Pismeni ispit iz Diskretne matematike

7. 9. 2001.

1. **(3 boda)** Odrediti elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ iz dvočlane Booleove algebre $\mathbf{B}=\{0,1\}$ tako da jednadžba
$$\prod_{i=1}^{n}(x+a_i) = a_{n+1}$$
ima dva rješenja.

2. **(2 boda)** Bez uporabe računala naći ostatak pri dijeljenju broja 73^{73} s 38.

3. **(4 boda)** Brojevi se u heksadecimalnom brojevnom sustavu zapisuju pomoću znamenaka $0, 1, \ldots, 9$ i slova A, B, C, D, E, F. Koliko ima parnih brojeva koji su u heksadecimalnom zapisu sedmeroznamenkasti, takvih da je slova ukupno više nego brojaka?

4. **(3 boda)** Ako skupovi A, B, i C imaju svojstvo
$$|A \cup B| + |A \cup C| = 2|A| + |B| + |C|,$$
dokazati da su onda skupovi A i $B \cup C$ disjunktni.

5. **(3 boda)** Naći funkciju izvodnicu za niz
$$a_n = \frac{1}{n^2+4n+3}, \qquad n \geq 0.$$

6. **(2 boda)** U grupi dvanaestih korijena jedinice C_{12} odrediti njen primitivni element kojim je generirana, te generator njene podgrupe reda 4.

7. **(3 boda)** Dokazati da je funkcija
$$f(a,b) = |b-a|, \qquad a, b \in \mathbf{N_0}$$
izračunljiva.

Primjedba Dozvoljeno je korištenje, a zabranjeno posuđivanje džepnih računala.

Rezultati:

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

19. 9. 2001.

1. **(3 boda)** Naći Booleove funkcije F_0, F_1, F_2 i F_3 koje imaju svaka 3 ulaza A, B i C te zadovoljavaju jednadžbu

$$(AB)_2 + (BC)_2 + (CA)_2 = (F_3F_2F_1F_0)_2 \,.$$

2. **(2 boda)** Neka su p i q prosti brojevi veći od 2. Može li broj $pq+1$ biti prost? Obrazložiti tvrdnju.

3. **(2 boda)** Unutar neke tvornice djeluju 3 pogona u kojima slijedom radi 45, 35 i 25 ljudi. O prazniku rada dodjeljuje se 10 ravnopravnih nagrada najuspješnijim radnicima. Na koliko je to načina moguće učiniti ako u svakom pogonu barem 2 radnika moraju biti nagrađena?

4. **(3 boda)** Dokazati da u svakom skupu od 7 brojeva postoje dva, čiji je zbroj ili razlika djeljiva s 10.

5. **(4 boda)** Zadana je determinanta n-tog reda s

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Naći rekurzivnu relaciju drugog reda koju Δ_n zadovoljava, te potom izračunati Δ_{150}.

6. **(3 boda)** Naći sve izometrije paralelograma te ih zapisati kao permutacije njegovih vrhova. Dokazati da te permutacije čine grupu s obzirom na standardnu operaciju komponiranja. Ima li ta grupa netrivijalnih podgrupa? Ako da, nađi ih.

7. **(3 boda)** U polju $GF(8)$ koje je konstruirano pomoću ireducibilnog polinoma t^3+t+1 naći aditivni i multiplikativni inverz elementa $t+1$.

Primjedba Dozvoljeno je korištenje, a zabranjeno posuđivanje džepnih računala.

Rezultati: četvrtak 11.00

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

26. 9. 2001.

1. **(2 boda)** Dokazati da je tročlani skup logičkih operacija koji čine d junkcija, ekvivalencija i ekskluzivna disjunkcija sustav izvodnica algebre s dova.

2. **(3 boda)** Odrediti Booleovu funkciju F tako da za trobitni ulaz (xyz) k predstavlja znamenke binarnog broja $(xyz)_2$ vrijedi:

$$F(x,y,z) = 1 \iff (xyz)_2 \equiv 3 (\text{mod } 4) \vee (xyz)_2 = 0\,.$$

3. **(3 boda)** Koliko na standardnoj šahovskoj ploči ima pravokutnika koji sastoje od točno 6 polja?

4. **(4 boda)** Na koliko se načina 15 različitih predmeta može rasporediti u različitih kutija tako da barem jedna kutija ostane prazna?

5. **(3 boda)** Naći nehomogenu linearnu rekurzivnu relaciju s konstantn koeficijentima čije je opće rješenje dano izrazom

$$a_n = 3 \cdot 2^n + A + Bn + C\cos\frac{3n\pi}{4} + D\sin\frac{3n\pi}{4}\,.$$

6. **(3 boda)** U polju $GF(8)$ koje je konstruirano pomoću ireducibilnog pc noma t^3+t^2+1 naći aditivni i multiplikativni inverz elementa $t+1$.

7. **(2 boda)** Dokazati da je zbroj dviju $SNBR$-izračunljivih funkcija SNB izračunljiva.

Primjedba Dozvoljeno je korištenje, a zabranjeno posuđivanje džepnih rač nala.

