DISKRETNA MATEMATIKA

OSNOVE KOMBINATORIKE I TEORIJE GRAFOVA

— ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA —

Dragan Stevanović
Prirodno-matematički fakultet u Nišu

Marko Milošević
Prirodno-matematički fakultet u Nišu

Vladimir Baltić
Ekonomski fakultet u Beogradu

Niš, 2003-4.

Sadržaj

1 Prebrojavanje sa stilom **7**
1.1 Principi prebrojavanje 7
1.2 Uredjeni izbori elemenata 9
1.3 Permutacije 11
1.4 Neuredjeni izbori elemenata 12
1.5 Binomni identiteti 14
1.6 Princip uključenja-isključenja 18

2 Funkcije generatrise **21**
2.1 Nalaženje funkcija generatrise 21
2.2 Rekurentne jednačine 25
2.3 Particije prirodnih brojeva 29
2.4 Katalanovi brojevi 30
2.5 Metod zmijskog ulja 34

3 Teorija grafova **37**
3.1 Šta je graf? 37
3.2 Stabla 43
3.3 Ojlerovi i Hamiltonovi grafovi 47
3.4 Sparivanja u bipartitnim grafovima 48
3.5 Jača povezanost 50
3.6 Spektar grafa 53

4 Rešenja zadataka **57**

Uvod

Ova zbirka zadataka namenjena je studentima Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu koji slušaju predmet "Diskretna matematika". Autori se nadaju da delove zbirke mogu da koriste i talentovani učenici srednjih škola u pripremama za matematička takmičenja.

Zbirka sadrži 253 zadataka sa rešenjima, koji su rasporedjeni u tri glave: prebrojavanje sa stilom, funkcije generatrise i teorija grafova. Rešenja svih zadataka data su u četvrtoj glavi. Zadaci u svakoj od prve tri glave podeljeni su u odgovarajuće odeljke, a na početku svakog odeljka nalazi se teorijski uvod, koji čine definicije i neke poznate teoreme, iznete bez dokaza.

Lakši zadaci, za čije rešavanje je dovoljna manje-više direktna upotreba definicija i rezultata iznetih u teorijskom uvodu, označeni su sa $^-$. Zadaci uobičajene težine (a ponekad i malo teži od njih) dati su bez oznake, dok su teži zadaci, za čije rešavanje je potrebno više mućkanja glavom, označeni sa $^+$.

Zahvalnost dugujemo Sanji Stevanović, koja je nacrtala veći deo ilustracija u zbirci, kao i Marku Petkoviću za rešenja desetak zadataka.

U Nišu, 12. januara 2004. Autori

Glava 1

Prebrojavanje sa stilom

1.1 Principi prebrojavanja

Matematička definicija prebrojavanja. Neka je N skup prirodnih brojeva. Za proizvoljan prirodni broj $n \in N$, neka je $N_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Ako je X proizvoljan konačan skup, tada se pod *prebrojavanjem* skupa X podrazumeva konstruisanje bijektivne funkcije f, koja za neko $n_0 \in N$ preslikava N_{n_0} u X. Broj n_0 zovemo brojem elemenata skupa X i označavamo sa $|X|$.

Princip jednakosti. Ako izmedju dva konačna skupa A i B postoji bijekcija, tada je $|A| = |B|$.

Princip zbira. Ako su A i B neprazni i disjunktni konačni skupovi ($A \cap B = \emptyset$), tada je $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Princip proizvoda. Neka su X i Y konačni neprazni skupovi, i neka je S podskup $X \times Y$. Neka je $r_x(S) = |S \cap \{(x, y) \colon y \in Y\}|$, a $c_y(S) = |S \cap \{(x, y) \colon x \in X\}|$. Tada važi:

(i) $|S| = \sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} c_y(S)$.

(ii) Ako je $r_x(S) = r$ za svako x i $c_y(S) = c$ za svako y, tada je $r|X| = c|Y|$.

