Ivan Slapničar
Saša Krešić
Josipa Barić
Marko Matić

MATEMATIKA 1

Vježbe

`http://www.fesb.hr/mat1`

Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

Split, listopad 2002.

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
SVEUČILIŠTE U SPLITU

Autori
IVAN SLAPNIČAR, SAŠA KREŠIĆ-JURIĆ, JOSIPA BARIĆ, MARKO MATIĆ

Recenzent
DOC. DR. SC. BRANKO ČERVAR
Fakultet prirodoslovno matematičkih znanosti i odgojnih područja, Sveučilište u Splitu

Izdavač
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
SVEUČILIŠTE U SPLITU

Za izdavača
PROF. DR. SC. ZDENKO KORDIĆ
Predsjednik Povjerenstva za izdavačku djelatnost FESB-a

Glavni urednik
DINKO BEGUŠIĆ

Objavljivanje ovog udžbenika odobrilo je Fakultetsko vijeće Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu odlukom broj xx-xx-xx od 21. studenog 2002.

Sadržaj ovog udžbenika nastao je na osnovi suradnje Hrvatske akademske i istraživačke mreže CARNet i Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu na projektu "Predavanja, vježbe i zadaci iz Matematike 1".

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Sveučilišna knjižnica u Spltu
UDK ??:??>(???.?)

SLAPNIČAR, Ivan
Matematika 1 Vježbe / Ivan Slapničar. – Split : Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, 2002. – VII, 164 str. : graf. prikazi : 29 cm. –

ISBN 953-6114-57-7

ISBN 953-6114-57-7

Sadržaj

Popis slika

Dio I.

RIJEŠENI ZADACI

1.

OSNOVE MATEMATIKE

1.1 Nejednakost s apsolutnom vrijednošću

Nađite skup svih rješenja nejednadžbe

$$|x-1|<|x+1|. \tag{1.1}$$

Rješenje. Ako je $x \neq -1$, onda se nejednadžba (1.1) može napisati u obliku

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1.$$

Prema teoremu 1.10 (i) vrijedi

$$-1<\frac{x-1}{x+1}<1. \tag{1.2}$$

Ova nejednadžba se može riješiti tako da se posebno promatraju nejednakosti

$$-1<\frac{x-1}{x+1} \quad \text{i} \quad \frac{x-1}{x+1}<1.$$

Slučaj 1. Nejednakost

$$-1<\frac{x-1}{x+1}$$

se može napisati kao

$$0<1+\frac{x-1}{x+1}=\frac{2x}{x+1}. \tag{1.3}$$

Dakle, potrebno je odrediti točke u kojima je funkcija $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ pozitivna. To je moguće samo ako su brojnik i nazivnik istodobno pozitivni ili negativni.

(i) Ako je $2x > 0$ i $x + 1 > 0$, tada x zadovoljava

$$x > 0 \quad i \quad x > -1$$

pa je rješenje ovih nejednakosti *presjek* skupova

$$(0, \infty) \cap (-1, \infty) = (0, \infty).$$

(ii) Ako je $2x < 0$ i $x + 1 < 0$, tada x zadovoljava

$$x < 0 \quad i \quad x < -1$$

pa je rješenje ovih nejednakosti *presjek* skupova

$$(-\infty, 0) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -1).$$

S obzirom da $f(x)$ pozitivno ako i samo ako x zadovoljava (i) *ili* (ii), rješenje nejednadžbe (1.3) je *unija* skupova

$$A = (-\infty, -1) \cup (0, \infty).$$

Slučaj 2. Nejednakost

$$\frac{x-1}{x+1} < 1$$

se može napisati u obliku

$$0 > \frac{x-1}{x+1} - 1 = -\frac{2}{x+1}. \tag{1.4}$$

Slično kao u Slučaju 1, naći ćemo točke u kojima je funkcija $g(x) = -\frac{2}{x+1}$ negativna. To očito vrijedi kada je $x + 1 > 0$, odnosno $x > -1$. Dakle, nejednadžba (1.4) ima za rješenje skup

$$B = (-1, \infty).$$

Konačno rješenje. Da bismo dobili konačno rješenje zadatka podsjetimo se da je nejednadžba (1.2) zadovoljena ako i samo ako je x istovremeno rješenje slučaja 1 i 2. Dakle, x mora biti element *presjeka* skupova A i B,

$$A \cap B = ((-\infty, -1) \cup (0, \infty)) \cap (-1, \infty) = (0, \infty).$$

Na kraju se prisjetimo da smo pretpostavili da je $x \neq -1$ pa za tu točku moramo posebno provjeriti da li zadovoljava nejednadžbu (1.1). To očito nije istina pa je skup $(0, \infty)$ jedino rješenje nejednadžbe (1.1).

1.2 Dokazivanje jednakosti matematičkom indukcijom

Dokažite matematičkom indukcijom sljedeću jednakost:

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^k = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}, \quad a \neq 1, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Rješenje. Neka je M skup svih prirodnih brojeva k za koje jednakost (1.5) vrijedi. Želimo dokazati da je $M = \mathbb{N}$.

Jednakost očigledno vrijedi za $k = 1$ pa je time ispunjen uvjet P4 (i) iz definicije 1.13 (baza indukcije).

Sada pretpostavimo da jednakost (1.5) vrijedi za sve $k = 1, 2, \dots, n$. Želimo pokazati da iz toga slijedi da jednakost vrijedi za $k = n + 1$. Imamo

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n + a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} \tag{1.6}$$

jer je po pretpostavci zbroj članova od 1 do a^n dan jednakošću (1.5). Ako zbrojimo članove na desnoj strani jednadžbe (1.6) dobivamo

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n+1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1},$$

što pokazuje da jednakost (1.5) vrijedi za $k = n + 1$. Time je ispunjen korak indukcije. Kako je n proizvoljan broj, iz aksioma P4 definicije 1.13 slijedi da je $M = \mathbb{N}$, odnosno da jednakost (1.5) vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Dokazivanje nejednakosti matematičkom indukcijom

Dokažite matematičkom indukcijom nejednakost

$$(1 + a)^k > 1 + ka, \quad k \geq 2, \quad a > 0. \tag{1.7}$$

Rješenje. Kao u prethodnom zadatku označimo sa M skup svih prirodnih brojeva $k \geq 2$ za koje nejednakost (1.7) vrijedi.

Za $k = 2$ dobivamo

$$(1 + a)2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$$

pa je time ispunjena baza indukcije, odnosno uvjet P4 (i) iz definicije 1.13.

Da bismo dokazali korak indukcije pretpostavimo da nejednakost (1.7) vrijedi za $k = 2, 3, \dots n$. želimo pokazati da iz toga slijedi istinitost nejednakosti (1.7) za $k = n + 1$. Krenimo od lijeve strane nejednakosti:

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n > (1 + a)(1 + na)$$

gdje smo iskoristili pretpostavku da (1.7) vrijedi za $k = n$. Nadalje imamo

$$(1 + a)(1 + na) = 1 + (n + 1)a + na^2 > 1 + (n + 1)a$$

pa zaključujemo da je

$$(1 + a)^{n+1} > 1 + (n + 1)a.$$

Ovo pokazuje da nejednakost (1.7) vrijedi za $k = n + 1$, a kako je n proizvoljan broj iz aksioma P4 definicije 1.13, zaključujemo da je $M = \mathbb{N}$. Dakle, nejednakost (1.7) je istinita za sve $k \in \mathbb{N}$.

1.4 Binomni poučak

U razvoju binoma

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6$$

odredite član koji ne sadrži x.

Rješenje. Prema formuli (P 1.2) vrijedi

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\left(\sqrt{x}\right)^{6-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k.$$

Sređivanjem desne strane jednakosti dobivamo

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\cdot x^{3-\frac{3}{4}k}.$$

U razvoju binoma član koji ne sadrži x bit će oblika $\binom{6}{k}x^0$, za neki $k\in\mathbb{N}$. Dakle, mora vrijediti

$$3-\frac{3}{4}k=0,$$

odakle dobivamo da je $k=4$.

Zaključujemo da traženi član razvoja ima vrijednost

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$$

i peti je po redu član tog razvoja.

1.5 Zbroj koeficijenata u razvoju binoma

Odredite zbroj koeficijenata u razvoju binoma

$$\left(5x^2-4y^3\right)^7.$$

Rješenje. Prema (P 1.2) vrijedi

$$\left(5x^2-4y^3\right)^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\left(5x^2\right)^{7-k}\cdot\left(-4y^3\right)^k$$

Zbroj koeficijenata u razvoju binoma dobit ćemo kada u gornju relaciju uvrstimo $x=1$ i $y=1$. Zbog jednostavnijeg izračunavanja te vrijednosti možemo uvrstiti u lijevu stranu jednakosti pa traženi zbroj iznosi

$$\left(5\cdot 1^2-4\cdot 1^3\right)^7=1^7=1.$$

1.6 Jednakost s kompleksnim brojevima

Kompleksni broj a zadovoljava uvjet

$$|a|+a=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i. \tag{1.8}$$

Riješite jednadžbu

$$a^{10}z^2=|a^3|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3. \tag{1.9}$$

Rješenje. Da bismo odredili kompleksni broj a uvedimo oznake

$$a=x+iy,\qquad x,y\in\mathbb{R},\qquad |a|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u (1.8) dobivamo

$$\sqrt{x^2+y^2}+x+iy=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

Lijeva strana ove jednakosti jednaka je desnoj ako su realni i kompleksni dijelovi jednaki, odnosno

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2}+x&=\frac{3}{2},\\ y&=-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Odredimo sada nepoznanicu x iz gornje jednadžbe:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}&=\frac{3}{2}-x,\\ x^2+\frac{3}{4}&=\frac{9}{4}-3x+x^2,\\ x&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $a=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ pa je $|a|=1$ i $|a^3|=|a|^3=1$. Da bismo riješili jednadžbu (1.9) moramo najprije izračunati a^{10}. To je najlakše izračunati tako da a prikažemo u kompleksnom obliku (vidi poglavlje 1.8.1)

$$a=r\left(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\right),\qquad r=|a|=1,\qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{5\pi}{3}.$$

Koristeći Moivreovu formulu (P 1.4) za potenciranje kompleksnog broja dobivamo

$$\begin{aligned}a^{10}&=r^{10}\left(\cos(10\varphi)+i\sin(10\varphi)\right)\\ &=\cos\left(16\pi+\frac{3\pi}{3}\right)+i\sin\left(16\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\\ &=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenih rezultata u (1.9) dobivamo

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$

Racionalizacijom kompleksnog broja

$$\frac{1+i}{1-i}$$

jednadžba se svodi na

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^2=i^3,$$

odnosno

$$z^2=\frac{-i}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Racionalizacijom nazivnika z^2 možemo pisati kao

$$z^2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},$$

ili u trigonometrijskom obliku

$$z^2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

Primjenom formule (P 1.5) za računanje n-tog korjena kompleksnog broja slijedi

$$z_k = \sqrt{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{2}\right)\right), \qquad k = 1, 2.$$

Jednadžba (1.9) ima dva rješenja dana s

$$z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right),$$
$$z_2 = \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right).$$

1.7 Četvrti korijen kompleksnog broja

Riješite jednadžbu

$$\frac{(3+2i)(1+i)+2i}{(2-i)(1+i)-3} = \frac{7-i}{-4}\cdot z^4.$$

Rješenje. Zadani izraz potrebno je svesti na izraz oblika $z^4 = w$ te tada izračunati četvrte korijene kompleksnog broja w. Sređivanjem lijeve strane jednakosti dobivamo

$$\frac{1+7i}{i} = \frac{z-i}{-4}\cdot z^4.$$

Pomnožimo li sada brojnik i nazivnik lijeve strane s $-i$ dobit ćemo

$$7-i = \frac{7-i}{-4}\cdot z^4,$$

odakle je $z^4 = -4$. Zadatak smo sveli na računanje četvrtih korijena iz $w = -4$. Prema poglavlju 1.8.1 znamo da kompleksni broj w ima argument $\varphi = \pi$ i modul $|w| = 4$ pa ga možemo zapisati u obliku

$$w = z^4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Primjenom formule (P 1.5) za vrijednosti četvrtih korijena kompleksnog broja z dobivamo

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1+i,$$
$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1+i,$$
$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -1-i,$$
$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 1-i.$$

1.8 Nejednakost s kompleksnim brojevima

Odredite i skicirajte skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi

$$\cos\left(\arg\left(-2iz^4\right)\right) \geq 0, \qquad \frac{|z+4|-6}{4-|z-2|} \leq 1. \tag{1.10}$$

Rješenje. Označimo $\arg(z) = \varphi$. Tada prema relaciji (P 1.3) vrijedi

$$\arg\left(-2iz^4\right) = \arg(-2i) + \arg\left(z^4\right) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Nadalje, $\arg(-2i) = \frac{3\pi}{2}$, a iz Moivreove formule za potenciranje kompleksnog broja (P 1.4) slijedi $\arg(z^4) = 4\varphi$. Tada je

$$\arg\left(-2iz^4\right) = \frac{3\pi}{2} + 4\varphi + 2k\pi$$

pa možemo pisati

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 4\varphi + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 4\varphi\right).$$

Također vrijedi

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 4\varphi\right) = \cos\left(2\pi - \frac{3\pi}{2} - 4\varphi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\varphi\right) = \sin(4\varphi).$$

Zbog uvjeta (1.10) argument φ mora zadovoljavati $\sin(4\varphi) \geq 0$ što implicira

$$0 + 2k\pi \leq 4\varphi \leq \pi + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Intervali u kojima se nalazi argument φ određeni su s

$$\begin{aligned} m = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \\ m = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \\ m = 2 \quad &\Longrightarrow \quad \pi \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}, \\ m = 3 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Iz drugog uvjeta zadatka kompleksni broj z mora zadovoljavati

$$\frac{|z+4| - 6}{4 - |z-2|} \leq 1, \quad \text{odnosno} \quad |z+4| + |z-2| - 10 \leq 0. \tag{1.12}$$

Ovaj razlomak je negativan kada su brojnik i nazivnik različitih predznaka. Stoga moramo razmatrati sljedeće slučajeve:

Slučaj 1.

$$|z+4| + |z-2| - 10 \geq 0 \quad \text{i} \quad 4 - |z-2| < 0. \tag{1.13}$$

Prvu nejednakost možemo određuje skup

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+4| + |z-2| \geq 10\}. \tag{1.14}$$

Prisjetimo se da skup točaka

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\}$$

predstavlja elipsu sa fokusima z_1 i z_2 ako je $|z_1 - z_2| < 2a$. Dakle, skup A predstavlja dio ravnine izvan elipse koja ima fokuse u točkama $z_1 = -4$ i $z_2 = 2$, duljinu velike poluosi $a = 5$ i duljinu male poluosi $b = 4$. Zbog znaka jednakosti skup također uključuje i rub elipse.

Druga nejednakost određuje skup

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| > 4\}. \tag{1.15}$$

S obzirom da skup točaka

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$$

određuje kružnicu radijusa r sa središtem u točki z_0, skup B predstavlja dio ravnine izvan kružnice radijusa 4 sa središtem u točki $z_0 = 2$. Zbog striktne nejednakosti kružnica nije uključena u skup B. Rješenje nejednadžbi (1.13) je presjek skupova A i B.

Slučaj 2.

$$|z+4| + |z-2| \leq 0 \quad \text{i} \quad 4 - |z-2| > 0. \tag{1.16}$$

Slično kao u slučaju 1 zaključujemo da prva nejednakost predstavlja dio kompleksne ravnine unutar elipse sa fokusima u točkama $z_1 = -4$, $z_2 = 2$, velikom poluosi duljine $a = 5$ i malom poluosi duljine $b = 4$. Druga nejednakost predstavlja dio ravnine unutar kružnice radijusa 4 sa središtem u točki $z_0 = 2$. Rješenje nejednadžbi (1.16) je presjek gore opisanih skupova.

Konačno rješenje nejednadžbe (1.12) je unija skupova koji predstavljaju rješenja za slučajeve 1 i 2. Nazovimo taj skup C. Kompleksni brojevi koji zadovoljavaju uvjete zadatka iz nejednadžbi (1.10) se moraju nalaziti u skupu C, a njihovi argumenti moraju zadovoljavati nejednakosti (1.12).

1.9 Zadaci za vježbu

1. Riješite nejednadžbu
$$|2x+1| - |x-3| > x+5$$

2. Riješite nejednadžbu
$$\left|\frac{x^2+2x}{x^2-4x+3}\right| < 1.$$

3. Odredite sve točke kompleksne ravnine koje zadovoljavaju uvjete
$$|z-i| < 1,$$
$$|z-1| \leq 1.$$

4. Riješite jednadžbu
$$(2+5i)\cdot z^3 - 2i + 5 = 0$$

5. Riješite jednadžbu
$$8z^4 + \frac{8}{\sqrt{2}}(1-i) = 0.$$

6. Skicirajte u Gauss-ovoj ravnini kompleksne brojeve za koje vrijedi:
$$|z-i| + \mathrm{Re}(z+1) \leq 3,$$
$$|z-1| + \mathrm{Im}(2i-z) \geq 1.$$

7. Matematičkom indukcijom dokažite
$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots (-1)^{n-1}\cdot n^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

8. Primjenjujući matematičku indukciju dokažite
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}.$$

9. Metodom matematičke indukcije dokažite nejednakost
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

10. Odredite x ako je poznato da je treći član u razvoju binoma

$$\left(x + x^{\log x}\right)^5$$

jednak 1000000.

11. Odredite onaj član u razvoju binoma

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^3} + \sqrt[3]{a^2}\right)^{12}$$

koji se nalazi uz potenciju a^{13}.

1.10 Rješenja

1. $x \in \left\langle -\infty, -\frac{9}{2} \right\rangle$.

2. $x \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{2} \right\rangle$.

3. Tražene točke su u presjeku skupova točaka zadanih sljedećim nejednadžbama $x^2 + (y-1)^2 < 1$, $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

4. $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = -i$.

5. $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$.

6. Tražene točke su zadane jednadžbom $x = -\frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} + \frac{3}{4}$.

7. Tvrdnju dokazujemo primjenom principa matematičke indukcije opisanom u naslovu poglavlju 1.4.

8. Tvrdnju dokazujemo primjenom principa matematičke indukcije opisanom u naslovu 1.4.

9. Zadanu nejednakost dokazujemo primjenom principa matematičke indukcije opisanom u naslovu 1.4.

10. $x = 10$.

11. $\binom{12}{6}\frac{1}{2^6}a^{13}$.

2.

LINEARNA ALGEBRA

U nekim zadacima u ovom poglavlju ćemo koristiti elementarne transformacije nad matricama i determinantama. U tu svrhu uvodimo sljedeće oznake $\alpha R_i + R_j \to R_j$ znači da redak i množimo sa α i pribrajamo ga retku j. Slično, $R_i \leftrightarrow R_j$ označava zamjenu redaka i i j. Analogne operacije na stupcima označavamo s $\alpha S_i + S_j \to S_j$ i $S_i \leftrightarrow S_j$.

2.1 Sustav linearnih jednadžbi

Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2\\
x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3\\
x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3.
\end{aligned}$$

Rješenje. Postupkom Gaussove eliminacije (vidi poglavlje 2.4) dobivamo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 2R_1 \to R_3 \\ R_4 - R_1 \to R_4}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - R_2 \to R_1 \\ R_3 + R_2 \to R_3 \\ R_4/2 \to R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - 4R_4 \to R_1 \\ R_2 - R_4 \to R_2 \\ R_3 + 6R_4 \to R_3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 + \frac{5}{7} R_3 \to R_1 \\ R_2 + \frac{2}{7} R_3 \to R_2 \\ R_3/-7 \to R_3 \\ R_4 - \frac{1}{7} R_3 \to R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle, rješenje zadanog sustava glasi

$$x_1 = -2, \qquad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \qquad x_4 = -1.$$

2.2 Sustav linearnih jednadžbi s parametarskim rješenjima

Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5 \\ x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje. Gaussovom metodom eliminacije, prema postupku opisanom u poglavlju 2.4, dobivamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 3R_1 \to R_2 \\ R_3 - 9R_1 \to R_3 \\ R_4 - R_1 \to R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & -12 & -4 \\ 0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2/-2 \to R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - R_2 \to R_1 \\ R_3 + 8R_2 \to R_3 \\ R_4 + 2R_2 \to R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 10 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-1 \cdot R_3 \to R_3 \\ R_4 - R_3 \to R_4}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_3 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz dobivenih rezultata zaključujemo da sustav ima dvoparametarsko rješenje, odnosno beskonačno mnogo rješenja koja ovise o dva parametra. Označimo li te parametre sa α i β tražena rješenja možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\beta - \alpha \\
x_2 &= -1 + 4\beta - 2\alpha \\
x_3 &= -3 + 10\beta - 6\alpha \\
x_4 &= \alpha \\
x_5 &= \beta.
\end{aligned}$$

2.3 Homogeni sustav linearnih jednadžbi

Riješite homogeni sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\
3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\
2x_1 + x_2 \qquad &= 0.
\end{aligned}$$

Rješenje. Proširenu matricu sustava postupkom Gaussove eliminacije (vidi poglavlje 2.4) svodimo na reducirani oblik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2-3R_1\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2\cdot R_3+R_2\to R_3]{\substack{R_1+R_3\to R_1 \\ R_2/-2\to R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sustav ima parametarsko rješenje i uzmemo li da je $x_3 = t$, gdje je t parametar, onda iz reduciranog oblika proširene matrice slijedi da je $x_2 = -2x_3 = -2t$, odnosno $x_1 = x_3 = t$.

2.4 Sustav linearnih jednadžbi ovisan o parametru

Riješite sustav u ovisnosti o parametru λ:

$$\begin{aligned}
\lambda x + y + z &= 1 \\
x + \lambda y + z &= \lambda \\
x + y + \lambda z &= \lambda^2.
\end{aligned}$$

Rješenje. Sustav rješavamo metodom Gaussove eliminacije opisanom u poglavlju 2.4:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\lambda R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)+(1-\lambda^2) & (1-\lambda^3)+(\lambda-\lambda^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{bmatrix}.$$

Zadane jednadžbe smo sveli na gornje trokutasti sustav oblika

$$\begin{aligned} x+y+\lambda z &= \lambda^2 \\ (\lambda-1)y+(1-\lambda)z &= \lambda(1-\lambda) \\ (1-\lambda)(\lambda+2)z &= (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{aligned}$$

Iz posljednje jednadžbe slijedi

$$z = \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)^2}{(1-\lambda)(\lambda+2)}$$

uz uvjet da je $\lambda \neq 1, -2$. Dakle, za $\lambda \neq 1, -2$ sustav ima jedinstveno rješenje

$$x = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \qquad y = \frac{1}{\lambda+2}, \qquad z = \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda+2}.$$

Za $\lambda = 1$ sustav se svodi na jednadžbu $x+y+z=1$ iz koje dobivamo $x = 1-y-z$, odnosno dvoparametarsko rješenje gdje su y i z parametri. Takvo rješenje obično pišemo u obliku

$$x = 1-\alpha-\beta, \qquad y = \alpha, \qquad z = \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Za $\lambda = -2$ imamo sustav

$$\begin{aligned} x+y-2z &= 4 \\ -3y+3z &= -6 \\ 0z &= 3 \end{aligned}$$

koji zbog zadnje jednakosti $3 = 0$ očito nema rješenja.

2.5 Rastav matrice na simetrični i antisimetrični dio

Svaka kvadratna matrica A se može napisati kao zbroj simetrične i anti-simetrične matrice. Pokažite da su te matrice dane sa

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

(vidi poglavlje 2.1.5). Odredite A_1 i A_2 ako je zadano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Rješenje. Pretpostavimo da se matrica može napisati kao zbroj

$$A = A_1 + A_2 \tag{2.2}$$

gdje je

$$\begin{aligned} A_1^T &= A_1 \quad \text{(simetrična matrica)}, \\ A_2^T &= -A_2 \quad \text{(anti-simetrična matrica)}. \end{aligned}$$

Transponiranjem jednadžbe (2.2) dobivamo

$$A^T = A_1^T + A_2^T = A_1 - A_2. \tag{2.3}$$

Zbrajanjem pa zatim oduzimanjem jednadžbi (2.2) i (2.3) dobivamo

$$A + A^T = 2A_1, \qquad A - A^T = 2A_2,$$

iz čega slijedi

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Lako je provjeriti da je A_1 simetrična, a A_2 anti-simetrična matrica:

$$A_1^T = \frac{1}{2}\left(A^T + (A^T)^T\right) = \frac{1}{2}(A^T + A) = A_1,$$

$$A_2^T = \frac{1}{2}\left(A^T - (A^T)^T\right) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -A_2.$$

Za zadanu matricu A u jednadžbi (2.1) imamo

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

pa za njezin rastav na simetrični i antisimetrični dio dobivamo

$$A_1 = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2.6 Množenje matrica

Umnožak dviju matrica A i B općenito nije komutativan. Međutim, ako je $AB = BA$ onda kažemo da matrice A i B komutiraju. Odredite sve matrice koje komutiraju s matricom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Označimo matricu B s

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Potrebno je odrediti sve koeficijente x_i, y_i, z_i za koje vrijedi $AB = BA$. Ovaj uvjet je ekvivalentan sustavu linearnih jednadžbi za elemente matrice B. Za umnožak AB dobivamo

$$AB = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix},$$

dok je

$$BA = \begin{bmatrix} x_1 & -x_1 + y_1 & -y_1 + z_1 \\ x_2 & -x_2 + y_2 & -y_2 + z_2 \\ x_3 & -x_3 + y_3 & -y_3 + z_3 \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem matrica AB i BA slijedi da elementi matrice B moraju zadovoljavati sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= x_1, & y_1 - y_2 &= -x_1 + y_1, & z_1 - z_2 &= -y_1 + z_1, \\ x_2 - x_3 &= x_2, & y_2 - y_3 &= -x_2 + y_2, & z_2 - z_3 &= -y_2 + z_2, \\ x_3 &= x_3, & y_3 &= -x_3 + y_3, & z_3 &= -y_3 + z_3. \end{aligned}$$

Iz ovog sustava se očigledno vidi da je

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, & y_2 &= x_1, & z_2 &= y_1, \\ x_3 &= 0, & y_3 &= x_2, & z_3 &= y_2, \\ & & x_3 &= 0, & y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Zaključujemo da koeficijenti x_i, y_i, z_i zadovoljavaju relacije

$$x_1 = y_2 = z_3, \qquad y_1 = z_2, \qquad x_2 = x_3 = 0.$$

Ako uvedemo oznake $x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$ i $z_1 = \gamma$, onda se matrica B može zapisati u obliku

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

gdje su α, β i γ proizvoljni parametri. Lako se izravnim računom provjeri da svaka ovakva matrica komutira s matricom A.

2.7 Potenciranje matrice

Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da je n-ta potencija matrice A dana sa

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Da bismo odredili n-tu potenciju matrice A potrebno je najprije izračunati nekoliko potencija nižeg reda, npr. za $n = 2, 3, 4$. Iz oblika tih potencija treba prepoznati opći oblik za A^n. Konačno, ispravnost dobivenog oblika treba provjeriti matematičkom indukcijom. Za $n = 2, 3, 4$ imamo

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1+2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1+2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz oblika ovih potencija pogađamo da je

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \sum_{k=1}^{n-1} k \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

gdje smo koristili formulu $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ (primjer 1.3). Ispravnost izraza za A^n ćemo provjeriti matematičkom indukcijom (P4, definicija 1.13). Izraz je očigledno ispravan za $n = 1$ pa je time ispunjena baza indukcije. Pretpostavimo sada da jednadžba (2.4) vrijedi za sve $n \leq m$. Tada za $n = m + 1$ dobivamo

$$A^{m+1} = A^m A = \begin{bmatrix} 1 & m & \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & m+1 & m + \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m+1 & \frac{(m+1)m}{2} \\ 0 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

što pokazuje da jednadžba (2.4) vrijedi za $n = m + 1$. Dakle, po principu matematičke indukcije jednadžba vrijedi za svako $n \in \mathbb{N}$.

2.8 Rang matrice

Odredite rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Rješenje. Prema definiciji 2.4 i teoremu 2.4 zaključujemo da je postupak traženja ranga matrice istovjetan s postupkom Gaussove eliminacije.

Primjenom postupka Gaussove eliminacije na zadanu matricu, dobivamo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1\to R_2 \\ R_3-3R_1\to R_3 \\ R_4+2R_1\to R_4 \\ R_5-4R_1\to R_5}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \overset{R_2/3\to R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3-4R_2\to R_3 \\ R_4+R_2\to R_4 \\ R_5+2R_2\to R_5}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_4-5R_3\to R_4 \\ R_5+3R_3\to R_5}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $r(A) = 3$.

2.9 Rang matrice ovisan o parametru

U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Da bismo odredili rang(A) matricu A ćemo svesti na gornje trokutasti oblik jer se iz takvog oblika matrice najlakše vidi broj nezavisnih redaka ili stupaca. Primjenjujemo sljedeće elementarne transformacije:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix} \overset{-R_1+R_2\to R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix} \overset{-R_1+R_3\to R_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & (\lambda-1)(\lambda+1) \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda+1) & \lambda-1 \end{bmatrix}.$$

Drugi i treći redak u gornjoj matrici smijemo podijeliti sa $\lambda - 1$ samo uz pretpostavku da je $\lambda \neq 1$. Tada dobivamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \end{bmatrix} \overset{-(\lambda+1)R_2+R_3\to R_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+2) \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Iz ovog oblika matrice se lako vidi da za $\lambda = 0$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iz čega zaključujemo da je rang$(A) = 2$. Slično, za $\lambda = -2$ imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je opet rang$(A) = 2$. Također moramo provjeriti i rang za $\lambda = 1$ jer smo do gornje-trokutastog oblika matrice (2.5) došli uz pretpostavku $\lambda \neq 1$. Očigledno, u ovom slučaju imamo matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pa je rang$(A) = 1$. Za sve ostale vrijednosti λ matrica (2.5) ima tri nezavisna retka pa je rang$(A) = 3$.

2.10 Matrična jednadžba

Riješite matričnu jednadžbu $AX = B$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Prema poglavlju 2.1.3 znamo da matrica X mora biti reda $(2,3)$ pa je tada možemo pisat u obliku

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Uvrštavanjem zadanih matrica u jednadžbu $AX = B$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nakon množenja matrica slijedi

$$\begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2a-3d & 2b-3e & 2c-3f \\ a-d & b-e & c-f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Izjednačavanjem odgovarajućih elemenata u matricama imamo

$$\begin{aligned} 2a &= 2, & 2b &= 0, & 2c &= 6, \\ 2a-3d &= -1, & 2b-3e &= -6, & 2c-3f &= 0, \\ a-d &= 0, & b-e &= -2, & c-f &= 1. \end{aligned}$$

Dakle,

$$a=1, \quad b=0, \quad c=3, \quad d=1, \quad e=2, \quad f=2$$

pa tražena matrica X ima oblik

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.11 Rješavanje matrične jednadžbe invertiranjem

Riješite matričnu jednadžbu

$$B(AX-I)^{-1} = I$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -9 \\ -5 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Da bismo odredili nepoznatu matricu X pomnožimo zadanu jednadžbu slijeva s B^{-1}. Tada dobivamo

$$B^{-1}B(AX-I)^{-1}C = B^{-1}I,$$

odnosno

$$(AX-I)^{-1}C = B^{-1}.$$

Pomnožimo sada dobivenu jednakost zdesna s C^{-1},

$$(AX-I)^{-1}CC^{-1} = B^{-1}C^{-1}.$$

Iz ovoga slijedi

$$(AX-I)^{-1} = (CB)^{-1},$$

gdje smo koristili svojstvo $B^{-1}C^{-1} = (CB)^{-1}$ (vidi poglavlje 2.8). Posljednja jednadžba ekvivalentna je s

$$AX - I = CB, \quad \text{odnosno} \quad AX = CB + I.$$

Izračunajmo sada vrijednost izraza $CB+I$.

$$CB+I=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&-3\\0&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&-2&-9\\-5&2&5\\4&-1&-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&2&1\\3&1&-1\\2&1&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&2&-1\\2&1&-1\end{bmatrix}.$$

Budući da je A matrica tipa 3×2 i matrica $CB+I$ tipa 3×3 zaključujemo da tražena matrica X mora biti tipa 2×3 pa je možemo pisati u obliku

$$X=\begin{bmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{bmatrix}.$$

Sada jednadžba $AX=CB+I$ poprima oblik

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&2&-1\\2&1&-1\end{bmatrix}.$$

Množeći matrice na lijevoj strani jednadžbe dolazimo do sljedećih sustava jednakosti:

$$\begin{aligned}x_1+2x_2&=1,\\3x_1+2x_2&=3,\\2x_1+x_2&=2,\end{aligned}\qquad\begin{aligned}y_1+2y_2&=2,\\3y_1+2y_2&=2,\\2y_1+y_2,&=1,\end{aligned}\qquad\begin{aligned}z_1+2z_2&=1,\\3z_1+2z_2&=-1,\\2z_1+z_2&=-1.\end{aligned}$$

Do traženih rješenja doći ćemo primjenjujući Gaussovu metodu eliminacije nad proširenom matricom sustava A_p na sljedeći način:

$$A_p=\begin{bmatrix}1&2&1&2&1\\3&2&3&2&-1\\2&1&2&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[-2R_1+R_3\to R_3]{-3R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&2&1&2&1\\0&-4&0&-4&-4\\0&-3&0&-3&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2}\begin{bmatrix}1&2&1&2&1\\0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-2R_2+R_1}\begin{bmatrix}1&0&1&0&-1\\0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Odavde dobivamo sljedeće sustave nejednakosti:

$$\begin{aligned}x_1+0x_2&=1,\\0x_1+x_2&=0,\end{aligned}\qquad\begin{aligned}y_1+0y_2&=0,\\0y_1+y_2&=1,\end{aligned}\qquad\begin{aligned}z_1+0z_2&=-1,\\0z_1+z_2&=1.\end{aligned}$$

Slijedi da nepoznanice imaju vrijednosti

$$x_1=1,\quad x_2=0,\quad y_1=0,\quad y_2=1,\quad z_1=-1,\quad z_2=1$$

pa matricu X možemo pisati u obliku

$$X=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

2.12 Laplaceov razvoj determinante

Pomoću Laplaceovog razvoja izračunajte determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Kod računanja determinante korisno je prethodno transformirati determinantu u oblik kojim se pojednostavnjuje njeno računanje. To se obično radi tako da se elementarnim transformacijama (vidi poglavlje 2.9.1) nastoji u određenom retku ili stupcu dobiti što više nula. Dakle,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(-S_1+S_2\to S_2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b-a & c \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(-S_1+S_3\to S_3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\begin{vmatrix} 1 & c-a \\ b+a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b).$$

Lako se uvjeriti da je ovaj postupak računanja determinante lakši od direktne primjene Laplaceovog razvoja na determinantu D.

