1 Opći problem aproksimacije

Što je problem aproksimacije? Ako su poznate neke informacije o funkciji f definiranoj na skupu $X \subseteq \mathbb{R}$, onda na osnovi tih informacija želimo zamijeniti funkciju f nekom drugom funkcijom φ definiranom na skupu X koja je bliska funkciji f u nekom smislu. Skup X je najčešće ograničen interval oblika $[a, b]$ ili diskretan skup točaka.

Potreba za aproksimiranjem javlja se najčešće u dvije bitno različite situacije.

- Poznata je funkcija f, ali je njena forma presložena za računanje. U tom slučaju možemo birati informacije o f koje ćemo koristiti, a možemo i ocijeniti grešku dobivene aproksimacije.
- Funkcija f nije poznata, no poznate su neke informacije o njoj, npr. njene vrijednosti na nekom konačnom skupu točaka. Zamjenska funkcija φ određuje se iz raspoloživih informacija koje uključuju i očekivani oblik ponašanja funkcije φ. U ovom slučaju ne možemo napraviti procjenu pogreške bez dodatnih informacija o nepoznatoj funkciji f.

Ova druga varijanta je puno češća u praksi, a najčešće se javlja kod mjerenja raznih veličina. Primijetimo da se kod mjerenja javljaju i pogreške mjerenja, pa treba voditi računa i o tome. Sama funkcija φ se bira prema prirodi modela, ali tako da bude jednostavna za računanje. Obično ovisi o određenom broju parametara koje onda određujemo po nekom kriteriju.

Oblike aproksimacijskih funkcija možemo grubo podijeliti na:

- linearne aproksimacijske funkcije,
- nelinearne aproksimacijske funkcije.

1.1 Linearne aproksimacijske funkcije

Opći oblik linearne aproksimacijske funkcije je

$$\varphi\left(x\right) = a_0\varphi_0\left(x\right) + a_2\varphi_2\left(x\right) + \cdots a_m\varphi_m\left(x\right),$$

gdje su $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ poznate funkcije koje znamo računati. Primijetimo da se linearnost odnosi samo na ovisnost o parametrima $a_0, \ldots, a_m$ koje treba izračunati. Prednost ovog oblika aproksimacije je da se određivanje nepoznatih parametara obično svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

Najčešće korišteni oblici linearnih aproksimacija su:

- algebarski polinomi (u standardnoj ili nestandardnoj bazi),
- trigonometrijski polinomi (pogodni za aproksimaciju periodičkih funkcija),
- splajn funkcije (po djelovima polinomi).

1.2 Nelinearne aproksimacijske funkcije

Evo nekoliko najčešće korištenih oblika nelinearnih aproksimacija funkcija:

- eksponencijalne aproksimacije (opisuju procese rasta i odumiranja u populacijama s primjenom u biologiji, medicini i ekonomiji) s $2r+2$ nepoznatih parametara su oblika

$$\varphi\left(x\right) = c_0 e^{b_0 x} + c_2 e^{b_2 x} + \cdots + c_r e^{b_r x},$$

- racionalne aproksimacije s $r+s+1$ (a ne $r+s+2$ parametara jer se jedan zbog skaliranja uvijek može fiksirati) su oblika

$$\varphi\left(x\right) = \frac{b_0 + b_1 x + \cdots b_r x_r}{c_0 + c_1 x + \cdots c_s x_s},$$

  a imaju puno bolja svojstva aproksimiranja nego polinomi.

1.3 Kriteriji aproksimacije

Aproksimacijske funkcije biraju se tako da "najbolje" zadovolje uvjete koji se postavljaju pred njih. Najčešći je zahtjev da graf aproksimacijske funkcije prolazi određenim točkama, tj. da **interpolira** funkciju u tim točkama koje onda nazivamo **čvorovima**. Prilikom interpoliranja mogu se postaviti i dodatni zahtjevi da se aproksimacijska funkcija i polazna funkcija, osim u funkcijskim vrijednostima, u čvorovima poklapaju i u nekim vrijednostima derivacija. Drugi čest zahtjev prilikom aproksimiranja jest da odstupanje aproksimacijske funkcije od polazne funkcije na neki način bude **minimalno**, tj. da je mala pogreška aproksimacije.

Dakle, u najjednostavnijem slučaju, kada tražimo samo da se aproksimacijska funkcija i (nepoznata) funkcija f poklapaju u funkcijskim vrijednostima u čvorovima, od podataka o funkciji f koristimo samo njene vrijednosti na skupu od $n+1$ različitih točaka, tj. podaci su oblika

$$(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n)),$$

ili kraće

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n).$$

Nepoznati parametri $a_0, \ldots, a_n$ (kojih ne smije biti više nego podataka) određuju se iz uvjeta

$$\varphi\left(x_k; a_0, \ldots, a_n\right) = f\left(x_k\right) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ovo je, općenito, nelinearni sustav jednadžbi.

Spomenuli smo da je minimizacija pogreške drugi mogući kriterij određivanja parametara aproksimacije. Funkcija φ se bira u nekom odabaranom vektorskom prostoru funkcija definiranih na X tako da se minimizira odabrana norma pogreške e definirane s

$$e\left(x\right) = f\left(x\right) - \varphi\left(x\right).$$

Ove aproksimacije zovemo **najbolje aproksimacije po normi**, a dijele se na diskretne i kontinuirane (ovisno o skupu X).

Standardno se kao norme pogreške koriste 2-norma i ∞-norma.

Kada koristimo 2-normu pripadnu aproksimaciju nazivamo **srednjekvadratnom aproksimacijom**, a metodu za njeno određivanje zovemo **metoda najmanjih kvadrata**. Ovakav pristup ima veze sa statistikom: izmjereni podaci se obično ponašaju kao normalna slučajna varijabla, očekivanje je točna vrijednost podataka, a minimiziramo varijancu.

Kada koristimo ∞-normu pripadnu aproksimaciju zovemo **minimaks aproksimacija**. U nekim slučajevima ovakav pristup je bolji od onog koji koristi metoda najmanjih kvadrata jer se traži da maksimalna pogreška na skupu X bude minimalna (otud i naziv), no račun je znatno složeniji.

Problem interpolacije možemo smatrati posebnim, ali iznimno važnim, slučajem najbolje diskretne aproksimacije po normi. Posebnost se ogleda u tome što je moguće postići da minimum norme pogreške bude jednak nuli, što je ekvivalentno odgovarajućim uvjetima interpolacije.
Uzmimo na primjer

$$X = \{x_0, \ldots, x_n\}$$

i potražimo aproksimacijsku funkciju φ u prostoru $\mathcal{P}_n$ svih polinoma stupnja najviše n. Kao kriterij aproksimacije uzmimo bilo koju p-normu $(1 \leq p \leq \infty)$. U tom slučaju imamo zahtjev

$$\|e\|_p = \|f - \varphi\|_p = \left(\sum_{k=0}^{n} |f(x_k) - \varphi(x_k)|^p \right)^{1/p} \to \min$$

što je očigledno ekvivalentno uvjetima interpolacije

$$f(x_k) = \varphi(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Naravno, nije jasno da li općenito takva aproksimacija φ i postoji.

