1. Pojam skupa. Osnovne definicije i oznake. Zadavanje skupova.

Skup ili mnoštvo je pojam koji se u matematici ne definira.Skupove označavamo velikim slovima abecede, a članove skupa malim. Članove zovemo elementi skupa. Činjenica da je neki element pripada skupu označavamo: $a \in A$, a ako ne pripada $\neg(a\in A) = a\notin A$. Više elemenata u skupu s vitičastim zagradama $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Posebno se istice skup bez elemenata $\{\}=\emptyset$, kao i univerzalni skup koji obuhvaca sve elemente skupova koje promatramo (u).
Skupovi se zadaju:

a) nabrajanjem elemenata unutar viticastih zagrada ($A = \{1, 2, 3, \ldots\}$) i pritom se elementi unutar skupa ne mogu ponavljati $\{1, 2, 3, 2, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$
b) zadavanjem skupa pomoću svojstva kojeg elementi mogu zadovoljavati
S= {x | x je student } *(| se cita: takvih da)*
$S=\{x: P(x)\}$ *(: - sa svojstvom da)*
c) grafički prikazom pomoću Vennovih dijagrama.

2. Definicije osnovnih i izvedenih skupovnih operacija.

Struktura $\mathcal{S} = (S, -, \cup, \cap, u, \emptyset)$ je također primjer jedne Boolove algebre gdje $\cup$ i $\cap$ predstavljaju + i $\cdot$, $-$ je $-$, a $\emptyset$ i u su 0 i 1. Dakle svi aksiomi i teoremi koji vrijede u Boolovoj algebri vrijede i u skupovnoj, odnosno one su izomorfne.

Definicija osnovnih skupovnih operacija:

a) $A \cup B \stackrel{def}{=} \{x \mid x\in A \vee x\in B\}$
b) $A \cap B \stackrel{def}{=} \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$
c) $\bar{A} = c(A) = A^C \stackrel{def}{=} \{x \mid x\notin A \wedge x\in u\}$

Presjek $\cap$ i unija $\cup$ su binarne operacije, a $^{-}$ je unarna. Pomoću binarnih opoeracija mogu se definirati n-arne operacije.
Ove tri operacije su osnovne i pomću njih se može definiratii neke druge složenije operacije:

d) $A \setminus B = A - B \stackrel{def}{=} \{x \mid x\in A \wedge x \notin B\}$ *(A razlika B)*
e) $A \,\Delta\, B \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in A \,\underline{\vee}\, x\in B\}$ *(simetricna razlika)*
f) $A \uparrow B \stackrel{def}{=} \{x \mid x \notin A \vee x\notin B\}$
g) $A \downarrow B \stackrel{def}{=} \{x \mid x \notin A \wedge x\notin B\}$

3. Definicije skupovnih relacija.

Definicija Za skup A kažemo da je podskup skupa B ako je A sadržan u B, tj. ako vrijedi da ako je $x \in A$ onda je $x \in B$. Pišemo $A \subseteq B$.
Ako je $A \subseteq B$ onda kažemo da je B nadskup od A (oznaka $B \supseteq A$).

" $\subseteq$ " - inkluzija (uključivanje).

Definicija Kažemo da su skupovi A i B jednaki ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Pišemo $A = B$.

Definicija Kažemo da je A pravi podskup od B ako vrijedi $A \subseteq B$ i $A \neq B$. Pišemo $A \subset B$.

Vrijedi:

- $A \subseteq A$ za svaki skup A;
- $\emptyset \subseteq A$ za svaki skup A, gdje je $\emptyset$ oznaka za prazan skup, tj. skup bez elemenata;

Katezijev produkt:
$AxB \stackrel{def}{=} \{(x, y) \mid x\in A \wedge y\in B\}$

a) $P\subseteq A$ naziva se unarna relacija na skupu A
b) $P\subseteq AxB$ naziva se binarna relacija izmedu skupova A i B
$P\subseteq AxA=A^2$ P je relacija na skupu A
c) $P\subseteq AxBxC$ ternarna relacija
$P\subseteq AxAxA=A^3$ ternaran relacija na skupu A
d)$P\subseteq A_1xA_2x\ldots xA_n$ n-arna relacija
$P\subseteq AxAx\ldots xA=A^n$ n-arna relacija na skupu A

Kažemo da su x i y usporedivi u relaciji p ako je $(x, y) \in p$ ili $(y, x) \in p$
Negacija usporedivosti
$(x, y) \notin p \wedge (y, x) \notin p$

