1. ELEMENTI OPŠTE ALGEBRE

1.1. POJMOVI I OZNAKE MATEMATIČKE LOGIKE

Zbog preciznosti i kratkoće u izlaganju, u matematici se koriste neki pojmovi i oznake matematičke logike.

Definicija 1. *Pod sudom se podrazumeva iskaz koji ima smisla i za koji važe sledeća dva principa:*

1° (*Princip isključenja trećeg*). *Svaki sud ima bar jednu od osobina istinitosti ili neistinitosti, tj. ne postoji sud koji ne bi bio ni istinit ni neistinit;*

2° (*Princip kontradikcije*). *Svaki sud ima najviše jednu od osobina istinitosti ili neistinitosti, tj. nema suda koji bi bio i istinit i neistinit.*

Ovo je opisna, intuitivna, definicija suda.

Prema ovoj definiciji, dakle, svaki sud ima samo jednu vrednost istinitosti: sud je ili istinit ili neistinit.

Definicija 2. *U matematici se istinit sud zove teorema ili stav.*

Vrednost istinitog suda označava se sa $\top$ ili sa 1, a neistinitog $\perp$ ili 0.

Među elementima $\top$ i $\perp$, odnosno 1 i 0, definišu se operacije od kojih su osnovne: konjunkcija ($\wedge$), disjunkcija ($\vee$), negacija ($'$), implikacija ($\Rightarrow$), ekvivalencija ($\Leftrightarrow$).

1.1.1. KONJUNKCIJA, DISJUNKCIJA, NEGACIJA

Ako su p i q dva suda, sud »p i q« zovemo konjunkcija (ili proizvod) sudova p i q i označavamo ga $p \wedge q$.

Taj sud je istinit jedino ako su oba suda p i q istiniti.

Navedena činjenica pregledno se predstavlja tablicom istinitosti[1]

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Ako su p i q dva suda, pod sudom »p ili q« podrazumeva se tvrđenje da vredi bilo sud p bilo sud q, uz mogućnost da istovremeno vrede oba.

Ovaj složeni sud zove se disjunkcija (inkluzivna) (ili zbir) sudova p i q i označava se sa $p \vee q$.

[1] Da bi se pravila razlika između suda i njegove vrednosti istinitosti, ponekad se sudovi označavaju velikim slovima, a odgovarajuće vrednosti istinitosti malim slovima.

Disjunkcija $p \vee q$ je istinita ako je istinit bar jedan od sudova p i q. U ovom slučaju tablica vrednosti istinitosti glasi:

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Negacija suda p označava se sa p'. Sud p' je istinit ako i samo ako je sud p neistinit, i neistinit ako i samo ako je sud p istinit.

Odgovarajuća tablica vrednosti istinitosti glasi:

p	p'
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Sud »p ili q, ali ne oba« zove se ekskluzivna disjunkcija. Ovaj sud se izražava pomoću

$$(p \wedge q') \vee (q \wedge p')$$

i obeležava se sa $p \underline{\vee} q$.

Ova činjenica, predstavljena pomoću tablice vrednosti istinitosti, glasi:

p	q	$p \underline{\vee} q$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

1.1.2. IMPLIKACIJA

Ako su p i q sudovi, sud: »Ako p tada q« zovemo implikacija suda q sa sudom p, ili implikacija od suda p na sud q, i označavamo ga $p \Rightarrow q$.

Sud »Ako p tada q« ima isto značenje kao:

(1) p je dovoljan uslov za q;
(2) q je potreban uslov za p;
(3) iz p sleduje q;
(4) q je posledica suda p.

Implikacija $p \Rightarrow q$ je neistinita ako i samo ako je p istinito a q neistinito, tj. $(\top \Rightarrow \perp) = \perp$.

Inače je

$$(\top \Rightarrow \top) = (\perp \Rightarrow \top) = (\perp \Rightarrow \perp) = \top.$$

Ovo se pregledno prikazuje shemom koja se naziva tablica vrednosti istinitosti za operaciju implikacija:

p	q	$p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

$q \not\Rightarrow p$ znači da iz q ne proističe p.

PRIMER 1. $a = -1 \Rightarrow a^2 = 1$. $\quad a^2 = 1 \not\Rightarrow a = -1$.

