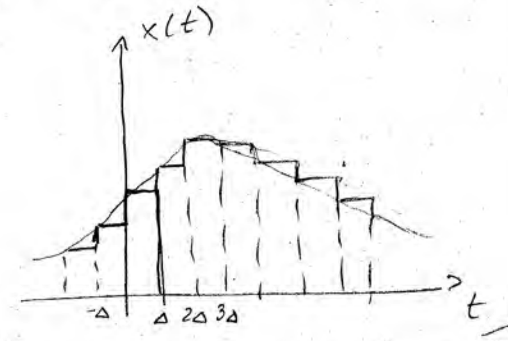
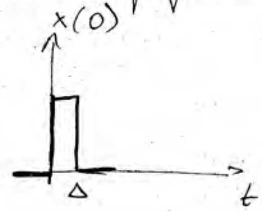
3. Prikaz kontinuiranih signala pomoću jediničnih impulsa

Da bismo prikazali kont. signal pomoću jediničnih impulsa, prvo ćemo kont. signal $x(t)$ aproksimirati stepeničastim signalom $\hat{x}(t)$:

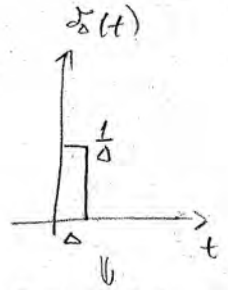


Kontinuirani signal $x(t)$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vremenski pomaknutih jediničnih impulsa $\delta_\Delta(t)$

Izdvojimo pojedini segment signala, npr. prvi:

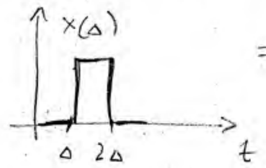


$$\Rightarrow x(0)\cdot\delta_\Delta(t)\cdot\Delta = \begin{cases} x(0), & \text{za } 0\le t<\Delta \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



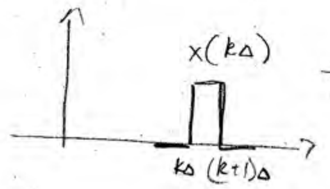
$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0\le t\le \Delta \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Izdvojimo drugi segment signala:



$$\Rightarrow x(\Delta)\cdot\delta_\Delta(t-\Delta)\cdot\Delta = \begin{cases} x(\Delta), & \Delta\le t\le 2\Delta \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Izdvojimo k-ti segment signala:



$$\Rightarrow x(k\Delta)\cdot\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta = \begin{cases} x(k\Delta), & \text{za } k\Delta\le t\le (k+1)\Delta \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Tj. stepeničasti signal $\hat{x}(t)$ možemo prikazati kao suma pojedinačnih segmenata signala, tj.

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\cdot\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

Ako stavimo da širina δ_Δ impulsa $\to \Delta$, teži u 0, tj.

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\cdot\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta\right)$$

onda:

1° $\delta_\Delta(t)\to\delta(t)$ $\Rightarrow$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$ => prikaz kont. signala pomoću vremenski pomaknutih jediničnih impulsa

$u(t)$ prikazan u ovome obliku:

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & \text{inače}\end{cases}$$

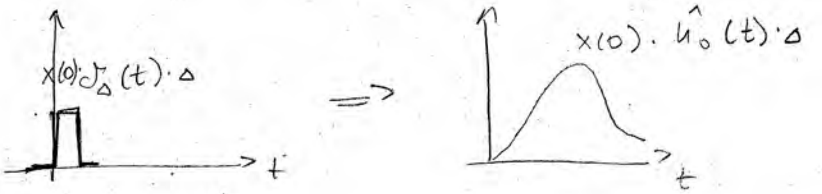
$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{u(\tau)}_{1\ \text{za}\ \tau>0}\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau$$

=> Ovo je način kako prikazati bilo koji vremenski kontinuirani signal $x(t)$ u obliku superpozicije skaliranih i vremenski pomaknutih Diracovih impulsa (tj. $\delta(t-\tau)$)

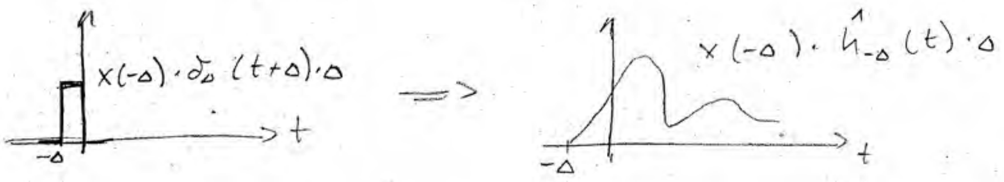
---

4) Odziv kontinuiranih LTI sustava na jedinični impuls i opis sustava pomoću konvolucijske sume.

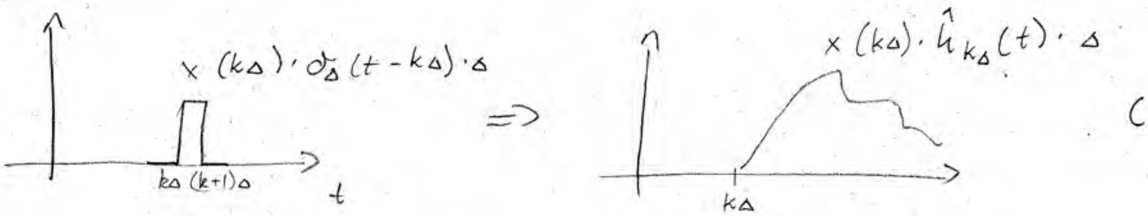
Neka svaki od pomaknutih impulsa $\delta_\Delta(t-k\Delta)$ ima odziv koji ćemo označavati sa $\hat{h}_{k\Delta}(t)$, tj.: $\delta_\Delta(t-k\Delta)\xrightarrow{LTI\ sustav}\hat{h}_{k\Delta}(t)$. Ovako izgleda nakon što se preslikaju segmenti signala $\hat{x}(t)$:



(1)



(2)

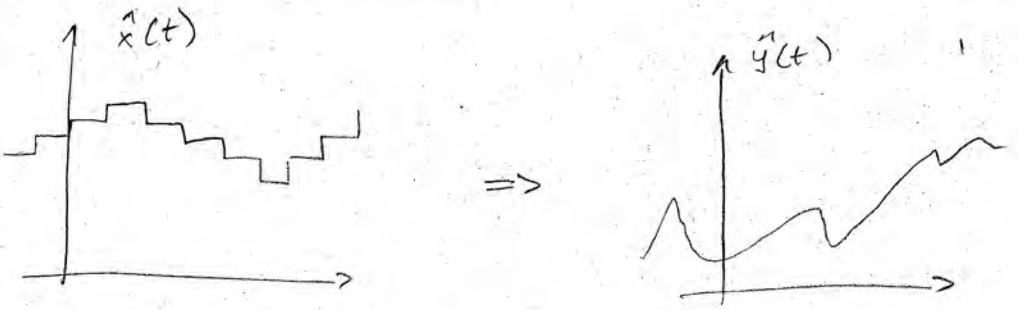


(3)

