Matematička analiza III

http://fly.srk.fer.hr/~mordor/mat3.pdf

Ovo je sažetak formula, definicija i teorema s drugog dijela kolegija Matematička analiza 3 na FER-u (akad. god. 1997/98). (izostavljeni su dijelovi kompleksne analize). Ovdje se nalaze sve formule na jednom mjestu uz minimalna potrebna objašnjenja i definicije. Namjena ovog teksta je da služi kao referenca; zato su izostavljeni primjeri. Za primjere pogledati auditorne! Također su radi kompletnosti dodani neki sadržaji koji su obrađivani samo na predavanjima, ali NE i na auditornima. Takvi sadržaji označeni su zvjezdicom (*).

http://fly.srk.fer.hr/~mordor/mat3.pdf

1 Ortogonalni sustavi

1.1 Fourierov red

1.1.1 Periodičke funkcije

Definicija 1.1 Funkcija $f : R \to R$ je *periodička* ako postoji broj $T > 0$ takav da vrijedi $f(x) = f(x+T), \forall x \in R$. Broj T se naziva *period* funkcije f. Svaki cjelobrojni višekratnik kT perioda T je također period (uz $k \in Z \setminus \{0\}$). Najmanji period (ako postoji) naziva se *temeljni period.*

Najjednostavnija periodička funkcija je sinus: $f(x) = C\sin(\omega x + \phi)$. Zbroj $A\cos(\alpha x) + B\sin(\beta x)$ je periodička funkcija samo ako su α i β *sumjerljivi*, tj. omjer α/β je racionalan. Također vrijedi slijedeće:

$$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = C\sin(\omega x + \phi)$$

gdje za C i ϕ vrijede relacije:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$\tan\phi = \frac{A}{B}$$

(pri određivanju ϕ treba paziti na predznake A i B).

1.1.2 Trigonometrijski Fourierov red

Definicija 1.2 Sustav funkcija $1/2$, $\cos\frac{2\pi x}{T}$, $\sin\frac{2\pi x}{T}$, $\ldots$, $\cos\frac{2n\pi x}{T}$, $\sin\frac{2n\pi x}{T}$ nazivamo *osnovni trigonometrijski sustav.* Neka je $f : [a,b] \to R$ integrabilna funkcija i $T = b - a$. Brojeve

$$a_n := \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx$$
$$b_n := \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

nazivamo *Fourierovim koeficijentima* funkcije f po osnovnom trigonometrijskom sustavu. Trigonometrijski red

$$S(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

naziva se *Fourierovim redom* funkcije f. $S(x)$ je periodička funkcija s periodom T.

Definicija 1.3 Kažemo da funkcija f zadovoljava *Dirichletove uvjete* na intervalu $[a,b]$ ako:

1. ima najviše konačno mnogo prekida i svi su oni prve vrste (tj. u točki prekida postoje konačni lijevi i desni limesi).
2. ima konačan broj strogih ekstrema.

Teorem 1.1 Dirichletov teorem osigurava da se funkcija koja zadovoljava Dirichletove uvjete podudara sa svojim Fourierovim redom u svim točkama neprekinutosti. Vrijedi:

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & f \text{ neprekinuta u } x \\ \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) & f \text{ prekinuta u } x \end{cases}$$

1.1.3 Fourierov red parnih i neparnih funkcija

Funkcija je parna ako je $f(x) = f(-x)$. U tom slučaju je $b_n = 0$, $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$. Funkcija je neparna ako vrijedi $f(x) = -f(-x)$. Tada je $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$.

1.1.4 Spektar periodičke funkcije. Parsevalova jednakost.

Definicija 1.4 Niz $\{c_n\}$ s općim članom $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ nazivamo *amplitudni spektar* funkcije f čiji su Fourierovi koeficijenti a_n i b_n.

Definicija 1.5 Pišemo $f \in L^2[a,b]$ ako vrijedi $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$. Takve funkcije se nazivaju *kvadratno integrabilne*. Definiramo *normu* (u $L^2[a,b]$) funkcije kao:

$$\|f\| := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

Niz funkcija S_k teži funkciji f u L^2 normi ako $\|S_k - f\| \to 0$ kad $k \to \infty$.