(iii) $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

Dirihleov princip, I. Ako je m loptica smešteno u n kutija i $m > n$, tada se bar u jednoj kutiji nalaze bar dve loptice.

Dirihleov princip, II. Ako je m loptica smešteno u n kutija i $m > nr$, tada se bar u jednoj kutiji nalazi bar $r + 1$ loptica.

Zadaci

1. Predavanju prisustvuje 26 studenata. Svaki mladić poznaje tačno 8 devojaka na predavanju, a svaka devojka poznaje tačno 5 mladića. Koliko devojaka ima na predavanju?

2. a) Dato je nekoliko podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tako da svaki od njih ima četiri elementa i da se svaki element skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$ nalazi u tačno tri od datih podskupova. Koliko ima podskupova? Naći bar jednu familiju podskupova sa takvim osobinama.

   b) Da li je moguće naći familiju podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$ tako da svaki od njih ima tačno tri elementa i da se svaki element skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$ nalazi u tačno pet podskupova?

3. Koliko različitih delilaca ima broj 60000?

4. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Odrediti broj svih funkcija $f : S \mapsto S$ koje nemaju fiksnu tačku.

5. a) Za prirodan broj n i prost broj p, neka je

$$\mu_{n,p} = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

   Dokazati da je $\mu_{n,p}$ najveći stepen broja p koji deli $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

   b) $^+$ Neka je reprezentacija broja n u binarnom sistemu

$$n = 2^{e_1} + 2^{e_2} + \cdots + 2^{e_r},$$

   gde je $e_1 > e_2 > \cdots > e_r \geq 0$. Dokazati da je $n!$ deljivo sa 2^{n-r}, ali ne i sa 2^{n-r+1}.

6. $^-$ Slepi čovek ima hrpu od 10 sivih i 10 crnih čarapa. Koliko čarapa treba da izabere da bi bio siguran da ima par iste boje? Koliko njih treba da izabere da bi bio siguran da ima par sive boje?

7. Neka je X skup od n osoba. Dokazati da postoje bar dve osobe iz X koje imaju isti broj poznanika u X. (Pretpostavlja se da je poznanstvo simetrična relacija.)

8. *Celobrojna tačka* u trodimenzionalnom prostoru je tačka čije su sve koordinate celi brojevi. Ako je dato devet celobrojnih tačaka, dokazati da postoji bar jedan par tih tačaka tako da je središte duži koja ih spaja takodje celobrojna tačka.

9. $^-$ Dokazati da u proizvoljnom skupu od $n + 1$ prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika deljiva sa n.

10. Dokazati da za svako $n \in N$ postoji broj oblika $11 \ldots 100 \ldots 0$ koji je deljiv sa n.

11. Dokazati da postoji $n \in N$, tako da se decimalni zapis broja 3^n završava sa 0001.

12. $^+$ Dokazati da se medju $n + 1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$ mogu naći tri broja tako da jedan od njih bude jednak zbiru ostala dva.

13. $^-$ Dokazati da medju $n+1$ različitih elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ postoje dva koja su uzajamno prosta.

14. a) Dokazati da u svakom podskupu sa $n+1$ elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ postoje dva različita broja tako da jedan od njih deli drugi;

    Uputstvo. Neka je X podskup sa $n+1$ elemenata, a Y skup svih neparnih brojeva $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$. Definisati funkciju $f\colon X \mapsto Y$ pomoću

    $$f(x) = \text{najveći neparan prirodan broj koji deli } x$$

    i uočiti da f nije injektivno preslikavanje...

    b) Dokazati da postoji podskup sa n elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ tako da nijedan od njegovih elemenata ne deli neki drugi element.

15. Neka je dato n celih brojeva a_1, a_2, $\ldots$, a_n, koji ne moraju da budu različiti. Dokazati da postoji skup uzastopnih brojeva a_k, a_{k+1}, $\ldots$, a_l čiji je zbir $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$ deljiv sa n.