1.4 Osnovni matematički problemi koji se javljaju

- egzistencija i jedinstvenost rješenja problema aproksimacije (ovisi o izboru aproksimacije i načinu mjerenja pogreške),
- analiza kvalitete dobivene aproksimacije,
- konstrukcija algoritma za nalaženje najbolje aproksimacije,
- dokaz efikasnosti i točnosti algoritma,
- globalna i asimptotska konvegencija u slučaju beskonačnih procesa.

2 Interpolacija polinomima

O važnosti polinoma kao aproksimacijskih funkcija najbolje nam govori poznati *Weierstrassov teorem* koji nam kaže da se svaka funkcija neprekidna na zatvorenom intervalu može po volji dobro aproksimirati polinomom.

TEOREM. Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji polinom p takav da za sve $x \in [a, b]$ vrijedi

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

DOKAZ. Dokaz ćemo provesti pomoću *Bernsteinovih polinoma*. Oni su na $[0, 1]$ definirani s

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Dokaz ćemo provesti za funkcije definirane na intervalu $[0, 1]$, no jasno je da se linearnom transformacijom sve može prevesti na proizvoljni interval $[a, b]$.

Uočimo najprije da vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = [t + (1-t)]^n = 1.$$

Deriviranjem po t dobijemo

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} (n-k) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k-1} = 0,$$

odnosno, nakon množenja s t,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} (n-k) \binom{n}{k} t^{k+1} (1-t)^{n-k-1} \\ &= \frac{t}{1-t} \sum_{k=0}^{n} (n-k) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}. \end{aligned}$$

Pregrupiranjem članova dobivamo

$$\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{nt}{1-t}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{nt}{1-t},$$

pa smo dokazali da je

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt.$$

Slično se dokaže i da je

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt(1-t+nt),$$

pa uzimajući sve dokazano u obzir imamo

$$\sum_{k=0}^{n} (nt-k)^2\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt(1-t).$$

Sada ćemo dokazati da niz $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniformno teži k f na $[0,1]$.

Znamo da je neprekidna funkcija ne segmentu ujedno i uniformno neprekidna, pa vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall t, t_1 \in [0,1])\,|t - t_1| < \delta \longrightarrow |f(t) - f(t_1)| < \varepsilon.$$

Također, neprekidna funkcija na segmentu poprima svoj maksimum, neka je to u ovom slučaju neki M.
Pokazat ćemo da vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n > n_0)\,(\forall t \in [0,1])\,|f(t) - B_n(t)| < 2\varepsilon.$$

Iz prethodnog znamo da je

$$\sum_{k=0}^{n} f(t) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = f(t)\,, \quad t \in [0,1]\,,$$

pa je

$$|f(t) - B_n(t)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad t \in [0,1].$$

Uzmimo proizvoljni $\varepsilon > 0$ i njemu pripadni δ iz definicije uniformne neprekidnosti funkcije f. Za taj fiksirani δ definirajmo skup $I = \{0, 1, \ldots, n\}$ i podijelimo ga na dva podskupa

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\{ k \in I : \left| t - \frac{k}{n} \right| < \delta \right\}, \\ I_2 &= \left\{ k \in I : \left| t - \frac{k}{n} \right| \geq \delta \right\}. \end{aligned}$$

Očigledno je $I = I_1 \cup I_2$ i $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Sada zbog

$$\left|t-\frac{k}{n}\right|<\delta \longrightarrow \left|f\left(t\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon$$

imamo

$$\sum_{k\in I_1}\left|f\left(t\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}t^k\left(1-t\right)^{n-k}<\varepsilon\sum_{k\in I_1}\binom{n}{k}t^k\left(1-t\right)^{n-k}<\varepsilon.$$

Također je

$$\sum_{k\in I_2}\left|f\left(t\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}t^k\left(1-t\right)^{n-k}\leq\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k\in I_2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}t^k\left(1-t\right)^{n-k}.$$

Imamo

$$
\begin{aligned}
& \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k \in I_2} \left(t - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
= & \frac{2M}{n^2 \delta^2} \sum_{k \in I_2} (nt-k)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
\leq & \frac{2M}{n^2 \delta^2} \sum_{k=0}^{n} (nt-k)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
= & \frac{2M}{n^2 \delta^2} nt (1-t) = \frac{2M}{n \delta^2} t (1-t) \leq \frac{2M}{n \delta^2} \cdot \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

jer je zbog $t \in [0,1]$ uvijek $t(1-t) \leq 1/4$.

Izaberemo li sada $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{M}{2n\delta^2} < \varepsilon,$$

odnosno n takav da je

$$n > \frac{M}{2\delta^2 \varepsilon},$$

onda je traženi $n_0 = \lceil \frac{M}{2\delta^2 \varepsilon} \rceil$, a za $n > n_0$ vrijedi

$$\sum_{k \in I_2} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} < \varepsilon.$$

Dakle,

$$|f(t) - B_n(t)| < 2\varepsilon \quad \blacksquare$$

2.1 Ortogonalni polinomi i neka njihova svojstva

Ortogonalni polinomi imaju niz dobrih svojstava zbog kojih se mogu konstruktivno primijenjivati u raznim granama numeričke matematike. Dat ćemo nekoliko teorema koji daju neka od najvažnijih svojstava ortogonalnih polinoma. Sva svojstva su direktna posljedica ortogonalnosti i ne ovise bitno o tome da li je skalarni umnožak diskretan ili kontinuiran. Mi ćemo standardno promatrati kontinuirani skalarni umnožak

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b w(x)\, u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$$

generiran nenegativnom težinskom funkcijom w na intervalu $[a, b]$.

Paralelno ćemo promatrati i diskretni skalarni umnožak

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=0}^{n} w_i u(x_i)\, v(x_i)$$

generiran međusobno različitim čvorovima $x_0, \ldots, x_n$ i pripadnim nenegativnim težinama $w_0, \ldots, w_n$.

Za polinome $\{p_n \neq \mathbf{0} \mid n \geq 0\}$ kažemo da su **ortogonalni** obzirom na nenegativnu težinsku funkciju w na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi

$$\langle p_m, p_n \rangle = \int_a^b w(x)\, p_m(x)\, p_n(x)\, \mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n.$$

Težinska funkcija w određuje ovakav sustav polinoma do na konstantni faktor u svakom od polinoma. Izbor takvog faktora zove se još i **standardizacija** ili **normalizacija**.

Analogno se definira ortogonalnost s obzirom na diskretni skalarni umnožak.

Može se pokazati da u oba slučaja u pripadnom unitarnom prostoru sigurno postoji baza ortogonalnih polinoma koju ćemo označavati s

$$\{p_n \mid n \geq 0\}.$$

Pri tom ćemo smatrati da je stupanj polinoma p_n upravo n.

