \\
\hline
x_1 & + & 1 & + & 1 & = & 3 \\
 & & & & x_2 & = & 1 \\
 & & & & x_3 & = & 1 \\
\hline
 & & & & x_1 & = & 1 \\
 & & & & x_2 & = & 1 \\
 & & & & x_3 & = & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Konačno rešenje je $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$.

2) Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1{\cdot}2{\cdot}4 + 1{\cdot}3{\cdot}2 + 1{\cdot}1{\cdot}(-1) - 1{\cdot}1{\cdot}4 - 1{\cdot}3{\cdot}(-1) - 1{\cdot}2{\cdot}2 = 8$$

Pošto je $D \neq 0$ sistem je određen.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 8.$$

Pa na osnovu formule

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

imamo $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{8}{8} = 1$.

5. *Rešiti sistem jednačina:*

1) Gausovim sistemom eliminacije

2) pomoću determinanti

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & ax_3 & = & 16 \end{array}$$

Rešenje:

1)

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 & / \cdot (-3) / \cdot (-2) \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 & \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & ax_3 & = & 16 & \\ \hline x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 & \\ & + & x_2 & + & 13x_3 & = & -6 & / \cdot (-2) \\ & + & 2x_2 & + & (a+6)x_3 & = & 8 & \\ \hline x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 & \\ & + & x_2 & + & 13x_3 & = & -6 & \\ & + & & + & (a+6-26)x_3 & = & 20 & \\ \hline x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 & \\ & + & x_2 & + & 13x_3 & = & -6 & \\ & + & & + & (a-20)x_3 & = & 20 & \\ \hline \end{array}$$

Za $a = 20$ sistem je kontradiktoran. Za $a \neq 20$ sistem je određen. Imamo da su rešenja sistema:

$$x_3 = \frac{20}{a-20}, \quad x_2 = -6 - \frac{260}{a-20}, \quad x_1 = 16 + \frac{580}{a-20}.$$

2) Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & a \end{vmatrix} = a - 20$$

Za $a = 20$ imamo da je $D = 0$ pa je u ovom slučaju sistem kontradiktoran. Za $a \neq 0$ je $D \neq 0$. Tada je sistem određen.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 16 & 6 & a \end{vmatrix} = 16a + 260,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 16 & a \end{vmatrix} = -6a - 140,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 16 \end{vmatrix} = 20.$$

Pa na osnovu formule

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, 3$$

dobijamo rešenja.

6. *Rešiti sistem jednačina:*

1) Gausovim sistemom eliminacije

2) pomoću determinanti

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 6x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 6x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Rešenje:

1) Polazni sistem ekvivalentan je sistemu

$$\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 & / \cdot (-1) / \cdot (-4) / \cdot (-6) \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 6x_3 & + & x_4 & = & 3 & \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 4 & \\ 6x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 7 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & - & 5x_2 & - & 7x_3 & & & = & 2 \\ & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ & - & 11x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

Novi ekvivalentan sistem dobijamo na sledeći način: podelimo treću jednačinu sa -2 i onda zamenimo drugu i treću jednačinu

$$\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 & \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & / \cdot (5) / \cdot (11) \\ & - & 5x_2 & - & 7x_3 & & & = & 2 & \\ & - & 11x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 1 & \\ \hline \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 & \\
 & & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & \\
 & & & - & 12x_3 & + & 15x_4 & = & 2 & / \cdot (-1) \\
 & & & - & 12x_3 & + & 30x_4 & = & 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
 & & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\
 & & & - & 12x_3 & + & 15x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & 15x_4 & = & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & (-\frac{1}{15}) & = & 1 \\
 & & x_2 & - & x_3 & + & 3(-\frac{1}{15}) & = & 0 \\
 & & & - & 12x_3 & + & 15(-\frac{1}{15}) & = & 2 \\
 & & & & & & x_4 & = & -\frac{1}{15} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & (-\frac{1}{4}) & + & (-\frac{1}{15}) & = & 1 \\
 & & x_2 & - & (-\frac{1}{4}) & + & 3(-\frac{1}{15}) & = & 0 \\
 & & & & & & x_3 & = & -\frac{1}{4} \\
 & & & & & & x_4 & = & -\frac{1}{15} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & -\frac{1}{20} & + & (-\frac{1}{4}) & + & (-\frac{1}{15}) & = & 1 \\
 & & & & & & x_2 & = & -\frac{1}{20} \\
 & & & & & & x_3 & = & -\frac{1}{4} \\
 & & & & & & x_4 & = & -\frac{1}{15} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcr}
x_1 & = & \frac{41}{30} \\
x_2 & = & -\frac{1}{20} \\
x_3 & = & -\frac{1}{4} \\
x_4 & = & -\frac{1}{15} \\
\hline
\end{array}
$$