PRIMER 2. $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$. $\quad a < 0 \Rightarrow a^2 > 0$. $\quad a^2 > 0 \not\Rightarrow a > 0$. $\quad a^2 > 0 \not\Rightarrow a < 0$.

1.1.3. EKVIVALENCIJA

Ako su p i q sudovi, sud: »Ako p, tada q i ako q tada p« zove se ekvivalencija suda p sa sudom q i označava se $p \Leftrightarrow q$.

Sud $p \Leftrightarrow q$ isto znači kao:

(1) p je ako i samo ako je q;

(2) p je potreban i dovoljan uslov za q.

Prema tome, ekvivalencija je složen sud $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ i njena tablica vrednosti istinitosti glasi:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

PRIMER 1. $a>0 \Rightarrow \frac{1}{a}>0$; $\frac{1}{a}>0 \Rightarrow a>0$; $a>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}>0$.

PRIMER 2. $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0 \wedge b=0 \quad (a,\ b \in \mathbf{R})$.

$a^2 \neq 1 \Leftrightarrow a \neq 1 \wedge a \neq -1 \quad (a \in \mathbf{C})$.

1.1.4. KVANTIFIKATORI

Iskaz »za svako a važi $a=a$« simbolizuje se

$(\forall a),\ a=a$ ili $\forall a,\ a=a$.

Iskaz »za svako a i b iz skupa $\mathbf{C}$ kompleksnih brojeva važi[1]

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$«

simbolizuje se

$(\forall a),\ (\forall b) \quad (a,\ b \in \mathbf{C}) \Rightarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Iskaz »postoji bar jedno x iz skupa $\mathbf{C}$ kompleksnih brojeva takvo da je

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C})$«

simbolizuje se

$(\forall a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C})(\exists x \in \mathbf{C}) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$.

Iskaz »za svako x postoji bar jedno y takvo da je $x<y$« simbolizuje se

$(\forall x)(\exists y) \quad x<y$.

Oznake $\forall$ (svaki, svi) i $\exists$ (postoji bar jedno) zovu se kvantifikatori (kvantori).

1.1.5. TAUTOLOGIJA, KONTRADIKCIJA

Definicija 1. *Svaki složeni sud dobijen primenom logičkih operacija* $\wedge$, $\vee$, $'$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ *na neke polazne sudove naziva se formula.*

Formule su, na primer, $p \Rightarrow (q \wedge r)$, $(p \vee q)' \Leftrightarrow (r \Rightarrow (s \wedge t))$.

[1] O značenju $\in$ videti 1.2.

Definicija 2. *Formula koja za sve vrednosti istinitosti sudova koji ulaze u tu formulu dobija vrednost* $\top$ *naziva se tautologija.*

Primeri nekih važnijih tautologija dati su u 1.1.6.

Definicija 3. *Formula koja za sve vrednosti istinitosti sudova koji ulaze u tu formulu dobija vrednost* $\bot$ *naziva se kontradikcija.*

PRIMER 1. $p \wedge p'$ je kontradikcija.

1.1.6. OSOBINE LOGIČKIH SIMBOLA

Stav 1. *Konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija su komutativne:*

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$; $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$; $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$.

Stav 2. *Konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija su asocijativne:*

$((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$; $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$;

$((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$.

Stav 3. *Konjunkcija i disjunkcija su idempotentne:* $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$; $(p \vee p) \Leftrightarrow p$.

Stav 4. *Konjunkcija i disjunkcija su distributivne:*

$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge (p \wedge r))$; $(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee (p \vee r))$.

Stav 5. *Konjunkcija je distributivna prema disjunkciji i obratno:*

$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$; $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$.

Stav 6. *Konjunkcija je apsorptivna prema disjunkciji i obratno:*

$(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$; $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$.

Stav 7. *Negacija je involutivna:*

$(p')' \Leftrightarrow p$.

Stav 8. (DE MORGANOVI zakoni): $(p \vee q)' \Leftrightarrow p' \wedge q'$; $(p \wedge q)' \Leftrightarrow p' \vee q'$.

