DIGITALNI SUSTAVI ZA OBRADU SIGNALA

DSOS22

Julije Ožegović
FESB Split

DIGITALNI SUSTAVI ZA OBRADU SIGNALA

- UVOD: ANALOGNI I DIGITALNI SUSTAVI
- I. OSNOVE DIGITALNE OBRADE SIGNALA
- II. DIGITALNI FILTRI U VREMENSKOM I FREKVENCIJSKOM PODRUČJU
- III. STRUKTURA DIGITALNIH SUSTAVA ZA OBRADU SIGNALA
- IV. DIGITALNA OBRADA SIGNALA U PRIMJENI

II. DIGITALNI FILTRI U VREMENSKOM I FREKVENCIJSKOM PODRUČJU

- 8. SINTEZA NEREKURZIVNIH FILTARA
- 9. SINTEZA NEREKURZIVNIH FILTARA FOURIEROVOM TRANSFORMACIJOM
- 10. SINTEZA REKURZIVNIH FILTARA
- 11. DISKRETNA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA
- 12. BRZA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA
- 13. POSTUPCI BRZE FOURIEROVE TRANSFORMACIJE
- 14. FFT OBRADA SIGNALA

11. DISKRETNA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA

- 11.1. DEFINICIJA DFT
- 11.2. SVOJSTVA DFT
- 11.3. RAČUNANJE DFT

11.1. DEFINICIJA DFT

- OSNOVA I DEFINICIJA DFT I IDFT
- ODNOS DFT, DFN i FTAN

- OSNOVA I DEFINICIJA DFT I IDFT

- Rad u frekvencijskom području
  - do sada smo definirali DFN i FT aperiodičkog niza
  - dobili smo
    - diskretni spektar periodičkog niza i
    - kontinuirani spektar aperiodičkog niza – zgodan za opis sustava
  - oba spektra su periodička,
    što je posljedica uzorkovanja signala
- DFT – diskretna Fourierova transformacija
  - definicija
  - način efikasnog izračunavanja (FFT)

- DEFINICIJA DFT I IDFT

- Signali:
  - striktno periodički se ponavljaju u budućnosti
    - pa ne nose informaciju
    - te nam nisu interesantni
  - aperiodički su neodređenog budućeg oblika, pa nose informaciju
  - aperiodički signali su najčešći u prirodi i primjeni

- DEFINICIJA DFT I IDFT

- Za aperiodičke signale definiramo DFT i IDFT:
  - DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp(-j2\pi kn/N) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{kn}$$

$$W_N = \exp(-j2\pi/N)$$

  - Inverzna DFT (IDFT)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{-kn}$$

  - DFT formira periodički spektar
  - IDFT formira periodički signal
  - obje predstavljaju konačni period spektra odnosno signala

- USPOREDBA DFT sa DFN i FTAN

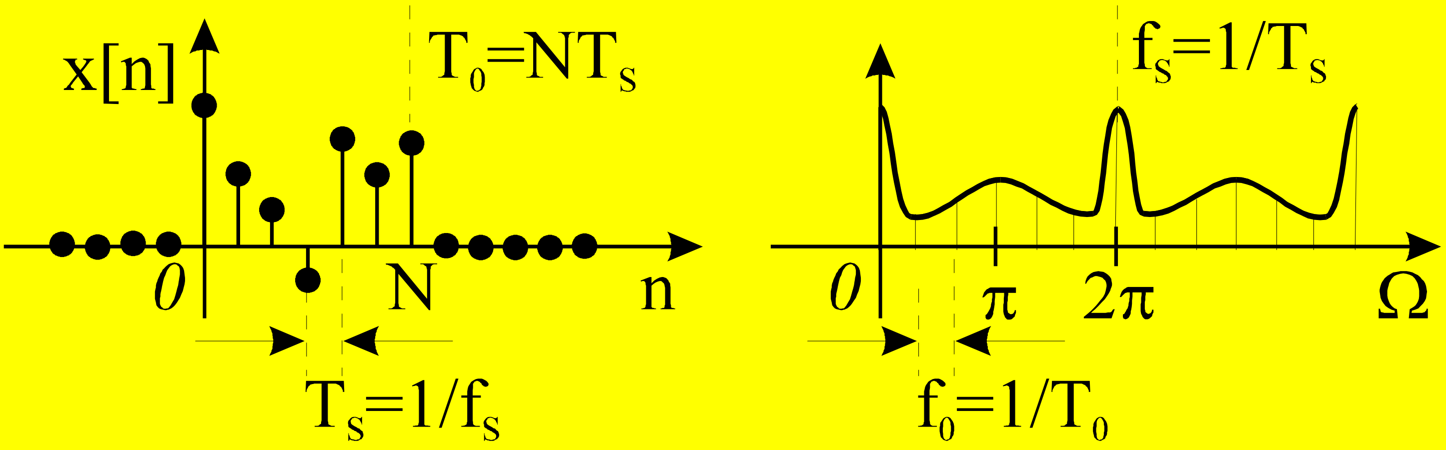
- Usporedba DFT sa DFN:
  - DFT je suštinski identična sa diskretnim Fourierovim nizom:
    - samo je sada 1/N na strani inverzne transformacije (uobičajeno)
    - parametri a_k sada su nazvani X[k]
  - stoga DFT može značiti:
    - DFN, ako je signal striktno periodičan
    - način izračuna, ako je signal aperiodičan
  - u oba slučaja DFT daje kompletni informaciju o signalu
    - jedino se kod aperiodičkog ona mijenja iz bloka u blok uzoraka