2) Determinanta sistema je

$$
D = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & -6 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}
$$

Na osnovu teoreme 1, zamenimo prvu i četvrtu kolonu

$$
D = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -6 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \\ 6 & -5 & 5 & 3 \end{vmatrix}
$$

Na osnovu pomenute teoreme prvu kolonu množimo redom sa $-1, -4$ i -6 i dodajemo drugoj, trećoj i četvrtoj koloni

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & -11 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Na osnovu definicije 3 imamo da je

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -5 & -7 & 0 \\ -11 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Sada prvu kolonu pomnožimo redom sa -5 i -11 i dodamo drugoj i trećoj koloni

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -12 & 15 \\ 0 & -12 & 30 \end{vmatrix}$$

$$D = -\begin{vmatrix} -12 & 15 \\ -12 & 30 \end{vmatrix} = -(-12 \cdot 30 - 15 \cdot (-12)) = 180,$$

pa pošto je $D \neq 0$ sistem je određen.
Analognim postupkom tada računamo preostale četiri determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & -6 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 246$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -6 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -45$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 5 & 7 \\ 1 & -4 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

Na osnovu formule

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

dobijamo rešenja.

7. *Rešiti sistem jednačina:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ -3x_1 & - & 8x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -24 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 28 \end{array}$$

Rešenje: Pošto sisten nije oblika $n \times n$ nije ga moguće rešiti metodom determinanti. Zadatak ćemo rešiti Gausovom metodom eliminacije:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 4 & / \cdot 3 / \cdot (-2) \\ -3x_1 & - & 8x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -24 & \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 28 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 4 & \\ & & x_2 & - & 10x_3 & + & 3x_4 & = & -12 & / \cdot 3 \\ & - & 3x_2 & + & 12x_3 & + & x_4 & = & 20 & \\ \hline \end{array}$$

Novi ekvivalentan sistem je

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 4 & \\ & & x_2 & - & 10x_3 & + & 3x_4 & = & -12 & \\ & & & - & 18x_3 & + & 10x_4 & = & -16 & / : 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & - & 10x_3 & + & 3x_4 & = & -12 \\ & & & - & 9x_3 & + & 5x_4 & = & -8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & - & 10x_3 & + & 3x_4 & = & -12 \\ & & & - & 9x_3 & + & 5x_4 & = & -8 \\ \hline \end{array}$$

Sistem je saglasan i neodređen. Rešenje sistema je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{59}{9}a - \frac{100}{9}, \frac{23}{9}a - \frac{28}{9}, \frac{5}{9}a + \frac{8}{9}, a \right),$$

gde je parametar $a \in \mathbb{R}$.

Literatura

[1] A.Ćetković, *Matematika, teorija i zadaci*, Štamparija fakulteta tehničkih nauka , Novi Sad, 1988.

[2] M.Dejić, S.Ćebić, *Matematika zbirka rešenih zadataka sa elementima teorije* , TRITON, Vršac, 2001.

[3] J.Detki, F.Ferenci, *Matematika I*, Štamparija fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad, 1983.

[4] S.Kurepa, *Uvod u matematiku skupovi - strukture - brojevi*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.

[5] Đ.Kurepa, *Viša algebra I*, Školska knjiga, Zagreb, 1965.

[6] Đ.Kurepa, *Viša algebra II* , Školska knjiga, Zagreb, 1965

[7] M.Lazić, T.Malinović, B.Mićić, M.Petrović, M.Tomić, *Matematika*, Učiteljski fakultet, Beograd, 1994.

[8] S.Milić, *Elementi algebre*, Štamparija fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad, 1984.

[9] S.Milić, *Elementi matematičke logike i teorije skupova*, Štamparija fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad, 1985.

[10] V.Pantić, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike*, Učiteljski fakultet, Beograd, 1997.

[11] M.Petrović, *Osnovi nastave matematike*, Skver, Kragujevac, 1998.

[12] M.Radić, *Osnove matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 1972.

[13] D.Stevanović, *Elementarna algebra*, Zavod za izdavanje, Beograd, 1959.

[14] B.Stojanović, *Zbirka zadataka iz matematike*, Svjetlost, Sarajevo, 1985.

[15] M.Žižović, *Matematika*, ICIM, Kruševac, 1998.

[16] M.Žižović, D.Đurčić, Lj.Andrić, M.Egerić, *Matematika, zbirka zadataka*, ICIM, Kruševac, 1999.

Sadržaj