$\hat{x}(t)\rightarrow\hat{y}(t)$, pri čemu je $\hat{y}(t)$ suma svih pojedinačnih odziva na pojedini segment signala $\hat{x}(t)$, tj.:

$$\hat{y}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{x}(k\Delta)\cdot\hat{h}_{k\Delta}(t)\cdot\Delta$$ => slično kao u diskretnim

Ako sumiramo sve pojedinačne odzive ((1), (2), (3), ...) imat ćemo:



Želimo naći u što se preslikava originalni signal $x(t)$, a ne njegova aproksimacija $\hat{x}(t)$; želimo iz $\hat{y}(t)$ dobiti $y(t)$.
$y(t)$ će biti limes od $\hat{y}(t)$ kada $\Delta \to 0$:

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \hat{h}_{k\Delta}(t) \cdot \Delta \right)$$

Suma prelazi u integral:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h_\tau(t)\, d\tau$$

Označavamo $h_\tau(t) = h(t-\tau)$ (jer je sustav vrem. nepromjenjiv)
i isto tako: $h_0(t) = h(t-0) = h(t) \rightarrow$ odziv kont. LTI sustava na $\delta(t)$ - Diracov impuls

Sada možemo pisati:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \Rightarrow \text{integral konvolucije}$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

Zaključak: Kontinuirani LTI sustav je u potpunosti određen odzivom na Diracov impuls => Ako znamo odziv na $\delta(t)$, pomoću njega i integral konvolucije, možemo odrediti odziv na bilo koji ulazni signal $x(t)$.

Kako računamo integral konvolucije? (slično kao kod diskretnih)
$\rightarrow$ nacrtamo signal x u funkciji od τ, tj. $x(\tau)$
$\rightarrow$ nacrtamo za neki određeni t $h(t-\tau)$ u funkciji od τ tako da $h(\tau)$ pomaknemo za t udesno ako je $t<0$ ili ulijevo ako je $t>0$, i zatim vremenskim zrcaljenjem pomaknutog signala
$\rightarrow$ pomnožimo $x(\tau)$ i $h(t-\tau)$ i umnožak integriramo na intervalu $-\infty < \tau < \infty$

konvolucije)

Konvolucija je i u diskretnom i kontinuiranom vremenu komutativna operacija, tj.:

$$x[n] \otimes h[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

$$x(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\, d\tau$$

Ove relacije možemo dokazati pomoću supstitucije varijabli:

Npr.

→ ako stavimo $r = n-k$ $\left(\Rightarrow k = n - r\right)$ bit će:

$$x[n] \otimes h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{r=\infty}^{-\infty} x[n-r] \cdot h[r]$$

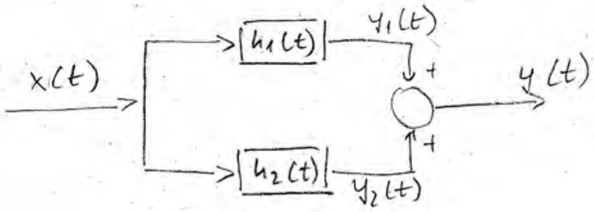
$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r] \cdot x[n-r] = h[n] \otimes x[n]$$

6. Objasniti svojstvo distributivnosti LTI sustava (pomoću konvolucije)

$$x[n] \otimes (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] \otimes h_1[n] + x[n] \otimes h_2[n]$$

(analogno i u kont. vremenu)

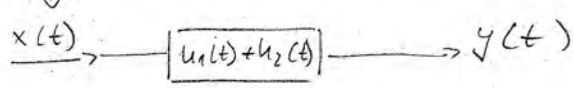
Pomoću blok dijagrama možemo ovo svojstvo prikazati kao:



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t)$$

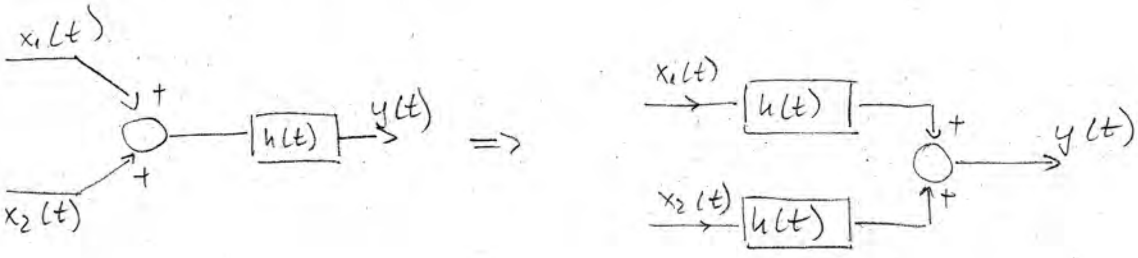
$$= x(t) \otimes (h_1(t) + h_2(t))$$

⇓



Također će vrijediti:

$$(x_1(t) + x_2(t)) \otimes h(t) = x_1(t) \otimes h(t) + x_2(t) \otimes h(t)$$



7. Objasniti svojstvo asocijativnosti LTI sustava (pomoću konvolucije)

$x[n] \otimes (h_1[n] \otimes h_2[n]) = (x[n] \otimes h_1[n]) \otimes h_2[n]$

(analogno u kontinuiranom vremenu)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\Updownarrow$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n] = h_1[n] \otimes h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\Updownarrow$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n] = h_2[n] \otimes h_1[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow y[n]$$

Zaključak: u serijskoj vezi blokovima možemo mijenjati mjesta

---

8. Objasniti svojstvo memorije LTI sustava (pomoću konvolucije) i navesti uvjet koji mora zadovoljavati impulsni odziv LTI sustava bez memorije

Sustav je bez memorije ako izlaz u bilo kojem promatranom trenutku ovisi o ulazu u isključivo tom promatranom trenutku

Iz relacije konvolucije: $y[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$

vidimo da će to vrijediti samo u slučaju kad je $h[n-k] = 0$ za $\forall k$ osim za $k = n$. To pišemo kao:

$h[n] = 0, \quad \forall n \neq 0$

U tom slučaju, odziv će biti oblika: $h[n] = K \cdot \delta[n]$ pri čemu je K konstanta i vrijedi: za $n = 0$, $h[0] = k$

Tada će se konvolucijska suma reducirati na oblik:

$$y[n] = x[k] \cdot h[n-k]\Big|_{k=n} = x[n] \cdot \underbrace{h[0]}_{K} = k \cdot x[n]$$

$y[n] = K \cdot x[n]$

Ako LTI sustav ima odziv na jedinični impuls $h[n]$ takav da $h[n]$ ima nenulte vrijednosti i za neke $n \neq 0 \Rightarrow$ tada sustav ima memoriju (u suprotnome nema)

$$\xrightarrow{\delta[n]} \boxed{h[n]} \xrightarrow{h[n]}$$

i navesti uvjet koji moraju zadovoljavati impulsni odzivi dva međusobno inverzna LTI sustava.

