predavanje 2: Matematičko i fizikalno njihalo. Fazorski prikaz titranja i zbrajanje titranja. Uvod u mehaničke valove.

1. Što je matematičko, a što fizikalno njihalo? Što je fazorski prikaz titranja (prikaz pomoću rotirajućeg vektora)? (obavezno)

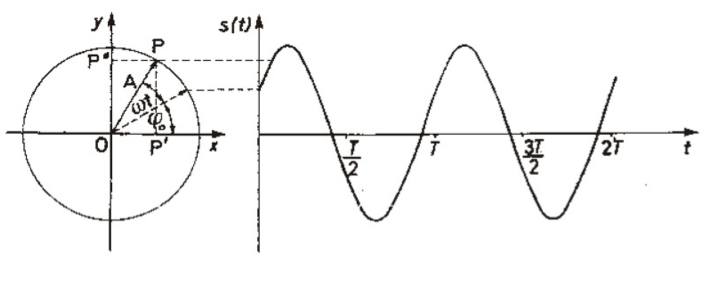
Matematičko njihalo – sitno tijelo ili materijalna točka mase m koja se njiše obješena na nerastezljivu nit zanemarive mase i duljine ℓ. Kada njihalo miruje u ravnotežnom položaju, napetost niti N uravnotežuje silu težu G na materijalnu točku. Kada je njihalo za neki kut ϑ izvan položaja ravnoteže, normalnu komponentu sile teže uravnotežuje napetost niti [N=m*g*cos ϑ], a tangecijalna komponenta je usmjerena prema ravnotežnom položaju.
Zbroj svih sila jednak je:
F= - m * g * sin ϑ
gdje je minus jer sila djeluje u suprotnom smjeru povečavanja kuta.
Za male kutove, kut izražen u radijanima približno je jednak sinusu tog istog kuta (sin $\vartheta \approx \vartheta$)
pa je u tom slučaju sila F=-mg ϑ i govorimo o harmoničkom titranju.
Dakle, matematičko njihalo harmonički titra samo za male amplitude. Za veće amplitude njihanje nije harmoničko.

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\vartheta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2 \vartheta = 0$$

Fizikalno njihalo - kruto tijelo koje se zbog utjecaja sile teže njiše oko horizontalne osi koja ne prolazi kroz njegovo težište. Moment sile teže koji uzrokuje titranje je M= -m*g*L*sin ϑ
gdje je L udaljenost od točke rotacije do točke težišta. Kao i za matematičko vrijedi za je za male kuteve kut izražen u radijanima približno je jednak sinusu tog kuta: M= -m*g*L*ϑ=I*α

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{m\,g\,L}{I}\vartheta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2 \vartheta = 0$$

Kad se neko tijelo giba po kružnici konstantnom brzinom, projekcija položaja tijela na bilo koji promjer kružnice predstavljena je harmoničkim titranjem.
Kutna brzine točke jednaka je kružnoj frekvenciji titranja, a ophodno vrijeme gibanja jednako je periodu titranja.
Vektor OP u donjoj slici je rotirajući vector ili fazor.



2. **Napišite jednadžbu gibanja matematičkog njihala, i nađite njena rješenja za mali kut otklona od ravnotežnog položaja te izraz za period titranja.**

Kada je njihalo za neki kut ϑ izvan položaja ravnoteže, normalnu komponentu sile teže uravnotežuje napetost niti [N=m*g*cos ϑ], a tangecijalna komponenta je usmjerena prema ravnotežnom položaju. Zbroj svih sila jednak je:
F= - m * g * sin ϑ
gdje je minus jer sila djeluje u suprotnom smjeru povečavanja kuta.
Za male kutove, kut izražen u radijanima približno je jednak sinusu tog istog kuta (sin $\vartheta \approx \vartheta$)
pa je u tom slučaju sila
F=-mg ϑ, odnosno:

$$\mathrm{ma} = -\mathrm{mg}\vartheta \;\Rightarrow\; \mathrm{ml}\alpha + \mathrm{mg}\vartheta = 0 \;\Rightarrow\; m\ell\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + mg\vartheta = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\vartheta = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2\,\vartheta = 0$$

Rješenje jednadžbe gibanja je: $\vartheta = \vartheta_o \sin(\omega t + \varphi_o)$

gdje je: ϑ_o - amplituda titranja,

φ_o - početna faza, a

$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ - kružna frekvencija.

