ODGOVORENA ISPITNA PITANJA ZA PRVI DIO GRADIVA

ALGEBRA SUDOVA

1. Pojam suda i njegove istinosne vrijednosti. Oznake. Osnovne operacije sa sudovima i njihove istinosne tablice.

Sud je svaka rečenica sa smislom (izjavna rečenica) za koju sigurno možemo reći dali je točna ili netočna. Sud još nazivamo iskaz ili izjava.
Djelimo ih na točne i netočne i obično ih označavamo malim slovima abecede, a predstavljaju neke konkretne rečenice. Najjedostavniji sud nazivamo atomarni sud ili atom (analogan prostoj rečenici u govornom jeziku). Od jednog ili više atoma mogu se formirati složene rečenice koje nazivamo složeni iskazi ili iskazne formule i njih označavamo velikim slovom.

Svakom sudu pridružujemo vrijednost T ako je istinit, a vrijednost $\perp$ ako je lažan.
Vrijednost istinitosti suda označavamo sa τ (a) i nazivamo istinitosna vrijednost. Dakle, τ (a) = T znači: sud a je istinit, a τ (a) = $\perp$ znači: sud a je lažan.

Da bi se od atoma formirao složeni iskaz (sud), koriste se tzv. iskazne operacije. Ako se iskazna operacija primjenjuje nad jednim sudom zovemo je unarna operacija, nad dva binarna, nad tri ternarna, a nad n sudova n-arna.

Najvažnije operacije sa sudovima su: negacija (unarna operacija), konjukcija, inkluzivna i ekskluzivna disjunkcija, implikacija, ekvivalencija, Shefer i Lukasiewicz (16 binarnih ukupno) no **osnovne** su samo negacija, konjukcija i obe disjunkcije.

- Negacija: Neka je a sud. Negacija suda a je sud kojeg označavamo sa $\neg$a ("non a", "ne a") Sud $\neg$a je istinit ako je a lažan, a lažan ako je a istinit.
- Sud a $\wedge$ b nazivamo **konjunkcija** sudova a i b. Sud a $\wedge$ b je istinit samo onda ako je istinit sud a i ako je istinit sud b.
- Sud a $\vee$ b nazivamo **disjunkcija** sudova a i b. Sud a $\vee$ b je lažan samo onda ako je lažan sud a i ako je lažan sud b.
- Sud a $\veebar$ b nazivamo **ekskluzivna (isključiva) disjunkcija** sudova a i b. Sud a $\veebar$ b je istinit samo onda ako je jedan od sudova a i b istinit, a drugi lažan.
- Sud a $\Rightarrow$ b ("iz a slijedi b", "a implicira b", "a povlači b") nazivamo **implikacija**. Sud a $\Rightarrow$ b je lažan jedino ako je sud a istinit, a b lažan.
- Sud a $\Leftrightarrow$ b (" a je ekvivalentan sa b") nazivamo **ekvivalencija** (jednakovrijednost). Sud a $\Leftrightarrow$ b je istinit ako su vrijednosti istinitosti sudova a i b jednake.
- **Sheferova operacija** A $\uparrow$ B ("A šefer B") ima značenje "nije istodobno A i B". Po definiciji, ona je lažna onda i samo onda ako su A i B istiniti. $\neg$(A$\wedge$B)
Lukasiewiczeva operacija A $\downarrow$ B ("A lukasijevič B") ima značenje "niti je A niti je B". Po definiciji, ona je istinita onda i samo onda ako su A i B lažni. $\neg$(A$\vee$B)

**Nisam nacrtao tablice jer bi mi oduzelo puno vremena, ali sam zato naveo definicije po kojima je tablice lako nacrtati (:D)*

2. Relacija logike ekvivalencije. Tautologije i teoremi algebre sudova.

Kažemo da su dvije formule P i Q algebre sudova logički ekvivalentne (ili u relaciji ekvivalencije) ako imaju isti broj varijabli i iste tablice istinitosti te ih označavamo $P \equiv Q$.