Stav 9. $\top$ *je neutralni element za konjunkciju i ekvivalenciju, a* $\bot$ *za disjunkciju:*

$(p \wedge \top) \Leftrightarrow (\top \wedge p) \Leftrightarrow p$; $(p \Leftrightarrow \top) \Leftrightarrow (\top \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p$;

$(p \vee \bot) \Leftrightarrow (\bot \vee p) \Leftrightarrow p$.

Stav 10. $\top$ *je nula-element za disjunkciju, a* $\bot$ *za konjunkciju:*

$(p \vee \top) \Leftrightarrow (\top \vee p) \Leftrightarrow \top$; $(p \wedge \bot) \Leftrightarrow (\bot \wedge p) \Leftrightarrow \bot$.

Navedene osobine mogu se dokazati, na primer, pomoću tablica vrednosti istinitosti. Primera radi, dokazaćemo, na ovaj način, stav 4 i stav 7.

***Dokaz stava* 5.** Odgovarajuća tablica vrednosti istinitosti je

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

Kako su peta i osma kolona u ovoj tablici identične, zaključujemo da je tačna prva osobina navedena u stavu 5.

***Dokaz stava* 8.** Dokaz neposredno sleduje iz jednakosti 6. i 10. kolone, odnosno 8. i 9. kolone u sledećoj tablici istinitosti:

p	q	p'	q'	$p\vee q$	$(p\vee q)'$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)'$	$p'\vee q'$	$p'\wedge q'$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$

PRIMER 1. $(p\wedge q)\vee(p'\wedge q') \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

Tablica vrednosti istinitosti je

p	q	p'	q'	$p\wedge q$	$p'\wedge q'$	$(p\wedge q)\vee(p'\wedge q')$	$p\Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$

Kako su poslednje dve kolone jednake, data ekvivalencija je dokazana.

PRIMER 2. $(p \Rightarrow (q\wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q)\wedge(p \Rightarrow r))$.

Tablica vrednosti istinitosti je:

p	q	r	$q\wedge r$	$p\Rightarrow(q\wedge r)$	$p\Rightarrow q$	$p\Rightarrow r$	$(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Kako su u ovoj tablici peta i osma kolona istovetne, ekvivalencija je tačna.

1.2. POJAM SKUPA

Skup (množina, mnoštvo, klasa, kolekcija) i njegovi elementi (članovi, tačke, objekti) su osnovni pojmovi matematike.

Ako skup S sačinjavaju elementi $x, y, z, \ldots$, označava se $S=\{x, y, z, \ldots\}$.

Sa $S=\{x \mid P(x)\}$ ili $S=\{x : P(x)\}$ označava se skup svih elemenata x koji imaju osobinu P.

Ako je S skup, tada $x \in S$ označava da je x element skupa S ili da x pripada skupu S.

Negacija ovog iskaza označava se $x \notin S$ ili $x \operatorname{non} \in S$.

Za neke skupove, koji su u čestoj upotrebi, usvojene su sledeće oznake:

N skup svih prirodnih brojeva,

Z skup svih celih brojeva,

Q skup svih racionalnih brojeva,

R skup svih realnih brojeva,

R$^+$ skup svih pozitivnih brojeva,

I skup svih iracionalnih brojeva,

C skup svih kompleksnih brojeva,

(a, b) otvoren interval u **R** ili kraće interval,

$[a, b]$ zatvoren interval u **R** ili kraće segment.

Skup ne zavisi od poretka kojim su dati njegovi elementi. Tako, na primer, skupovi $\{1, 2, 3\}$ i $\{2, 1, 3\}$ su jednaki. Skupovi $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 2, 3, 3\}$ takođe su jednaki.

Ako je n prirodan broj, skup $S=\{x_1, \ldots, x_n\}$ od n elemenata $x_1, \ldots, x_n$ je konačan. Skup je beskonačan ako broj njegovih elemenata nije konačan.

1.3. INKLUZIJA

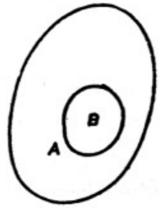
Definicija 1. *Za skup B kaže se da je sadržan u skupu A, tj. da je B podskup ili deo skupa A, ako je svaki element skupa B takođe element skupa A, tj. ako iz $x\in B$ sleduje $x\in A$.*

Činjenica da je B deo skupa A označava se

$$B\subset A \text{ ili } A\supset B.$$

Znak $\subset$ odnosno $\supset$ zove se znak inkluzije.

