MODELI RAČUNARSTVA - JEZIČNI PROCESORI 1

Siniša Srbljić, Sveučilište u Zagrebu

1. UVOD
2. REGULARNI JEZICI
3. KONTEKSTNO NEOVISNI JEZICI
4. REKURZIVNO PREBROJIVI JEZICI
5. KONTEKSTNO OVISNI JEZICI
6. RAZREDBA (TAKSONOMIJA) JEZIKA, AUTOMATA I GRAMATIKA

3. KONTEKSTNO NEOVISNI JEZICI

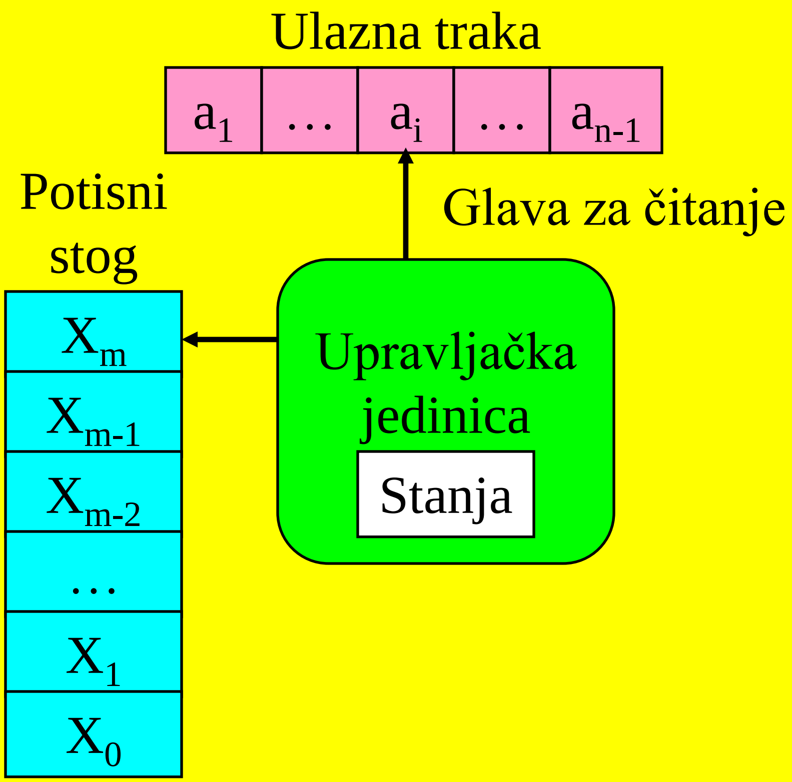
- 3.1. KONTEKSTNO NEOVISNA GRAMATIKA
- 3.2. POTISNI AUTOMAT
- 3.3. SVOJSTVA KONTEKSTNO NEOVISNIH JEZIKA

3.2. Potisni automat (Push Down Automata, PA)

- 3.2.1. Model potisnog automata
- 3.2.2. Definicija potisnog automata
- 3.2.3. Potisni automat i svojstva CFG

3.2.1. Model potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT
  - je proširenje konačnog automata
  - za potrebe prihvata kontekstno neovisnih jezika
  - konačnom automatu dodaje se potisni slog
  - automat čita ulazni znak i znak stoga



Model potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT
  - upravljačka jedinica donosi odluku o
    - promjeni sadržaja stoga
    - pomaku glave za čitanje
    - promjeni stanja
  - odluku donosi na osnovu
    - stanja
    - znaka stoga
    - ulaznog znaka
  - moguće su odluke na osnovu samo dva parametra:
    - stanja i znaka stoga
    - tada se glava za čitanje ne pomiče u desno

Model potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT
  - na vrh stoga može se staviti:
    - prazni niz ε jednako je uzimanju znaka sa vrha stoga
    - niz duljine jednog znaka, isti kao prije ili neki drugi (zamjena)
    - niz duljine više znakova, npr. simulira primjenu produkcije
  - upravljačka jedinica obavlja dvije vrste prijelaza
    - na temelju trojke (q, a, Z) mijenja stanje u p,
      pomakne glavu i zamijeni Z sa nizom γ
    - na temelju trojke (q, ε, Z) mijenja stanje u p,
      ostavi glavu na istom mjestu i zamijeni Z sa nizom γ

Model potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT
  - odluku o prihvaćanju niza nakon čitanja **svih** znakova niza PA donosi na jedan od dva načina
  - PA M prihvaća niz prihvatljivim stanjem
    - ako uđe u prihvatljivo stanje niz se prihvaća
    - PA M prihvaća jezik L(M)
  - PA M prihvaća niz praznim stogom
    - ako je stog prazan niz se prihvaća
    - PA M prihvaća jezik N(M)
  - generalno vrijedi L(M)<>N(M)

Model potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT - PRIMJER
  - Izgradimo potisni automat koji praznim stogom prihvaća jezik $N(M) = \{(^n a)^n | n \geq 1\}$
  - znak a okružen je jednakim brojem otvorenih i zatvorenih zagrada
  - na početku je na stogu znak K
  - PA ima dva stanja:
    - početno q_0 u kojem prihvaća otvorene zagrade i na stog stavlja znak A
    - završno q_1 u koje prelazi nakon prijema znaka a i prihvaća zatvorene zagrade i sa stoga skida znakove A

Model potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT - PRIMJER
  - Imamo 5 prijelaza:
    - 1. q_0 (K q_0 AK desno
    - 2. q_0 (A q_0 AA desno
    - 3. q_0 a A q_1 A desno
    - 4. q_1) A q_1 ε desno
    - 5. q_1 ε K q_1 ε stop
  - prijelaz 5 moguć je samo ako je broj lijevih i desnih zagrada isti

Model potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT - PRIMJER
  - pratimo rad automata za niz (((a))):
    - p: K q_0 (((a)))
    - 1: AK q_0 ((a)))
    - 2: AAK q_0 (a)))
    - 2: AAAK q_0 a)))
    - 3: AAAK q_1)))
    - 4: AAK q_1))
    - 4: AK q_1)
    - 4: K q_1
    - 5: q_1 stop, niz se prihvaća

Model potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT - PRIMJER
  - ako je broj zatvorenih zagrada veći,
    niz se ne pročita do kraja jer se stog isprazni prerano
  - ako je broj zatvorenih zagrada manji,
    stog se ne isprazni
  - ako u nizu nema znaka a, automat ne pređe u stanje q_1

Model potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT - PRIMJER
  - definirajmo PA M’ slično kao M, samo što je q_0 neprihvatljivo a q_1 prihvatljivo
  - automat M’ prihvaća prihvatljivim stanjem jezik $L(M') = \{(^{n}a)^{m} | n \geq 1, m \geq 0, m \leq n\}$
  - pri tome N(M) <> L(M’)
  - M’ prihvaća niz ((((a, M ga odbacuje
  - ako je $m>n$, stog se isprazni i niz se ne prihvaća
  - također se odbacuje niz bez znaka a

3.2.2. Definicija potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT
  - formalno zadajemo sedmorkom:
    $PA = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$
  - gdje su
    - Q konačan skup stanja s početnim stanjem q_0
    - Σ konačan skup ulaznih znakova (ulazna abeceda)
    - Γ konačan skup znakova stoga (abeceda stoga) s početnim znakom stoga Z_0
    - δ funkcija prijelaza $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma^*$
    - $F \subseteq Q$ podskup prihvatljivih stanja
  - uobičajena značenja su:
    - a, b, c ulazni znakovi, v, w, x nizovi ulaznih znakova
    - A, B, C znakovi stoga, α, β, nizovi znakova stoga

Definicija potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT
  - funkcija prijelaza δ: $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$ pridružuje trojci (q, a, Z) konačni skup parova (p, γ):
  $$\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots (p_m, \gamma_m)\}$$
  - Značenje funkcije δ je:
    - ako je automat u stanu q, pročita ulazni znak a i na vrhu stoga je Z
    - preći će u stanje p_i, zamijeniti Z nizom γ_i s desna na lijevo, te pomaknuti glavu na slijedeći znak ulaznog niza
  - funkcija δ je nejednoznačna
  - ako je zadano preslikavanje za $\delta(q, \varepsilon, Z)$
    - glava za čitanje se ne pomakne