- USPOREDBA DFT sa DFN i FTAN

- Usporedba DFT sa FTAN:
  - FTAN već opisuje aperiodičke nizove:
    - problem je što daje kontinuirani spektar
    - time možemo opisati frekvencijski odziv sustava
    - međutim ne možemo ga koristiti u numeričkoj obradi računalom
  - treba nam UZORKOVANA verzija spektra
  - DFT upravo daje takvu, uzorkovanu verziju spektra!
  - pitamo se koliko treba uzoraka spektra, odnosno koji je korak uzorkovanja

- USPOREDBA DFT sa DFN i FTAN

- Uzorkovanje spektra:
  - teorem uzorkovanja kaže
    - kontinuirani spektar signala koji traje T_0 sekundi
      može se predstaviti
      sa uzorcima spektra razmaknutim najviše $1/\ T_0$ herca



- USPOREDBA DFT sa DFN i FTAN

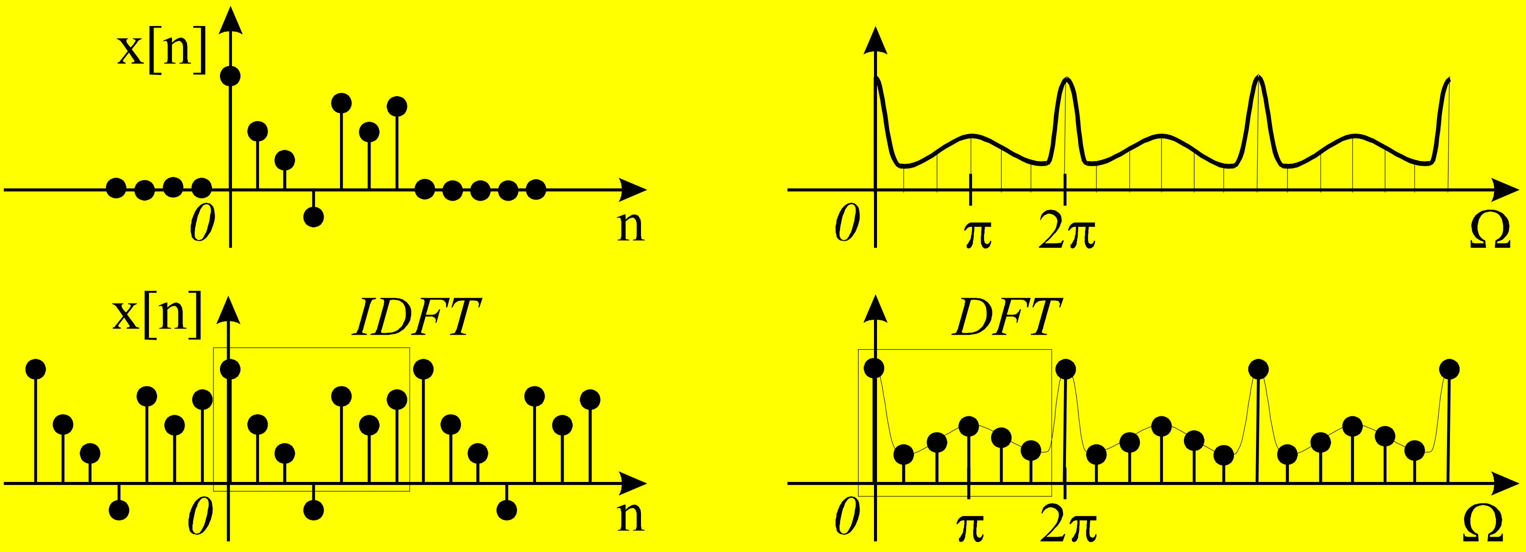
- Uzorkovanje spektra:
  - spektar je periodičan s periodom 2π:
    - $T_0 = NT_S$ (T_S=period uzorkovanja)
    - uzorci spektra razmaknuti su $1/NT_S$ herca ili $2\pi/NT_S$ radijana/s
  - znamo da je $\Omega = \omega T_S = 2\pi f T_S$
    - $f = f_S = 1/T_S$ imamo: $\Omega = 2\pi T_S / T_S = 2\pi$
    - $f = f_0 = 1/T_0$ imamo: $\Omega = 2\pi T_S / T_0 = 2\pi T_S / NT_S = 2\pi/N$
  - dakle razmak uzoraka je najviše $2\pi/N$ radijana u Ω
  - u periodu spektra od 2π imamo najmanje N uzoraka