Na slici 1.3.1 su shematski prikazani skupovi A i B takvi da je $B\subset A$ (ovaj način prikazivanja skupova, koji se poglavito upotrebljava u srednjoj školi, poznat je kao VENNOVI ili EULER-VENNOVI dijagrami. Treba primetiti da ovo ne predstavlja sredstvo za dokazivanje stavova iz teorije skupova već samo shematsku ilustraciju).



Sl. 1.3.1.

Logičkim simbolima relacija $B\subset A$ se piše u obliku

$$B\subset A \Leftrightarrow (\forall x)(x\in B \Rightarrow x\in A).$$

Definicija 2. *Skupovi A i B su jednaki ako je $B\subset A$ i $A\subset B$.*

Prema tome, za dva skupa A i B kaže se da su jednaki ako i samo ako se sastoje od istih elemenata. Ako su A i B jednaki skupovi, to se simbolizuje $A=B$. Ako oni nisu jednaki, označava se $A\neq B$.

Simbolima matematičke logike jednakost skupova A i B izražava se sa

$$B\subset A\wedge A\subset B \Leftrightarrow A=B.$$

Činjenicu da A nije jednako B označavamo $A\neq B$.

Definicija 3. *Ako je $B \subset A$ i $A \neq B$, kaže se da je B pravi podskup skupa A.*

Inkluzija ima osobine:

$A \subset A$ (refleksivnost)

$(C \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow C \subset A$ (tranzitivnost).

Definicija 4. *Partitivni skup skupa M, u oznaci $P(M)$, je skup svih podskupova skupa M.*

1.4. UNIJA, PRESEK I DIFERENCIJA SKUPOVA

1.4.1. UNIJA SKUPOVA

Definicija 1. *Ako su A i B dva skupa, pod unijom (zbirom) skupova A i B (u oznaci $A \cup B$) podrazumeva se skup svih elemenata koji se nalaze bar u jednom od skupova A i B.*

Unija skupova A i B označava se takođe $A+B$.

Pomoću logičkih simbola definicija unije skupova A i B glasi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

ili

$$(\forall x) \quad (x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

Stav 1. *Unija ima osobine:*

$A \cup A = A$ *(idempotentnost)*,

$A \cup B = B \cup A$ *(komutativnost)*,

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(asocijativnost)*,

$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C)$ *(distributivnost)*,

$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ *(apsorptivnost)*,

gde su A, B, C tri ma koja skupa.

Dokaz. Da unija ima osobinu idempotentnosti zaključujemo iz sledećeg:

$$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A,$$

pri čemu smo iskoristili prvu od ekvivalencija iz stava 3 u 1.1.6.

Komutativnost sleduje iz komutativnosti disjunkcije (stav 1 u 1.1.6)

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A.$$

Osobina asocijativnosti unije posledica je sledećih ekvivalencija

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C), \end{aligned}$$

pri čemu smo primenili drugu od ekvivalencija iz stava 2 u 1.1.6.

Slično ovome, osobina distributivnosti sleduje na osnovu sledećih ekvivalencija

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cup C) \vee (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cup (B \cup C). \end{aligned}$$

Ovde je primenjena prva od ekvivalencija iz stava 4 u 1.1.6.

Dokažimo na kraju osobinu apsorptivnosti. Najpre imamo

(1) $\quad x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$

Kako je (videti 1.3)

(2) $\quad A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

iz (1) i (2) sleduje da važi implikacija $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.

Navedene osobine idempotentnosti i distributivnosti operacije $\cup$ u odnosu na samu sebe nemaju ni sabiranje ni množenje u običnoj aritmetici.

Zajednički rezultat izraza $(A \cup B) \cup C$ i $A \cup (B \cup C)$ označava se $A \cup B \cup C$.