Sustav je invertibilan jedino ako postoji inverzan sustav takav da, kad ga spojimo u seriju s osnovnim sustavom, izlaz iz njega jest jednak ulazu u osnovni sustav. Ako je LTI sustav invertibilan, njemu inverzni sustav (će bi, je isto LTI.

To možemo ovako nacrtati (u kont. smislu):

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{h_1(t)} \xrightarrow{w(t) = x(t)}$$

I pomoću konvolucije možemo pisati:

$$x(t) \otimes h(t) = y(t) \quad \text{i} \quad y(t) \otimes h_1(t) = x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) \otimes h(t) \otimes h_1(t) = x(t)$$

$$x(t) \otimes (h(t) \otimes h_1(t)) = x(t)$$

Pogledajmo sad konvoluciju nekog proizvoljnog signala i Diracovog impulsa (u diskr. slučaju):

$$x[n] \otimes \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \underbrace{\delta[n-k]}_{\substack{1,\ k=n \\ 0,\ \text{inače}}} = x[n]$$

$\Rightarrow$ Signal u konvoluciji s Diracom za rezultat daje taj signal. Isto vrijedi i u kont. slučaju:

$$x[n] \otimes \delta[n] = x[n]$$

$$x(t) \otimes \delta(t) = x(t)$$

Vratimo se sad na inverzne sustave.

Slijedi:

$$h(t) \otimes h_1(t) = \delta(t)$$

$$h[n] \otimes h_1[n] = \delta[n]$$

Dakle, da bi dva sustava bila međusobno inverzna, konvolucija njihovih odziva za Diracov impuls treba davati Diracov impuls.

10. Objasniti svojstvo kauzalnosti LTI sustava (pomoću konvolucije) i navesti uvjet koji mora zadovoljavati impulsni odziv kauzalnog LTI sustava.

Izlaz kauzalnog sustava ovisi samo o ulazu u trenutnom vremenu i o prošlim ulazima (ali ne i o budućim ulazima u sustav).

Razmotrimo ovo svojstvo kroz konvoluciju:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

Iz ove relacije vidimo da za kauzalan sustav $y[n]$ ne smije ovisiti o $x[k]$ za $k>n$. Da bi to vrijedilo, umnožak $x[k] \cdot h[n-k]$ za $k>n$ mora biti 0!

Iz tog zahtjeva opet slijedi da $h[n-k]$ za $k>n$ mora biti 0!

Ili ako uvrstimo supstituciju: $r = n-k$, $k = n \Rightarrow n-k<0 \Rightarrow r<0$

biti će: $h[r]=0$, $r<0$

ili $h[n]=0$, $n<0$

Iz ove relacije slijedi da impulsni odziv kauzalnog LTI sustava mora biti 0 prije nego što impuls nastupi, što se slaže s principom kauzalnosti.

11. Objasniti svojstvo stabilnosti LTI sustava (pomoću konvolucije) i navesti uvjet koji mora zadovoljavati impulsni odziv stabilnog LTI sustava.

Prisjetimo se, sustav je stabilan ako na ograničenu pobudu daje ograničeni odziv. Da bismo odredili uvjet koji mora LTI sustav zadovoljiti da bi bio stabilan, razmotrimo ograničenu pobudu:

$$|x[n]| < B, \quad \forall n \quad (B\text{-konst.}) \quad (1)$$

Neka je odziv LTI sustava $h[n]$.

Odziv na pobudu $x[n]$ možemo pisati kao:

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

Odredimo modul odziva:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] \right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \cdot \underbrace{|x[n-k]|}_{\substack{\le B \\ \text{ako vrijedi (1)}}} \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \cdot B$$

$$\le B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|, \quad \forall n$$

Dakle:

$$|y[n]| \le B \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

tj. $|y[n]| < \infty$, tj. $|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty} \Rightarrow \text{uvjet stabilnosti sustava}$$

Uvjet stabilnosti LTI sustava jest da suma modula uzoraka impulsnog odziva bude manja od ∞.
Analogno, u kont. sustavu će uvjet stabilnosti biti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)\, d\tau| < \infty$$

12.) Odziv LTI sustava na jediničnu odskočnu pobudu. Definirati međusobnu vezu između odziva na step i impulsnu pobudu.

Promatramo odziv sustava na step pobudu ($u(t)$ ili $u[n]$). Takav odziv ćemo nazivati odziv LTI sustava na step pobudu i označavati ga sa $s(t)$ i $s[n]$; biti će:

$$x[n] = u[n] \Rightarrow y[n] = s[n]$$
$$x(t) = u(t) \Rightarrow y(t) = s(t)$$

Povezujemo odziv $\underbrace{s[n]}_{\text{odziv na step}}$ i $\underbrace{h[n]}_{\text{odziv na Diraca}}$.

Pomoću konvolucije, odziv na step pobudu možemo pisati kao

$$s[n] = u[n] \otimes h[n] = h[n] \otimes u[n]$$

$$u[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow s[n] \qquad\qquad h[n] \rightarrow \boxed{u[n]} \rightarrow s[n]$$

$s[n]$ možemo smatrati kao odziv sustava s impulsnim odzivom $u[n]$ na ulazni signal $h[n]$.
Sustav koji za impulsni odziv daje step signal $u[n]$ jest akumulator, koji na izlazu daje sumu svih prethodnih ulaznih uzoraka (pri čemu je ulazni signal $h[n]$):

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \Rightarrow \text{veza između odziva na step i Diracovu pobudu}$$

jednadžbi diferencija (...)