4. Teoremi skupovne algebre. Dokažite jedan od DeMorganovih zakona.

1. Idempotentnost unije i presjeka: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$
2. Asocijativnost: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Komutativnost: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
4. Distributivnost: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. De Morganove formule: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. $A \cup \emptyset = A$; $A \cap X = A$
7. $A \cup u = u$; $A \cap \emptyset = \emptyset$
8. Komplementiranost: $A \cup \overline{A} = \mathbf{u}$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$
9. Involutivnost komplementiranja: $\overline{\overline{A}} = A$

Dokaz:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

iz lijeve strane dobijamo:

$$(\forall x)(x \in \overline{A \cap B}) \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A \cap B) \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow$$

$$(\forall x)(x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \overline{A} \cup \overline{B})$$

5. Definicija funkcije. Osnovni pojmovi u vezi s funkcijom. Jednakost funkcija.

I funkcija je specijalan skup jer je to jedna posebna relacija . Relacija $f \subseteq AxB$ naziva se funkcija iz skupa A u skup B (ili funkcija izmedu skupova A i B) ako i samo ako
$(\forall x \in A)\ (\exists! x \in B)\ ((x,y) \in f)$

Skup A u definiciji funkcije naziva se domena, a skup B koodomena. Skup elemenata B takav da je $\{b |\ (a, b) \in f\}$ naziva se slika funkcije ili područje vrijednosti funkcije.

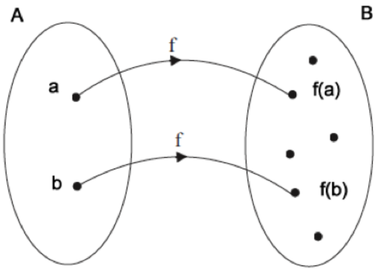
$A = D(f) = D_f = Dom\ (f)$
$B= K(f) = K_f = Codom\ (f)$
$R(f) = R_f = f(A)$ – slika funkcije

Skup svih parova koji se nalaze u relaciji f
$\{(a, b) \mid (a, b) \in f \} = G_f = G(f)$
naziva se graf funkcije

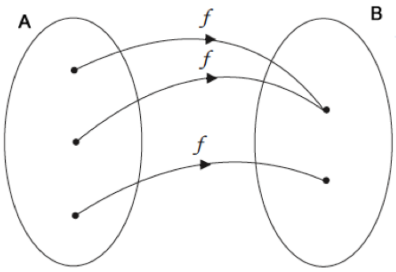
Funkcije najradije zapisujemo u obliku: $f(a) = b$ ili $a |\!\rightarrow b$. Samu funkciju označavamo i sa $f:A \rightarrow B$.
Inverzna slika (skupa C):
$C \subseteq B \quad f^{-1}(C) \stackrel{def}{=} \{a \mid f(a) \in C\}$
Direktna slika (skupa D):
$D \subseteq A \quad f(D) \stackrel{def}{=} \{ f(a) \mid a \in D\}$

Elementi domene nazivaju se originalima (ili argumentima funkcije), a elementi koodomene nazivaju se slike funkcije.
Dvije funkcije smatramo jednakim (pišemo f=g) ako i samo ako $D_f=D_g$, $K_f=K_g$, $f(a) = g(a)\ (\forall a \in D_f)$.

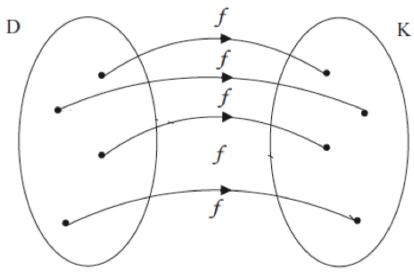
6. Vrste funkcija (injekcija, surjekcija, bijekcija). Primjeri funkcija (niz, permutacija)



Za funkciju f:A→B kažemo da je **injekcija** i samo ako za svaki a iz A i svaki b iz A vrijedi
$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$
što je kontrapozicijom jednako tvrdnji
$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$



Surjekcija je funkcija takva da za svaki b iz B postoji a iz A takav da je f(a)=b (a je povezan s b).
$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$



Bijekcija je funkcija koja je istovremeno injekcija i surjekcija.