- USPOREDBA DFT sa DFN i FTAN

- Uzorkovanje spektra:
  - DFT upravo daje
    - N uzoraka u jednom periodu spektra
    - na osnovi N uzoraka vremenskog signala
    - to je ranije spomenuta podudarnost stupnjeva slobode
  - ako je vremenski signal realan
    - spektar je periodičan i zrcalan
    - imamo pola jedinstvenih uzoraka spektra,
      ali koji su kompleksni
  - N, koliko daje DFT, je upravo optimalan broj uzoraka

- USPOREDBA DFT sa DFN i FTAN

- Usporedba vremenskih signala i spektra:



11.2. SVOJSTVA DFT

- PERIODIČNOST, LINEARNOST, VREMENSKI POMAK
- KONVOLUCIJA, MODULACIJA

SVOJSTVA DFT

- DFT ima sva svojstva koja ima DFN i FTAN:
  - periodičnost

$$x[n] = x[n+N]\ ;\ X[k] = X[k+N]$$

  - linearnost
    ako je: $x_1[n] \leftrightarrow X_1[k]\ ;\ x_2[n] \leftrightarrow X_2[k]$

    tada je:

$$A \cdot x_1[n] + B \cdot x_2[n] \leftrightarrow A \cdot X_1[k] + B \cdot X_2[k]$$

  - vremenski pomak

$$x_1[n-n_0] \leftrightarrow X[k] \cdot \exp(-j2\pi k n_0 / N) = X[k] \cdot W_n^{kn_0}$$

SVOJSTVA DFT

- DFT ima sva svojstva koja ima DFN i FTAN:
  - konvolucija
    ako je: $x_1[n] \leftrightarrow X_1[k]\ ;\ \ x_2[n] \leftrightarrow X_2[k]$

    tada je:
    $$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[n] \cdot x_2[m-n] \leftrightarrow X_1[k] \cdot X_2[k]$$
  - modulacija:

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1[m] \cdot X_2[k-m]$$

11.3. RAČUNANJE DFT

- KRITERIJI BRZINE
- KOMPLEKSNE OPERACIJE
- REALNI I KOMPLEKSNI VREMENSKI SIGNAL
- POLARNI PRIKAZ

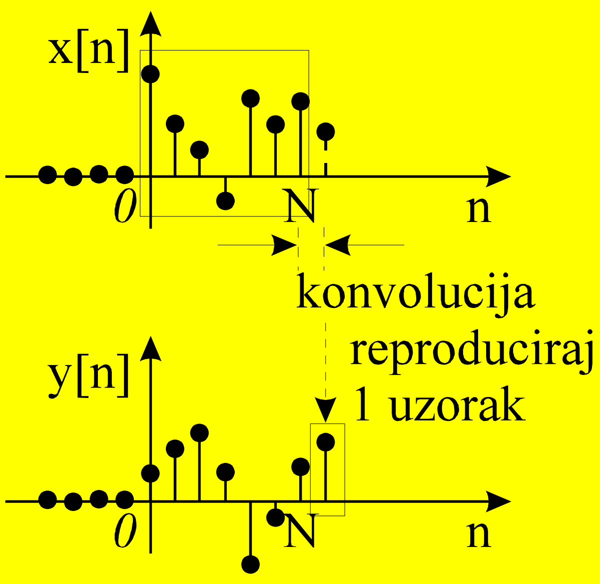
KRITERIJI BRZINE DFT

- Rad u stvarnom vremenu:
  - uzeti N uzoraka (prividnog) perioda signala
  - obaviti sve operacije u NT_s vremena
    - do tada se nakupi novih N uzoraka
  - množenje
    - na računalu opće namjene je sporo
    - na specijalnim DSP platformama je brzo
  - grananje
    - nakon rješenja množenja, postaje značajno
  - izračun sin, cos: izračunati unaprijed, očitavati iz tablice