TEOREM. Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s nenegativnom težinskom funkcijom w. Ako je polinom f stupnja m, onda vrijedi

$$f = \sum_{n=0}^{m} \frac{\langle f, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle} p_n.$$

DOKAZ. Dokažimo najprije da se svaki polinom može prikazati kao linearna kombinacija ortogonalnih polinoma stupnja ne većeg od njegovog.
Dokaz provodimo koristeći Gram-Schmidtovu ortogonalizaciju i to tako da najprije dokažemo da se standardna baza polinoma može prikazati pomoću dane ortogonalne familije.
Ako je stupanj ortogonalnog polinoma jednak 0, on je nužno konstanta različita od nule, tj. vrijedi

$$p_0(x) = c_{00} \neq 0.$$

Stoga se prvi monom može napisati kao

$$1 = \frac{1}{c_{00}} p_0(x).$$

Dalje imamo

$$p_1(x) = c_{11}x + c_{10}p_0(x), \quad c_{11} \neq 0,$$

pa je

$$x = \frac{1}{c_{11}}\left(p_1(x) - c_{10}p_0(x)\right).$$

Korištenjem indukcije u Gram-Schmidtovom procesu na bazi $\{1, x, \ldots, x^n\}$ dobivamo

$$p_n(x) = c_{nn}x^n + c_{nn-1}p_{n-1}(x) + \cdots + c_{n0}p_0(x), \quad c_{nn} \neq 0.$$

Dakle,

$$x^n = \frac{1}{c_{nn}}\left(p_n(x) - c_{nn-1}p_{n-1}(x) - \cdots - c_{n0}p_0(x)\right).$$

Neka je f bilo koji polinom stupnja ne većeg od $m \in \mathbb{N}_0$. Tada se f može napisati kao linearna kombinacija vektora standardne baze $\{1, x, \ldots, x^m\}$. No budući se svaki monom može napisati kao linearna kombinacija orogonalnih polinoma stupnja ne većeg od vlastitog stupnja, to se i f može prikazati na takav način, tj. kao linearna kombinacija ortogonalnih polinoma stupnja ne većeg od m. Dakle,

$$f = \sum_{j=0}^{m} b_j p_j.$$

Ostaje samo odrediti koeficijente b_j. Množenjem gornje jednakosti s w, zatim polinomom p_n $(n \leq m)$ i integriranjem na $[a, b]$ (tj. skalarnim množenjem s p_n) dobivamo

$$\langle f, p_n \rangle = \sum_{j=0}^{m} b_j \langle p_j, p_n \rangle = b_n \langle p_n, p_n \rangle \ .$$

Odavde zbog $\langle p_n, p_n \rangle \neq 0$ odmah slijedi

$$b_n = \frac{\langle f, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle} \qquad \blacksquare$$

Razvoj polinoma f po ortogonalnoj bazi možemo napisati i tako da suma ide do ∞, a ne samo do m. To je posljedica činjenice da su svi koeficijenti $b_n,\ n > m$, jednaki nuli. O tome nam govori sljedeći korolar.

TEOREM. Ako je f polinom stupnja ne većeg od m, onda je p_{m+1} okomit na f, tj.

$$\langle f, p_{m+1} \rangle = 0.$$

Dakle, p_{m+1} je okomit na sve polinome manjega stupnja.

DOKAZ. Kako je po prethodnom teoremu

$$f = \sum_{n=0}^{m} b_n p_n,$$

to lako množenjem s wp_{m+1}, te integriranjem, dobijemo

$$\langle f, p_{m+1} \rangle = \sum_{n=0}^{m} b_n \langle p_n, p_{m+1} \rangle = 0 \qquad \blacksquare$$

TEOREM. Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s nenegativnom težinskom funkcijom w. Tada svaki polinom p_n ima točno n različitih (jednostrukih) realnih nultočaka na otvorenom intervalu (a, b).

DOKAZ. Neka su $x_1, \ldots, x_m \in (a, b)$ sve one različite nultočke polinoma p_n u kojima p_n mijenja predznak. Po osnovnom teoremu algebre znamo da je $m \leq n$. Pretpostavit ćemo da je $m < n$ i pokazati da takva pretpostavka dovodi do kontradikcije.

Definiramo polinom B s

$$B(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m).$$

Po načinu izbora točaka $x_1, \ldots, x_m$ znamo da polinom

$$p_n(x) B(x) = p_n(x) (x - x_1) \cdots (x - x_m)$$

ne mijenja predznak u točkama $x_1, \ldots, x_m$, pa tako ni na čitavom otvorenom intervalu (a, b).

Naime, zbog načina izbora točaka $x_1, \ldots, x_m$ znamo da je polinom p_n moguće zapisati u obliku

$$p_n(x) = h(x)(x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_m)^{r_m},$$

pri čemu su svi $r_1, \ldots, r_m$ neparni i $h \neq 0$ ne mijenja predznak na (a, b). Množenjem gornje jednakosti s $B(x)$ dobijemo

$$p_n(x) B(x) = h(x)(x - x_1)^{r_1+1} \cdots (x - x_m)^{r_m+1},$$

a integriranjem na $[a, b]$ slijedi

$$\int_a^b w(x) p_n(x) B(x) \, \mathrm{d}x \neq 0$$

jer je podintegralna funkcija wp_nB konstantnog predznaka na (a, b) (može eventualno negdje, ali ne svugdje, poprimati vrijednost nula).

No iz prethodnog teorema znamo da je zbog $m < n$ ispunjeno i

$$\int_a^b w(x)\, p_n(x)\, B(x)\, \mathrm{d}x = \langle p_n, B \rangle = 0,$$

pa smo došli do kontradikcije. Dakle, ne može biti $m < n$, pa je nužno $m = n$ ■

Neka je sada opet zadana neka familija ortogonalnih polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$ na intervalu $[a, b]$ s nenegativnom težinskom funkcijom w. Neka su prva dva koeficijenta polinoma p_n neki A_n i B_n, tj. neka je

$$p_n(x) = A_n x^n + B_n x^{n-1} + \cdots .$$

Uočimo da je prirodno smatrati da je $B_0 = 0$ te da je $p_0(x) = A_0 \neq 0$. Znamo da u tom slučaju svaki polinom familije možemo zapisati u obliku

$$p_n(x) = A_n (x - x_{n1}) \cdots (x - x_{nn}), \quad n > 0.$$

Uvedimo sada za $n \in \mathbb{N}_0$ oznake

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A_{n+1}}{A_n}, \quad \gamma_n = \langle p_n, p_n \rangle > 0, \\ b_n &= a_n \left(\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} - \frac{B_n}{A_n} \right), \quad c_n = \frac{A_{n+1} A_{n-1}}{A_n^2} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}. \end{aligned}$$

Sljedeći važni teorem zbog dužine navodimo bez dokaza.

TEOREM. Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s nenegativnom težinskom funkcijom w. Tada za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi rekurzija

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) \, p_n(x) - c_n p_{n-1}(x) \, .$$

2.2 Klasični ortogonalni polinomi

U aproksimacijama i rješavanju diferencijalnih jednadžbi najčešće se susrećemo s pet tipova klasičnih ortogonalnih polinoma.