Funkcija f:N→A naziva se niz (beskonačan niz) f(1), f(2), f(3), … f(n), …
Neka je zadan skup od n elemenata {1,2, … , n}. **Permutacijom** tog skupa zovemo bilo koju bijekciju f : {1, … , n} → {1, … , n}. (f:A→A)
Skup svih permutacija n-članog skupa označavamo sa S_n.Običaj je da se razdioba vrijednosti permutacije zapisuje sažeto u obliku tablice.
Primjer : tročlani skup {1,2,3} ima ukupno 3! = 6 permutacija:

$f_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ $f_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ $f_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ $f_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ $f_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ $f_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

7. Operacije nad funkcijama. Teoremi o tim operacijama. Dokažite da je kompozicija funkcija asocijativna, ali da nije komutativna.

Operacije nad funkcijama:
- zbroj funkcija: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- razlika funkcija: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- umnožak realnog broja c i funkcije f: $(cf)(x) = c \cdot f(x)$
- umnožak funkcija: $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$
- kvocijent funkcija: $(f/g)(x) = f(x) / g(x)$

Imamo li dvije funkcije f:A→B, g:B→C, tada se definira kompozicija funkcije h=(g∘f):A→C tako da vrijedi:
$(g \circ f)(x)=h(x)=g[f(x)]$

Ako je f:A→B bijekcija, onda se može definirati i inverzna funkcija $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x) = y$, gdje je $x \in A$, a $y \in B$.
Pritom vrijedi:
$(f^{-1} \circ f)(x)=x=i(x)$ i $(f \circ f^{-1})(y)=y=i(y)$ - (jedinično), identično preslikavanje
$f^{-1} \circ f = i = f \circ f^{-1}$ – isto pravilo samo na različitim domenama

Svojstva inverzne funkcije:
$(f^{-1})^{-1}=f$ $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ $i^{-1}=i$

Ako su definirane kompozicije $g\circ f$, $h \circ g$, $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$, onda vrijedi
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (**asocijativnost kompozicije**)

Dokaz: Da bismo dokazali jednakost funkcija, prvo dokažimo da su im domene jednake. $D((h \circ g) \circ f) = D(f)$ i $D(h \circ (g \circ f)) = D(g \circ f) = D(f)$.
$K((h\circ g)\circ f) = K(h\circ g) = K(h)$ i $K(h\circ(g\circ f)) = K(h)$.

Znamo da vrijedi za $\forall x \in D(f)$
$[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h\{g[f(x)]\} = (h \circ g)[f(x)] = [(h \circ g) \circ f](x)$.

Kompozicija **nije općenito komutativna** operacija. To se može dokazati primjerom funkcija $f, g : R \to R$, gdje je $\forall x \in R$, $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^2 + 2$.
Očito postoje funkcije $g \circ f, f \circ g : R \to R$, ali $(g \circ f)(0) = g[f(0)] = g(1) = 3$
dok je $(f \circ g)(0) = f[g(0)] = f(2) = 5$,
tj. $g \circ f \neq f \circ g$ i dokaz je gotov.

8. Kako definiramo konačan, a kako beskonačan skup? Kako definiramo prebrojiv, a kako neprebrojiv skup?

Za skup A kažemo da je konačan ako i samo ako postoji bijekcija funkcija iz skupa {1, 2, 3 … n} i A.
$\exists f: \{1, 2, 3, .. n\} \to A$ ili $K(A)=n$
i za njega kažemo da je konačno prebrojiv.

Skup je beskonačan ako i samo ako ne postoji bijekcija funkcije između skupa {1, 2, 3, .. n} i A.
Za konačan skup kažemo da ima konačan kardinalni broj n, a za beskonačan kažemo da ima beskonačan kardinalni broj: $K(A)=\infty$.
Među beskonačnim skupovima ističu se posebno 2 skupa:prebrojivi i neprebrojivi.

Prebrojivi skupovi su skupovi čiji se elementi mogu poredati u beskonačan niz, tj. za koje $f:N\to A$ (npr. Skup prirodnih brojeva).
Neprebrojivi skup: skup koji se ne može poredati u niz, tj. skup A za koji ne postoji bijekcija $f:N\to A$

Tako su npr. N, Z, Q i A (skup algebarskih imena) prebrojivi, dok su I (iracionalni brojevi), R (realni) i C (kompleksni) neprebrojivi.

9. Što je kardinalni broj skupa? Kada su skupovi ekvipotentni?

Za skupove A i B kažemo da imaju isti **kardinalni broj** ako su ekvipotentni te pišemo $A\sim B$ ili $K(A)=K(B)$ ili card (A) = card (B) ili $|A|=|B|$.