Neka je f po dijelovima neprekidno diferencijabilna. Fourierov red funkcije f konvergira prema toj funkciji u svakoj točki u kojoj je f neprekidna. Štoviše, konvergencija je uniformna na svakom zatvorenom intervalu na kojem je f neprekidna pa Fourierov red možemo derivirati i integrirati član po član. Ako je općenitije $f \in L^2[a,b]$ tada Fourierov red konvergira u L^2 normi. Kao posljedicu toga dobivamo *Parsevalovu jednakost*:

$$\frac{1}{2}c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{T}\int_a^b |f(x)|^2 dx$$

1.1.5 *Kompleksni zapis Fourierovog reda

Nakon malo raspisivanja, dolazi se do slijedećih formula za zapis Fourierovog reda funkcije f u kompleksnom obliku ($\omega_0 = 2\pi/T$):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x}$$

gdje se koeficijenti c_n računaju formulom:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(\xi)e^{-in\omega_0\xi}d\xi$$

1.2 Ortogonalni sustavi

1.2.1 Fourierov red po ortogonalnom sustavu

Neka je $I = (a, b)$ ili $[a, b]$, te $\rho : I \to R^+$ proizvoljna neprekidna pozitivna funkcija (*težinska funkcija*). Pretpostavljamo da $f : I \to R$ ima slijedeća svojstva:

1. f je po dijelovima neprekidna. U točkama prekida kao i na rubovima intervala postoje jednostrani konačni limesi.
2. f je po dijelovima neprekidno diferencijabilna.
3. f je kvadratično integrabilna s težinom ρ, tj. $\int_a^b f(x)^2\rho(x)dx < \infty$.

Prostor svih takvih funkcija označavamo $D(a, b)$. $D(a, b)$ je *vektorski prostor.*

Definicija 1.6 Na $D(a, b)$ uvodimo *skalarni produkt* formulom:

$$(f|g) := \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

On ima svojstva:

1. $(f|f) \geq 0$
2. $(f|g) = (g|f)$
3. $(\lambda f|g) = \lambda(f|g)$
4. $(f_1 + f_2|g) = (f_1|g) + (f_2|g)$
5. $(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)$

Svojstvo 5. naziva se *Cauchy-Schwartz-Bunjakovski nejednakost.*

Definicija 1.7 Formulom $\|f\| := \sqrt{(f|f)}$ definira se *norma.* Ona ima slijedeća svojstva:

1. $\|f\| \geq 0$
2. $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$
3. $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$

Svojstvo 3. naziva se *nejednakost trokuta.*

Definicija 1.8 Udaljenost dviju funkcija definiramo kao $d(f_1, f_2) := \|f_1 - f_2\|$.

Definicija 1.9 Za sustav funkcija w_0, w_1, ... kažemo da je *ortogonalan* ako vrijedi:

$$(w_n|w_m) = \begin{cases} > 0 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Fourierov red funkcije f po ortogonalnom sustavu w_n je:

$$S(f) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n$$

Koeficijenti c_n računaju se po formuli:

$$c_n = \frac{1}{\|w_n\|^2}(f|w_n)$$

Fourierov red po ortogonalnom sustavu ima svojstvo *najbolje aproksimacije* funkcije f u udaljenosti d.

Definicija 1.10 Kažemo da je sustav (w_n) *baza* za prostor $D(a,b)$ ako $\forall f \in D(a,b)$ vrijedi $d(S_n(f), f) \to 0$ kad $n \to \infty$. Tada će se u točkama neprekinutosti f podudarati sa svojim Fourierovim redom.

I ovdje vrijedi *Parsevalova jednakost*, ali u slijedećem obliku: Ako je $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k$ tada vrijedi

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|w_k\|^2 = \|f\|^2$$

1.2.2 Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije

Neka je $f_0, f_1, \ldots$ niz nezavisnih funkcija. Taj sustav zamjenjujemo sustavom ortogonalnih funkcija na slijedeći način:

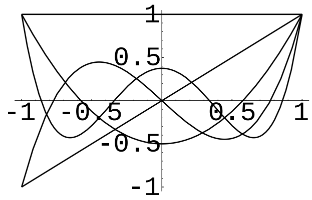
$$\begin{aligned}
w_0 &:= f_0 \\
w_1 &:= f_1 - \frac{(f_1|w_0)}{\|w_0\|^2} w_0 \\
&\vdots \\
w_n &:= f_n - \frac{(f_n|w_0)}{\|w_0\|^2} w_0 - \ldots - \frac{(f_n|w_{n-1})}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}
\end{aligned}$$