2.2.1 Čebiševljevi polinomi prve vrste

Čebiševljevi polinom prve vrste se obično označavaju s T_n, a ortogonalni su na intervalu $[-1,1]$ s obzirom na težinsku funkciju w definiranu s

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vrijedi

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \end{cases}.$$

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

uz početne uvjete

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Za ovaj sustav polinoma postoji i eksplicitna formula

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Također, n-ti Čebiševljev polinom prve vrste T_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\left(1 - x^2\right) y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

Katkad se koriste i Čebiševljevi polinom prve vrste transformirani na interval $[0,1]$, a koji se tada označavaju s T_n^*. Korištenjem afine transformacije $x \mapsto 2x-1$ interval $[0,1]$ prelazi u interval $[-1,1]$, pa lako dolazimo do svojstava tih polinoma.
Vrijedi

$$\int_0^1 \frac{T_m^*(x)\, T_n^*(x)}{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \end{cases},$$

a rekurzivna relacija postaje

$$T_{n+1}^*(x) - 2(2x-1)\, T_n^*(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

uz početne uvjete

$$T_0^*(x) = 1, \quad T_1^*(x) = 2x - 1.$$

2.2.2 Čebiševljevi polinomi druge vrste

Čebiševljevi polinom druge vrste se obično označavaju s U_n, a ortogonalni su na intervalu $[-1,1]$ s obzirom na težinsku funkciju w definiranu s

$$w(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Vrijedi

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} U_m(x) U_n(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}.$$

Oni zadovoljavaju istu rekurzivnu relaciju kao Čebiševljevi polinomi prve vrste

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0,$$

uz nešto drugačije početne uvjete

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

I za ovaj sustav polinoma postoji eksplicitna formula

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}.$$

Također, n-ti Čebiševljev polinom druge vrste U_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0.$$

2.2.3 Legendreovi polinomi

Legendreovi polinomi obično se označavaju s P_n. Oni su ortogonalni na intervalu $[-1, 1]$ s obzirom na težinsku funkciju w definiranu s

$$w(x) = 1.$$

Vrijedi

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2/(2n+1), & m = n \end{cases}.$$

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n+1)\,P_{n+1}\,(x) - (2n+1)\,xP_n\,(x) + nP_{n-1}\,(x) = 0,$$

uz početne uvjete

$$P_0\,(x) = 1, \quad P_1\,(x) = x.$$

Legendreov polinom P_n zadovoljava i diferencijalnu jednadžbu

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + n\,(n+1)\,y = 0.$$

2.2.4 Leguerreovi polinomi

Leguerreovi polinomi obično se označavaju s L_n. Oni su ortogonalni na intervalu $[0, \infty)$ s obzirom na težinsku funkciju w definiranu s

$$w\left(x\right) = e^{-x}.$$

Vrijedi

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m\left(x\right) L_n\left(x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}.$$

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n+1)\,L_{n+1}\,(x) + (x-2n-1)\,L_n\,(x) + nL_{n-1}\,(x) = 0,$$

uz početne uvjete

$$L_0\,(x) = 1, \quad L_1\,(x) = 1 - x.$$

Također, Leguerreov polinom L_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$xy'' + (1-x)\,y' + ny = 0.$$

2.2.5 Hermiteovi polinomi

Hermiteovi polinomi obično se označavaju s H_n. Oni su ortogonalni na intervalu $(-\infty, \infty)$ s obzirom na težinsku funkciju w definiranu s

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}.$$

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

uz početne uvjete

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

Osim toga, Hermiteov polinom H_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

2.3 Egzistencija i jedinstvenost interpolacijskog polinoma

Sljedeći teorem nam u potpunosti rješava ključno pitanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja problema polinomne interpolacije u njegovom najjednostavnijem obliku - kada su zadane funkcijske vrijednosti u međusobno različitim čvorovima. Takav oblik interpolacije obično zovemo **Lagrangeova interpolacija**.

TEOREM. Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Za zadane točke $(x_k, f_k)\,,\ k = 0, 1, \ldots, n,$ gdje je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, postoji jedinstveni interpolacijski polinom p_n stupnja najviše n takav da vrijedi

$$p_n\,(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

DOKAZ. Neka je

$$p_n\left(x\right) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Uvjete interpolacije možemo napisati u obliku sustava

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_j x_0^j + \cdots + a_n x_0^n &= f_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_j x_1^j + \cdots + a_n x_1 &= f_1 \\
&\vdots \\
a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_j x_i^j + \cdots + a_n x_i^n &= f_i \\
&\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_j x_n^j + \cdots + a_n x_n^n &= f_n.
\end{aligned}$$

Očito treba provjeriti ima li ovaj sustav s $(n+1)$-nom nepoznanicom $a_0, \ldots, a_n$ jedinstveno rješenje. Za to je dovoljno provjeriti da li je matrica sustava regularna, a to možemo provjeriti računanjem vrijednosti determinante matrice sustava, označimo je s D_n. Lako se vidi da je D_n tzv. *Vandermondeova determinanta*. Definirajmo determinantu $V_n(x)$ koja sliči na nju, samo što u posljednjem retku umjesto potencija od x_n ima potencije od x. Dakle, stavimo

$$V_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^{n-1} & x_i^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

Očito je $D_n = V_n(x_n)$. Promatramo li $V_n(x)$ kao funkciju od x lako se vidi (razvojem po zadnjem retku) da je to polinom stupnja najviše n u varijabli x s vodećim koeficijentom D_{n-1} uz x^n.

S druge strane, očito je

$$V_n(x_1) = V_n(x_2) = \cdots = V_n(x_{n-1}) = 0$$

jer u svakom od tih slučajeva dobivamo determinantu s dva jednaka retka. Dakle, točke $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ su nultočke polinoma V_n stupnja n. Da bismo točno odredili polinom stupnja n, ako su poznate sve njegove nultočke, potrebno je samo znati njegov vodeći koeficijent, a znamo da je to u ovom slučaju D_{n-1}. Odatle odmah slijedi

$$V_n(x) = D_{n-1}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Kada u ovu jednakost uvrstimo $x = x_n$ dobivamo rekurzivnu relaciju za D_n, tj.

$$D_n = D_{n-1}(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}).$$

Ako znamo da je $D_0 = 1$ (što je očigledno), dobijemo

$$D_n = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0 \qquad \blacksquare$$

2.4 Kako naći odgovarajuće algoritme?

Kako se radi o problemu aproksimiranja funkcije f polinomom p_n očito trebamo algoritam za računanje vrijednosti polinoma p_n u nekoj zadanoj točki koja nije čvor, jer već znamo da je u čvorovima ispunjeno $p_n(x) = f(x)$. Točaka u kojima želimo računati vrijednosti polinoma p_n može biti vrlo mnogo, a gotovo nikada nije samo jedna. Zbog toga problem računanja vrijednosti $p_n(x)$ razdvajamo u dvije faze:

- najprije odredimo polinom p_n jer on ne ovisi o točki x, već samo o zadanim podacima $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$,
- za zadanu točku x izračunamo $p_n(x)$.

Prvu fazu treba odraditi samo jednom, pa se zato i odvaja od druge koja se najvjerojatnije ponavlja više puta. Očito će upravo druga faza bitno utjecati na brzinu algoritma, no nećemo zahtijevati brzinu na uštrb stabilnosti.

Pogledajmo što se događa u prvoj fazi. Broj od $n+1$ podataka u potpunosti određuje $(n+1)$-dimenzionalni vektorski prostor $\mathcal{P}_n$ polinoma stupnja najviše n u kojem (prema prethodnom teoremu) postoji jedinstveni polinom p_n koji interpolira zadane podatke. Izaberimo neku bazu $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ prostora $\mathcal{P}_n$. Polinom p_n ima u toj bazi jedinstven prikaz, pa da bismo našli p_n dovoljno je naći nepoznate koeficijente a_i u prikazu

$$p_n(x) = a_0 b_0(x) + a_1 b_1(x) + \cdots + a_n b_n(x) \, .$$

Njih možemo naći tako da u gornju relaciju uvrstimo uvjete interpolacije i tako dobijemo kvadratni linearni sustav reda $n+1$. Matrica tog sustava je sigurno regularna (jer je $\mathcal{B}$ baza prostora $\mathcal{P}_n$). Elementi matrice B dobivenog sustava su oblika

$$B_{i+1,k+1} = b_i(x_k) \, , \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

a pretpostavimo li da znamo prikaz svih polinoma baze $\mathcal{B}$ u standardnoj bazi koeficijente možemo naći izvrednjavanjem pomoću Hornerove sheme.