Definicija potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT - PRIMJER
  - zadan je PA koji prihvaća jezik $L(M1) = \{w2w^R\}$

    $M_1 = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1, 2\}, \{N, J, K\}, \delta, q_1, K, \{q_3\})$
  - s funkcijom prijelaza

    1) $\delta(q_1, 0, K) = \{(q_1, NK)\}$ 2) $\delta(q_1, 1, K) = \{(q_1, JK)\}$

    3) $\delta(q_1, 0, N) = \{(q_1, NN)\}$ 4) $\delta(q_1, 1, N) = \{(q_1, JN)\}$

    5) $\delta(q_1, 0, J) = \{(q_1, NJ)\}$ 6) $\delta(q_1, 1, J) = \{(q_1, JJ)\}$

    7) $\delta(q_1, 2, K) = \{(q_2, K)\}$

    8) $\delta(q_1, 2, N) = \{(q_2, N)\}$

    9) $\delta(q_1, 2, J) = \{(q_2, J)\}$

    10) $\delta(q_2, 0, N) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ 11) $\delta(q_2, 1, J) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

    12) $\delta(q_2, \varepsilon, K) = \{(q_3, \varepsilon)\}$

Definicija potisnog automata

- POTISNI AUTOMAT - PRIMJER
  - analizirajmo stazu prijelaza za niz 0012100
    - p: K q_1 0012100
    - 1: NK q_1 012100
    - 3: NNK q_1 12100
    - 4: JNNK q_1 2100
    - 9: JNNK q_2 100
    - 11: NNK q_2 00
    - 10: NK q_2 0
    - 10: K q_2
    - 12: q_3 $q_3 \in F$, niz se prihvaća

Definicija potisnog automata

- KONFIGURACIJA PA
  - **konfiguracija** PA je trojka (q, w, γ)
    - stanje,
    - nepročitani dio ulaznog niza i
    - sadržaj stoga (vrh je krajnje lijevi znak niza γ)
  - u ranijem primjeru rad PA pratili smo kroz niz konfiguracija
  - neka je zadan PA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ konfiguracija se mijenja:
    - iz (q, aw, $Z\alpha$)
    - u (p, w, $\beta\alpha$)
    - ako je $\delta(q, a, Z) = \{(p, \beta) , ...\}; a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

Definicija potisnog automata

- KONFIGURACIJA PA
  - pišemo relacije $\succ$:

$$(q, aw, Z\alpha) \underset{M}{\succ} (p, w, \beta\alpha); \quad \delta(q, a, Z) = \{(p, \beta), \ldots\}$$

  - oznaka M se ne koristi ako se zna o kojem je PA riječ
  - u ranijem primjeru imamo:

$$(q_1, 0012100, K) \succ (q_1, 012100, NK) \succ (q_1, 12100, NNK) \succ (q_1, 2100, JNNK)$$
$$\succ (q_2, 100, JNNK) \succ (q_2, 00, NNK) \succ (q_2, 0, NK) \succ (q_2, \varepsilon, K) \succ (q_3, \varepsilon, \varepsilon)$$

  - ili skraćeno:

$$(q_1, 0012100, K) \overset{*}{\succ} (q_3, \varepsilon, \varepsilon)$$

  - te za konkretan broj koraka: $(q_1, 0012100, K) \overset{8}{\succ} (q_3, \varepsilon, \varepsilon)$

Definicija potisnog automata

- PRIHVAĆANJE JEZIKA ZADANIM PA
  - **prihvaćanje jezika** za PA definira se na dva načina
  - PA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$
    prihvaća **prihvatljivim stanjem** jezik:

$$L(M) = \left\{ w \,\middle|\, (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\succ} (p, \varepsilon, \gamma); \qquad p \in F, \gamma \in \Gamma^* \right\}$$

  - PA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$
    prihvaća **praznim stogom** jezik:

$$N(M) = \left\{ w \,\middle|\, (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\succ} (p, \varepsilon, \varepsilon); \qquad p \in Q, \right\}$$

Definicija potisnog automata

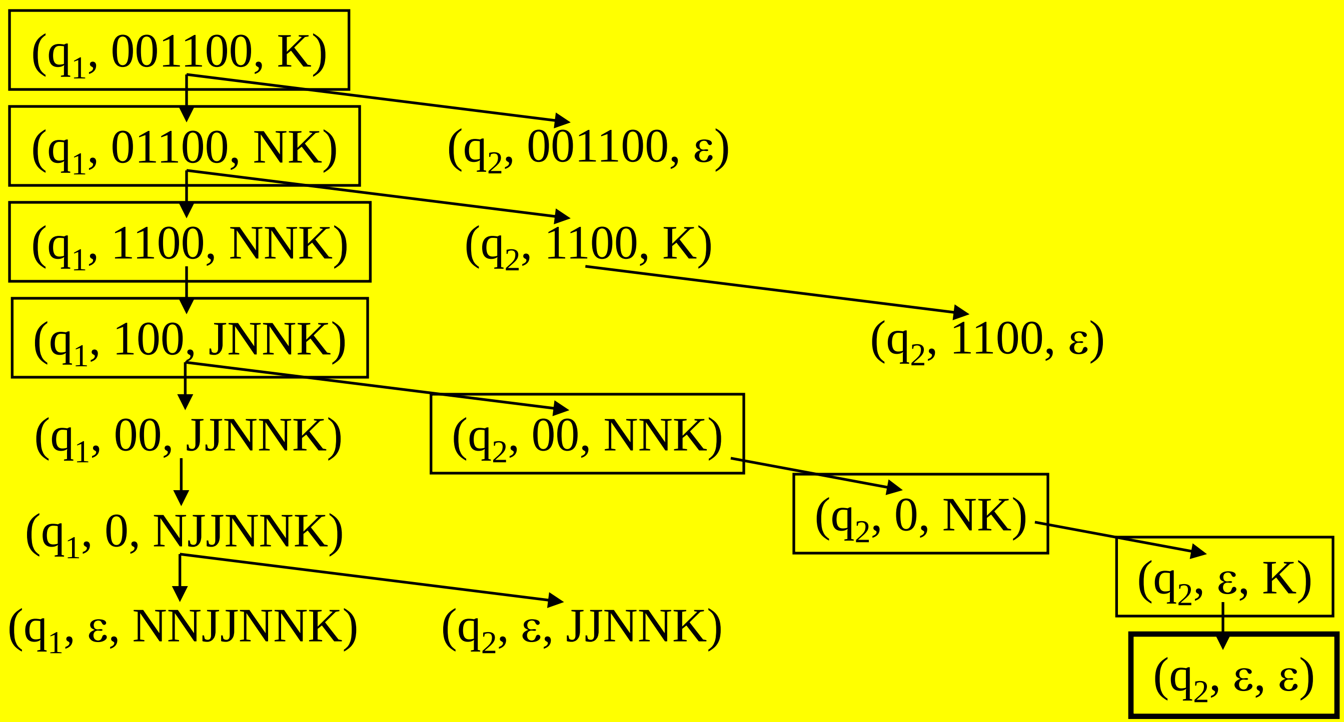
- PRIHVAĆANJE JEZIKA PRIMJER
  - zadan je PA M_2 koji prihvaća jezik $N(M_2) = \{ww^R\}$
    $M_1 = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{N, J, K\}, \delta, q_1, K, \emptyset)$
    - s funkcijom prijelaza
      1) $\delta(q_1, 0, K) = \{(q_1, NK)\}$ 2) $\delta(q_1, 1, K) = \{(q_1, JK)\}$
      3) $\delta(q_1, 0, N) = \{(q_1, NN), (q_2, \varepsilon)\}$ 4) $\delta(q_1, 1, N) = \{(q_1, JN)\}$
      5) $\delta(q_1, 0, J) = \{(q_1, NJ)\}$ 6) $\delta(q_1, 1, J) = \{(q_1, JJ), (q_2, \varepsilon)\}$
      7) $\delta(q_2, 0, N) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ 8) $\delta(q_2, 1, J) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
      9) $\delta(q_1, \varepsilon, K) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
      10) $\delta(q_2, \varepsilon, K) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
  - ovaj automat je **nedeterministički PA**, ili samo PA
  - nasuprot tome, raniji primjeri su **deterministički PA**, ili **DPA**