Od važnog interesa su one formule koje su točne za svaku kombinaciju istinitosti svojih iskaznih slova. Takve formule nazovamo **tautologijama.** Formula koja je pak netočna za svaku kombinaciju istinitosti svojih iskaznih slova naziva se kontradikcija. Tako tautologije općenito označavamo simbolom T, a kontradikciju s $\perp$**.** Ako je neki izraz logike iskaza tautologija pišemo $\models P$ i čitamo: P je tautologija.

TEOREMI ALGEBRE SUDOVA:

1. Zakon Idempotentnosti disjunkcije i konjunkcije: $p \lor p \equiv p$, $p \land p \equiv p$
2. Zakon asocijativnosti za disjunkciju i konjukciju: $(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$

   $(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$
3. Komutativnost (za disjunkciju i konjukciju): $p \lor q \equiv q \lor p$, $p \land q \equiv q \land p$
4. Distributivnost disjunkcije prema konjukciji: $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

   distributivnost konjukcije prema disjunkciji $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
5. De Morganove formule: $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$

   $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$
6. $p \lor \perp \equiv p$, $p \land T \equiv p$ - neutralni element
7. $p \lor T \equiv T$, $p \land \perp \equiv \perp$
8. Zakon isključenja trečeg: $p \lor \neg p \equiv T$ i zakon neproturiječnosti $p \land \neg p \equiv \perp$
9. Pravilo dvostruke negacije: $\neg\neg p \equiv p$

Pravilo apsorbcije ne spada jer se može izvesti pomoću ovih, dok De Morganove formule također se mogu izvesti od ostalih pravila ali se tradicionalno pribrajaju teoremima pomoću kojih se definira algebra sudova.

3. Pravilo rezolucije i njegov dokaz. U čemu je važnost tog pravila?

Pravilo rezolucije je jedna od važnih tautologija koja nije toliko izražena u svakodnevnom životu, ali je važna u računarstvu (umjetna inteligencija). Ovo je pravilo osnovno pravilo pomoću kojeg je realiziran programski jezik prolog.

Pravilo rezolucije glasi: $[(p \lor q) \land (\neg q \lor r)] \Rightarrow (p \lor r)$. Najlakše ga je dokazat preko metode RAA. Postavimo predpostavku da formula nije tautologija:
$\tau((p \lor q) \land (\neg q \lor r)) = T$
$\tau((p \lor r)) = \perp$ → iz ovoga slijedi da je $\tau(p) = \perp$ i $\tau(r) = \perp$

Uvrstimo u gornju: $(p \lor q) \land (\neg q \lor r) \equiv (\perp \lor q) \land (\neg q \lor \perp) \equiv \perp \lor (q \land \neg q) \equiv \perp \lor \perp \equiv \perp$
Imamo kontradikciju što znači da je početna predpostavka netočna te je formula tautologija.

4. Relacija logičke posljedice. Teorem dedukcije. Veza između logičke posljedice i tautologije.

Za formulu G kažemo da je logička posljedica formule F ako i samo ako τ (G) =T jedino ako je τ (F) =T što se piše: F $\models$ G. Odnosno iz točne predpostavke može se logički izvesti jedino točni zaključak i to nazivamo logička posljedica.
Formula F se zove hipoteza (pretpostavka), a formula G kozekvenca (posljedica, zaključak).
Često pišemo F1, F2, ..., Fn $\models$ G što znači da je G točna posljedica točnih predpostavki. To možemo pisati u obliku F1 $\wedge$ F2 $\wedge$... $\wedge$ Fn $\models$ G.

Zaključivanje iz točnih predpostavki naziva se proces dedukcije i važi teorem:

$A \models B \leftrightarrow \models A \Rightarrow B$

Ako je B logička posljedica od A onda je A $\Rightarrow$ B tautologija. (**teorem dedukcije**).
Ovaj teorem pomaže da se pomoću teutologije dokazuje pravilo izvođenja.