Unija skupova $A_1, \ldots, A_n$ skraćeno se obeležava sa $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

1.4.2. PRESEK SKUPOVA

Definicija 1. *Presek (proizvod, zajednički deo) datih skupova A i B (u oznaci $A \cap B$) je skup svih elemenata koji u isti mah pripadaju i skupu A i skupu B.*

Presek skupova A i B označava se takođe $A \cdot B$ ili AB.

Pomoću logičkih simbola definicija preseka skupova A i B glasi:

$$(\forall x) \quad (x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B),$$

ili

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definicija 2. *Za dva skupa kaže se da su disjunktni ako nemaju zajedničkih elemenata.*

Ovo navodi na uvođenje pojma skupa bez elemenata. To je prazan (pust) skup. Obeležava se $\emptyset$ ili ν (vakuum) ili Λ.

Simbolička definicija praznog skupa glasi:

$$A = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x) \quad x \notin A, \quad \text{ili} \quad \emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

Prema tome, jednakost $A \cap B = \emptyset$ izražava da je skup $A \cap B$ prazan, tj. da su A i B disjunktni.

Za svaki skup A i za skup $\emptyset$ važi

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup \emptyset = A.$$

Da skupovi A i B nisu disjunktni, označava se sa

$$(\exists x)\quad x\in A\cap B, \quad \text{ili} \quad A\cap B\neq\emptyset.$$

Stav 1. *Presek ima osobine*

$$A\cap A=A \quad (\textit{idempotentnost}),$$

$$A\cap B=B\cap A \quad (\textit{komutativnost}),$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \quad (\textit{asocijativnost}),$$

$$(A\cap B)\cap C=(A\cap C)\cap(B\cap C) \quad (\textit{distributivnost}),$$

$$A\subset B \Rightarrow A\cap B=A \quad (\textit{apsorptivnost}),$$

gde su A, B, C tri ma koja skupa.

Dokaz stava 1 može se izvesti analogno dokazu stava 1 iz 1.4.1.

Navedene osobine idempotentnosti i distributivnosti operacije $\cap$ u odnosu na samu sebe nemaju ni sabiranje ni množenje u običnoj aritmetici.

Zajednički rezultat izraza $(A\cap B)\cap C$ i $A\cap(B\cap C)$ označava se $A\cap B\cap C$.

Presek skupova $A_1, \ldots, A_n$ skraćeno se obeležava sa $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Bez teškoće dokazuje se sledeći stav:

Stav 2. *Po dve i dve od tri relacije*

$$A\subset B, \quad A\cap B=A, \quad A\cup B=B$$

su ekvivalentne, naime

$$A\subset B \Leftrightarrow (A\cap B=A) \Leftrightarrow (A\cup B=B).$$

1.4.3. DISTRIBUTIVNOST $\cup$ PREMA $\cap$, I OBRATNO

Stav 1. *Operacije unija i presek distributivne su jedna prema drugoj, tj. za ma kakve skupove A, B, C je*

(1) $\quad (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$

(2) $\quad (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$

Dokaz. Dokazaćemo jednakost (1). Ona je posledica sledećih ekvivalencija:

$$\begin{aligned} x\in(A\cup B)\cap C &\Leftrightarrow x\in A\cup B\wedge x\in C\\ &\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge x\in C\\ &\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in C)\vee(x\in B\wedge x\in C)\\ &\Leftrightarrow x\in A\cap C\vee x\in B\cap C\\ &\Leftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C).\end{aligned}$$

Ovde je primenjena prva od ekvivalencija iz stava 4 u 1.1.6.

Analogno se dokazuje i jednakost (2):

$$\begin{aligned} x\in(A\cap B)\cup C &\Leftrightarrow x\in A\cup B\wedge x\in C\\ &\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee x\in C\\ &\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in B\vee x\in C)\\ &\Leftrightarrow x\in A\cup C\wedge x\in B\cup C\\ &\Leftrightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C).\end{aligned}$$

Jednakosti (1) i (2) mogu se dokazati i pomoću tablica istinitosti. Primera radi, dokazaćemo na taj način jednakost (2).