Definicija potisnog automata

- PRIHVAĆANJE JEZIKA PRIMJER
  - nedetrminizam je je iskazan u dva očita primjera:
    - 3) $\delta(q_1, 0, N) = \{(q_1, NN), (q_2, \varepsilon)\}$
    - 6) $\delta(q_1, 1, J) = \{(q_1, JJ), (q_2, \varepsilon)\}$
  - i dva neočita:
    - 1) $\delta(q_1, 0, K) = \{(q_1, NK)\}$ zajedno s 9) $\delta(q_1, \varepsilon, K) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
    - 2) $\delta(q_1, 1, K) = \{(q_1, JK)\}$ zajedno s 9) $\delta(q_1, \varepsilon, K) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
  - jezik $N(M_2) = \{ww^R\}$ **nije moguće** prihvatiti s DPA
  - nema središnjeg znaka koji omogućuje središnju odluku
  - nederministički PA radi kao NKA, nastavljajući u nizu paralelnih inačica

Definicija potisnog automata

- PRIHVAĆANJE JEZIKA PRIMJER
  - ispitajmo prihvaćanje niza 001100:



Definicija potisnog automata

- DETERMINISTIČKI PA - DPA
  - PA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ jest **deterministički** ako su ispunjena OBA uvjeta:
    - ako je $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset$, tada $\delta(q, a, Z) = \emptyset$
    - u skupu $\delta(q, \varepsilon, Z)$ je najviše jedan element
  - prvi uvjet sprječava izbor između prijelaza i ε prijelaza
  - drugi uvjet garantira jednoznačnost prijelaza
  - PA prihvaća **širu klasu jezika** u odnosu na DPA (NKA prihvaća istu klasu kao i DKA)
  - pod PA podrazumijeva se nedeterministički PA
  - deterministički PA označavamo s DPA

3.2.3. Potisni automat i CFG

- ISTOVJETNOST PA
  - dva PA su istovjetna ako prihvaćaju isti jezik
  - to je kontekstno neovisni jezik
  - PA mogu biti istovjetni bez obzira da li prihvaćaju prihvatljivim stanjem ili praznim stogom

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ ASPA
  - neka PA $M_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$
    - prihvaća jezik prihvatljivim stanjem
  - konstruiramo istovjetni PA M_1 koji
    - prihvaća jezik praznim stogom
  - konstrukcija se zasniva na simulaciji
    - uđe li M_2 u prihvatljivo stanje, M_1 isprazni stog
    - koristimo posebni znak stoga X_0
    - isprazni li M_2 stog bez da uđe u prihvatljivo stanje, M_1 neće prihvatiti niz zbog znaka X_0

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ ASPA
  - konstruiramo PA
    $M_1 = (Q \cup \{q_0', q_e\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta', q_0', X_0, \emptyset)$
  - funkcija prijelaza PA M_1 gradi se:

    1) $\delta'(q_0', \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
    prelazi u početnu konfiguraciju kao M_2

    2) u skup $\delta'(q, a, Z)$ stave se svi elementi od $\delta(q, a, Z)$
    računa se za sve q iz Q, a iz $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$ i za sve Z iz Γ

    3) u skup $\delta'(q, \varepsilon, Z)$, $q \in F$, doda se ε-prijelaz (q_e, ε)
    dakle doda se za sva prihvatljiva stanja

    4) u skup $\delta'(q_e, \varepsilon, Z)$, $q \in F$, doda se ε-prijelaz (q_e, ε)
    time se prazni stog

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ ASPA
  - M_1 i M_2 su istovjetni:
    - M_1 prihvaća niz ako ga prihvati M_2
    - M_2 prihvaća niz ako ga prihvati M_1
  - **M_2 prihvati** niz prihvatljivim stanjem:

$$(q_0, x, Z_0) \underset{M_2}{\overset{*}{\succ}} (q, \varepsilon, A\gamma); \quad q \in F$$

  - M_1 u prvom koraku zbog 1) obavi:

$$\left(q_0{}', x, X_0\right) \underset{M_1}{\succ} (q_0, x, Z_0 X_0)$$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ ASPA
  - nakon toga zbog 2) M_1 radi isto kao i M_2:

$$(q_0, x, Z_0X_0) \underset{M_1}{\overset{*}{\succ}} (q, \varepsilon, A\gamma X_0)$$

  - zbog $q \in F$ korakom 3) M_1 prijeđe u stanje q_e, a s vrha uzme jedan znak:

$$(q, \varepsilon, A\gamma X_0) \underset{M_1}{\succ} (q_e, \varepsilon, \gamma X_0)$$

  - u koraku 4) M_1 isprazni stog:

$$(q_e, \varepsilon, \gamma X_0) \underset{M_1}{\overset{*}{\succ}} (q_e, \varepsilon, \varepsilon)$$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ ASPA
  - dakle prihvati li M_2 niz prihvatljivim stanjem, M_1 će ga prihvatiti praznim stogom:

$$\left(q_0{}', x, X_0\right) \underset{M_1}{\overset{*}{\succ}} \left(q_e, \varepsilon, \varepsilon\right)$$

  - **M_1 prihvati** niz praznim stogom:
    - u koraku 1) je dodao X_0
    - u koraku 2) je simulirao rad M_2
    - koraci 3) i 4) mogući su samo ako je bilo $q \in F$
  - dakle, M_2 niz prihvaća prihvatljivim stanjem, ako i samo ako ga je M_1 prihvatio praznim stogom

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ ASPA PRIMJER
  - zadan je ASPA M_2
    $M_2 = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{N, K\}, \delta, q_1, K, \{q_2\})$
    1) $\delta(q_1,0,K) = \{(q_1,NK)\}$ 2) $\delta(q_1,0,N) = \{(q_1,NN)\}$
    3) $\delta(q_1,1,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$ 4) $\delta(q_2,1,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
  - M_2 prihvatljivim stanjem prihvaća jezik
    $L(M_2) = \{0^n1^m \mid n\geq 1, m\geq 1, m\leq n\}$
  - konstuiramo istovjetni ESPA M_1
    $M_1 = (\{q_1,q_2,q_0',q_e\}, \{0,1\}, \{N,K,X_0\}, \delta', q_0', X_0, \emptyset)$
  - korak (1) dopunjuje funkciju prijelaza:
    0) $\delta'(q_0', \varepsilon, X_0) = \{(q_1, KX_0)\}$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ ASPA PRIMJER
  - korak (2) preuzima sve prijelaze M_2

    1) $\delta'(q_1,0,K) = \{(q_1,NK)\}$ 2) $\delta'(q_1,0,N) = \{(q_1,NN)\}$
    3) $\delta'(q_1,1,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$ 4) $\delta'(q_2,1,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
  - korak (3) dodaje ε-prijelaze u stanje q_e

    5) $\delta'(q_2, \varepsilon,N) = \{(q_e, \varepsilon)\}$
    6) $\delta'(q_2, \varepsilon,K) = \{(q_e, \varepsilon)\}$
    7) $\delta'(q_2, \varepsilon, X_0) = \{(q_e, \varepsilon)\}$
  - korak (4) dodaje ε-prijelaze koji prazne stog