16. Golf igrač ima d dana da se pripremi za turnir i mora da vežba igrajući bar jednu partiju dnevno. Kako bi izbegao prezasićenost, igrač ne bi smeo da odigra više od m partija ukupno. Ako za r važi $1 \leq r \leq 2d - m - 1$, dokazati da postoji niz uzastopnih dana u toku kojih je igrač odigrao tačno r partija.

17. $^+$ a) Neka je x_1, x_2, $\ldots$, x_r niz različitih celih brojeva. Za svako i, $i = 1, 2, \ldots, r$, neka m_i označava dužinu najdužeg rastućeg podniza koji počinje sa x_i i neka n_i označava dužinu najdužeg opadajućeg podniza koji počinje sa x_i. Dokazati da je funkcija f, koja broju i, $i = 1, 2, \ldots, r$, dodeljuje par (m_i, n_i), injektivna funkcija.

    b) U proizvoljnom nizu $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ različitih $mn+1$ realnih brojeva, ili postoji rastući podniz $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1})$, ili postoji opadajući podniz $a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1})$, ili postoje oba.

1.2 Uredjeni izbori elemenata

Uredjeni izbori sa ponavljanjem. Neka je N skup sa n elemenata, $n \geq 0$, a M skup sa m elemenata, $m \geq 1$. Broj svih preslikavanja $f\colon N \mapsto M$ jednak je m^n.

Karakteristična funkcija i broj podskupova. Neka je N skup sa n elemenata, $n \geq 0$, a M njegov podskup. Podskup M se opisuje *karakterističnom funkcijom* $\chi_M\colon N \mapsto \{0, 1\}$, tako da je

$$\chi_M(i) = \begin{cases} 0, & i \notin M \\ 1, & i \in M \end{cases}$$

Broj svih podskupova skupa N jednak je 2^n.

Uredjeni izbori bez ponavljanja. Neka je N skup sa n elemenata, $n \geq 0$, a M skup sa m elemenata, $m \geq 0$. Broj svih injektivnih preslikavanja $f\colon N \mapsto M$ jednak je $m(m-1)\cdot \dots \cdot (m-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$.

Faktorijel. Ako je $n \in N$, tada se proizvod $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ kraće označava kao $n!$ i čita n *faktorijel.* Po dogovoru je $0! = 1$.

Zadaci

18. $^-$ U radnji postoji k različitih vrsta razglednica, koje treba poslati prijateljima, kojih ima n.

    a) Na koliko načina je moguće svakom prijatelju poslati tačno jednu razglednicu?

    b) Koliko ima načina ako svakom prijatelju treba poslati različitu razglednicu?

    c) Od svake vrste razglednica je kupljena tačno po jedna. Na koliko načina je moguće poslati razglednice prijateljima (prijatelj može dobiti bilo koji broj razglednica, uključujući i 0)?

19. Koliko ima šestocifrenih brojeva u kojima su bar dve cifre iste?

20. Da li medju brojevima $1, 2, \ldots, 9999999$ ima više onih koji sadrže cifru 5 u decimalnom zapisu ili onih koji je ne sadrže?

21. $^+$ Odrediti broj uredjenih parova (A, B), gde je $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

22. Koliko se binarnih relacija može definisati na skupu sa n elemenata? Koliko postoji: a) refleksivnih, b) simetričnih, c) refleksivnih i simetričnih relacija?

23. a) Koliko ima $n \times n$ matrica čiji elementi pripadaju skupu $\{0, 1, \ldots, q-1\}$?

    b) $^{++}$ Neka je q prost broj. Koliko ima matrica iz a) čija determinanta nije deljiva sa q? (Drugim rečima, koliko ima nesingularnih matrica nad konačnim poljem sa q elemenata?)

24. $^-$ Komitet od devet članova treba da izabere predsednika, sekretara i blagajnika. Koliko mogućih izbora postoji?