Rezultati: četvrtak u 10 sati

USMENI ODMAH.

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

7. 11. 2001.

1. **(2 boda)** Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementi proizvoljne apstraktne Booleove algebre. Dokazati da je tada

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

2. **(2 boda)** Ima li prim brojeva oblika

$$27^n - 6 \cdot 9^n + 12 \cdot 3^n - 8\,, \quad n > 1\,?$$

3. **(4 boda)** Zadana je povećana kvadratna šahovska ploča dimenzije 64×64 s ukupno 64^2 kvadratića. Koliko na njoj ima pravokutnika koji se sastoje od 50 kvadratića?

4. **(3 boda)** Naći funkciju izvodnicu za niz $\{a_n\}$ zadan rekurzivno s

$$a_n = 7a_{n-2} - 11a_{n-3} + \frac{1}{n!}, \quad a_1 = 1, \ a_2 = 4, \ a_3 = 5\,.$$

5. **(3 boda)** Naći rekurzivnu relaciju čije je opće rješenje dano sa

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{\alpha}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{\alpha}}{2}\right)^n\right], \quad n \geq 0, \ \alpha > 0\,.$$

6. **(3 boda)** U cikličkoj grupi dvanaestih korijena jedinice odrediti sve elemente reda 12, 6, 4, 3 i 2.

7. **(3 boda)** Dokazati da je funkcija $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ dana s

$$g(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$$

SNBR-izračunljiva.

Primjedba Dozvoljeno je korištenje, a zabranjeno posuđivanje džepnih računala.

Rezultati: četvrtak u 12 sati.

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

28. 1. 2002.

1. **(2 boda)** Odrediti sve elemente X iz proizvoljne apstraktne Booleove algebre, tako da za sve A i B iz dotične algebre bude ispunjena jednakost

$$(A+\overline{X})(\overline{A}+\overline{X})+\overline{X+A}+\overline{X+\overline{A}}=B\,.$$

2. **(2 boda)** Postoji li prirodni broj m, takav da njegova 4. potencija pri dijeljenju s 3 dade kvocijent koji je prim broj i ostatak 1?

3. **(2 boda)** Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^n koji ne sadrže znamenku 2?

4. **(3 boda)** Na ispitu je bilo 5 zadataka, a položili su studenti koji su točno riješili barem 2 zadatka. Ispitu su pristupila 32 studenta, a položilo ih je 25%. Dokazati da među tih 5 zadataka postoji barem jedan koji je točno riješilo najviše 12 studenata.

5. **(3 boda)** Naći opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_{n+1}=2a_{n-1}-a_{n-2}-5\,.$$

6. **(4 boda)** Je li skup

$$P=\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbf{R}\right\}$$

polje uz standardne operacije zbrajanja i množenja matrica?

7. **(4 boda)** Dokazati da je funkcija $f:\mathbf{N_0}^2\to\mathbf{N_0}$ definirana s $f(x,y)=2xy$ SNBR-izračunljiva.

Primjedba Dozvoljeno je korištenje, a zabranjeno posuđivanje džepnih računala.

Rezultati:

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

15. 2. 2002.

1. **(2 boda)** Zadana je binarna logička operacija $\star$ sljedećom tablicom istinitosti:

A	B	$A \star B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Dokazati da je skup $\{\neg, \star\}$ sustav izvodnica algebre sudova.

2. **(3 boda)** Odrediti Booleovu funkciju G koja za ulazne varijable A, B, C, D, E i F na izlazu daje 1 ako je broj

$$n = (ABCDEF)_2 + (FABCDE)_2$$

djeljiv s 8, a 0 ako nije. Minimizirati broj operacija od dobivene funkcije G.

3. **(3 boda)** Odrediti najmanji prirodni broj koji ima točno 15 neparnih djelitelja.

4. **(4 boda)** Promatramo uređene trojke brojeva (x, y, z), pri čemu su $x, y, z \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Formiramo nizove takvih trojki, na način da je prvi član niza uvijek $a_1 = (1, 1, 1)$, zadnji $a_m = (10, 10, 10)$, a niz tvorimo tako da uvijek točno jednu od komponenata prethodnog člana niza uvećamo za 1. Koliko ima različitih, na ovaj način formiranih nizova koji ne sadržavaju elemente $b = (2, 3, 4)$ ni $(4, 8, 5)$?

5. **(3 boda)** Odrediti funkciju izvodnicu za niz

$$a_n = n^2 \binom{100}{n}, \qquad , n \geq 1 .$$

6. **(2 boda)** U simetričnoj grupi S_8 dani su elementi $a = (1, 3, 5)(2, 6, 8)(4, 7)$, te $b = (1, 8)(2, 7)(3, 6)(4, 5)$. Izračunati $a^{-3}b^3$.

7. **(3 boda)** Da li u polju $(\mathbf{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ jednadžba $x^2 = 0$ ima rješenje različito od nule u tom polju? Dokazati tvrdnju.

Primjedba Dozvoljeno je korištenje, a zabranjeno posuđivanje džepnih računala.

