Relacije

Pojam relacije

Contents

Binarnu relaciju ρ na nepraznom skupu A definišemo kao bilo koji podskup Dekartovog kvadrata A^2:

$$\rho \subseteq A^2.$$

Ako je $(x, y) \in \rho$, kažemo da je x **u relaciji** ρ **sa** y.

Često umesto $(x, y) \in \rho$ pišemo $x\,\rho\,y$.

U sledećem primeru je

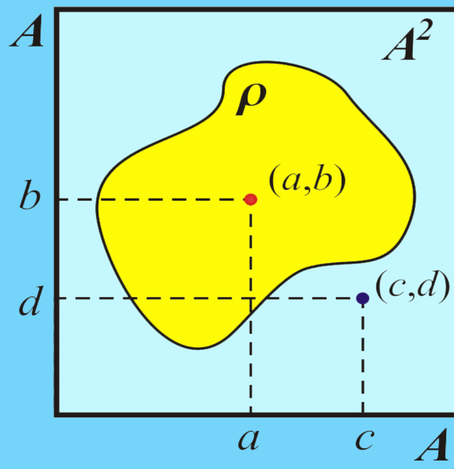
$(a, b) \in \rho$,

što pišemo

$a\,\rho\,b$,

dok

$(c, d) \notin \rho$.



Back
Close

Primer 2.6

a) Skup $\rho = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ je jedna binarna relacija na skupu $\{1,2,3\}$. Umesto $(1,2) \in \rho$, piše se $1\rho 2$.

Kako je to relacija **manje** za brojeve, uobičajeno označavanje je $1 < 2$.

b) Skup $\{(x,x) \mid x \in A\}$ određuje **relaciju jednakosti** na nepraznom skupu A; oznaka relacije je $=$, odnosno piše se $a = a$ za svaki element $a \in A$.

c) Poznate binarne relacije na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, pored jednakosti, jesu i $<$, $\leqslant$, $|$, a njihove definicije su:

$x < y \Leftrightarrow (\exists z)(x + z = y)$	manje
$x \leqslant y \Leftrightarrow (x = y \vee x < y)$	manje ili jednako
$x \mid y \Leftrightarrow (\exists z)(x \cdot z = y)$	deli, je delitelj

Analogno prvim dvema definišu se i relacije

$>$ veće $\qquad\qquad$ $\geqslant$ veće ili jednako

Contents
Back
Close

d) **Na partitivnom skupu proizvoljnog skupa A, inkluzuja $\subseteq$ je jedna binarna relacija.**

Slično pojmu binarne relacije, za bilo koji prirodan broj n uvodimo sledeći pojam:

n-arna relacija ρ na nepraznom skupu A definiše se kao bilo koji podskup Dekartovog stepena A^n.

Broj n se naziva arnost relacije ρ.

Relacije arnosti 1 nazivamo unarne relacije.
Unarne relacije su zapravo "obični" podskupovi skupa A.

Relacije arnosti 2 su upravo binarne relacije.

Relacije arnosti 3 nazivamo ternarne relacije.

U matematici se najčešće radi sa binarnim relacijama.

Zato, jednostavnosti radi, umesto binarna relacija mi govorimo kraće samo relacija.

Contents
Back
Close

Primer 2.7

a) **Ako je A skup tačaka na pravoj, onda se svojstvom**

$$x \text{ je između } y \text{ i } z$$

definiše jedna ternarna relacija na A.

b) **Skup**

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

je ternarna relacija na skupu $\mathbb{R}$.

c) **Skup $\mathbb{N}_p$ parnih brojeva je unarna relacija na skupu $\mathbb{N}$.**

Neke važne relacije

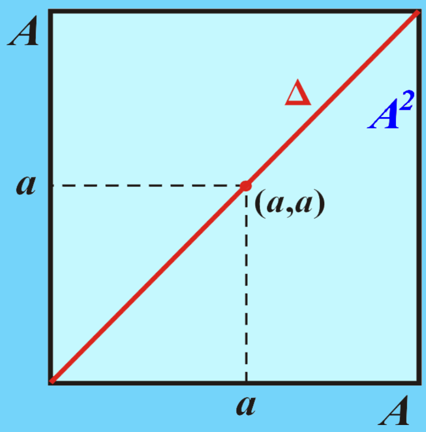
Contents

Prazna relacija definiše se kao prazan podskup od A^2.

Puna ili **univerzalna relacija** definiše se kao ceo skup A^2.

Relacija jednakosti na skupu A naziva se često i **dijagonalna relacija** ili **dijagonala** i označava se sa Δ

Dakle, $\Delta = \{(x, x) \,|\, x \in A\}$



Back

Close

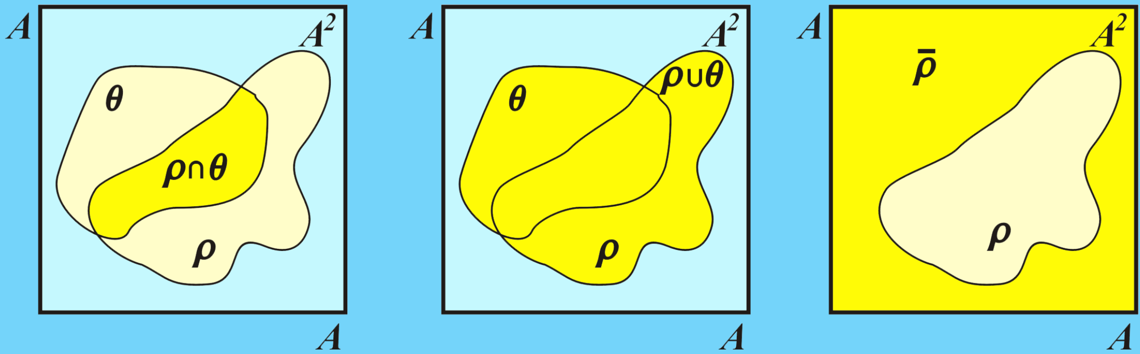
Operacije sa relacijama

Kako relacije na skupu A predstavljaju podskupove od A^2, to se pojmovi presek relacija, unija relacija i komplement relacije definišu kao preseci skupova:

$$\rho \cap \theta = \{(x, y) \in A^2 \mid (x, y) \in \rho \wedge (x, y) \in \theta\};$$

$$\rho \cup \theta = \{(x, y) \in A^2 \mid (x, y) \in \rho \vee (x, y) \in \theta\};$$

$$\overline{\rho} = \{(x, y) \in A^2 \mid (x, y) \notin \rho\}.$$



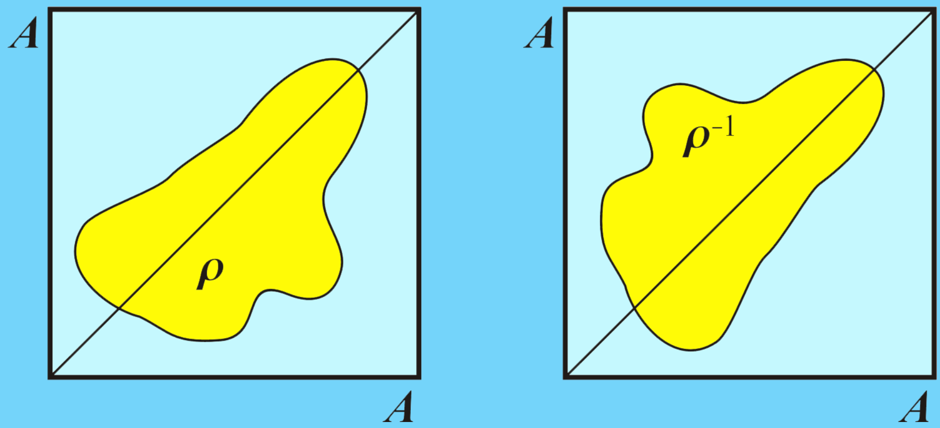
Jednakost relacija takođe definišemo kao jednakost skupova, a **inkluziju relacija** definišemo kao inkluziju skupova:

$$\rho = \theta \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall (x,y) \in A^2)\, (x,y) \in \rho \Leftrightarrow (x,y) \in \theta\,),$$

$$\rho \subseteq \theta \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall (x,y) \in A^2)\, (x,y) \in \rho \Rightarrow (x,y) \in \theta\,).$$

Inverzna relacija relacije ρ na skupu A, u oznaci ρ^{-1}, je relacija na skupu A definisana sa:

$$\rho^{-1} = \{(y,x) \in A^2 \mid (x,y) \in \rho\}.$$



Contents
Back
Close

Primer 2.8

Posmatrajmo relacije na skupu $\mathbb{N}$.

Presek relacija $\leqslant$ i $\geqslant$ je relacija jednakosti, a njihova unija je puna relacija, tj. $\mathbb{N}^2$.

Komplement relacije $<$ je relacija $\geqslant$, dok je inverzna relacija, takođe za $<$, relacija $>$.

Relacija jednakosti je sama sebi inverzna, a njen komplement je relacija $\neq$.

Relacija deli, $|$, je podskup relacije $\leqslant$.

Contents
Back
Close

Kompozicija relacija

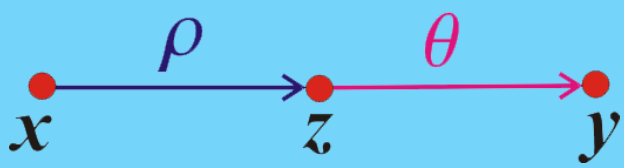
Kompozicija ili **proizvod** relacija ρ i θ na skupu A je relacija $\rho \circ \theta$ na A, definisana na sledeći način:

$$\rho \circ \theta = \{(x, y) \in A^2 \mid (\exists z \in A)((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \theta)\}$$

odnosno

$$\rho \circ \theta = \{(x, y) \in A^2 \mid (\exists z \in A)(\, x \,\rho\, z \;\wedge\; z \,\theta\, y \,)\}$$

Drugim rečima, relacija θ se **nastavlja (nadovezuje)** na ρ.



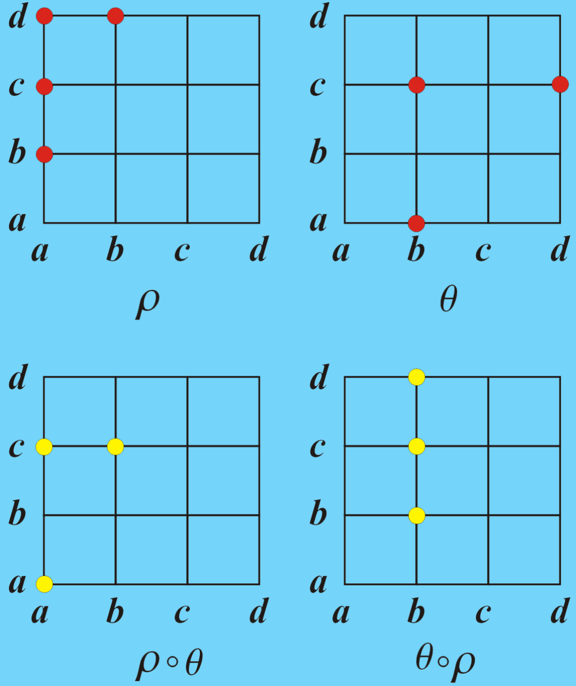
Primer 2.9

b) Ako je ρ relacija $<$ na $\mathbb{N}$, onda je $\rho \circ \rho$ relacija na $\mathbb{N}$ za koju važi:

$$(x, y) \in \rho \circ \rho \Leftrightarrow (\exists z)(x < z \wedge z < y) \Leftrightarrow x + 1 < y.$$

a) **Neka je** $A = \{a, b, c, d\}$,

$\rho = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,d)\}$, $\theta = \{(b,a),(b,c),(d,c)\}$.