25. U odeljenju ima m devojčica i n dečaka.

    a) $^-$ Na koliko načina se učenici mogu poredjati u vrstu?

    b) Na koliko načina se učenici mogu poredjati u vrstu tako da su sve devojčice zajedno?

26. Na koliko načina se mogu izabrati jedno crno i jedno belo polje na šahovskoj tabli tako da se ona ne nalaze u istoj vrsti ili istoj koloni?

27. Koliko ima $m \times n$ matrica, $m, n \in N$, sa elementima $+1$ i -1, takvih da je proizvod elemenata u svakoj vrsti i svakoj koloni jednak:

    a) $+1$;

    b) -1?

1.3 Permutacije

Permutacije. Permutacija α skupa X sa n elemenata, $n \geq 0$, je bijektivno preslikavanje $\alpha\colon X \mapsto X$. Broj permutacija skupa X jednak je $n!$.

Standardni zapis permutacije. Permutacija α skupa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ standardno se zapisuje na sledeći način:

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \alpha(x_1) & \alpha(x_2) & \ldots & \alpha(x_n) \end{pmatrix}.$$

Ciklusni zapis permutacije. Permutacija α skupa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ zapisuje se pomoću ciklusa na sledeći način:

i) Ako je X prazan skup, ciklusni zapis je prazna reč.

ii) Izabere se proizvoljni element $x \in X$ i odredi najmanji prirodni broj r tako da je $\alpha^r(x) = x$. Ciklusni zapis permutacije α se sastoji od ciklusa $(x, \alpha(x), \alpha^2(x), \ldots, \alpha^{r-1}(x))$ i ciklusnog zapisa za restrikciju permutacije α na skup $X \setminus \{x, \alpha(x), \alpha^2(x), \ldots, \alpha^{r-1}(x)\}$.

Uobičajeno je da se ciklusi dužine 1 ne navode u ciklusnoj notaciji.

Red permutacije. Za permutaciju $p : X \mapsto X$ neka p^k označava permutaciju dobijenu k-tostrukom kompozicijom p, tj. $p^1 = p$ i $p^k = p \circ p^{k-1}$. Pod *redom* permutacije p podrazumeva se najmanji prirodan broj $k \geq 1$ tako da je $p^k = id$, gde id označava identičku permutaciju (koja svaki element slika u samog sebe).

Zadaci

28. Na koliko načina se može postaviti osam topova na šahovsku tablu tako da se oni medjusobno ne napadaju?

29. Ako je $n \geq 2$, koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima su brojevi 1 i 2 susedni?

30. Ako je $n \geq 2$, koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima broj 2 stoji (ne obavezno odmah) iza broja 1?

31. Ako je $n \geq k + 2$, koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima izmedju brojeva 1 i 2 stoji tačno k drugih brojeva?

32. *Kružna permutacija* je raspored različitih objekata na kružnici (ili za okruglim stolom). Naći broj kružnih permutacija n različitih objekata.

33. Upravni odbor od n članova ima predsednika i dva potpredsednika. Na koliko načina se oni mogu smestiti za okrugli sto tako da oba potpredsednika sede pored predsednika?

34. Naći broj načina da se n devojaka i n mladića smesti za okrugli sto tako da izmedju svake dve devojke sedi neki mladić.

35. $^{-}$ Napisati ciklusni zapis za permutaciju $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

36. $^{-}$ Odrediti red permutacije $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

37. Preferans špil od 32 karte je podeljen u dva jednaka dela i promešan *preplitanjem*, tako da ako je originalni poredak karata bio $1, 2, 3, 4, \ldots$, novi poredak je $1, 17, 2, 18, \ldots$. Koliko puta treba primeniti ovakvo mešanje da bi se špil vratio u originalni poredak?

38. Koliko permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ ima samo jedan ciklus?

1.4 Neuredjeni izbori elemenata

Binomni koeficijenti. Neka su n i k nenegativni celi brojevi. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ je funkcija promenljivih n i k data pomoću

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}.$$

Za $k = 0$ definiše se $\binom{n}{0} = 1$, a za $k < 0$ i $k > n$ definiše se $\binom{n}{k} = 0$.