Normu w_n možemo računati po slijedećoj formuli:

$$\|w_n\|^2 = \|f_n\|^2 - \frac{(f_n|w_0)^2}{\|w_0\|^2} - \ldots - \frac{(f_n|w_{n-1})^2}{\|w_{n-1}\|^2}$$

1.2.3 Legendreovi polinomi

Sustav $\{P_n\}$ Legendreovih polinoma ortogonalan je na intervalu $[-1, 1]$ uz težinsku funkciju $\rho(x) \equiv 1$. Do Legendreovih polinoma dolazimo od sustava $\{x^n\}$ Gramm-Schmidtovim postupkom, ali dobivene w_n treba pomnožiti konstantom kako bi se zadovoljio uvjet $P_n(1) = 1$. Tako dolazimo do prvih nekoliko Legendreovih polinoma koji su također prikazani i na **slici 1.1**.



Slika 1.1 Legendreovi polinomi

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Legendreove polinome možemo računati prema *Rodriguesovoj formuli* (uz $P_0(x) = 1$):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n)$$

ili prema rekurzivnoj relaciji:

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

uz $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. Normu Legendreovih polinoma možemo računati prema formuli:

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n + 1}$$

Legendreovi polinomi čine bazu u $D(-1, 1)$.

1.2.4 Čebiševljevi polinomi

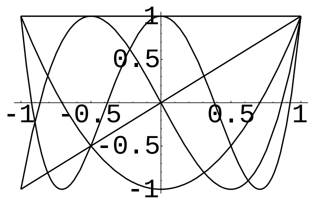
Sustav $\{T_n\}$ Čebiševljevih polinoma ortogonalan je na $[-1, 1]$ uz težinsku funkciju $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Za računanje s Čebiševljevim polinomima najpraktičnija je eksplicitna formula:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Za normu vrijedi:

$$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \pi & n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & n \geq 1 \end{cases}$$

Čebiševljevi polinomi čine bazu u $D(-1, 1)$. Prvih par čebiševljevih polinoma prikazano je na **slici 1.2**.



Slika 1.2 Čebiševljevi polinomi

2 Integralne transformacije

2.1 Fourierov integral

Neka je $f : R \to R$ *apsolutno integrabilna*, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. Tada postoje integrali

$$A(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(\lambda\xi) d\xi$$
$$B(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin(\lambda\xi) d\xi$$

Funkcije $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ nazivaju je *kosinusni*, odn. *sinusni spektar* od f. Funkcija

$$F(x) := \int_0^{\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda$$

naziva se *Fourierov integral* funkcije f. Ako funkcija zadovoljava *na svakom zatvorenom* intervalu Dirichletove uvjete, tada se ona može prikazati pomoću Fourierovog integrala i vrijedi:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & f \text{ neprekinuta u } x \\ \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) & f \text{ prekinuta u } x \end{cases}$$

Kažemo da smo funkciju f razvili u harmonička titranja čije su frekvencije proizvoljni realni brojevi $0 < \lambda < \infty$. Kosinusni i sinusni spektar zajedno određuju *amplitudni spektar*: $am(\lambda) := \sqrt{A(\lambda)^2 + B(\lambda)^2}$. Ako je funkcija f parna, tada je $B(\lambda) \equiv 0$; ako je neparna vrijedi $A(\lambda) \equiv 0$. Fourierov integral se može zapisati na kraći način:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi$$

2.1.1 Sinus integralni

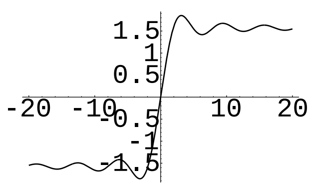
Definiramo funkciju *sinus integralni*:

$$\text{Si}(x) := \int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$$

sa svojstvima:

1. neparnost; $-\text{Si}(x) = \text{Si}(-x)$
2. apscise maksimuma su $x_{max} = (2n+1)\pi$ $(n \geq 0)$; apscise minimuma su $x_{min} = 2n\pi$ $(n \geq 1)$
3. $\lim_{x\to\infty} \text{Si}(x) = \frac{\pi}{2}$

Graf je prikazan na slici desno.