5. Navedite osnovna pravila zaključivanja i dajte primjere.

a) $A\Rightarrow B,\ B\Rightarrow C \ \models A\Rightarrow C$	- pravilo tranzitivnosti implikacije (pravilo silogizma)
b) $A,\ A\Rightarrow B \models B$	- MODUS PONENS
c) $A\Rightarrow B,\ \neg B \models \neg A$	- MODUS TOLLENS
d) $A\vee B,\ \neg B \models A$	- Pravilo isključenja trećeg
e) $\neg A \Rightarrow \perp \models A$	- Pravilo svođenja na proturiječnost
f) $A \Rightarrow B \ \models \neg B \Rightarrow \neg A$	- pravilo kontrapozicije
g) $A\vee B,\ \neg B\vee C \ \models A\vee C$	- pravilo rezolucije
h) $A\wedge B \models A,\ A\wedge B \models B$	
i) $A \models A\vee B$	

** predpostavljam da su primjeri zapravo formule ili mozete navesti one riječima*

6. Sistem izvodnica i baza algebre sudova. Navedite primjere.

Sistem izvodnica je skup operacija algebre sudova, pomoću kojih se može prikazati svaki složeni iskaz (formula) algebre sudova. Baza algebre sudova je minimalan skup izvodnica pomoću kojih se može prikazati bilo koja formula algebre sudova. Skup izvodnica je minimalan ako ne postoji podskup skupa izvodnica koji je također skup izvodnica.

Primjer: Može se pokazati da je $\{\neg,\vee,\wedge,\Rightarrow\}$ skup izvodnica jer se bilo koja formula algebre sudova može prikazati pomoću te 4 operacije. Međutim nije baza jer nije minimalan skup. Postoji manji skup $\{\neg,\vee,\wedge\}$ pomoću čijih se operacija može prikazati svaka formula. No ni to nije baza jer postoje jer se skup može smanjiti na dvije operacije: $\{\neg,\vee\}$ ili $\{\neg,\wedge\}$. Ova dva skupa suminimalni skupovi izvodnica pa su zato i baze.

7. **Što su disjunktivna i konjuktivna normalna forma? Kako se te forme određuju iz zadane tablice istinitosti iskazne formule?**

Literar je afirmativni sud p ili negirani sud ¬p. Konjukcija literara naziva se konjukt, a disjunkcija literara disjunkt. Konjukcija nekoliko disjunkta naziva se **normalna konjuktivna forma** ili **kanonska konjuktivna forma.** Disjunkcija nekoliko konjukta naziva se **normalna disjunktivna forma** ili **kanonska disjunktivna forma**. Izvođenjem iskaznih operacija i primjenom teorema algebre sudova, normalne forme mogu se svesti naminimalne normalne forme (minimum operacija i minimum sudova). Taj postupak se naziva minimizacija normalne forme. Svaka formula iskazne algebre može se svesti na disjunktivni i konjuktivni opći oblik te odgovarajući minimalni oblik.

Forme se određuju iz tablice istine na način da se kanonska disjunktivna forma dobije kao disjunkcija svih minterma u kojoj je vrijednost funkcije jednaka T. Odnosno kanonsku konjuktivnu formu kao konjukciju svi maksterma na kojima je vrijednost funkcije ⊥

BOOLEOVA ALGEBRA

1. **Kako definiramo Booleovu algebru? Dokažite teorem apsorpcije. Što je trivijalna algebra?**

Boolova algebra je poopćenje iskazne algebre na jednu teoretsku algebru, pa je njena definicija analogna definiciji iskazne algebre. Boolova algebra je jedna kompleksna matematička struktura $\mathcal{B}$ koju čine jedan apstraktan skup B, dva istaknuta elementa 0 i 1 te 3 operacije { $\overline{\ }$,+, · } . $\mathcal{B}$ = (B, 0, 1, $\overline{\ }$, +, ·).