Neuredjeni izbori bez ponavljanja. Neka je X konačan skup, a k nenegativan ceo broj. Broj k-točlanih podskupova skupa X jednak je $\binom{|X|}{k}$.

Neuredjeni izbori sa ponavljanjem. Svakom neuredjenom izboru k elemenata sa ponavljanjem skupa $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ odgovara n-torka celih brojeva $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, takvih da je $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = k$. Broj ovakvih izbora jednak je $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Kompozicije prirodnih brojeva. Svakom neuredjenom izboru k elemenata sa ponavljanjem skupa $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tako da je svaki element izabran bar jednom, odgovara n-torka celih brojeva $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, takvih da je $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = k$. Ovakva n-torka celih brojeva se naziva *kompozicija broja k na n delova*, a broj ovakvih kompozicija jednak je $\binom{k-1}{n-1}$.

Permutacije sa ponavljanjem. Neka je X skup sa n elemenata, a $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ skup sa m elemenata. Permutacija sa ponavljanjem tipa

$(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, je preslikavanje $\alpha\colon X \mapsto Y$ tako da je $|\alpha^{-1}(y_i)| = k_i$. Broj permutacija sa ponavljanjem tipa $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ jednak je $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$, naziva se *multinomijalni koeficijent* i označava sa $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$.

Zadaci

39. Dokazati da je $\binom{n}{k} \le \binom{n}{k+1}$ za $k \le [n/2]$ i $\binom{n}{k} \ge \binom{n}{k+1}$ za $k \ge [n/2]$.

40. Po šahovskoj tabli kreće se top. On polazi iz donjeg levog ugla table i kreće se, jedno po jedno polje, po najkraćem putu do gornjeg desnog ugla table. Koliko postoji najkraćih puteva?

41. Na koliko načina se $n = n_1+n_2+\cdots+n_m$ različitih kuglica može razmestiti u m različitih kutija, tako da za svako i, $1 \le i \le m$, važi da se u i-toj kutiji nalazi n_i kuglica?

42. Na koliko načina se od 6 osoba može sastaviti 5 različitih tročlanih komisija, tako da je za svaku komisiju unapred poznato njeno zaduženje?

43. Koliko postoji permutacija špila od 52 karte u kojima se sva četiri asa nalaze medju prvih 10 karata?

44. Jedan čovek ima 12 rodjaka—5 muškaraca i 7 žena, a njegova žena takodje ima 12 rodjaka—7 muškaraca i 5 žena. Zajedničkih rodjaka nemaju. Rešili su da pozovu u goste svako po 6 svojih rodjaka, ali tako da medju gostima bude 6 žena i 6 muškaraca. Na koliko načina to mogu uraditi?

45. Na koliko načina košarkaški trener može sastaviti ekipu od 5 košarkaša sa dva centra, dva beka i jednim krilom, ako na raspolaganju ima 10 košarkaša, od kojih trojica mogu biti samo centri, trojica samo bekovi, jedan samo krilo, dvojica krilo ili bek, a jedan krilo ili centar?

46. Na koliko načina se $2n$ vojnika (različitih po visini) može rasporediti u dve vrste tako da je svaki vojnik iz prve vrste niži od vojnika iza njega?

47. Dato je $3n + 1$ predmeta, tako da se n od tih predmeta ne razlikuju medjusobno, a svi ostali predmeti se razlikuju i medjusobno i od prvih n predmeta. Na koliko načina se može izabrati n predmeta?

48. $^+$ U skupštini ima 30 poslanika. Svaki od poslanika je u svadji sa tačno deset drugih poslanika. Na koliko načina može biti formirana tročlana komisija poslanika tako da su svaka dva člana komisije medjusobno u svadji ili da nikoja dva člana komisije nisu u svadji?