A i B u u relaciji **ekvipotentnosti** (ili jednakobrojnosti) ako i samo ako postoji funkcija f takva da je funkcija f između A i B bijekcija.

Kardinalni broj konačnog skupa {1, 2, 3, .. n} jednak je n, i pišemo card {1, 2, 3, .. n} = n.
Kardinalni broj prebrojivog beskonačnog skupa A označavamo sa χ_0 (**alef nula**) i pišemo card (A) = χ_0
Dakle:
$K(Q)=K(A)=K(N)=K(Z)=\chi_0$

Dakle, svi prebrojivi bekonačni skupovi su ekvipotentni sa skupom prirodnih brojeva N.

Kardinalni broj skupa realnih brojeva R označavamo sa **c** i zovemo ga **alef jedan** ili **kontinuum** i pišemo card (R) = c = χ_1
Dakle:
$K(R)=K(J)=K(C)=c=\chi_1$

10. **Dokažite da su skupovi cijelih brojeva Z i racionalnih Q prebrojivi.**

Skupovi cijelih brojeva Z i racionalnih brojeva Q su **prebrojivo beskonačni.** To znači da se članovi tih skupova mogu poredati u beskonačni niz. Svi prebrojivo beskonačni skupovi su ekvipotentni sa skupom prirodnih brojeva:
card Z = card Q = χ_0
Dokaz:
a) Ako su skupovi Z i N ekvipotentni, to znači da mora postojati funkcija f : Z → N koja je bijekcija.
Skup cijelih brojeva Z se može preslikati u skup prirodnih brojeva N pomoću funkcije f : Z → N definirane izrazom:

$$f(k) = \begin{cases} 2k & \text{za} \quad k > 0 \\ 2|k| + 1 & \text{za} \quad k \le 0 \end{cases}$$

koja je bijekcija.

Za dokaz da je skup Q prebrojiv, dovoljno je pronaći injektivnu funkciju f : Q → N. Takva funkcija se može lako konstruirati kodiranjem i ona glasi:

$$f(p\frac{m}{n}) = 2^{p+1}\, 3^m\, 5^n$$

gdje je $p = +1$ ili $p = -1$ predznak racionalnog broja,

$m \in N_0$ - brojnik, $N_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$,

$n \in N$ - nazivnik.

Pri tom su brojnik i nazivnik skraćeni do kraja, tj. nemaju zajedničkog djelitelja.
Iz osnovnog teorema aritmetike slijedi da je:

$$f(p_1 \frac{m_1}{n_1}) = f(p_2 \frac{m_2}{n_2}) \qquad \Rightarrow \qquad 2^{p_1+1}\, 3^{m_1}\, 5^{n_1} = 2^{p_2+1}\, 3^{m_2}\, 5^{n_2}$$

samo onda kad je:

$$p_1 = p_2 \;,\; m_1 = m_2 \;,\; n_1 = n_2 \qquad \Rightarrow \qquad p_1 \frac{m_1}{n_1} = p_2 \frac{m_2}{n_2}$$

što znači da je funkcija f injektivna.

11. **Dokažite da je svaki beskonačni podskup prebrojivog skupa prebrojiv.**

Svaki beskonačni podskup prebrojivog skupa je prebrojiv.
Dokaz:
A je prebrojiv skup i ekvipotentan sa N, a B je beskonačan podskup od N.
A~N, B⊆N
Znamo da u skupu prirdnih brojeva uvijek postoji najmanji broj, ali ne postoji najveći. Kako je B⊆N i u skupu B postoji najmanji broj. Neka je to b1.
b1=min(B), B\{b1}⊆N
I taj skup ima minimalan element b2.
B\{b1, b2}⊆N i taj skup ima minimalalni element b3. Ovim postupkom pokazujemo da članove skupa B možemo poredati u niz od najmanjeg prema većem u kojem je b1 najmanji element, b2 drugi element, b3…
Ovo znači da je skup B prebrojiv.
A~N, B~N |= A~B - pravilo tranzitivnosti ekvipotencije

12. **Ako je A beskonačan, a K konačan skup, dokažite da je A~A\K.**

Ako je A beskonačan skup i K njegov konačan podskup ($K \subset A$) tada je kardinalni broj od A:
K(A)=K(A\K) ili A~A\K

$K=\{a_1, a_2, a_3, \dots a_k\}$ K(K)=k
$S=\{a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_k, a_{k+1}, \dots a_{k+i}\}=\chi_0$