U tom slučaju svako izvrednjavanje $b_i(x_k)$ zahtijeva najviše $2n$ operacija (n množenja i n zbarajanja). Samih izvrednjavanja ima $(n+1)^2$, pa se koeficijente matrice sustava može izračunati za najviše $2n(n+1)^2 \simeq \mathcal{O}\left(n^3\right)$ elementarnih operacija. *No za posebne izbore baze $\mathcal{B}$ i čvorova taj broj može biti i znatno manji*.
Gaussovim eliminacijama taj sustav možemo riješiti za najviše $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ elementarnih operacija. Ovo znači da bi u prvoj fazi ukupan broj potrebnih operacija za nalaženje koeficijenata interpolacijskog polinoma p_n bio $\mathcal{O}\left(n^3\right)$. Ovo i nije tako loše jer se radi samo jednom, no ipak se može znatno ubrzati.
Algoritam za izvrednjavanje $p_n(x)$ u drugoj fazi, također, bitno ovisi o izboru baze $\mathcal{B}$. Znamo da se izračunavanje vrijednosti $p_n(x)$ svodi na izračunavanje sume

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i(x).$$

S obzirom da $n+1$ puta moramo izvredniti $b_i(x)$, svaki put to množiti s a_i i sve to zbrojiti, imamo $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ očekivanih elementarnih operacija, što je puno u usporedbi s Hornerovom shemom.

Iz prethodne analize slijedi da bi bazu $\mathcal{B}$ trebalo izabrati tako da druga faza zahtijeva najviše $\mathcal{O}(n)$ elementarnih operacija, tj. da traje linearno, a ne kvadratno. Očito će taj uvjet biti ispunjen ako za $\mathcal{B}$ izaberemo upravo standardnu bazu jer se u tom slučaju druga faza svodi na uporabu Hornerove sheme. U stvari, može se pokazati da s ovakvim izborom baze dobivamo najbrži mogući algoritam za izvrednjavanje $p_n(x)$ u drugoj fazi. No u pogledu stabilnosti algoritma situacija je vrlo nepovoljna, posebno u prvoj fazi. Matrica sustava može imati gotovo linearno ovisne retke čak i kada čvorovi nisu patološki odabrani. Dovoljno je da su razumno bliski i relativno daleko od nule. Npr. stavimo li

$$x_k = k + 10^p, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

gdje je p iole veći pozitivan realan broj (recimo 5), matrica sustava biti će skoro singularna. *Zbog toga se ovaj izbor baze ne koristi u praksi, već samo za dokazivanje u teoriji, jer baza ne ovisi o čvorovima*.
Problemu izbora baze za prikaz interpolacijskog polinoma možemo pristupiti na tri načina.

- *"jednostavna baza, komplicirani koeficijenti"*
  U ovom slučaju baza ne ovisi o čvorovima, pa imamo osigurano brzo izvrednjavanje $p_n(x)$. No sva ovisnost o podacima ulazi u koeficijente polinoma p_n, pa je prva faza spora.
  Faza 1: $\mathcal{O}\left(n^3\right)$, prisutna nestabilnost. Faza 2: $\mathcal{O}(n)$, donekle prisutna nestabilnost.
- *"jednostavni koeficijenti, komplicirana baza"*
  U ovom slučaju koeficijenti jednostavno ovise o zadanim podacima i lako se računaju (npr. mogu čak biti određeni s $a_k = f_k$), no baza komplicirano ovisi o čvorovima. Druga faza je spora jer u svakoj točki x izvrednjavamo sve $b_k(x)$ koji i sami mogu svi biti stupnja n.
  Faza 1: $\mathcal{O}(n)$. Faza 2: Sporo izvrednjavanje.
- *"kompromis između jednostavnosti baze i koeficijenata"*
  Dopustimo da baza jednostavno ovisi o čvorovima i da koeficijenti u nekoj mjeri ovise o podacima, ali tako da dobijemo relativno jednostavne algoritme za obje faze.
  Faza 1: $\mathcal{O}\left(n^2\right)$. Faza 2: $\mathcal{O}(n)$.

2.4.1 Ilustracija: prvi pristup u slučaju $n = 1$

U ovom slučaju za ulazne podatke imamo (x_0, f_0) i (x_1, f_1). Iz uvjeta interpolacije (u standardnoj bazi prostora $\mathcal{P}_1$) dobivamo sustav

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 = f_0 \\ p_1(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 = f_1. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$a_0 = \frac{f_0 x_1 - f_1 x_0}{x_1 - x_0}, \quad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0},$$

odnosno

$$p_1(x) = \frac{f_0 x_1 - f_1 x_0}{x_1 - x_0} + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} x.$$

Vidimo da su koeficijenti dosta komplicirani, no kada ih jednom izračunamo izvrednjavanje $p_1(x)$ ide dosta brzo: u ovom slučaju samo dvije operacije.

2.4.2 Ilustracija: drugi pristup u slučaju $n = 1$

I u ovom slučaju za ulazne podatke imamo (x_0, f_0) i (x_1, f_1). Polinom p_1 možemo napisati kao težinsku sredinu funkcijskih vrijednosti f_0 i f_1, tj.

$$p_1(x) = f_0 b_0(x) + f_1 b_1(x),$$

pa iz uvjeta interpoliranja dobijemo sustav

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= f_0 b_0(x_0) + f_1 b_1(x_0) = f_0 \\ p_1(x_1) &= f_0 b_0(x_1) + f_1 b_1(x_1) = f_1. \end{aligned}$$

Iz ovog sustava ne možemo odrediti polinome b_0 i b_1, pa moramo postaviti i neke dodatne uvjete. Pretpostavimo, stoga, da su i oni sami polinomi prvoga stupnja i to posebnog oblika, tako da matrica dobivenog sustava bude dijagonalna.

Iz toga slijedi

$$\begin{bmatrix} b_0(x_0) & b_1(x_0) \\ b_0(x_1) & b_1(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Stavimo li još i zahtjev da budu najjednostavnijeg mogućeg oblika, dobijemo

$$\begin{aligned} b_1(x_0) &= 0, \quad b_0(x_1) = 0, \\ b_0(x_0) &= 1, \quad b_1(x_1) = 1. \end{aligned}$$

Dakle, polinomi b_0 i b_1 su rješenja posebnih problema interpolacije

$$b_i(x_k) = \delta_{ik}, \ i, k = 0, 1.$$

To znači da znamo sve nultočke polinoma b_0 i b_1, a vrijednost vodećih koeficijenta izlaze iz $b_i(x_i) = 1, \ i = 1, 2.$ Odmah ih možemo napisati u obliku

$$b_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad b_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Dakle, dobili smo

$$p_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Ovo je **Lagrangeov** oblik interpolacijskog polinoma, a vidimo da polinomi baze b_0 i b_1 ovise o oba čvora interpolacije. Izvrednjavanje $p_1(x)$ sada zahtjeva osam operacija.

