

## predavanje 4: Stojni valovi. Valovi zvuka.

### 1. Ukratko objasnite slijedeće pojmove: superpozicija valova, konstruktivna i destruktivna interferencija (obavezno). (slično pitanje odgovoreno u 7. pitanju druge lekcije)

Princip superpozicije: U svakoj točki medija na mjestu preklapanja valova ukupna elongacija jednaka je vektorskom zbroju elongacija koje bi imao svaki val za sebe kad ne bi bilo drugog vala. Svaki val širi se kroz sredstvo tako kao da na danom mjestu i određenom trenutku nikakvo drugo valno gibanje ne postoji.

**Matematički:** Ako su  $u_1(x,t)$  i  $u_2(x,t)$  rješenja valne jednačbe, tada je i bilo koja linearna kombinacija  $c_1u_1(x,t)+c_2u_2(x,t)$  također rješenje (posljedica činjenice da je valna jednačba linearna i homogena).

**Fizikalno:** valovi koji se preklapaju zbrajaju se da bi proizveli rezultatni val; valovi koji se preklapaju ne utječu na gibanje jedan na drugoga.

Interferencija opisuje situaciju kad dolazi do preklapanja dvaju ili više valova u prostoru. Rezultantna elongacija u bilo kojoj točki, u bilo kojem trenutku, se dobije vektorskim zbrajanjem trenutnih pomaka koje bi proizveo svaki val za sebe kad ne bi bilo drugih valova.

Efekti interferencije će biti uočljivi ako su valovi koherentni, tj. imaju jednake frekvencije i razliku u fazi koja je konstantna (ne mijenja se tijekom vremena).

Dva načina izračuna:

Superpozicija dvaju jednodimenzionalnih valova koji se šire u smjeru + x-os jednake amplitude i frekvencije i konstantne razlike u fazi  $\varphi$ .

$$u_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

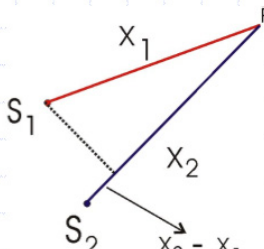
$$u_2(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \sin(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2})$$

Amplituda  
Oscilirajući član

$\varphi$ - fazi pomak	Amplituda	Tip interferencije
$n2\pi, n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$	<b>2A</b>	<b>Konstruktivna</b>
$(2n+1)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$	<b>0</b>	<b>Destruktivna</b>



Iz izvora  $S_1$  i izvora  $S_2$  šire se dva koherentna harmonijska. U točki P elongacija je prema principu superpozicije jednaka:

$$u_{rez} = u_1(x_1,t) + u_2(x_2,t) = A_1 \cos(\omega t - kx_1) + A_2 \cos(\omega t - kx_2)$$

$$\varphi_1 = -kx_1$$

$$\varphi_2 = -kx_2$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)}$$

$$\varphi = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

$$u_{rez} = A \cos(\omega t + \varphi)$$

**Konstruktivna interferencija ( $A=A_1+A_2$ ), za  $x_2 - x_1 = n\lambda$ ,  $n=0,\pm1,\pm2$**

**Destruktivna interferencija ( $A=A_1-A_2$ ), za  $x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ ,  $n=0,\pm1,\pm2$**

### 2. Uvjete pojave refleksija i transmisije valova odnosno stojnog vala. (obavezno)

- Kada val upada na granicu između dva sredstva, jedan se dio energije vala reflektira, a ostatak prelazi u drugo sredstvo; od upadnog vala nastaje reflektirani i transmitirani val. Pri refleksiji na gušćem sredstvu reflektirani je val pomaknut u fazi za  $\pi$  prema upadnome (transmitirani nastavlja bez promjena u fazi), a pri refleksiji na rijedem sredstvu nema pomaka u fazi. Posebno, pri refleksiji od čvrste zapreke nema transmitiranog vala, a reflektirani ima istu amplitudu kao upadni, samo je pomaknut u fazi za  $\pi$ ; pri refleksiji na slobodnom kraju upadni i reflektirani val imaju jednake amplitude i faze.

- Stojni val nastaje interferencijom dvaju valova jednake amplitude i jednake frekvencije, a time i jednake valne duljine, koji na istom pravcu putuju jedan nasuprot drugome. Stojni se val može dobiti tako da se progresivni val reflektira na jednom kraju žice, vrati natrag i zbroji s upadnim valom.