2.13 Računanje determinante svođenjem na trokutasti oblik

Svođenjem matrice na gornje trokutasti oblik izračunajte determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Vrlo često determinante se računaju tako da se matrica elementarnim transformacijama svede na trokutasti oblik jer je determinanta takve matrice jednaka umnošku elemenata na dijagonali.

Elementarne transformacije označavamo kao u prethodnom zadatku.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 4 & -1\end{vmatrix} \overset{(R_3+R_4\leftrightarrow R_4)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

$$\overset{(-2R_1+R_2\to R_2)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 4\end{vmatrix} \overset{(R_1+R_3\to R_3)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

$$\overset{(2R_2+R_3\to R_3)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & -1 & 2 & 4\end{vmatrix} \overset{(-R_2+R_4\to R_4)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 3 & 6\end{vmatrix}$$

$$= -2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix} \overset{(-R_3+R_4\to R_4)}{=} -2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$$

$$= -2\cdot 3{\cdot}1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 4 = 24.$$

2.14 Laplaceov razvoj determinante n-tog reda

Izračunajte determinantu reda n:

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha & \beta & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta\\ \beta & 0 & \dots & 0 & \alpha\end{vmatrix}.$$

Rješenje. Uočimo da se na glavnoj dijagonali nalaze elementi α te da se elementi β nalaze na dijagonali iznad glavne i na mjestu $(n,1)$. Na ovu determinantu je stoga prikladno primijeniti Laplaceov razvoj po prvom stupcu jer ćemo time dobiti dvije trokutaste determinante reda $n-1$:

$$D=(-1)^{1+1}\alpha\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha & \beta & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha\end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\beta\begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0\\ \alpha & \beta & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha & \beta & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta\end{vmatrix}$$

$$= \alpha\alpha^{n-1} + (-1)^{n+1}\beta\beta^{n-1} = \alpha^n + (-1)^{n+1}\beta^n.$$

Pri tome smo koristili svojstvo da je determinanta trokutaste matrice jednaka umnošku elemenata na dijagonali.

2.15 Računanje determinante n-tog reda svođenjem na trokutasti oblik

Izračunajte determinantu n-tog reda

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & -1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Za razliku od prethodnog primjera u ovoj determinanti ne postoje stupci ili retci koji imaju puno nula. Međutim, zbog simetrije elemenata koji se javljaju u njoj ovu determinantu prikladno je izračunati svođenjem na trokutasti oblik. Primijetimo da kada bi se u prvom retku nalazile samo jedinice, trokutasti oblik bi se lako dobio množenjem prvog retka sa -2 i pribrajanjem ostalim retcima. S obzirom da je suma elemenata u svakom stupcu jednaka $-1 + (n-1)2 = 2n-3$, prvom retku pribrojimo sumu preostalih $n-1$ redaka. Time dobivamo

$$D = \begin{vmatrix} 2n-3 & 2n-3 & 2n-3 & \dots & 2n-3 \\ 2 & -1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & -1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (2n-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & -1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & -1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(-2R_1+R_2\to R_2)}{=} (2n-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & -1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(-2R_1+R_3\to R_3)}{=} (2n-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -3 & 0 & \dots 0 & \\ 0 & 0 & -3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\overset{(-2R_1+R_n\to R_n)}{=} (2n-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -3 \end{vmatrix} = (-3)^{n-1}(2n-3).$$

2.16 Zadaci za vježbu

1. Za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

izračunajte AB, BA, $A^2 + AB - 2B$.

2. Izračunajte treću potenciju matrice n-tog reda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Uputa: Izračunajte najprije za $n = 2$ i $n = 3$.

3. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

4. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 &= -1 \end{aligned}$$

5. Riješite homogeni sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

6. Odredite rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

7. Odredite matricu X za koju vrijedi $3A - 2X = B$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Izračunajte determinante matrica:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -15 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$,

(c) $C = \begin{bmatrix} 0 & c & -b & x \\ -c & 0 & a & y \\ b & -a & 0 & z \\ -x & -y & -z & 0 \end{bmatrix}$.

9. Izračunajte determinante $n-tog$ reda:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$.

2.17 Rješenja

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ 0 & 1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & s_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, gdje je $s_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ i $x_4 = -1$.

4. $X = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

5. $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. $r(A) = 3$.

7. $X = \begin{bmatrix} 4 & \frac{11}{2} \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$.

8. (a) 0,
   (b) 320,
   (c) $(ax + by + cz)^2$.

9. (a) 1,
   (b) $(-1)^{n-1}\, n!$.

3.

VEKTORSKA ALGEBRA I ANALITIČKA GEOMETRIJA

3.1 Skalarni produkt

Zadani su vektori $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ i $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ gdje je $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ a kut između $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ je $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Odredi koeficijent λ tako da vektori $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ budu međusobno okomiti.

Rješenje. Zbog uvjeta okomitosti vektora $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ imamo $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$ (definicija 3.4). Skalarni produkt $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ dan je s

$$\begin{aligned}\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &= (\lambda\mathbf{a} + 17\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= 3\lambda\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + (51 - \lambda)\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 17\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Prema definiciji 3.4 za skalarni produkt dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos(0) = 4, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\varphi) = -5, \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} &= |\mathbf{b}||\mathbf{b}|\cos(0) = 25.\end{aligned}$$

Dakle, za $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ imamo

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 3\lambda 4 + (51 - \lambda)(-5) - 17 \cdot 25 = 17\lambda - 680.$$

S obzirom da je $\cdot\mathbf{q} = 0$ slijedi da je $17\lambda - 680 = 0$, odnosno $\lambda = 40$.

3.2 Vektorski produkt

Dani su vektori $\mathbf{a} = (0, 2\lambda, \lambda)$, $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$ i $\mathbf{c} = (-1, -2, -1)$.

(a) Odredite vektor $\mathbf{d}$ koji zadovoljava uvjete $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ i $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}$.

(b) Pokažite da su vektori $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ i $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ kolinearni.

(c) Odredite parametar λ tako da je $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \lambda$.

Rješenje. (a) Označimo komponente vektora $\mathbf{d}$ s $\mathbf{d} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$. Po teoremu 3.3 za vektorski produkt vrijedi

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2\lambda\mathbf{j} - 4\lambda\mathbf{k},$$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = (x_2 - 2x_3)\mathbf{i} + (x_3 - x_1)\mathbf{j} + (2x_1 - x_2)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = -\lambda\mathbf{j} + 2\lambda\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = (2x_3 - x_2)\mathbf{i} + (x_1 - 2x_3)\mathbf{j} + (2x_2 - 2x_1)\mathbf{k}.$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u uvjet (a) zadatka dobivamo

$$\begin{aligned} (x_2 - 2x_3)\mathbf{i} + (x_3 - x_1)\mathbf{j} + (2x_1 - x_2)\mathbf{k} &= 2\lambda\mathbf{j} - 4\lambda\mathbf{k}, \\ (2x_3 - x_2)\mathbf{i} + (x_1 - 2x_3)\mathbf{j} + (2x_2 - 2x_1)\mathbf{k} &= -\lambda\mathbf{j} + 2\lambda\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Vektori u gornjim jednakostima su isti samo ako su im odgovarajuće komponente iste pa izjednačavanjem komponenata dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 0x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 0x_2 + x_3 &= 2\lambda \\ 2x_1 - x_2 + 0x_3 &= -4\lambda \\ 0x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 0x_2 - 2x_3 &= -\lambda \\ -2x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 2\lambda. \end{aligned}$$

Ovaj sustav ćemo rješiti svođenjem matrice sustava na gornje trokutasti oblik.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2\lambda \\ 2 & -1 & 0 & -4\lambda \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -\lambda \\ -2 & 2 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R_6 \to R_6 \\ R_1 \leftrightarrow R_5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -\lambda \\ -1 & 0 & 1 & 2\lambda \\ 2 & -1 & 0 & -4\lambda \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1+R_2 \to R_2 \\ -2R_1+R_3 \to R_3 \\ R_1+R_6 \to R_6}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -\lambda \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & -1 & 4 & -2\lambda \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -\lambda \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2\lambda \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2+R_3 \to R_3 \\ R_2+R_4 \to R_4 \\ R_2+R_6 \to R_6}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2R_5+R_3 \to R_3 \\ \frac{1}{2}R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -\lambda \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2R_3+R_1 \to R_1 \\ 2R_3+R_2 \to R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, vektor $\mathbf{d}$ dan je s $\mathbf{d} = -\lambda(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

(b) Da bismo pokazali kolinearnost vektora $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ i $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ koristimo činjenicu da su dva vektora kolinearna ako i samo ako je njihov vektorski produkt nula. Vrijedi

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} - \mathbf{d} \times \mathbf{b} + \mathbf{d} \times \mathbf{c}.$$

S obzirom da je vektorski produkt anti-komutativan, imamo $\mathbf{d} \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ i $\mathbf{d} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{d}$. Stoga je

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{c} \times \mathbf{d} - \mathbf{a} \times \mathbf{d} - \mathbf{b} \times \mathbf{d}.$$

Budući da je prema uvjetu (a) zadatka $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ i $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}$, slijedi $(\mathbf{a} - \mathbf{d}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$. Dakle, vektori $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ i $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ su kolinearni.

(c) Da bismo odredili parametar λ iz uvjeta $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \lambda$ najprije ćemo odrediti vrijednost izraza $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (2\lambda\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k} - 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ &= 2 - 4\lambda + 4 - \lambda + 1 = -5\lambda + 7. \end{aligned}$$

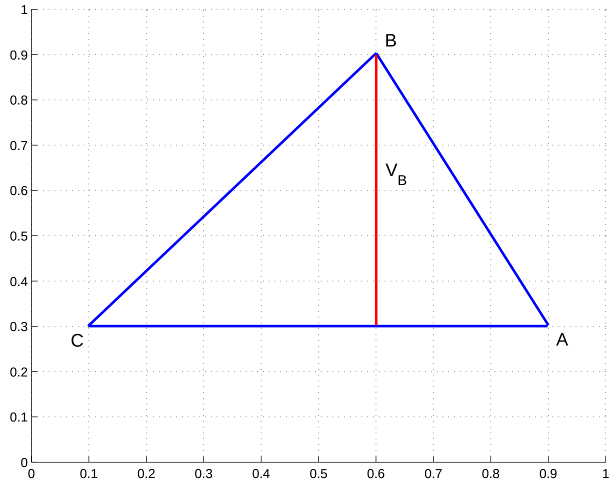
S druge strane, vrijednost izraza $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \lambda$ dana je s

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \lambda = (2\lambda\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k})(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) + \lambda = -4\lambda.$$

Dakle, λ more ispunjavati uvjet $-5\lambda + 7 = -4\lambda$, odnosno $\lambda = 7$.

3.3 Visina trokuta

Odredite visinu v_B spuštenu iz vrha B u trokutu ABC s vrhovima $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$, $C(6, 2, 0)$ (vidi sliku 3.1).



Slika 3.1: Visina trokuta spuštena iz vrha B

Rješenje. Prema poglavlju 3.5.3 vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = (0-1)\mathbf{i} + (0+2)\mathbf{j} + (4-8)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k},$$
$$\overrightarrow{AC} = (6-1)\mathbf{i} + (2+2)\mathbf{j} + (0-8)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.$$

Traženu visinu dobit ćemo pomoću formule $P = \frac{b \cdot v_B}{2}$ pa u tu svrhu računamo površinu zadanog trokuta koristeći svojstvo V6 definicije 3.5

$$P = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\,|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|-28\mathbf{j} - 14\mathbf{k}| = 7\,|2\mathbf{j} + \mathbf{k}| = 7\sqrt{5}.$$

Sada je

$$v_B = \frac{2P}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{2 \cdot 7\sqrt{5}}{\sqrt{5^2 + 4^2 + 8^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{21}.$$

3.4 Volumen paralelopipeda

Izračunajte volumen paralelopipeda razapetog vektorima

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Rješenje. Prema formuli iz teorema 3.4 vrijedi

$$V = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+6) + 3(2+3) + 1(4-1) = 7 + 15 + 3 = 25.$$

3.5 Visina paralelopipeda

Izračunajte visinu paralelopipeda razapetog vektorima

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

ako je za osnovicu uzet paralelogram razapet vektorima **a** i **b**.

Rješenje. Za volumen paralelopipeda razapetog vektorima **a**, **b** i **c** vrijedi

$$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \tag{3.1}$$

S druge strane, znamo da je $V = Bv$ gdje je B površina osnovice paralelopipeda a v njegova visina. Budući da osnovicu paralelopipeda čini paralelogram razapet vektorima **a** i **b**, slijedi da je $B = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Tada je

$$V = Bv = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|v. \tag{3.2}$$

Iz jednadžbi (3.1) and (3.2) slijedi

$$v = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}. \tag{3.3}$$

Prema teoremu 3.4 vrijedi

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 49.$$

Prema teoremu 3.3 imamo

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k},$$

pa slijedi da je

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + (-17)^2 + (-5)^2} = \sqrt{323}.$$

Uvrštavanjem dobivenih rezultata u (3.3) dobivamo $v = \frac{49}{\sqrt{323}}$.

3.6 Volumen tetraedra

Odredite α tako da volumen tetraedra razapetog vektorima **a**, **b** i $\alpha\mathbf{c}$ iznosi $2/3$, gdje je

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

Rješenje. Prema primjeru 3.8 vrijedi

$$V = \frac{1}{6}|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \alpha\mathbf{c}|. \tag{3.4}$$

Raspisivanjem desne strane jednakosti i koristeći formulu iz teorema 3.4 dobivamo

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \alpha\mathbf{c} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & -\frac{\alpha}{3} \end{vmatrix} = 1\left(-\frac{\alpha}{3} - 0\right) - 1\left(\frac{-2\alpha}{3} + \alpha\right) - 2\,(0 - \alpha) = \\ &= -\frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} + 2\alpha = \frac{4}{3}\alpha.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (3.4) imamo

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{6}\left|\frac{4\alpha}{3}\right|,$$

odnosno,

$$|\alpha| = 3.$$

Tražena rješenja su $\alpha_1 = 3$ i $\alpha_2 = -3$.

3.7 Sjecište simetrale kuta i simetrale stranice

Zadan je trokut s vrhovima $A(2,3,2)$, $B(0,1,1)$ i $C(4,4,0)$. Odredite koordinate sjecišta S simetrale unutarnjeg kuta pri vrhu A i simetrale stranice AB.

Rješenje. Točku S ćemo dobiti kao sjecište ravnine R koja je okomita na $\overrightarrow{AB}$ i prolazi kroz polovište P stranice AB i pravca p kroz A s vektorom smjera $\mathbf{s} = \overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0}$, gdje je

$$\overrightarrow{AB_0} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \qquad \overrightarrow{AC_0} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}.$$

Prema primjeru 3.2 vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = \{-2,-2,-1\}, \qquad \overrightarrow{AC} = \{2,1,-2\}.$$

Prema poglavlju 3.6 vrijedi

$$\overrightarrow{AB_0} = \left\{-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right\}, \qquad \overrightarrow{AC_0} = \left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right\}.$$

Polovište P dužine AB ima koordinate

$$P = \left(\frac{2+0}{2},\frac{3+1}{2},\frac{2+1}{2}\right) = \left(1,2,\frac{3}{2}\right).$$

Jednadžbu ravnine R dobivamo korištenjem formule (P 3.12),

$$R \equiv -2\cdot(x-1) - 2\cdot(y-2) - 1\cdot\left(z-\frac{3}{2}\right) = 0,$$

odnosno

$$R \equiv -2x - 2y - z + \frac{15}{2} = 0.$$

Nadalje, vrijedi

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0} = 0\cdot\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

pa prema formuli (P 3.7) jednadžba pravca p u kanonskom obliku glasi

$$p \equiv \frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{-3}.$$

Pomoću jednadžbe pravca p i jednadžbe ravnine R računamo koordinate traženog sjecišta:

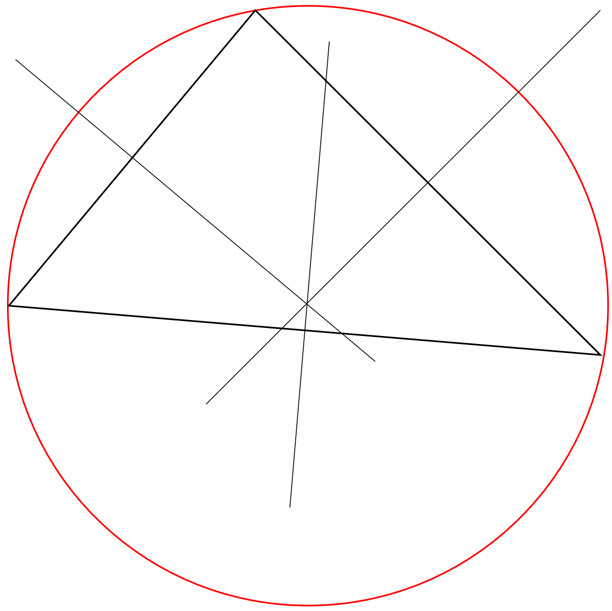
$$p \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -t+3 \\ z = -3t+2. \end{cases}$$

$$-2\cdot 2 - 2\cdot(-t+3) - (-3t+2) + \frac{15}{2} = 0$$

$$t = \frac{9}{10}.$$

Dakle,

$$S = \left(2,\frac{21}{10},-\frac{7}{10}\right).$$



Slika 3.2: Središte trokutu opisane kružnice

3.8 Središte trokutu opisane kružnice

Dokažite vektorskim računom da se u trokutu simetrale stranica sijeku u jednoj točki (vidi sliku 3.2).

Rješenje. Neka su D, E, i F polovišta stranica AB, BC, i CA trokuta ABC. Neka je točka T takva da je

$$\overrightarrow{TD} \perp \overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{TE} \perp \overrightarrow{BC},$$

odnosno

$$\overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \qquad \overrightarrow{TE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TF} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{TF}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{TF} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TF} \cdot \overrightarrow{BC} = \\
&= (\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{TE} + \overrightarrow{EF}) \cdot \overrightarrow{BC} = \\
&= \overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TE} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \\
&= 0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0,
\end{aligned}$$

pa je $\overrightarrow{TF} \perp \overrightarrow{AC}$.

3.9 Udaljenost točke od pravca

Odredite najkraću udaljenost točke $T = (2, 1, 3)$ od pravca

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Rješenje. Najprije ćemo odrediti jednadžbu ravnine koja prolazi točkom T i okomita je na zadani pravac. Jednadžba ravnine kroz zadanu točku ima oblik

$$A(x-2)+B(y-1)+C(z-3)=0$$

gdje su A, B i C komponente vektora normale na ravninu. Kako je zadani pravac okomit na ravninu, vektor smjera pravca je ujedno i normala na ravninu iz čega slijedi da je $A=1$, $B=2$ i $C=3$. Dakle, ravnine je zadana jednadžbom

$$x+2y+3z-13=0.$$

Odredimo sada sjecište zadanog pravca i ravnine. Parametarska jednadžba pravca glasi

$$x=t+1, \quad y=2t+1, \quad z=3t+1, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u jednadžbu ravnine dobivamo $t=\frac{1}{2}$, pa je točka presjeka S dana s

$$x=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}, \quad y=2\,\frac{1}{2}+1=2, \quad z=3\,\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}.$$

Najmanja udaljenost točke T od pravca iznosi

$$d(T,S)=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+(1-2)^2+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

3.10 Tri pravca u prostoru

Zadane su točke

$$A=(1,2,2), \qquad B=(3,1,2), \qquad C=(-1,5,2), \qquad D=(2,-1,0).$$

Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T=(1,2,3)$ i okomit je na pravce određene vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$.

Rješenje. Neka je $\mathbf{r}_A=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ radijus vektor točke A te slično označimo radijus vektore točaka B, C i D. Tada je

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A=2\mathbf{i}-\mathbf{j}, \qquad \overrightarrow{CD}=\mathbf{r}_D-\mathbf{r}_C=3\mathbf{i}-6\mathbf{j}-2\mathbf{k}.$$

Tražimo pravac čiji je vektor smjera okomit na vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$. Dakle, za vektor smjera pravca možemo uzeti

$$\mathbf{s}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & -6 & -2\end{vmatrix}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-9\mathbf{k}.$$

S obzirom da točka $T=(1,2,3)$ leži na pravcu, jednadžba traženog pravca je

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-9}.$$

3.11 Mimosmjernost pravaca u prostoru

Zadani su pravci p_1 koji prolazi kroz točke $A=(1,0,-1)$ i $B=(-1,1,0)$ i p_2 koji prolazi kroz točke $C=(3,1,-1)$ i $D=(4,5,-2)$. Dokažite da su ti pravci mimosmjerni i odredite najmanju udaljenost između njih.

Rješenje. Pravci p_1 i p_2 imaju vektore smjera

$$\mathbf{s}_1 = \overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{k},$$
$$\mathbf{s}_2 = \overrightarrow{CD} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

Zadani pravci nisu paralelni jer je

$$\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = -5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 9\mathbf{k} \neq 0.$$

Pokažimo da se pravci i ne sijeku pa će tada biti mimosmjerni. Uvedimo vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{CB} = -4\mathbf{i} = \mathbf{k}$ koji spaja točku C na pravcu p_2 s točkom B na pravcu p_1. Mješoviti produkt

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 11$$

je različit od nule pa zaključujemo da vektori $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ i $\mathbf{v}$ nisu komplanarni. Iz ovoga slijedi da se pravci p_1 i p_2 ne sijeku.

Najkraća udaljenost između dva mimosmjerna pravca određuje se po formuli

$$d = \frac{|\mathbf{v} \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)|}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|}.$$

Kako je $|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2| = |-5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 9\mathbf{k}| = \sqrt{107}$, imamo

$$d = \frac{11}{\sqrt{107}}.$$

3.12 Sjecište pravca i ravnine

Zadan je pravac p kao presjek ravnina $x - 2z - 3 = 0$ i $y - 2z = 0$. Odredite sjecište pravca p i ravnine $x + 3y - z + 4 = 0$.

Rješenje. Najprije odredimo parametarsku jednadžbu pravca p. Ravnine kojima je zadan pravac imaju normale $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ i $\mathbf{n}_2 = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. S obzirom da je pravac p okomit na obe normale, za vektor smjera pravca možemo uzeti

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Potrebno je jos pronači točku koja leži na pravcu. Ako uzmemo da je $z = 0$ u jednadžbama kojima je zadan pravac, tada dobivamo $x = 3$ i $y = 0$ pa tražena točka ima koordinate $(3, 0, 0)$. Iz ovoga te iz vektora smjera pravca slijedi da je parametarska jednadžba pravca dana s

$$x = 2t + 3, \qquad y = 2t, \qquad z = t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanje ovih izraza u jednadžbu ravnine $x + 3y - z + 4 = 0$ daje $t = -1$. Iz ovoga slijedi da točka presjeka pravca p i zadane ravnine ima komponente

$$x = 2(-1) + 3 = 1, \qquad y = 2(-1) = -2, \qquad z = -1.$$

3.13 Okomitost dviju ravnina

Odredi jednadžbu ravnine π koja prolazi točkama $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$ i okomita je na ravninu $\pi_1 : \; 4x - y + 2z - 7 = 0$.

Rješenje. Neka je $P = (x, y, z)$ proizvoljna točka u ravnini π. Tada vektori

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k},\\ \overrightarrow{AP} &= (x-1)\mathbf{i} + (y-2)\mathbf{j} + (z-3)\mathbf{k}\end{aligned}$$

leže u ravnini π. Kako je ravnina π_1 okomita na ravninu π, vektor normale $\mathbf{n}_1 = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ također leži u ravnini π pa su vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$ i $\mathbf{n}_1$ komplanarni. Stoga njihov mješoviti produkt iščezava, odnosno

$$\overrightarrow{AP} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n}_1\right) = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Iz gornje jednakosti slijedi da je ravnina π dana s

$$x + 6y + z - 16 = 0.$$

3.14 Pravac paralelan s ravninom

Odredite jednadžbu ravnine π koja prolazi točkama $A = (1, 0, -1)$ i $B = (-1, 2, 1)$, a paralelna je s pravcem koji je presjek ravnina $3x + y - 2z - 6 = 0$ i $4x - y + 3z = 0$.

Rješenje. Vektori normala zadanih ravnina dani su s $\mathbf{n}_1 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ i $\mathbf{n}_2 = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Primijetimo da pravac u kojem se sijeku zadane ravnine ima vektor smjera

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

Kako su vektori $\mathbf{s}$ i $\overrightarrow{AB}$ paralelni s ravninom π, vektor

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{s} = 20\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 32\mathbf{k}$$

je okomit na tu ravninu. Sada je ravnina π potpuno određena vektorom normale $\mathbf{n}$ i točkom $A = (1, 0, -1)$ koja leži u njoj pa za jednadžbu ravnine dobivamo

$$20(x-1) - 12(y-0) + 32(z+1) = 0,$$

odnosno

$$5x - 3y + 8z + 3 = 0.$$

3.15 Zadaci za vježbu

1. Zadani su vrhovi $A(1, -2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ i $C(6, 4, 4)$ paralelograma $ABCD$. Odredite koordinate vrha D.

2. Neka su $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut od $45°$. Odredite površinu paralelograma s dijagonalama $\mathbf{e} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$, $\mathbf{f} = 4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$.

3. Odredite broj λ tako da vektori $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ i $\lambda\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ budu okomiti.

4. Nađite kut α između vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ ako je poznato da je $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ okomito na $(7\mathbf{a}-5\mathbf{b})$ i da je $(\mathbf{a}-4\mathbf{b})$ okomito na $(7\mathbf{a}-2\mathbf{b})$.

5. Odredite duljinu visine v_A spuštene iz vrha A u trokutu ABC ako su vrhovi trokuta $A(1,0,-1)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,2,1)$.

6. Odredite volumen paralelopipeda ako su mu bridovi zadani vektorima $\mathbf{a}=[1,0,3]$, $\mathbf{b}=[-1,1,0]$ i $\mathbf{c}=[2,1,1]$.

7. Odredite broj t tako da vektori $\mathbf{a}=[3,2,t]$, $\mathbf{b}=[-1,0,0]$, $\mathbf{c}=[4,1,0]$ ne čine bazu vektorskog prostora.

8. Vrhovi trokuta su $A(1,1,1)$, $B(3,0,3)$, $C(-2,1,1)$. Odredite jednadžbu simetrale kuta BAC.

9. Nađite jednadžbu ravnine koja sadrži točku $T(1,-3,2)$, a paralelna je s ravninom $7x-4y+z-4=0$.

10. Nađite jednadžbu ravnine koja sadrži točku $P(1,-1,2)$ i pravac zadan jednadžbama $3x+y-z+5=0$, $x-y+2z-1=0$.

11. Na pravcu
$$p \equiv \frac{x+4}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-10}{-1}$$
odredite točku A koja je najbliža pravcu
$$q \equiv \frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+3}{2}.$$

3.16 Rješenja

1. $D(4,0,6)$.
2. $P=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
3. $\lambda=6$.
4. $\cos\alpha=0.53$.
5. $v_A=\frac{\sqrt{34}}{2}$.
6. $V=8$.
7. $t=0$.
8. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$.
9. $7x-4y+z-11=0$.
10. $2x+2y-3z+6=0$.
11. $A(4,-10,2)$.

4.

FUNKCIJE REALNE VARIJABLE

4.1 Područje definicije funkcije

Odredite područja definicije funkcija:

(a) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} + e^{\frac{1}{x}}$,

(b) $f(x) = \sqrt{16 - x^2} + \log \sin (x-3)$,

(c) $f(x) = \ln \arcsin \frac{x+2}{5-x}$,

(d) $f(x) = \operatorname{arch} \left(\log \frac{80x-170}{3-2x-5x^2} \right) + \sqrt{\log \frac{3-2x-5x^2}{8x-17}}$.

Rješenje. (a) Prema poglavljima 4.6.2 i 4.6.3 , funkcija f je definirana za sve x za koje su ispunjeni uvjeti

$$x+1 \geq 0, \quad 3-x \geq 0 \quad \text{i} \quad x \neq 0.$$

Iz navedenih nejednadžbi slijedi

$$x \geq 0, \quad x \leq 3 \quad \text{i} \quad x \neq 0.$$

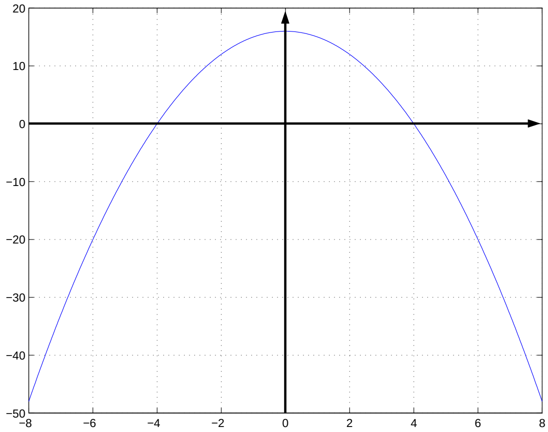
Dakle,

$$\mathcal{D}(f) = [-1, 0\rangle \cup \langle 0, 3] \,.$$

(b) Zadanu funkciju zapišimo u obliku $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, gdje je $f_1(x) = \sqrt{16 - x^2}$ i $f_2(x) = \log \sin{(x-3)}$. Prema poglavlju 4.6.2 funkcija f_1 definirana je za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$16 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (4-x)(4+x) \geq 0.$$

Iz grafa parabole $y = 16 - x^2$ (slika 4.1) zaključujemo da je



Slika 4.1: Parabola $y = 16 - x^2$

$$\mathcal{D}(f_1) = [-4, 4] \,.$$

Prema poglavlju 4.6.4 za funkciju f_2 vrijedi

$$\sin{(x-3)} > 0,$$

odnosno, prema poglavlju 4.6.5,

$$0 + 2k\pi < x - 3 < \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dakle,

$$\mathcal{D}(f_2) = \{x \in \langle 3 + 2k\pi, 3 + \pi + 2k\pi\rangle \quad : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Područje definicije funkcije f je presjek područja definicije funkcija f_1 i f_2. Budući da traženi presjek postoji samo kada u $\mathcal{D}(f_2)$ uvrstimo $k_1 = -1$ i $k_2 = 0$ dobivamo

$$\mathcal{D}(f) = \langle 3 - 2\pi, 3 - \pi\rangle \cup \langle 3, 4] \,.$$

(c) Prema poglavlju 4.6.4 zaključujemo da mora biti ispunjeno

$$\arcsin \frac{x+2}{5-x} > 0.$$

Iz svojstava funkcije arcsin (vidi poglavlje 4.6.6) slijedi

$$0 < \frac{x+2}{5-x} \leq 1.$$

Rješenje lijeve strane nejednakosti glasi

$$x \in \langle -2, 5 \rangle .$$

Raspisivanjem desne strane nejednakosti dobivamo

$$\frac{x+2}{5-x} - 1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x-3}{5-x} \leq 0,$$

odakle je

$$x \in \left\langle -\infty, \frac{3}{2} \right] \cup \langle 5, +\infty \rangle ,$$

jer mora vrijediti $5 - x \neq 0$. Presjekom dobivenih intervala slijedi

$$\mathcal{D}(f) = \left\langle -2, \frac{3}{2} \right] .$$

(d) Prema poglavljima 4.6.4 i 4.6.9 mora biti ispunjeno

$$\log \frac{80x - 170}{3 - 2x - 5x^2} \geq 1 \quad \text{i} \quad \log \frac{3 - 2x - 5x^2}{8x - 17} \geq 0.$$

Dakle, trebamo riješiti nejednadžbe

$$\frac{80x - 170}{3 - 2x - 5x^2} \geq 10 \quad \text{i} \quad \frac{3 - 2x - 5x^2}{8x - 17} \geq 1.$$

Podijelimo li prvu nejednakost s 10 imamo situaciju kada tražimo da razlomak i njemu recipročan razlomak budu veći ili jednaki 1. To je moguće samo kada su točno jednaki 1. Dakle, mora vrijediti

$$\frac{3 - 2x - 5x^2}{8x - 17} = 1$$

odakle dobivamo

$$x_1 = -1 - \sqrt{5} \quad \text{i} \quad x_2 = -1 + \sqrt{5}.$$

Zadana funkcija definirana je samo za brojeve

$$-1 - \sqrt{5} \quad \text{i} \quad -1 + \sqrt{5}.$$

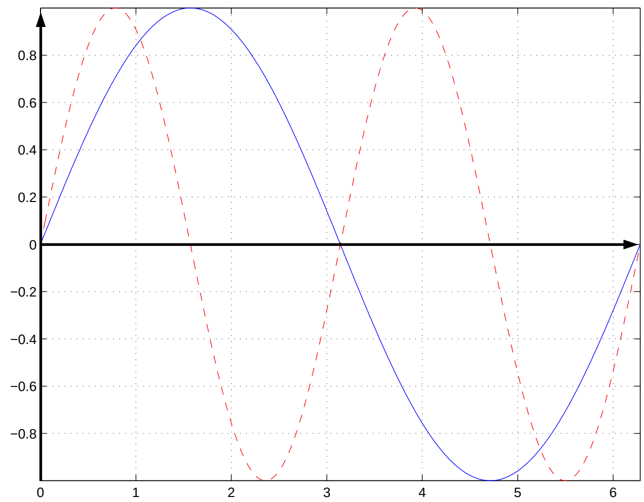
4.2 Graf opće sinusoide

Nacrtajte graf funkcije

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

Rješenje. Prema poglavlju 4.6.5 znamo da ćemo graf zadane funkcije dobiti iz grafa funkcije $g(x) = \sin x$ na način da:

1. temeljni period od 2π promijenimo u temeljni period od $\frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ i nacrtamo najprije graf funkcije $f_1(x) = \sin 2x$ (slika 4.2),
2. graf funkcije $f_1(x) = \sin 2x$ pomaknemo za $-\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{-\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ u pozitivnom smjeru x-osi što nam daje graf funkcije $f_2(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ (slika 4.3),
3. ordinate grafa funkcije $f_2(x)$ pomnožimo brojem $A = -\frac{1}{2}$. Dobiveni graf je upravo graf zadane funkcije (slika 4.4).