2.4.3 Ilustracija: treći pristup u slučaju $n = 1$

Opet za ulazne podatke imamo (x_0, f_0) i (x_1, f_1) . Jednadžbu pravca, koji je graf polinoma p_1, možemo napisati kroz jednu zadanu točku (x_0, f_0) uz zadani koeficijent smjera k, tj.

$$p_1\left(x\right) = f_0 + k\left(x - x_0\right).$$

Ovaj oblik automatski zadovoljava prvi uvjet interpolacije, pa ostaje pronaći k iz drugog uvjeta

$$p_1\left(x_1\right) = f_0 + k\left(x_1 - x_0\right) = f_1.$$

Odavde lako slijedi

$$k = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0},$$

što je poznata formula za koeficijent pravca kroz dvije zadane točke.

Dobiveni oblik polinoma p_1 je

$$p_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

a nazivamo ga **Newtonovim** oblikom interpolacijskog polinoma. Uočimo da on predstavlja i Taylorov razvoj polinoma p_1 oko točke x_0, no s time da je podijeljena razlika stavljena za k kao derivacija od p_1 u točki x_0.
Uočimo i to da je prvi član, u ovom slučaju f_0, interpolacijski polinom stupnja nula za zadanu prvu točku (x_0, f_0). Dakle, oblik polinoma p_1 odgovara korekciji interpolacijskog polinoma p_0 dodavanjem još jedne intrepolacijske točke (x_1, f_1). Pokazat će se da ovo vrijedi i u općem slučaju.
Može se pokazati da se ovakav oblik p_1 može dobiti i ako krenemo kao u drugom pristupu uz zahtjev da matrica sustava bude donjetrokutasta i da se stupanj povečava dopunjavanjem ranije dobivenog intrepolacijskog polinoma.

Stavimo li, dakle,

$$p_1(x) = c_0 b_0(x) + c_1 b_1(x),$$

iz uvjeta interpolacije dobijemo sustav

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= c_0 b_0(x_0) + c_1 b_1(x_0) = f_0 \\ p_1(x_1) &= c_0 b_0(x_1) + c_1 b_1(x_1) = f_1. \end{aligned}$$

Ako imamo zahtjev

$$\begin{bmatrix} b_0(x_0) & b_1(x_0) \\ b_0(x_1) & b_1(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix},$$

uz uvjet da su polinomi b_i najjednostavniji mogući i da se mogu nadopunjavati, analizu moramo provesti stupac po stupac.

Kako u prvom stupcu nemamo nikakvih uvjeta na b_0, jednostavno stavimo

$$b_0(x) = 1.$$

Iz prve jednadžbe supstitucijom unaprijed odmah dobijemo $c_0 = f_0$.
Dalje iz drugog stupca imamo samo uvjet

$$b_1(x_0) = 0,$$

pa jednostavno stavimo

$$b_1(x) = x - x_0.$$

Supstitucijom unaprijed dobijemo i

$$c_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Općenito bismo ovaj postupak mogli nastaviti na sličan način i u općenitom slučaju $n > 2$.

2.5 Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Da bismo odredili koeficijente interpolacijskog polinoma nije nužno rješavati sustav jednadžbi. Interpolacijski polinom p_n možemo odmah napisati u tzv. Lagrangeovoj bazi $\mathcal{L} = \{l_0, l_1, \ldots, l_n\}$ prostora $\mathcal{P}_n$, pri čemu je

$$l_k(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Vidimo da su polinomi l_k stupnja n, pa je polinom p_n definiran s

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x)$$

najviše stupnja n.

Osim toga vrijedi

$$l_k\left(x_i\right) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}.$$

Iz ovoga odmah slijedi da je

$$p_n\left(x_i\right) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k\left(x_i\right) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Ovo je tzv. **Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma**.

Definiramo li

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \omega_k(x) = \prod_{i=0,\ \ i \neq k}^{n} (x - x_i), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

vrijedit će

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega_k(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Uvrštavanjem u izraz za p_n dobivamo

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x - x_k)\,\omega_k(x_k)}.$$

Uočimo, nadalje, da je

$$\omega_k\left(x_k\right) = \omega'\left(x_k\right),$$

pa možemo pisati

$$p_n\left(x\right) = \omega\left(x\right) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\left(x - x_k\right)\omega'\left(x_k\right)}.$$

Upravo ovu formu je dobro koristiti za izvrednjavanje $p_n\left(x\right)$ jer u svakoj novoj točki x računamo samo $\omega\left(x\right)$ i $\left(x - x_k\right)$ (naravno, za $x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$).

Ukupan broj operacija je $\mathcal{O}\left(n^2\right)$, a za računanje $p_n\left(x\right)$ u svakoj novoj točki x trebamo još $\mathcal{O}\left(n\right)$ operacija.

Ovaj interpolacijski polinom koristimo samo u teoretske svrhe.

2.6 Greška interpolacijskog polinoma

Ako su nam poznati jos neki podaci o funkciji f koju aproksimiramo, možemo napraviti i ocjenu greške interpolacijskog polinoma.

TEOREM. Pretpostavimo da funkcija f ima $(n+1)$.-u derivaciju na intervalu $[a,b]$ za neki $n \in \mathbb{N}_0$. Neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ međusobno različiti interpolacijski čvorovi i neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f u tim čvorovima. Za bilo koju točku $x \in [a,b]$ postoji točka $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$, gdje je $x_{\min} = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i $x_{\max} = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, takva da za grešku e interpolacijskog polinoma p_n vrijedi

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

gdje je

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

DOKAZ. Ako je $x \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tvrdnja vrijedi jer tada dobivamo

$$e(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) = 0.$$

Pretpostavimo, stoga, da x nije interpolacijski čvor. Tada je $\omega(x) \neq 0$ i grešku e možemo napisati u obliku

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \omega(x)\, s(x),$$

gdje je funkcija s dobro definirana ako x nije čvor. Uzmimo sada proizvoljan ali fiksan $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ koji nije interpolacijski čvor i definirajmo funkciju $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sa

$$g(t) = e(t) - \omega(t)\, s(x) = e(t) - \omega(t) \frac{e(x)}{\omega(x)}.$$

Funkcija pogreške mora imati točno onoliko derivacija koliko i f, a one su i neprekidne kada su takve i derivacije funkcije f (jer su polinomi neprekidno derivabilni za bilo koji red derivacije). Budući da x nije čvor, to isto se prenosi i na funkciju g, pa zaključujemo da $g^{(n+1)}$ postoji na $[a, b]$.

Pogledajmo sada koliko nultočaka ima funkcija g. Vrijedi

$$g(x_k) = e(x_k) - \omega(x_k)\frac{e(x)}{\omega(x)} = 0 - 0\frac{e(x)}{\omega(x)} = 0,$$

i još

$$g(x) = e(x) - \omega(x)\frac{e(x)}{\omega(x)} = e(x) - e(x) = 0.$$

Dakle, funkcija g ima barem $n+2$ nultočke na $[a,b]$, odnosno na $[x_{\min}, x_{\max}]$. Budući je g derivabilna na tom segmentu, to po Rolleovom teoremu slijedi da g' ima barem $n+1$ nultočku na $(x_{\min}, x_{\max})$. Induktivnom primjenom Rolleovog teorema zaključujemo da $g^{(j)}$ ima barem $n+2-j$ nultočaka na $(x_{\min}, x_{\max})$ za $j = 0, 1, \ldots, n+1$. Dakle, $g^{(n+1)}$ ima barem jednu nultočaku na $(x_{\min}, x_{\max})$, označimo je s ξ.