**3. Izvedite uvjete za pojavu konstruktivne/destruktivne interferencije valova iz dva koherentna izvora ako je izvor 1 udaljen za  $r_1$ , a izvor 2 za  $r_2$  od točke preklapanja u kojoj se promatra interferencija.**

Zamislamo li dva izvora valova  $S_1$  i  $S_2$  tako da valovi imaju jednaku amplitudu i fazu. Dok dođu do neke točke P u kojoj promatramo interferenciju, valovi prevale različite putove, te se titranja koja proizvede u toj točki razlikuju u fazi:

$$s_1 = A_1 \sin \omega \left( t - \frac{r_1}{v} \right) \quad s_2 = A_2 \sin \omega \left( t - \frac{r_2}{v} \right) \quad \text{gdje su } r_1 \text{ i } r_2 \text{ udaljenosti od izvora i točke P}$$

Razlika u fazi tih dvaju titranja jednaka je:

$$\Delta \varphi = \frac{\omega}{v} (r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$$

gdje je

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Predpostavimo da su amplitude jednake ( $A_1=A_2=A$ ), rezultatno je tritranje:

$$s = s_1 + s_2 = A \left[ \sin \omega \left( t - \frac{r_1}{v} \right) + \sin \omega \left( t - \frac{r_2}{v} \right) \right] = 2A \cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2} \sin \left[ \omega t - k \frac{r_1 + r_2}{2} \right]$$

Ako je točka P daleko od izvora,  $r_2 - r_1 = d \sin \vartheta$  (d je udaljenost između izvora  $S_1$  i  $S_2$ ), amplitudna rezultatnog titranja je:

$$2A \cos \frac{kd \sin \vartheta}{2}$$

i ovisi o mjestu na kojem promatramo interferenciju i udaljenosti izvora d.

Titranje će biti maksimalno na mjestima gdje je:

$$\cos \frac{kd \sin \vartheta}{2} = \pm 1 \rightarrow \frac{kd \sin \vartheta}{2} = n\pi$$

U tom slučaju razlika u fazi  $\Delta \varphi$  višekratnik je broja  $2\pi$ :

$$\Delta \varphi = k(r_2 - r_1) = kd \sin \vartheta = 2n\pi$$

te su na tim mjestima oba titranja u fazi.

Konstruktivnu interferenciju dobivamo, dakle, u svim smjerovima  $\vartheta_n$ :

$$d \sin \vartheta_n = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Destruktivna interferencija nastaje na mjestima gdje je  $\Delta \varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ , ili u smjerovima  $\vartheta_n$ , za koje je:

$$d \sin \vartheta_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ako su amplitude obaju titranja jednake, na tim mjestima čestice uopće neće titrati.

#### 4. Razmotrite pojavu pri upadu vala na granicu između dvaju sredstava. Izvedite izraz za amplitudu reflektiranog i transmitiranog vala. Diskutirajte posebne slučajeve.

Kada val upada na granicu između dva sredstva, jedan se dio energije vala reflektira, a ostatak prelazi u drugo sredstvo; od upadnog vala nastaje reflektirani i transmitirani val.

Primjer: Refleksija vala na užetu na mjestu gdje se gustoća mijenja, onosno na spoju dvaju užadi različite debljine.

Neka je jednadžba upadnog vala:  $s_u(x, t) = A_u \sin(\omega t - k_1 x)$

Jednadžba reflektiranog vala glasi:  $s_r(x, t) = A_r \sin(\omega t + k_1 x)$

Jednadžba transmitiranog vala glasi:  $s_t(x, t) = A_t \sin(\omega t - k_2 x)$

Na mjestu spoja užadi različite debljine vrijede granični uvjeti:

$$s_u + s_r = s_t \quad (\text{upadni val se dijeli na reflektirani i transmitirani})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(s_u + s_r) = \frac{\partial s_t}{\partial x} \quad (\text{u graničnoj točki nagibi obiju žica su jednaki})$$

U graničnoj točki ( $x=0$ ) valne funkcije imaju oblik:

$$s_u = A_u \sin \omega t \quad s_r = A_r \sin \omega t \quad s_t = A_t \sin \omega t$$

Ako se užad spajaju na mjestu  $x = 0$ , a val nailazi na granicu dvaju sredstava u trenutku  $t=0$ , onda slijedi da je:

$$A_u + A_r = A_t \quad (\text{dobiveno iz formula na vrhu})$$

$$-A_u k_1 + A_r k_1 = -A_t k_2 \quad (\text{dobiveno derivacijom formula na vrhu})$$