U diskretnom vremenu, umjesto diferencijalnih jednadžbi imat ćemo jednadžbu diferencija:

$$a_N y[n-N] + a_{N-1} y[n-(N-1)] + \dots + a_1 y[n-1] + a_0 y[n]$$
$$=$$
$$b_M x[n-N] + \dots + b_0 x[n]$$

tj.:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_M x[n-k] \qquad (1)$$

Rješenje ćemo definirati kao sumu partikularnog i homogenog rješenja: $y[n] = y_P[n] + y_H[n]$ (pri čemu je homogeni dio rješenje jedn. kad je $x[n]=0$)

I ovdje moramo definirati N početnih uvjeta.

Također, i ovdje ćemo se usmjeriti na sustave koji zadovoljavaju uvjet početnog mirovanja, tj. za $x[n]=0$, $n<n_0$ vrijedit će $y[n]=0$ također.

Jednadžbu (1) ćemo pisati na slijedeći način:

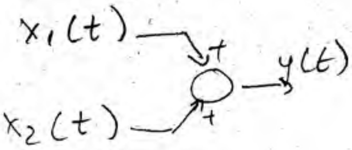
$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\} \qquad (2)$$

Ova jednadžba direktno prikazuje izlaz $y[n]$ kao funkciju prethodnih vrijednosti ulaza i izlaza. Da bismo mogli odrediti izlaz u trenutku n, moramo znati prethodne izlaze, tj. $y[n-1], y[n-2], \dots, y[n-N]$. Tj. da bismo jednoznačno riješili ovu jedn. diferencija, trebamo znati ulaz $x[n]$ i N pomoćnih uvjeta.

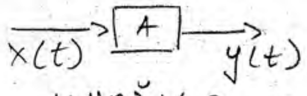
Jednadžbu (2) zovemo rekurzivna jednadžba, jer pomoću rekurzivne operacije računamo odziv na temelju ulaza odziva u prethodnim vremenskim trenucima.

5.) Prikaz sustava opisanih diferencijalnim jednadžbama i jednadžbama diferencija pomoću blok dijagrama.

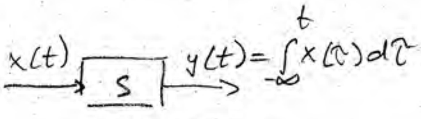
Dosad smo već definirali osnovne gradevne elemente blok dijagrama i to u kontinuiranom vremenu:



ZBRAJALO



MNOŽILO

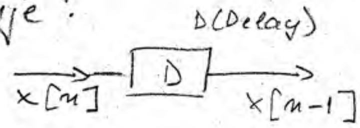


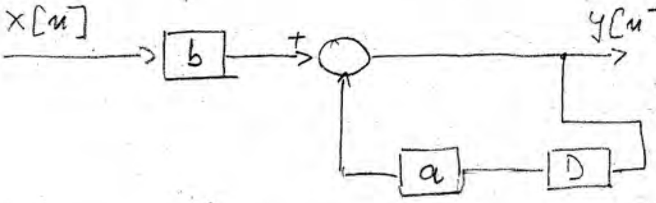
INTEGRATOR

Jednadžba diferencija pomoću blok dijagrama:

$$y[n] + a\,y[n-1] = b\,x[n] \Rightarrow y[n] = -a\,\underbrace{y[n-1]}_{\text{kašnjenje}} + b\,x[n]$$

Uvodimo blok za kašnjenje: D (Delay)

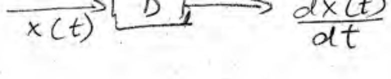


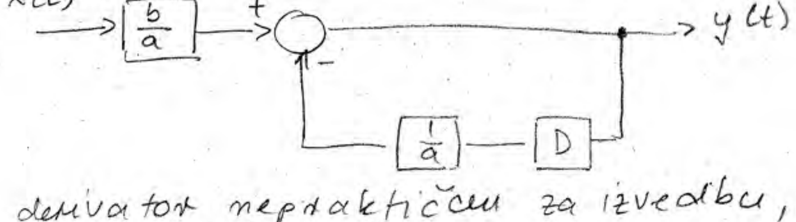


Diferencijalna jednadžba pomoću blok dijagrama:

$$\frac{dy(x)}{dt} + a\,y(t) = b\,x(t) \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a}x(t)$$

Uvodimo blok za deriviranje:

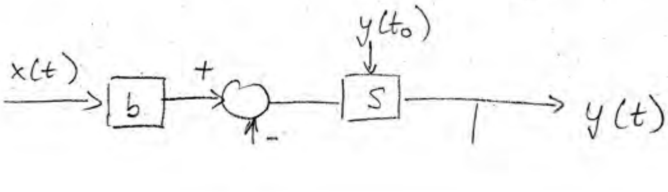




Kako je derivator nepraktičan za izvedbu, češće koristimo integratore, pa će biti:

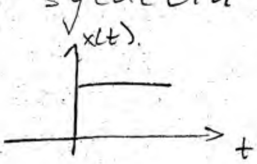
$$\frac{dy(t)}{dt} = b\,x(t) - a\,y(t) \ /\int \Rightarrow y(t) = \int_{t_0}^{t}\left(b\,x(\tau) - a\,y(\tau)\right)d\tau + \underbrace{y(t_0)}_{\text{poč. uvjet}}$$

Blok dijagram:



transformaciju sljedećih osnovnih signala:

a) $x(t) = u(t)$

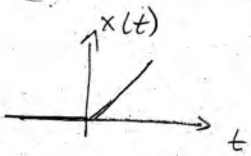


$x(t) \rightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ $\quad s = \sigma + j\omega$

$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{-s} e^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{s}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{1}{s}$$

b) $x(t) = At \cdot u(t)$



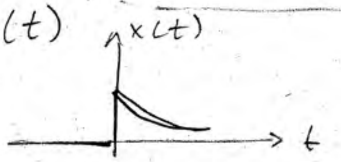
$$X(s) = \int_0^\infty At \cdot e^{-st} dt = A\left[\frac{t \cdot e^{-st}}{-s} - \int \frac{e^{-st}}{-s} dt\right]\Bigg|_0^\infty$$

$$= A\left[\frac{t \cdot e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]\Bigg|_0^\infty$$

$$= A\left[0 - 0 - 0 - \left(-\frac{e^0}{s^2}\right)\right]$$

$$= \frac{A}{s^2}$$

c) $x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$



$$X(s) = \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t} dt = \frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)}\Bigg|_0^\infty = -\frac{1}{-(a+s)} = \frac{1}{a+s}$$

d) $x(t) = \sin(t) \cdot u(t)$ $\Rightarrow$ PRIMIJENIT ĆEMO EULEROVU RELACIJU

$\sin(\omega t) = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})/(2j)$

BITI ĆE:

$$X(s) = \int_0^\infty \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} dt = \frac{1}{2j}\int_0^\infty \left(e^{(j\omega - s)t} - e^{-(j\omega + s)t}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{e^{(j\omega - s)t}}{j\omega - s} - \frac{e^{-(j\omega+s)t}}{-(j\omega+s)}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{2j}\left(-\frac{e^{-(s-j\omega)t}}{s-j\omega} + \frac{e^{-(s+j\omega)t}}{s+j\omega}\right)\Bigg|_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

e) $x(t) = \cos(t) \cdot u(t)$

$\cos(\omega t) = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$

RJEŠAVAMO NA ISTI NAČIN KAO POD a)

$$X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

2

17) Svojstva Laplaceove transformacije:

a) teorem linearnosti:

$$\mathcal{L}\{a x_1(t) + b x_2(t)\} = a\mathcal{L}\{x_1(t)\} + b\mathcal{L}\{x_2(t)\}$$
$$= a X_1(s) + b X_2(s)$$

b) teorem o pomaku signala:

→ pomak u vremenskom području:

$$\mathcal{L}\{x(t \pm a)\cdot u(t \pm a)\} = e^{\pm as}\cdot X(s)$$

→ pomak u s području:

$$\mathcal{L}\{e^{\pm at}\cdot x(t)\cdot u(t)\} = X(s \mp a)$$

c) teorem o $\mathcal{L}$ transformaciji derivacije funkcije:

Neka je $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = s\cdot X(s) - \underbrace{x(0)}_{\text{poč. uvjet, } t=0}$$
$$\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2\cdot X(s) - s\cdot x(0) - x'(0)$$
$$\mathcal{L}\{x^n(t)\} = s^n\cdot X(s) - s^{n-1}\cdot x(0) - s^{n-2}\cdot x'(0) - \dots$$

d) teorem o $\mathcal{L}$ transformaciji integrala funkcije (uz $x(0)=0$)

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s)$$
$$\mathcal{L}\left\{\underbrace{\iiint\dots\int}_{n\text{ puta}} x(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s^n}X(s)$$

e) teorem o konačnoj vrijednosti (vrijedi samo ako $\exists \lim_{t\to 0} x(t)$)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

f) teorem konvolucije + izvod

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\otimes h(t)\} = ?$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)\otimes h(t))\,e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau\right)e^{-st}\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,e^{-st}\,dt\right]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot H(s)\cdot e^{-\tau s}\,d\tau$$

$$= H(s)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,e^{-\tau s}\,d\tau}_{X(s)} \Rightarrow Y(s) = H(s)\cdot X(s)$$
$$= X(s)\cdot H(s)$$

racionalne funkcije oblika:

$$F(s) = K \cdot \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}, \text{ pri čemu je } m >= n$$

Tražimo $f(t)$, tj. $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

općenito, $F(s)$ rastavljamo na parcijalne razlomke:

$$F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \frac{K_3}{s-p_3} + \dots$$

pri čemu su $p_1, p_2, p_3, \dots$ nul-točke nazivnika, a $K_1, K_2, K_3, \dots$ pripadajući residuumi.

Formula za traženje residuuma je:

$$K_i = (s-p_i) \cdot F(s) \Big|_{s=p_i} \Rightarrow \text{jednostruke nultočke.}$$

Nultočke nazivnika mogu biti i višestruke. Formula za računanje residuuma višestrukih nultočaka je:

$$F(s) = \frac{Br(s)}{Naz(s)} = \frac{Br(s)}{\underbrace{(s-p_1)^m}_{p_1 \text{ jest } m\text{-struka nul-točka nazivnika}} \cdot (s-p_2) \cdot \dots \cdot (s-p_n)} = \frac{K_1}{(s-p_1)^m} + \frac{K_2}{(s-p_1)^{m-1}} + \frac{K_3}{(s-p_1)^{m-2}}$$

$$+ \frac{K_m}{(s-p_1)} + \frac{K_{m+1}}{s-p_2} + \dots + \frac{K_{m+n-1}}{s-p_n}$$

$K_1 \dots K_m$ - residuumi višestrukog pola:

$$K_i = \frac{1}{(i-1)!} \cdot \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[(s-p_1)^m \cdot F(s) \right] \Big|_{s=p_1}$$

---

19) Objasniti (na općenitom primjeru) način rješavanja diferencijalne jednadžbe koja opisuje kontinuirani LTI sustav primjenom Laplaceove transformacije.

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 5x(t)$$

zadano je:

$x(t) = e^{-4t}$

$y(0) = 1$

$\dot{y}(0) = -2$

$$\left(\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1} X(0) - s^{n-2} X(0)' \dots \right)$$

L. transf. dijelova jedn.

$$[s^2 Y(s) - s^1 y(0) - s^0 \dot{y}(0)] + 3[sY(s) - s^0 y(0)] + 2Y(s) = 5 \cdot X(s)$$

$$(s^2 Y(s) - s + 2) + 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = 5 \cdot \frac{1}{s+4} \rightarrow \text{tablica}$$

$$Y(s) \cdot (s^2 + 3s + 2) = \frac{5}{s+4} + s - 2 + 3$$

$$Y(s)\,(s^2+3s+2) = \frac{5+s^2+4s+s+4}{s+4} = \frac{s^2+5s+9}{s+4}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+5s+9}{(s+4)\underbrace{(s^2+3s+2)}_{(s+1)(s+2)}} \quad / \mathcal{L}^{-1} \rightarrow \text{to ćemo kasnije}$$

// jedn. rastavljamo na parcijalne razlomke, računamo residuume

$$Y(s) = \frac{s^2+5s+9}{(s+4)(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+4} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} \Rightarrow \text{nultočke: } -4, -1, -2$$

$$K_1 = (s+4)\cdot Y(s)\Big|_{s=-4}$$

$$= \frac{s^2+5s+9}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=-4} = \frac{16-20+9}{-3(-2)} = \frac{5}{6}$$

$$K_2 = (s+1)\cdot Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{5}{3}$$

$$K_3 = \frac{s^2+5s+9}{(s+4)(s+1)}\Big|_{s=-2} = -\frac{3}{2}$$

$$Y(s) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{s+4} + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+2} \quad / \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \frac{5}{6}\cdot e^{-4t} + \frac{5}{3}\cdot e^{-t} - \frac{3}{2}\cdot e^{-2t}$$

⇐ nakon izračunatih residuuma, napravimo inverznu Laplaceovu transformaciju

---

20. Prijenosna funkcija kontinuiranog LTI sustava

$$x(t) \longrightarrow \overset{s}{\boxed{h(t)}} \xrightarrow{y(t)}$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \quad / \mathcal{L}$$

$$Y(s) = X(s)\cdot H(s) \quad / : X(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}} \rightarrow H(s) - \text{prijenosna funkcija sustava}$$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s)$$