Kako je p_n polinom stupnja najviše n, a ω polinom stupnja $n+1$, imamo

$$e^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 = f^{(n+1)}(t), \quad t \in [a,b],$$

$$\omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!, \quad t \in [a,b].$$

Deriviranjem po t izraza za g točno $n+1$ puta i uvrštavanjem gornjega dobijemo

$$g^{(n+1)}(t) = e^{(n+1)}(t) - \omega^{(n+1)}(t)\frac{e(x)}{\omega(x)} = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\frac{e(x)}{\omega(x)}.$$

Konačno, uvažimo li da je $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ imamo

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\frac{e(x)}{\omega(x)},$$

odnosno

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad x \in [a,b] \qquad \blacksquare$$

Ako je derivacija $f^{(n+1)}$ ograničena na $[a, b]$, ili jače, ako je $f \in C^{n+1}[a, b]$, onda iz prethodnog teorema dobijemo ocjenu greške interpolacijskog polinoma p_n u točki $x \in [a, b]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Ova ocjena je dobra ako relativno jednostavno možemo izračunati $M_{\max}$ ili ocijeniti na neki način njegovu vrijednost odozgo.

2.7 Newtonov interpolacijski polinom

Vidjeli smo da Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma nije pogodan kada želimo povećati stupanj interpolacijskog polinoma da bismo eventualno smanjili grešku zbog toga što se svi koeficijenti novog polinoma moraju računati ponovno. Postoji oblik interpolacijskog polinoma kod kojeg je puno lakše dodavati nove točke interpolacije, tj. povećavati stupanj interpolacijskog polinoma: to je tzv. **Newtonov oblik interpolacijskog polinoma**.

Neka je p_{n-1} polinom koji interpolira funkciju f u čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, te neka je p_n polinom koji interpolira funkciju f još i u čvoru x_n. Polinom p_n tada možemo napisati u obliku

$$p_n\left(x\right) = p_{n-1}\left(x\right) + c\left(x\right),$$

gdje je c korekcija, i sama polinom stupnja n. Također, mora vrijediti

$$c\left(x_k\right) = p_n\left(x_k\right) - p_{n-1}\left(x_k\right) = f\left(x_k\right) - f\left(x_k\right) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Iz ovoga vidimo da su $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ nultočke polinoma c, pa ga možemo napisati u obliku

$$c(x) = a_n (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) .$$

Nadalje, iz uvjeta interpolacije za dodanu točku x_n dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_n) &= p_n(x_n) = p_{n-1}(x_n) + c(x_n) \\ &= p_{n-1}(x_n) + a_n (x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) , \end{aligned}$$

odakle lako slijedi

$$a_n = \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})} = \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{\omega(x_n)}.$$

Korištenjem ove relacije dobivamo sve elemente za računanje $p_n(x)$ u bilo kojoj točki x. Koeficijent a_n je, za danu f, očito funkcija čvorova $x_0, x_1, \ldots, x_n$, a zvat ćemo ga n**-ta podijeljena razlika**. Pišemo

$$a_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] , \quad a_0 = f[x_0] = f(x_0) .$$

Sada lako možemo dobiti rekurzivnu formulu za dobivanje interpolacijskog polinoma kojemu je stupanj za jedan veći od stupnja prethodno izračunatog polinoma. Vrijedi

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n], \qquad p_0(x) = f(x_0).$$

No kakva je veza između definicije podijeljenih razlika iz Uvoda i ove nove definicije? Riječ je o istom pojmu. Sjetimo se da smo definirali

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{i} \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0},$$

i posebno $f[x_k] = f(x_k)$. Iz ovoga se dobije

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

ali isto tako i

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}.$$

Sada sastavljamo tablicu za računanje podijeljenih razlika

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$\vdots$	
$\vdots$		$\vdots$			$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
		$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$		$\vdots$	
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Uvažavajući rekurziju za p_n i oblik polinoma c dobivamo da je oblik Newtonovog interpolacijskog polinoma

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \cdots + (x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n]. \end{aligned}$$

Primjetimo da nam je za spremanje izračunatih podijeljenih razlika dovoljno jednodimenzionalno polje duljine $n + 1$. Na početku algoritma u njega redom spremimo $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$, a na kraju imamo $f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

ALGORITAM (Algoritam za računanje podijeljenih razlika)

for $i := 1$ **to** n
    begin
    for $j := n$ **to** i
        begin
        $f[j] := (f[j] - f[j-1]) / (x[j] - x[j-i]);$
        end
    end

2.8 Greška Newtonovog interpolacijskog polinoma

I grešku Newtonovog interpolacijskog polinoma možemo iskazati pomoću podijeljenih razlika. Neka je x_{n+1} realan broj koji ne pripada skupu čvorova $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Konstruirajmo novi interpolacijski polinom p_{n+1} koji prolazi čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$. Imamo

$$
\begin{aligned}
p_{n+1}(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\
&\quad + \cdots + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\
&\quad + (x - x_0) \cdots (x - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}] \\
&= p_n(x) + (x - x_0) \cdots (x - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}].
\end{aligned}
$$

Budući je

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$$

slijedi

$$f(x_{n+1}) = p_n(x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_0) \cdots (x_{n+1} - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}].$$

Usporedimo li ovaj izraz s ocjenom greške općeg interpolacijskog polinoma dane s

$$f\left(x_{n+1}\right)-p_n\left(x_{n+1}\right)=\frac{\omega\left(x_{n+1}\right)}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left(\xi\right),$$

$$\min\left\{x_0,x_1,\ldots,x_{n+1}\right\}<\xi<\max\left\{x_0,x_1,\ldots,x_{n+1}\right\},$$

odmah slijedi

$$f\left[x_0,x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}\right]=\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{(n+1)!},$$

odnosno (kako je x_{n+1} proizvoljan)

$$f\left[x_0,x_1,\ldots,x_n,x\right]=\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{(n+1)!}.$$

Pretpostavimo li sada da se u polju f na mjestu i nalazi $f\left[x_0, x_1, \ldots, x_i\right]$ dobivamo algoritam za izvrednjavanje $p_n\left(x\right)$ vrlo sličan Hornerovoj shemi.

ALGORITAM (Algoritam za izvrednjavanje $p_n\left(x\right) = sum$)

$sum := f\left[n\right];$

for $i := n - 1$ **downto** 0

  begin

  $sum := sum * \left(x - x\left[i\right]\right) + f\left[i\right];$

  end

2.9 Koliko je dobar interpolacijski polinom

U praksi se obično koriste interpolacijski polinomi niskih stupnjeva (najčešće do 5). Naime, kod nekih funkcija povečanje stupnja interpolacijskog polinoma može dovesti do povečanja greške (iako raspolažemo s više interpolacijskih čvorova!). Zbog toga se za smanjenje greške umjesto povećanja stupnja interpolacijskog polinoma koristi po djelovima polinomna interpolacija.