Slika 2.1 Sinus integralni

2.1.2 *Kompleksni zapis Fourierovog integrala

Nakon kraćeg računa dolazi se do slijedećeg zapisa Fourierovog integrala u kompleksnom obliku:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

F je *spektralna funkcija* od f koja se računa prema formuli:

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$$

2.2 Laplaceova transformacija

Definicija 2.1 *Original* je svaka funkcija $f(t)$ realne varijable t koja zadovoljava uvjete:

1. $f(t) \equiv 0$ za $t < 0$
2. za $t \geq 0$ funkcija $f(t)$ na bilo kojem konačnom dijelu osi t može imati najviše konačno prekida i to samo prve vrste
3. za $t \to \infty$ funkcija $f(t)$ ima ograničen stupanj rasta,tj. postoje konstante $M > 0$ i $a \geq 0$ takve da je $|f(t)| \leq Me^{at}$ $\forall t \geq 0$ tj. $f(t)$ je *eksponencijalnog rasta.*

Definicija 2.2 Infimum $a_0 \geq 0$ svih vrijednosti $a \geq 0$ za koje vrijedi $f(t) \leq Me^{at}$ naziva se *eksponent rasta* funkcije $f(t)$.

Definicija 2.3 *Step funkcija* definirana je kao:

$$S(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Neka funkcija $f(t)$ definirana za $-\infty < t < \infty$ zadovoljava uvjete 2. i 3. iz definicije originala, ali $f(t) \neq 0$ za $t < 0$. Tada je funkcija $f(t)S(t)$ original.

Napomena 1: Uvijek tražimo Laplaceovu transformaciju funkcije $f(t)S(t)$, ali radi kratkoće pisanja ne pišemo $S(t)$.

Napomena 2: U Laplaceovoj transformaciji dopuštamo da $f(t)$ bude kompleksna funckija realne varijable, tj. oblika $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ pri čemu su f_1 i f_2 realne funkcije za koje pretpostavljamo da su originali.

Definicija 2.4 Neka je $f : R \to C$. Laplaceova transformacija je funkcija

$$F(p) := \int_{0}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

($p \in C$, $t \in R$) kompleksne vraijable p, koja postoji tamo gdje ovaj nepravi integral konvergira.

Oznake: Laplaceovu transformaciju označavamo sa: $f(t) \triangleright F(p)$, a inverznu Laplaceovu transformaciju sa $F(p) \triangleleft f(t)$.

Teorem 2.1 Integral $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ apsolutno konvergira u području $Re(p) > a_0$, a_0 je eksponent rasta funkcije f.

Teorem 2.2 Laplaceova transformacija $F(p)$ originala $f(t)$ je *analitička funkcija* kompleksne varijable p u području $Re(p) > a_0$.

2.2.1 Osnovna svojstva

Ovdje pretpostavljamo da se $f(t)$ preslikava u $F(p)$, tj. $f(t) \triangleright F(p)$. Ako nije navedeno područje konvergencije, pretpostavlja se $Re(p) > a_0$.

1. Linearnost:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \triangleright \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p) \quad (\mathrm{Re}(p) > \max_{k=1\ldots n} a_0^k)$$

2. Množenje varijable konstantom:

$$f(\alpha t) \triangleright \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha}) \quad (\mathrm{Re}(p) > \alpha a_0)$$
$$F(bp) \triangleleft \frac{1}{b} f(\frac{t}{b})$$

3. Prigušenje:

$$e^{-\alpha t} f(t) \triangleright F(p+\alpha) \quad (Re(p) > a_0 - Re(\alpha))$$

4. Pomak: $(\tau > 0)$

$$f(t-\tau)S(t-\tau) \triangleright e^{-\tau p} F(p)$$

5. Deriviranje originala:

$$f'(t) \triangleright pF(p) - f(0)$$

Općenito, neka su prvih n derivacija originali. Tada je:

$$f^{(n)}(t) \triangleright p^n (F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n})$$

Specijalno, ako je $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, onda je $f^{(n)}(t) \triangleright p^n F(p)$