U svakoj Booleovoj algebri vrijede **pravila apsorpcije:**

$a + a \cdot b = a$ i $a \cdot (a + b) = a$ koja su međusobno dualna.

Vrijedi da je: $a + a \cdot b = a \cdot 1 + a \cdot b = a \cdot (1 + b) = a \cdot 1 = a$

$a \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b = a + a \cdot b = a$

Ako je zadana algebra $\mathcal{A}$ = (A, 0, 1, $\overline{\ }$, +, ·) i $\mathcal{B}$ = (B, 0, 1, $\overline{\ }$, +, ·), pri čemu je B podskup skupa A, onda je algebra $\mathcal{B}$ podalgebra algebre $\mathcal{A}$. Ističe se uvijek **trivijalna** podalgerba svake algebre koja sadrži samo 2 istaknuta elementa: $\mathcal{T}$ = ({0, 1}, 0, 1, $\overline{\ }$, +, ·)

2. **Što je podalgebra? Dajte primjer jedne algebre i njene netrivijalne podalgebre. Što je izomorfizam? Dajte primjer izomorfnih Booleovih algebri.**

Ako je zadana algebra $\mathcal{A}$ = (A, 0, 1, $\overline{\ }$, +, ·) i $\mathcal{B}$ = (B, 0, 1, $\overline{\ }$, +, ·), pri čemu je B podskup skupa A, onda je algebra B **podalgebra** algebre A .

Primjer: Podalgebra Booleove algebre s skupom D = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 } je npr. algebra skupa B = {1, 2, 15, 30}.

Imamo li dvije algebre $\mathcal{A}$ = (A, 0, 1, $\overline{}$, +, ·) i $\mathcal{B}$ = (B, 0*, 1*, $\overline{}$*, ⊕, ⊗) tako da između skupova A i B postoji bijekcija f:A → B takva da su zadovoljena 3 slijedeća svojstva:

f (a · b) = f(a) ⊗ f(b)

f (a + b) = f(a) ⊕ f(b)

$f(\bar{a}) = \overline{f(a)}*$

onda kažemo da su zadane Boolove algebre **izomorfne** i pišemo $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

Izomorfizam je veoma duboka veza između dvije algebre, toliko duboka da 2 različite algebre imaju potpuno ista svojstva. Teoremi koji vrijede u jednoj algebri vrijede i u drugoj algebri i pri tom ni u jednoj od algebri ne postoji teorem kojeg nema ni u drugoj algebri.

Primjer: iskazna algebra $\mathcal{I}$ = (I, ⊥, T, ∧,∨,¬), apstraktna algebra $\mathcal{A}$ = (A, 0, 1, ·, +, $\overline{}$), algebra skupova $\mathcal{S}$ = (S, ∅, u, ∩, ∪, c)

3. **Pojam Booleove funkcije. Koliko ima Booleovih funkcija on n-argumenata? Navedite jednu ternarnu Booleovu funkciju. Disjunktivna i konjuktivna forma Booleove funkcije. Minterm i maxterm.**

Booleova funkcija je svako preslikavanje f :$\{0,1\}^n$ → {0, 1} odnosno Booleova funkcija je bilo koja funkcija n varijabli F : $B^n \to B$, gdje je B = {0, 1}.

Booleovih funkcija od n varijabli ima ukupno 2^{2^n} .

Ternarna Booleova funkcija je ona s 3 varijable.
Primjer: $F(x_1,x_2,x_3) = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$ *(ja se nadam da je ovo točno i potpuno)*

Ako pronađemo sve vrijednosti Booleove funkcije koje su jednake 1 i tim vrijednostima pripadajuće originale (n-torke), zatim od elemenata u pripadajućim n-torkama načinimo umnoške (konjukcije) na način da elementi koji su jednaki 1 dolaze u umnošku afirmativni, a elementi koji su jednaki 0 dolaze u umnošku komplementarni (negirani) dobiti ćemo umnoške koji se nazivaju **mintermi**. Booleova funkcija definira se kao suma minterma i takav oblik nazivamo **disjunktivna normalna forma Booleove funkcije**.