    8) $\delta'(q_e, \varepsilon,N) = \{(q_e, \varepsilon)\}$
    9) $\delta'(q_e, \varepsilon,K) = \{(q_e, \varepsilon)\}$
    10) $\delta'(q_e, \varepsilon, X_0) = \{(q_e, \varepsilon)\}$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ ASPA PRIMJER
  - slijed prijelaza ESPA M_1 za niz 00011 je:
    $(q_0', 00011, X_0) \succ \{(q_1, 00011, KX_0)\}$
    $\succ \{(q_1, 0011, NKX_0)\} \succ \{(q_1, 011, NNKX_0)\}$
    $\succ \{(q_1, 11, NNNKX_0)\} \succ \{(q_2, 1, NNKX_0)\}$
    $\succ \{(q_2, \varepsilon, NKX_0)\} \succ \{(q_e, \varepsilon, KX_0)\} \succ \{(q_e, \varepsilon, X_0)\}$
    $\succ \{(q_e, \varepsilon, \varepsilon)\}$
  - niz je prihvaćen jer je pročitan, a stog je prazan
  - slijed prijelaza ASPA M_2 za niz 00011 je:
    $(q_1, 00011, K) \succ \{(q_1, 0011, NK)\} \succ \{(q_1, 011, NNK)\}$
    $\succ \{(q_1, 11, NNNK)\} \succ \{(q_2, 1, NNK)\} \succ \{(q_2, \varepsilon, NK)\}$
  - niz je prihvaćen jer je pročitan, stanje je prihvatljivo

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ASPA IZ ESPA
  - neka PA $M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$
    - prihvaća jezik praznim stogom
  - konstruiramo istovjetni PA M_2 koji
    - prihvaća jezik prihvatljivim stanjem
  - konstrukcija se zasniva na simulaciji
    - isprazni li M_1 stog, M_2 uđe u prihvatljivo stanje,

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ASPA IZ ESPA
  - konstruiramo PA
    $M_2 = (Q \cup \{q_0', q_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta', q_0', X_0, \{q_f\})$
  - funkcija prijelaza PA M_2 gradi se:

    1) $\delta'(q_0', \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
    prelazi u početnu konfiguraciju kao M_1, X_0 indicira dno stoga

    2) u skup $\delta'(q, a, Z)$ stave se svi elementi od $\delta(q, a, Z)$
    računa se za sve q iz Q, a iz $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$ i za sve Z iz Γ

    3) u skup $\delta'(q, \varepsilon, X_0)$, doda se ε-prijelaz (q_f, ε)
    dakle doda se za sva stanja q iz Q
  - pročita li se X_0 to je znak da je stog prazan
    i PA prelazi u prihvatljivo stanje q_f

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ASPA IZ ESPA
  - M_2 obavi prijelaze:

$$\left(q_0', x, X_0\right) \underset{M_2}{\succ} \left(q_0, x, Z_0 X_0\right) \overset{*}{\underset{M_2}{\succ}} \left(q, \varepsilon, X_0\right) \underset{M_2}{\succ} \left(q_f, \varepsilon, \varepsilon\right)$$

    - prvi prijelaz osigurava početne uvjete
    - dalji niz prijelaza simulira rad zadanog ESPA
    - na kraju prijeđe u prihvatljivo stanje
  - M_2 prihvaća niz x prihvatljivim stanjem
    ako i samo ako M_1 prihvaća niz praznim stogom

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ASPA IZ ESPA PRIMJER
  - PA M_1 prihvaća jezik praznim stogom:
    $M_1 = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{N, J, K\}, \delta, q_1, K, \emptyset)$

    1) $\delta(q_1,0,K) = \{(q_1,NK)\}$
    2) $\delta(q_1,1,K) = \{(q_1,JK)\}$
    3) $\delta(q_1,0,N) = \{(q_1,NN),(q_2,\varepsilon)\}$
    4) $\delta(q_1,1,N) = \{(q_1,JN)\}$
    5) $\delta(q_1,0,J) = \{(q_1,NJ)\}$
    6) $\delta(q_1,1,J) = \{(q_1,JJ),(q_2,\varepsilon)\}$
    7) $\delta(q_2,0,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
    8) $\delta(q_2,1,J) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
    9) $\delta(q_1,\varepsilon,K) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
    10) $\delta(q_2,\varepsilon,K) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
  - M_1 prihvaća jezik ww^R, w je niz $(0+1)^*$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ASPA IZ ESPA PRIMJER
  - konstuiramo istovjetni ASPA M_2
    $M_1 = (\{q_1,q_2,q_0',q_f\}, \{0,1\}, \{N,J,K,X_0\}, \delta', q_0', X_0, \{q_f\})$
  - korak (1) dopunjuje funkciju prijelaza:
    0) $\delta'(q_0', \varepsilon, X_0) = \{(q_1, KX_0)\}$
  - korak (2) preuzima sve prijelaze M_1
    - 1) $\delta'(q_1,0,K) = \{(q_1,NK)\}$
      2) $\delta'(q_1,1,K) = \{(q_1,JK)\}$
      3) $\delta'(q_1,0,N) = \{(q_1,NN),(q_2,\varepsilon)\}$
      4) $\delta'(q_1,1,N) = \{(q_1,JN)\}$
      5) $\delta'(q_1,0,J) = \{(q_1,NJ)\}$
      6) $\delta'(q_1,1,J) = \{(q_1,JJ),(q_2,\varepsilon)\}$
      7) $\delta'(q_2,0,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
      8) $\delta'(q_2,1,J) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
      9) $\delta'(q_1,\varepsilon,K) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
      10) $\delta'(q_2,\varepsilon,K) = \{(q_2,\varepsilon)\}$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ASPA IZ ESPA PRIMJER
  - korak (3) dodaje ε-prijelaze u prihvatljivo stanje q_f

    11) $\delta'(q_1, \varepsilon, X_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$

    12) $\delta'(q_2, \varepsilon, X_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$
  - za niz 001100 slijed prijelaza ASPA M_2 je:

    $(q_0', 001100, X_0) \succ \{(q_1, 001100, KX_0)\}$
    $\succ \{(q_1, 01100, NKX_0)\} \succ \{(q_1, 1100, NNKX_0)\}$
    $\succ \{(q_1, 100, JNNKX_0)\} \succ \{(q_2, 00, NNKX_0)\}$
    $\succ \{(q_2, 0, NKX_0)\} \succ \{(q_2, \varepsilon, KX_0)\} \succ \{(q_2, \varepsilon, X_0)\}$
    $\succ \{(q_f, \varepsilon, \varepsilon)\}$
  - niz je prihvaćen jer je pročitan, stanje je prihvatljivo

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ASPA IZ ESPA PRIMJER
  - slijed prijelaza ESPA M_1 za niz 001100 je:
    $(q_1, 001100, K) \succ \{(q_1, 01100, NK)\}$
    $\succ \{(q_1, 1100, NNK)\} \succ \{(q_1, 100, JNNK)\}$
    $\succ \{(q_2, 00, NNK)\} \succ \{(q_2, 0, NK)\} \succ \{(q_2, \varepsilon, K)\}$
    $\succ \{(q_2, \varepsilon, \varepsilon)\}$
  - niz je prihvaćen jer je pročitan, a stog je prazan