Prijenosnu funkciju sustava definiramo kao omjer Laplaceove transformacije izlaza i Laplaceove transformacije ulaza, uz vrlo bitan uvjet: početni uvjeti moraju biti 0.
poč. uvjeti x i y

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{polinom}(s)}{\text{polinom}(s)}$$

$$= K\cdot\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdot\ldots\cdot(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)}$$

$$H(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1} \ldots}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_j)}$$

$K \rightarrow$ pojačanje sustava $\Rightarrow$ $x \rightarrow \boxed{K} \rightarrow y$

$y = Kx$

$z_1 \ldots z_m \rightarrow$ nultočke brojnika $\rightarrow$ NULE prijenosne funkcije

$p_1 \ldots p_n \rightarrow$ nultočke nazivnika $\rightarrow$ POLOVI prijenosne funkcije

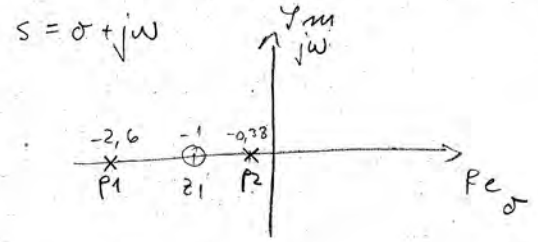
Polovi i nule se crtaju u kompleksnoj ravnini (budući da mogu biti realni i kompleksni). Razmještaj polova i nula u kompleksnoj ravnini naziva se polno-nulti dijagram.

Pr. $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+1} = \frac{s+1}{(s+2{,}6)(s+0{,}38)}$ $\Rightarrow$ nula $z_1 = -1$

polovi: $p_1 = -2{,}6$

$p_2 = -0{,}38$

$s = \sigma + j\omega$



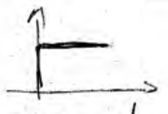
Red polinoma nazivnika (najveća rastuća potencija od s u nazivniku) naziva se i red sustava. (u primjeru red=2)

(21.) Stabilnost kontinuiranog LTI sustava opisanog prijenosnom funkcijom (objasniti nužan uvjet stabilnosti sustava)

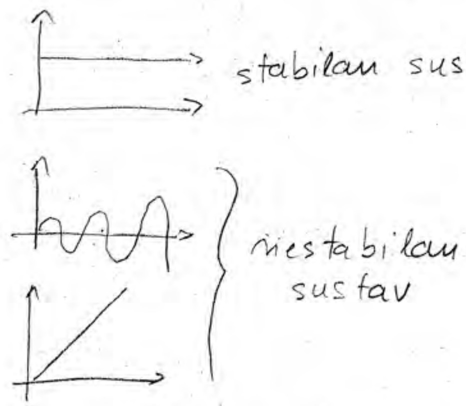
$x(t) \rightarrow \boxed{u(t)} \rightarrow y(t)$

$\downarrow$

$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$



$X(s) = \frac{1}{s}$



Sustav smo opisali prijenosnom funkcijom $H(s) \Rightarrow$ kakve uvjete mora ispunjavati $H(s)$ da bi sustav bio stabilan?

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Dovedimo na ulaz sustava neku konačnu pobudu (npr. step signal $x(t) = u(t)$). i promatrajmo odziv

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\Pi(s-z_i)}{\Pi(s-p_i)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n} \quad / \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = K_0 \cdot u(t) + K_1 \cdot e^{p_1 t} + \dots + e^{p_2 t} \cdot \sin(\omega t)$$

ili

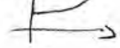
$$e^{p_n t} \cdot \cos(\omega t)$$

eksp. funkcija

=> može biti rastuća i padajuća, što ovisi o predznaku od p_1

=> ako je predznak od p_1 negativan => $e^{p_1 t}$ biti će eksp. padajuća funkcija

=> ako je pozitivan => $e^{p_1 t}$ biti će eksp. rastuća funkcija



Ako su svi polovi $p_1 \dots p_n$ negativni => svi članovi sume koja čini odziv $y(t)$ su eksp. padajuće funkcije koje za $t \to \infty$ teže u neku konačnu vrijednost, pa i $y(t)$ za $t \to \infty$ teži u neku konačnu vrijednost, tj. sustav je stabilan.

Dovoljno je da jedan od polova bude pozitivan, $y(t) \to \infty$ za $t \to \infty$ => sustav je nestabilan.

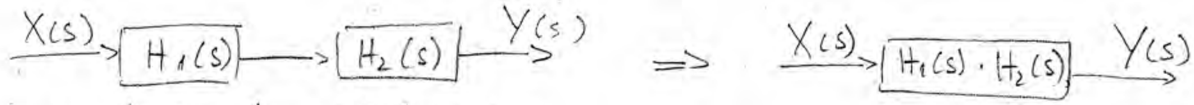
Kod stabilnih sustava svi polovi prijenosne funkcije nalaze se u lijevoj polovici kompleksne ravnine.

22.) Blok algebra, navesti osnovna i dodatna pravila algebre blokova

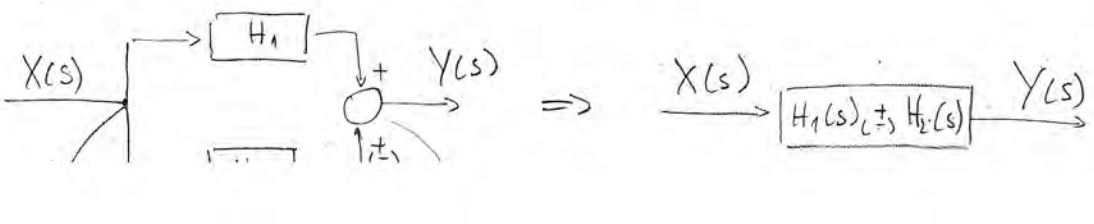
Kad sustav opisujemo prijenosnom funkcijom, primjena blok dijagrama je posebno pogodna jer međusobnim povezivanjem različitih sustava od kojih je svaki opisan svojom prijenosnom funkcijom dobivamo složene sustave. Tada primjenom nekoliko pravila blok-algebre možemo dobiti ukupnu prijenosnu funkciju takvog složenog sustava.