Ako pronađemo sve vrijednosti Booleove funkcije koje su jednake 0 i tim vrijednostima pripadajuće originale (n-torke), zatim od elemenata u pripadajućim n-torkama načinimo sumu (disjunkcije) na način da elementi koji su jednaki 0 dolaze u sumu afirmativni, a elementi koji su jednaki 1 dolaze u sumu komplementarni (negirani) dobiti ćemo sume koje se nazivaju **makstermi**. Booleova funkcija definira se kao umnožak maksterma i takav oblik nazivamo **konjuktivna normalna forma Booleove funkcije**.

4. **Logički sklopovi**

Osnovni logički sklopovi su: a) I (konjunkcija)
b) ILI (disjunkcija)
c) NI
d) NILI
e) Invertor (negacija)

Definicija: Za dva logička sklopa kažemo da su **ekvivalentni sklopovi** ako imaju isti broj ulaznih varijabli, te ako uz ista ulazna stanja daju jednake izlaze.

Pomoću logičkih sklopova mogu se realizirati vrlo složeni logički izrazi koji ovise o velikom broju varijabli.

**ubacite i slike sklopova*

PREDIKATSKI RAČUN

1. **Pojam predikata i njegove interpretacije. Term i elementarna formula. Literal i klauzula.**

Rečenica s varijablama koja postaje sud (iskaz) kad varijable dobiju konkretnu vrijednost naziva se **predikat**. Ako rečenica sadrži 1 varijablu, predikat se zove jednomjesni, sa 2 dvomjesni, s ne n-mjesni.

Interpretacija izraza predikatske logike je uređen par (X, φ), pri čemu je X skup vrijednosti varijabli i konstanti koje se pojavljujuu svim funkcijama i predikatima (X-domena) dok je φ funkcija koja svakoj konstanti, funkciji ili predikatu pridružuje konkretne vrijednosti.

Konkretne vrijednosti varijabli u predikatu nazivaju se konstante. Svaka varijabla ili konstanta naziva se **term**. Ako je f simbol neke funkcije od n varijabli, t_1, t_2, … t_n termi, tada je f(t_1, t_2 … , t_n) također term. Dakle termi su samo oni izrazi koji se mogu dobiti konačnom primjenom definiranih pravila.

Ako je P predikat i t_1, t_2, … t_n termi, tada je P (t_1, t_2, … t_n) **elementarna predikatska formula ili atom** (atomarna formula).
Atom ili njegovu negaciju nazivamo **literari**.
Klauzula je drugi naziv za disjunkt.

2. **Što su kvantifikatori i koliko ih ima? Koje poznajete? Slobodna i vezana varijabla. Predikatska formula I. reda. Otvorena i zatvorena predikatska formula. Primjeri.**

Neka je P (x) predikat i $x \in D$.

- Onda sa ∀x P(x) označavamo sud koji je istinit onda i samo onda ako je sud P(a) istinit za svaki $a \in D$. Simbol ∀ nazivamo **univerzalni kvantifikator**.
- Sa ∃x P(x) označavamo sud koji je istinit onda i samo onda ako postoji barem jedan a $\in D$ za koji je sud P (a) istinit. Simbol ∃ nazivamo **egzistencijalni kvantifikator**.