Uz supstituciju  $k_1 = \frac{\omega}{v_1}$  i  $k_2 = \frac{\omega}{v_2}$ , slijedi da je:

$$A_u + A_r = A_t$$

$$\frac{A_u}{v_1} - \frac{A_r}{v_1} = \frac{A_t}{v_2}$$

Iz ovih jednadžbi, lako se dobije da je:

$$A_r = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A_u$$

$$A_t = \frac{2 v_2}{v_1 + v_2} A_u$$

Posebni slučajeve:

1) Kada val prelazi iz rjeđeg sredstva u gušće sredstvo ( $\mu_1 < \mu_2 \Rightarrow v_1 > v_2$ ):

$$A_r < 0; \quad A_t > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{reflektirani val ima skok u fazi za } \pi$$

2) Kada val prelazi iz gušćeg sredstva u rjeđe sredstvo ( $\mu_1 > \mu_2 \Rightarrow v_1 < v_2$ ):

$$A_r > 0; \quad A_t > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{reflektirani val istofazan s upadnim valom}$$

3) Kraj žice (užeta)  $\Rightarrow v_2 = 0$ :  $A_r = -A_u$  ;  $A_t = 0$

4) Refleksija na slobodnom kraju  $\Rightarrow v_2 = \infty$ :  $A_r = A_u$  ;  $A_t = 2 A_u$

**5. Kako nastaje stojni val? Objasnite primjer transverzalnog stojnog vala na žici učvršćenoj na oba kraja. Objasnite pojam vlastitih frekvencija.**

Stojni val nastaje interferencijom dvaju valova jednake amplitude i jednake frekvencije, a time i jednake valne duljine, koji na istom pravcu putuju jedan nasuprot drugome. Stojni se val ne giba i ne prenosi nikakvu energiju. Stojni valovi mogu biti longitudinalni i transverzalni.

Primjer: Transverzalni stojni val na napetoj žici učvršćenoj na oba kraja

Rubni uvjeti za žicu, duljine  $L$ , učvršćenu na oba kraja su:  $s(0, t) = 0$  ;  $s(L, t) = 0$

Ako u smjeru osi -  $x$  putuje val:  $s_u = A \sin(\omega t + kx)$

onda će se na čvrstom kraju žice ( $x = 0$ ) val reflektirati mijenjajući fazu za  $\pi$ :

$$s_r = A \sin(\omega t - kx + \pi) = -A \sin(\omega t - kx)$$

Rezultantni stojni val je:

$$s(x, t) = s_u(x, t) + s_r(x, t) = A \sin(\omega t + kx) - A \sin(\omega t - kx) = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Iz drugog rubnog uvjeta slijedi:

$$s(L, t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi \Rightarrow L = n\frac{\lambda}{2}$$

Dakle, na žici se mogu pobuditi samo stojni valovi za koje je duljina žice  $L$  jednaka cijelom broju polovina valne duljine:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Vlastite frekvencije** su frekvencije kojima titra napeta žica. One su određene brzinom prostiranja valova:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

gdje je  $F$  sila kojom je žica nategnuta, a  $\mu$  linearna gustoća žice.

**6. Kako nastaje stojni val? Objasnite primjer transverzalnog stojnog vala na žici učvršćenoj na jednom kraju. Objasnite pojam vlastitih frekvencija. (pitanje koje nije na popisu ove godine za sada)**

**Stojni val** je val koji nastaje interferencijom dvaju valova jednake amplitude i jednake frekvencije, a time i jednake valne duljine, koji na istom pravcu putuju jedan nasuprot drugome. Stojni se val ne giba i ne prenosi nikakvu energiju. Stojni valovi mogu biti longitudinalni i transverzalni.

-----  
Primjer: Transverzalni stojni val na napetoj žici učvršćenoj na jednom kraju

Ako je žica učvršćena na jednom kraju ( $x=0$ ), stojni val možemo dobiti tako da se putujući val reflektira na čvrstom kraju žice, vrati natrag i zbroji s upadnim valom.

Ako u smjeru osi - x putuje val:  $s_u = A \sin(\omega t + kx)$

onda će se na čvrstom kraju žice ( $x = 0$ ) val reflektirati mijenjajući fazu za  $\pi$ :

$$s_r = A \sin(\omega t - kx + \pi) = -A \sin(\omega t - kx)$$

Rezultantnu elongaciju žice dobijemo zbrajanjem upadnog i reflektiranog vala:

$$s(x, t) = s_u(x, t) + s_r(x, t) = A \sin(\omega t + kx) - A \sin(\omega t - kx) = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Na žici ima točaka koje trajno miruju, a rezultantni val nije putujući val već stojni val.