6. Deriviranje slike:

$$F'(p) \triangleleft -tf(t)$$

Općenito,

$$F^{(n)}(p) \triangleleft (-t)^n f(t)$$
$$t^n f(t) \triangleright (-1)^n F^{(n)}(p)$$

7. Integriranje originala:

$$\int_0^t f(t)dt \triangleright \frac{1}{p} F(p)$$

Općenito, ako imamo n integrala:

$$\int_0^t dt \int_0^t dt \ldots \int_0^t f(t)dt \triangleright \frac{F(p)}{p^n}$$

8. Integriranje slike:

$$\int_p^\infty F(p)dp \triangleleft \frac{f(t)}{t}$$

gdje se integrira u kompleksnoj ravnini po bilo kojoj zraci (s rastućim x koordinatama). Općenito,

$$\int_p^\infty dp \int_p^\infty dp \dots \int_p^\infty F(p)dp \triangleleft \frac{f(t)}{t^n}$$

9. Preslikavanje konvolucije:

$$(f_1 * f_2)(t) \triangleright F_1(p)F_2(p)$$

Definicija 2.5 *Konvoluciju* dvije funkcije definiramo sa

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

Za konvoluciju vrijedi komutativnost i asocijativnost.

2.2.2 Transformacije nekih funkcija

Područja konvergencije slika nisu navedena!

Definicija 2.6 Gate-funkcija:

$$G_{[a,b]}(t) := \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

To se može pisati i kao: $G_{[a,b]}(t) = S(t-a) - S(t-b)$

- Step funkcije i polinomi:

$$\begin{aligned} S(t) &\triangleright \frac{1}{p} \\ S(t-a) &\triangleright \frac{e^{-ap}}{p} \\ G_{[a,b]}(t) &\triangleright \frac{e^{-ap}}{p} - \frac{e^{-bp}}{p} \\ t^n &\triangleright \frac{n!}{p^{n+1}} \end{aligned}$$

- Eksponencijalne i hiperbolne funkcije:

$$\begin{aligned} e^{at}S(t) &\triangleright \frac{1}{p-a} \\ \cosh(\omega t) &\triangleright \frac{p}{p^2-\omega^2} \\ \sinh(\omega t) &\triangleright \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \end{aligned}$$

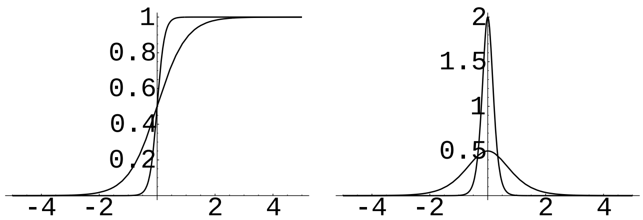
- Trigonometrijske funkcije:

$$\sin(\omega t) \triangleright \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$
$$\cos(\omega t) \triangleright \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

2.2.3 Diracova δ funkcija

Funkciju $S(t)$ aproksimiramo nizom glatkih funkcija $S_\epsilon(t)$ koje konvergiraju prema $S(t)$ (vidi **sliku 2.2** za $\epsilon_2 < \epsilon_1$), te vrijedi:

$$\delta(t) = S^{'}(t) = \lim_{\epsilon \to 0} S^{'}_\epsilon(t)$$



Slika 2.2 Funkcije $S_\epsilon(t)$ i $S^{'}_\epsilon(t)$

Delta funkcija ima slijedeća svojstva:

1. $\delta(t) = 0,\ t \neq 0$
2. $\delta(t) = \infty,\ t = 0$
3. $\int_{-\alpha}^{\beta} \delta(t) dt = 1,\ \forall \alpha, \beta \geq 0$
4. $\int_{-\alpha}^{\beta} f(t)\delta(t) dt = f(0)$

Svojstvo 3. se lako dokaže:

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \delta(t) dt = \int_{-\alpha}^{\beta} S^{'}(t) dt = S(\beta) - S(-\alpha) = 1 - 0 = 1$$

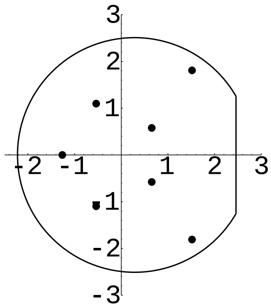
Ponašanje δ funkcije pri Laplaceovoj transformaciji je slijedeće: $\delta(p) \triangleleft 1$ te $p^n \triangleleft \delta^{(n)}(t)$ (original delta funkcije je 1, a *ne* $S(t)$).