Tada je

$\rho \circ \theta = \{(a,a),(a,c),(b,c)\}$, $\theta \circ \rho = \{(b,b),(b,c),(b,d)\}$.

Kompozicija relacija nije komutativna: u prethodnom primeru $\rho \circ \theta \neq \theta \circ \rho$.

Tvrđenje 2.6 Ako je ρ relacija na skupu A, tada je

$$\rho \circ \Delta = \Delta \circ \rho = \rho.$$

Dokaz: Neka je $(x, y) \in \rho \circ \Delta$. To znači da postoji $z \in A$ takav da je $(x, z) \in \rho$ i $(z, y) \in \Delta$, odnosno $(x, z) \in \rho$ i $z = y$, odakle dobijamo da je $(x, y) \in \rho$. Prema tome, dokazali smo da je $\rho \circ \Delta \subseteq \rho$.

Sa druge strane, ako je $(x, y) \in \rho$, tada imamo da je $(x, y) \in \rho$ i $(y, y) \in \Delta$, pa prema definiciji kompozicije relacija dobijamo da je $(x, y) \in \rho \circ \Delta$. Ovim smo dokazali da je $\rho \subseteq \rho \circ \Delta$, pa konačno zaključujemo da je $\rho \circ \Delta = \rho$.

Na isti način dokazujemo da je $\Delta \circ \rho = \rho$.

Tvrđenje 2.7 Za proizvoljne relacije ρ, θ i σ na skupu A važi:

$$\rho \circ (\theta \circ \sigma) = (\rho \circ \theta) \circ \sigma,$$

tj. kompozicija relacija je asocijativna operacija.

Dokaz: Neka je $(x, y) \in \rho \circ (\theta \circ \sigma)$. To znači da postoji $z \in A$ takav da je $(x, z) \in \rho$ i $(z, y) \in \theta \circ \sigma$. Sa druge strane, imamo da postoji $u \in A$ takav da je $(z, u) \in \theta$ i $(u, y) \in \sigma$. Prema tome, imamo da je

$$(x, z) \in \rho,\ (z, u) \in \theta \text{ i } (u, y) \in \sigma.$$

Odavde zaključujemo da je $(x, u) \in \rho \circ \theta$ i $(u, y) \in \sigma$, odakle sledi da je $(x, y) \in (\rho \circ \theta) \circ \sigma$. Prema tome, dokazali smo da je $\rho \circ (\theta \circ \sigma) \subseteq (\rho \circ \theta) \circ \sigma$.

Kako se obratna inkluzija dokazuje na potpuno isti način, to smo dokazali da je $\rho \circ (\theta \circ \sigma) = (\rho \circ \theta) \circ \sigma$.

Tvrđenje 2.8 **Za proizvoljne relacije ρ, θ i σ na skupu A važi:**

(a) $\rho\circ(\theta\cup\sigma) = (\rho\circ\theta)\cup(\rho\circ\sigma)$; $\quad (\rho\cup\theta)\circ\sigma = (\rho\circ\sigma)\cup(\theta\circ\sigma)$;

(b) $\rho\circ(\theta\cap\sigma) \subseteq (\rho\circ\theta)\cap(\rho\circ\sigma)$; $\quad (\rho\cap\theta)\circ\sigma \subseteq (\rho\circ\sigma)\cap(\theta\circ\sigma)$;

(c) $(\rho \cup \theta)^{-1} = \rho^{-1} \cup \theta^{-1}$;

(d) $(\rho \cap \theta)^{-1} = \rho^{-1} \cap \theta^{-1}$;

(e) $(\rho \circ \theta)^{-1} = \theta^{-1} \circ \rho^{-1}$;

(f) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;

(g) $(\overline{\rho})^{-1} = \overline{(\rho^{-1})}$.

Dokaz: **Ostavlja se za vežbu (videti u knjizi).**

Tvrđenje 2.9 Za proizvoljne relacije ρ, θ i σ na skupu A važi:

$$\rho \subseteq \theta \;\Rightarrow\; \sigma\circ\rho \subseteq \sigma\circ\theta, \qquad \rho \subseteq \theta \;\Rightarrow\; \rho\circ\sigma \subseteq \theta\circ\sigma.$$

Dokaz: Neka je $\rho \subseteq \theta$.

Ako $(x,y) \in \sigma\circ\rho$, tada postoji $z \in A$ takav da je $(x,z) \in \sigma$ i $(z,y) \in \rho$. Kako je $\rho \subseteq \theta$, to imamo da je $(x,z) \in \sigma$ i $(z,y) \in \theta$, što znači da je $(x,y) \in \sigma\circ\theta$.

Prema tome, dobili smo da je $\sigma\circ\rho \subseteq \sigma\circ\theta$, čime je dokazana prva implikacija.

Druga implikacija se dokazuje analogno.