Ako x pripada skupu, označićemo sa $\top$, a ako ne pripada sa $\perp$. Tada je tablica vrednosti istinitosti

$x\in A$	$x\in B$	$x\in C$	$x\in A\cap B$	$x\in (A\cap B)\cup C$	$x\in A\cup C$	$x\in B\cup C$	$x\in (A\cup C)\cap(B\cup C)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Kako su peta i osma kolona identične, dokazali smo ekvivalenciju

$$(\forall x)\quad x\in(A\cap B)\cup C \Leftrightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

1.4.4. DIFERENCIJA DVA SKUPA

Definicija 1. *Pod diferencijom (razlikom) dva skupa A i B (u oznaci $A\backslash B$) podrazumeva se skup svih elemenata skupa A koji ne pripadaju skupu B.*

Diferencija skupova A i B, pomoću ranije uvedenih simbola, izražava se

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\},$$

tj.

$$(\forall x)\quad x\in A\backslash B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B.$$

Definicija 2. *Unija skupova $A\backslash B$ i $B\backslash A$ naziva se simetrična diferencija skupova A i B i označava $A\triangle B$, tj.*

$$\begin{aligned} A\triangle B&=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)\\ &=\{x \mid x\in A \veebar x\in B\}.\end{aligned}$$

1.4.5. KOMPLEMENT SKUPA

Ako je $A\subset I$ i $\emptyset$ prazan skup, važe relacije

$$\emptyset\subset A\subset I, \quad \emptyset\cap A=\emptyset, \quad \emptyset\cup A=A, \quad I\cap A=A, \quad I\cup A=I.$$

Druga i treća od ovih relacija već su bile navedene u 1.4.2.

Definicija 1. *Ako je $A\subset I$, skup*

$$A'=\{x \mid x\notin A\wedge x\in I\}$$

je komplement skupa A u odnosu na skup I.

Ovoj definiciji ekvivalentna je

Definicija 2. *Komplement skupa A u odnosu na skup I je skup A' takav da je*

$$A' = I \setminus A.$$

Diferenciju skupova A i B (A, $B \subset I$) možemo pomoću preseka i komplementa izraziti na sledeći način:

$$A \setminus B = A \cap B'.$$

Bez teškoće se dokazuje sledeći stav:

Stav 1. *Važe jednakosti*

$$A \cap A' = \varnothing, \quad A \cup A' = I \quad (A \subset I).$$

Dokazaćemo sada DE MORGANov stav:

Stav 2. *Važe dualne relacije*

(1) $\quad (A \cap B)' = A' \cup B'$,

(2) $\quad (A \cup B)' = A' \cap B'$.

Dokaz. Dokažimo prvo jednakost (1):

$$x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in A' \vee x \in B'$$
$$\Leftrightarrow x \in (A' \cup B').$$

Jednakost (2) dokazaćemo pomoću tablice istinitosti:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in (A \cup B)$	$x \in (A \cup B)'$	$x \in A'$	$x \in B'$	$x \in (A' \cap B')$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Na sličan način mogu se dokazati stavovi:

Stav 3. *Važe sledeće ekvivalencije*

$$A = B \Leftrightarrow (A \cap B = A \wedge A \cup B = A)$$
$$\Leftrightarrow (A \cap B' = \varnothing \wedge A' \cup B = I)$$
$$\Leftrightarrow (A \cup B = A \wedge A' \cup B = I).$$

Stav 4. *Komplement skupa ima osobinu involutivnosti, tj. za svaki skup A važi*

$$(A')' = A.$$

1.4.6. APSORPTIVNOST

Stav 1. *Za ma koje skupove A i B važe apsorptivne jednakosti*

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

Dokaz. Pre svega je

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B),$$

pa možemo staviti

$$D = A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B).$$

Dalje je

$$A \cup D = A \cup (A \cup (A \cap B)) = A \cup (A \cap B) = D,$$
$$A \cap D = A \cap (A \cap (A \cup B)) = A \cap (A \cup B) = D.$$

Iz ovih jednakosti sleduje $A = D$.

Primetimo da se stav može takođe dokazati pomoću tablica istinitosti.

1.5. PARTITIVNI SKUP

Definicija 1. *Partitivni skup I, u oznaci $P(I)$, je skup svih podskupova skupa I.*

Kako je prazan skup podskup svakog skupa i kako je svaki skup podskup samog sebe, iz gornje definicije sleduje da $\varnothing \in P(I)$ i $I \in P(I)$.