Rezultati:

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

3. 4. 2002.

1. **(2 boda)** U apstraktnoj Booleovoj algebri minimizirati izraz

$$(A + \overline{BC})(A + \overline{B})(\overline{\overline{A}B} + C\overline{B}A)\,.$$

2. **(2 boda)** Odrediti zadnje dvije znamenke broja 199^{199}.

3. **(3 boda)** Koliko ima n-teroznamenkastih brojeva s točno dvije neparne znamenke?

4. **(4 boda)** Na koliko se načina 20 različitih predmeta može rasporediti u 7 različitih kutija tako da barem jedna kutija ostane prazna?

5. **(3 boda)** U prostoru je zadano 9 točaka s cjelobrojnim koordinatama. Dokazati da postoji barem jedna spojnica nekih dviju od tih 9 točaka čije polovište također ima cjelobrojne koordinate.

6. **(2 boda)** Dokazati da za Fibonaccijeve brojeve vrijedi identitet

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots F_{2n-1} = F_{2n}\,.$$

7. **(4 boda)** Dokazati da skup svih uređenih parova realnih brojeva $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ čini grupu s obzirom na množenje $\star$ zadano sa

$$(a, b) \star (c, d) = (a + 3^b c, b + d)\,.$$

Je li $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ njena podgrupa? Obrazložiti.

Primjedba Dozvoljeno je korištenje, a zabranjeno posuđivanje džepnih računala.

Rezultati: danas u 14 sati

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

28.6.2002.

1. (2 boda) Odredi Booleovu $F(a, b, c, d)$ funkciju koja će za četverobitni ulaz a, b, c, d na izlazu dati 1 ako je

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

regularna matrica, a 0 inače.

2. (3 boda) Pokažite da je $\varphi(n) \equiv 0 (mod\ 2)$ za $n \geq 3$ gdje je $\varphi(n)$ Eulerova funkcija.

3. (2 boda) Zadan je pravilni mnogokut sa 20 stranica kod kojega je 7 crvenih vrhova, 4 bijela vrha, 9 žutih vrhova. Koliko ima trokutova sa jednobojnim vrhovima?

4. (4 boda) U kutiji imamo 5 plavih, 2 crvene i 3 bijele loptice. Na koliko načina možemo izvući kuglice ako:
a) kuglice ne vraćamo nakon izvlačenja, a stajemo sa izvlačenjem kada izvučemo plavu kuglicu,
b) kuglice vraćamo nakon izvlačenja, a postupak
izvlačenja zaustavljamo kada izvučemo plavu ili kada izvedemo 6 izvlačenja.

5. (3 boda) Nadjite funkciju izvodnicu niza (a_n) koji zadovoljava rekurziju

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + \frac{2}{n+5}, \ a_0 = a_1 = 0.$$

6. (2 boda) Nadjite sve netrivijalne podgrupe grupe S_3.

7. (4 boda) Da li je funkcija zadana formulom $f(x, y) = x^2 + 3y + |x - y|$ gdje su x, y prirodni brojevi SNBR-izračunjiva? Ako jeste napišite program koji ju računa.

Zabranjena je uporaba priručnika.

Rezultati su

Pismeni ispit iz Diskretne matematike

18.9.2002

1. (2 boda) Nadjite disjunktivnu normalnu formu Booleove funkcije $F(A, B, C, D)$ ako je konjunktivna normalna forma zadana izrazom

$$F(A, B, C, D) = (\overline{A}+B+C+D)(A+\overline{B}+C+D)(A+B+\overline{C}+D)(A+B+C+\overline{D}).$$

2. (3 boda) Nadjite ostatak pri dijeljenju broja 3^{721} sa 7.

3. (3 boda) Neka je $f : \{n \mid n \in \mathbf{N},\ 10 \leq n \leq 99\} \to \{1, 2, ..., 18\}$ funkcija koja element domene preslika u sumu njegovih znamenki u dekadskom zapisu. Da li je funkcija f surjekcija? Da li je bijekcija?

4. (4 boda) U razredu glazbene škole je r učenika. a učenika svira trubu i gitaru, b učenika svira gitaru i klavir, c učenika svira klavir i trubu, a nitko ne svira sva tri instrumenta. Ako ukupno d učenika svira klavir, e trubu, koliko učenika svira trubu ili gitaru (barem jedan od ta dva navedena instrumenta)?

5. (2 boda) Niz (a_n) je zadan rekurzivnom relacijom

$$a_{n+1} = 2a_n - \sqrt{3},\ n \geq 1,$$
$$a_1 = 1.$$

Nadjite sumu prvih n članova toga niza.

6. (3 boda) Da li je $(\mathbf{Z}, *)$ grupa gdje je operacije $*$ zadana formulom $a * b = 3ab$?

7. (3 boda) Nad poljem $GF(8)$ koje je konstruirano pomoću ireducibilnog polinoma $q(t) = t^3 + t + 1$ riješiti jednadžbu

$$(x + t + 1)(x + t^2 + t) = 1.$$

Zabranjena je uporaba priručnika.

Rezultati su