Slika 4.2: Sinusoida $f_1(x) = \sin 2x$

4.3 Kompozicija funkcija

Ako je

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}, \quad g(x) = \frac{3x+x^3}{3x^2+1},$$

dokažite da je $(f \circ g)(x) = 3f(x)$.

Rješenje. Koristeći definiciju 1.9 raspišimo $(f \circ g)(x)$:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3x+x^3}{3x^2+1}\right) = \\ = \log \frac{1+\frac{3x+x^3}{3x^2+1}}{1-\frac{3x+x^3}{3x^2+1}} = \log \frac{x^3+3x^2+3x+1}{-x^3+3x^2-3x+1} = \\ = \log \frac{(x+1)^3}{(1-x)^3} = 3\log \frac{x+1}{1-x}.\end{aligned}$$

Iz dobivenog izraza slijedi

$$(f \circ g)(x) = 3f(x).$$

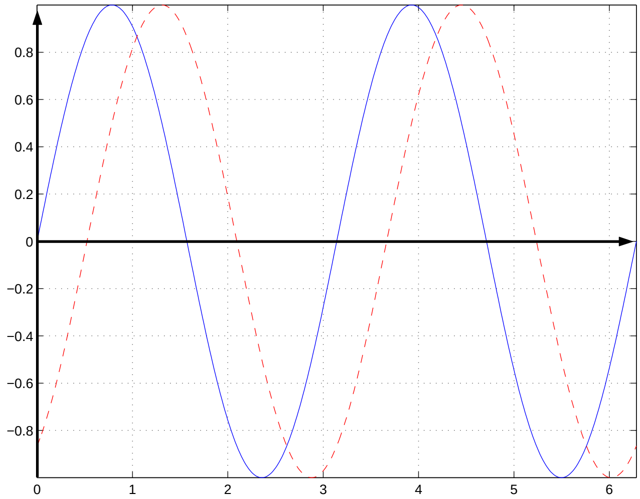
4.4 Nejednakost između kompozicija funkcija

Za funkcije $f(x) = 2^{-x} + 1$ i $g(x) = 2x - 1$ riješite nejednadžbu

$$(f \circ g)(x) < (g \circ f)(x).$$

Rješenje. Prema definiciji 1.9 vrijedi

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x-1) = 2^{-(2x-1)} + 1 = 2^{-2x+1} + 1, \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(2^{-x}+1\right) = 2\left(2^{-x}+1\right) - 1 = 2^{1-x} + 1.\end{aligned}$$



Slika 4.3: Sinusoida $f_2(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Zadanu možemo napisati u obliku

$$2^{-2x+1} + 1 < 2^{1-x} + 1$$

odakle je

$$2^{-2x+1} < 2^{1-x},$$

odnosno

$$-2x + 1 < 1 - x$$

pa rješenje nejednakosti glasi

$$x > 0.$$

4.5 Inverzna funkcija

Odredite inverznu funkciju trigonometrijske funkcije

$$f(x) = \frac{\sin x + 2}{\sin x + 1}.$$

Rješenje. Funkcija $f(x)$ definirana je za one $x \in \mathbb{R}$ za koje je

$$\sin x \neq -1,$$

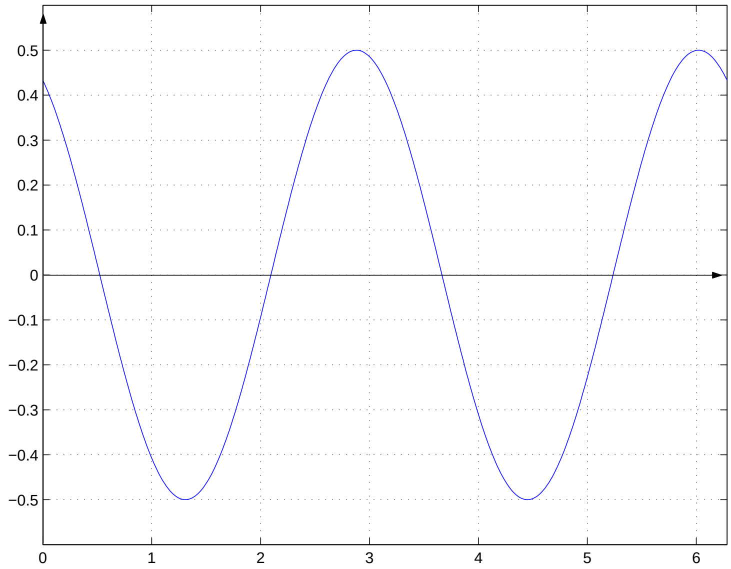
odnosno

$$x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Stoga je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Prema teoremu 1.1 je $f\left[f^{-1}(x)\right] = x$. Označimo li $f^{-1}(x) = y$, dobivamo jednadžbu

$$x = \frac{\sin y + 2}{\sin y + 1}$$



Slika 4.4: Sinusoida $f(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Rješavanjem ove jednadžbe imamo

$$\begin{aligned} x\sin y + x &= \sin y + 2 \\ (x-1)\sin y &= 2 - x \\ \sin y &= \frac{2-x}{x-1} \\ y &= \arcsin\frac{2-x}{x-1}, \end{aligned}$$

odnosno

$$f^{-1}(x) = \arcsin\frac{2-x}{x-1}.$$

Prema poglavlju 4.6.6 dobivena funkcija definirana je za $x \in \mathbb{R}$ koji ispunjavaju uvjete

$$x - 1 \neq 0 \quad \text{i} \quad -1 \leq \frac{2-x}{x-1} \leq 1$$

pa je

$$\mathcal{D}\left(f^{-1}(x)\right) = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right\rangle.$$

4.6 Inverzna funkcija logaritamske funkcije

Odredite inverznu funkciju funkcije

$$f(x) = \log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Rješenje. Funkcija f je strogo monotona kao kompozicija strogo monotonih funkcija pa ima inverz

f^{-1}. Kako je $f\left[f^{-1}(x)\right] = x$, slijedi da je

$$\begin{aligned}
\log_a\left[f^{-1}(x) + \sqrt{\left[f^{-1}(x)\right]^2 + 1}\right] &= x \\
f^{-1}(x) + \sqrt{\left[f^{-1}(x)\right]^2 + 1} &= a^x \\
\sqrt{\left[f^{-1}\right]^2 + 1} &= a^x - f^{-1}(x).
\end{aligned}$$

Označimo li $f^{-1}(x) = y$ dobivamo iracionalnu jednadžbu

$$\sqrt{y^2+1} = a^x - y.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
y^2 + 1 &= a^{2x} - 2a^x y + y^2 \\
2a^x y &= a^{2x} - 1 \\
y &= \frac{a^{2x}-1}{2a^x}.
\end{aligned}$$

Dakle, inverzna funkcija funkcije $f(x)$ glasi

$$f^{-1}(x) = \frac{a^{2x}-1}{2a^x}.$$

4.7 Limes eksponencijalne funkcije

Izračunajte lijevu i desnu graničnu vrijednost funkcije

$$f(x) = \frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{a^{\frac{1}{x}+1}}, \quad a > 1,$$

u točki $x = 0$.

Rješenje. Limes zdesna funkcije $f(x)$ u točki $x = 0$ izračunamo pomoću supstitucije $t = 1/x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{a^{\frac{1}{x}}+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} = t \\ x \to 0^+ \\ t \to +\infty \end{bmatrix} = \lim_{t\to+\infty} \frac{a^t-1}{a^t+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{a^t\left(1-\frac{1}{a^t}\right)}{a^t\left(1+\frac{1}{a^t}\right)} = 1.$$

Pri tome smo koristili

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a^t} = 0$$

za $a > 1$.

Limes slijeva zadane funkcije u točki $x = 0$ dobit ćemo na isti način:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{a^{\frac{1}{x}}+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} = t \\ x \to 0^- \\ t \to -\infty \end{bmatrix} = \lim_{t\to-\infty} \frac{a^t-1}{a^t+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{a^t}-1}{\frac{1}{a^t}+1} = -1.$$

4.8 Limes trigonometrijskih funkcija

Izračunajte

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x)}}{\sin^2(x)}.$$

Rješenje. Ovdje ćemo koristiti činjenicu da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a.$$

Naš cilj je transformirati funkciju pod limesom tako da možemo iskorititi gornji rezultat:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x)}}{\sin^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x)}}{\sin^2(x)}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-(1+\cos(x))}{\sin^2(x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2(x)}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2}{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)}}=$$

$$2\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)}}=2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

4.9 Limes oblika 1^∞

Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}.$$

Rješenje. Budući je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{2x+1}=1,$$

to zadani limes ima neodređeni oblik 1^∞ i rješavamo ga primjenom primjera 4.9 na sljedeći način:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x+1}(x+1)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x+1}}=e^1=e.$$

4.10 Limes oblika $\frac{0}{0}$

Izračunajte

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}.$$

Rješenje. Zadani limes je neodređenog oblika $\frac{0}{0}$ jer nakon uvrštavanja $x = 0$ funkcija u brojniku i funkcija u nazivniku poprimaju vrijednost 0. Racionalizacijom funkcije pod limesom dobivamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)}{\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2x-x^2-(1+x)^2}{x\left(\sqrt{1-2x-x^2}+1+x\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2-4x}{x\left(\sqrt{1-2x-x^2}+1+x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x-4}{\sqrt{1-2x-x^2}+1+x} = \\
&= \frac{-4}{2} = -2.
\end{aligned}$$

4.11 Limes oblika $\infty - \infty$

Izračunajte

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3}\right).$$

Rješenje. S obzirom da obje funkcije pod limesom teže prema $+\infty$ kada $x \to \pm\infty$ zadani limes je oblika $\infty - \infty$. Racionalizirajući funkciju pod limesom dobivamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3}\right) = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\left(\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2-2x-1} + \sqrt{x^2-7x+3}}{\sqrt{x^2-2x-1} + \sqrt{x^2-7x+3}}\right] = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3}} = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x-4}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}.
\end{aligned}$$

Budući da je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} = -1,$$

iz dobivenog rezultata zaključujemo da je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3}\right) = \begin{cases} 5/2, & x \to +\infty \\ -5/2, & x \to -\infty. \end{cases}$$

4.12 Limes oblika $\infty \cdot 0$

Izračunajte

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Rješenje. Za $x = 0$ funkcija pod limesom ima vrijednost $\infty \cdot 0$ pa primjenom svojstava funkcije ln možemo pisati

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \lim_{x\to 0} \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}.$$

Zbog teorema 4.7 (ii) i neprekidnosti funkcije $\ln x$ vrijedi (vidi primjer 4.9b)

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}} = \ln\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1-x}{2x}}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\frac{1}{1-x}} = \ln e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}} = \ln e^1 = 1.$$

4.13 Limes oblika $\frac{\infty}{\infty}$

Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}.$$

Rješenje. Izlučimo li x iz brojnika i nazivnika funkcije pod limesom dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}.$$

Budući je

$$-1 \le \sin x \le 1, \qquad \forall x\in\mathbb{R},$$

to za $x>0$ vrijedi

$$\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x},$$

odnosno

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x} \le \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}.$$

Odatle slijedi

$$0 \le \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} \le 0,$$

odnosno

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

Sada za zadani limes vrijedi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

4.14 Neprekidnost funkcije

Odredite konstante a i b tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin(x), & x\le -\frac{\pi}{2} \\ a\sin(x)+b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x), & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

bude neprekidna.

Rješenje. S obzirom da je funkcija $f(x)$ zadana po dijelovima pomoću neprekidnih funkcija, zaključujemo da je $f(x)$ neprekidna na skupu

$$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Potrebno je odrediti vrijednosti a i b tako da $f(x)$ bude neprekidna u točkama $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ i $x_2 = \frac{\pi}{2}$, odnosno da ispunjava uvjete iz definicije 4.6:

$$\lim_{x \to x_i^-} f(x) = \lim_{x_i^+} f(x) = f(x_i), \quad i = 1, 2. \tag{4.1}$$

Za točku $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ vrijedi

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} (-2\sin(x)) = 2, \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} (a\sin(x) + b) = -a + b, \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Uvrštavajući dobivene rezultate u jednadžbu (4.1) dobivamo

$$-a + b = 2.$$

Za točku $x_2 = \frac{\pi}{2}$ vrijedi

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (a\sin(x) + b) = a + b, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos(x) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Jednadžba (4.1) povlači

$$a + b = 0.$$

Dakle, konstante a i b se mogu naći iz sustava

$$\begin{aligned} -a + b &= 2, \\ a + b &= 0, \end{aligned}$$

odnosno $a = -1$ i $b = 1$.

4.15 Vrste prekida funkcije

Ispitajte vrste prekida funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{7 + x} - 3}{x^2 - 4}$$

u točkama $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$.

Rješenje. Da bismo ispitali vrstu prekida funkcije u točkama x_1 i x_2 potrebno je izračunati limes s lijeve i desne strane u tim točkama.

Limes slijeva u točki $x_1 = -2$ je

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{\sqrt{7 + x} - 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2^-} \frac{\sqrt{7 + x} - 3}{x^2 - 4} \frac{\sqrt{7 + x} + 3}{\sqrt{7 + x} + 3}$$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)(\sqrt{7 + x} + 3)} = \lim_{x \to -2^-} \frac{1}{(x + 2)(\sqrt{7 + x} + 3)} = -\infty.$$

Limes zdesna u točki $x_1 = -2$ dobivamo na isti način:

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{\sqrt{7 + x} - 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{(x + 2)(\sqrt{7 + x} + 3)} = +\infty.$$

Iz definicije 4.7 zaključujemo da zadana funkcija ima prekid druge vrste u točki $x_1 = -2$.

Limes slijeva u točki $x_2 = 2$ je

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \frac{1}{24}.$$

Za limes zdesna u točki $x - 2 = 2$ očigledno vrijedi

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \frac{1}{24}.$$

S obzirom da su lijevi i desni limesi u točki $x_2 = 2$ jednaki, funkcija $f(x)$ ima uklonjivi prekid u toj točki.

4.16 Zadaci za vježbu

1. Odredite domenu funkcije
$$f(x) = \sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}.$$

2. Odredite domenu funkcije
$$f(x) = \arccos\left(\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2+3}\right).$$

3. Nacrtajte graf funkcije
$$f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Neka je
$$f(x) = x+2, \qquad g(x) = x^2, \qquad h(x) = \frac{1}{x}.$$
Dokažite da vrijedi
$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h).$$

5. Odredite inverznu funkciju funkcije
$$f(x) = \ln\frac{2x-1}{3x+2}.$$

6. Odredite inverznu funkciju funkcije
$$f(x) = 3\sin 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

7. Izračunajte
$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right).$$

8. Izračunajte
$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

9. Izračunajte
$$L = \lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}.$$

10. Izračunajte
$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}^2}.$$

11. Možemo li definirati funkciju
$$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$$
u $x = 1$ pa da tako definirana bude neprekidna i u $x = 1$?

12. Definirajte funkciju
$$f(x) = x \sin\frac{1}{x}$$
u $x = 0$ pa da tako proširena funkcija bude neprekidna za svaki x.

13. Dokažite da je funkcija
$$f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}$$
neprekidna na $\mathbb{R}$.

14. Izračunajte
$$L = \lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}.$$

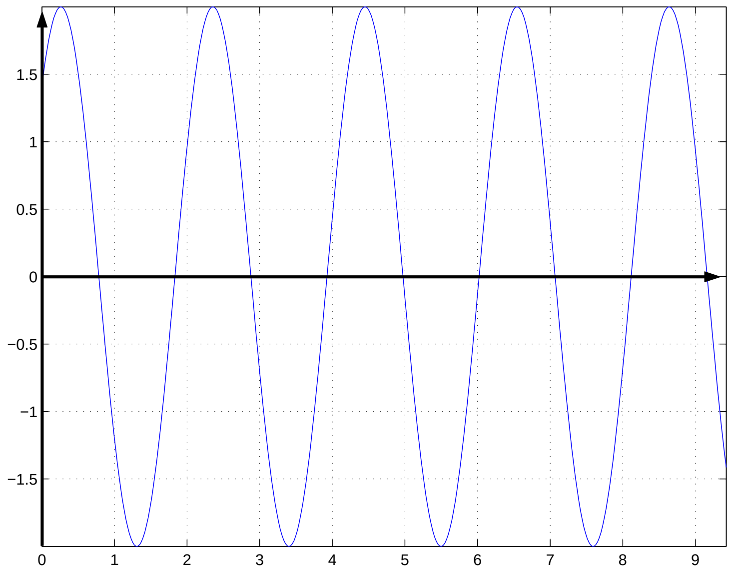
15. Odredite vrijednost limesa
$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}.$$

16. Odredite jednostrane limese
$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

17. Odredite jednostrane limese
$$\lim_{x\to 0+} \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{|\sin x|}{x}\right], \qquad \lim_{x\to 0-} \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{|\sin x|}{x}\right].$$

4.17 Rješenja

1. $\mathcal{D}(f) = [-1, 3]$.
2. $\mathcal{D}(f) = \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$.
3. Koristiti upute dane u poglavlju 4.6.5 (vidi sliku 4.5).
4. Primjenom definicije 1.9.
5. $f^{-1}(x) = \frac{1+2e^x}{2-3e^x}$.
6. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}$.
7. $L = 0$.
8. $L = \frac{3}{2}$.
9. $L = e$.
10. $L = 2$.
11. $f(1) = 3$.
12. $f(0) = 1$.



Slika 4.5: Kosinusoida $f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

13. Korištenjem definicije 4.6.
14. $L = \frac{a-1}{3a^2}$.
15. $L = e$.
16. 0, 1.
17. $\frac{\pi}{2} + 1, -\frac{\pi}{2} - 1$.

5.

DERIVACIJE I PRIMJENE

5.1 Derivacije elementarnih funkcija

Derivirajte sljedeće funkcije:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x\sqrt{x}}$,

(b) $f(x) = \sin x \operatorname{arctg} x$,

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{1+\operatorname{tg} x}$,

(d) $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x^3} + e^x \cos x - (x^3 + 2)\log x$,

(e) $f(x) = \ln\ln(x^4 + x)$,

(f) $f(x) = \log_{\sqrt{e}} \frac{1}{\cos^2 x}$.

Rješenje. (a) Zadanu funkciju možemo pojednostavniti na sljedeći način:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{4}}.$$

Koristeći pravila deriviranja dana u poglavlju 5.1.3 dobivamo

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}.$$

(b) Prema poglavljima 5.1.3 i 5.1.5 slijedi

$$f'(x) = (\sin x)' \operatorname{arctg} x + \sin x \; (\operatorname{arctg} x)' = \cos x \operatorname{arctg} x + \sin x \frac{1}{1+x^2}.$$

(c) Po pravilima za deriviranje kvocijenta i deriviranje trigonometrijskih funkcija imamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x)' \; (1+\operatorname{tg} x) - \cos x \; (1+\operatorname{tg} x)'}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \frac{-\sin x\,(1+\operatorname{tg} x) - \cos x \,\frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \\ &= \frac{-\sin x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}}{\frac{(\sin x + \cos x)^2}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{-\sin x \cos x - \sin^2 x - 1}{\cos x}}{\frac{1+2\sin x \cos x}{\cos^2 x}} = \\ &= \frac{\cos x \left(-\sin x \cos x - \sin^2 x - 1\right)}{1+2\sin x \cos x}. \end{aligned}$$

(d) Primjenom pravila deriviranja iz poglavlja 5.1.5 imamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\operatorname{sh} x}{x^3}\right)' + (e^x \cos x)' - \left[\left(x^3+2\right)\log x\right]' = \\ &= \frac{\operatorname{ch} x \cdot x^3 - \operatorname{sh} x \cdot 3x^2}{x^6} + e^x \cos x - e^x \sin x - 3x^2 \log x - \left(x^3+2\right)\,\frac{1}{x}\log e. \end{aligned}$$

(e) Prema teoremu 5.4 i pravilima deriviranja vrijedi

$$f'(x) = \frac{1}{\ln\left(x^4+x\right)}\,\frac{1}{x^4+x}\,\left(4x^3+1\right) = \frac{4x^3+1}{x\left(x^3+1\right)\ln\left(x^4+x\right)}.$$

(f) Korištenjem pravila za deriviranje složene funkcije (vidi teorem 5.4) dobivamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\log_{e^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\cos^2 x}\right]' = \left[2\log_e (\cos x)^{-2}\right]' = \left[-4\ln(\cos x)\right]' = \\ &= -4\,\frac{1}{\cos x}\,(-\sin x) = 4\,\frac{\sin x}{\cos x} = 4\operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

5.2 Tangenta na eksplicitno zadanu funkciju

Odredite jednadžbu tangente na krivulju

$$f(x) = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{2e^{2x}-1}}$$

u točki $x = 0$.

Rješenje. Da bi lakše odredili derivaciju funkcije $f(x)$ u $x = 0$ najprije ćemo pojednostavniti izraz za $f(x)$:

$$f(x) = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln\left(\frac{e^{2x}}{2e^{2x}-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{arctg} e^{2x} + \frac{1}{2}\left[\ln e^{2x} - \ln\left(2e^{2x}-1\right)\right]$$

$$= \operatorname{arctg} e^{2x} + \frac{1}{2}2x\ln e - \frac{1}{2}\ln\left(2e^{2x}-1\right) = \operatorname{arctg} e^{2x} + x - \frac{1}{2}\ln\left(2e^{2x}-1\right).$$

Derivacije funkcije $f(x)$ je dana s

$$f'(x) = \frac{1}{(e^{2x})^2+1}2e^{2x} + 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2e^{2x}-1}4e^{2x} = \frac{2e^{2x}}{e^{4x}+1} - \frac{1}{2e^{2x}-1}.$$

Ako je k koeficijent smjera tangente na funkciju $f(x)$ u točki $x = 0$, tada k iznosi

$$k = f'(0) = \frac{2e^0}{e^0+1} - \frac{1}{2e^0-1} = 0.$$

Još je potrebno odrediti vrijednost funkcije u točki $x = 0$ jer tangenta prolazi kroz točku $T = (0, f(0))$,

$$f(0) = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Dakle, jednadžba tangente glasi

$$y - \frac{\pi}{4} = 0(x-0), \quad \text{odnosno} \quad y = \frac{\pi}{4}.$$

5.3 Tangenta na parametarski zadanu funkciju

Nađite jednadžbu tangente na parametarski zadanu funkciju

$$x(t) = \ln(\cos t + 1)$$
$$y(t) = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$$

za $t = \frac{\pi}{4}$.

Rješenje. Odredimo najprije točku $T = (x_0, y_0)$ kroz koju prolazi tražena tangenta:

$$x_0 = \ln\left(\cos\frac{\pi}{4} + 1\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right),$$
$$y_0 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 2.$$

Koristeći formulu (P 5.10) odredimo derivaciju zadane funkcije:

$$y' = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sin^2 t}}{\frac{-\sin t}{\cos t + 1}} = -\frac{\left(1 - 2\cos^2 t\right)(\cos t + 1)}{\sin^3 t\, \cos^2 t}.$$

U točki T vrijednost derivacije iznosi

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\left[1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 0.$$

Kako je koeficijent smjera tangente $k = 0$, jednadžba tražene tangente je $y = 2$.

5.4 Derivacija implicitno zadane funkcije

Odredite derivaciju implicitno zadane funkcije

$$xy + \sin y = e^{x+y}.$$

Rješenje. Kako gore navedeni izraz implicitno definira y kao funkciju nezavisne varijable x, za derivaciju y' dobivamo

$$y + xy' + \cos y\, y' = e^{x+y}(1 + y').$$

Iz ove jednadžbe slijedi da je

$$y'\left(x + \cos y - e^{x+y}\right) = e^{x+y} - y,$$

odnosno

$$y' = \frac{e^{x+y} - y}{x + \cos y - e^{x+y}}.$$

5.5 Logaritamsko deriviranje

Izračunajte derivaciju funkcije

$$f(x) = \frac{(\cos x)^{\sin x}}{x^2 + 3}. \tag{5.1}$$

Rješenje. Prema poglavlju 5.1.6 derivacija zadane funkcije računa se tako da se prethodno logaritmira izraz (5.1):

$$\ln(f(x)) = \sin x \, \ln(\cos x) - \ln\left(x^2 + 3\right).$$

Deriviranjem gornje jednakosti dobivamo

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \cos x \ln(\cos x) + \sin x \frac{1}{\cos x}(-\sin x) - \frac{1}{x^2 + 3} 2x.$$

Iz ovoga slijedi da je derivacija funkcije $f(x)$ dana izrazom

$$f'(x) = \frac{(\cos x)^{\sin x}}{x^2 + 3}\left[\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \frac{2x}{x^2 + 3}\right].$$

5.6 Asimptote funkcije

Odredite asimptote funkcije

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x^2-1}}.$$

Rješenje. Primijetimo da je funkcije definirana na skupu $\mathbb{R} \setminus \{1, 1\}$ jer eksponent $\frac{1}{x^2-1}$ nije definiran u točkama $x = \pm 1$. Asimptote određujemo prema formulama iz poglavlja 4.5 te dobivamo sljedeće:

1. vertikalne asimptote:

$$\lim_{x \to 1^+} xe^{\frac{1}{x^2-1}} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} xe^{\frac{1}{x^2-1}} = 0,$$
$$\lim_{x \to -1^+} xe^{\frac{1}{x^2-1}} = 0, \qquad \lim_{x \to -1^-} xe^{\frac{1}{x^2-1}} = -\infty.$$

   Dakle, $x = -1$ je lijeva vertikalna asimptota a $x = 1$ je desna vertikalna asimptota.

2. horizontalne asimptote:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x^2-1}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x^2-1}} = -\infty$$

pa funkcija nema horizontalnih asimptota.

3. kose asimptote: koeficijent smjera k kose asimptote dan je s

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x^2-1}}}{x} = 1.$$

Odsječak l dan je s

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[xe^{\frac{1}{x^2-1}} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{-2x}{(x^2-1)^2}\, e^{\frac{1}{x^2-1}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0, \end{aligned}$$

gdje smo u računanju limesa koristili L'Hospitalovo pravilo. Slijedi da je kosa asimptota funkcije $f(x)$ pravac $y = x$.

5.7 Ekstremi funkcije

Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}\, e^{-\ln^2 x}.$$

Rješenje. Prema teoremu 5.12 provjerimo najprije nužan uvjet postojanja ekstrema funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} \cdot e^{-\ln^2 x} + \frac{\ln x}{x} \cdot (-2\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-\ln^2 x} = \\ &= \frac{1-\ln x}{x^2} \cdot e^{-\ln^2 x} - 2\frac{\ln^2 x}{x^2} \cdot e^{-\ln^2 x} = \\ &= \frac{1}{x^2} e^{-\ln^2 x} \cdot \left(1 - \ln x - 2\ln^2 x\right). \end{aligned}$$

Mora biti $f'(x) = 0$. Uvrštavanjem izračunate derivacije dobivamo

$$-2\ln^2 x - \ln x + 1 = 0$$

odnosno,

$$(\ln x)_{1,2} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Za

$$\ln x_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{e},$$

a za

$$\ln x_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \sqrt{e}.$$

Dakle, stacionarne točke funkcije $f(x)$ su $x_1 = \frac{1}{e}$ i $x_2 = \sqrt{e}$.

Dovoljne uvjete za postojanje ekstrema najlakše ćemo provjeriti pomoću prve derivacije korištenjem teorema 5.14. Promatrajući izraz $-2\ln^2 x - \ln x + 1$ kao polinom drugog stupnja u varijabli $\ln x$, vidimo da je taj izraz negativan za $\ln x \in \langle -\infty, -1\rangle$ i $\ln x \in \langle 1/2, \infty\rangle$ a pozitivan za $\ln x \in \langle -1, 1/2\rangle$. Iz formule za derivaciju zaključujemo da je $f'(x) < 0$ za $x \in \langle -\infty, 1/e\rangle$ i $x \in \langle \sqrt{e}, \infty\rangle$ a $f'(x) > 0$ za $x \in \langle 1/e, \sqrt{e}\rangle$.

Budući je

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 \quad \text{i} \quad f\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2\sqrt[4]{e^3}},$$

zadana funkcija ima lokalni minimum u točki

$$T_1\left(\frac{1}{e}, -1\right)$$

a lokalni maksimum u točki

$$T_2\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2\sqrt[4]{e^3}}\right).$$

5.8 Lokalni ekstremi i šiljci funkcije

Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Rješenje. Provjerimo nužan uvjet postojanja ekstrema funkcije korištenjem teorema 5.12:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\left[(1-x)^{\frac{2}{3}} - x(1-x)^{-\frac{1}{3}}\right] = \\ &= \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}(1-x-x) = \frac{2}{3}\,\frac{1-2x}{x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \frac{2}{3}\,\frac{1-2x}{(x-x^2)^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

Iz $f'(x) = 0$ slijedi $1 - 2x = 0$ pa je stacionarna točka zadane funkcije $x_1 = \frac{1}{2}$. Primjetimo da zadana funkcija nije derivabilna u točkama $x_2 = 0$ i $x_3 = 1$ pa su to kritične točke zadane funkcije.

Dovoljne uvjete ekstrema provjerit ćemo pomoću prve derivacije, odnosno provjerit ćemo da li u kritičnoj točki prva derivacija mijenja predznak.

Za točku x_1 imamo dva slučaja:

1. Za $x < \frac{1}{2}$ su brojnik i nazivnik veći od nule. Stoga je $f'(x) > 0$ pa je funkcija f strogo rastuća na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$.
2. Za $x > \frac{1}{2}$ je brojnik manji od nule, a nazivnik veći od nule pa je $f'(x) < 0$. Stoga je funkcija f strogo padajuća na intervalu $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$.

Prema teoremu 5.13 zaključujemo da funkcija f ima lokalni maksimum

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}, \qquad \text{za} \qquad x = \frac{1}{2}.$$

Za točke $x_2 = 0$ i $x_3 = 1$ te da vrijedi sljedeće:

(a) Za $x_2 = 0$ je

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3}\,\frac{1-2x}{x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}} = -\infty$$

pa je za $x<0$ funkcija f padajuća, dok je

$$\lim_{x\to 0+}\frac{2}{3}\frac{1-2x}{x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}}=+\infty$$

pa je za $x>0$ funkcija f rastuća.

(b) Za $x_3=1$ je

$$\lim_{x\to 1-}\frac{2}{3}\frac{1-2x}{x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}}=-\infty$$

pa je za $x<1$ funkcija f padajuća, dok je

$$\lim_{x\to 1+}\frac{2}{3}\frac{1-2x}{x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}}=+\infty$$

pa je za $x>1$ funkcija f rastuća.

Zaključujemo da zadana funkcija ima lokalne minimume – šiljke u točkama $T_2(0,0)$ i $T_3(1,0)$.

5.9 Ekstremi funkcije zadane parametarski

Nađite lokalne ekstreme funkcije zadane parametarski s

$$x(t)=t+\sin t$$
$$y(t)=1-\cos t$$

Rješenje. Provjerimo nužne uvjete postojanja ekstrema koristeći teorem 5.12 i definiciju 5.5 te pravilo za deriviranje parametarski zadane funkcije (vidi poglavlje 5.4):

$$f'(x)=\frac{\sin t}{1+\cos t}.$$

Iz $f'(x)=0$ slijedi

$$\sin t=0,$$

odnosno,

$$t=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Ispitajmo dovoljne uvjete postojanja ekstrema (vidi teorem 5.14) za dobivene stacionarne točke (5.2):

$$f''(x)=\frac{1}{(1+\cos t)^2}$$

uz

$$1+\cos t\neq 0 \quad\Rightarrow\quad t\neq(2k+1)\pi. \tag{5.3}$$

Iz (5.2) i (5.3) slijedi da mora biti

$$t=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Tada je

$$f''(2k\pi)=\frac{1}{4}>0 \quad \text{i} \quad f(2k\pi)=0, k\in\mathbb{Z}.$$

Zadana funkcija ima lokalne minimume u točkama

$$(2k\pi,0),\quad \text{gdje je}\quad k\in\mathbb{Z}.$$

5.10 Geometrijski ekstrem

Odredite maksimalan volumen kružnog stošca izvodnice s.

Rješenje. Volumen stošca polumjera R i visine h računamo po formuli

$$V = \frac{1}{3}R^2 h\pi.$$

Izrazimo li visinu stošca preko njegovog polumjera R i izvodnice s formulom $h = \sqrt{s^2 - R^2}$, onda volumen možemo promatrati kao funkciju varijable R na sljedeći način:

$$V = V(R) = \frac{1}{3}R^2\sqrt{s^2 - R^2}\pi.$$

Trebamo pronaći onu vrijednost polumjera R za koju funkcija $V(R)$ poprima svoj maksimum.

Ispitujući nužne uvjete postojanja ekstrema funkcije $V(R)$ prema teoremu 5.12 izračunavamo:

$$\begin{aligned} V'(R) &= \frac{1}{3}\pi \cdot 2R\sqrt{s^2 - R^2} + \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{1}{2\sqrt{s^2 - R^2}} \cdot (-2R) = \\ &= \frac{2}{3}\pi R\sqrt{s^2 - R^2} - \frac{1}{3}\frac{R^3}{\sqrt{s^2 - R^2}}\pi. \end{aligned}$$

Mora biti

$$\frac{2}{3}\pi R\left(s^2 - R^2\right) - \frac{1}{3}\pi R^3 = 0,$$

odakle je

$$\frac{\pi}{3}R\left(2s^2 - 2R^2 - R^2\right) = 0,$$

odnosno, (1) $R = 0$ ili (2) $2s^2 - 3R^2 = 0$.