2.2.4 Laplaceova transformacija periodičke funkcije

Neka je $f(t)$ periodička funkcija perioda T i $f(t)$ original. Tada je

$$f(t) \triangleright \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt$$

2.2.5 Traženje originala. *Mellinov integral.



Slika 2.3 Put integracije za računanje Mellinovog integrala ($R \to \infty$)

Pri traženju originala koristimo se tablicom Laplaceovih transformacija (čitajući je u obrnutom smjeru) i prije navedenim svojstvima Laplaceove transformacije. Ili, (ako sve propadne) možemo iskoristiti slijedeći rezultat: Original funkcije $F(p)$ je funkcija $f(t)$ koja se može računati slijedećom formulom:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp$$

Ovaj kompleksni integral se najlakše računa primjenom teorema o residuumu (x mora biti dovoljno velik (npr. x_0) da obuhvati sve singularitete, tj. da se svi singulariteti nalaze lijevo od pravca $x = x_0$; točan put integracije prikazan je na **slici 2.3**).

Teorem 2.3 Ako je $f(t)$ original i $f(t) \triangleright F(p)$, onda je

$$\lim_{\mathrm{Re}(p) \to \infty} F(p) = 0$$

Teorem 2.4 Neka je $F(p)$ analitička funkcija u području $\mathrm{Re}(p) > a$, koja zadovoljava uvjete:

1. U području $\mathrm{Re}(p) \geq x > a_0$ $F(p) \to 0$ kad $|p| \to \infty$. Konvergencija mora biti uniformna.

2. $\forall p \mathrm{Re}(p) = x > a_0$ integral $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy$ konvergira ($p = x + iy$).

Tada je $F(p)$ Laplaceov transformat funkcije f(t).

2.2.6 Primjene Laplaceove transformacije

Jedna od primjena je rješavanje nehomogene diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, ako su zadani svi početni uvjeti.

Slijedeća od primjena je rješavanje električnih mreža: preslikamo mrežu iz gornjeg u donje područje, te ju riješimo u donjem području i vratimo u gornje područje. Pri tome se otpor (R), induktivitet (L) i kapacitet (C) preslikavaju u simboličke impedancije R, Lp, $\frac{1}{Cp}$. U donjem području vrijede Kirchhoffovi zakoni te pravila o serijskom i paralelnom spajanju otpora.

3 Diferencijalne jednadžbe

3.1 Linearne diferencijalne jednadžbe

Opći oblik linearne diferencijalne jednadžbe je:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y^{'} + p_n(x)y = f(x)$$

$f(x)$ se ponekad naziva *funkcija smetnji*. Ovoj jednadžbi pridružujemo odgovarajuću *homogenu*:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y^{'} + p_n(x)y = 0$$

Za rješenje negomogene jednadžbe vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 3.1 Neka je y_p bilo koje *partikularno* rješenje nehomogene jednadžbe, a y_o opće rješenje homogene. Tada je opće rješenje nehomogene dano sa $y = y_o + y_p$.

3.1.1 Homogena LDJ

Homogena LDJ je oblika:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y^{'} + p_n(x)y = 0$$

Da bi sastavili opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe, dovoljno je znati n linearno nezavisnih rješenja na intervalu $[a, b]$. Sustav y_1, y_2,..., y_n linearno nezavisnih rješenja na $[a, b]$ zovemo *fundamentalni sustav rješenja*. Da bi sustav rješenja $y_1 \ldots y_n$ bio fundamentalan, nužno je i dovoljno da je njihov *Wronskijan* različit od 0 u svakoj točki intervala $[a, b]$. U stvari, dovoljno je uvjeriti se da je $W(x_0) \neq 0$ za neki $x_0 \in (a, b)$ jer to povlači $W(x_0) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Determinanta Wronskog definirana je na slijedeći način:

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1^{'} & y_2^{'} & \ldots & y_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Opće rješenje je dano formulom

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$$

gdje su C_i proizvoljne realne konstante.