Poznajemo kvantifikatore ∀ (čita se: za svaki), ∃ (postoji, neki) i ∃! (postoji samo jedan)
Postoje i negirani kvantifikatori ¬∀ (nije/ne za svaki), ¬∃ (ne postoji)

Predikataska formula prvog reda predstavljaju elementarne formule, dvije specifične formule oblika: (∀x) P(x) i (∃x) P(x) te kombinacije prethodnih formula korištenjem logičkih operatora (∨, ∧, ¬).
Koristimo i izraz kvantifikatorski račun prvog reda jer u predikatskim formulama kvantifikatori djeluju samo na varijable. Ako bi djelovali i na predikate, tada bi smo taj račun zvali predikatski račun drugog reda. (∀x)(∃P)P(x).

Ako su u predikatskoj formuli sve varijable pod djelovanjem nekih kvantifikatora, tada tu formulu nazivamo **zatvorena**. Ako u predikatskoj formuli imamo varijablu koja nije pod djelovanjem nekog kvantifikatora, tada tu formulu nazivamo **otvorena**. Varijable u prvom slučaju se nazivaju **vezane**, a u drugom slučaju (ako na njih ne djeluje kvantifikator) nazivaju se **slobodne**.

(∃x) P(x, y) -x je vezan, y je slobodan, otvorena predikatska formula
(∃x) (∀y) P(x, y) -x je vezan, y je vezan, zatvorena predikatska formula

3. **Pojam modela i valjane predikatske formule. Pravilo generalizacije, egzistencije, partikularizacije i izbora.**

Model je interpretacija predikatne logike dakle uređen par (X, φ), pri čemu je X skup vrijednosti varijabli i konstanti koje se pojavljuju u svim funkcijama i predikatima (X-domena) dok je φ funkcija koja svakoj konstanti, funkciji ili predikatu pridružuje konkretne vrijednosti.

Predikatske formule koje su točne pri svakoj interpretaciji nazivamo **valjane predikatske formule**. Izraz predikatske logike može biti netočan pri svakoj interpretaciji. Takvu formulu nazivamo kontradiktornom (neispunjivom, nezadovoljivom). Formula je kontradiktorna ako je njena negacija valjana. Formule mogu biti i nevaljane i nekontradiktorne već jednostavno zadovoljive (ispunjive).

Pravilo generalizacije: A(x) |= (∀x)A(x)
Pravilo egzistencije ili uvođenja egzistencije (UE): F(a) |= (∃x)F(x)
Pravilo izbora ili egzistencijalna instanca (EI): (∃x)F(x) |= F(a)
Pravilo partikularizacije ili univerzalna instanca (UI): (∀x)A(x) |= A(a)

4. **Pojam supstitucije i ispravne supstitucije. Primjer. Unifikacija i unifikator. Primjer.**

Supstitucija je konačan skup zamjena varijabli predikatske formule dozvoljenim termima. To je skup: $\{x_1=t_1, x_2=t_2, \dots x_n=t_n\}$. Za supstituciju u izrazu $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(t)$ kažemo da je x=t **ispravna supstitucija** ako svaka varijabla (ako ih ima) u izrazu t "ne napada" varijablu x (ne nalazi se pod djelovanjem kvantifikatora koji se nalazi prije pojavljivanja varijable x).

Primjeri:
$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(t) \rightarrow t=x \rightarrow (\forall x)A(x) \Rightarrow A(x)$
$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(t) \rightarrow t=f(x, t) \rightarrow (\forall x)A(x) \Rightarrow A(f(x, t))$

Unifikator dva literara L_1 i L_2 je ona supstitucija u literarima koja kao rezultat daje $L_1=L_2$. Za literale koji imaju unifikator kažemo da se mogu unificirati.
Unifikacija dvaju literala je proces pronalaženja unifikatora, odnosno pronalaženje one supstitucije među literalima kojom će dva literala koja su na početku bila različita, nakon supstitucije unifikatorom, postati identična.