Čvorovi stojnog vala, tj. točke koje trajno miruju, su one točke za koje vrijedi da je:

$$\sin kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\lambda}{2}$$

Dakle, čvorovi stojnog vala nalaze se na udaljenostima:

$$n\frac{\lambda}{2}; n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

od čvrstog kraja, a razmak između dva susjedna čvora je  $\lambda/2$ .

-----  
Na napetoj žici, duljine L, **učvršćenoj na oba kraja** mogu se pobuditi samo stojni valovi za koje je duljina žice L jednaka cijelom broju polovina valne duljine:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Vlastite frekvencije** su frekvencije kojima titra napeta žica. One su određene brzinom prostiranja valova:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

gdje je F sila kojom je žica nategnuta, a  $\mu$  linearna gustoća žice.

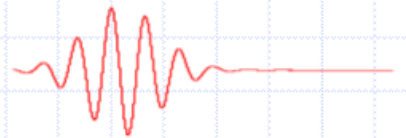
## 7. Što je valni paket, što su to disperzivne sredine odnosno disperzivni valovi.

Harmonički val je neograničen u prostoru, nije lokaliziran. Valni paket (puls) je valno gibanje lokalizirano u prostoru. Valni paket se može dobiti superpozicijom jednostavnih harmoničkih valova različitih amplituda i valnih duljina odnosno frekvencija. Fazna brzina jednostavnih harmoničkih valova ne ovisi o valnoj duljini  $v_f \neq f(\lambda)$  – nedisperzivni valovi koji se šire u nedisperzivnim sredinama. U disperzivnim sredinama šire se disperzivni valovi kod kojih fazna brzina ovisi o valnoj duljini  $v_f = f(\lambda)$ . Grupna brzina je brzina kojom putuje valni paket, koji je u načelu dan superpozicijom velikog broja jednostavnih harmoničkih valova. Energija valnog paketa se giba grupnom brzinom.

## 7. Kako se definira grupna brzina i izvedite izraz kojim se grupna brzina definira preko fazne brzine.

### ◆ Valni paket – ograničeno valno gibanje u prostoru

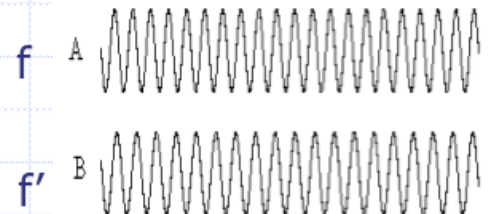
$$u(x, t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} A(\omega) \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) d\omega$$



- Superpozicija dva vala vrlo bliskih frekvencija, daje resultantni val čija se amplituda mijenja s frekvencijom  $(\omega' - \omega'')/2$ .
- Brzina kojom se širi amplituda dobivena superpozicijom ova dva vala je **grupna brzina**

$$u_1(x, t) = A \sin(\omega' t - \frac{\omega'}{v'} x) + A \sin(\omega'' t - \frac{\omega''}{v''} x) =$$

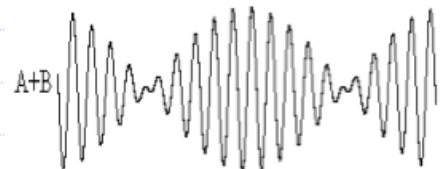
$$= 2A \cos \left[ \frac{\omega' - \omega''}{2} t - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega'}{v'} - \frac{\omega''}{v''} \right) x \right] \sin \left[ \frac{\omega' + \omega''}{2} t - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega'}{v'} + \frac{\omega''}{v''} \right) x \right]$$



$$\frac{\omega' - \omega''}{2} t - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega'}{v'} - \frac{\omega''}{v''} \right) x = n \cdot 2\pi$$

$$\frac{\omega' - \omega''}{2} dt - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega'}{v'} - \frac{\omega''}{v''} \right) dx = 0$$

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega'' - \omega'}{\frac{\omega''}{v''} - \frac{\omega'}{v'}} = \frac{\omega'' - \omega'}{k'' - k'} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$



$$v_f = \frac{\omega}{k} - \text{FAZNA BRZINA}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} - \text{GRUPNA BRZINA}$$

$v_g \rightarrow$   
valni paket