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ CF GRAMATIKE
  - koristimo samo konstrukciju ESPA,
    ASPA dobijemo lako na osnovu istovjetnosti
  - nedeterministički PA, NPA,
    prepozna klasu kontekstno neovisnih jezika
  - za bilo koji CFL L postoji NPA M
    koji ga prihvaća praznim stogom: N(M)=L
  - pretpostavljamo da prazni niz ε nije element jezika L
  - jezik je zadan gramatikom G = (V, T, P, S)
    s produkcijama u standardnom obliku Greibacha
    oblika: $A \to a\alpha$; $A \in V$, $a \in T$, $\alpha \in V^*$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ CF GRAMATIKE
  - Konstruira se PA $M = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q, S, \emptyset)$
    - PA M ima samo jedno stanje q koje je ujedno i početno stanje
    - $\Sigma = T$, skup ulaznih znakova jednak je skupu završnih znakova
    - $\Gamma = V$, skup znakova stoga jednak je skupu nezavršnih znakova
    - početni znak stoga jednak je početnom znaku gramatike S
    - skup prihvatljivih stanja je prazan skup, $F = \emptyset$
    - PA M prihvaća praznim stogom
  - funkcija prijelaza δ definira se:
    - $\delta(q, a, A)$ sadrži (q, γ) samo ako postoji produkcija $A \rightarrow a\gamma$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ CF GRAMATIKE
  - PA M simulira postupak generiranja niza zamjenom krajnjeg lijevog nezavršnog znaka
  - bilo koji generirani međuniz je oblika: $x\alpha$, $x \in T^*$, $\alpha \in V^*$
  - nakon čitanja niza x, na stogu je niz α
  - vrijedi: $(q, x, S) \overset{*}{\underset{M}{\succ}} (q, \varepsilon, \alpha)$ ako i samo ako $S \overset{*}{\underset{G}{\longrightarrow}} x\alpha$
  - ako je α prazan niz vrijedi: $(q, x, S) \overset{*}{\underset{M}{\succ}} (q, \varepsilon, \varepsilon)$

    ako i samo ako $S \overset{*}{\underset{G}{\longrightarrow}} x$
  - PA prihvaća x praznim stogom samo ako G generira x

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA ESPA IZ CFG PRIMJER
  - zadana je gramatika
    $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aAA,\ A \rightarrow aS|bS|a\}, S)$
  - koristeći pravila izgradi se PA M
    $M = (\{q\}, \{a, b\}, \{S, A\}, \delta, q, S, \varnothing)$
    - $\delta(q,a,S) = \{(q,AA)\}$ $\delta(q,a,A) = \{(q,S), (q,\varepsilon)\}$ $\delta(q,b,A) = \{(q,S)\}$
  - gramatika generira abaaaa:

$$S \Rightarrow aAA \Rightarrow abSA \Rightarrow abaAAA \Rightarrow abaaAA \Rightarrow abaaaA \Rightarrow abaaaa$$

  - PA M prihvaća abaaaa praznim stogom:

$$(q, abaaaa, S) \succ (q, baaaa, AA) \succ (q, aaaa, SA)$$
$$\succ (q, aaa, AAA) \succ (q, aa, AA) \succ (q, a, A) \succ (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA CF GRAMATIKE IZ ESPA
  - koristimo samo konstrukciju iz ESPA,
    ASPA pretvorimo prvo u ESPA na osnovu istovjetnosti
  - za zadani PA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$
  - konstruira se gramatika $G = (V, T, P, S)$
    - nezavršni znakovi gramatike označeni su
      $[q,A,p] \in V \quad q,p \in Q,\ A \in \Gamma$
    - u skup nezavršnih znakova dodaje se S

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA CF GRAMATIKE IZ ESPA
  - gradi se skup produkcija

1. za početno stanje q_0, Z_0 i sva stanja iz Q gradi se:
   $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$
   - gradi se n produkcija, n=|Q|
2. ako skup $\delta(q,a,A)$ sadrži $(q_1, B_1B_2...B_m)$ gradi se:
   $[q, A, q_{m+1}] \rightarrow a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3]... [q_m, B_m, q_{m+1}]$
   - za znakove q_2, q_3 ... q_{m+1}
     uzimaju se sve moguće kombinacije svih stanja iz Q
   - za svaku funkciju prijelaza gradi se n^{m-1} produkcija

   ako $\delta(q,a,A)$ sadrži (q_1, ε) gradi se $[q, A, q_1] \rightarrow a$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA CF GRAMATIKE IZ ESPA
  - dobivena gramatika G
    - postupkom zamjene krajnjeg lijevog znaka simulira rad PA M
    - niz nezavršnih znakova u međunizu
      jednak je nizu znakova stoga PA M
    - gramatika počinje generirati x iz [q,A,p] ako i samo ako
      PA M čitanjem x izbriše A i promjeni stanje iz q u p
  - dokaz L(G) = N(M) slijedi iz:

$$[q, A, p] \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} x \quad \text{ako i samo ako} \quad (q, x, A) \underset{M}{\overset{*}{\succ}} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA CFG IZ ESPA PRIMJER
  - zadan je PA M

$$M = (\{q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{N,K\}, \delta, q_1, K, \{\})$$

1) $\delta(q_1,0,K) = \{(q_1,NK)\}$
2) $\delta(q_1,0,N) = \{(q_1,NN)\}$
3) $\delta(q_1,1,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
4) $\delta(q_2,1,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
5) $\delta(q_2,\varepsilon,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$
6) $\delta(q_2,\varepsilon,K) = \{(q_2,\varepsilon)\}$

  - PA M prihvaća jezik $N(M)=\{0^n1^m | n\geq 1, m\geq 1, m\leq n\}$
  - konstruira se gramatika:

$$G = (V, \{0, 1\}, P, S)$$

$V = \{S, [q_1,N,q_1], [q_1,N,q_2], [q_2,N,q_1], [q_2,N,q_2],$
$[q_1,K,q_1], [q_1,K,q_2], [q_2,K,q_1], [q_2,K,q_2], \}$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA CFG IZ ESPA PRIMJER
  - gradnja produkcija
    - počinje iz S,
    - ostale produkcije grade se isključivo za dohvatljive znakove
    - redoslijed gradnje zasniva se na traženju dohvatljivih znakova
  - korak konstrukcije (1) daje

    $S \rightarrow [q_1, K, q_1] \mid [q_1, K, q_2]$
  - nastavlja se (2) sa $[q_1, K, q_1]$ za $\delta(q_1,0,K) = \{(q_1,NK)\}$

    $[q_1, K, q_1] \rightarrow 0\ [q_1, N, q_1]\ [q_1, K, q_1] \mid 0\ [q_1, N, q_2]\ [q_2, K, q_1]$
  - za $[q_1, K, q_2]$ za $\delta(q_1,0,K) = \{(q_1,NK)\}$

    $[q_1, K, q_2] \rightarrow 0\ [q_1, N, q_1]\ [q_1, K, q_2] \mid 0\ [q_1, N, q_2]\ [q_2, K, q_2]$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA CFG IZ ESPA PRIMJER
  - za $[q_1, N, q_1]$ $[q_1, N, q_2]$ i za $\delta(q_1,0,N) = \{(q_1,NN)\}$

    $[q_1, N, q_1] \rightarrow 0\ [q_1, N, q_1]\ [q_1, N, q_1]\ \mid 0\ [q_1, N, q_2]\ [q_2, N, q_1]$

    $[q_1, N, q_2] \rightarrow 0\ [q_1, N, q_1]\ [q_1, N, q_2]\ \mid 0\ [q_1, N, q_2]\ [q_2, N, q_2]$
  - za prijelaze 3-6 u (q_2,ε) piše se:

    3) $\delta(q_1,1,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$ $\quad [q_1, N, q_2] \rightarrow 1$

    4) $\delta(q_2,1,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$ $\quad [q_2, N, q_2] \rightarrow 1$

    5) $\delta(q_2,\varepsilon,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$ $\quad [q_2, N, q_2] \rightarrow \varepsilon$

    6) $\delta(q_2,\varepsilon,K) = \{(q_2,\varepsilon)\}$ $\quad [q_2, K, q_2] \rightarrow \varepsilon$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA CFG IZ ESPA PRIMJER
  - nezavršni znakovi $[q_2, N, q_1]$ i $[q_2, K, q_1]$ su mrtvi jer nema prijelaza iz q_2 u q_1
  - stoga su mrtvi i $[q_1, N, q_1]$ i $[q_1, K, q_1]$
  - nakon odbacivanja produkcija s mrtvim znakovima:

$S \rightarrow [q_1, K, q_2]$

$[q_1, K, q_2] \rightarrow 0\ [q_1, N, q_2]\ [q_2, K, q_2]$

$[q_1, N, q_2] \rightarrow 0\ [q_1, N, q_2]\ [q_2, N, q_2]$

$[q_1, N, q_2] \rightarrow 1$

$[q_2, N, q_2] \rightarrow 1$

$[q_2, N, q_2] \rightarrow \varepsilon$

$[q_2, K, q_2] \rightarrow \varepsilon$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA CFG IZ ESPA PRIMJER
  - odbacimo $[q_2, K, q_2]$ jer ima samo ε-produkciju, pa ostane:

$S \rightarrow [q_1, K, q_2]$

$[q_1, K, q_2] \rightarrow 0\ [q_1, N, q_2]$

$[q_1, N, q_2] \rightarrow 0\ [q_1, N, q_2]\ [q_2, N, q_2]$

$[q_1, N, q_2] \rightarrow 1$

$[q_2, N, q_2] \rightarrow 1$

$[q_2, N, q_2] \rightarrow \varepsilon$

Potisni automat i CFG

- KONSTRUKCIJA CFG IZ ESPA PRIMJER
  - gramatika generira niz 00011 nizom transformacija:

    $S \Rightarrow [q_1, K, q_2] \Rightarrow 0\ [q_1, N, q_2] \Rightarrow 0\ 0\ [q_1, N, q_2]\ [q_2, N, q_2]$

    $\Rightarrow 0\ 0\ 0\ [q_1, N, q_2]\ [q_2, N, q_2]\ [q_2, N, q_2]$

    $\Rightarrow 0\ 0\ 0\ 1\ [q_2, N, q_2]\ [q_2, N, q_2] \Rightarrow 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ [q_2, N, q_2]$

    $\Rightarrow 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ \varepsilon \Rightarrow 0\ 0\ 0\ 1\ 1$
  - PA M prihvaća niz 00011 nizom konfiguracija:

    $(q_1, 00011, K) \succ (q_1, 0011, NK) \succ (q_1, 011, NNK)$

    $\succ (q_1, 11, NNNK) \succ (q_2, 1, NNK) \succ (q_2, \varepsilon, NK)$

    $\succ (q_2, \varepsilon, K) \succ (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$

3.3. Svojstva kontekstno neovisnih jezika

- 3.3.1. Svojstva zatvorenosti kontekstno neovisnih jezika
- 3.3.2. Svojstvo napuhavanja

3.3. Svojstva kontekstno neovisnih jezika

- ISTOVJETNOST KNJ I PA
  - Jezik L je kontekstno neovisan samo ako postoji PA koji ga prihvaća
  - $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ je primjer jezika koji nije KN jezik
  - Kontekstno neovisni jezici su pravi podskup svih jezika:

Skup svih jezika 2^{Σ^*} nad abecedom Σ

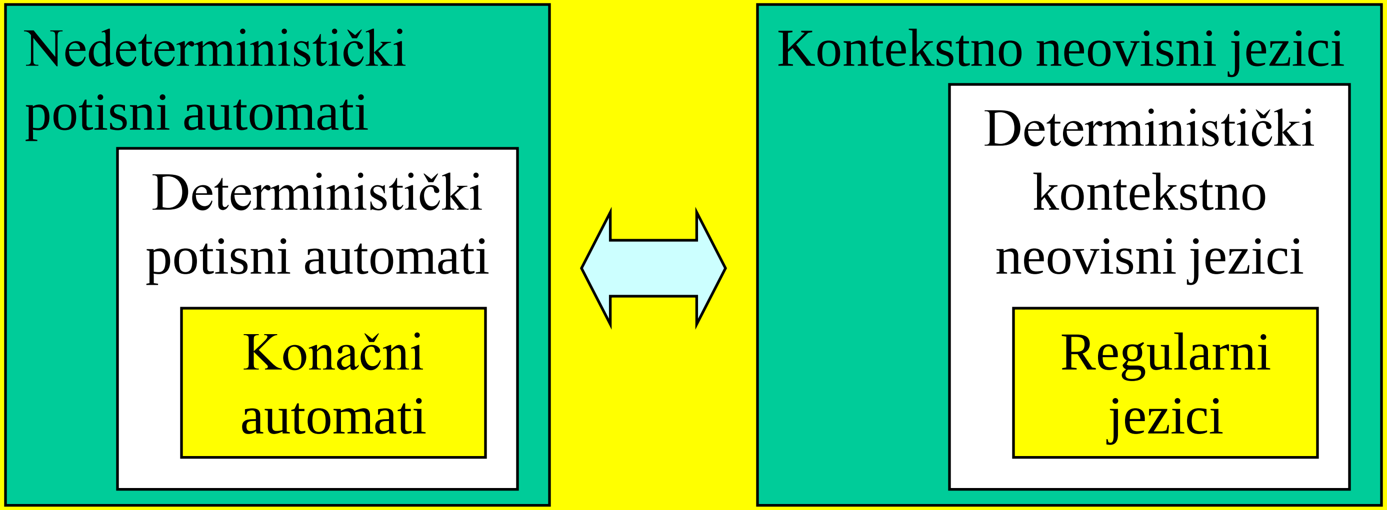
Kontekstno neovisni jezici $KNJ \subset 2^{\Sigma^*}$

Svojstva kontekstno neovisnih jezika

- ISTOVJETNOST KNJ I PA
  - L = $\{ww^R\}$ je primjer jezika koji
    - za koji je moguće izgraditi PA (NPA)
    - za koji **nije** moguće izgraditi DPA
  - dakle postoje jezici
    - koji su kontekstno neovisni
    - ali nisu deterministički kontekstno neovisni
  - deterministički kontekstno neovisni jezici su **pravi podskup** skupa kontekstno neovisnih jezika

Svojstva kontekstno neovisnih jezika

- ISTOVJETNOST KNJ I PA
  - DKA je poseban slučaj DPA koji ne koristi stog
  - stoga su regularni jezici **pravi podskup** skupa determinističkih kontekstno neovisnih jezika
  - definiramo hijerarhiju automata i jezika:



3.3.1. Svojstva zatvorenosti KNJ

- ZATVORENOST KNJ
  - istovjetnost KNG, KNJ i PA koristi se za opis svojstva zatvorenosti KNJ
  - KNG se koristi za dokazivanje da je KNJ zatvoren obzirom na:
    - uniju
    - nadovezivanje
    - Kleene
    - supstituciju
  - PA i DKA se koristi za dokazivanje da je
    - presjek KNJ i RJ jest KNJ

Svojstva zatvorenosti KNJ

- UNIJA
  - unija dvaju KNJ jest KNJ. Neka
    - $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S_1)$ generira $L(G_1)$
    - $G_2 = (V_2, T_2, P_2, S_2)$ generira $L(G_2)$
    - pri čemu je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
  - gramatika $G_3 = (V_3, T_3, P_3, S_3)$ koja generira $L(G_3) = L(G_1) \cup L(G_2)$ konstruira se:
    - $V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{S_3\}$; $S_3 \notin V_1 \cup V_2$
    - $T_3 = T_1 \cup T_2$
    - $P_3 = P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \to S_1 | S_2\}$;

Svojstva zatvorenosti KNJ

- UNIJA - DOKAZ
  - dokažimo prvo da je $L(G_1) \cup L(G_2) \subseteq L(G_3)$
  - obzirom na $P_3 = P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \to S_1 | S_2\}$ vrijedi:
    - pretpostavimo da je $w \in L(G_1)$

      $$S_3 \underset{G_3}{\Longrightarrow} S_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w$$

    - slično za $w \in L(G_2)$

      $$S_3 \underset{G_3}{\Longrightarrow} S_2 \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w$$

  - zaključujemo: $w \in L(G_1) \cup L(G_2) \Rightarrow w \in L(G_3)$

Svojstva zatvorenosti KNJ

- UNIJA - DOKAZ
  - dokažimo drugo da je $L(G_3) \subseteq L(G_1) \cup L(G_2)$
  - obzirom na $P_3 = P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \rightarrow S_1 | S_2\}$ gramatika G_3 generira w na jedan od dva načina:

$$S_3 \underset{G_3}{\Longrightarrow} S_1 \overset{*}{\underset{G_3}{\Longrightarrow}} w \quad \text{ili} \quad S_3 \underset{G_3}{\Longrightarrow} S_2 \overset{*}{\underset{G_3}{\Longrightarrow}} w$$