Primjeri:
1) P(x, y), P(f(a), b) | x=f(a), y=b 2) P(f(x), y), P(f(a), w) | x=a, y=w

5. **Najvažniji teoremi predikatskog računa. Vrijedi li zakon permutabilnosti za raznorodne kvantifikatore? Primjer.**

1) De Morganove formule za kvantifikatore
$\neg(\forall x)P(x) \equiv (\exists x)\neg P(x)$
$\neg(\exists x)P(x) \equiv (\forall x)\neg P(x)$
2) Komutativnost istovrsnih kvantifikatora
$(\forall x)(\forall y)P(x, y) \equiv (\forall y)(\forall x)P(x, y)$
$(\exists x)(\exists y)P(x, y) \equiv (\exists y)(\exists x)P(x, y)$
3) $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \equiv (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$
$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$
4) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$
$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$
5) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)]$
$(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)Q(x)]$
$(\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$
6) $(\exists y)(\forall x)P(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$

Permutabilnost je srpska riječ za komutativnost, dakle:
Zakon komutativnosti **ne vrijedi** za raznorodne kvantifikatore.

Primjer:
$(\forall x)(\exists y)P(x, y) \equiv (\exists y)(\forall x)P(x, y)$
Postavimo interpretaciju, neka P kaže: x < y (x manji od y)
Čitamo li formulu s lijeve strane: za svaki x postoji y tako da je x manji od y, što je istina jer koliko god x bio veliki uvijek postoji veći broj y i uvjet je ispunjen.
No pročitamo li s desne strane dobijamo: postoji y, tako da je za svaki x, x manji od y. A to je nemoguće, odnosno y bi morao biti u + beskonačnosti. Dakle zakon komutativnosti ne vrijedi za raznorodne kvantifikatore.

6. **Preneks normalna forma. Skolemova normalna forma i njena upotreba. Primjer.**

Za neki izraz kažemo da je u preneks obliku ili **preneks formi** ako se svi kvantifikatori nalaze na početku formule:
$(Q_1x_1)(Q_2x_2)(Q_3x_3) \dots (Q_nx_n)\ P(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$

Važna je činjenica da se svaka predikatska formula može napisati u preneks obliku. Da bismo neki izraz sveli na preneks formu, prvo se (na isti način kao u iskaznoj logici) oslobodimo svih višestrukih negacija, implikacije, ekvivalencije, ↑, ↓ (izvedenih operatora), svodeći formulu samo na izraz ¬, ∧, ∨. Nakon toga, započinjemo sa pomicanjem kvantifikatora prema naprijed koristeći valjane formule.

Za predikatsku formulu kažemo da je u otvorenom obliku ako se svi kvantifikatori nalaze na početku formule (preneks oblik), ali pritom među njima nema egzistencijalnih kvantifikatora. U tom slučaju se univerzalni kvantifikatori zbog ispravne supstitucije mogu izostaviti: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \dots (\forall x_n)\ F(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) \equiv F(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$
Svaka predikatska formula se može zapisati u preneks obliku.

Ako je zadana formula:
$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \dots (\exists x_n)\ F(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$, onda x_n zamijenimo formulom: $f(x_1, x_2, x_3 \dots x_{n-1})$
vrijedi: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \dots (\forall x_{n-1})\ F(x_1, x_2, x_3 \dots f(x_1, x_2, x_3 \dots x_{n-1}))$,
pri čemu se funkcija f naziva **Skolemova** funkcija, a proces uklanjanja egzistencijalnog kvantifikatora naziva se Skolemizacija.

Primjer:

$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)(\forall x_5)F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \equiv$
$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_5)F(x_1, x_2, x_3, f(x_1, x_2, x_3), x_5)$