49. U radnji postoji k različitih vrsta razglednica, čiji je broj ograničen—postoji tačno a_i razglednica od i-te vrste. Na koliko načina je moguće poslati prijateljima, kojih ima n, sve razglednice iz radnje ako je dozvoljeno poslati više puta istu vrstu razglednice istom prijatelju?

50. Neka je izmnožen izraz $(x+y+z)^n$ i neka su sabirci grupisani zajedno na uobičajeni način: na primer za $n=2$,

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx.$$

Koliko ima sabiraka na desnoj strani, ako je n proizvoljan prirodan broj?

51. Na koliko načina se n_1 plavih, n_2 žutih i n_3 crvenih kuglica može razmestiti u m kutija, ako se kuglice iste boje ne razlikuju medjusobno?

52. Na koliko načina se 8 istih svezaka, 9 istih olovaka i 10 istih knjiga mogu podeliti trojici učenika, tako da svaki učenik dobije bar po jedan predmet od svake vrste?

53. U kutiji se nalazi 36 žutih, 27 plavih, 18 zelenih i 9 crvenih kuglica, pri čemu se kuglice iste boje ne razlikuju medjusobno. Na koliko načina se može izabrati 10 kuglica?

54. a) Na polici se nalazi 12 knjiga. Na koliko načina se može izabrati 5 knjiga tako da nikoje dve izabrane knjige nisu susedne?

    b) Na koliko načina se 7 patuljaka i 5 goblina može poredjati u red tako da nikoja dva goblina nisu susedna?

    c) Za okruglim stolom kralja Artura sedi 12 vitezova. Na koliko načina se može izabrati 5 vitezova tako da nikoja dva viteza ne sede jedan do drugoga?

55. Koliko funkcija $f:\{1,2,\ldots,n\}\mapsto\{1,2,\ldots,n\}$ je *monotono neopadajuće*, tj. za $i<j$ važi $f(i)\le f(j)$?

56. $^+$ Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa X naziva se *antilanac* ako nijedan skup iz $\mathcal{F}$ nije podskup nekog drugog skupa iz $\mathcal{F}$. Ako je $|X|=n$, tada najveći antilanac skupa X sadrži $\binom{n}{[n/2]}$ skupova.

57. Dokazati da je

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \sum_{i=1}^{k}\binom{n-1}{n_1,\ldots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\ldots,n_k}.$$

1.5 Binomni identiteti

Faktorijelna reprezentacija. Za cele brojeve n i k, $n\ge k\ge 0$, važi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Uslov simetričnosti. Za cele brojeve n i k, $n\ge 0$, važi

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Adiciona formula. Za cele brojeve n i k važi

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Binomna teorema. Za svaki nenegativan ceo broj n važi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Multinomijalna teorema. Za svaki prirodan broj $n \geq 1$ važi

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n \\ k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}.$$

Izvlačenje iz zagrada. Za cele brojeve n i k, $k \neq 0$, važi

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}.$$

Sumaciona formula. Za cele brojeve n i m, $n, m \geq 0$, važi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \cdots + \binom{r+n}{n} = \binom{r+n+1}{n}$$

i

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Negacija gornjeg indeksa. Za cele brojeve n i k važi

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Pojednostavljivanje proizvoda. Za cele brojeve n, m i k važi

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

Sume proizvoda. Za cele brojeve n i r, $r \geq 0$, važi

$$\sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

i

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n}.$$

Takodje važi i Vandermondova konvolucija:

$$\sum_k \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}.$$

Ispuštanje granica za indeks sumiranja. U radu sa sumama koje sadrže binomne koeficijente često se ispuštaju granice za indeks sumiranja (na primer, navodi se samo $\sum_k$ kao u prethodnom pasusu), s tim što se podrazumeva da se sumiranje vrši po svim vrednostima indeksa za koje je izraz koji se sumira različit od 0.