  - obzirom da je $V_1 \cap V_2 = \varnothing$
    - za S_1 koristimo P_1, za S_2 koristimo P_2
  - zaključujemo: $w \in L(G_3) \Rightarrow w \in L(G_1) \cup L(G_2)$
  - slijedi: $L(G_1) \cup L(G_2) = L(G_3)$

Svojstva zatvorenosti KNJ

- NADOVEZIVANJE
  - nadovezivanje dvaju KNJ jest KNJ. Neka
    - $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S_1)$ generira $L(G_1)$
    - $G_2 = (V_2, T_2, P_2, S_2)$ generira $L(G_2)$
    - pri čemu je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
  - gramatika $G_4 = (V_4, T_4, P_4, S_4)$ koja generira $L(G_4) = L(G_1)L(G_2)$ konstruira se:
    - $V_4 = V_1 \cup V_2 \cup \{S_4\}$; $S_4 \notin V_1 \cup V_2$
    - $T_4 = T_1 \cup T_2$
    - $P_4 = P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \rightarrow S_1S_2\}$;

Svojstva zatvorenosti KNJ

- NADOVEZIVANJE - DOKAZ
  - dokaz je sličan kao za uniju
  - niz generiramo postupkom:

$$S_4 \underset{G_4}{\Longrightarrow} S_1S_2 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w_1S_2 \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w_1w_2$$

  - gdje su $w_1w_2 \in L(G_4)$; $w_1 \in L(G_1)$ i $w_2 \in L(G_2)$

Svojstva zatvorenosti KNJ

- KLEENE
  - KNJ zatvoreni su obzirom na Kleene. Neka
    - $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S_1)$ generira $L(G_1)$
  - gramatika $G_5 = (V_5, T_5, P_5, S_5)$ koja generira $L(G_5) = L(G_1)^*$ konstruira se:
    - $V_5 = V_1 \cup \{S_5\}$; $S_5 \notin V_1$
    - $T_5 = T_1$
    - $P_5 = P_1 \cup \{S_5 \rightarrow S_1 S_5 \mid \varepsilon\}$;

Svojstva zatvorenosti KNJ

- KLEENE - DOKAZ
  - dokaz se zasniva na dva postupka generiranja niza
  - 1. postupak:

$$S_5 \underset{G_5}{\Longrightarrow} S_1 S_5 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w_1 S_5 \underset{G_5}{\Longrightarrow} w_1 S_1 S_5 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w_1 w_1 S_5 \cdots \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w_1^+ S_5 \underset{G_5}{\Longrightarrow} w_1^+$$

gdje su $w_1^+ \in L(G_5)$ i $w_1 \in L(G_1)$

  - 2. postupak:

$$S_5 \underset{G_5}{\Longrightarrow} \varepsilon$$

Svojstva zatvorenosti KNJ

- SUPSTITUCIJA
  - KNJ zatvoreni su obzirom na supstituciju. Neka
    - $G = (V, T, P, S)$ generira $L(G)$
    - svi završni znakovi a_i jezika $L(G)$ zamijene nizovima $L(G_i)$ $1 \leq i \leq k$, $k=|T|$
  - gramatika $G_i = (V_i, T_i, P_i, S_i)$ generira $L(G_i)$
  - konstruira se gramatika G' koja generira nastali jezik L':
    - $V' = V_1 \cup V_2 \cup \ldots V_k$, $V \cap V_i = \emptyset$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, za sve i,j
    - $T' = T_1 \cup T_2 \cup \ldots T_k$
    - $S' = S$
    - $P' = P_1 \cup P_2 \cup \ldots P_k$,
      a to su produkcije od G preuređene tako
      da se bilo koji a_i zamijeni početnim S_i

Svojstva zatvorenosti KNJ

- SUPSTITUCIJA - PRIMJER
  - zadan je jezik L
    u kojem nizovi imaju jednak broj znakova a i b
  - jezik L generira gramatika G = ({S}, {a, b}, P, S)
    $S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$
  - znak a zamijenimo nizovima jezika $L_1 = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}$
  - jezik L_1 generira gramatika $G_1 = (\{S_1\}, \{0, 1\}, P, S_1)$
    $S_1 \rightarrow 0S_11 \mid 01$
  - znak b zamijenimo nizovima $L_2 = \{ww^R \mid w=(0+2)^*\}$
  - jezik L_2 generira gramatika $G_2 = (\{S_2\}, \{0, 2\}, P, S_2)$
    $S_2 \rightarrow 0S_20 \mid 2S_22 \mid \varepsilon$

Svojstva zatvorenosti KNJ

- SUPSTITUCIJA - PRIMJER
  - zamjenom znakova a i b nastaje jezik L’
  - jezik L’ generira gramatika G’
    - $V' = \{S\} \cup \{S_1\} \cup \{S_2\} = \{S, S_1, S_2\}$
    - $T' = \{0, 1\} \cup \{0, 2\}$
    - $S' = S$
    - $P' = \{S_1 \to 0S_11 \mid 01\} \cup \{S_2 \to 0S_20 \mid 2S_22 \mid \varepsilon\}$
      $\cup \{S \to S_1SS_2S \mid S_2SS_1S \mid \varepsilon\}$

Svojstva zatvorenosti KNJ

- PRESJEK
  - presjek dvaju KNJ nije nužno KNJ, odnosno KNJ **nisu zatvoreni** obzirom na presjek
  - $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ nije KNJ, a nastaje kao presjek jezika
    - $L_1 = \{a^i b^i c^j \mid i \geq 1, j \geq 1\}$ i
    - $L_2 = \{a^j b^i c^i \mid i \geq 1, j \geq 1\}$
    - u L_1 proizvoljan je broj znakova c,
      a u L_2 proizvoljan je broj znakova a,
      u L su nizovi sa jednakim brojem znakova a, b i c.
  - pokazat ćemo da su L1 i L2 kontekstno neovisni,
    a kako L nije kontekstno neovisan,
    KNJ nisu zatvoreni obzirom na presjek

Svojstva zatvorenosti KNJ

- PRESJEK
  - jezik $L_1 = \{a^i b^i c^j \mid i \geq 1, j \geq 1\}$ prihvaća PA
    - koji za svaki a sprema na stog A
    - za svaki b skida sa stoga A
    - provjeri da li je najmanje jedan c
  - L_1 generira gramatika $G_1 = (\{S,A,C\}, \{a,b,c\}, P, S)$
    $P = \{S \rightarrow AC,\ A \rightarrow aAb \mid ab,\ C \rightarrow cC \mid c\}$
  - jezik $L_2 = \{a^j b^i c^i \mid i \geq 1, j \geq 1\}$ prihvaća PA
    - provjeri da li je najmanje jedan a
    - koji za svaki b sprema na stog B
    - za svaki c skida sa stoga B
  - L_2 generira gramatika $G_2 = (\{S,A,B\}, \{a,b,c\}, P, S)$
    $P = \{S \rightarrow AB,\ A \rightarrow aA \mid a,\ B \rightarrow bBc \mid bc\}$

Svojstva zatvorenosti KNJ

- KOMPLEMENT
  - komplement KNJ nije KNJ,
    odnosno KNJ **nisu zatvoreni** obzirom na komplement
  - pretpostavimo da je komplement KNJ također KNJ
  - na temelju DeMorganovog teorema vrijedi:

$$L_1 \cap L_2 = (L_1^C \cup L_2^C)^C$$

  - kako presjek ne mora biti KNJ,
    pretpostavka da je komplement KNJ nije točna
  - pa komplement unije (koja je KNJ)
    ne mora biti KNJ