Slučaj (1) nije moguć, a iz jednakosti (2) dobivamo

$$R = \sqrt{\frac{2}{3}}s.$$

Dobili smo stacionarnu točku funkcije $V(R)$ za koju, provjeravanjem dovoljnih uvjeta postojanja ekstrema po teoremu 5.14 dobivamo

$$V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}s\right) < 0.$$

Volumen stošca će imati maksimalnu vrijednost za

$$R = \sqrt{\frac{2}{3}}s.$$

5.11 Intervali monotonosti

Odredite intervale monotonosti funkcije

$$f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}.$$

Rješenje. Zadana funkcija je definirana za svaki $x \in \mathbb{R}$. Da bismo korištenjem teorema 5.11 ispitali intervale rasta odnosno pada funkcije odredimo najprije njenu prvu derivaciju:

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Kako je $f'(x) = 0$ za $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$, a $f'(x) = -\infty$ za $x_3 = 0$, to su kritične točke sljedeće:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0.$$

Provjeravanjem predznaka prve derivacije zadane funkcije dobivamo da je

$$f'(x) < 0, \quad \text{za} \quad x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$$

i

$$f'(x) > 0, \quad \text{za} \quad x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle .$$

Funkcija f je rastuća za $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, a padajuća za $x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$.

5.12 Intervali zakrivljenosti

Odredite intervale konveksnosti, konkavnosti i točke infleksije funkcije

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Rješenje. Intervale konveksnosti i konkavnosti odredit ćemo pomoću teorema 5.15. Iz

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

dobivamo

$$f''(x) = 2\left(2x^2 - 1\right) e^{-x^2}.$$

Iz

$$f''(x) = 0$$

slijedi

$$2\left(2x^2 - 1\right) e^{-x^2} = 0.$$

Kako je $2e^{-x^2} \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, mora biti $2x^2 - 1 = 0$, odakle dobivamo

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{i} \qquad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vrijedi:

(a)

$$f''(x) < 0 \qquad \text{za} \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

pa je funkcija f strogo konkavna na intervalu $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$.

(b)

$$f''(x) > 0 \qquad \text{za} \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} > x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

pa je funkcija f strogo konveksna na intervalima $\left\langle -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ i $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right\rangle$.

Budući da je

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{e} \qquad \text{i} \qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{e},$$

to prema teoremu 5.16 zaključujemo da su točke infleksije zadane funkcije

$$T_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right) \qquad \text{i} \qquad T_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right).$$

5.13 Tok funkcije I

Ispitajte tok funkcije
$$f(x) = 2\sin(2x) + \sin(4x).$$

Rješenje. Primijetimo da je funkcija $f(x)$ periodična s periodom π jer vrijedi $f(x+\pi) = f(x)$. Stoga je dovoljno ispitati tok funkcije $f(x)$ u intervalu $[0,\pi)$. Najprije odredimo stacionarne točke funkcije. Pošto je
$$f'(x) = 4\left(\cos(2x) + \cos(4x)\right),$$
uvjet $f'(x) = 0$ daje
$$\cos(2x) + \cos(4x) = 0.$$
Ova jednadžba se može riješiti koristeći identitet
$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1,$$
iz čega dobivamo
$$\cos(2x) + 2\cos^2(2x) - 1 = 0.$$
Uvođenjem supstitucije $t = \cos(2x)$ dobivamo kvadratnu jednadžbu
$$2t^2 + t - 1 = 0$$
koja ima rješenja $t_1 = -1$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. Odgovarajuća rješenja za x u intervalu $[0,\pi)$ dana su s
$$\begin{aligned} \cos(2x) &= -1, \quad \text{odnosno} \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \\ \cos(2x) &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$
odnosno
$$x_2 = \frac{\pi}{6}, \qquad x_3 = \frac{5\pi}{6}.$$

Funkcija $f(x)$ ima tri stacionarne točke. Također primijetimo da funkcija nema točaka u kojima $f'(x)$ nije definirana. Točke x_1, x_2, x_3 dijele interval $[0,\pi)$ na četiri dijela
$$\left[0,\frac{\pi}{6}\right), \quad \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right), \quad \left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right), \quad \left[\frac{5\pi}{6},\pi\right).$$
Na svakom od ovih dijelova ispitati ćemo predznak prve derivacije. To je dovoljno napraviti u proizvoljnoj točki odabranog intervala jer se predznak $f'(x)$ ne mijenja unutar intervala. Imamo

interval	predznak $f'(x)$
$\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$	$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0,$
$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$	$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4 < 0,$
$\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$	$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4 < 0,$
$\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$	$f'\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0.$

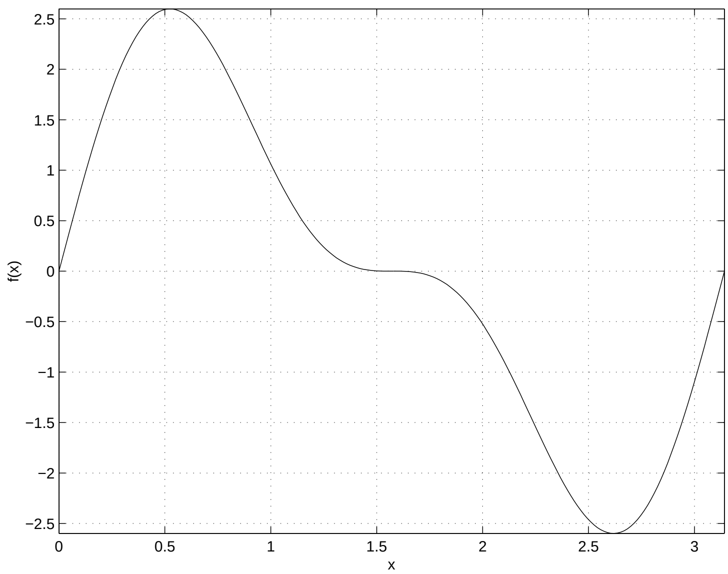
Slijedi da $f(x)$ raste na intervalima $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ i $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$, a pada na intervalu $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.

Lokalne ekstreme odrediti ćemo po predznaku druge derivacije u stacionarnim točkama. Za to nam je potrebno
$$f''(x) = -8\left(\sin(2x) + 2\sin(4x)\right).$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
f''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -12\sqrt{3} < 0, \quad \text{pa u točki } x = \frac{\pi}{6} \text{ funkcija ima lokalni maksimum,}\\
f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, \quad \text{pa je } x = \frac{\pi}{2} \text{ točka infleksije,}\\
f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= 12\sqrt{3} > 0, \quad \text{pa u točki } x = \frac{5\pi}{6} \text{ funkcija ima lokalni minimum.}
\end{aligned}
$$

Graf funkcije $f(x)$ prikazan je na Slici 5.1.



Slika 5.1: Funkcija $f(x) = 2\sin(2x) + \sin(4x)$

5.14 Tok funkcije II

Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}.$$

Rješenje. Tok funkcije ćemo ispitati prema postupku opisanom u poglavlju 5.9:

1. Područje definicije zadane funkcije ne smije uključivati nulu pa vrijedi

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. Vrijedi

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{2}{-x} = x^2 - \frac{2}{x}.$$

   Budući da je $f(-x) \neq f(x)$ i $f(-x) \neq -f(x)$, to promatrana funkcija nije ni parna ni neparna.

3. Funkcija nije periodična jer je elementarna, a ne sadrži neku od trigonometrijskih funkcija.

4. Da bismo odredili nul-točke funkcije riješimo jednadžbu $f(x) = 0$. Imamo

$$x^2 + \frac{2}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^3+2}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

   pa je $x = -\sqrt[3]{2}$ nul-točka zadane funkcije.

5. Da bismo odredili vertikalne asimptote provjerimo sljedeće:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

   Dakle, $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije f. Za horizontalne asimptote provjeravamo

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

   Dakle, funkcija f nema horizontalnih asimptota. Ispitujući limese

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2}{x^2} = \pm\infty,$$

   zaključujemo da funkcija f ne posjeduje ni kose asimptote.

6. Pri određivanju ekstrema zadane funkcije krenimo od njene prve derivacije,

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}.$$

   Kako je $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ to je $x_1 = 0$ kritična točka funkcije f. Vidimo da je stacionarna točka funkcije (druga kritična točka) $x_2 = 1$. Dovoljne uvjete ekstrema provjerimo pomoću prve derivacije. Vrijedi:

   (a) Za $x \in \langle -\infty, 0\rangle$ vrijedi $f'(x) < 0$ pa je funkcija f strogo padajuća na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$.

   (b) Za $x \in \langle 0, 1\rangle$ je također $f'(x) < 0$ i funkcija f je strogo padajuća na tom intervalu.

   (c) Za $x \in \langle 1, +\infty\rangle$ vrijedi $f'(x) > 0$ pa je funkcija f strogo rastuća na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$.

   Zaključujemo da zadana funkcija ima lokalni minimum u točki $(1, 3)$.

7. Intervale monotonosti smo ispitali u prethodnom koraku.

8. Izračunajmo drugu derivaciju:

$$f''(x) = 2 + \frac{4}{x^3}.$$

   Iz $f''(x) = 0$ slijedi $x = -\sqrt[3]{2}$. Budući je $f'''(x) = -\frac{12}{x^4}$, odnosno $f'''\left(-\sqrt[3]{2}\right) \neq 0$ to je $x = -\sqrt[3]{2}$ točka infleksije funkcije f.

   Promatrajući predznak druge derivacije zaključujemo prema teoremu 5.15 da je funkcija f konkavna na intervalu $\left\langle -\sqrt[3]{2}, 0\right\rangle$ i konveksna na $\left\langle -\infty, -\sqrt[3]{2}\right\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$.

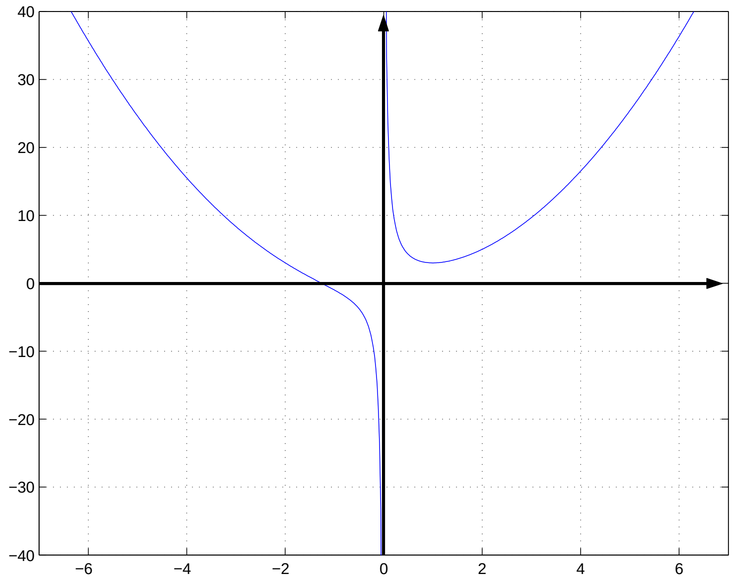
Funkcija je prikazana na Slici 5.2.

5.15 Tok funkcije III

Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) e^{-x}.$$

Rješenje. Prema poglavlju 5.9 ispitujemo sljedeće:



Slika 5.2: Funkcija $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

1. Područje definicije zadane funkcije je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
2. Očigledno je da funkcija f nije ni parna ni neparna.
3. Funkcija f nije periodična jer je elementarna, a ne sadrži neku od trigonometrijskih funkcija.
4. Rješavanjem jednadžbe $f(x) = 0$ dobivamo da graf funkcije f siječe koordinatne osi u točkama $T_1(-1, 0)$, $T_2(1, 0)$ i $T_3(0, 1)$.
5. Funkcija f nema vertikalnih asimptota. Da bismo odredili horizontalne asimptote provjerimo
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - x^2\right) e^{-x} = -\infty$$
i
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^x} = 0.$$
Dakle, funkcija f ima horizontalnu asimptotu $y = 0$.
Funkcija f nema kosih asimptota.
6. Odredimo prvu derivaciju zadane funkcije:
$$f'(x) = -2xe^{-x} - \left(1 - x^2\right) e^{-x},$$
to jest,
$$f'(x) = e^{-x} \left(x^2 - 2x - 1\right)$$
pa iz $f'(x) = 0$ slijedi $x^2 - 2x - 1 = 0$. Odatle za stacionarne točke funkcije f dobivamo
$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \approx -0.41, \qquad x_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.41.$$
Za drugu derivaciju vrijedi
$$f''(x) = -e^{-x} \left(x^2 - 2x - 1\right) + e^{-x} (2x - 2) = e^{-x} \left(4x - x^2 - 1\right).$$
Budući da je $f''\left(1 - \sqrt{2}\right) < 0$, graf funkcije f ima u točki $A \approx (-0.41, 1.23)$ lokalni maksimum, a kako je $f''\left(1 - \sqrt{2}\right) > 0$, graf funkcije f ima u točki $B \approx (2.41, -0.43)$ lokalni minimum.

7. Ispitujući predznak prve derivacije zaključujemo da je funkcija f rastuća za $x \in \langle -\infty, 1-\sqrt{2}\rangle \cup \langle 1+\sqrt{2}, +\infty\rangle$, a padajuća za $x \in \langle 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\rangle$.

8. Promatrajući predznak druge derivacije zaključujemo da je funkcija f strogo konveksna za $x \in \langle 2-\sqrt{3}\rangle$, a strogo konkavna za $x \in \langle -\infty, 2-\sqrt{3}\rangle \cup \langle 2+\sqrt{3}, +\infty\rangle$.

9. Rješavanjem jednadžbe $f''(x) = 0$, odnosno $x^2 - 4x + 1 = 0$ dobivamo točke

$$x_3 = 2-\sqrt{3}, \qquad x_4 = 2+\sqrt{3}.$$

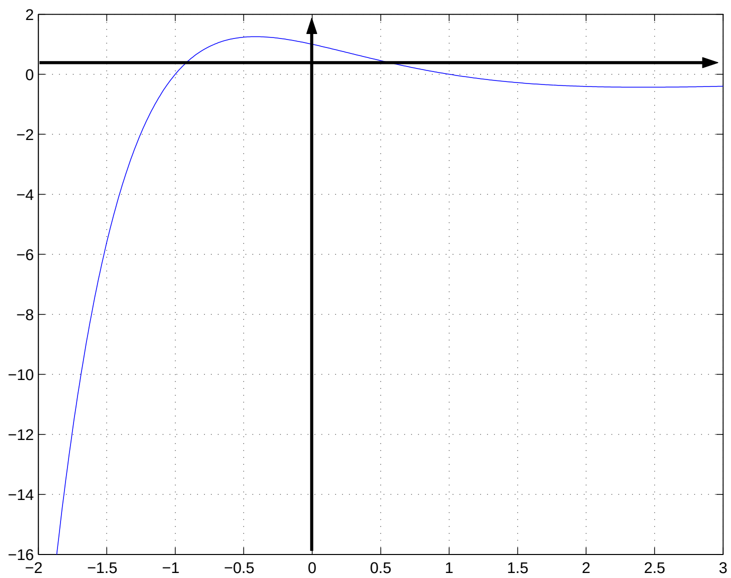
Kako je $f'''\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \neq 0$, to funkcija f u točkama $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$ ima točke infleksije. Kako je

$$f\left(2-\sqrt{3}\right) \approx f(0.27) \approx 0.7 \quad \text{i} \quad f\left(2+\sqrt{3}\right) \approx f(3.73) \approx -0.31,$$

točke infleksije funkcije f su oblika

$$M_1 \approx (0.27, 0.7), \qquad M_2 \approx (3.73, -0.31)$$

Funkcija je prikazana na Slici 5.3.



Slika 5.3: Funkcija $f(x) = \left(1-x^2\right)e^{-x}$

5.16 Tok funkcije IV

Odredite tok i nacrtajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}}.$$

Rješenje. Koristeći upute dane u poglavlju 5.9, za zadanu funkciju određujemo:

1. Domena funkcije f je $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

2. Funkcija f nije periodična.

3. Iz jednadžbe $f(x)=0$ dobivamo da je $x=\frac{1}{2}$ nul-točka funkcije f.

4. Odredimo vertikalne asimptote zadane funkcije:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{-\infty}{+0}\right] = -\infty$$

pa je $x=0$ desna vertikalna asimptota funkcije f. Provjerimo postojanje horizontalnih asimptota:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \text{L'H} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2x}\,2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = +0.$$

Dakle, $y=0$ je desna horizontalna asimptota zadane funkcije. Određujući kose asimptote funkcije ispitujemo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}} = \text{L'H} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2x}\,2}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x\sqrt{x}} = 0.$$

Zaključujemo da funkcija f nema kosih asimptota.

5. Da bismo pronašli ekstreme funkcije f odredimo najprije njenu prvu derivaciju:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln 2x}{x} = \frac{2-\ln 2x}{2x\sqrt{x}}.$$

Iz jednadžbe $f'(x)=0$ slijedi:

$$\begin{aligned} 2-\ln 2x &= 0 \\ 2x &= e^2 \\ x &= \frac{1}{2}e^2 \end{aligned}$$

Dakle, $x=\frac{1}{2}e^2$ je stacionarna točka funkcije f. Za drugu derivaciju funkcije f dobivamo

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\,2x\sqrt{x} - (2-\ln 2x)\,3\sqrt{x}}{4x^3} = -\frac{8-3\ln 2x}{4x^{\frac{5}{2}}}.$$

Budući je

$$f''\left(\frac{1}{2}e^2\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{2}e^2\right)^{\frac{5}{2}}} < 0,$$

to zaključujemo da je točka

$$T_1\left(\frac{1}{2}e^2, \frac{2\sqrt{2}}{e}\right)$$

lokalni maksimum zadane funkcije.

6. Funkcija f je strogo rastuća na intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}e^2\right\rangle$, a strogo padajuća na intervalu $\left\langle \frac{1}{2}e^2, +\infty\right\rangle$

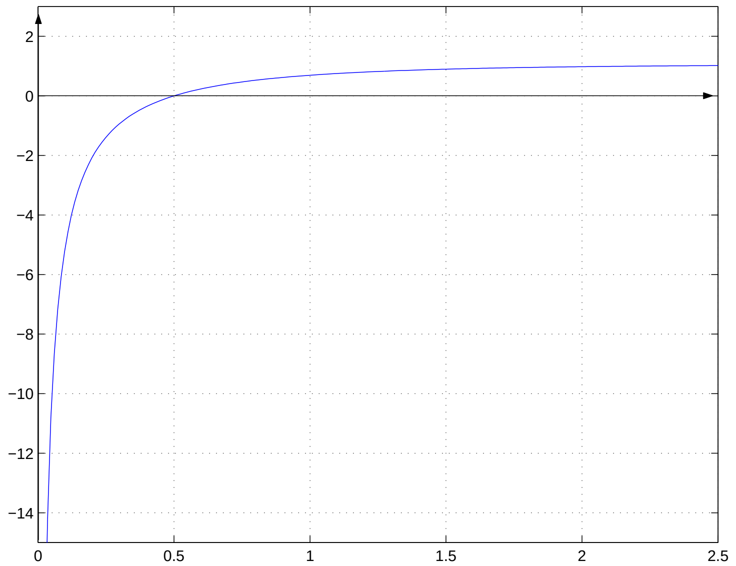
7. Iz jednadžbe $f''(x)=0$ slijedi:

$$\begin{aligned} 8-3\ln 2x &= 0 \\ 2x &= e^{\frac{8}{3}} \\ x &= \frac{1}{2}e^{\frac{8}{3}}. \end{aligned}$$

Lako se provjeri da je $f'''\left(\frac{1}{2}e^{\frac{8}{3}}\right) \neq 0$ pa zaključujemo da je $x = \frac{1}{2}e^{\frac{8}{3}}$ točka infleksije funkcije f. Promatrajući predznak druge derivacije primjećujemo da je $f''(x) < 0$ za $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}e^{\frac{8}{3}}\right\rangle$, a $f''(x) > 0$ za $x \in \left\langle \frac{1}{2}e^{\frac{8}{3}}, +\infty\right\rangle$.

Dakle, funkcija f je konkavna na intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}e^{\frac{8}{3}}\right\rangle$ i konveksna na intervalu $\left\langle \frac{1}{2}e^{\frac{8}{3}}, +\infty\right\rangle$.

Funkcija je prikazana na Slici 5.4



Slika 5.4: Funkcija $f(x) = \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}}$

5.17 Zadaci za vježbu

1. Nađite derivacije funkcija:
   (a) $f(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n}$,
   (b) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$,
   (c) $f(x) = \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,
   (d) $f(x) = \ln\cos\frac{x-1}{x}$,
   (e) $f(x) = 4^{-\log_2\sqrt{1-x^2}}$,
   (f) $f(x) = \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$,
   (g) $f(x) = \ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$.
2. Odredite derivaciju implicitno zadanih funkcija:
   (a) $x^3 + y^3 = 3axy$,
   (b) $e^{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
3. Odredite jednadžbu tangente funkcije $f(x) = \ln x$ koja prolazi ishodištem.

4. Odredite jednadžbu tangente i jednadžbu normale funkcije $f(x) = x^x$ u točki za koju je $x_0 = 1$.
5. Odredite jednadžbu tangente na krivulju $x \operatorname{arctg} y - y = 0$ u točki za koju je $y_0 = 1$.
6. Odredite jednadžbu tangente na cikloidu $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ u $t = \frac{\pi}{2}$.
7. Odredite asimptote funkcije $f(x) = \frac{2x^2+9x+7}{3(x+4)}$.
8. Odredite sve asimptote krivulje $x = \frac{2t}{t^2-1}\, e^t$, $y = \frac{e^{t^2}}{t+1}$.
9. Odredite sve asimptote krivulje $y = \ln(1+x)$.
10. Odredite intervale monotonosti funkcije $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
11. Odredite intervale konveksnosti, konkavnosti i točke infleksije funkcije $f(x) = x^3 + 3x + 2$.
12. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$.
13. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^2 e^{-x}$.
14. Odredite volumen najvećeg valjka upisanog u kuglu zadanog radijusa R.
15. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
16. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $y^2 = \frac{x^3}{x-2}$.

5.18 Rješenja

1. (a) $f'(x) = x^n$,
   (b) $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$,
   (c) $f'(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}$,
   (d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \operatorname{tg} \frac{x-1}{x}$,
   (e) $f'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$,
   (f) $f'(x) = \frac{1}{\sin^3 x}$,
   (g) $f'(x) = \frac{1}{\cos x \sqrt{\sin x}}$.
2. (a) $f'(x) = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}$
   (b) $f'(x) = \frac{y+2x(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}{x-2y(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}$.
3. $y = \frac{1}{e}x$.
4. Tangenta je $y = x$, a normala je $y = -x + 2$.
5. $y - 1 = \frac{\pi^2}{4(\pi-2)} \left(x - \frac{4}{\pi}\right)$.
6. $y - 1 = x - \frac{\pi-2}{2}$.
7. Vertikalna asimptota je $x = -4$, a kosa asimptota je $y = \frac{1}{3}(2x+1)$.
8. Jednadžba horizontalne asimptote glasi $y = \frac{e}{2}$, kosa asimptota je $y = e^2 x - \frac{5}{2}e$, a vertikalna asimptota je dana s $x = 0$.

9. Zadana krivulja nema horizontalnih asimptota ni kosih asimptota dok jednadžba vertikalne asimptote glasi $x = -1$.

10. Funkcija $f(x)$ je rastuća za $x \in [1, \infty\rangle$, a padajuća za $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 1]$.

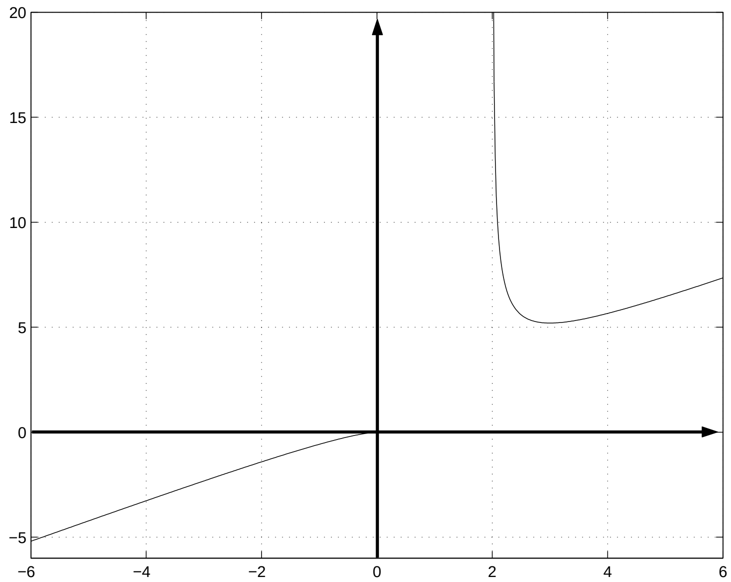
11. Funkcija $f(x)$ je strogo konkavna za $x < 0$, strogo konveksna za $x > 0$, a u $x = 0$ ima infleksiju.

12. Funkcija $f(x)$ ima lokalni maksimum za $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,$k \in \mathbb{Z}$, i lokalni minimum za $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

13. U točki $(0, 0)$ zadana funkcija ima lokalni minimum, a u točki $(2, 4e^{-2})$ lokalni maksimum.

14. $V = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

15. Funkcija je prikazana na Slici 5.5.



Slika 5.5: Funkcija $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

6.

NIZOVI I REDOVI

6.1 Limes niza po definiciji

Dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) = 0.$$

Rješenje. Ako je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) = 0,$$

prema definiciji 6.3 zaključujemo da za $a = 0$ mora biti moguće $\forall \varepsilon > 0$ pronaći $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $\mid a_n - 0 \mid < \varepsilon$. Budući da je $\sqrt[3]{n+1} > \sqrt[3]{n}$, odnosno $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} > 0$, vrijedi

$$\mid a_n - a \mid = \mid \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} - 0 \mid = \mid \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \mid = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}.$$

Dakle, mora biti

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}<\varepsilon.$$

Racionalizacijom dobivamo

$$\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\frac{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}<\varepsilon,$$

odnosno,

$$\frac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}<\varepsilon.$$

Množenjem cijele nejednakosti s nazivnikom slijedi

$$1<\varepsilon\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}\right).$$

Sada možemo pisati

$$1<\varepsilon\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}\right)<\varepsilon\left(3\sqrt[3]{(n+1)^2}\right)$$

jer je $n(n+1)<(n+1)^2, \quad (\forall n\in\mathbb{N})$. Tada je

$$\frac{1}{3\varepsilon}<\sqrt[3]{(n+1)^2}.$$

Potenciranjem cijele nejednakosti na treću potenciju dobivamo

$$\frac{1}{27\varepsilon^3}<(n+1)^2,$$

odnosno,

$$n>\frac{1}{\sqrt{27\varepsilon^3}}-1,$$

odakle slijedi

$$n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\sqrt{27\varepsilon^3}}-1\right]+1.$$

Dakle,

$$(\forall\varepsilon>0)\quad\left(\exists n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\sqrt{27\varepsilon^3}}-1\right]\right)$$

takav da $(\forall n\geq n_\varepsilon)$ vrijedi $\mid a_n-0\mid<\varepsilon$, to jest,

$$0=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right).$$

6.2 Gomilišta niza

U nizu

$$\frac{3}{8},\frac{2}{7},\frac{9}{14},\frac{4}{13},\frac{27}{32},\frac{8}{25},\frac{81}{86},\frac{16}{49},\ldots$$

odredite sva gomilišta. Da li zadani niz konvergira?

Rješenje. Grupiramo li članove zadanog niza na sljedeći način

$$\frac{3}{8},\frac{9}{14},\frac{27}{32},\frac{81}{86},\ldots \tag{6.1}$$

$$\frac{2}{7}, \frac{4}{13}, \frac{8}{25}, \frac{16}{49}, \ldots \tag{6.2}$$

dobivamo dva nova niza, pri čemu opći član niza (6.1) možemo pisati u obliku

$$a_{2k-1} = \frac{3^k}{3^k + 5},$$

a opći član niza (6.2) u obliku

$$a_{2k} = \frac{2^k}{3 \cdot 2^k + 1}.$$

Vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{3^k + 5} = 1, \quad \text{i} \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{3 \cdot 2^k + 1} = \frac{1}{3}.$$

Dakle, prema poglavlju 6.1.1 zaključujemo da zadani niz divergira u širem smislu i ima dva gomilišta, 1 i $\frac{1}{3}$.

6.3 Konvergencija niza realnih brojeva

Ispitajte konvergenciju niza čiji je opći član

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Rješenje. Promatrajući prva tri člana zadanog niza dobivamo

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ a_2 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

odnosno $a_1 > a_2$. Želimo zaključiti da općenito vrijedi $a_n > a_{n+1}$. Primijetimo da je

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = a_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < a_n,$$

jer je

$$1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1.$$

Budući da nejednakost $a_n > a_{n+1}$ vrijedi za svako n zaključujemo da je niz $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ strogo padajući. Niz je također omeđen odozdo jer je $a_n > 0$ za svako n. Prema teoremu 6.4 zadani niz je konvergentan.

6.4 Limesi nekih nizova

Izračunajte limese sljedećih nizova:

(a) $a_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)}{n^3}$,

(b) $a_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k^2+k-2}{k(k+1)}$.

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} k}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{n^3} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{6} \cdot \frac{2n+4}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+6n+4}{6n^2}$$

iz čega slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+6n+4}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

(b) Faktorizacijom brojnika i raspisivanjem članova niza dobivamo

$$L = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k-2}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4} \cdot \frac{3\cdot 6}{4\cdot 5} \cdot \frac{4\cdot 7}{5\cdot 6} \cdot \cdots \cdot \frac{(n-3)n}{(n-2)(n-1)} \cdot \frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n} \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}.$$

Nakon skraćivanja imamo

$$L = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n}$$

pa je

$$L = \frac{1}{3}.$$

6.5 Konvergencija ukliještenog niza

Odredite graničnu vrijednost niza

$$a_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}}.$$

Rješenje. Graničnu vrijednost zadanog niza odredit ćemo korištenjem teorema 6.7. Naime, vrijedi

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \tag{6.3}$$

$$\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} \le \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}. \tag{6.4}$$

Sada iz (6.3) i (6.4) slijedi

$$\frac{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}}{\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}} \le a_n \le \frac{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}}$$

što nakon skraćivanja daje

$$\frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Djelomičnim korjenovanjem dobivamo

$$\frac{n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \le a_n \le \frac{n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}},$$

to jest,

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq a_n \leq \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Budući da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

to prema teoremu 6.7 zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

6.6 Primjena važnijih limesa

Odredite

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\ln(n+3) - \ln n\right].$$

Rješenje. Koristeći svojstva logaritamske funkcije zadani limes možemo zapisati u obliku

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\ln(n+3) - \ln n\right] = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)^n.$$

Koristeći poglavlje 6.1.6 limes dalje rastavljamo na sljedeći način:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = 3\ln e = 3.$$

6.7 Konvergencija reda realnih brojeva I

Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}.$$

Rješenje. Opći član a_n zadanog reda možemo zapisati u obliku

$$a_n = \frac{2^n}{\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1}} = \frac{2^n}{\ln\left[\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]}.$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{+\infty}{\ln e^{\frac{1}{2}}\cdot 1} = +\infty \neq 0,$$

pa prema teoremu 6.9 ovaj red divergira.

6.8 Konvergencija reda realnih brojeva II

Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n! - (n+2)!}{(n+3)!}(n+1) + \frac{n+1}{n+3}\right].$$

Rješenje. Opći član reda zapisat ćemo u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{n+3}\right](n+1) + \frac{n+1}{n+3} \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{n+1}{n+3} + \frac{n+1}{n+3} \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Rastavljanjem dobivenog izraza na parcijalne razlomke dobivamo

$$a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.$$

Vidimo da n-tu parcijalnu sumu reda možemo zapisati u obliku

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

Prema definiciji 6.9 zaključujemo da promatrani red konvergira i da mu suma iznosi $\frac{1}{3}$.

6.9 Konvergencija reda realnih brojeva III

Dokažite da red brojeva

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$$

konvergira i izračunajte njegovu sumu.

Rješenje. Da bismo dokazali da zadani red konvergira potrebno je dokazati da je niz parcijalnih suma

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^3-1}{k^3+1}\right)$$

konvergentan. Stoga ćemo naći izraz za parcijalnu sumu s_n. Koristeći svojstva logaritma dobivamo

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^3-1}{k^3+1}\right) = \ln \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

Nadalje, zbroj i razliku kubova možemo napisati kao

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)\left[(k-1)^2+(k-1)+1\right]}$$

pa na taj način dobivamo

$$s_n = \ln \frac{1\cdot(2^2+2+1)}{3\cdot(1^2+1+1)}\cdot\frac{2\cdot(3^2+3+1)}{4\cdot(2^2+2+1)}\cdots$$

$$\frac{(n-2)\left[(n-1)^2+(n-1)+1\right]}{n\left[(n-2)^2+(n-2)+1\right]}\cdot\frac{(n-1)\left[n^2+n+1\right]}{(n+1)\left[(n-1)^2+(n-1)+1\right]}$$

$$= \ln\left[\frac{1\cdot 2}{1^2+1+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)\right]$$

$$= \ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right).$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \ln\left(\frac{2}{3}\right)+\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln(1) = \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

Zaključujemo da niz $\{s_n \mid n \geq 2\}$ konvergira te da je suma zadanog reda

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

6.10 Prvi poredbeni kriterij konvergencije

Ispitajte konvergenciju reda

$$1+\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln n}+\cdots$$

Rješenje. Opći član zadanog reda možemo pisati u obliku:

$$a_n = \frac{1}{\ln n}.$$

Budući je

$$\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geq 2,$$

prema teoremu 6.10 (i) zaključujemo da je promatrani red, kao red s pozitivnim članovima i divergentnom minorantom, divergentan.