Njemački matematičar Runge je prvi uočio probleme koji nastaju kod interpolacije na ekvidistantnoj mreži čvorova. On je 1901. konstruirao funkciju (**Rungeova funkcija**) koja ima svojstvo da niz Newtonovih interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži ne konvergira (po točkama) toj funkciji kada se broj čvorova povečava. Ta funkcija je zadana s

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \; x \in [-5, 5].$$

No zanimljivo je i to da ako za istu funkciju uzmemo posebno odabranu mrežu neekvidistantnih čvorova (Čebiševljevu mrežu), onda niz niz Newtonovih interpolacijskih polinoma konvergira funkciji f.

Bernstein je 1912. na primjeru funkcije apsolutne vrijednosti promatrane na $[-1, 1]$ pokazao da će interpolacijski polinom na mreži od $n + 1$ ekvidistantnih čvorova konvergirati k f samo u točkama $1, 0$ i 1. Iz ovog primjera vidimo da osim izbora interpolacijskih čvorova na grešku aproksimacije znatno utječe i glatkoća funkcije koju aproksimiramo.

I na kraju moramo konstatirati da nema univerzalnog odgovora na to kako odabrati točke interpolacije. O tome nam govori sljedeći teorem.

TEOREM. (Faber, 1914.) Za svaki mogući izbor interpolacijskih čvorova postoji neprekidna funkcija f takva da za njen interpolacijski polinom p_n stupnja n vrijedi

$$\|f - p_n\|_\infty \not\to 0.$$

Vidi primjere u skripti Hari & all, strana 308-312.
Vidi grafove polinoma i grešaka u skripti Hari & all, strana 312-345.

2.10 Hermiteov interpolacijski polinom

Do sada smo promatrali problem interpolacije polinomima u kojem su zadane samo funkcijske vrijednosti f_i u čvorovima interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Takva interpolacija se obično zove **Lagrangeova interpolacija** (čak i ako nije vezana uz polinome). No ona nikako ne iscrpljuje sve moguće slučajeve interpolacije polinomima. Moguće je dodati razne uvjete u skladu s tim kakva dodatna lijepa svojstva ima funkcija f koju aproksimiramo. Samo je jedan slučaj dovoljno jednostavan da bismo se bavili njime, a to je kada u svakom čvoru x_i osim funkcijske vrijednosti f_i interpoliramo i vrijednost derivacije f_i'.

TEOREM. Postoji jedinstveni polinom h_{2n+1}, stupnja najviše $2n+1$, koji zadovoljava interpolacijske uvijete

$$h_{2n+1}(x_i) = f_i, \quad h'_{2n+1}(x_i) = f_i', \;\; i = 0, 1, \ldots, n,$$

gdje su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ međusobno različite točke, a $f_0, f_1, \ldots, f_n, f_0', f_1', \ldots, f_n'$ zadani brojevi.

DOKAZ. Egzistenciju polinoma h_{2n+1}, slično kao kod Lagrangeovog interpolacijskog polinoma, možemo dokazati i konstruktivnom metodom, tj. konstrukcijom eksplicitne baze. Neka su polinomi $h_{i,0}, h_{i,1}$, $i = 0, \ldots, n$, definirani s

$$\begin{aligned} h_{i,0}(x) &= \left[1 - 2(x - x_i)\, l_i'(x_i)\right] l_i^2(x) \\ h_{i,1}(x) &= (x - x_i)\, l_i^2(x), \end{aligned}$$

gdje su l_i funkcije Lagrangeove baze (vidi Lagrangeov int. polinom). Direktnim računom provjeri se da su $h_{i,0}, h_{i,1}$ polinomi stupnja $2n+1$ koji zadovoljavaju relacije

$$\begin{array}{c} h_{i,0}(x_j) = \delta_{ij}, \quad h_{i,1}(x_j) = 0, \\ h_{i,0}'(x_j) = 0, \quad h_{i,1}'(x_j) = \delta_{ij}, \end{array}, \quad i, j = 0, , \ldots, n.$$

Sada se lako provjeri da polinom h_{2n+1} zadan formulom

$$h_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f_i h_{i,0}(x) + f_i' h_{i,1}(x)\right)$$

ispunjava sve uvjete teorema ■

Polinome $h_{i,0}, h_{i,1}$ nazivamo polinomima Hermiteove baze, a polinom h_{2n+1} zove se **Hermiteov interpolacijski polinom**. Može se pokazati da vrijedi:

1. $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1,$
2. $\sum_{i=0}^{n} h_{i,0}(x) = 1,$
3. $\sum_{i=0}^{n} (x - x_i)\, l_i^2(x)\, l_i'(x) = 0$
4. $\sum_{i=0}^{n} (x_i h_{i,0}(x) + h_{i,1}(x)) = x.$

Za ocjenu greške Hermiteovog interpolacijskog polinoma vrijedi sličan teorem kao za običnu Lagrangeovu interpolaciju.

TEOREM. Greška kod interpolacije Hermiteovim polinomom h_{2n+1} funkcije

$$f \in C^{(2n+2)}\left[x_{\min}, x_{\max}\right]$$

u $n+1$ čvorova $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je dana s

$$e\left(x\right) = f\left(x\right) - h_{2n+1}\left(x\right) = \frac{f^{(2n+2)}\left(\xi\right)}{(n+2)!}\omega^2\left(x\right), \quad \xi \in \left[x_{\min}, x_{\max}\right].$$

DOKAZ. Ako je $x \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tvrdnja vrijedi jer tada dobivamo

$$e\left(x_i\right) = f\left(x_i\right) - h_{2n+1}\left(x_i\right) = 0.$$

Pretpostavimo, stoga, da x nije interpolacijski čvor. Tada je $\omega\left(x\right) \neq 0$ i grešku e možemo napisati u obliku

$$e\left(x\right) = f\left(x\right) - h_{2n+1}\left(x\right) = c\left(x\right)\omega^2\left(x\right),$$

gdje je $c\left(x\right)$ dobro definirano ako x nije čvor.

Za neki proizvoljan ali fiksan $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ koji nije interpolacijski čvor definirajmo funkciju $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ s

$$F(t) = f(t) - h_{2n+1}(t) - c(x)\,\omega^2(t) = f(t) - h_{2n+1}(t) - \omega^2(t)\,\frac{e(x)}{\omega^2(x)}.$$

Direktnim računom provjerimo da funkcija F ima dvostruke nultočke $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tj.

$$F(x_i) = F'(x_i) = 0, \quad i = 0, , \ldots, n.$$

Također vidimo da vrijedi

$$F(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) - \omega^2(x)\,\frac{e(x)}{\omega^2(x)} = f(x) - h_{2n+1}(x) - e(x) = 0,$$

pa smo pronašli $n+2$ nultočaka $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x\}$ za funkciju F i $n+1$ nultočaka $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ za njenu derivaciju F'. No po Rolleovom teoremu F' ima barem $n+1$ nultočaka između točaka $x_0, x_1, \ldots, x_n$, pa ih ima ukupno barem $2n+2$. Uzastopnom primjenom Rolleovog teorema zaključimo da $F^{(2n+2)}$ (koja postoji zbog uvjeta na f)

ima barem jednu nultočku na $[x_{\min}, x_{\max}]$, označimo je s ξ. Deriviranjem izraza za F dobijemo

$$F^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - (2n+2)!\frac{e(x)}{\omega^2(x)},$$

i vrijedi

$$F^{(2n+2)}(\xi) = f^{(2n+2)}(\xi) - (2n+2)!\frac{e(x)}{\omega^2(x)} = 0 \qquad \blacksquare$$