Važna svojstva relacija

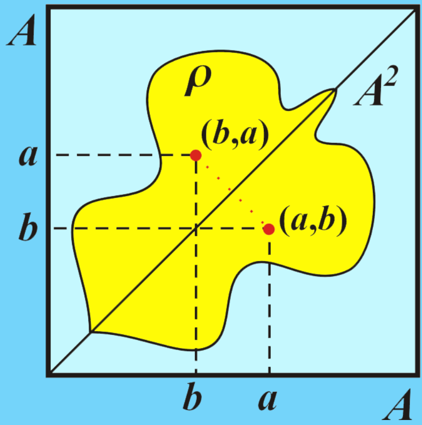
Relacija ρ na skupu A je refleksivna ako za svaki $x \in A$ važi $(x, x) \in \rho$.

Drugim rečima, relacija ρ je refleksivna ako i samo ako sadrži dijagonalu, tj. $\Delta \subseteq \rho$.

Relacija ρ na A je simetrična ako za sve $x, y \in A$ važi

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho,$$

odnosno, ako je $\rho \subseteq \rho^{-1}$ (što je ekvivalentno sa $\rho = \rho^{-1}$).



Contents
Back
Close

Naziv simetrična potiče iz činjenice da su to upravo relacije simetrične u odnosu na dijagonalu.

Relacija ρ na A je antisimetrična ako za sve $x, y \in A$ važi

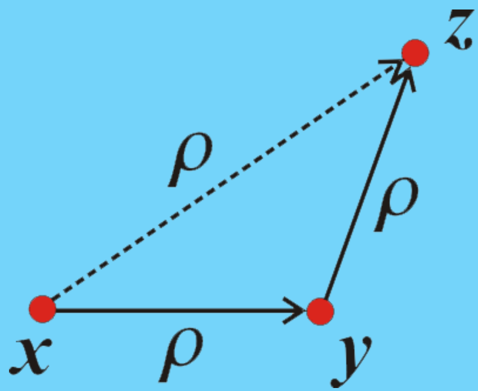
$$(x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Rightarrow x = y,$$

ili, ekvivalentno, ako je $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta$.

Relacija ρ na A je tranzitivna ako za sve $x, y, z \in A$ važi

$$(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho,$$

što je ekvivalentno sa $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.



Primer 2.11

a) Relacije $=$, $\leqslant$, $\geqslant$ i $|$ na skupu $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva su refleksivne.

Sve te relacije su i tranzitivne, $=$ je simetrična a $\leqslant$, $\geqslant$ i $|$ su antisimetrične.

Ako relaciju deljenja $|$ posmatramo na skupu celih brojeva, tada ona nije antisimetrična. Na primer, za svaki ceo broj $n \neq 0$ važi: $-n \mid n$ i $n \mid -n$, pri čemu je $n \neq -n$.

b) Relacija paralelnosti za prave u ravni:

$$p \| q \ \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ p \text{ i } q \text{ se ne seku ili se poklapaju}$$

je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Relacija ortogonalnosti

$$p \perp q \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \text{ i } q \text{ se seku pod pravim uglom}$$

je samo simetrična.

c) Relacija $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$ je refleksivna na skupu $\{1,2\}$, ali nije na skupu $\{1,2,3\}$, jer ne sadrži dijagonalu ovog poslednjeg.

d) Relacija $\rho = \{(x,y) \mid |x-y| < 1\}$ na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ je refleksivna i simetrična, ali nije tranzitivna.

Relacije ekvivalencije

Contents

Relaciju na skupu A koja je istovremeno refleksivna, simetrična i tranzitivna nazivamo relacija ekvivalencije na A.

Primer 2.12

a) Relacija paralelnosti za prave u ravni (Primer 2.11 b)), paralelnost za ravni u prostoru, sve su to primeri relacija ekvivalencije.

c) Jednakost, odnosno dijagonala Δ, je relacija ekvivalencije na A. Nije teško zaključiti da je to najmanja relacija ekvivalencije na A, u smislu da svaka relacija ekvivalencije na A mora da je sadrži, dok nijedan pravi podskup od Δ nema svojstvo refleksivnosti, pa nije relacija ekvivalencije na A.

Back
Close

b) Za proizvoljan prirodan broj n, relacija $\equiv_n$ na skupu $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ svih prirodnih brojeva sa uključenom nulom, definisana sa

$$x \equiv_n y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} n \mid x - y,$$

ili, ekvivalentno, sa

$$x \equiv_n y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \text{ i } y \text{ imaju isti ostatak pri deljenju sa } n$$

je jedna relacija ekvivalencije.

Ova relacija poznata je kao **kongruencija po modulu n**.

Istorijski gledano, to je prva relacija ekvivalencije koja je izučavana kao takva.

Uveo ju je čuveni nemački matematičar Karl Fridrih Gaus, 1801. godine.

Carl Friedrich Gauss

1777–1855

Contents

Back

Close

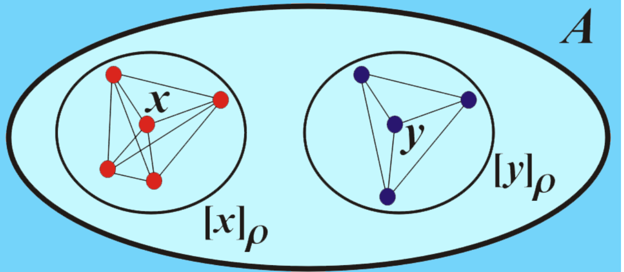
Mnogo popularnija fotografija Karla Fridriha Gausa

Neka je ρ relacija ekvivalencije na A i $a \in A$. Tada skup

$$[a]_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid a\,\rho\,x\}$$

nazivamo **klasa ekvivalencije** elementa a u odnosu na relaciju ekvivalencije ρ.

