

Ime i prezime: _____ Dio: 1. 2. 3.
(zaokružite dio gradiva koji odgovarate)

1. dio				2. dio				3. dio			
1	2	3	Σ	1	2	3	Σ	1	2	3	Σ

1. dio

- (30 bodova) Izvedite Maclaurinov red za funkciju $f(x) = \ln(x+1)$ i ocijenite grešku odbacivanja $|R_{n+1}(x)|$ za $0 \leq x \leq 0.5$. Aproximirajte $\ln 1.5$ s prvih pet članova reda i provjerite ocjenu greške.
- (40 bodova) Zamijenite jednadžbe u sustavu

$$x_1 - 5x_2 = -4$$

$$7x_1 - x_2 = 6$$

tako da se dobije strogo dijagonalno dominantna matrica koeficijenata sustava. Zatim pomoću Jacobijeve metode izračunajte približno rješenje na dvije značajne znamenke koristeći početnu aproksimaciju

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (15 bodova) Izvedite broj računskih operacija za rješavanje sustava linearnih jednadžbi reda n Gaussovom eliminacijom.
 - (15 bodova) Opišite brojeve s plivajućim zarezom. Što je relativna pogreška?

Rješenja:

- $$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots,$$

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{0.5^{n+1}}{n+1} \text{ za } x \in [0, 0.5]$$

$$T_5(0.5) = 0.4073, R_6(0.5) \leq 0.0026, |T_5(0.5) - \ln 1.5| = 0.0018$$
- $$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.9959 \\ 0.9943 \end{bmatrix}$$

2. dio

- (35 bodova) Zadana je tablica vrijednosti funkcije $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ kako slijedi:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.2	0.20271
1	0.3	0.30934
2	0.4	0.42279

Interpolacijom odredite približnu vrijednost za $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

2. (35 bodova) Izračunajte QR rastav vektora

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. (30 bodova) Izvedite postupak za računanje koeficijenata interpolacijskog polinoma n -tog reda u standardnoj bazi $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$? Koji se numerički problemi mogu javiti prilikom računanja?

Rješenja:

1. Interpolacijski polinom za funkciju \arctg računa se na osnovi tablice

i	x_i	$g(x_i)$
0	0.20271	0.2
1	0.30934	0.3
2	0.42279	0.4

$$\arctg \frac{1}{3} \approx 0.32170$$

$$2. x = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -0.6 & -0.8 & 0 \\ -0.6 & 0.64 & -0.48 & 0 \\ -0.8 & -0.48 & 0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. dio

1. (40 bodova) Pronađite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{1}{\lambda}$$

metodom polovljenja intervala u intervalu $\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \rangle$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$.

2. (30 bodova) Trapeznom formulom izračunajte integral

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

s točnošću 10^{-3} . Izračunajte i stvarnu pogrešku. (Uputa: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.)

3. (30 bodova) Nađite rješenje Cauchyjevog problema

$$y' = x y^2 + 2, \quad y(0) = 0$$

metodom RK-2 u točki $x = 1$ s korakom 0.5. Zaokružujte na pet decimala.

Rješenja:

1. $n = 4$, $\lambda \approx 0.8672$

2. $n = 6$, $I \approx T_6 = 0.52404$, $I = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 0.5236$, $|I - T_6| = 4.41 \cdot 10^{-4}$

3. $y(1) \approx y_2 = 3.77332$