Tako, na primer, u sumi $\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$ iz prethodnog pasusa sumiranje se vrši po svim vrednostima k za koje je $0 \le k \le r$ (da bi bilo $\binom{r}{k} \ne 0$) i $0 \le n-k \le s \Rightarrow n-s \le k \le n$ (da bi bilo $\binom{s}{n-k} \ne 0$), odnosno, za koje je $\max(0, n-s) \le k \le \min(r, n)$. Sada je jasno zašto je mnogo jednostavnije ispustiti granice za indeks sumiranja, ako izraz ima vrednost 0 kada je indeks van tih granica.

Dokaz kombinatornim argumentima. Pod dokazivanjem identiteta kombinatornim argumentima podrazumeva se nalaženje skupa X tako da obe strane identiteta predstavljaju broj elemenata skupa X.

Zadaci

58. Za realni broj x i nenegativan ceo broj n, neka je $x^{\underline{0}} = 1$, a

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Dokazati sledeći analog binomne teoreme:

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{n-i}}.$$

59. Dokazati da je za svaki prirodan broj n broj $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ neparan.

60. Izračunati zbir koeficijenata polinoma po x koji predstavlja razvoj izraza $(3x-2)^{100}$.

61. Naći koeficijent uz:

a) x^2y^3z u razvoju izraza $(2x+2y-3z)^6$,

b) x^2y^8z u razvoju izraza $(2x+y^2-5z)^7$,

c) $u^2v^3z^3$ u razvoju izraza $(3uv-2z+u+v)^7$.

62. Naći koeficijent uz:

a) x^{10} u razvoju izraza $(1 - x^2 + x^3)^{11}$.

b) x^3 u razvoju izraza $(1 - x + 2x^2)^9$.

63. Dokazati sledeće identitete:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1};$$

$$\text{b)} \quad \sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k} = (n+2) \cdot 2^{n-1};$$

$$\text{c)} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)\binom{n}{k} = 0.$$

64. Dokazati da je

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

65. Dokazati da je

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n+1}{1} + \frac{1}{2^2}\binom{n+2}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} = 2^n.$$

66. Dokazati identitet

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

pomoću kombinatornih argumenata.

67. Naći vrednost izraza $\sum_{k=0}^{n} k^4$.

68. Izračunati

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{k}{m},$$

$$\text{b)} \quad \sum_{k=0}^{n} k\binom{k}{m}.$$

69. Ako je $n \geq m \geq 0$:

a) Dokazati da je

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \begin{cases} (-1)^n, & n = m \\ 0, & n > m \end{cases}$$

b) $^+$ Izračunati

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m}.$$

70. $^+$ Dokazati da je

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{m}{k} 2^k.$$

71. Ako je $n \geq 0$, koja je vrednost izraza

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad ?$$

72. $^+$ Naći vrednost izraza

$$\sum_{k} \binom{m-r+s}{k} \binom{n+r-s}{n-k} \binom{r+k}{m+n}$$

u zavisnosti od r, s, m i n, ako su m i n nenegativni celi brojevi.

Uputstvo. Za početak zameniti $\binom{r+k}{m+n}$ sa $\sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{k}{j}$.

73. $^+$ Ako je $0 \leq k < m$, dokazati da važi sledeća formula:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+m} + \binom{n}{k+2m} + \cdots = \frac{1}{m} \sum_{0 \leq j < m} \left(2 \cos \frac{j\pi}{m}\right)^n \cos \frac{j(n-2k)\pi}{m}.$$

Na primer za $k = 1$ i $m = 3$ važi

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{3}\right).$$

Uputstvo. Binomna formula, Muavrova formula $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ i odgovarajući m-ti koren iz jedinice su osnovni sastojci rešenja ovog problema ...

1.6 Princip uključenja-isključenja

Princip uključenja-isključenja. Za konačne skupove A_1, A_2,..., A_n važi

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Permutacije bez fiksne tačke. Broj permutacija π konačnog skupa X sa n elemenata, takvih da je $\pi(i) \neq i$ za svako $i \in X$, jednak je

$$D(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Zadaci

74. $^-$ U razredu sa 30 učenika, 12 od njih voli matematiku, 14 voli fiziku, 13 hemiju, 5 učenika voli i matematiku i fiziku, 7 voli i fiziku i hemiju, a 4 voli matematiku i hemiju. Tri učenika vole sva tri predmeta. Koliko učenika ne voli ni jedan od ovih predmeta?