Svaki konačan skup se može proširiti do beskonačnog skupa pritom i prebrojivog.
Da bi dokazali da su ekvipotenti, moramo konstruirati bijekciju:
f:A→A\K

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \in A \setminus S \\ a_{i+k}, & x=a_i \in S \end{cases}$$

Funkcija je očigledno surjekcija, no isto tako je i injekcija:
$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ (ako $x \in A \setminus S$)
$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow a_{i1+k}=a_{i2+k} \Rightarrow a_{i1}=a_{i2} \Rightarrow x_1=x_2$

Primjer (*znak alef cu pisat kao alef :P)*:
Na osnovu ovog teorema: alef0-n=alef0, alef0+n=alef0, alef1+n=alef1
Vrijedi
[0, 1] ~ [0, 1> ~ <0, 1] ~ <0, 1> ~ <0, 1/2> ∪ <1/2, 1>

13. **Dokažite da je skup R neprebrojiv (Cantorov teorem). Kakav je skup svih iracionalnih brojeva R\Q, a kakvi skupovi algebarskih i transcedentnih brojeva?**

Teorem (Cantor): Skup relnih brojeva R je neprebrojiv, tj. nije ekvipotentan sa skupom N. Dakle, vrijedi da je $N_o <$ card R = c.

Dokaz (Cantorov dijagonalni postupak): Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup R prebrojiv. Prebrojivi skup se može poredati u beskonačni niz. Budući da je R ekvipotentan s intervalom (0, 1] , onda se i skup (0, 1] može poredati u beskonačni niz (0, 1] = { x_1, x_2, ... }. Prikažimo ove brojeve u decimalnom zapisu koji nije jednoznačan:

$$x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$
$$x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$
$$x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots$$

gdje su a_{ij} znamenke između 0 i 9.

Odaberemo broj $b = 0.b_1b_2b_3\dots$ tako da je znamenka $b_n \in \{1, 2, \dots, 9\}$ odabrana tako da je $b_n \neq a_{nn}$. Tada je:

$b \neq x_1$ jer se ne podudaraju u prvoj decimali,

$b \neq x_2$ jer se ne podudaraju u drugoj decimali, itd.

Dakle, $b \notin \{x_1, x_2, \dots\}$. To je kontradikcija jer decimalni prikaz od b pokazuje da je $b \in \{x_1, x_2, \dots\}$. Time je teorem dokazan.

Skup iracionalnih brojeva nije prebrojiv.
Za realan broj a kažemo da je algebarski broj ako postoji polinom P(x) s cjelobrojnim koefcijentima takav da je P(a) = 0. Stoga je skup svih algebarskih brojeva prebrojiv.
Realni brojevi koji nisu algebarski nazivaju se transcedentni i skup transcedentnih brojeva je neprebrojiv.

14. Možemo li kardinalne brojeve uspoređivati? Dokažite da je $\chi_0 \leq c$. Hipoteza kontinuuma.

Kardinalne brojeve možemo uspoređivati i kažemo da je K(A)≤K(B) ako i samo ako ∃f:A-->B, a f je injekcija (da je surjekcija, bila bi i bijekcija i bilo bi =, a ne ≤)

Kako je jasno da vrijedi N⊂R pa je dakle $\chi_0<c$ jer ne postoji bijekcija sa skupa N na R odakle se i dolazi do zaključka da su ova dva kardinalna broja različita. Dakle skup R je neprebrojiv jer se ne može poredati u slijed, dok je skup N prebrojiv jer se može, to znači da skupovi nisu ekvipotentni.

Hipoteza kontinuuma:
Postoji skup A takav da je $\chi_0<K(A)<c$ tj. N ⊂ A ⊂ R. Odgovor na ovu hipotezu dao je Cohen. Njegov odgovor je da se ta tvrdnja ne može ni dokazati ni opovrgnuti, što znači da odgovor na hipotezu može biti točan ili netočan, Onaj tko to želi prihvatit vjeruje da takav skup postoji i može biti u pravu, ali i ne. Da to nije neozbiljna tvrdnja vidimo na tome što je na pretpostavci da takav skup postoji izgrađena jedna posebna matematika, ali većina matematičara ne vjeruje u to. Na osnovu toga (da ne postoji) c je prvi idući kardinalni broj pa je $c= \chi_1$.Kako je samo stvar u vjerovanju (činjenica koja se ne može dokazati) jedan odgovor na hipotezu kontinuuma je aksiom.