3.1.2 Homogena LDJ s konstantnim koeficijentima

Homogenoj LDJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y^{'} + a_ny = 0$$

pridružen je *karakteristični polinom*:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Korijene polinoma $P(\lambda)$ (tj. rješenja jednadžbe $P(\lambda) = 0$) nazivamo *karakterističnim vrijednostima* diferencijalne jednadžbe. Svaki korijen λ_i kratnosti n_i daje jedno fundamentalno rješenje y_i.

Ako je λ_i realan, tada je y_i oblika:

$$y_i = (C_1 + C_2 x + \ldots + C_{n_i} x^{n_i - 1}) e^{\lambda_i x}$$

Ukoliko je kratnost korijena λ_i $n_i = 1$, tada se gornja formula pojednostavljuje na

$$y_i = C e^{\lambda x}$$

Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$ kompleksan i kratnosti n_i , tada je y_i oblika:

$$y_i = e^{\alpha x}((C_1 + C_2 x + \ldots + C_{n_i} x^{n_i - 1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \ldots + D_{n_i} x^{n_i - 1}) \sin \beta x)$$

Ukoliko je kratnost $n_i = 1$, tada se ovo pojednostavljuje na

$$y_i = e^{\alpha x}(C \cos \beta x + D \sin \beta x)$$

Opće rješenje homogene je suma svih y_i. Pri pisanju općeg rješenja treba paziti da su *sve konstante* u svim y_i *različite*.

3.1.3 Nehomogena LDJ s konstantnim koeficijentima

Pri rješavanju nehomogene LDJ, prvo se riješi pridružena homogena, a zatim se potraži partikularno rješenje y_p. Opće rješenje nehomogene je tada $y = y_o + y_p$.

3.1.3.1 Metoda neodređenih koeficijenata

Ukoliko je desna strana nehomogene jednadžbe oblika

$$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$$

(P je polinom stupnja m), tada se partikularno rješenje traži u obliku

$$y_p = x^k e^{\alpha x} Q_m(x)$$

Q_m je polinom istog stupnja kao i P s neodređenim koeficijentima. Ako je α nultočka karakterističnog polinoma, tada je k njezina kratnost. Ukoliko α *nije* nultočka karakterističnog polinoma, tada se partikularno rješenje traži u obliku

$$y_p = e^{\alpha x} Q_m(x)$$

Ako je $f(x)$ oblika

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_r(x) \cos \beta x + P_s(x) \sin \beta x)$$

i $m = \max\{r, s\}$ (P_r i P_s su polinomi stupnja r i s) tada partikularno rješenje pretpostavljamo u obliku

$$y_p = x^k e^{\alpha x}(Q_m(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x)$$

Ukoliko je $\alpha + i\beta$ korijen karakterističnog polinoma tada je k njegova kratnost. Ukoliko $\alpha + i\beta$ *nije* nultočka, tada izostavljamo član x^k (odn. $k = 0$ pa je $x^0 = 1$).

Uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja y_p u nehomogenu jednadžbu i izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće linearno nezavisne funckije dobijemo sistem linearnih jednadžbi iz kojeg odredimo nepoznate koeficijente, a time i partikularno rješenje y_p.

3.1.3.2 Metoda varijacije konstanti (Lagrangeova metoda)

Metoda neodređenih koeficijenata "radi" samo ako je funkcija smetnji točno određenog oblika. U općem slučaju se partikularno rješenje može naći tako da se za konstante C_i iz rješenja homogene pretpostavi da su funkcije od x, tj. $C_i = C_i(x)$. Tada postavimo slijedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{array}{rccl}
C_1'y_1 + C_2'y_2 + & \ldots & +C_n'y_n & = 0 \\
C_1'y_1' + C_2'y_2' + & \ldots & +C_n'y_n' & = 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \\
C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + & \ldots & +C_n'y_n^{(n-2)} & = 0 \\
C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + & \ldots & +C_n'y_n^{(n-1)} & = f(x)
\end{array}$$

Rješavanjem ovog sistema dobivamo C_i'. Integriranjem ovih C_i' dobivamo nepoznate funckije. Pri tome se moraju zadržati konstante integracije! (za svaki integral $\int C_i(x)dx$ treba pisati posebnu konstantu integracije K_i). Sada je rješenje diferencijalne jednadžbe u obliku:

$$y = C_1(x)y_1 + \ldots + C_n(x)y_n$$

i može se raspisati u oblik $y = y_o + y_p$.