6.11 Drugi poredbeni kriterij konvergencije

Ispitajte konvergenciju reda

$$1+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}+\cdots$$

Rješenje. Promotrimo li redove s općim članovima oblika

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{\ln n}{n}, \qquad n > 2,$$

vidimo da su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima, da je red $\sum a_n$ divergentan te da vrijedi

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Prema teoremu 6.10 (ii) zaključujemo da zadani red $\sum b_n$ divergira.

6.12 D'Alembertov kriterij konvergencije

Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Rješenje. Primjenom D'Alembertovog kriterija konvergencije prema teoremu 6.10 (iii) dobivamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Budući je

$$q = \frac{1}{4} < 1,$$

zaključujemo da promatrani red konvergira.

6.13 Cauchyjev kriterij konvergencije

Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}.$$

Rješenje. Prema Cauchyjevu kriteriju konvergencije, opisanom u teoremu 6.10 (iv), je

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n+1}.$$

Izraz pod znakom limesa možemo zapisati u obliku

$$\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2-4}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{4}{n+2}\right)^{n+1}$$

pa je

$$q = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{n+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{4}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-4}\cdot\frac{-4}{n+2}\cdot(n+1)}\right] =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-4}}\right]^{\lim_{n\to\infty} \frac{-4n-4}{n+2}} = e^{-4}.$$

Budući da je $q = e^{-4} = \frac{1}{e^4} < 1$, to je zadani red konvergentan.

6.14 Raabeov kriterij konvergencije

Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}!}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdot\dots\cdot(2+\sqrt{n})}.$$

Rješenje. Konvergenciju ovog reda najjednostavnije možemo ispitati pomoću Raabeovog kriterija koristeći teorem 6.10 (v). Nađimo najprije

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= a_n \cdot \frac{1}{a_{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n}!}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdot\dots\cdot(2+\sqrt{n})} \cdot \frac{(2+\sqrt{1})\cdot\dots\cdot(2+\sqrt{n})(2+\sqrt{n+1})}{\sqrt{(n+1)!}} \\
&= \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \\
&= 1+\frac{2}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$

Dakle, vrijedi

$$q = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \infty > 1,$$

pa je zadani red konvergentan.

6.15 Leibnitzov kriterij konvergencije za alternirane redove

Ispitajte konvergenciju reda

$$1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}+\cdots$$

Rješenje. Za promatranje redova čiji članovi imaju alternirajuće predznake koristimo Leibnitzov kriterij konvergencije. Prema teoremu 6.13 najprije moramo ispitati da li je niz apsolutnih vrijednosti članova zadanog reda monotono opadajući, to jest, ispitati da li za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost

$$\frac{n}{6n-5} > \frac{n+1}{6(n+1)-5},$$

odnosno

$$\frac{n}{6n-5} > \frac{n+1}{6n+1}.$$

Množenjem cijele nejednakosti sa zajedničkim nazivnikom dobivamo

$$6n^2+n > 6n^2+n-5. \tag{6.5}$$

Budući da nejednakost (6.5) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, a (6.5) je ekvivalentno s (6.15), to je prvi uvjet Leibnitzovog kriterija konvergencije zadovoljen. Kako je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6} \neq 0,$$

to zadani red ne zadovoljava drugi uvjet Leibnitzovog kriterija konvergencije. Dakle, zadani red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, n}{6n-5}$$

je divergentan.

6.16 Konvergencija reda funkcija

Nađite interval konvergencije reda

$$\frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{x^4}{2^2} + \cdots + \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n} + \cdots$$

te ispitajte njegovo ponašanje na rubovima intervala konvergencije.

Rješenje. Za određivanje intervala konvergencije zadanog reda primjenit ćemo D'Alembertov kriterij konvergencije:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}} \right) : \left(\frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n} \right) \right| \\ &= \frac{x^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^2(n+2)^2} = \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Prema teoremu 6.10 (iii) promatrani red konvergira za $x^2 < 2$, a divergira za $x^2 > 2$. Ispitajmo konvergenciju reda za $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Uvrštavajući $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ u zadani red dobijemo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}.$$

Taj red divergira pa zaključujemo da zadani red konvergira za $x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$.

6.17 Razvoj funkcije u Taylorov red

Razvijte u Taylorov red oko $x_0 = 1$ funkciju

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(5x-4)^7}}.$$

Rješenje. Prema teoremu 6.18 za funkciju $f(x)$ računamo

$$f'(x) = -\frac{7}{3} \cdot (5x-4)^{-\frac{10}{3}} \cdot 5$$

$$f''(x) = -\frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) \cdot (5x-4)^{-\frac{13}{3}} \cdot 5 \cdot 5$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{-7(-10) \cdot \cdots \cdot (-4-3n)}{3^n} \cdot (5x-4)^{\frac{-7-3n}{3}} \cdot 5^n$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4+3n)}{3^n} \cdot (5x-4)^{\frac{-7-3n}{3}} \cdot 5^n$$

$$f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^n \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4+3n)}{3^n} \cdot 5^n,$$

$$f(1) = 1.$$

Odvojimo li član za $n = 0$, to jest $f(1)$, Taylorov red za $f(x)$ možemo pisati u obliku

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^n \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4+3n)}{3^n} 5^n}{n!} (x-1)^n.$$

Za određivanje područja konvergencije primjenit ćemo D'Alembertov kriterij:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\frac{7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4+3n)(7+3n)}{3^{n+1}} \cdot 5^{n+1}}{(n+1)!} |x-1|^{n+1}}{\frac{\frac{7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4+3n)}{3^n} \cdot 5^n}{n!} |x-1|^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(7+3n) \cdot 5 \cdot |x-1|}{3(n+1)}$$

$$= 5 \cdot |x-1|.$$

Red konvergira za $5\ |x-1| < 1$, odnosno za

$$x \in \left\langle \frac{4}{5}, \frac{6}{5} \right\rangle.$$

6.18 Taylorov red trigonometrijske funkcije

Funkciju

$$f(x) = \sin^2(2x+3)$$

Razvijte u Taylorov red u okolini točke $x_0 = \frac{\pi-6}{4}$ i odredite interval konvergencije tog reda.

Rješenje. Koristeći svojstva trigonometrijskih funkcija zadanu funkciju možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2(2x+3) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(4x+6)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x+6) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(4x+6+\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Da bismo odredili Taylorov razvoj funkcije $f(x)$ prema teoremu 6.18 računamo:

$$f\left(\frac{\pi-6}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2} = 1,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(4x+6+\frac{\pi}{2}\right) \cdot 4 = -\frac{1}{2}\sin\left(4x+6+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) \cdot 4,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \cos\left(4x + 6 + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 4 = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin\left(4x + 6 + \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(x) = -\frac{1}{2} \cdot 4^n \cdot \sin\left(4x + 6 + \frac{(n+1)\pi}{2}\right), \qquad n \geq 1.$$

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi - 6}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cdot 4^n \cdot \sin\left[\pi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot 4^n \cdot \sin\frac{(n+1)\pi}{2}.$$

Za neparne n, to jest, za $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, imamo

$$f^{(2k-1)}\left(\frac{\pi - 6}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4^{2k-1} \cdot \sin k\pi = 0.$$

Za $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, vrijedi

$$f^{(2k)}\left(\frac{\pi - 6}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4^{2k} \cdot \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4^{2k} \cdot (-1)^k.$$

Taylorov razvoj funkcije $f(x)$ dan je s

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{4^{2k}(-1)^k}{(2k)!} \left(x - \frac{\pi - 6}{4}\right)^{2k}.$$

Odredimo interval konvergencije dobivenog reda pomoću D'Alembertovog kriterija:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{4^{2n}}{(2n)!}} \frac{\left|x - \frac{\pi-6}{4}\right|^{2n+2}}{\left|x - \frac{\pi-6}{4}\right|^{2n}} = \frac{4^2 \left(x - \frac{\pi-6}{4}\right)^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0.$$

Prema teoremu 6.10 (iii) zaključujemo da promatrani red konvergira za $x \in \langle -\infty, +\infty \rangle$.

6.19 Razvoj funkcije u MacLaurinov red

Pomoću MacLaurinova razvoja funkcije

$$f(x) = \frac{1 + x}{(1 - x)^3}$$

izračunajte $S = 1 - \frac{4}{3} + \frac{9}{9} - \frac{16}{27} + \frac{25}{81} - \cdots$.

Rješenje. Zapišemo li zadanu funkciju u obliku

$$f(x) = \frac{1 + x}{(1 - x)^3} = \frac{2 + x - 1}{-(x - 1)^3} = -2(x - 1)^{-3} - (x - 1)^{-2}$$

slijedi:

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = -2(-3)(x - 1)^{-4} - (-2)(x - 1)^{-3},$$

$$f''(x) = -2(-3)(-4)(x - 1)^{-5} - (-2)(-3)(x - 1)^{-4},$$

$$f^{(n)}(x) = -2(-3) \cdot \cdots \cdot (-n - 2)(x - 1)^{-n-3} + (-1)(-2) \cdot \cdots \cdot (-n - 1)(x - 1)^{-n-2},$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n+2)! \cdot (x-1)^{-n-3} + (-1)^{n+1}(n+1)! \cdot (x-1)^{-n-2},$$

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= (-1)^{n+1}(n+2)(n+1)(-1)^{-n-3} + (-1)^{n+1}(n+1)(-1)^{-n-2} = \\ &= (n+2)(n+1) - (n+1) = (n+1)(n+2-1) = (n+1)^2.\end{aligned}$$

Dakle, prema teoremu 6.18 MacLaurinov razvoj funkcije $f(x)$ glasi

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 \cdot x^n.$$

Prema D'Alembertovu kriteriju (teorem 6.10(iii)) je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 |x| = |x|$$

pa MacLaurinov red funkcije $f(x)$ konvergira za $x \in \langle -1, 1\rangle$.

Traženu sumu možemo zapisati na sljedeći način:

$$S = 1 - \frac{4}{3} + \frac{9}{9} - \frac{16}{27} + \frac{25}{81} - \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)^2}{3^n}.$$

Koristeći dobiveni MacLaurinov razvoj funkcije $f(x)$ za $x = -\frac{1}{3}$ dobivamo

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1-\frac{1}{3}}{\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)^2}{3^n} = S,$$

odnosno

$$S = \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3} = \frac{9}{32}.$$

6.20 Razvoj funkcije u MacLaurinov red pomoću geometrijskog reda

Razvijte u MacLaurinov red funkciju

$$f(x) = \frac{x^4+1}{1+x+x^2+x^3}.$$

Rješenje. U ovakvom zadatku traženje općeg člana MacLaurinovog reda uzastopnim deriviranjem ne vodi rješenju jer dobivamo sve složenije racionalne funkcije pa ćemo zadatak riješiti korištenjem geometrijskog reda.

Odvojimo najprije cijeli dio racionalne funkcije, a ostatak rastavimo na parcijalne razlomke:

$$\frac{x^4+1}{1+x+x^2+x^3} = (x-1) + \frac{2}{1+x+x^2+x^3} = (x-1) + \frac{1}{1+x} + \frac{-x+1}{1+x^2}.$$

Dakle, promatramo

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

i

$$f_2(x) = \frac{-x+1}{1+x^2} = (-x+1)\,\frac{1}{1-(-x^2)} = (-x+1)\,\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^{2n}.$$

Područje konvergencije "naslijeđeno" je od geometrijskog reda pa red funkcije $f_1(x)$ konvergira za $|x| < 1$, a red funkcije $f_2(x)$ konvergira za $|x^2| < 1$, odnosno također za $|x| < 1$. Stoga i red funkcije $f(x)$ konvergira za $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Da bismo objedinili sve dijelove reda funkcije $f(x)$, raspisat ćemo prvih nekoliko članova svakog od njih. Imamo:

$$f_1(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + \cdots,$$

$$f_2(x) = 1 - x + x^3 - x^2 - x^5 + x^4 + x^7 - x^6 - \cdots$$

Kada zbrojimo sve članove dobivamo

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x + 2(x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \cdots) - 2(x^5 + x^9 + x^{13} + x^{17} + \cdots) = \\ &= 1 - x + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{4n} - x^{4n+1}\right). \end{aligned}$$

6.21 Konvergencija reda potencija

Nađite područje apsolutne konvergencije reda potencija

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Rješenje. Opći član reda potencija dan je s

$$a_n = \frac{(x-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Za određivanje područja konvergencije možemo primijeniti D'Alembertov kriterij:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+3)(2n+5)}\,|x-1| = |x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{5}{2n}} = |x-1|.$$

Ako je $|x-1| < 1$, odnosno $0 < x < 2$, tada red apsolutno konvergira, a za $|x-1| > 1$, odnosno $x < 0$ ili $x > 2$, red apsolutno divergira.

Da bismo ispitali konvergenciju na rubovima intervala $(0, 2)$ potrebno je uvrstiti vrijednosti $x = 0$ i $x = 2$ u zadani red. Za $x = 0$ imamo

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)},$$

dok je za $x = 2$

$$f(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}.$$

U oba slučaja vrijedi

$$|a_n| = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right),$$

pa je parcijalna suma $s_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$ dana s

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right).$$

Iz ovoga slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{6}$$

pa zaključujemo da zadani red apsolutno konvergira u točkama $x = 0$ i $x = 2$. Konačno, red apsolutno konvergira u zatvorenom intervalu $[0, 2]$, a divergira u skupu $(\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

6.22 Zadaci za vježbu

1. Zadan je niz $a_n = \frac{n-1}{n+1}$. Odredite $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ te za $\varepsilon = 10^{-4}$ odredite pripadni n_ε.
2. Za niz $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos n\pi$ odredite $\inf a_n$, $\sup a_n$, $\liminf a_n$, $\limsup a_n$.
3. Izračunajte limese sljedećih nizova:
   (a) $a_n = \frac{1}{n^3} \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{j} i$,
   (b) $a_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
4. Odredite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gdje je $a_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+\frac{1}{2}}} + \cdot + \frac{2}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}}$.
5. Odredite $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$.
6. Ispitajte konvergenciju redova pomoću parcijalnih suma:
   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$,
   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
7. Ispitajte konvergenciju reda
$$1 + \frac{1}{2^{\sin 2\alpha}} + \frac{1}{3^{\sin 3\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\sin n\alpha}} + \cdots.$$
8. Ispitajte konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-5}{n\,2^n}$.
9. Ispitajte konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n^2)^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$.
10. Ispitajte konvergenciju reda
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)(a+3)\cdot\cdots\cdot(a+n)}.$$
11. Ispitajte da li je alternirajući red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}$ konvergentan?

12. Odredite interval konvergencije reda
$$(x-1)+\frac{2!(x-1)^2}{2^2}+\cdots+\frac{n!(x-1)^n}{n^n}+\cdots$$
i ispitajte njegovo ponašanje na rubovima intervala konvergencije.

13. Funkciju $y=\ln\sqrt{x^2+3x-4}$ razvijte u Taylorov red u okolini točke $x_0=2$ te odredite interval konvergencije tog reda.

14. Funkciju $f(x)=\cos(2x-2)$ razvijte u Taylorov red u okolini točke $x_0=1$.

15. Razvijte u MacLaurinov red funkciju $f(x)=\frac{x^2+1}{2+x}$.

16. Funkciju $f(x)=\ln(1+2x)$ razvijte u MacLaurinov red.

6.23 Rješenja

1. $a_0=1$, $n_\varepsilon=19999+1$.
2. $\inf a_n=-2$, $\sup a_n=\frac{3}{2}$, $\liminf a_n=-1$, $\limsup a_n=1$.
3. (a) $L=\frac{1}{6}$,
   (b) $L=\frac{1}{2}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.
5. $L=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.
6. (a) Zadani red divergira.
   (b) Zadani red konvergira i $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{3}$.
7. Zadani red divergira.
8. $q=\frac{1}{2}<1$ pa zadani red konvergira.
9. $q=\frac{1}{2}<1$ pa zadani red konvergira.
10. $q=a$ pa je zadani red
    (a) konvergentan za $a>1$,
    (b) divergentan za $a<1$.
11. Zadani red je divergentan.
12. Red konvergira za $x\in\langle 1-e,1+e\rangle$.
13. $y=\frac{1}{2}\ln 6+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{6^n}+1\right)(x-2)^n$ i red konvergira apsolutno za $x\in\langle 1,3\rangle$. U $x=1$ red divergira, a u $x=3$ red konvergira.
14. $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^k}{(2k)!}(x-1)^{2k}$.
15. $f(x)=x-2+\frac{5}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$ i red konvergira za $x\in\langle -2,2\rangle$.
16. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{2^n}{n}x^n$.

Dio II.

DA/NE KVIZ

7.

Osnove matematike

1. ☐ DA ☐ NE
   Sud je izjava koja može biti samo istinita ili lažna.
2. ☐ DA ☐ NE
   "Da li je danas ponedjeljak?" je sud.
3. ☐ DA ☐ NE
   Konjukciju označavamo s $\wedge$.
4. ☐ DA ☐ NE
   $[\tau(A \wedge B) = \top] \Rightarrow [\tau(A) = \top \quad \wedge \quad \tau(B) = \bot]$.
5. ☐ DA ☐ NE
   Implikaciju označavamo s $\vee$.
6. ☐ DA ☐ NE
   Implikaciju označavamo s $\Leftrightarrow$.
7. ☐ DA ☐ NE
   $[\tau(A \Rightarrow B) = \bot] \Rightarrow [\tau(A) = \top \quad \wedge \quad \tau(B) = \bot]$.
8. ☐ DA ☐ NE
   $[\tau(A \Leftrightarrow B) = \bot] \Rightarrow [\tau(A) = \bot \quad \vee \quad \tau(B) = \bot]$.
9. ☐ DA ☐ NE
   "A je brži od B" je predikat.
10. ☐ DA ☐ NE
    $\tau[(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 = 4] = \top$.
11. ☐ DA ☐ NE
    $\tau[(\exists! x \in \mathbb{Z}) \quad x^2 = 4] = \top$.
12. ☐ DA ☐ NE
    Za svaki skup X vrijedi $X \in 2^X$.
13. ☐ DA ☐ NE
    Za svaki skup X vrijedi $\emptyset \in 2^X$.

14. ☐ DA ☐ NE
Ako je $X = \{A, 1\}$ tada je $2^X = \{\{A\}, \{1\}\}$.

15. ☐ DA ☐ NE
Binarna relacija na skupu A je svaki podskup skupa $A \times A$.

16. ☐ DA ☐ NE
Binarna relacija na skupu A je svaki podskup skupa A.

17. ☐ DA ☐ NE
Binarna relacija $\mathcal{R}$ na skupu A je refleksivna ako je $x \,\mathcal{R}\, x$ za $\forall x \in A$.

18. ☐ DA ☐ NE
Binarna relacija $\mathcal{R}$ na skupu A je tranzitivna ako je $x \,\mathcal{R}\, x$ za $\forall x \in A$.

19. ☐ DA ☐ NE
Binarna relacija $\mathcal{R}$ na skupu A je simetrična ako $x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow y \,\mathcal{R}\, x$.

20. ☐ DA ☐ NE
Binarna relacija $\mathcal{R}$ na skupu A je tranzitivna ako $(x \,\mathcal{R}\, y \wedge y \,\mathcal{R}\, z) \Rightarrow x \,\mathcal{R}\, z$.

21. ☐ DA ☐ NE
Binarna relacija $\mathcal{R}$ na skupu A je relacija ekvivalencije ako $(x \,\mathcal{R}\, y \wedge y \,\mathcal{R}\, z) \Rightarrow x \,\mathcal{R}\, z$.

22. ☐ DA ☐ NE
Binarna relacija je relacija ekvivalencije ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

23. ☐ DA ☐ NE
Binarna relacija je relacija ekvivalencije ako je refleksivna, anti-simetrična i tranzitivna.

24. ☐ DA ☐ NE
Binarna relacija $\mathcal{R}$ na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zadana s $m \,\mathcal{R}\, n$ ako su m i n iste parnosti je relacija ekvivalencije.

25. ☐ DA ☐ NE
Binarna relacija je relacija parcijalnog uređaja ako je refleksivna, anti-simetrična i tranzitivna.

26. ☐ DA ☐ NE
Skup je potpuno uređen ako je na njemu zadana relacija parcijalnog uređaja.

27. ☐ DA ☐ NE
Broj $\sqrt{2}$ je donja međa skupa $(3, 10] \subset \mathbb{R}$.

28. ☐ DA ☐ NE
Broj 10 je gornja međa skupa $(3, 10] \subset \mathbb{R}$.

29. ☐ DA ☐ NE
Broj 10 je infimum skupa $(3, 10] \subset \mathbb{R}$.

30. ☐ DA ☐ NE
Broj 10 je maksimum skupa $(3, 10] \subset \mathbb{R}$.

31. ☐ DA ☐ NE
Broj 3 je infimum skupa $(3, 10] \subset \mathbb{R}$.

32. ☐ DA ☐ NE
Skup $(3, 10] \subset \mathbb{R}$ nema supremum.

33. ☐ DA ☐ NE
Skup $(3, 10] \subset \mathbb{Q}$ nema infimum.

34. ☐ DA ☐ NE
Skup $(3, 10] \subset \mathbb{Q}$ nema minimum.

35. ☐ DA ☐ NE
Broj 11 je gornja međa skupa $(3, 10] \subset \mathbb{Q}$.

36. ☐ DA ☐ NE
Broj 10 je jedina gornja međa skupa $(3, 10] \subset \mathbb{Q}$.

37. ☐ DA ☐ NE
Supremum skupa je jedinstven.

38. ☐ DA ☐ NE
Ako je $A = (3, 10] \subset \mathbb{R}$, tada je $\min A = 3$, a $\inf A$ ne postoji.

39. ☐ DA ☐ NE
Funkcije $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x}$ i $g(x) = 1 - x$ su jednake.

40. ☐ DA ☐ NE
Ako je $f(x) = x^3$ tada je $f(c + d) = c^3 + d^3$.

41. ☐ DA ☐ NE
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

42. ☐ DA ☐ NE
$h \circ f = f \circ h$.

43. ☐ DA ☐ NE
Kompozicija funkcija je asocijativna.

44. ☐ DA ☐ NE
Kompozicija funkcija je komutativna.

45. ☐ DA ☐ NE
Za zadanu restrikciju domene restrikcija funkcije je uvijek jedinstvena.

46. ☐ DA ☐ NE
Ekstenzija funkcije je uvijek jedinstvena.

47. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x}$ je ekstenzija funkcije $g(x) = 1 - x$.

48. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x}$ je restrikcija funkcije $g(x) = 1 - x$.

49. ☐ DA ☐ NE

Funkcija f je surjekcija ako $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ za $\forall x, x' \in D_f$.

50. ☐ DA ☐ NE

Funkcija f je injekcija ako $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ za $\forall x, x' \in D_f$.

51. ☐ DA ☐ NE

Funkcija je injekcija ako u različitim točkama ima različite vrijednosti.

52. ☐ DA ☐ NE

Bijekcija je istovremeno injekcija i surjekcija.

53. ☐ DA ☐ NE

Identiteta je funkcija zadana s $f(x) = x$.

54. ☐ DA ☐ NE

Identiteta je funkcija zadana s $f(x) = 1$.

55. ☐ DA ☐ NE

Za svaku funkciju f kompozicija $f \circ f^{-1}$ je identiteta.

56. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x}$ je bijekcija.

57. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = 1$ je injekcija.

58. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = x \cdot \sin x$ je bijekcija.

59. ☐ DA ☐ NE

Dva skupa su ekvipotentna ako postoji injekcija između njih.

60. ☐ DA ☐ NE

Ekvipotencija je relacija ekvivalencije na skupu svih skupova.

61. ☐ DA ☐ NE

Skup je beskonačan ako je ekvipotentan sa svojim pravim podskupom.

62. ☐ DA ☐ NE

Skup prirodnih brojeva i skup parnih brojeva imaju jednako mnogo elemenata.

63. ☐ DA ☐ NE

Skup prirodnih brojeva je jedini skup koji zadovoljava Peanove aksiome.

64. ☐ DA ☐ NE

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

65. ☐ DA ☐ NE

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

66. ☐ DA ☐ NE

Skup prirodnih brojeva je neprebrojiv.

67. ☐ DA ☐ NE

Skup prirodnih brojeva je diskretan.

68. ☐ DA ☐ NE

Ukupno ima n^n različitih permutacija n-tog reda.

69. ☐ DA ☐ NE

$(n+1)! = n \cdot n!$.

70. ☐ DA ☐ NE

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

71. ☐ DA ☐ NE

Za $\forall k, n \in \mathbb{N},\ k < n$ vrijedi $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

72. ☐ DA ☐ NE

Binomni poučak glasi $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

73. ☐ DA ☐ NE

Binomni poučak glasi $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

74. ☐ DA ☐ NE

Zbroj elemenata u n-tom retku Pascalovog trokuta jednak je 2^n.

75. ☐ DA ☐ NE

Zbroj elemenata u n-tom retku Pascalovog trokuta jednak je n^2.

76. ☐ DA ☐ NE

Skup $\mathbb{Z}$ ima više elemenata od skupa $\mathbb{N}$.

77. ☐ DA ☐ NE

Skup $\mathbb{Z}$ je prebrojiv.

78. ☐ DA ☐ NE

Skup cijelih brojeva je gust.

79. ☐ DA ☐ NE

$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

80. ☐ DA ☐ NE

Skup racionalnih brojeva je neprebrojiv.

81. ☐ DA ☐ NE
Skup racionalnih brojeva je gust.

82. ☐ DA ☐ NE
Skup racionalnih brojeva ima više elemenata od skupa $\mathbb{Z}$.

83. ☐ DA ☐ NE
Skup $\mathbb{Q}$ prekriva cijeli brojevni pravac.

84. ☐ DA ☐ NE
Skup $\mathbb{R}$ je unija skupova racionalnih i iracionalnih brojeva.

85. ☐ DA ☐ NE
Skup $\mathbb{R}$ je gust.

86. ☐ DA ☐ NE
Skup $\mathbb{R}$ je neprebrojiv.

87. ☐ DA ☐ NE
Skup $\mathbb{R}$ je prebrojivo beskonačan.

88. ☐ DA ☐ NE
Za $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $|x| = \sqrt{x^2}$.

89. ☐ DA ☐ NE
Za $x \in \mathbb{R}$ nejednakost $|x| < r$ znači $-r < x < r$.

90. ☐ DA ☐ NE
Nejednakost trokuta glasi $|x + y| \geq |x| + |y|$.

91. ☐ DA ☐ NE
Za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $|x - y| \geq |x| - |y|$.

92. ☐ DA ☐ NE
Za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $|x - y| \leq |x| - |y|$.

93. ☐ DA ☐ NE
$i^{34} = -1$.

94. ☐ DA ☐ NE
$i^{33} = i$.

95. ☐ DA ☐ NE
$i^{127} = -1$.

96. ☐ DA ☐ NE
$i^{93} = -i^6$.

97. ☐ DA ☐ NE
$\mathrm{Im}(3 - 17i) = -17i$.

98. ☐ DA ☐ NE
$|3 - 4i| = 25$.

99. ☐ DA ☐ NE
$|-3-4i| = 5.$

100. ☐ DA ☐ NE
$\arg(3-4i) = 5.$

101. ☐ DA ☐ NE
$(2-3i)(-3+4i) = 6+17i.$

102. ☐ DA ☐ NE
$\frac{5+6i}{i-1} = \frac{1}{2} - \frac{11}{2}i.$

103. ☐ DA ☐ NE
$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z.$

104. ☐ DA ☐ NE
$z + \bar{z}$ je realan broj za $\forall z \in \mathbb{C}$.

105. ☐ DA ☐ NE
$\bar{z} \cdot z = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2.$

106. ☐ DA ☐ NE
$|\bar{z} \cdot z| = |z|^2.$

107. ☐ DA ☐ NE
$|\bar{z}| < |z|.$

108. ☐ DA ☐ NE
$|\bar{z} \cdot z| = |z|.$

109. ☐ DA ☐ NE
$1 - \sqrt{3}i = 2\big(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\big).$

110. ☐ DA ☐ NE
$7\big(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\big) = -\frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}i.$

111. ☐ DA ☐ NE
Skup $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ je kružnica radijusa r oko točke z_0.

112. ☐ DA ☐ NE
Skup $\{z \in \mathbb{C} : |z + z_0| = r\}$ je kružnica radijusa r oko točke z_0.

113. ☐ DA ☐ NE
Skup $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{\pi}{3}\}$ je polupravac koji počima u ishodištu i prolazi kroz točku $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$.

114. ☐ DA ☐ NE
Skup $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| + |z - z_2| = r,\ z_1 \neq z_2\}$ je ili elipsa ili dužina ili prazan skup.

115. ☐ DA ☐ NE
Skup $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| + |z - z_2| = 1\}$ je pravac kroz točke z_1 i z_2.

116. ☐ DA ☐ NE

Skup $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| + |z+2| = 5\}$ je elipsa sa žarištima u točkama $z_1 = -1$ i $z_2 = 2$.

117. ☐ DA ☐ NE

$7\big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\big) \cdot 3\big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\big) = 21\big(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\big).$

118. ☐ DA ☐ NE

$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$

119. ☐ DA ☐ NE

Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tada je $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

120. ☐ DA ☐ NE

$\big[\sqrt{2}\big(\cos\frac{5}{6} + i\sin\frac{5}{6}\big)\big]^{12} = 64(\cos 10 + i\sin 10).$

121. ☐ DA ☐ NE

Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tada je $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\big)$ za $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

122. ☐ DA ☐ NE

$[32(\cos 10 + i\sin 10)]^{\frac{1}{5}} = 2\big(\cos\frac{10 + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{10 + 2k\pi}{5}\big)$ za $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

123. ☐ DA ☐ NE

$\sqrt[6]{-2 + 0i} = \sqrt[6]{2}\big(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\big)$ za $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

124. ☐ DA ☐ NE

Svaki kompleksni broj ima točno dva različita n-a korijena za $\forall n > 2$.

125. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba $\big(z + \frac{i+1}{2-i}\big)^4 = \frac{i}{i-1}$ ima točno četiri različita kompleksna rješenja.

126. ☐ DA ☐ NE

$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$

127. ☐ DA ☐ NE

$e^{x+iy} = e^x + ie^y.$

128. ☐ DA ☐ NE

$e^{2-3i} = e^2(\cos 3 - i\sin 3).$

129. ☐ DA ☐ NE

$e^{3+4i} = e^3 + ie^4.$

130. ☐ DA ☐ NE

$|e^{27i}| = 1.$

Rješenja

1. DA	23. NE	45. DA	67. DA	89. DA	111. DA
2. NE	24. DA	46. NE	68. NE	90. NE	112. NE
3. DA	25. DA	47. NE	69. NE	91. DA	113. DA
4. NE	26. NE	48. DA	70. DA	92. NE	114. DA
5. NE	27. DA	49. NE	71. DA	93. DA	115. NE
6. NE	28. DA	50. DA	72. DA	94. DA	116. NE
7. DA	29. NE	51. DA	73. NE	95. NE	117. DA
8. NE	30. DA	52. DA	74. DA	96. NE	118. DA
9. DA	31. DA	53. DA	75. NE	97. NE	119. DA
10. NE	32. NE	54. NE	76. NE	98. NE	120. DA
11. NE	33. NE	55. NE	77. DA	99. DA	121. DA
12. DA	34. DA	56. DA	78. NE	100. NE	122. DA
13. DA	35. DA	57. NE	79. NE	101. DA	123. NE
14. NE	36. NE	58. NE	80. NE	102. DA	124. NE
15. DA	37. DA	59. NE	81. DA	103. DA	125. DA
16. NE	38. NE	60. DA	82. NE	104. DA	126. DA
17. DA	39. NE	61. DA	83. NE	105. DA	127. NE
18. NE	40. NE	62. DA	84. DA	106. DA	128. DA
19. DA	41. DA	63. DA	85. DA	107. NE	129. NE
20. DA	42. NE	64. DA	86. DA	108. NE	130. DA
21. NE	43. DA	65. NE	87. NE	109. DA	
22. DA	44. NE	66. NE	88. DA	110. NE	

8.

Linearna algebra

1. ☐ DA ☐ NE
   Ako su grafovi dvije linearne jednadžbe paralelni, tada pripadni sustav ima jedinstveno rješenje.
2. ☐ DA ☐ NE
   Ako je matrica A tipa 3×4 a B tipa 4×3, tada je matrica $A + B$ tipa 3×3.
3. ☐ DA ☐ NE
   Dvije matrice su ulančane ako prva ima onoliko stupaca koliko druga ima redaka.
4. ☐ DA ☐ NE
   Matrice A i B koje su obje tipa 7×3 su ulančane i postoji produkt AB.
5. ☐ DA ☐ NE
   Ako je matrica A tipa $m \times k$ i B tipa $k \times n$, tada su elementi matrice $C = AB$ dani s $c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$.
6. ☐ DA ☐ NE
   Ako je matrica A tipa $m \times k$ i B tipa $k \times n$, tada su elementi matrice $C = AB$ dani s $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$.
7. ☐ DA ☐ NE
   Množenje matrica je asocijativno.
8. ☐ DA ☐ NE
   Broj računskih operacija potreban da bi se pomnožile dvije matrice $n \times n$ iznosi $2n^3 - n^2$.
9. ☐ DA ☐ NE
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 2 & 12 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -4 & -15 & 1 \\ -36 & -12 & -45 & 3 \end{bmatrix}.$$
10. ☐ DA ☐ NE
   $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^2 = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
11. ☐ DA ☐ NE
   $$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^9 = (-2)^8 \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

12. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -4 & -1\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}.$$

13. ☐ DA ☐ NE

Jedinična matrica reda 3 ima oblik $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

14. ☐ DA ☐ NE

Nul-matrica je matrica čiji su svi elementi jednaki nula, a jedinična matrica je matrica čiji su svi elementi jednaki jedan.

15. ☐ DA ☐ NE

Jedinična matrica je kvadratna matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki jedan, dok su ostali elementi jednaki nula.

16. ☐ DA ☐ NE

Simetrična matrica jednaka je svojoj transponiranoj.

17. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T=2\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

18. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

19. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

20. ☐ DA ☐ NE

$(AB)^T = A^T B^T$.

21. ☐ DA ☐ NE

Ako je $B = A^T$, tada je $b_{ij} = a_{ji}$.

22. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

23. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 3\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix}.$$

24. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\\ \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c & d\end{bmatrix}.$$

25. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^7 = \begin{bmatrix}1 & -7\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

26. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix}a & 0\\ b & a\end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix}a^3 & 0\\ 3a^2b & a^3\end{bmatrix}.$$

27. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix}-a & 0\\ b & -a\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}-a^2 & 0\\ -2ab & -a^2\end{bmatrix}.$$

28. ☐ DA ☐ NE

Proširena matrica sustava $x+y+z=1$, $x=y$, $y=1+z$ glasi $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]$.

29. ☐ DA ☐ NE

Proširena matrica sustava $x+y+z=1$, $x=y$, $y=1+z$ glasi $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]$.

30. ☐ DA ☐ NE

Ako su $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ rješenja sustava $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, tada je $\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2$ također rješenje tog sustava za svaki $\lambda\in\mathbb{R}$.

31. ☐ DA ☐ NE

Matrica A reda n je gornje trokutasta ako $i<j$ povlači $a_{ij}=0$.

32. ☐ DA ☐ NE

Matrica $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ je gornje trokutasta.

33. ☐ DA ☐ NE

Jedinična matrica je istovremeno i gornje i donje trokutasta.

34. ☐ DA ☐ NE

Nul-matrica nikad ne može biti gornje trokutasta.

35. ☐ DA ☐ NE

Trokutasti oblik proširene matrice sustava uvijek ima 1 u drugom stupcu drugog retka.

36. ☐ DA ☐ NE

U nekim slučajevima trokutasti oblik proširene matrice sustava ima 2 u gornjem lijevom uglu.

37. ☐ DA ☐ NE

Ako su svi dijagonalni elementi kvadratne gornje trokutaste matrice U različiti od nule, tada sustav $U\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ima jedinstveno rješenje.

38. ☐ DA ☐ NE

Sustav $I\mathbf{x} = \mathbf{b}$ uvijek ima jedinstveno rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

39. ☐ DA ☐ NE

Sustav $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ čija proširena matrica glasi $\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$ ima rješenje $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -1$ i $x_1 = \frac{1}{8}$.

40. ☐ DA ☐ NE

Sustav čija proširena matrica glasi $\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right]$ ima jedinstveno rješenje za $\alpha \neq 0$.

41. ☐ DA ☐ NE

Za rješenje sustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ čija proširena matrica glasi $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right]$ vrijedi $x_2 = 1 - \frac{3}{2}\alpha$.

42. ☐ DA ☐ NE

Za rješenje sustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ čija proširena matrica glasi $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right]$ vrijedi $x_2 = -\frac{3}{2}$.

43. ☐ DA ☐ NE

Broj računskih operacija potreban za rješenje trokutastog sustava dimenzije $n \times n$ je približno n^2.

44. ☐ DA ☐ NE

Postupak svođenja matrice na trokutasti oblik zove se Gaussova eliminacija.

45. ☐ DA ☐ NE

Rješenje sustava linearnih jednadžbi se ne mijenja ako neku od jednadžbi pomnožimo s nulom.

46. ☐ DA ☐ NE

Rješenje sustava linearnih jednadžbi se ne mijenja ako nekoj jednadžbi dodamo neku drugu.

47. ☐ DA ☐ NE

Rješenje sustava linearnih jednadžbi se ne mijenja ako nekoj jednadžbi dodamo neku linearnu kombinaciju ostalih jednadžbi.

48. ☐ DA ☐ NE

Rješenje sustava linearnih jednadžbi se ne mijenja ako zamijenimo dvije varijable.

49. ☐ DA ☐ NE

Zamjena varijabli odgovara zamjeni dva stupca matrice sustava.

50. ☐ DA ☐ NE

Rješenje sustava linearnih jednadžbi se ne mijenja ako neki redak proširene matrice sustava pomnožimo s nulom.

51. ☐ DA ☐ NE

Sustavi $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ i $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 8 & 4 & -8 & -12 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ imaju isto rješenje.

52. ☐ DA ☐ NE

Približan broj računskih operacija potreban za Gaussovu eliminaciju matrice $n \times n$ je $\frac{2}{3}n^3$.

53. ☐ DA ☐ NE

Približan broj računskih operacija potreban za Gaussovu eliminaciju matrice $n \times n$ je $\frac{2}{3}n^4$.

54. ☐ DA ☐ NE

Pivotiranje je zamjena redaka ili stupaca.

55. ☐ DA ☐ NE

Sve elementarne operacije na retcima proširene matrice sustava možemo provesti množenjem s elementarnim matricama transformacija.

56. ☐ DA ☐ NE

Sve elementarne matrice transformacija su regularne.

57. ☐ DA ☐ NE

Vektori $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ d \end{bmatrix}$ su linearno nezavisni za sve kombinacije parametara a, b, c, d.

58. ☐ DA ☐ NE

Vektori $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ su linearno nezavisni.

59. ☐ DA ☐ NE

Vektori $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ su linearno zavisni.

60. ☐ DA ☐ NE

Vektori $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ su linearno nezavisni.

61. ☐ DA ☐ NE

Vektori $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ su linearno nezavisni.

62. ☐ DA ☐ NE

Vektori $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ su linearno zavisni za $\alpha = 4$.

63. ☐ DA ☐ NE

Rang matrice je uvijek manji ili jednak od broja stupaca.

64. ☐ DA ☐ NE

$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & \beta & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) < 3$ za $\beta = -3$.

65. ☐ DA ☐ NE

Neki sustavi od tri jednadžbe i tri nepoznanice imaju točno dva rješenja.

66. ☐ DA ☐ NE

Sustav koji ima samo jednu jednadžbu uvijek ima rješenje.

67. ☐ DA ☐ NE

Sustav koji ima samo jednu jednadžbu i jednu nepoznanicu može biti nerješiv.

68. ☐ DA ☐ NE

Ako trokutasti oblik proširene matrice sustava ima nul-redak, tada sustav ima beskonačno rješenja.

69. ☐ DA ☐ NE

Sustav $x+y+z=1,\ x=y,\ y=z,\ y=1$ nema rješenja.

70. ☐ DA ☐ NE

Sustav od tri jednadžbe i pet nepoznanica može imati jedinstveno rješenje.

71. ☐ DA ☐ NE

Sustav od pet jednadžbi i tri nepoznanice može imati jedinstveno rješenje.

72. ☐ DA ☐ NE

Sustav $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & 2 & 3 & 2 \\ 1 & \beta & 3 & 4 & \alpha \end{array}\right]$ uvijek ima dvoparametarsko rješenje.

73. ☐ DA ☐ NE

Sustav $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & 2 & 3 & 2 \\ 1 & \beta & 3 & 4 & \alpha \end{array}\right]$ ima jednoparametarsko rješenje za $\alpha \neq 0$.

74. ☐ DA ☐ NE

Ako sustav $ax+by=0,\ cx+dy=0$ ima rješenje koje je različito od nule, tada ima beskonačno rješenja.

75. ☐ DA ☐ NE

Homogeni sustav ne mora uvijek biti rješiv.

76. ☐ DA ☐ NE

Sustav $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ ima netrivijalna rješenja za $\beta = -3$.

77. ☐ DA ☐ NE

Sustav $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ima jedinstveno rješenje.

78. ☐ DA ☐ NE

Sustav $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ima točno jedno rješenje.

79. ☐ DA ☐ NE

Sustav $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \alpha\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = (1+\alpha^2)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ ima netrivijalno rješenje za bilo koji izbor broja α.

80. ☐ DA ☐ NE

Sustav $\left(\begin{bmatrix}\alpha\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ ima netrivijalno rješenje za svaki $\alpha \neq 0$.

81. ☐ DA ☐ NE

Sustav $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ ima dvoparametarsko rješenje.

82. ☐ DA ☐ NE

Sustav $\left[\begin{array}{cc|c}\alpha & 1 & 0\\ \beta & 1 & 0\end{array}\right]$ ima netrivijalna rješenja za $\alpha \neq \beta$.

83. ☐ DA ☐ NE

$\begin{bmatrix}a & 0\\ b & a\end{bmatrix}^{-1}$ postoji za bilo koji izbor brojeva a, b.

84. ☐ DA ☐ NE

Ako je $a \neq 0$, tada je $\begin{bmatrix}a & 0\\ b & a\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}a^{-1} & -ba^{-2}\\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}$.

85. ☐ DA ☐ NE

$\begin{bmatrix}a & 0\\ b & a\end{bmatrix}^{-1}$ postoji za bilo koji izbor brojeva $a \neq 0$ i b.

86. ☐ DA ☐ NE

Ako su sve tri matrice regularne, tada je $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

87. ☐ DA ☐ NE

Matrica A reda n je regularna ako i samo ako je $\operatorname{rang}(A) = n$.

88. ☐ DA ☐ NE

Matrica A reda n je regularna ako i samo ako je $\operatorname{rang}(A) = 1$.

89. ☐ DA ☐ NE

Ako je A regularna, a B singularna tada je matrica AB regularna.

90. ☐ DA ☐ NE

Ako je A regularna, a B singularna tada je $(AB)^{-1} = BA^{-1}$.

91. ☐ DA ☐ NE

Rješenje matrične jednadžbe $A^{-1}XB^{-1} = C$ dano je s $X = CAB$.

92. ☐ DA ☐ NE

Ako je A regularna, tada je $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

93. ☐ DA ☐ NE

Ako je A regularna, tada je $(A^{-1})^{-1} = A$.

94. ☐ DA ☐ NE

Ako je A regularna i simetrična, tada je $(A^T)^{-1} = A^{-1}$.

95. ☐ DA ☐ NE

Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tada je $A^{-1} = \frac{1}{2}A^T$ za svaki $x \neq 0$.

96. ☐ DA ☐ NE

Inverzna matrica gornje trokutaste matrice je gornje trokutasta.

97. ☐ DA ☐ NE

Ako je $x \neq 0$, tada je $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2x^{-1} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

98. ☐ DA ☐ NE

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}$, za bilo koji izbor broja x.

99. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

100. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

101. ☐ DA ☐ NE

Jedna permutacija brojeva $1, 2, 3, 4, 5, 6$ jednaka je $(1, 3, 4, 3, 6, 5)$.

102. ☐ DA ☐ NE

Jedna permutacija brojeva $1, 2, 3, 4, 5, 6$ jednaka je $(1, 3, 4, 2, 5)$.

103. ☐ DA ☐ NE

Permutacija $(1, 3, 4, 2, 6, 5)$ je neparna.

104. ☐ DA ☐ NE

Ukupno ima 2^n različitih permutacija od n elemenata.

105. ☐ DA ☐ NE

Od svih permutacija od n elemenata, pola je parnih.

106. ☐ DA ☐ NE

Determinanta $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ab - cd.$

107. ☐ DA ☐ NE

Sarussovo pravilo vrijedi samo za determinante 3×3.

108. ☐ DA ☐ NE

$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 7.$

109. ☐ DA ☐ NE

Determinanta trokutaste matrice jednaka je produktu elemenata na dijagonali.

110. ☐ DA ☐ NE

Determinanta dijagonalne matrice jednaka je broju elemenata na dijagonali.

111. ☐ DA ☐ NE

$\det(I) = n.$

112. ☐ DA ☐ NE

$\det(A) = \det(A^T).$

113. ☐ DA ☐ NE

Ako u determinanti zamijenimo dva susjedna stupca, ona se ne mijenja.

114. ☐ DA ☐ NE

Za kvadratne matrice A i B vrijedi $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

115. ☐ DA ☐ NE

Za regularnu matricu A vrijedi $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$.

116. ☐ DA ☐ NE

Ako je determinanta jednaka nuli, tada je matrica singularna.

117. ☐ DA ☐ NE

Ako je determinanta jednaka nuli, tada su stupci matrice linearno nezavisni.

118. ☐ DA ☐ NE

$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{n} \end{vmatrix} = \frac{1}{n!}.$

119. ☐ DA ☐ NE

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{10}.$

120. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

121. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

122. ☐ DA ☐ NE

Determinantu možemo razviti u Laplaceov razvoj po bilo kojem retku ili stupcu.

123. ☐ DA ☐ NE

Determinantu možemo razviti u Laplaceov razvoj samo po onom retku ili stupcu u kojem ima barem jedna nula.

124. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \\ -5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

125. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 24.$$

126. ☐ DA ☐ NE

Cramerovo pravilo vrijedi samo za sustave čija je matrica sustava regularna.

127. ☐ DA ☐ NE

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}.$$

128. ☐ DA ☐ NE

$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ je rješenje matrične jednadžbe $X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = X$.

129. ☐ DA ☐ NE

$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je rješenje matrične jednadžbe $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = X$.

130. ☐ DA ☐ NE

Zbroj svih elemenata rješenja X matrične jednadžbe $X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = X$ iznosi 4.

Rješenja

1. NE
2. NE
3. DA
4. NE
5. DA
6. DA
7. DA
8. DA
9. DA
10. DA
11. DA
12. DA
13. NE
14. NE
15. DA
16. DA
17. NE
18. DA
19. NE
20. NE
21. DA
22. DA
23. DA
24. DA
25. DA
26. DA
27. NE
28. DA
29. NE
30. DA
31. NE
32. DA
33. DA
34. NE
35. NE
36. DA
37. DA
38. DA
39. DA
40. DA
41. DA
42. DA
43. DA
44. DA
45. NE
46. DA
47. DA
48. DA
49. DA
50. NE
51. DA
52. DA
53. NE
54. DA
55. DA
56. DA
57. NE
58. NE
59. DA
60. DA
61. NE
62. DA
63. DA
64. DA
65. NE
66. NE
67. DA
68. NE
69. DA
70. NE
71. DA
72. DA
73. NE
74. DA
75. NE
76. DA
77. NE
78. NE
79. DA
80. NE
81. NE
82. NE
83. NE
84. NE
85. DA
86. DA
87. DA
88. NE
89. NE
90. NE
91. NE
92. DA
93. DA
94. DA
95. NE
96. DA
97. DA
98. DA
99. DA
100. DA
101. NE
102. NE
103. DA
104. NE
105. DA
106. NE
107. DA
108. NE
109. DA
110. NE
111. NE
112. DA
113. NE
114. DA
115. DA
116. DA
117. NE
118. DA
119. DA
120. DA
121. DA
122. DA
123. NE
124. DA
125. DA
126. DA
127. NE
128. DA
129. NE
130. DA

9.

Vektorska algebra i analitička geometrija

1. ☐ DA ☐ NE

   Usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su ekvivalentne ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište.

2. ☐ DA ☐ NE

   Vektor je klasa ekvivalencije usmjerenih dužina.

3. ☐ DA ☐ NE

   Duljinu vektora $\mathbf{a}$ označavamo s $|\mathbf{a}|$.

4. ☐ DA ☐ NE

   Vektori su kolinearni ako leže u istoj ravnini ili paralelnim ravninama.

5. ☐ DA ☐ NE

   Vektori su komplanarni ako leže na istom pravcu ili paralelnim pravcima.

6. ☐ DA ☐ NE

   Nul-vektor definiramo kao $\mathbf{0} = \overrightarrow{PP}, \qquad \forall P \in \mathcal{E}$.

7. ☐ DA ☐ NE

   Nul-vektor može biti kolinearan samo s nul-vektorom.

8. ☐ DA ☐ NE

   Pravilo poligona glasi: ako je $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \quad \mathbf{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_n = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$, tada je $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n = \overrightarrow{OA_n}$.

9. ☐ DA ☐ NE

   Zbrajanje vektora je asocijativno i komutativno.

10. ☐ DA ☐ NE

    Zbrajanje vektora je anti-komutativno.

11. ☐ DA ☐ NE

    Skup radijus-vektora V_O je skup svih vektora s hvatištem u točki O.

12. ☐ DA ☐ NE

    Skalarne komponente vektora $\overrightarrow{AB} = 2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 21\,\mathbf{k}$ su 2, 3 i 21.

13. ☐ DA ☐ NE

    Ako je $A = (x_A, y_A, z_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B)$, tada je $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k}$.

14. ☐ DA ☐ NE

Ako je $A = (1, 4, -\pi)$ i $B = (e, 3, 4)$, tada je $\overrightarrow{AB} = (e-1)\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + (4+\pi)\,\mathbf{k}$.

15. ☐ DA ☐ NE

Duljina vektora $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ jednaka je $|\mathbf{a}| = x^2 + y^2 + z^2$.

16. ☐ DA ☐ NE

$|2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}| = 29$.

17. ☐ DA ☐ NE

$|2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}| = \sqrt{4-9+16} = \sqrt{11}$.

18. ☐ DA ☐ NE

Jedinični vektor vektora $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ je vektor $\mathbf{a}_0 = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

19. ☐ DA ☐ NE

Jedinični vektor vektora $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ima duljinu jedan, a kolinearan je vektoru $\mathbf{a}$ i ima istu orijentaciju.

20. ☐ DA ☐ NE

Nul-vektor nema jedinični vektor.

21. ☐ DA ☐ NE

Vektor $\mathbf{i}$ je sam svoj jedinični vektor.

22. ☐ DA ☐ NE

Ako je $\mathbf{a} = -3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$, tada je $\mathbf{a}_0 = -\dfrac{3}{\sqrt{38}}\,\mathbf{i} + \dfrac{2}{\sqrt{38}}\,\mathbf{j} + \dfrac{5}{\sqrt{38}}\,\mathbf{k}$.

23. ☐ DA ☐ NE

Ako je $\mathbf{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k}$, tada je $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}$.

24. ☐ DA ☐ NE

Prikloni kutovi su kutovi koje vektor zatvara s vektorima $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$.

25. ☐ DA ☐ NE

Kosinusi smjerova vektora $-4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k}$ su $\dfrac{-4}{50}, \dfrac{3}{50}, \dfrac{-5}{50}$.

26. ☐ DA ☐ NE

Vektori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$ su linearno nezavisni ako

$$\begin{aligned} &\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \\ &\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0. \end{aligned}$$

27. ☐ DA ☐ NE

Vektori $-4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ i $\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k}$ su linearno zavisni.

28. ☐ DA ☐ NE

Svaka dva kolinearna vektora su linearno zavisna.

29. ☐ DA ☐ NE
Svaka tri komplanarna vektora su linearno zavisna.

30. ☐ DA ☐ NE
Svaka četiri vektora u prostoru su linearno zavisna.

31. ☐ DA ☐ NE
Postoje četiri vektora u prostoru koji su linearno nezavisni.

32. ☐ DA ☐ NE
Vektori $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ i $\mathbf{0}$ su linearno nezavisni.

33. ☐ DA ☐ NE
Vektori $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ i $\mathbf{i}$ su linearno nezavisni.

34. ☐ DA ☐ NE
Vektori $-4\,\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}-5\,\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ i $\mathbf{j}-5\,\mathbf{k}$ čine bazu prostora.

35. ☐ DA ☐ NE
Ako je $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{j}-\mathbf{k}$ i $\mathbf{c}=-\mathbf{k}$, tada vektor $\mathbf{d}=2\,\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ima u sustavu $(O,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ zapis $\mathbf{d}=2\,\mathbf{a}+3\,\mathbf{b}$.

36. ☐ DA ☐ NE
Skalarni produkt dva vektora je broj.

37. ☐ DA ☐ NE
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

38. ☐ DA ☐ NE
Ako je $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, tada je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1$.

39. ☐ DA ☐ NE
Ako je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0$, tada je $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})>\pi/2$.

40. ☐ DA ☐ NE
$\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0$.

41. ☐ DA ☐ NE
$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=0$.

42. ☐ DA ☐ NE
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|$.

43. ☐ DA ☐ NE
Duljina projekcije vektora $\mathbf{a}$ na vektor $\mathbf{b}$ jednaka je $|\mathbf{b}|\,|\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})|$.

44. ☐ DA ☐ NE
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

45. ☐ DA ☐ NE
Ako je $\mathbf{a}=\{2,-3,1\}$ i $\mathbf{b}=\{3,2,-4\}$, tada je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-4$.

46. ☐ DA ☐ NE

Ako je $\mathbf{a} = \{2, -3, 1\}$ i $\mathbf{b} = \{1, 1, 0\}$, tada je $\cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\dfrac{1}{\sqrt{28}}$.

47. ☐ DA ☐ NE

Ako je $\mathbf{a} = \{1, -1, 1\}$ i $\mathbf{b} = \{1, 0, 2\}$, tada je $\cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

48. ☐ DA ☐ NE

Ako su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nekolinearni vektori jednakih duljina tada je $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b})$.

49. ☐ DA ☐ NE

Ako su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nekolinearni vektori s duljinama $|\mathbf{a}| = 2$ i $|\mathbf{b}| = 1$ tada je $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{a}+2\,\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{b}, \mathbf{a}+2\,\mathbf{b})$.

50. ☐ DA ☐ NE

Ako su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nekolinearni vektori jednakih duljina tada je $\mathbf{a}+\mathbf{b} \perp \mathbf{a}-\mathbf{b}$.

51. ☐ DA ☐ NE

Ako su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nekolinearni vektori tada je $\mathbf{a}+\mathbf{b} \perp \mathbf{a}-\mathbf{b}$.

52. ☐ DA ☐ NE

Vektorski produkt dva vektora je vektor.

53. ☐ DA ☐ NE

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

54. ☐ DA ☐ NE

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

55. ☐ DA ☐ NE

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$.

56. ☐ DA ☐ NE

Ako je $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, tada je $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

57. ☐ DA ☐ NE

Ako su vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ kolinearni, tada je $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

58. ☐ DA ☐ NE

Ako je $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, tada vektorski produkt nije definiran.

59. ☐ DA ☐ NE

$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$.

60. ☐ DA ☐ NE

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$.

61. ☐ DA ☐ NE

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$.

62. ☐ DA ☐ NE

$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$.

63. ☐ DA ☐ NE
$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ jednako je površini paralelograma što ga razapinju vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

64. ☐ DA ☐ NE
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

65. ☐ DA ☐ NE
Ako je $\mathbf{a} = \{0, -3, 5\}$ i $\mathbf{b} = \{0, -2, -1\}$, tada je $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 13\mathbf{j}$.

66. ☐ DA ☐ NE
Površina paralelograma kojeg razapinju vektori $\mathbf{a} = \{1, -3, 1\}$ i $\mathbf{b} = \{2, 0, 1\}$ je nula.

67. ☐ DA ☐ NE
Površina trokuta $\triangle ABC$, gdje je $A = (1, 3, 1)$, $B = (0, 1, 2)$ i $C = (1, -1, 0)$ je $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

68. ☐ DA ☐ NE
Trokut $\triangle ABC$ s vrhovima $A = (2, 1, -1)$, $B = (-2, 1, 0)$ i $C = (0, 0, 0)$ je pravokutan.

69. ☐ DA ☐ NE
Točka $S = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ je središte kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$ s vrhovima $A = (1, 2, -1)$, $B = (-2, 1, 0)$ i $C = (0, 0, 0)$.

70. ☐ DA ☐ NE
U trokutu $\triangle ABC$ s vrhovima $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, -3, 0)$ i $C = (0, -3, 4)$ visina iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ ima duljinu $\frac{12}{5}$.

71. ☐ DA ☐ NE
Mješoviti produkt tri vektora je vektor.

72. ☐ DA ☐ NE
$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cos \angle(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

73. ☐ DA ☐ NE
$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ jednako je volumenu paralelopipeda što ga razapinju vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

74. ☐ DA ☐ NE
$|(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}|$ jednako je volumenu paralelopipeda što ga razapinju vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

75. ☐ DA ☐ NE
$(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$.

76. ☐ DA ☐ NE
$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$.

77. ☐ DA ☐ NE
Ako je $\mathbf{a} = \{0, -3, 5\}$, $\mathbf{b} = \{0, -2, -1\}$ i $\mathbf{c} = \{3, 2, 1\}$, tada je $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 39$.

78. ☐ DA ☐ NE
Volumen paralelopipeda razapetog s vektorima $\mathbf{a} = \{-1, -3, -1\}$, $\mathbf{b} = \{1, 2, -1\}$ i $\mathbf{c} = \{-1, -2, -1\}$ je 2.

79. ☐ DA ☐ NE

Vektori $\mathbf{a} = \{-1, -3, -1\}$, $\mathbf{b} = \{-1, -2, -1\}$ i $\mathbf{c} = \{1, 2, 1\}$ su komplanarni.

80. ☐ DA ☐ NE

Volumen tetraedra $ABCD$, gdje je $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (0, -1, 1)$ i $D = (0, 0, 0)$, je $5/6$.

81. ☐ DA ☐ NE

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

82. ☐ DA ☐ NE

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

83. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba z-osi glasi $x = 0,\ y = 0,\ z = 2t,\ t \in \mathbb{R}$.

84. ☐ DA ☐ NE

Parametarska jednadžba pravca kroz točku $T = (1, 0, 0)$ s vektorom smjera $\mathbf{j}$ glasi $x = 1,\ y = 0,\ z = 0,\ t \in \mathbb{R}$.

85. ☐ DA ☐ NE

Parametarska jednadžba pravca kroz točku $T = (1, -2, 3)$ s vektorom smjera $2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}$ glasi $x = 1 + 2t,\ y = -2 - 3t,\ z = 3 + 7t,\ t \in \mathbb{R}$.

86. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba y-osi glasi $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{0}$.

87. ☐ DA ☐ NE

Kanonska jednadžba pravca kroz točku $T = (1, 0, 0)$ s vektorom smjera $\mathbf{j}$ glasi $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{0}$.

88. ☐ DA ☐ NE

Kanonska jednadžba pravca kroz točku $T = (1, -2, 3)$ s vektorom smjera $2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}$ glasi $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-3}{7}$.

89. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba pravca kroz točke $A = (1, 0, 2)$ i $B = (3, 4, 5)$ glasi $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-2}{3}$.

90. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba pravca kroz točke $A = (6, 3, -2)$ i $B = (-3, -4, 5)$ glasi $x = 6 - 9t,\ y = -3 - 7t,\ z = 2 + 7t,\ t \in \mathbb{R}$.

91. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba pravca koji je presjek ravnina $x + y + 1 = 0$ i $y + z + 1 = 0$ glasi $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$.

92. ☐ DA ☐ NE

Pravci $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ i $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+1}{-6}$ su jednaki.

93. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba ravnine kroz točku $T = (1, 3, -2)$ s normalom $\mathbf{n} = \{-1, 2, 1\}$ glasi $(x+1)+3(y-2)-2(z-1)=0$.

94. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba ravnine kroz točku $T = (1, -1, 1)$ s normalom $\mathbf{n} = \{-1, 1, -1\}$ glasi $-x+y-z=0$.

95. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba ravnine kroz točke $A = (1, -1, 1)$, $B = (3, -1, 2)$ i $C = (4, 5, 6)$ glasi $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

96. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba ravnine kroz točke $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ i $C = (0, 0, -2)$ glasi $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$.

97. ☐ DA ☐ NE

Pravci $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$ i $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-8}{4}$ su okomiti.

98. ☐ DA ☐ NE

Za kut φ između pravaca $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$ i $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-8}{1}$ vrijedi $\cos\varphi = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

99. ☐ DA ☐ NE

Točka $A = (1, 0, -6)$ je projekcija točke $B = (1, 1, 1)$ na ravninu $y - z + 3 = 0$.

100. ☐ DA ☐ NE

Točka $P = (0, -1, -1)$ je polovište dužine $\overline{AB}$ kojoj su krajnje točke $A = (1, -3, 2)$ i $B = (-1, 1, -4)$.

101. ☐ DA ☐ NE

Točka $T = (2, -1, 0)$ leži na pravcu kroz točke $A = (1, 0, -1)$ i $B = (1, 2, -1)$.

102. ☐ DA ☐ NE

Točka $A = (1, -2, 1)$ je ortogonalna projekcija točke $B = (2, 1, -1)$ na pravac $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$.

103. ☐ DA ☐ NE

Točka $A = (1, -2, 1)$ je točka na pravcu $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-2}{1}$ koja je najmanje udaljena od ishodišta $O = (0, 0, 0)$.

104. ☐ DA ☐ NE

Točka $T = (1, 2, -1)$ leži u ravnini koja sadrži točke $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ i $C = (1, 1, 0)$.

105. ☐ DA ☐ NE

Točke $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, -1, 1)$ i $C = (1, -4, 1)$ leže na jednom pravcu.

106. ☐ DA ☐ NE

Točke $A = (-3, 1, 1)$, $B = (-1, 1, 1)$, $C = (1, -1, 1)$ i $D = (1, 1, -1)$ leže u jednoj ravnini.

107. ☐ DA ☐ NE

Točka $A = (-2, 4, -2)$ je točka ravnine $x - 2y + z + 12 = 0$ koja je najmanje udaljena od ishodišta $O = (0, 0, 0)$.

108. ☐ DA ☐ NE

Pravci $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$ i $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$ su paralelni ako i samo ako je $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$

109. ☐ DA ☐ NE

Pravci $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$ i $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$ su paralelni ili jednaki ako i samo ako su vektori $a_1\,\mathbf{i} + b_1\,\mathbf{j} + c_1\,\mathbf{k}$ i $a_2\,\mathbf{i} + b_2\,\mathbf{j} + c_2\,\mathbf{k}$ kolinearni.

110. ☐ DA ☐ NE

Pravci $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$ i $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$ imaju barem jednu zajedničku točku ako i samo ako je $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$

111. ☐ DA ☐ NE

Ako su vektori $a_1\,\mathbf{i}+b_1\,\mathbf{j}+c_1\,\mathbf{k}$ i $a_2\,\mathbf{i}+b_2\,\mathbf{j}+c_2\,\mathbf{k}$ nekolinearni i $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ onda pravci $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$ i $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$ imaju jednu zajedničku točku.

112. ☐ DA ☐ NE

Ako je $(a_1\,\mathbf{i} + b_1\,\mathbf{j} + c_1\,\mathbf{k}) \times (a_2\,\mathbf{i} + b_2\,\mathbf{j} + c_2\,\mathbf{k}) \neq \mathbf{0}$ onda pravci $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$ i $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$ nemaju zajedničkih točaka.

113. ☐ DA ☐ NE

Ako je $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ onda pravci $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$ i $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$ nemaju zajedničkih točaka i nisu paralelni.

114. ☐ DA ☐ NE

Ako su pravci $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$ i $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$ paralelni onda je $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$

115. ☐ DA ☐ NE

Pravac kroz točke $A = (2, -1, -3)$ i $B = (0, 1, 1)$ siječe pravac $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z + 1}{-2}$ u jednoj točki.

116. ☐ DA ☐ NE

Ravnine $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ su paralelne ili jednake ako i samo ako je $(A_1\,\mathbf{i} + B_1\,\mathbf{j} + C_1\,\mathbf{k}) \times (A_2\,\mathbf{i} + B_2\,\mathbf{j} + C_2\,\mathbf{k}) = \mathbf{0}$.

117. ☐ DA ☐ NE

Ravnine $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ su paralelne ili jednake ako i samo ako je $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

118. ☐ DA ☐ NE

Ravnina $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ je okomita na ravninu $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ako i samo ako je $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

119. ☐ DA ☐ NE

Ako je $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ onda je presjek ravnina $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ pravac.

120. ☐ DA ☐ NE

Ravnina koja sadrži točku $A = (0, 0, -1)$ i pravac $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{0}$ ima jednadžbu $x - y - z - 1 = 0$.

121. ☐ DA ☐ NE

Ravnina koja prolazi točkama $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ i $C = (0, 0, 1)$ paralelna je s ravninom $x + y + z + 1 = 0$.

122. ☐ DA ☐ NE

Presjek ravnina $x - y = 0$ i $x + y + z - 2 = 0$ je pravac $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$.

123. ☐ DA ☐ NE

Ravnina kroz točke $A = (1, -1, 0)$, $B = (2, 0, 0)$ i $C = (0, 0, 2)$ je okomita na ravninu $2x + 3y + z + 1 = 0$.

124. ☐ DA ☐ NE

Presjek ravnina $x - 2y + z = 0$ i $x + y + z - 3 = 0$ je pravac $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$.

125. ☐ DA ☐ NE

Pravac $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ paralelan je s ravninom $Ax + By + Cz + D = 0$ ili je u njoj sadržan ako i samo ako je $Aa + Bb + Cc = 0$.

126. ☐ DA ☐ NE

Pravac $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ paralelan je s ravninom $Ax + By + Cz + D = 0$ ako i samo ako je $(A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}) \times (a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}) = \mathbf{0}$.

127. ☐ DA ☐ NE

Pravac $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ okomit je na ravninu $Ax + By + Cz + D = 0$ ako i samo ako je $(A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}) \times (a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}) = \mathbf{0}$.

128. ☐ DA ☐ NE

Pravac kroz točke $A = (1, 0, -2)$ i $B = (2, -1, -1)$ paralelan je s ravninom $x - y + z - 1 = 0$.

129. ☐ DA ☐ NE

Pravac kroz točke $A = (1, 1, 2)$ i $B = (0, 2, -1)$ okomit je na ravninu $x - y + 3z - 2 = 0$.

130. ☐ DA ☐ NE

Pravac $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ okomit je na ravninu kroz točke $A=(1,0,0)$, $B=(0,-1,0)$ i $C=(0,0,2)$.