Takođe govorimo i **ρ-klasa** elementa a, ili kraće samo **klasa** elementa a, u slučajevima kada je jasno o kojoj se relaciji ekvivalencije radi.



Osnovna svojstva klasa su:

Svaka klasa je neprazna - klasa elementa x sadrži makar taj element.

Ukoliko su dva elementa x i y u relaciji ρ, tada su njihove klase jednake, tj. oni određuju jednu istu klasu: $[x]_\rho = [y]_\rho$.

Ukoliko x i y nisu u relaciji ρ, tada su njihove klase disjunktne.

Unija svih ρ-klasa je jednaka celom skupu A.

Tvrđenje 2.10

Neka je ρ relacija ekvivalencije na A i $x, y \in A$. Tada je

a) $[x]_\rho \neq \emptyset$;

b) $[x]_\rho \cap [y]_\rho \neq \emptyset \;\Rightarrow\; [x]_\rho = [y]_\rho$;

c) $\bigcup\{[x]_\rho \mid x \in A\} = A$.

Dokaz:

a) Za svaki $x \in A$ zbog refleksivnosti važi $x \,\rho\, x$, što znači da je makar $x \in [x]_\rho$.

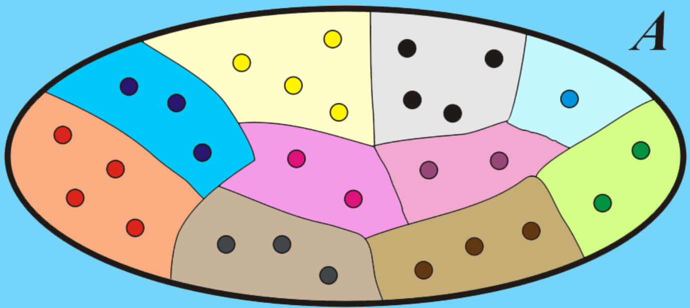
b) Pretpostavimo da $z \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$, tj. da je $x \,\rho\, z$ i $y \,\rho\, z$. Dokazaćemo da su klase $[x]_\rho$ i $[y]_\rho$ jednake.

Iz $u \in [x]_\rho$ sledi $x \,\rho\, u$, odnosno $u \,\rho\, x$, i kako je $x \,\rho\, z$, to je $u \,\rho\, z$. Odavde i iz $z \,\rho\, y$ dobijamo $u \,\rho\, y$, odnosno $y \,\rho\, u$, što znači da je $u \in [y]_\rho$, tj. $[x]_\rho \subseteq [y]_\rho$. Analogno se dokazuje i obratna inkluzija, što znači da važi jednakost ovih klasa.

c) **Svaki $x \in A$ je u svojoj klasi $[x]_\rho$, pa je zato A podskup unije klasa. Obrat je očigledan, pa je i ovaj deo dokazan.**

Klasu ekvivalencije može označavati (predstavljati) svaki njen član: Za svaki $y \in [x]_\rho$ je $[x]_\rho = [y]_\rho$, pa ravnopravno sa x i y može predstavljati tu klasu.

Treba istaći da relacija ekvivalencije razbija skup na klase ekvivalencije.



Može se reći da relacija ekvivalencije grupiše, udružuje u jednu klasu one elemente koje objedinjuje zajedničko svojstvo - ono koje opisuje ta relacija.

Primer 2.9

a) **Klase ekvivalencije za relaciju $\equiv_3$ su skupovi brojeva sa istim ostatkom pri deljenju sa 3:**

$$\{1, 4, 7, \ldots\}; \quad \{2, 5, 8, \ldots\}; \quad \{0, 3, 6, 9, \ldots\}.$$

b) **Dijagonala na proizvoljnom skupu A ima jednočlane klase: svaki element je samo sa sobom u relaciji pa je i sam u klasi.**

c) **Relacija paralelnosti razbija skup svih pravih u ravni na pravce: u istoj klasi su sve međusobno paralelne prave.**

Familiju $\Pi = \{A_i \mid i \in I\}$ podskupova skupa A nazivamo **particijom** ili **razbijanjem** skupa A ako ta familija ispunjava sledeće uslove:

1) Za svaki $i \in I$ je $A_i \neq \emptyset$;

2) Za sve $i, j \in I$ je ili $A_i \cap A_j = \emptyset$ ili $A_i = A_j$;

3) $\bigcup\{A_i \mid i \in I\} = A$.

Skupove A_i nazivamo **blokovima** particije Π.

Ako je ρ relacija ekvivalencije na skupu A, tada familija svih ρ-klasa jeste jedna particija skupa A (prema Tvrđenju 2.10). Tu particiju označavamo sa Π_ρ, tj.

$$\Pi_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \{[x]_\rho \mid x \in A\}.$$

Obratno, ako je data particija $\Pi = \{A_i \,|\, i \in I\}$ skupa A, tada možemo definisati relaciju ρ_Π na A na sledeći način:

$$(x, y) \in \rho_\Pi \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists i \in I)\ x, y \in A_i$$

tj. ako x i y pripadaju istom bloku particije Π.

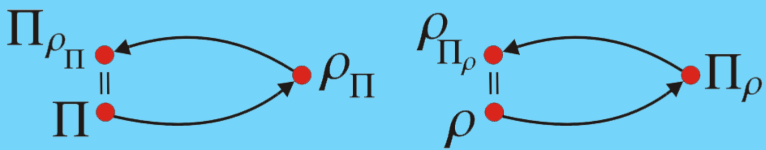
Tvrđenje 2.11-2.12 (modifikovana verzija)

Za svaku relaciju ekvivalencije ρ na skupu A, Π_ρ jeste particija skupa A.