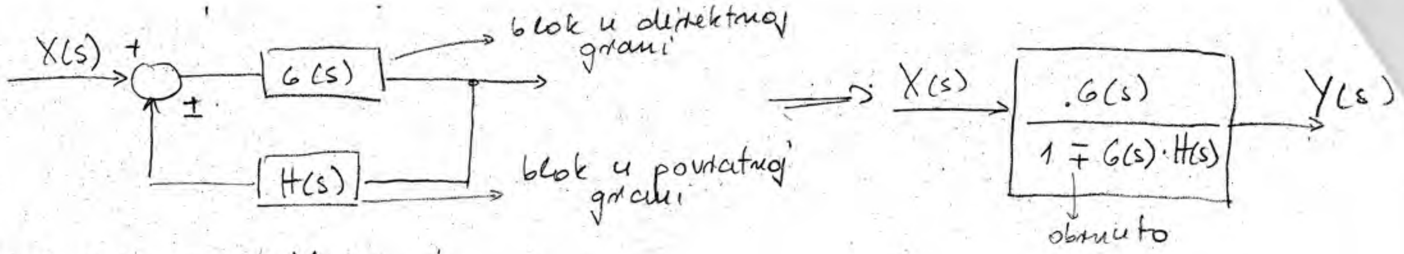
Osnovna pravila:

① Serijski spoj dvaju (ili više) blokova:



2.) Paralelni spoj dvaju blokova:

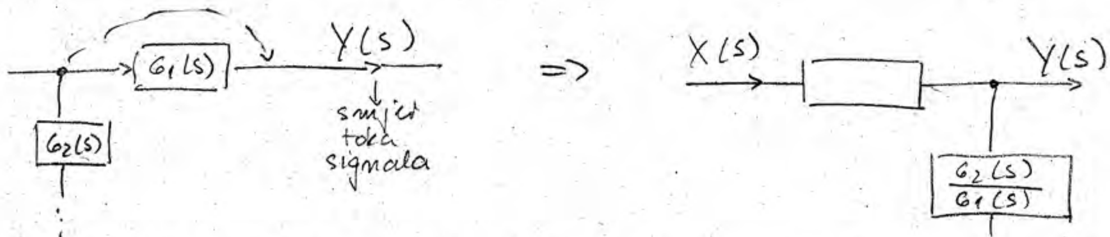




Dodatna pravila:

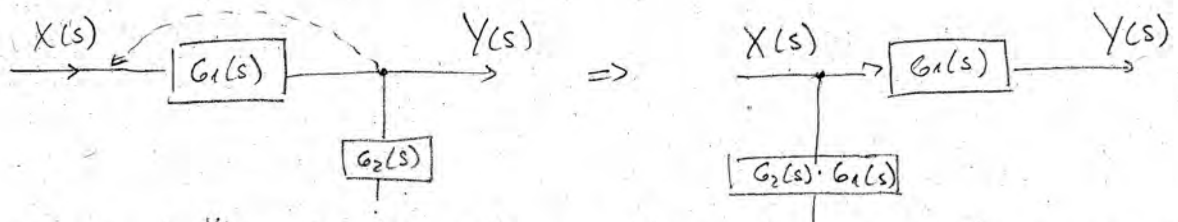
4. Prebacivanje točke grananja:

a)



Ako se točka grananja prebacuje u smjeru toka signala, onda se prijenosna funkcija grane koja se prebacuje ($G_2(s)$) dijeli sa prijenosnom funkcijom grane preko koje se prebacuje ($G_1(s)$)

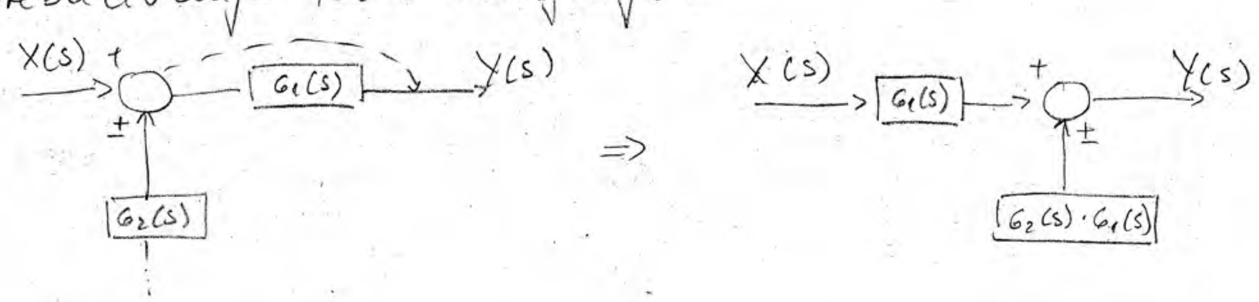
b)



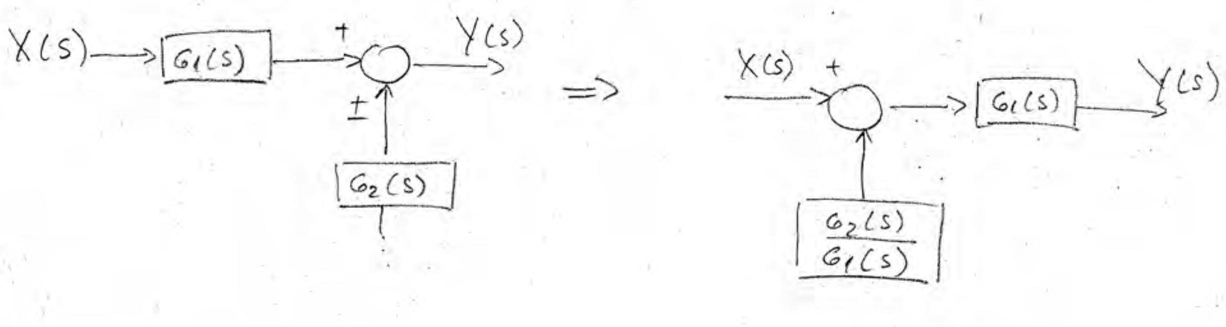
Ako se točka grananja prebacuje suprotno smjeru toka signala, onda se prijenosna funkcija grane koja se prebacuje ($G_2(s)$) množi s prijenosnom funkcijom grane preko koje se prebacuje ($G_1(s)$)

5. Prebacivanje točke zbrajanja:

a)

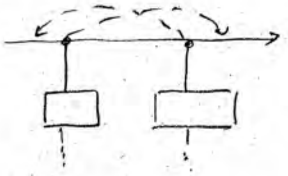


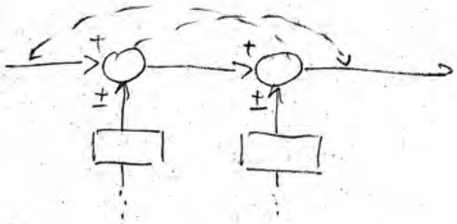
b)