Rješenja

1. DA	23. DA	45. DA	67. NE	89. DA	111. DA
2. DA	24. DA	46. DA	68. NE	90. NE	112. NE
3. DA	25. NE	47. NE	69. DA	91. NE	113. DA
4. NE	26. DA	48. DA	70. DA	92. DA	114. DA
5. NE	27. NE	49. DA	71. NE	93. NE	115. NE
6. DA	28. DA	50. DA	72. DA	94. NE	116. DA
7. NE	29. DA	51. NE	73. DA	95. DA	117. NE
8. DA	30. DA	52. DA	74. DA	96. NE	118. DA
9. DA	31. NE	53. DA	75. DA	97. NE	119. DA
10. NE	32. NE	54. NE	76. DA	98. DA	120. NE
11. DA	33. DA	55. DA	77. DA	99. NE	121. DA
12. NE	34. DA	56. NE	78. DA	100. DA	122. DA
13. DA	35. DA	57. DA	79. DA	101. NE	123. DA
14. DA	36. DA	58. NE	80. DA	102. DA	124. NE
15. NE	37. DA	59. NE	81. DA	103. DA	125. DA
16. NE	38. NE	60. NE	82. DA	104. DA	126. NE
17. NE	39. NE	61. DA	83. DA	105. DA	127. DA
18. DA	40. DA	62. NE	84. NE	106. NE	128. NE
19. DA	41. NE	63. DA	85. DA	107. DA	129. DA
20. DA	42. NE	64. NE	86. DA	108. NE	130. NE
21. DA	43. NE	65. NE	87. DA	109. DA	
22. DA	44. DA	66. NE	88. DA	110. NE	

10.

Funkcije realne varijable

1. ☐ DA ☐ NE

Tablicom $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline y=f(x) & 2 & 0 & 1 & 1.5 \end{array}$ zadana je jedna realna funkcija.

2. ☐ DA ☐ NE

Tablicom $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y=f(x) & 2 & 0 & 1 & 1.5 \end{array}$ zadana je jedna realna funkcija.

3. ☐ DA ☐ NE

Tablicom $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y=f(x) & 2 & 1+i & 1 & 1.5 \end{array}$ zadana je jedna realna funkcija.

4. ☐ DA ☐ NE

Ako je funkcija zadana tablicom $\begin{array}{c|cccc} x & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline y=f(x) & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array}$ tada se linearnom interpolacijom vrijednost funkcije u $x \in (x_i, x_{i+1})$ računa po formuli $f(x) = y = y_i + \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$.

5. ☐ DA ☐ NE

Ako je funkcija zadana tablicom $\begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y=f(x) & 0 & -2 & 1 & 2.5 & 4 \end{array}$ onda linearnom interpolacijom dobijamo $f(-0.5) = -0.5$.

6. ☐ DA ☐ NE

Ako je funkcija zadana tablicom $\begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y=f(x) & 0 & -2 & 1 & 2.5 & 4 \end{array}$ onda linearnom interpolacijom dobijamo $f(-0.5) = -1.75$.

7. ☐ DA ☐ NE

Domena funkcije eksplicitno zadane formulom $y = f(x)$ je skup $\mathcal{D}$ svih vrijednosti nezavisne varijable x za koje izraz $f(x)$ ima smisla.

8. ☐ DA ☐ NE

Graf funkcije eksplicitno zadane formulom $y = f(x)$ je skup $\Gamma \subset \mathbb{R}$, definiran s $\Gamma = \{f(x) : x \in \mathcal{D}\}$, pri čemu je $\mathcal{D}$ domena funkcije.

9. ☐ DA ☐ NE

Domena funkcije $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ eksplicitno zadane formulom $y = f(x)$ je skup $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, definiran s $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}\}$.

10. ☐ DA ☐ NE

Graf funkcije eksplicitno zadane formulom $y = f(x)$ je skup $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, definiran s $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}\}$, pri čemu je $\mathcal{D}$ domena funkcije.

11. ☐ DA ☐ NE

Domena funkcije eksplicitno zadane formulom $y = \dfrac{x^3 - 2}{2\cos x}$ je skup $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$.

12. ☐ DA ☐ NE

Domena funkcije eksplicitno zadane formulom $y = \dfrac{x^3 - 2}{2\cos x}$ je skup $\mathcal{D} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

13. ☐ DA ☐ NE

Graf funkcije implicitno zadane formulom $F(x, y) = 0$ je krivulja u ravnini $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$.

14. ☐ DA ☐ NE

Formulom $F(x, y) = 0$ uvijek je određena točno jedna eksplicitno zadana funkcija $y = f(x)$.

15. ☐ DA ☐ NE

Kod funkcija zadanih formulom $F(x, y) = 0$ jednoj vrijednosti varijable x može odgovarati više vrijednosti varijable y.

16. ☐ DA ☐ NE

Točka $(\pi/2, 0)$ pripada krivulji implicitno zadanoj s $x + \arccos(xy) = 0$.

17. ☐ DA ☐ NE

Točka $(0, 3)$ pripada krivulji implicitno zadanoj s $x + \arcsin(xy) = 0$.

18. ☐ DA ☐ NE

Krivulja zadana implicitno sa $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ima parametarske jednadžbe $x = \dfrac{3t}{t^3 + 1}$, $y = \dfrac{3t^2}{t^3 + 1}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

19. ☐ DA ☐ NE

Krivulja zadana implicitno sa $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ima parametarske jednadžbe $x = \dfrac{3t^2}{t^3 + 1}$, $y = \dfrac{3t}{t^3 + 1}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

20. ☐ DA ☐ NE

Kružnica $(x+1)^2 + y^2 - 4 = 0$ ima parametarske jednadžbe $x = -1 + 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in [-\pi, \pi]$.

21. ☐ DA ☐ NE

Kružnica $(x+1)^2 + y^2 - 4 = 0$ ima parametarske jednadžbe $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$.

22. ☐ DA ☐ NE

Elipsa $4x^2 + y^2 - 4y = 0$ ima parametarske jednadžbe $x = \cos t,\ y = 2(1 + \sin t),\ t \in [-\pi, \pi]$.

23. ☐ DA ☐ NE

Graf funkcije zadane parametarski s $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in T$ je skup $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ definiran s $\Gamma = \{(x, y) :\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in T\}$.

24. ☐ DA ☐ NE
Cikloida je krivulja koju opisuje fiksna točka kružnice kada se ta kružnica kotrlja bez klizanja po pravcu.

25. ☐ DA ☐ NE
Parametarske jednadžbe cikloide glase $x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t),\ t \in \mathbb{R}$.

26. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f je omeđena ako postoji broj m takav da je $|f(x)| \geq m$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

27. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f je omeđena ako postoji broj m takav da je $|f(x)| \leq m$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

28. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f je omeđena ako za svaki $x \in \mathcal{D}$ postoji broj m takav da je $|f(x)| \leq m$.

29. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f je neomeđena ako za svaki $m > 0$ postoji $x \in \mathcal{D}$ takav da je $|f(x)| \geq m$.

30. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f je parna ako je $f(-x) = 2f(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

31. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f je neparna ako je $f(x)$ neparan broj za svaki $x \in \mathcal{D}$.

32. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f je neparna ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

33. ☐ DA ☐ NE
Ako su f i g parne funkcije onda su i $f + g$ i $f - g$ parne funkcije.

34. ☐ DA ☐ NE
Ako su f i g neparne funkcije onda su i fg i f/g neparne funkcije.

35. ☐ DA ☐ NE
Ako su f i g parne funkcije i ako je definirana kompozicija $g \circ f$, onda je i $g \circ f$ parna funkcija.

36. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f je periodična ako postoji broj $P \neq 0$ takav da za svaki $x \in \mathcal{D}$ vrijedi $f(Px) = f(x)$.

37. ☐ DA ☐ NE
Ako je broj $P \neq 0$ period funkcije f onda je i broj $P/2$ period funkcije f.

38. ☐ DA ☐ NE
Funkcija najveće cijelo $[\cdot]$ je periodična s osnovnim periodom $P = 1$.

39. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = x - [x],\ x \in \mathbb{R}$ je periodična s osnovnim periodom $P = 1/2$.

40. ☐ DA ☐ NE
Broj a je limes funkcije f u točki x_0 ako vrijedi $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$.

41. ☐ DA ☐ NE
Da bi postojao $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ funkcija f mora biti definirana u točki x_0.

42. ☐ DA ☐ NE
Ako funkcije f i g imaju limese u točki x_0 onda vrijedi $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

43. ☐ DA ☐ NE
Ako barem jedna od funkcija f i g nema limes u točki x_0 onda ne postoji ni $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)$.

44. ☐ DA ☐ NE
Ako funkcija f ima lijevi i desni limes u točki x_0 onda postoji i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

45. ☐ DA ☐ NE
Broj a je limes funkcije f kad $x \to -\infty$ ako $(\forall\epsilon > 0)(\exists M > 0)\ x \in \mathcal{D} \wedge x < -M \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$.

46. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f u točki x_0 ima limes $-\infty$ ako $(\forall M > 0)(\exists\delta > 0)\ x \in \mathcal{D} \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$.

47. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f je neprekidna u točki $x_0 \in \mathcal{D}$ ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

48. ☐ DA ☐ NE
Ako je $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ onda je funkcija f neprekidna u točki $x_0 \in \mathcal{D}$.

49. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f je neprekidna u točki $x_0 \in \mathcal{D}$ ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

50. ☐ DA ☐ NE
Ako je $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ onda je funkcija f neprekidna u točki $x_0 \in \mathcal{D}$.

51. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f ima uklonjiv prekid u točki x_0 ako postoje $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

52. ☐ DA ☐ NE
Funkcija f ima prekid druge vrste u u točki x_0 ako je barem jedan od limesa $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ ili beskonačan ili ne postoji.

53. ☐ DA ☐ NE
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0} \frac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - 1} = +\infty.$$

54. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - 1}$ ima uklonjiv prekid u točki $-\dfrac{1}{2}$.

55. ☐ DA ☐ NE
$$\lim_{x\to 1-0} \frac{2x^2 - x - 1}{|x^2 - 1|} = \frac{3}{2}.$$

56. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{|x^2 - 1|}$ ima uklonjiv prekid u točki $x_0 = 1$.

57. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{|x^2 - 1|}$ ima prekid druge vrste u točki $x_0 = -1$.

58. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x - x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

59. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to -1-0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x - x^2}$ ne postoji.

60. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x - x^2}$ ima uklonjiv prekid u točki $x_0 = 0$.

61. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{\sin(1 - 2x)}{4x^2 - 1} = \dfrac{1}{2}$.

62. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \dfrac{\sin(1 - 2x)}{4x^2 - 1}$ ima uklonjiv prekid u točki $-\dfrac{1}{2}$.

63. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{x^2} = \dfrac{9}{2}$.

64. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{x^2} = \dfrac{2}{9}$.

65. ☐ DA ☐ NE

Funkcija definirana sa $f(x) = \dfrac{1 - \cos 3x}{x^2}$, $x \neq 0$ i $f(0) = \dfrac{2}{3}$ je neprekidna.

66. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 1}$ ima horizontalnu asimptotu $y = \dfrac{1}{2}$ u lijevom i desnom kraju.

67. ☐ DA ☐ NE

Pravac $x = -\dfrac{1}{2}$ je vertikalna asimptota funkcije $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 1}$.

68. ☐ DA ☐ NE

Pravac $x = -1$ je vertikalna asimptota funkcije $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{|x^2 - 1|}$.

69. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = 1$ je horizontalna asimptota funkcije $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{|x^2 - 1|}$.

70. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = -1$ je horizontalna asimptota u lijevom kraju a pravac $y = 1$ u desnom kraju funkcije $f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x^2-1|}$.

71. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = x + 1$ je kosa asimptota funkcije $f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x^2-1|}$.

72. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$ nema vertikalnih asimptota.

73. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = \dfrac{9}{2}$ je horizontalna asimptota funkcije $f(x) = \dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

74. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ nema vertikalnih asimptota.

75. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota funkcije $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ u lijevom i u desnom kraju.

76. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = -2x$ je kosa asimptota funkcije $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ u lijevom kraju.

77. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = x$ je kosa asimptota funkcije $f(x) = xe^{-x}$ u lijevom kraju.

78. ☐ DA ☐ NE

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije $f(x) = xe^{-x}$.

79. ☐ DA ☐ NE

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota zdesna funkcije $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

80. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota funkcije $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ u lijevom i u desnom kraju.

81. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = x - 1$ je kosa asimptota funkcije $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ u lijevom i u desnom kraju.

82. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota funkcije $f(x) = \ln \dfrac{2x-1}{2x+1}$ u lijevom i u desnom kraju.

83. ☐ DA ☐ NE

Pravac $x = -\dfrac{1}{2}$ je vertikalna asimptota funkcije $f(x) = \ln \dfrac{2x-1}{2x+1}$ slijeva i zdesna.

84. ☐ DA ☐ NE

Pravac $x = \dfrac{1}{2}$ je vertikalna asimptota funkcije $f(x) = \ln \dfrac{2x-1}{2x+1}$ slijeva i zdesna.

85. ☐ DA ☐ NE
Ako je $n \in \mathbb{N}$ neparan funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x}$ definirana je za sve $x \in \mathbb{R}$.

86. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{N}$ je parna ako je n paran i neparna ako je n neparan broj.

87. ☐ DA ☐ NE
Ako je $k \in \mathbb{Z}$ neparan cijeli broj onda je funkcija $f(x) = x^k$ neparna.

88. ☐ DA ☐ NE
Za svaki cijeli broj $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ funkcija $f(x) = x^k$ je neomeđena.

89. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = x^k,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je omeđena ako je k paran i neomeđena ako je k neparan broj.

90. ☐ DA ☐ NE
Za svaki cijeli broj $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota funkcije $f(x) = x^k$.

91. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = x^k,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ima vertikalnu asimptotu $x = 0$ ako i samo ako je $k < 0$.

92. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = x^k,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ima vertikalnu i horizontalnu asimptotu ako i samo ako je $k < 0$.

93. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = x^r,\ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je strogo rastuća na $(0, \infty)$ ako i samo ako je $r < 0$.

94. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = x^r,\ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je omeđena za $r > 0$ i neomeđena za $r < 0$.

95. ☐ DA ☐ NE
Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije $f(x) = x^r$ za svako $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

96. ☐ DA ☐ NE
Za svaki $a > 0,\ a \neq 1$ funkcija $f(x) = a^x$ je strogo rastuća.

97. ☐ DA ☐ NE
Za svaki $0 < a < 1$ funkcija $f(x) = a^x$ je strogo rastuća.

98. ☐ DA ☐ NE
Za svaki $a > 0,\ a \neq 1$ pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota funkcije $f(x) = a^x$ u lijevom kraju.

99. ☐ DA ☐ NE
Za svaki $0 < a < 1$ funkcija $f(x) = \log_a x$ je strogo padajuća.

100. ☐ DA ☐ NE
Za svaki $a > 0,\ a \neq 1$ pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije $f(x) = \log_a x$ zdesna.

101. ☐ DA ☐ NE
Za $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ i $x > 0$ je $\log_a x = \log_b a \cdot \log_b x$.

102. ☐ DA ☐ NE
Za $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ i $x > 0$ je $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$.

103. ☐ DA ☐ NE
Funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ su omeđene.

104. ☐ DA ☐ NE
Funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ su periodične s osnovnim periodom π.

105. ☐ DA ☐ NE
Pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota funkcija $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$.

106. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ je definirana na skupu $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ a funkcija $g(x) = \operatorname{ctg} x$ na skupu $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$.

107. ☐ DA ☐ NE
Opća sinusoida $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi),\ A, \omega > 0$ je periodična funkcija s osnovnim periodom $P = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

108. ☐ DA ☐ NE
Kosinusov poučak za trokut sa stranicama a, b, c i kutom γ nasuprot stranici c glasi $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma$.

109. ☐ DA ☐ NE
Adicioni teorem za sinus zbroja glasi $\sin(u + v) = \sin u \sin v + \cos u \cos v$.

110. ☐ DA ☐ NE
$\sin 3x = 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$.

111. ☐ DA ☐ NE
$\sin 3x = 3\sin^2 x \cos x - \sin^3 x$.

112. ☐ DA ☐ NE
$\sin 3x = 4\sin x - 3\sin^3 x$.

113. ☐ DA ☐ NE
$\cos 3x = 3\cos^3 x - 4\cos x$.

114. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = \arcsin x$ poprima vrijednosti u intervalu $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

115. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} x$ je strogo padajuća.

116. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ ima horizontalne asimptote $y = \pi$ u lijevom kraju i $y = 0$ u desnom kraju.

117. ☐ DA ☐ NE
Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ima horizontalne asimptote $y = \pi$ u lijevom kraju i $y = 0$ u desnom kraju.

118. ☐ DA ☐ NE

Za sve $x \in [-1, 1]$ vrijedi $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$.

119. ☐ DA ☐ NE

Za sve $x \in [-1, 1]$ vrijedi $\arccos x = \arcsin x - \dfrac{\pi}{2}$.

120. ☐ DA ☐ NE

Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.

121. ☐ DA ☐ NE

Za sve $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ vrijedi $\arcsin(\sin x) = \pi - x$.

122. ☐ DA ☐ NE

Za sve $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ vrijedi $\arcsin(\sin x) = x - \pi$.

123. ☐ DA ☐ NE

Za sve $x \in [-\pi, 0]$ vrijedi $\arccos(\cos x) = -x$.

124. ☐ DA ☐ NE

Za sve $x \in [-\pi, 0]$ vrijedi $\arccos(\cos x) = \pi + x$.

125. ☐ DA ☐ NE

Za sve $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ vrijedi $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \pi - x$.

126. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = -1$ je horizontalna asimptota u desnom kraju za funkcije $f(x) = \operatorname{th} x$ i $g(x) = \operatorname{cth} x$.

127. ☐ DA ☐ NE

Funkcije $f(x) = \operatorname{th} x$ i $g(x) = \operatorname{cth} x$ su omeđene.

128. ☐ DA ☐ NE

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota za obe funkcije $f(x) = \operatorname{th} x$ i $g(x) = \operatorname{cth} x$.

129. ☐ DA ☐ NE

Za sve $u, v \in \mathbb{R}$ vrijedi $\operatorname{ch}(u + v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v - \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v$.

130. ☐ DA ☐ NE

Za sve $u, v \in \mathbb{R}$ vrijedi $\operatorname{ch}(u - v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v - \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v$.

Rješenja

1. NE	23. DA	45. DA	67. DA	89. NE	111. NE
2. DA	24. DA	46. DA	68. NE	90. NE	112. NE
3. NE	25. DA	47. NE	69. DA	91. DA	113. NE
4. DA	26. NE	48. NE	70. NE	92. DA	114. DA
5. DA	27. DA	49. DA	71. NE	93. NE	115. NE
6. NE	28. NE	50. DA	72. DA	94. NE	116. DA
7. DA	29. DA	51. NE	73. NE	95. NE	117. NE
8. NE	30. NE	52. DA	74. DA	96. NE	118. DA
9. NE	31. NE	53. DA	75. NE	97. NE	119. NE
10. DA	32. DA	54. DA	76. DA	98. NE	120. DA
11. NE	33. DA	55. NE	77. NE	99. DA	121. DA
12. NE	34. NE	56. NE	78. NE	100. DA	122. NE
13. DA	35. DA	57. DA	79. NE	101. NE	123. DA
14. NE	36. NE	58. NE	80. NE	102. DA	124. NE
15. DA	37. NE	59. DA	81. DA	103. DA	125. NE
16. NE	38. NE	60. DA	82. DA	104. NE	126. NE
17. DA	39. NE	61. NE	83. NE	105. NE	127. NE
18. DA	40. DA	62. NE	84. NE	106. NE	128. NE
19. NE	41. NE	63. DA	85. DA	107. DA	129. NE
20. DA	42. DA	64. NE	86. NE	108. DA	130. DA
21. NE	43. NE	65. NE	87. DA	109. NE	
22. DA	44. NE	66. DA	88. DA	110. DA	

11.

Derivacije i primjene

1. ☐ DA ☐ NE

   Derivacija funkcije f u točki $x_0 \in \mathcal{D}$ definirana je formulom $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2. ☐ DA ☐ NE

   Derivacija funkcije f u točki $x_0 \in \mathcal{D}$ definirana je formulom $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

3. ☐ DA ☐ NE

   Derivacija funkcije f u točki $x_0 \in \mathcal{D}$ definirana je formulom $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$.

4. ☐ DA ☐ NE

   Ako je f derivabilna u točki $x_0 \in \mathcal{D}$ onda je f i neprekidna u toj točki.

5. ☐ DA ☐ NE

   Ako je f neprekidna u točki $x_0 \in \mathcal{D}$ onda je f i derivabilna u toj točki.

6. ☐ DA ☐ NE

   Jednadžba tangente na krivulju $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi $y + f(x_0) = f'(x_0)(x + x_0)$.

7. ☐ DA ☐ NE

   Jednadžba tangente na krivulju $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

8. ☐ DA ☐ NE

   Jednadžba normale na krivulju $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$ u kojoj vrijedi $f'(x_0) \neq 0$ glasi $y - f(x_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

9. ☐ DA ☐ NE

   Jednadžba normale na krivulju $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$ u kojoj vrijedi $f'(x_0) = 0$ glasi $y = f(x_0)$.

10. ☐ DA ☐ NE

    Jednadžba normale na krivulju $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi $x - x_0 + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0$.

11. ☐ DA ☐ NE

    Jednadžba normale na krivulju $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$ u kojoj vrijedi $f'(x_0) = 0$ glasi $x = x_0$.

12. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba tangente na krivulju $y = \operatorname{arcctg} x$ u točki s apscisom $x = 0$ glasi $y + x = \dfrac{\pi}{2}$.

13. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba tangente na krivulju $y = \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arth} x$ u točki s apscisom $x = 0$ glasi $y = x + \dfrac{\pi}{2}$.

14. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba normale na krivulju $y = x^{-x} + \ln x$ u točki s apscisom $x = 1$ glasi $x + y - 1 = 0$.

15. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba normale na krivulju $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ u točki s apscisom $x = 0$ glasi $2x + y = 1$.

16. ☐ DA ☐ NE

Jednadžba tangente na krivulju $x + \arccos(xy) = 0$ u točki s ordinatom $y = 0$ glasi $y = \dfrac{2}{\pi}x + 1$.

17. ☐ DA ☐ NE

Derivacija slijeva funkcije f u točki x je broj $f'(x_-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

18. ☐ DA ☐ NE

Derivacija slijeva funkcije f u točki x je broj $f'(x_-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

19. ☐ DA ☐ NE

Derivacija $f'(x)$ funkcije f u točki x postoji ako i samo ako u toj točki postoje derivacije $f'(x_-)$ slijeva i $f'(x_+)$ zdesna.

20. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = |2x - x^2|$ je derivabilna u točki $x = 2$.

21. ☐ DA ☐ NE

Ako je $f(x) = |2x - x^2|$ onda je $f'(0_-) = -2$ i $f'(0_+) = 2$.

22. ☐ DA ☐ NE

Ako su $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ derivabilne tada vrijedi $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$.

23. ☐ DA ☐ NE

Ako su $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ derivabilne i $g(x) \neq 0$ tada vrijedi $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

24. ☐ DA ☐ NE

Ako za funkciju $y = f(x)$ postoji inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$ te ako su obje derivabilne i $f'(x) \neq 0$ onda vrijedi $\left(f^{-1}\right)'(y) = -\dfrac{1}{f'(x)}$.

25. ☐ DA ☐ NE

Ako za funkciju $y = f(x)$ postoji inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$ te ako su obje derivabilne i $\left(f^{-1}\right)'(y) \neq 0$ onda vrijedi $f'(x) = \dfrac{1}{\left(f^{-1}\right)'(y)}$.

26. ☐ DA ☐ NE

Ako za funkciju $y = f(x)$ postoji inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$ te ako su obje derivabilne onda vrijedi $f'(x)\left(f^{-1}\right)'(y) = 1$.

27. ☐ DA ☐ NE

Pravilo o derivaciji kompozicije funkcija glasi $[g(f(x))]' = f'(g(x))g'(x)$.

28. ☐ DA ☐ NE

Pravilo o derivaciji kompozicije funkcija glasi $[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$.

29. ☐ DA ☐ NE

Ako je funkcija $y = f(x)$ implicitno zadana sa $xy - e^{-xy} = 0$ onda za njenu derivaciju $y' = f'(x)$ vrijedi $xy' + y = 0$.

30. ☐ DA ☐ NE

Formula za derivaciju funkcije oblika $h(x) = f(x)^{g(x)}$ glasi $h'(x) = g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)$.

31. ☐ DA ☐ NE

Formula za derivaciju funkcije oblika $h(x) = f(x)^{g(x)}$ glasi $h'(x) = f(x)^{g(x)}g'(x)\ln f(x) + g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)$.

32. ☐ DA ☐ NE

Ako je $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$ onda je $f'(x) = \dfrac{\pi}{2}$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

33. ☐ DA ☐ NE

Ako je $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$ onda je $f'(x) = \dfrac{3\cos x - x\sin x}{3x\sqrt[3]{x}}$ za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

34. ☐ DA ☐ NE

Ako je $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ onda je $f'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

35. ☐ DA ☐ NE

Ako je $f(x) = \operatorname{arsh} x + \operatorname{arch} x$ onda je $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}$ za sve $x \in (1, +\infty)$.

36. ☐ DA ☐ NE

Ako je $f(x) = x + x^{\frac{1}{x}}$ onda je $f'(x) = (1 - \ln x)x^{\frac{1-2x}{x}} + 1$ za sve $x \in (0, +\infty)$.

37. ☐ DA ☐ NE

Diferencijal funkcije $y = f(x)$ u točki x je izraz $dy = f'(x)\Delta x$.

38. ☐ DA ☐ NE

Diferencijal funkcije $y = f(x)$ u točki x je izraz $dy = f(x + \Delta x) - f(x)$.

39. ☐ DA ☐ NE

Ako je funkcije $y = f(x)$ zadana parametarski sa $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in T$ onda vrijedi formula $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

40. ☐ DA ☐ NE

Ako je funkcije $y = f(x)$ zadana parametarski sa $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in T$ onda vrijedi formula $f''(x) = \dfrac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}$.

41. ☐ DA ☐ NE

Ako je $P(x)$ polinom stupnja n onda je $P^{(k)}(x) = 0$ za sve $k \geq n$.

42. ☐ DA ☐ NE

Ako je $f(x) = \ln(1 + 2x)$ onda je $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+2x)^n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

43. ☐ DA ☐ NE

Ako je $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ onda je $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

44. ☐ DA ☐ NE

Ako je $f(x) = \sin 2x$ onda je $f^{(n)}(x) = 2^n(-1)^n \cos 2x$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

45. ☐ DA ☐ NE

Ako je $f(x) = \sin 2x$ onda je $f^{(n)}(x) = 2^n \sin\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

46. ☐ DA ☐ NE

Ako je $f(x) = e^{-3x}$ onda je $f^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

47. ☐ DA ☐ NE

Ako funkcija f poprima u točki $c \in (a, b) \subseteq \mathcal{D}$ svoju najmanju ili najveću vrijednost na (a, b) onda f nije derivabilna u c.

48. ☐ DA ☐ NE

Ako funkcija f poprima u točki $c \in (a, b) \subseteq \mathcal{D}$ svoju najmanju ili najveću vrijednost na (a, b) i ako je f derivabilna u c onda je $f'(c) = 0$.

49. ☐ DA ☐ NE

Ako za funkciju f neprekidnu na $[a, b]$ i derivabilnu na (a, b) vrijedi $f(a) \neq f(b)$ onda je $f'(x) \neq 0$ za sve $x \in (a, b)$.

50. ☐ DA ☐ NE

Ako su a i b nultočke funkcije f koja je neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na (a, b) onda je $f'(c) = 0$ za barem jednu točku $c \in (a, b)$.

51. ☐ DA ☐ NE

Ako su a i b nultočke funkcije f koja je neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na (a, b) onda je $f'(x) \neq 0$ za sve $x \in (a, b)$.

52. ☐ DA ☐ NE

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti nije moguće primijeniti na $f(x) = |1 - 2x|,\ x \in [0, 3]$ zato što f nije derivabilna na $(0, 3)$.

53. ☐ DA ☐ NE

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti nije moguće primijeniti na $f(x) = |1 - x|,\ x \in [0, 3]$ zato što f nije derivabilna u točki $2 \in (0, 3)$.

54. ☐ DA ☐ NE

Rolleov teorem srednje vrijednosti ne možemo primijeniti na $f(x) = |1 - x^2|,\ x \in [-\sqrt{2}, 0]$.

55. ☐ DA ☐ NE

Rolleov teorem srednje vrijednosti ne možemo primijeniti na $f(x) = 2x - x^2,\ x \in [-1, 3]$.

56. ☐ DA ☐ NE

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti možemo primijeniti na funkciju f definiranu na $[-1, 2]$ sa $f(x) = x^2,\ x \in [-1, 0]$ i $f(x) = 0,\ x \in (0, 2]$.

57. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

58. ☐ DA ☐ NE

Funkcija definirana sa $f(x) = \dfrac{\sin x}{x},\ x \neq 0$ i $f(0) = 1$ derivabilna je u točki $x = 0$ i $f'(0) = 0$.

59. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x} = 2$.

60. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

61. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 - x} - \sqrt[3]{1 + x}}{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}} = \dfrac{3}{2}$.

62. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{1}{\ln 3}$.

63. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 2^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = \ln \dfrac{2}{3}$.

64. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - x e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 1$.

65. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x} \right) = -\dfrac{1}{2}$.

66. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x) = +\infty$.

67. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \ln x - 2 \ln^2 x}{x} = 0$.

68. ☐ DA ☐ NE

Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^k x}{x} = 0$.

69. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x\to0+0} x^x = 1$.

70. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x\to0+0} x^{-x}$ ne postoji.

71. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

72. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x\to0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{e}$.

73. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x\to0-0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ ne postoji.

74. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x\to0+0} (1-\cos x)^{\sin x} = 1$.

75. ☐ DA ☐ NE

$\lim\limits_{x\to1-0} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

76. ☐ DA ☐ NE

Derivabilna funkcija f je rastuća na intervalu (a,b) ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ za sve $x \in (a,b)$.

77. ☐ DA ☐ NE

Ako za derivabilnu funkciju f vrijedi $f'(x) < 0$ za sve $x \in (a,b)$ onda je f strogo padajuća na intervalu (a,b).

78. ☐ DA ☐ NE

Na intervalu $(-\infty, 2)$ funkcija $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$ je strogo rastuća.

79. ☐ DA ☐ NE

Na intervalima $(-\infty, 1)$ i $(e, +\infty)$ funkcija $f(x) = 3\ln^2 x - 2\ln^3 x$ je strogo padajuća.

80. ☐ DA ☐ NE

Na intervalu $(-\infty, 0)$ funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ je strogo rastuća.

81. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = x^x$ je strogo rastuća na $(0, 1/e)$ i strogo padajuća na $(1/e, +\infty)$.

82. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ je strogo rastuća na $(0, e)$ i strogo padajuća na $(e, +\infty)$.

83. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ je strogo rastuća na čitavom $\mathbb{R}$.

84. ☐ DA ☐ NE

Na intervalu $(-2,1)$ funkcija $f(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ je strogo padajuća.

85. ☐ DA ☐ NE

Neprekidna funkcija f ima lokalni minimum $f(c)$ u točki $c \in \mathcal{D}$ ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $f(x) > f(c)$ za sve $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \setminus \{c\}$.

86. ☐ DA ☐ NE

Funkcija f ima globalni maksimum $f(c)$ u točki $c \in \mathcal{D}$ ako je $f(x) \leq f(c)$ za sve $x \in \mathcal{D}$.

87. ☐ DA ☐ NE

Točka $c \in \mathcal{D}$ je kritična točka neprekidne funkcije f ako $f'(c)$ ili ne postoji ili je $f'(c) = 0$.

88. ☐ DA ☐ NE

Točka $c \in \mathcal{D}$ je stacionarna točka neprekidne funkcije f ako je $f'(c) = 0$.

89. ☐ DA ☐ NE

Ako neprekidna funkcija f ima lokalni ekstrem u točki $c \in \mathcal{D}$ onda je $f'(c) = 0$.

90. ☐ DA ☐ NE

Ako dvaput derivabilna funkcija f ima lokalni minimum u točki $c \in \mathcal{D}$ onda je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$.

91. ☐ DA ☐ NE

Ako za dvaput derivabilnu funkciju f u točki $c \in \mathcal{D}$ vrijedi $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$ onda f u točki c ima lokalni maksimum.

92. ☐ DA ☐ NE

Funkcija f definirana na $[-1,2]$ s $f(x) = x^2,\ x \in [-1,0]$ i $f(x) = 0,\ x \in (0,2]$ u svakoj točki $c \in [0,2]$ ima globalni minimum jednak 0.

93. ☐ DA ☐ NE

Funkcija f definirana na $[-1,2]$ sa $f(x) = -x^2,\ x \in [-1,0]$ i $f(x) = 0,\ x \in (0,2]$ nema niti točaka lokalnog minimuma niti točaka lokalnog maksimuma.

94. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$ u točki $c = 0$ ima lokalni minimum jednak 1.

95. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ nema niti točaka lokalnih ekstrema niti točaka globalnih ekstrema.

96. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ nema točaka globalnih ekstrema.

97. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = x^x$ ima lokalni i globalni minimum u točki $c = 1/e$.

98. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ u točki $c = e$ ima lokalni maksimum.

99. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ ima lokalne ekstreme u točkama $c = 0$, $c = 2$ i $c = 3$.

100. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ u točki $c = 2$ ima lokalni minimum a u točki $c = -1$ ima lokalni maksimum.

101. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ nema niti točaka lokalnih ekstrema niti točaka globalnih ekstrema.

102. ☐ DA ☐ NE

Funkcija f je konkavna na intervalu $(a,b) \subseteq \mathcal{D}$ ako za bilo koje točke $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$ vrijedi: $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ za barem jedan $t \in (0,1)$.

103. ☐ DA ☐ NE

Funkcija f je strogo konveksna na intervalu $(a,b) \subseteq \mathcal{D}$ ako za bilo koje točke $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$ vrijedi: $f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ za sve $t \in (0,1)$.

104. ☐ DA ☐ NE

Derivabilna funkcija f je konkavna na intervalu $(a,b) \subseteq \mathcal{D}$ ako i samo ako je f' padajuća na (a,b).

105. ☐ DA ☐ NE

Ako za dvaput derivabilnu funkciju f vrijedi $f''(x) \geq 0$ za sve $x \in (a,b)$, onda je f strogo konveksna na intervalu $(a,b) \subseteq \mathcal{D}$.