Za svaku particiju Π skupa A, ρ_Π jeste relacija ekvivalencije na A.

Štaviše, važi i sledeće:

$$\Pi_{(\rho_\Pi)} = \Pi \quad \text{i} \quad \rho_{(\Pi_\rho)} = \rho.$$

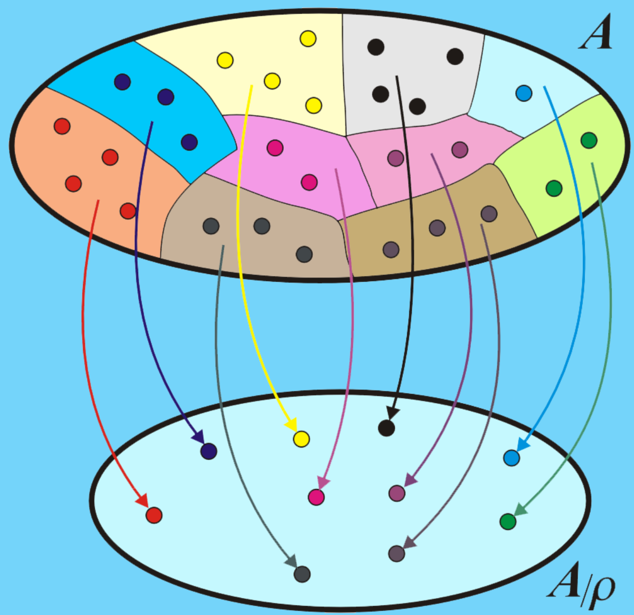


Dokaz: Za vežbu.

Particiju koja odgovara relaciji ekvivalencije ρ na skupu A nazivamo takođe i faktor skupom skupa A u odnosu na ρ. Taj faktor skup označavamo sa A/ρ.

Drugim rečima, faktor skup A/ρ je skup svih klasa ekvivalencije skupa A u odnosu na ρ.

Faktor skup se dobija tako što se svaka ρ-klasa sažme u jedan element.



Contents
Back
Close

Relacije poretka (uređenja)

Relaciju na skupu A koja je istovremeno refleksivna, antisimetrična i tranzitivna nazivamo relacija poretka, parcijalno uređenje ili samo uređenje na A.

Primer 2.15

a) Osnovne relacije poretka na skupu $\mathbb{N}$ su $\leqslant$ i $|$.

Analogno definisana, relacija $\leqslant$ je relacija poretka i na drugim skupovima brojeva: $\mathbb{Z}$ (celi brojevi), $\mathbb{Q}$ (racionalni brojevi) i $\mathbb{R}$ (realni brojevi).

b) Na partitivnom skupu $\mathcal{P}(A)$ proizvoljnog skupa A, inkluzija $\subseteq$ je relacija poretka.

Relacije poretka su, uz relacije ekvivalencija, najrašireniji tip relacija u matematici. One su osnovno sredstvo za uređivanje skupova.

Ako je ρ relacija poretka na A, onda se kaže da je A uređen relacijom ρ. Uređeni par (A, ρ) se tada zove uređeni skup (koristi se i naziv parcijalno uređeni skup).

Ako je ρ uređenje na A, onda je i inverzna relacija ρ^{-1} takođe uređenje na A (proveriti za vežbu) i naziva se dualno uređenje ili dualni poredak za ρ.

Na primer, dualno uređenje uređenja $\leq$ (manje ili jednako), na bilo kom od skupova brojeva $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ili $\mathbb{R}$, je uređenje $\geq$ (veće ili jednako).

Uređenje ρ na skupu A je linearno ili totalno uređenje ako pored uslova koji definišu uređenje ispunjava i uslov linearnosti: Za sve za sve $x, y \in A$ važi

$$x \,\rho\, y \;\vee\; y \,\rho\, x.$$

U tom slučaju, par (A, ρ) se naziva linearno uređen skup, totalno uređen skup ili lanac.

Drugim rečima, uređeni skup je linearno uređen ako su svaka dva njegova elementa uporediva.

U opštem slučaju, dva elementa uređenog skupa mogu biti i neuporedivi, zbog čega se, kako je ranije pomenuto, uređeni skupovi nazivaju i parcijalno uređeni skupovi, ne bi li se time jače naznačilo da je moguće da postoje neuporedivi elementi u njemu.

Primer 2.16

Poznati uređeni skupovi brojeva su $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, |)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ i $(\mathbb{R}, \leqslant)$.

Uređen skup je i par $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, gde je A proizvoljan skup.

Sa druge strane $(\mathbb{Z}, |)$ nije uređen skup jer, kako smo ranije istakli, relacija deljenja $|$ na skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ nije antisimetrična ($-1 \mid 1$ i $1 \mid -1$, pri čemu je $-1 \neq 1$).

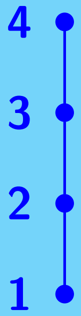
Uređeni skupovi $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ i $(\mathbb{R}, \leqslant)$ su linearno uređeni, dok $(\mathbb{N}, |)$ i $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ to nisu:

- u $(\mathbb{N}, |)$, elementi 2 i 3 su neuporedivi elementi,
- u $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, za $a, b \in A$ takve da je $a \neq b$, $\{a\}$ i $\{b\}$ su neuporedivi elementi iz $\mathcal{P}(A)$.

Neki, pre svega konačni, uređeni skupovi mogu se predstavljati dijagramima.