75. $^-$ Odrediti koliko ima brojeva ne većih od 1000 koji su deljivi bar jednim od brojeva 2, 3, 5 ili 7.

76. Neka je $n \in N$ i $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konačni skupovi. Dokazati jednakost

$$|S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcup_{i \in I} S_i \right|.$$

77. U radnji je kupljeno k različitih razglednica koje treba poslati prijateljima, kojih ima n.

    a) Na koliko načina je moguće poslati razglednice, ako svaki prijatelj treba da dobije bar jednu razglednicu?

    b) Na koliko načina je moguće poslati razglednice, ako tačno l prijatelja ne treba da dobiju razglednicu?

78. Koliko ima n-tocifrenih brojeva u čijem zapisu učestvuje k različitih nenula cifara, gde je $1 \leq k \leq 9$?

79. Kocka za igru čije su strane numerisane brojevima $1, 2, 3, 4, 5, 6$ baca se do pojave svih šest strana. Rezultat takvog eksperimenta je niz cifara koje su se pojavljivale na gornjoj strani kocke, uključujući i poslednju šestu stranu kocke. Koliko ima nizova sa n cifara koji mogu biti rezultat eksperimenta?

80. Na koliko načina se mogu poredjati u niz 3 Amerikanca, 3 Engleza i 3 Rusa, tako da nikoja tri zemljaka ne stoje zajedno?

81. a) Koliko se reči, koje mogu da budu besmislene, dobija premeštanjem slova reči KOMBINATORIKA?

    b) Koliko ima takvih reči kod kojih nikoja dva ista slova nisu susedna?

82. a) Neka su $p_1, p_2, \ldots, p_m$ različiti prosti brojevi, $k_1, k_2, \ldots, k_m$ prirodni brojevi, $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ i $\varphi(n)$ broj prirodnih brojeva manjih od n i uzajamno prostih sa n. Dokazati da je $\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2}) \cdots (1-\frac{1}{p_m})$.

    b) Dokazati da za prirodne brojeve $m, n > 1$ važi $\varphi(m)\varphi(n) \leq \varphi(mn)$. Kada važi jednakost?

    c) $^+$ Dokazati da za proizvoljan prirodan broj n važi $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ (sumira se po svim prirodnim brojevima d koji dele n).

83. a) Na ples je došlo n bračnih parova. Na koliko načina oni mogu da oforme n plesnih parova tako da nijedan par supružnika ne igra zajedno?

    b) Svaki od lekara A i B treba da obavi pregled istih n pacijenata. Oba lekara počinju posao u isto vreme, a svaki od njih pregleda jednog pacijenta za 15 minuta. Na koliko načina se mogu rasporediti pacijenti, tako da svih $2n$ pregleda bude obavljeno već posle $\frac{n}{4}$ časova?

84. Naći broj permutacija koje imaju tačno k fiksnih tačaka.

85. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ koje nijedan paran broj ne slikaju u samog sebe?

86. $^{+}$ Na koliko načina n bračnih parova može sesti za okrugli sto sa $2n$ označenih stolica tako da supružnici ne sede jedno pored drugog?

87. $^{+}$ a) Naći broj ekvivalencija sa k klasa na skupu sa n elemenata.

    Uputstvo. Najpre rešiti problem za $k = 2, 3$ i $k = n-1, n-2$. U opštem slučaju, rezultat je suma.

    b) Naći ukupan broj B_n ekvivalencija na skupu sa n elemenata. Broj B_n se zove n-ti *Bell-ov broj.*

    c) Dokazati da je

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

    gde je $B_0 = 1$.

    d) Dokazati da je $B_n = \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!}$.