Svojstva zatvorenosti KNJ

- PRESJEK KNJ i RJ
  - presjek KNJ i RJ **jest** KNJ
  - pretpostavimo
    - da KNJ L_1 prihvaća PA $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, q_0, Z_1, F_1)$
    - da RJ L_2 prihvaća DKA $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$
  - moguće je izgraditi PA $M' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q'_0, Z_0, F')$ koji prihvaća jezik $L = L_1 \cap L_2$
    - $Q' = Q_2 \times Q_1$; $q'_0 = [p_0, q_0]$; $F' = F_2 \times F_1$
    - $\delta'([p,q], a, X)$ sadrži $([p',q'], \gamma)$ ako i samo ako vrijedi: za M_2 $\delta_2(p,a)=p'$ i za M_1 $(q', \gamma) \in \delta_1(q, a, X)$
    - ako a jest ε, onda je $p' = p$

Svojstva zatvorenosti KNJ

- PRESJEK KNJ i RJ
  - PA M' simulira rad M_1 i M_2
  - dokaz da je $L = L_1 \cap L_2$ izvodi se indukcijom
  - dokaže se da je:

$$([p_0, q_0], w, Z_0) \overset{i}{\underset{M'}{\succ}} ([p, q], \varepsilon, \gamma)$$

ako i samo ako je:

$$(q_0, w, Z_0) \overset{i}{\underset{M_1}{\succ}} (q, \varepsilon, \gamma) \quad \text{i} \quad \delta_2(p_0, w) = p$$

gdje je $[p, q] \in F'$ ako i samo ako $p \in F_2$ i $q \in F_1$

Svojstva zatvorenosti KNJ

- PRESJEK KNJ i RJ PRIMJER
  - PA $M_1 = (\{q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{N,K\}, \delta_1, q_1, K, \{q_2\})$

    1) $\delta_1(q_1,0,K) = \{(q_1,NK)\}$ 2) $\delta_1(q_1,0,N) = \{(q_1,NN)\}$
    3) $\delta_1(q_1,1,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$ 4) $\delta_1(q_2,1,N) = \{(q_2,\varepsilon)\}$

  - prihvaća jezik $L(M_1) = \{0^n1^m \mid n\geq1, m\geq1, m\leq n\}$ prihvatljivim stanjem q_2
  - DKA $M_2 = (\{p_1, p_2, p_3\}, \{0,1\}, \delta_2, p_1, K, \{p_3\})$

    $\delta_2(p_1,0) = p_1$ $\delta_2(p_1,1) = p_2$
    $\delta_2(p_2,0) = p_2$ $\delta_2(p_2,1) = p_3$
    $\delta_2(p_3,0) = p_3$ $\delta_2(p_3,1) = p_3$

  - prihvaća jezik $L(M_2)$ s barem dva znaka 1

Svojstva zatvorenosti KNJ

- PRESJEK KNJ i RJ PRIMJER
  - Presjek jezika $L(M_1)$ i $L(M_2)$ jest jezik
    $L_3 = L(M_1) \cap L(M_2) = \{0^n1^m \mid n \geq 2, m \geq 2, m \leq n\}$
  - prihvaća ga $M_3 = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q'_0, Z_0, F')$
    - $Q' = \{[p_1, q_1], [p_1, q_2], [p_2, q_1], [p_2, q_2], [p_3, q_1], [p_3, q_2],$
    - $q'_0 = [p_1, q_1]$
    - $F' = [p_3, q_2]$

    1) $\delta'([p_1,q_1],0,K) = \{([p_1,q_1], NK)\}$
    2) $\delta'([p_1,q_1],0,N) = \{([p_1,q_1], NN)\}$
    3) $\delta'([p_1,q_1],1,N) = \{([p_2,q_2], \varepsilon)\}$
    4) $\delta'([p_2,q_2],1,N) = \{([p_3,q_2], \varepsilon)\}$
    5) $\delta'([p_3,q_2],1,N) = \{([p_3,q_2], \varepsilon)\}$

Svojstva zatvorenosti KNJ

- PRESJEK KNJ i RJ PRIMJER
  - PA M_1 prihvaća niz 00011 prihvatljivim stanjem q_2:

    $(q_1,00011, K) \succ (q_1,0011, NK) \succ (q_1,011, NNK)$
    $\succ (q_1,11, NNNK) \succ (q_2,1, NNK) \succ (q_2, \varepsilon, NK); q_2 \in F_1$
  - DKA M_2 također prihvaća niz 00011:

    $\delta(p_1,00011) = \delta(p_1,0011) = \delta(p_1,011) = \delta(p_1,11) =$
    $= \delta(p_2,1) = p_3 ; p_3 \in F_2$

Svojstva zatvorenosti KNJ

- PRESJEK KNJ i RJ PRIMJER
  - PA M' prihvaća niz 00011 prihvatljivim stanjem $[p_3,q_2]$:

    $([p_1,q_1], 00011, K) \succ ([p_1,q_1], 0011, NK)$

    $\succ ([p_1,q_1], 011, NNK) \succ ([p_1,q_1], 11, NNNK)$

    $\succ ([p_2,q_2], 1, NNK) \succ ([p_3,q_2], \varepsilon, NK); [p_3,q_2] \in F'$

3.3.2. Svojstvo napuhavanja

- SVOJSTVO NAPUHAVANJA KNJ
  - slično svojstvu napuhavanja regularnih jezika
  - koristi se za dokazivanje kontekstne neovisnosti jezika
  - primjena je dosta kompleksna
  - zasniva se
    - na **broju čvorova** generativnog stabla
    - na **broju nezavršnih članova** gramatike
  - za dovoljno dugački niz
    - broj unutrašnjih čvorova veći je od kardinalnog broja skupa V
    - znači da je više čvorova označeno istim nezavršnim znakom

Svojstvo napuhavanja

- SVOJSTVO NAPUHAVANJA KNJ
  - neka gramatika g = (V, T, P, S)
    - generira stablo
    - koje ima više čvorova od kardinalnog broja skupa V
  - sigurno postoji put stabla u kojem je jedan nezavršni znak barem na dva mjesta pri dnu stabla
  - za takvo stablo postoji slijed generiranja niza:

$$S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} uAy \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} uvAxy \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} uvwxy$$

  - nezavršni znak A koristi se dva puta u postupku generiranja niza uvwxy

Svojstvo napuhavanja

- SVOJSTVO NAPUHAVANJA KNJ
  - gramatika generira niz oblika:

$$S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} uAy \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} uvAxy \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} uvvAxxy \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} uvvvAxxxy \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \cdots$$

$$\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} uv^iAx^iy \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} uv^iwx^iy$$

  - da je jezik KNJ dokazuje se korištenjem svojstva:
  - neka je L KNJ, postoji konstanta n ovisna o L:
    - ako je za niz z $|z| \geq n$, z pišemo kao uvwxy
    - $|vx| \geq 1$; $|vwx| \leq n$; za $i \geq 1$ niz $uv^iwx^iy \in L$

Svojstvo napuhavanja

- SVOJSTVO NAPUHAVANJA KNJ PRIMJER
  - pokažimo da jezik $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ **nije** KNJ
    - pretpostavimo da je L KNJ
    - izaberimo konstantu n i niz $a^n b^n c^n$
    - vrijedi $|z| \geq n$
    - napišimo niz z kao uvwxy tako da zadovolji uvjete napuhavanja
    - odredimo podnizove v i x u nizu $a^n b^n c^n$ koje je moguće ponoviti
    - zbog uvjeta $|vwx| \leq n$ a i c ne mogu istovremeno biti u v i x
    - ako su u nizovima v i x isključivo znakovi a,
tada u nizu uwy manjka znakova a zbog $|vx| \geq 1$
    - time je pokazano da uwy nije u jeziku L
    - za sličan način detektiraju se nelogičnosti
ako su u v i x znakovi b ili c

Svojstvo napuhavanja

- SVOJSTVO NAPUHAVANJA KNJ PRIMJER
  - za jezik $L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \text{ ili } j=k=l\}$ koji **nije** KNJ
    - uvjeti svojstva napuhavanja nisu dovoljni
    - definiramo strože uvjete za definiranje mjesta podanizova v i x