Elementi skupa A predstavljaju se kao tačke u ravni i to tako da se $x\,\rho\,y$ obeležava spojnicom od x ka y, pri čemu je na crtežu x niže od y. Ne označava se $x\,\rho\,x$, niti $x\,\rho\,z$, ako postoje spojnice za $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho z$.

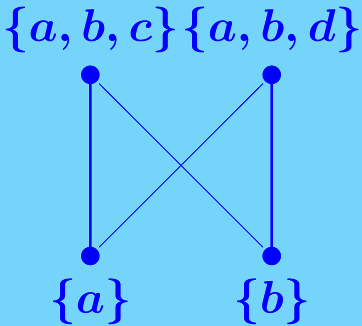
Primer 2.17



linearno uređeni skup

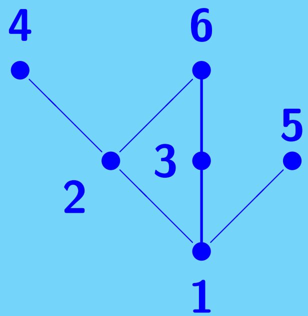
$(\{1, 2, 3, 4\}, \leqslant)$

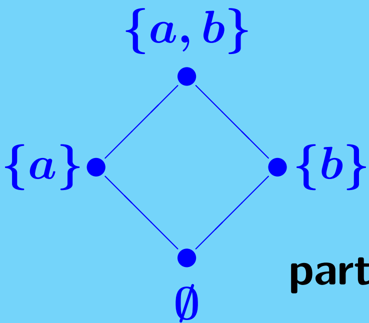
Contents
Back
Close



kolekcija od četiri podskupa skupa $\{a, b, c, d\}$ uređena inkluzijom

skup $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ uređen relacijom $|$





partitivni skup dvočlanog skupa uređen inkluzijom

Neka je $(A, \leqslant)$ uređeni skup.

element $a \in A$ je minimalan u A ako ne postoji $x \in A$ tako da je $x \neq a$ i $x \leqslant a$, tj. ako u A ne postoji manji element od njega.

element $a \in A$ je maksimalan u A ako ne postoji $x \in A$ tako da je $x \neq a$ i $a \leqslant x$, tj. ako u A ne postoji veći element od njega.

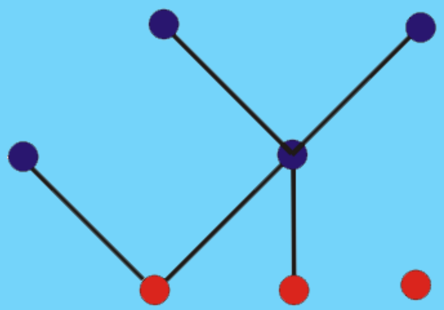
element $a \in A$ je najmanji u A ako za sve $x \in A$ važi $a \leqslant x$, tj. ako je manji od svakog drugog elementa iz A.

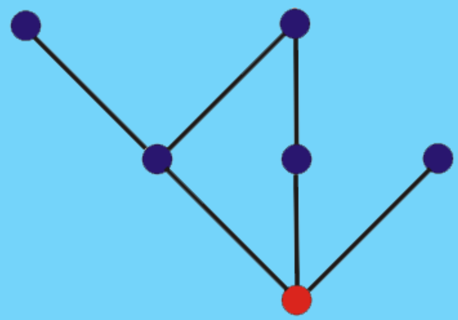
element $a \in A$ je najveći u A ako za sve $x \in A$ važi $x \leqslant a$, tj. ako je veći od svakog drugog elementa iz A.

Odnos minimalnog i najmanjeg elementa:

Ukoliko uređeni skup A ima najmanji element, tada je on jedinstven, pri čemu taj element jeste i jedini minimalni element u A.

Uređeni skup može imati više minimalnih elemenata (i u tom slučaju ne može imati najmanji element).





minimalni elementi najmanji element

Isto važi i za maksimalne elemente i najveći element.

Contents
Back
Close

Primer 2.18

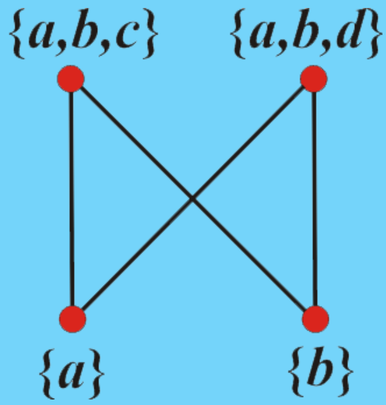
U uređenim skupovima $(\mathbb{N}, \leqslant)$ i $(\mathbb{N}, |)$ broj $\mathbf{1}$ je najmanji element, dakle i jedini minimalan, dok nema maksimalnih elemenata niti najvećeg.

U $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ nema ni minimalnih ni maksimalnih elemenata, pa, prema tome, ni najmanjeg ni najvećeg.

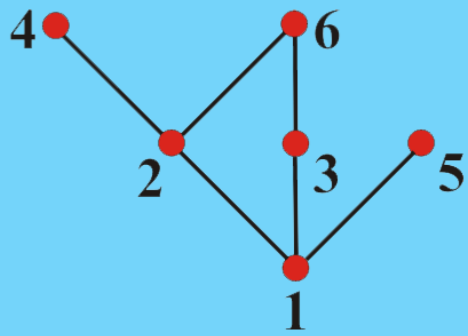
U $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ prazan skup $\emptyset$ je najmanji, a skup A je najveći element.

U uređenom skupu svih nepraznih podskupova skupa A, svi jednoelementni podskupovi su minimalni, i ukoliko A ima bar dva elementa, onda nema najmanjeg elementa.

Uređeni skup na slici ima dva minimalna i dva maksimalna elementa, ali nema najmanji ni najveći element.