Ako skup I ima n elemenata, partitivni skup će imati 2^n elemenata. Zaista, u partitivni skup ulazi prazan skup, zatim svi jednočlani skupovi kojih ima $\binom{n}{1}$ (broj kombinacija od n elemenata prve klase-videti (5.3)), zatim svi dvočlani skupovi kojih ima $\binom{n}{2}, \ldots$, i najzad svi n-to člani skupovi kojih ima $\binom{n}{n}$. Prema tome, partitivni skup ima $1 + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$ elemenata.

PRIMER 1. Ako je $I = \{a, b, c\}$, partitivni skup će biti

$$P(I) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, I\}.$$

Ovaj skup ima $2^3 = 8$ elemenata.

Sledeći stav dokazuje se bez teškoće.

Stav 1. *Ako su A, $B \in P(I)$, tada su A', $A \cup B$, $A \cap B$ takođe elementi skupa $P(I)$.*

Ako se u razmatranjima pojavljuje samo skup I i njegovi podskupovi ponekad se skup I naziva univerzalni skup.

Primetimo da univerzalni skup u različitim slučajevima može biti različit, ali da u toku jedne određene diskusije ne može da se menja.

1.6. UREĐENI PAR

Simboli $\{a, b\}$ i $\{b, a\}$ označavaju isti skup od dva elementa a i b. Uvešćemo sada pojam uređenog para čija je prva projekcija (komponenta) a i druga projekcija (komponenta) b. Taj par označavaćemo (a, b) ili $\langle a, b \rangle$. Smatraćemo da je (a, b) različito od (b, a), osim ako je $a = b$.

Parovi (a, b) i (c, d) jednaki su ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

Pojam uređenog para može se definisati na razne načine. Usvojićemo sledeću definiciju:

Definicija 1. *Uređeni par elemenata a i b, u oznaci (a, b), je*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Stav 1. $(a, b)=(c, d) \Leftrightarrow (a=c) \wedge (b=d)$.

Dokaz. Neka je $(a, b)=(c, d)$, tj. $\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\}$. Da bi ova dva skupa bila jednaka, njihovi elementi moraju biti isti, tj. $\{a\}=\{c\}$ i $\{a, b\}=\{c, d\}$ ili $\{a\}=\{c, d\}$ i $\{c\}=\{a, b\}$.

U prvom slučaju dobijamo iz prve jednakosti $a=c$, pa druga jednakost postaje $\{a, b\}=\{a, d\}$, odakle je $b=d$.

Prva jednakost u drugom slučaju može da nastupi ako i samo ako je $c=d$ i tada mora biti i $a=c=d$. Iz druge jednakosti dobijamo $c=a=b$, pa ovaj slučaj može da nastupi ako i samo ako je $a=b=c=d$.

Ovim smo dokazali implikaciju

$$(a, b)=(c, d) \Rightarrow (a=c) \wedge (b=d).$$

Da važi i obrnuta implikacija proverava se bez teškoće. Ovim je stav 1 dokazan.

Definicija 2. *Uređena trojka (a, b, c) elemenata a, b, c definiše se pomoću jednakosti*

$$(a, b, c)=((a, b), c).$$

Analogno stavu 1 dokazuje se:

Stav 2. $(a_1, b_1, c_1)=(a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow (a_1=a_2) \wedge (b_1=b_2) \wedge (c_1=c_2)$.

Slično se definiše uređena n-torka $(a_1, \ldots, a_n)$, koja se označava i $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Uređeni par i uopšte uređena n-torka mogu imati jednake elemente. Na primer, (a, b, a) i (a, a, b) su dve različite uređene trojke osim ako je $a=b$, dok su skupovi $\{a, b, a\}$, $\{a, a, b\}$ i $\{a, b\}$ jednaki.