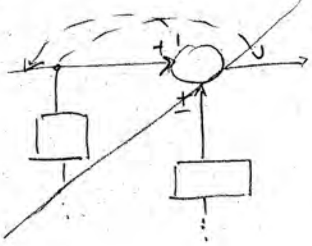
Bitna napomena:

1° Dozvoljeno:

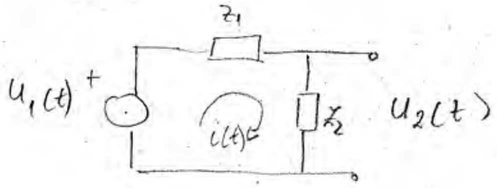




2° Nije dozvoljeno:



23.) Objasniti modeliranje električnih sustava pomoću prijenosne funkcije, izvesti impendancije osnovnih elemenata strujnog kruga, izvesti prijenosnu funkciju nekog jednostavnog strujnog kruga.



Ako za ulazni signal u sustav uzmemo ulazni napon $u_1(t)$, a za izlazni signal iz sustava napon na impendanciji Z_2, tj. $u_2(t)$, prijenosna funkcija sustava će biti: $W(s) = \dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$

U ovome primjeru jednostavne mreže, prijenosna funkcija će biti:

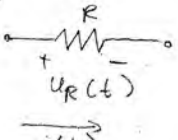
$$u_1(t) = i(t) \cdot (Z_1(t) + Z_2(t)) \;/\mathcal{L} \Rightarrow U_1(s) = I(s) \cdot [Z_1(s) + Z_2(s)]$$

$$u_2(t) = i(t) \cdot Z_2(t) \;/\mathcal{L} \Rightarrow U_2(s) = I(s) \cdot Z_2(s)$$

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Impendancije mogu biti omske, induktivne, kapacitivne ili kombinacija

1° Otpornik

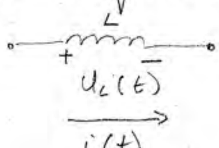


$$u_R(t) = i(t) \cdot R \;/\mathcal{L}$$

$$U_R(s) = I(s) \cdot R$$

$$Z_R(s) = \frac{U_R(s)}{I(s)} = R$$

2° Zavojnica

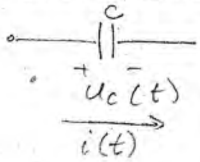


$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \;/\mathcal{L}$$

$$U_L(s) = L \cdot s \cdot I(s)$$

$$Z_L(s) = \frac{U_L(s)}{I(s)} = Ls$$

3° Kondenzator

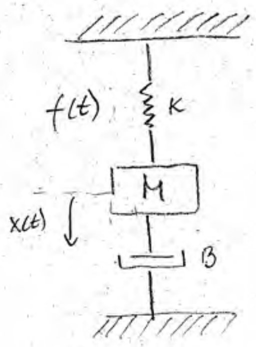


$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt \;/\mathcal{L}$$

$$U_C(s) = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} \cdot I(s)$$

$$Z_C(s) = \frac{U_C(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$$

funkcije; navesti i opisati osnovne elemente mehaničke mreže izvesti prijenosnu funkciju nekog jednostavnog mehaničkog sustava.



$W(s) = ?$

$$W(s) = \frac{izlaz(s)}{ulaz(s)} \Rightarrow$$

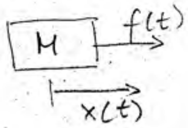
$x(t)$ - pomak mase (izlazna varijabla)

$f(t)$ - sila kojom djelujemo na masu

Zadano je: $K=2$, $B=1$

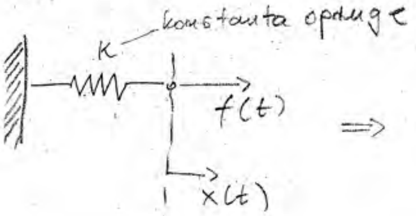
Osnovni elementi mehaničke mreže:

1° Tijelo mase M:

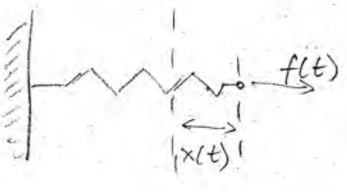


$\Rightarrow f(t) = M \cdot \ddot{x}(t)$ (sila = masa · akceleracija)

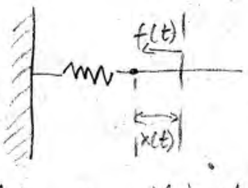
2° Opruga (opire se stezanju ili rastezanju)



$\Rightarrow f(t) = K \cdot x(t)$ (sila kojom djelujemo na oprugu proporcionalna je duljini za koju rastegnemo ili stegnemo oprugu, $x(t)$)

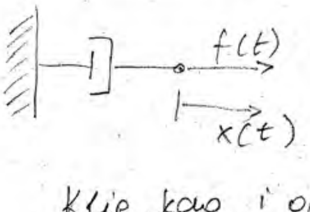


$\Rightarrow$ opruga se rastegla za $x(t)$



$\Rightarrow$ opruga se stisnula za $x(t)$

3° Klip s cilindrom (viskozno trenje)



$f(t) = B \cdot \dot{x}(t)$ → sila kojom djelujemo na klip proporcionalna je brzini gibanja.

Klip, kao i opruga, pruža otpor rastezanju ili sabijanju.

⇒ Rješenje jednostavnog mehaničkog sustava:

→ Postavljamo dif. jednadžbe gibanja. U složenim mehaničkim sustavima uvijek ćemo imati onoliko dif. jednadžbi koliko imamo pomaka unutar sustava (tj. tijela koja se pomiču)

U primjeru imamo 1. tijelo ⇒ 1 dif. jednadžba

Jednadžba:

masa · akcel. tijela = Σ svih sila koje djeluju na tijelo (pritom sile koje djeluju u smjeru gibanja imaju predznak +, a sile koje djeluju suprotno smjeru gibanja, suprotstavljaju se gibanju, imaju predznak −)

$$M \cdot \ddot{x}(t) = f(t) - K \cdot x(t) - B \cdot \dot{x}(t) \quad / \mathcal{L}$$

⇒ i opruga i klip pružaju otpor gibanju mase

$$M \cdot s^2 X(s) = F(s) - K \cdot X(s) - B \cdot s \cdot X(s)$$

$$X(s)\,(Ms^2 + Bs + K) = F(s)$$

$$W(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \Rightarrow \text{sustav 2. reda}$$