Uređeni skup $(\{1,2,3,4,5,6\},|)$ ima tri maksimalna elementa: **4**, **5** i **6**, i najmanji element **1**.



Restrikcija relacije

Neka je ρ relacija na skupu A i $B \subseteq A$.

Tada možemo definisati relaciju $\rho_{|B}$ na B sa:

$$\rho_{|B} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in B \times B \mid (x,y) \in \rho\} = \rho \cap B \times B.$$

Relaciju $\rho_{|B}$ nazivamo restrikcija relacije ρ na B.

Restrikcija uređenja

Neka je ρ uređenje na skupu A i $B \subseteq A$.

Tada i restrikcija $\rho_{|B}$ jeste uređenje na skupu B.

Bez opasnosti od zabune, umesto $\rho_{|B}$ mi često pišemo samo ρ, tj. polazno uređenje i njegovu restrikciju označavamo istim simbolom.

Na primer, uobičajeno uređenje prirodnih brojeva je restrikcija uobičajenog uređenja celih brojeva na skup prirodnih brojeva.

Linearno uređeni skup je dobro uređen ako svaki njegov neprazan podskup ima najmanji elemenat.

Primer 2.19

Skup prirodnih brojeva je dobro uređen relacijom $\leqslant$.

Primer linearno uređenog skupa koji nije dobro uređen je skup svih nenegativnih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}_0^+ = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, 0 \leq x\}$ uređen restrikcijom uobičajenog uređenja racionalnih brojeva na $\mathbb{Q}_0^+$.

Na primer, u ovom uređenom skupu podskup $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ nema najmanji element.

Contents
Back
Close

Tvrđenje 2.13

U svakom konačnom uređenom skupu postoji bar jedan minimalan i bar jedan maksimalan element.

Dokaz: **Neka je $(A, \leqslant)$ konačan uređeni skup i $a \in A$.**

Ako je a minimalan element, dokaz je gotov; ako nije, postoji element $a_1 \neq a$, tako da je $a_1 \leqslant a$.

Ako je a_1 minimalan, tvrđenje je dokazano, a ako nije, postoji element $a_2 \neq a_1$, takav da je $a_2 \leqslant a_1$. Jasno je da mora biti i $a_2 \neq a$, jer bi smo u suprotnom dobili $a_1 = a_2 = a$.

Na ovaj način dolazi se do minimalnog elementa, jer u protivnom skup A ne bi bio konačan – sadržao bi lanac $a, a_1, a_2, \dots$ međusobno različitih elemenata.

Dokaz da postoji maksimalan element je analogan.

Neka je B neprazan podskup uređenog skupa $(A, \leqslant)$.

Element $a \in A$ nazivamo donja granica ili donje ograničenje skupa B ako je

$$a \leq x, \text{ za svaki element } x \in B,$$

tj. ako je a manji od svih elemenata skupa B.

Analogno, element $a \in A$ nazivamo gornja granica ili gornje ograničenje skupa B ako je

$$x \leq a, \text{ za svaki element } x \in B,$$

tj. ako je a veći od svih elemenata skupa B.

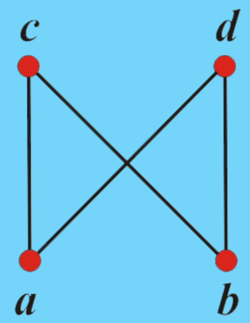
Sa B^d označavaćemo skup svih donjih, a sa B^g skup svih gornjih granica skupa B, tj.

$$B^d = \{a \in A \,|\, a \leq x, \text{ za svaki } x \in B\},$$
$$B^g = \{a \in A \,|\, x \leq a, \text{ za svaki } x \in B\}.$$

Contents
Back
Close

Skupovi B^d i B^g mogu biti i prazni.

Na primer, kod uređenog skupa na slici, za skup $B = \{a, b\}$, skup B^d je prazan, dok je $B^g = \{c, d\}$.



Neka je B neprazan podskup uređenog skupa $(A, \leq)$.

Najveća donja granica skupa B, tj. najveći element skupa B^d, ukoliko takav postoji, naziva se infimum skupa B.

Najmanja gornja granica skupa B, tj. najmanji element skupa B^g, ukoliko takav postoji, naziva se supremum skupa B.

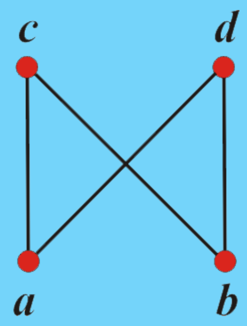
Ukoliko postoji infimum skupa B, onda je on jedinstven, zbog jedinstvenosti najvećeg elementa skupa B^d.
Isto važi i za supremum.

Primer 2.20

a) U uređenom skupu $(\mathbb{N}, \leqslant)$, svaki konačan podskup ima supremum – to je najveći element podskupa.
U $(\mathbb{N}, \leqslant)$ infimum postoji za svaki podskup – to je najmanji element u podskupu.

b) U uređenom skupu $(\mathbb{N}, |)$ infimum konačnog podskupa je najveći zajednički delilac, a supremum je najmanji zajednički sadržalac elemenata tog podskupa.

c) U uređenom skupu na slici, skup $B = \{a, b\}$ nema infimum, jer uopšte nema donjih granica.
Ovaj skup nema ni supremum, jer skup njegovih gornjih granica $B^g = \{c, d\}$ nema najmanji element.



Contents
Back
Close

d) **U partitivnom skupu nekog skupa, uređenom inkluzijom, infimum kolekcije podskupova je njihov presek, a supremum je njihova unija.**

Sadržaj