Prema tome period titranja matematičkog njihala je:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

3. **Napišite jednadžbu gibanja fizikalna njihala, i nađite njena rješenja za mali kut otklona od ravnotežnog položaja te izraz za period titranja.**

Moment sile teže koji uzrokuje titranje je M= -m*g*L*sin ϑ
gdje je L udaljenost od točke rotacije do točke težišta. Kao i za matematičko vrijedi za je za male kuteve kut izražen u radijanima približno je jednak sinusu tog kuta: M= -m*g*L*$\vartheta = I*\alpha$

$$\mathrm{I}\alpha = -\mathrm{mgL}\vartheta \;\Rightarrow\; \mathrm{I}\alpha + \mathrm{mgL}\vartheta = 0 \;\Rightarrow\; I\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + mgL\vartheta = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{mgL}{I}\vartheta = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2\,\vartheta = 0$$

Rješenje jednadžbe gibanja je:

$$\vartheta = \vartheta_o \sin(\omega t + \varphi_o)$$

gdje je: ϑ_o - amplituda titranja,

φ_o - početna faza, a

$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$ kružna frekvencija.

Period titranja fizičkog njihala je: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m\,g\,L}}$

4. **Što je to reducirana dužina fizikalnog njihala, a što središte titranja fizikalnog njihala?**

- **Reducirana duljina fizikalnog njihala** je duljina matematičkog njihala koje ima istu period njihanja kao i fizikalno njihalo.

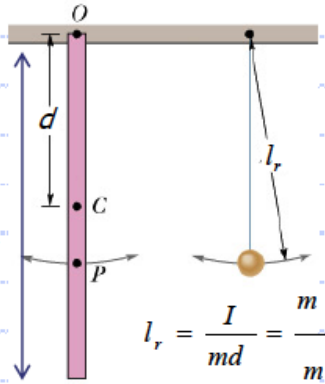
$$T_m = T_f$$

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

$$l_r = \frac{I}{md}$$

$I = m\frac{L^2}{3}$

I – moment tromosti štapa



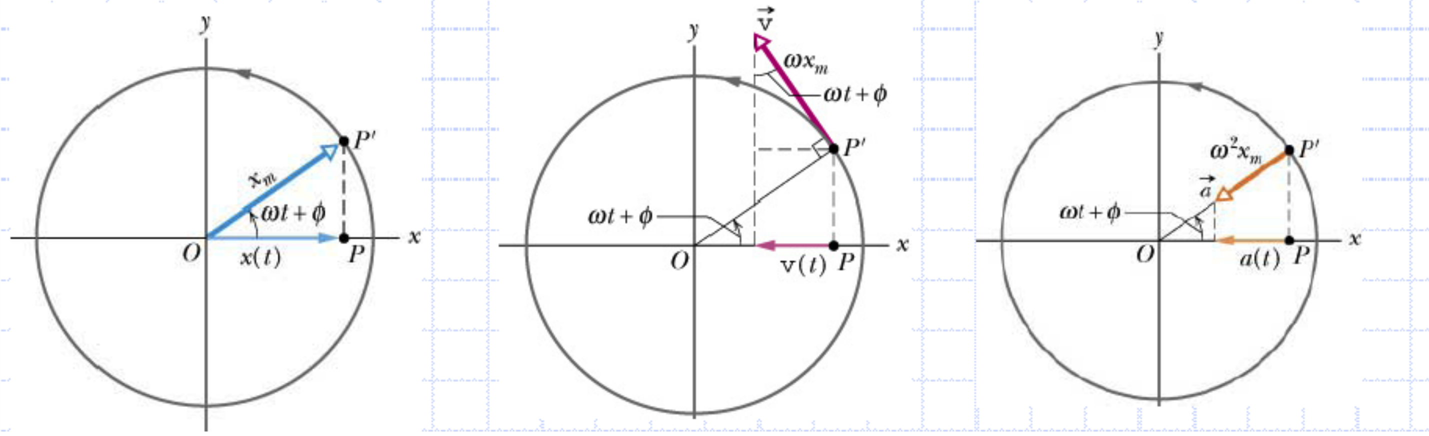
$$l_r = \frac{I}{md} = \frac{m\frac{L^2}{3}}{m\frac{L}{2}} = \frac{2}{3}L$$

- Točka P na štapu koja je od osi udaljena za reduciranu duljinu fizikalnog njihala l_r zove se **središte titranja** (točka C – težište tijela).
- Tijelo obješeno u središtu titranja (točka P) ima isti period titranja kao i kad se njiše oko prvotne osi (oko točke O).
- Njihalo koje se može objesiti tako da se njiše oko točke O i oko središta titranja P zove se reverziono njihalo.