3.1.4 Svođenje na LDJ s konstantnim koeficijentima

Ako imamo linearnu diferencijalnu jednadžbu s nekonstantnim koeficijentima, tj. oblika

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

želimo naći supstituciju $x = \phi(t)$ koja će ju prevesti u jednadžbu s konstantnim koeficijentima. Ako takva supstitucija postoji, ona je oblika

$$t = C\int \sqrt[n]{p}_n(x)dx$$

(C je konstanta, n je red diferencijalne jednadžbe) i ne postoji neka druga supstitucija kojom bi se to moglo postići.

3.1.4.1 Eulerova diferencijalna jednadžba

Eulerova diferencijalna jednadžba je oblika

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(ax+b)y' + A_n y = f(x)$$

Dijeljenjem sa $(ax+b)^n$ dobivamo $p_n(x) = A_n/(ax+b)^n$ Sada imamo

$$t = C\int \sqrt[n]{\frac{A_n}{(ax+b)^n}}dx = C\frac{\sqrt[n]{A_n}}{a}\ln(ax+b)$$

Ako izaberemo $C = a/\sqrt[n]{A_n}$ imamo supstituciju

$$ax + b = e^t$$

odn.

$$t = ln(ax + b)$$

Sada treba $\frac{dy}{dx}$ izraziti pomoću derivacija $\frac{dy}{dt}$

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{a}{ax+b} = \frac{dy}{dt}\frac{a}{e^t} = ae^{-t}\frac{dy}{dt}$$
$$y^{''} = \frac{d}{dx}y^{'} = \frac{d}{dt}(y^{'})\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(ae^{-t}\frac{dy}{dt})ae^{-t} = a^2e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})$$

Analogno se izvode i derivacije višeg reda. Uvrštavanjem dobivenih izraza za derivacije y po x preko derivacija y po t u diferencijalnu jednadžbu dobiva se diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima za dy/dt. Rješavanjem te jednadžbe po $y(t)$ i uvrštavanjem $ax+b$ umjesto t dobivamo rješenje početne diferencijalne jednadžbe.

3.1.5 *Rješavanje pomoću redova

Ova metoda je pogodna za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi s *nekonstantnim* koeficijentima. Pretpostavimo rješenje u obliku

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.1}$$

gdje su a_i neodređeni koeficijenti. Ukoliko je rješenje analitička funkcija, tada se ono uvijek može napisati u obliku reda.

Promotrimo slijedeću diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{3.2}$$

Tada možemo izreći slijedeći teorem:

Teorem 3.2 Ako su p, q i r analitičke funkcije u okolini točke x_0 i $p(x_0) \neq 0$, onda je rješenje jednadžbe također analitička funkcija u okolini x_0.

Uzmimo za primjer jednadžbu $y'' + xy' + y = 0$. Uzmemo $x_0 = 0$. p, q i r su analitičke te po **teoremu 3.2** postoji rješenje (jer je $p \equiv 1$ te je $p(x_0) = p(0) \neq 0$). Uvrstimo **formulu 3.1** u jednadžbu i dobijemo

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Nakon promjene indeksa u sumama imamo:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

što nakon sređivanja i izjednačavanja daje

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{k+2} \quad k \geq 0$$

Dobijemo slijedeće jednakosti za koeficijente:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2} \\
a_3 &= -\frac{a_1}{3} \\
a_4 &= -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4} \\
a_5 &= -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3 \cdot 5}
\end{aligned}$$

(na a_0 i a_1 nema nikakvih uvjeta: oni su određeni početnim uvjetima). Tako konačno rješenje možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned}
y &= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \\
&= a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots\right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} - \frac{x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots\right)
\end{aligned}$$

Za slijedeći primjer uzmimo Besselovu diferencijalnu jednadžbu:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (\nu \in R)$$

a rješenje želimo u okolini $x_0 = 0$. Budući da jednadžba ne zadovoljava uvjete **teorema 3.2** ($p(x) = x^2$; $p(x_0) = 0$) rješenje nije red potencija već poopćeni red potencija:

$$y = x^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$