106. ☐ DA ☐ NE

Ako derivabilna funkcija f ima infleksiju u točki $c \in \mathcal{D}$ onda je $f'(c) = 0$.

107. ☐ DA ☐ NE

Dvaput derivabilna funkcija f ima infleksiju u točki $c \in \mathcal{D}$ ako i samo ako je $f''(c) = 0$.

108. ☐ DA ☐ NE

Ako dvaput derivabilna funkcija f ima infleksiju u točki $c \in \mathcal{D}$ onda je $f''(c) = 0$.

109. ☐ DA ☐ NE

Na intervalu $(2, +\infty)$ funkcija $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$ je strogo konkavna.

110. ☐ DA ☐ NE

Točka $c = 1$ je jedina točka infleksije funkcije $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$.

111. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = 3\ln^2 x - 2\ln^3 x$ nema točaka infleksije.

112. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ je konveksna na intervalu $(-\infty, 0)$ i konkavna na intervalu $(0, +\infty)$.

113. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = x^x$ je strogo konveksna na $(0, +\infty)$.

114. ☐ DA ☐ NE

Funkcija $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ je strogo konkavna na čitavom $\mathbb{R}$.

115. ☐ DA ☐ NE

Točka $c = 2/5$ je jedina točka infleksije funkcije $f(x) = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}}$.

116. ☐ DA ☐ NE

Na intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, 2/5)$ funkcija $f(x) = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}}$ je konkavna.

117. ☐ DA ☐ NE

Ako je x_0 točka prekida prve vrste funkcije f onda je pravac $x = x_0$ vertikalna asimptota krivulje $y = f(x)$.

118. ☐ DA ☐ NE

Ako je x_0 točka prekida druge vrste funkcije f onda je pravac $x = x_0$ vertikalna asimptota krivulje $y = f(x)$.

119. ☐ DA ☐ NE

Ako je $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$, onda je pravac $y = y_0$ horizontalna asimptota krivulje $y = f(x)$ u lijevom kraju.

120. ☐ DA ☐ NE

Ako je $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ili $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, onda krivulja $y = f(x)$ nema horizontalnu asimptotu u desnom kraju ali zato ima kosu asimptotu.

121. ☐ DA ☐ NE

Ako postoje $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \neq 0$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = +\infty$, onda je pravac $y = kx$ kosa asimptota krivulja $y = f(x)$ u desnom kraju.

122. ☐ DA ☐ NE

Krivulja $y = f(x)$ može u lijevom kraju imati i horizontalnu i kosu asimptotu.

123. ☐ DA ☐ NE

Krivulja $y = f(x)$ može imati i horizontalnu i kosu asimptotu.

124. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota krivulje $y = 3\ln^2 x - 2\ln^3 x$ u desnom kraju.

125. ☐ DA ☐ NE

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota krivulje $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ slijeva i zdesna.

126. ☐ DA ☐ NE

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota krivulje $y = x^x$ i to zdesna.

127. ☐ DA ☐ NE

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota krivulje $y = x^{-\frac{1}{x}}$ i to zdesna.

128. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = 2x$ je kosa asimptota krivulje $y = x - \sqrt{x^2+1}$ u lijevom kraju.

129. ☐ DA ☐ NE

Pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota krivulje $y = x - \sqrt{x^2+1}$ u desnom kraju.

130. ☐ DA ☐ NE

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota krivulje $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ zdesna ali ne i slijeva.

Rješenja

1. DA	23. DA	45. DA	67. DA	89. NE	111. NE
2. NE	24. NE	46. DA	68. DA	90. NE	112. DA
3. DA	25. DA	47. NE	69. DA	91. DA	113. DA
4. DA	26. DA	48. DA	70. NE	92. DA	114. DA
5. NE	27. NE	49. NE	71. DA	93. DA	115. DA
6. NE	28. DA	50. DA	72. NE	94. DA	116. DA
7. DA	29. DA	51. NE	73. NE	95. DA	117. NE
8. NE	30. NE	52. DA	74. DA	96. DA	118. NE
9. NE	31. DA	53. NE	75. DA	97. DA	119. DA
10. DA	32. NE	54. DA	76. DA	98. DA	120. NE
11. DA	33. NE	55. NE	77. DA	99. NE	121. NE
12. DA	34. NE	56. DA	78. NE	100. DA	122. NE
13. NE	35. DA	57. NE	79. NE	101. DA	123. DA
14. NE	36. DA	58. DA	80. DA	102. NE	124. NE
15. NE	37. DA	59. DA	81. NE	103. DA	125. NE
16. NE	38. NE	60. DA	82. DA	104. DA	126. NE
17. NE	39. DA	61. NE	83. DA	105. DA	127. DA
18. DA	40. NE	62. NE	84. NE	106. NE	128. DA
19. NE	41. NE	63. NE	85. DA	107. NE	129. DA
20. NE	42. NE	64. NE	86. DA	108. DA	130. NE
21. DA	43. DA	65. DA	87. DA	109. DA	
22. NE	44. NE	66. DA	88. DA	110. DA	

12.

Nizovi i redovi

1. ☐ DA ☐ NE

   Niz realnih brojeva je funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

2. ☐ DA ☐ NE

   Članovi niza realnih brojeva zadani su u točno određenom poretku.

3. ☐ DA ☐ NE

   Niz $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ je stacionaran.

4. ☐ DA ☐ NE

   Niz $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, \ldots$ je monoton.

5. ☐ DA ☐ NE

   Niz $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ je monoton.

6. ☐ DA ☐ NE

   $a_n \to a$ ako $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})$ takav da $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

7. ☐ DA ☐ NE

   Broj a je limes niza $\{a_n\}$ ako i samo ako svaka ε-okolina broja a sadrži beskonačno članova niza, dok se izvan te okoline nalazi najviše konačno članova niza.

8. ☐ DA ☐ NE

   Konvergenciju niza možemo dokazati tako da riješimo osnovnu nejednadžbu konvergencije.

9. ☐ DA ☐ NE

   Limes niza je jedinstven.

10. ☐ DA ☐ NE

    Broj a je gomilište niza ako se u svakoj ε-okolini broja a nalazi beskonačno mnogo članova niza.

11. ☐ DA ☐ NE

    Limes superior je najveće gomilište.

12. ☐ DA ☐ NE

    $\limsup$ je oznaka za najmanje gomilište.

13. ☐ DA ☐ NE

    Limes je ujedno i gomilište.

14. ☐ DA ☐ NE
Svako gomilište je ujedno i limes.

15. ☐ DA ☐ NE
Gomilišta niza $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ su -1 i 1.

16. ☐ DA ☐ NE
Niz $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ ima četiri različita gomilišta.

17. ☐ DA ☐ NE
Podniz niza $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je svaka kompozicija $a \circ n$, gdje je $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija.

18. ☐ DA ☐ NE
Podniz niza nastaje iz niza preskakanjem članova.

19. ☐ DA ☐ NE
Svaki podniz je također niz.

20. ☐ DA ☐ NE
Podniz $\{a_{2n-1}\}$ niza $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ glasi $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots$.

21. ☐ DA ☐ NE
Niz $1, q, q^2, q^3, q^4, \cdots$ konvergira prema nuli za svaki $q \in \mathbb{R}$.

22. ☐ DA ☐ NE
Ako je g gomilište niza, tada postoji barem jedan podniz tog niza koji teži prema g.

23. ☐ DA ☐ NE
Ako je niz konvergentan, tada svaki podniz konvergira prema istoj vrijednosti.

24. ☐ DA ☐ NE
Svaki omeđen niz je konvergentan.

25. ☐ DA ☐ NE
Svaki niz ima monoton podniz.

26. ☐ DA ☐ NE
Svaki niz ima uzlazan podniz.

27. ☐ DA ☐ NE
Svaki omeđen i monoton niz je konvergentan.

28. ☐ DA ☐ NE
Svaki omeđen niz ima konvergentan podniz.

29. ☐ DA ☐ NE
$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

30. ☐ DA ☐ NE
$2.923 < e < 2.924$.

31. ☐ DA ☐ NE
$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

32. ☐ DA ☐ NE

Limes produkta jednak je produktu limesa ako oba limesa postoje.

33. ☐ DA ☐ NE

Ako je $a_n > 0$ i $\lim a_n > 0$, tada je $\lim(a_n)^x = (\lim a_n)^x$.

34. ☐ DA ☐ NE

$\lim \frac{\sin n}{n} = 1$.

35. ☐ DA ☐ NE

Cauchyjev niz je divergentan.

36. ☐ DA ☐ NE

Niz je konvergentan ako i samo ako je Cauchyjev.

37. ☐ DA ☐ NE

Niz $\{\frac{1}{n}\}$ je Cauchyjev.

38. ☐ DA ☐ NE

Ako je $b > 0$ tada je $\lim \sqrt[n]{b} = 1$.

39. ☐ DA ☐ NE

$\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

40. ☐ DA ☐ NE

Limes niza možemo odrediti primjenjujući proširenje po neprekidnosti i tehnike nalaženja limesa funkcija.

41. ☐ DA ☐ NE

$e = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

42. ☐ DA ☐ NE

$e = \lim_{t\to 0}(1 + t)^{1/t}$.

43. ☐ DA ☐ NE

Red realnih brojeva od je zbroj beskonačno pribrojnika koji se nalaze u zadanom poretku.

44. ☐ DA ☐ NE

Red realnih brojeva od je zbroj beskonačno pribrojnika koji se nalaze u proizvoljnom poretku.

45. ☐ DA ☐ NE

k-ta parcijalna suma reda brojeva jednaka je zbroju prvih k članova reda.

46. ☐ DA ☐ NE

Za svaki konvergentan red limes niza parcijalnih suma jednak je nula.

47. ☐ DA ☐ NE

Suma reda jednaka je limesu niza parcijalnih suma, ako taj limes postoji.

48. ☐ DA ☐ NE

Red $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ konvergira za svaki a.

49. ☐ DA ☐ NE
Geometrijski red $\sum p^{n-1}$ konvergira za svaki $p > 1$.

50. ☐ DA ☐ NE
$\sum a^{n-1} = \frac{1}{1-a}$ za $|a| < 1$.

51. ☐ DA ☐ NE
Ako je $\lim a_n \neq 0$, tada red $\sum a_n$ konvergira.

52. ☐ DA ☐ NE
Konvergentan red ostaje konvergentan ako mu promijenimo prvih 100 članova.

53. ☐ DA ☐ NE
Harmonijski red je konvergentan.

54. ☐ DA ☐ NE
$\sum \frac{1}{n} = +\infty$.

55. ☐ DA ☐ NE
Niz parcijalnih suma reda $\sum \frac{1}{n}$ teži u $+\infty$.

56. ☐ DA ☐ NE
Red $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$.

57. ☐ DA ☐ NE
Poredbeni kriterij možemo primijeniti na bilo koja dva reda.

58. ☐ DA ☐ NE
Red s pozitivnim članovima je konvergentan ako ima konvergentnu majorantu.

59. ☐ DA ☐ NE
Red s pozitivnim članovima je divergentan ako ima divergentnu minorantu.

60. ☐ DA ☐ NE
D'Alembertov kriterij konvergencije možemo primijeniti na bilo koji red.

61. ☐ DA ☐ NE
Red s pozitivnim članovima konvergira po D'Alembertovom kriteriju ako je $\lim a_{n+1}/a_n < 1$.

62. ☐ DA ☐ NE
Red s pozitivnim članovima konvergira po D'Alembertovom kriteriju ako je $\lim a_n/a_{n+1} < 1$.

63. ☐ DA ☐ NE
Red s pozitivnim članovima divergira po Cauchyjevom kriteriju ako je $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$.

64. ☐ DA ☐ NE
Red s pozitivnim članovima konvergira po Cauchyjevom kriteriju ako je $\lim \sqrt{a_n} < 1$.

65. ☐ DA ☐ NE
Red $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ konvergira jer ima konvergentnu majorantu $\sum \dfrac{1}{n}$.

66. ☐ DA ☐ NE
Red $\sum \dfrac{1}{n^3}$ konvergira jer ima konvergentnu majorantu $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

67. ☐ DA ☐ NE

Red $\sum \frac{n}{3^n}$ konvergira po Cauchyjevom kriteriju.

68. ☐ DA ☐ NE

Ako je red $\sum |a_n|$ konvergentan, tada je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan.

69. ☐ DA ☐ NE

Ako red $\sum a_n$ konvergira, red $\sum |a_n|$ ne mora konvergirati.

70. ☐ DA ☐ NE

Geometrijski red $\sum q^{n-1}$ je apsolutno konvergentan za $|q| < 1$.

71. ☐ DA ☐ NE

Ako je red apsolutno konvergentan, tada članove možemo zbrajati u bilo kojem poretku.

72. ☐ DA ☐ NE

Red $\sum \frac{\cos n\pi}{n^2}$ je apsolutno konvergentan.

73. ☐ DA ☐ NE

Alternirani harmonijski red konvergira po Leibnitzovom kriteriju.

74. ☐ DA ☐ NE

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots = \ln 2$.

75. ☐ DA ☐ NE

Niz funkcija $\{f_n\}$ zadan s $f_n(x) = x^{n-1}$ je definiran na čitavom skupu $\mathbb{R}$.

76. ☐ DA ☐ NE

Niz funkcija $\{f_n\}$ zadan s $f_n(x) = x^{n-1}$ konvergira na čitavom skupu $\mathbb{R}$.

77. ☐ DA ☐ NE

Niz funkcija $\{f_n\}$ zadan s $f_n(x) = x^{n-1}$ konvergira uniformno za $\forall x \in (-1, 1]$.

78. ☐ DA ☐ NE

Niz funkcija $\{f_n\}$ zadan s $f_n(x) = x^{n-1}$ konvergira prema nul-funkciji za $\forall x \in (-1, 1)$.

79. ☐ DA ☐ NE

Ako niz neprekidnih funkcija konvergira uniformno, tada je limes također neprekidna funkcija.

80. ☐ DA ☐ NE

Niz funkcija $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ konvergira prema nul-funkciji na čitavom skupu $\mathbb{R}$.

81. ☐ DA ☐ NE

Red funkcija $\sum f_n$ konvergira po točkama prema funkciji f na skupu D ako red brojeva $\sum f_n(x)$ konvergira prema $f(x)$ za $\forall x \in D$.

82. ☐ DA ☐ NE

Red funkcija $\sum f_n$ konvergira apsolutno na skupu D ako red brojeva $\sum |f_n(x)|$ konvergira za $\forall x \in D$.

83. ☐ DA ☐ NE

Red funkcija $\sum f_n$ konvergira uniformno na skupu D ako niz parcijalnih suma konvergira uniformno na skupu D.

84. ☐ DA ☐ NE
Geometrijski red funkcija $\sum x^{n-1}$ konvergira na skupu $(-2,2)$.

85. ☐ DA ☐ NE
$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}, \quad \forall x\in(-1,1]$.

86. ☐ DA ☐ NE
$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}, \quad \forall x\in(-1,1)$.

87. ☐ DA ☐ NE
Red funkcija $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, gdje je $f_n(x)=a_nx^n$ još se zove i red potencija.

88. ☐ DA ☐ NE
Radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ je broj $\rho=\limsup \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

89. ☐ DA ☐ NE
Ako je ρ radijus konvergencije reda potencija, tada red konvergira na skupu $\mathbb{R}\setminus[-\rho,\rho]$.

90. ☐ DA ☐ NE
Ako je ρ radijus konvergencije reda potencija, tada red divergira na skupu $\mathbb{R}\setminus[-\rho,\rho]$.

91. ☐ DA ☐ NE
Radijus konvergencije reda potencija $\sum \frac{1}{n}x^n$ jednak je nula.

92. ☐ DA ☐ NE
Pomoću Taylorove formule možemo računati vrijednosti elementarnih funkcija do na željenu točnost koristeći samo četiri osnovne računske operacije.

93. ☐ DA ☐ NE
Formula za Taylorov razvoj funkcije $f(x)$ glasi $\quad f(x)=f(x_0)+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

94. ☐ DA ☐ NE
Formula za MacLaurinov razvoj funkcije $f(x)$ glasi $\quad f(x)=f(0)+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n}x^n$.

95. ☐ DA ☐ NE
$\sin x=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots, \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

96. ☐ DA ☐ NE
$\sin x=\sum(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

97. ☐ DA ☐ NE
$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots, \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

98. ☐ DA ☐ NE
$e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots, \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

99. ☐ DA ☐ NE

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

100. ☐ DA ☐ NE

$$e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Rješenja

1. DA	21. NE	41. DA	61. DA	81. DA
2. DA	22. DA	42. DA	62. NE	82. DA
3. NE	23. DA	43. DA	63. DA	83. DA
4. DA	24. NE	44. NE	64. NE	84. NE
5. NE	25. DA	45. DA	65. NE	85. NE
6. DA	26. NE	46. NE	66. DA	86. DA
7. DA	27. DA	47. DA	67. DA	87. DA
8. DA	28. DA	48. NE	68. DA	88. NE
9. DA	29. DA	49. NE	69. DA	89. NE
10. DA	30. NE	50. DA	70. DA	90. DA
11. DA	31. DA	51. NE	71. DA	91. NE
12. NE	32. DA	52. DA	72. DA	92. DA
13. DA	33. DA	53. NE	73. DA	93. DA
14. NE	34. NE	54. DA	74. DA	94. NE
15. DA	35. NE	55. DA	75. DA	95. DA
16. NE	36. DA	56. DA	76. NE	96. DA
17. DA	37. DA	57. NE	77. NE	97. DA
18. DA	38. DA	58. DA	78. DA	98. DA
19. DA	39. DA	59. DA	79. DA	99. NE
20. NE	40. DA	60. NE	80. DA	100. DA

Dio III.

PODSJETNIK ZA UČENJE

13.

Osnove matematike

1. Što je sud? Dajte primjer.
2. Kako glase tablice istinitosti slijedećih logičkih operacija: konjunkcija $\wedge$, disjunkcija $\vee$, ekskluzivna disjunkcija $\veebar$, implikacija $\Rightarrow$, ekvivalencija $\Leftrightarrow$, negacija $\neg$?
3. Što je predikat? Dajte primjer.
4. Objasnite univerzalni kvantifikator $\forall$ i egzistencijalne kvantifikatore $\exists$ i $\exists!$.
5. Kako definiramo partitivni skup?
6. Što je binarna relacija? Kada kažemo da je binarna relacija refleksivna (simetrična, tranzitivna, ekvivalencija)? Primjeri.
7. Kako definiramo relaciju potpunog uređaja? Kako definiramo relaciju parcijalnog uređaja? Navedite primjere. Što je potpuno uređen skup?
8. Što je gornja, a što donja međa? Što su infimum i supremum, a što minimum i maksimum? Navedite primjere.
9. Što je funkcija? Što je domena, a što kodomena? Kako definiramo kompoziciju funkcija? Dokažite $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
10. Definirajte slijedeće vrste funkcija: surjekcija, injekcija, bijekcija, inverzna funkcija, restrikcija, ekstenzija.
11. Kada su skupovi ekvipotentni? Kako definiramo beskonačan skup?
12. Kako glase Peanovi aksiomi? Kako definiramo skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$? Kako glasi princip matematičke indukcije?
13. Dokažite da je skup $\mathbb{N}$ beskonačan.
14. Što su binomni koeficijenti? Što nam o njima kaže Pascalov trokut?
15. Kako glasi binomni poučak?
16. Kako definiramo skupove $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$?
17. Dokažite da su skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ ekvipotentni.
18. Koje baze za brojevne sustave koristimo u praksi?
19. Koji od skupova $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ su diskretni; prebrojivi; gusti?
20. Dokažite da je $\mathbb{Q}$ gust, to jest da između svaka dva različita racionalna broja imamo beskonačno racionalnih brojeva. Dokažite da postoje iracionalni brojevi tako što ćete pokazati da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

21. Objasnite princip rada računala.

22. Koja su svojstva apsolutne vrijednosti realnog broja?

23. Kako definiramo skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$? Što je $|z|$, a što $\bar{z}$? Kako zbrajamo kompleksne brojeve? Koja su svojstva operacija sa kompleksnim brojevima? Dajte primjere.

24. Što je trigonometrijski oblik kompleksnog broja? Kako prebacujemo kompleksne brojeve iz jednog u drugi oblik? Navedite primjer.

25. Nacrtajte skupove $|z - z_0| \leq r$ i $|z - z_1| + |z - z_2| \leq r$.

26. Kako glase Moivreove formule za potenciranje kompleksnih brojeva i za vađenje n-tog korjena? Dokažite Moivreovu formulu za z^2.

27. Kako glasi eksponencijalni oblik kompleksnog broja? Kako definiramo potenciranje s kompleksnim eksponentom?

14.

Linearna algebra

1. Što je sustav linearnih jednadžbi?
2. Što je matrica? Kako zbrajamo matrice? Kako množimo matrice?
3. Što je jedinična matrica; nul-matrica; transponirana matrica; simetrična matrica?
4. Kako pomoću matrice zapisujemo sustav linearnih jednadžbi?
5. Kako rješavamo trokutaste sustave? Opišite postupak Gaussove eliminacije. Što je pivotiranje?
6. Kada su vektori linearno nezavisni? Kako definiramo rang matrice? Kako određujemo rang matrice?
7. Kada kažemo da su dvije matrice ekvivalentne i što vrijedi u tom slučaju?
8. Kako glasi Kronecker–Capellijev teorem? Dokažite da je sustav $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rješiv ako i samo ako $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}([A \mid \mathbf{b}])$.
9. Što je inverzna matrica? Dokažite da je inverzna matrica jedinstvena ako postoji. Dokažite da je
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
10. Opišite postupak traženja inverzne matrice.
11. Dokažite da je matrica A reda n regularna ako i samo ako je $\mathrm{rang}(A) = n$.
12. Definirajte slijedeće pojmove: permutacija, inverzija, parnost.
13. Što je determinanta?
14. Navedite i dokažite svojstva determinanti:
    (a) determinanta trokutaste matrice jednaka je produktu elemenata na dijagonali,
    (b) $\det(A) = \det(A)^T$,
    (c) zamjenom dvaju stupaca (redaka) determinanta mijenja predznak,
    (d) determinanta matrice s dva jednaka stupca (retka) je jednaka nuli,
    (e) determinanta je linearna funkcija svojih stupaca (redaka),
    (f) ako determinanta ima nul stupac (redak), tada je jednaka nuli,
    (g) determinanta se ne mijenja ako nekom stupcu (retku) pribrojimo neki drugi stupac (redak) pomnožen s nekim brojem,
    (h) $\det(A) = \det(A)\det(B)$ ako obje determinante na desnoj strani postoje (bez dokaza).

15. Dokažite da su lijedeće tvrdnje ekvivalentne:

    (a) $\operatorname{rang}(A) = n$,

    (b) $\det(A) \neq 0$,

    (c) postoji A^{-1},

16. Kako možemo definirati rang pomoću poddeterminanti?

17. Objasnite Laplaceov razvoj determinante:

$$\det A = \sum_j a_{ij} A_{ij} = \sum_i a_{ij} A_{ij}.$$

18. Objasnite i dokažite formulu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T.$$

19. Izrecite i dokažite Cramerovo pravilo.

15.

Vektorska algebra i analitička geometrija

1. Što je usmjerena dužina? Što je vektor? Kako definiramo jednakost dvaju vektora? Koje je osnovno svojstvo Euklidovog prostora?
2. Što su kolinearni vektori?
3. Kako definiramo nul-vektor?
4. Kako zbrajamo i oduzimamo vektore? Kako množimo vektore skalarom? Koja su svojstva tih operacija?
5. Što je radijus-vektor?
6. Što je koordinatni sustav? Kako definiramo vektore u koordinatnom sustavu? Što su skalarne, a što vektorske komponente vektora?
7. Što su komplanarni vektori?
8. Kako definiramo duljinu vektora? Što je jedinični vektor? Što su kosinusi smjerova i kako ih možemo izračunati?
9. Kako definiramo linearnu zavisnost odnosno nezavisnost vektora?
10. Što je baza prostora? Kako možemo vektor $\mathbf{x}$ prikazati u bazi $(0, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, pri čemu su $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ i $\mathbf{x}$ zadani u bazi $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$? Dajte primjer.
11. Kako glase geometrijska i koordinatna definicija skalarnog produkta? Navedite svojstva skalarnog produkta.
12. Kako pomoću skalranog produkta računamo kut između dva vektora?
13. Kako glase geometrijska i koordinatna definicija vektorskog produkta. Navedite svojstva vektorskog produkta i usporedite ih sa svojstvima determinanti.
14. Kako računamo površinu paralelograma, a kako površinu trokuta? Dajte primjere.
15. Kako glase geometrijska i koordinatna definicija mješovitog produkta. Navedite svojstva skalarnog produkta i usporedite ih sa svojstvima determinanti.
16. Objasnite zašto je $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}) = \pm V$, gdje je V volumen paralelopipeda kojeg razapinju vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.
17. Kako računamo volumen paralelopipeda, a kako volumen tetraedra? Dajte primjere.
18. Čemu je jednako
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \qquad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \ ?$$

19. Izvedite jednadžbe pravca: vektorsku, parametarsku, kanonsku, kao presjek dvaju ravnina. Primjer.

20. Izvedite jednadžbe ravnine: vektorsku, segmentnu, kroz tri točke, kroz jednu točku uz zadani vektor normale $\mathbf{n}$, opći oblik. Dajte primjere.

21. Kada su dva pravca paralelna? Kada su dvije ravnine paralelne? Kako možemo odrediti kut između pravca i ravnine, dvije ravnine, dva pravca?

22. Kako određujemo sjecište dvaju pravaca, dvije ravnine, pravca i ravnine? Dajte primjere.

23. Kako određujemo udaljenost dvije točke, točke i pravca, točke i ravnine, dva pravca, dvije ravnine, pravca i ravnine? Dajte primjere.

24. Kako određujemo težište trokuta, upisanu kružnicu, opisanu kružnicu, ortocentar? Dajte primjere.

25. Kako određujemo projekciju točke na ravninu, točke na pravac, pravca na ravninu? Dajte primjere.

16.

Funkcije realne varijable

1. Opišite načine zadavanja funkcija i navedite primjere.
2. Kako definiramo slijedeće vrste funkcija: omeđena, parna, neparna, rastuća, strogo rastuća, periodička?
3. Definirajte limes funkcije f u točki x. Dokažite da je limes jedinstven ako postoji. Kako definiramo limese s lijeva i zdesna? Navedite svojstva limesa (pravilo uklije\v{s}tene funkcije; pravilo zamjene; limes zbroja, produkta, kvocijenta). Kako definiramo limese u beskonačnosti i beskonačne limese?
4. Kada kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x? Kada kažemo da je funkcija f neprekidna na skupu $\mathcal{A}$? Koja su osnovna svojstva neprekidnih funkcija? Ilustrirajte svojstva primjerima.
5. Kakve vrste prekida imamo? Navedite nekoliko primjera.
6. Što su asimptote i kako ih računamo?
7. Nacrtajte funkcije $\sqrt{x^2}$, $(\sqrt[4]{x})^2$ i $\sqrt[4]{x^2}$.
8. Kako definiramo logaritamske funkcije? Dokažite da je
$$\log(xy) = \log x + \log y.$$
Dokažite da je
$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$
9. Objasnite opću sinusoidu $f(x) = A\sin(\varphi x + \psi)$.
10. Dokažite kosinusov poučak i adicione teoreme. .
11. Definirajte i nacrtajte sve elementarne funkcije: polinom n-tog stupnja, racionalnu funkciju, n-ti korijen, trigonometrijske funkcije, arkus funkcije, eksponencijalne funkcije i logaritamske funkcije (za različite baze), hiperbolne i area funkcije.
12. Što je inverzna funkcija i kada postoji? Što je $(f \circ f^{-1})(x)$? Nacrtajte funkcije $f(x) = \arcsin(\sin x)$ i $g(x) = \sin(\arcsin x)$.
13. Što kaže osnovni teorem algebre o nul-točkama polinoma n-tog stupnja?
14. Dostiže li neprekidna funkcija na zatvorenom skupu svoj maksimum i minimum?
15. Kakva mora biti biti funkcija f da vrijedi
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x)?$$

17.

Derivacije i primjene

1. Kako definiramo derivaciju? Koja je geometrijska interpretacija derivacije?
2. Izvedite formule za derivaciju elementarnih funkcija. Dokažite formule za derivaciju zbroja, umnoška i kvocijenta.
3. Kako deriviramo inverznu funkciju? Kako deriviramo kompoziciju funkcija? Kako deriviramo implicitno zadanu funkciju? Dajte primjere.
4. Objasnite postupak logaritamskog deriviranja Navedite primjer.
5. Što je diferencijal? Koja je geometrijska interpretacija? Kako diferencijal možemo koristiti za približno računanje?
6. Kako definiramo derivacije i diferencijale višeg reda?
7. Izvedite formule za prvu i drugu derivaciju parametarski zadane funkcije.
8. Izrecite i dokažite Fermatov teorem.
9. Izrecite i dokažite Rolleov teorem.
10. Izrecite i dokažite Cauchyjev teorem srednje vrijednosti.
11. Izrecite i dokažite Lagrangeov teorem srednje vrijednosti. Koja je geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema? Zbog čega su važne pretpostavke teorema?
12. Navedite sedam neodređenih oblika koji se mogu javiti prilikom računanja limesa.
13. Izrecite L'Hospitalovo pravilo. Dokažite L'Hospitalovo pravilo za slučaj $\frac{0}{0}$. Navedite nekoliko primjera.
14. Dokažite da je derivabilna funkcija strogo rastuća na nekom otvorenom intervalu ako i samo je njena derivacija veća od nule.
15. Definirajte lokalne i globalne ekstreme.
16. Što je kritična, a što stacionarna točka?
17. Kako glasi nuždan uvjet ekstrema?
18. Kako glasi dovoljan uvjet ekstrema? (Preko promjene predznaka prve derivacije ili preko druge ili viših derivacija) Dokažite navede dovoljne uvjete ekstrema.
19. Kako definiramo konveksnost i konkavnost? Koja su svojstva grafa konveksne i konkavne funkcije? Kako možemo provjeriti konveksnost i konkavnost pomoću druge derivacije?
20. Što je točka infleksije i kada postoji?

21. Kako ispitujemo tok funkcije? Navedite primjer.
22. Kako ispitujemo tok parametarski zadane funkcije? Navedite primjer.

18.

Nizovi i redovi

1. Što je niz? Kada je niz padajući, a kada strogo padajući? Kada je niz monoton?
2. Kako definiramo limes niza? Riješite osnovnu nejednadžbu konvergencije za neki konkretan niz.
3. Dokažite da je limes niza jedinstven.
4. Što je gomilište? Što je $\limsup a_n$, a što $\liminf a_n$?
5. Što je podniz? Kako još možemo definirati gomilište (pomoću podniza)?
6. Konvergentan niz je omeđen. Dokaz.
7. Svaki niz ima monoton podniz. Dokaz.
8. Monoton i omeđen niz je konvergentan. Dokaz.
9. Dokažite da je niz
$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
konvergentan (rastući i omeđen odozgo).
10. Kako možemo odrediti
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}?$$
11. Navedite dovoljan uvjet konvergencije niza (niz konvergira ako i samo ako je Cauchyjev).
12. Dokažite
$$\sqrt[n]{a}\to 1, \qquad \sqrt[n]{n}\to 1.$$
13. Što je red brojeva? Kako definiramo sumu reda (limes niza parcijalnih suma)?
14. Što je geometrijski red? Opišite Zenonov paradoks.
15. Dokažite nuždan uvjet konvergencije reda ($a_n \to 0$).
16. Opišite konvergenciju reda
$$\sum\frac{1}{n^p}$$
u ovisnosti o parametru p.
17. Dokažite da harmonijski red
$$\sum\frac{1}{n}$$
divergira.

18. Opišite konvergenciju reda
$$\sum \frac{(n+1)^\alpha}{(n!)^\beta}$$
u ovisnosti o parametrima α i β.

19. Opišite kriterije konvergencije za redove s pozitivnim članovima – poredbeni; D'Alembertov; Cauchyjev; Raabeov.

20. Što je apsolutna konvergencija? Da li apsolutna konvergencija nekog reda povlači i konvergenciju tog reda?

21. Kako glasi Leibnitzov kriterij konvergencije i za kakve ga redove koristimo?

22. Što je niz funkcija? Navedite primjer.

23. Kako definiramo konvergenciju po točkama (običnu konvergenciju) niza funkcija? Naveidte primjere.

24. Kako definiramo uniformnu konvergenciju niza funkcija? Da li uniformna konvergencija povlači običnu konvergenciju? Navedite primjer.

25. Što je red funkcija? Navedite primjer.

26. Kako definiramo konvergenciju po točkama (običnu konvergenciju) reda funkcija? (Ili kao konvergenciju redova brojeva koji se dobiju kada uvrštavamo točke iz domene ili kao običnu konvergenciju pripadnog niza parcijalnih suma funkcija.) Navedite primjere.

27. Definirajte uniformnu i apsolutnu konvergenciju reda funkcija. Kako glasi Weierstraßov kriterij konvergencije?

28. Kako se nalazi područje konvergencije reda funkcija? Dajte primjer.

29. Što je red potencija i njegov radijus konvergencije?

30. Ispitajte konvergenciju reda
$$\sum \frac{1}{n} x^n.$$
Uputa: prvo se nađe područje apsolutne konvergencije pomoću kriterija za konvergenciju redova s pozitivnim članovima, a potom se posebno ispitaju rubovi područja apsolutne konvergencije.

31. Kada možemo derivirati red funkcija? Kako deriviramo red potencija? Navedite nakoliko primjera.

32. Kako glasi Taylorova formula i čemu služi? Što je ostatak?

33. S kojom točnošću Taylorov (ili MacLaurinov) red aproksimira zadanu funkciju u nekoj točki?

34. Koje vrijednosti funkcije $\ln x$ možemo izračunati pomoću MacLaurinovog reda funkcije
$$\ln \frac{1+x}{1-x}?$$

35. Kako glase MacLaurinovi redovi za funkcije e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\ln((1+x)/(1-x))$? Izvedite te redove i njihovo područje konvergencije.