7. Algoritam dokazivanja valjanosti korištenjem pravila rezolucije. Grafički prikaz.

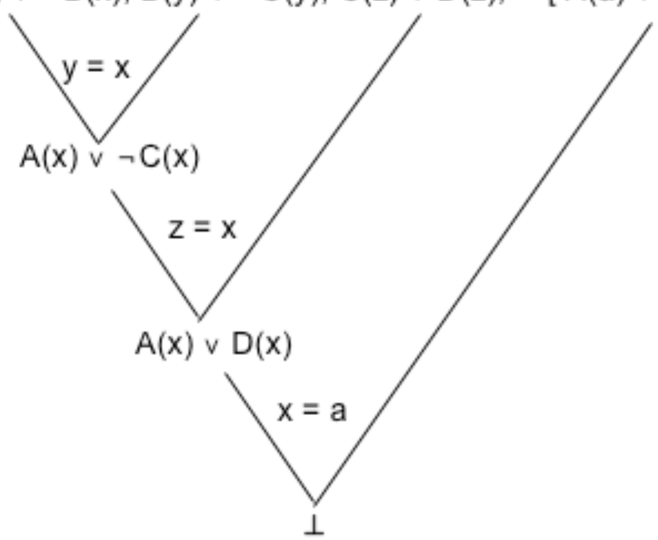
Algoritam: zaključak (kozekvencu) prebacujemo ulijevo (među predpostavke) i negiramo ga, zaključak postaje: $\perp$ → preneks oblik (za svaki izraz) → skolemizacija (uklanjanje egzistencijalnih kvantifikatora, prijelaz u otvoreni oblik) → brišemo univerzalne kvantifikatore → pravilima supstitucije sužavamo izraze što grafički prikazujemo linijama

$(\forall x)[A(x) \vee \neg B(x)],\ (\forall y)[B(y) \vee C(y)],\ (\forall z)[\neg C(z) \vee D(z)] \models (\forall w)[A(w) \vee D(w)]$

Pretpostavimo da nije točno, pa dokažemo kontradikciju! Dakle, izraz $(\forall w)[A(w) \vee D(w)]$ negiramo, dodajemo u hipoteze, a $\perp$ uzimamo da je konzekvenca, pa dokažemo li da je takav iskaz istinit, znači da je istinit i početni!

$(\forall x)[A(x) \vee \neg B(x)],\ (\forall y)[B(y) \vee \neg C(y)],\ (\forall z)[C(z) \vee D(z)],\ (\exists w)\neg[A(w) \vee D(w)] \models \perp$

$A(x) \vee \neg B(x),\ B(y) \vee \neg C(y),\ C(z) \vee D(z),\ \neg[A(a) \vee D(a)] \models \perp$



8. Aristotelovi silogizmi. Značenje simbola A, E, I i O.

Koristeći kvantifikatore $\forall$ i $\exists$ i njihove negacije $\neg\forall$, $\neg\exists$, Aristotel je među prvima proučavao logička zaključivanja u obliku implikacija. Takva zaključivanja nazivaju se silogizmi. Kombiniranjem ova 4 oblika kvantifikatora i ideje implikacije, formirao je 256 različitih silogizama. Od njih je samo 15 valjano. Od svih silogizama odabran je način lakšeg pamćenja pomoću samoglasnika A, E, I, O koji znače:

A – univerzalno - afirmativno	A = svi su, svi jesu ($A \Rightarrow B$)
E – univerzalno - negativni	E = svi nisu ($A \Rightarrow \neg B$)
I – egzistencijalni - afirmativni	I = neki su ($A \wedge B$)
O – egzistencijalno - negativni	O = neki nisu ($A \wedge \neg B$)

Koristeći ove samoglasnike, nekoliko je poznatih silogizama:

BARBARA - $(\forall x)((A(x) \Rightarrow B(x)),\ (\forall x)((B(x) \Rightarrow C(x)) \models (\forall x)((A(x) \Rightarrow C(x))$

DARII - $(\forall x)((B(x) \Rightarrow C(x)),\ (\exists x)((A(x) \wedge B(x)) \models (\exists x)((A(x) \wedge C(x))$

FESTINO - $(\forall x)((B(x) \Rightarrow \neg C(x)),\ (\exists x)((A(x) \wedge B(x)) \models (\exists x)((A(x) \wedge \neg C(x))$