1.7. DEKARTOV PROIZVOD

Definicija 1. *Dekartov ili kombinovani proizvod dva skupa X i Y je skup Z čiji su elementi uređeni parovi sa prvom komponentom iz skupa X i drugom iz skupa Y, tj.*

$$Z=X \times Y=\{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Dekartov proizvod nije u opštem slučaju komutativna operacija, tj.

$$X \times Y \neq Y \times X.$$

PRIMER 1. Dokažimo da važi implikacija

$$A \times B \subset X \times Y \Rightarrow A \subset X \wedge B \subset Y,$$

gde su A i B neprazni skupovi. Neka skup B sadrži element b. Tada za svako $a \in A$ je $(a, b) \in A \times B$, pa je i $(a, b) \in X \times Y$. Prema tome, imamo $(a, b)=(x, y)$ za jedno $x \in X$ i jedno $y \in Y$, pa mora biti $a=x$ za jedno $x \in X$, dakle $A \subset X$. Slično se dokazuje da je $B \subset Y$.

Definicija Dekartovog proizvoda analogno se prenosi i na slučajeve kada imamo više od dva skupa. Tako je Dekartov proizvod tri skupa X, Y, Z definisan sa

$$X \times Y \times Z=\{(x, y, z) \mid x \in X \wedge y \in Y \wedge z \in Z\},$$

a Dekartov proizvod od n skupova $X_1, \ldots, X_n$ je

$$X_1 \times \cdots \times X_n=\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n\}.$$

Dekartovi proizvodi $X \times X$, $X \times X \times X, \ldots$ obeležavaju se redom sa $X^2, X^3, \ldots$

1.8. BINARNA RELACIJA

Definicija 1. *Ako su X i Y dva skupa, binarna relacija u skupu $X \times Y$ je svaki njegov podskup.*

Ako je $X=Y$, relacija u skupu $X \times Y=X \times X=X^2$ zove se i relacija u skupu X.

PRIMER 1. Neka je $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$. Tada je

$$X \times Y=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}.$$

U posmatranom skupu $X \times Y$ relacije su, na primer,

(a) $\{(1, 1), (3, 2), (4, 1)\}$;

(b) $\{(3, 1), (4, 2), (3, 3), (4, 1)\}$.

Takođe su relacije u skupu $X \times Y$

(c) $\{(x, y) \mid x=y\}=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;

(d) $\{(x, y) \mid x<y\}=\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$;

(e) $\{(x, y) \mid y-x=2\}=\{(1, 3)\}$;

(f) $\{(x, y) \mid y=x^2+3\}=\emptyset$;

(g) $\{(x, y) \mid y \mid x\}=\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2)\}$;

(h) $\{(x, y) \mid y \geq x^2\}=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

Definicija 2. *Neka je ρ binarna relacija u skupu $X \times Y$. Kažemo da je x u relaciji ρ sa y (u oznaci $x \rho y$) ako je $(x, y) \in \rho$.*

Dakle, $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow x \rho y$.

Slično je $(x, y) \notin \rho \Leftrightarrow x \operatorname{non} \rho\, y$.

PRIMER 2. Relacije $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ su binarne relacije u skupu realnih brojeva **R**.

Definicija 3. *Neka je ρ binarna relacija u skupu S. Relacija ρ je refleksivna ako je*

$$(\forall a \in S) \quad a \rho a.$$

Definicija 4. *Neka je ρ binarna relacija u skupu S. Relacija ρ je simetrična ako je*

$$(\forall a, b \in S) \quad a \rho b \Rightarrow b \rho a.$$

Definicija 5. *Neka je ρ binarna relacija u skupu S. Relacija ρ je antisimetrična ako je*

$$(\forall a, b \in S) \quad a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a=b.$$

Definicija 6. *Neka je ρ binarna relacija u skupu S. Relacija ρ je tranzitivna ako je*

$$(\forall a, b, c \in S) \quad a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c.$$

Opštije od definicije 1 daje se sledeća:

Definicija 7. *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ dati skupovi. Relacija dužine n u skupu $X_1 \times \cdots \times X_n$ je svaki podskup skupa $X_1 \times \cdots \times X_n$.*

1.9. RELACIJA EKVIVALENTNOSTI

Definicija 1. *Neka je S proizvoljan skup i ρ jedna relacija u skupu S. Relacija ρ zove se relacija ekvivalentnosti ako je relacija:* 1° *refleksivna,* 2° *simetrična i* 3° *tranzitivna.*

PRIMER 1. Jednakost je relacija ekvivalentnosti jer je ova relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.