5. **Objasnite vezu između jednolikog kružnog gibanja i harmoničkog titranja, što je to fazor.**

Kad se neko tijelo giba po kružnici konstantnom brzinom, projekcija položaja tijela na bilo koji promjer kružnice predstavljena je harmoničkim titranjem.
Kutna brzine točke jednaka je kružnoj frekvenciji titranja, a ophodno vrijeme gibanja jednako je periodu titranja.
Vektor OP’ u donjoj slici je rotirajući vector ili fazor.

$$x(t) = x_m\cos(\omega t + \phi) \qquad v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \qquad a(t) = -\omega^2 x_m\cos(\omega t + \phi)$$



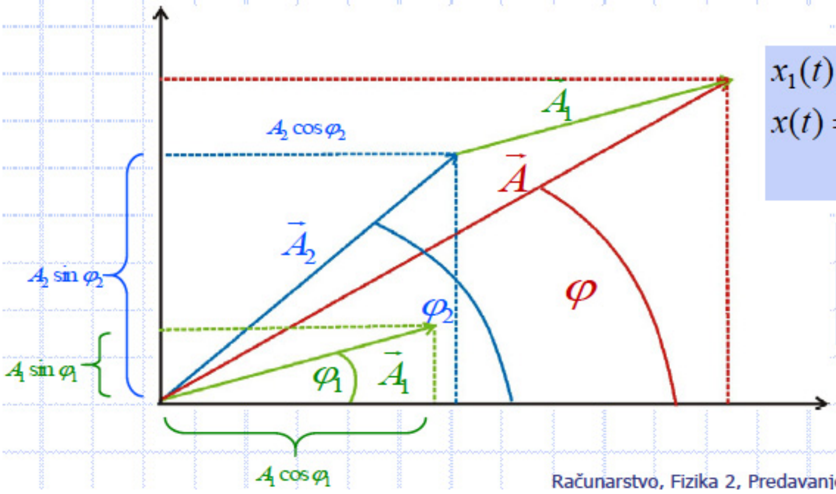
Titranje se može predočiti rotirajućim vektorom (fazorom), duljina fazora jednaka je amplitudi titranja, kružna frekvencija rotacije fazora jednaka je kutnoj frekvenciji titranja, a početna faza se predočuje početnim kutom između fazora i osi na koju se projicira fazor.

6. **Kad su dva titranja koherentna?**

Ako na česticu djeluju istovremeno dvije harmoničke sile, gibanje tijela dano je superpozicijom gibanja (interferencijom) zbog svake pojedine sile.
Kad tijelo istovremeno izvodi dva harmonička titranja iste frekvencija i stalne razlike u fazi govorimo o koherentnim titranjima.
Rezultantni je pomak čestice zbroj tih dvaju pomaka.
Titranje se može predočiti rotirajućim vektorom (fazorom), duljina fazora jednaka je amplitudi titranja, kružna frekvencija rotacije fazora jednaka je kutnoj frekvenciji titranja, a početna faza se predočuje početnim kutom između fazora i osi na koju se projicira fazor.

(pitanje je glupo i odgovor je prekratak, ovo sam malo nadrobia i onog sta nema veze s pitanjem :/)

7. **Izvedite izraz za rezultantno titranje dvaju koherentnih titranja duž istog pravaca pomoću fazorskog (metoda rotirajućih vektora) prikaza. I diskutirajte pojavu i uvjete konstruktivne i destruktivne interferencije.**



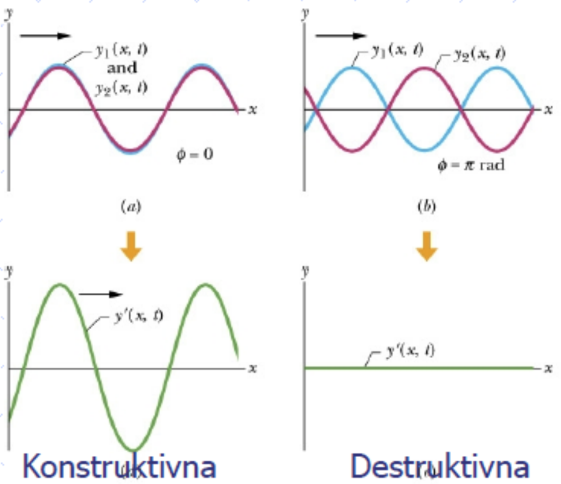
$$x_1(t) = A_1\sin(\omega t+\varphi_1) \quad x_2(t) = A_2\sin(\omega t+\varphi_2)$$
$$x(t) = x_1(t)+x_2(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$$
$$A = ? \quad \varphi = ?$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\varphi = arctg\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

Računarstvo, Fizika 2, Predavanje 2 12

- Amplituda rezultantnog titranja ovisi o amplitudama pojedinih titranja i razlici u fazi između ta dva titranja $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$
- Konstruktivna interferencija je pojava kad je amplituda rezultantnog titranja maksimalna $A = A_1 + A_2$, a to je ispunjeno kad je $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=n\cdot 2\pi, n=0,\pm1,\pm2,...$
- Destruktivna interferencija je pojava kad je amplituda rezultantnog titranja minimalna $A = A_1 - A_2$, a to je ispunjeno kad je $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2n+1)\pi, n=0,\pm1,\pm2,...$



Konstruktivna interferencija

Destruktivna interferencija ($A_1 = A_2$)