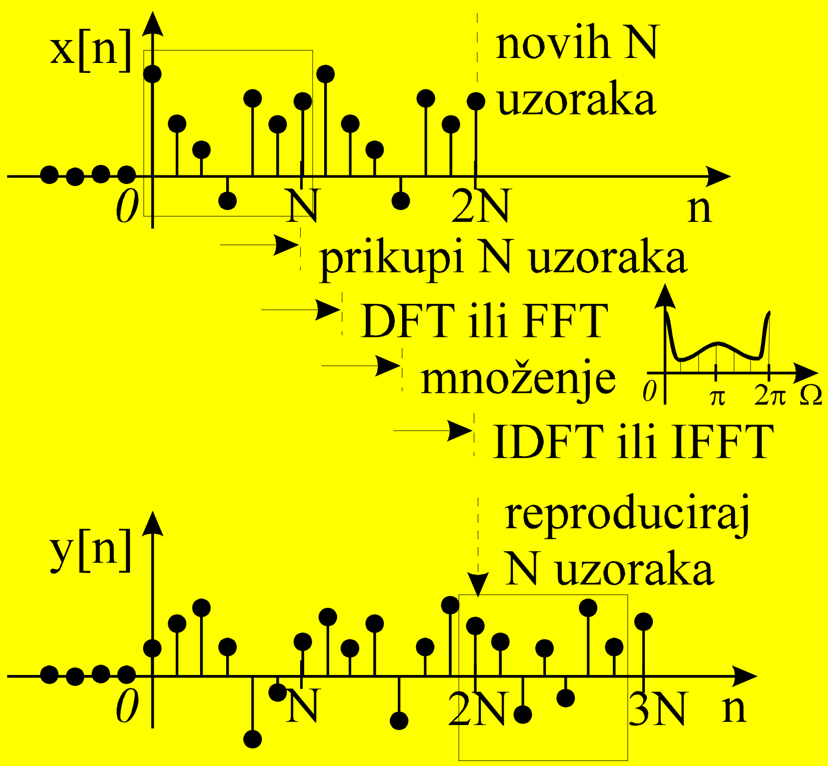
KRITERIJI BRZINE DFT

- Usporedba vremenske i frekvencijske obrade:

vremenska obrada:



frekvencijska obrada:



KOMPLEKSNE OPERACIJE

- Računamo:
  - DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp(-j2\pi kn/N) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \{\cos(2\pi kn/N) - j\sin(2\pi kn/N)\}$$

  - IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot \exp(j2\pi kn/N) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot \{\cos(2\pi kn/N) + j\sin(2\pi kn/N)\}$$

  - uočavamo iste operacije!

REALNI VREMENSKI SIGNAL

- Vremenski signal može biti realan:
  - računamo posebno realnu, a posebno imaginarnu komponentu spektra

$$\Re(X[k]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \cos(2\pi kn/N)$$

$$\Im(X[k]) = -\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \sin(2\pi kn/N)$$

  - dvije vrijednosti pamtimo zasebno u memoriji računala

KOMPLEKSNI VREMENSKI SIGNAL

- Vremenski signal može biti kompleksan:

$$x[k] = r[k] + ji[k]$$

  - DFT je sada oblika:

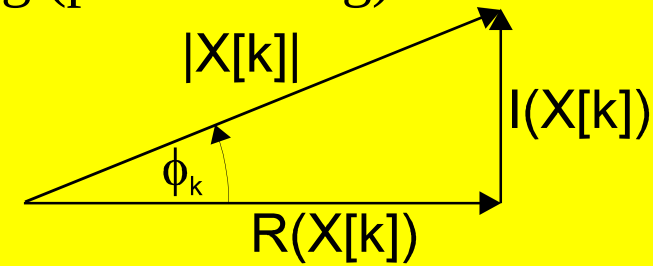
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} (r[n] + ji[n]) \cdot \{\cos(2\pi kn/N) - j\sin(2\pi kn/N)\}$$

$$\Re(X[k]) = \sum_{n=0}^{N-1} r[n] \cdot \cos(2\pi kn/N) + i[n] \cdot \sin(2\pi kn/N)$$

$$\Im(X[k]) = \sum_{n=0}^{N-1} i[n] \cdot \cos(2\pi kn/N) - r[n] \cdot \sin(2\pi kn/N)$$

POLARNI PRIKAZ

- Kompleksni broj:
  - realna i imaginarna komponenta su koordinate kartezijevog (pravokutnog) sustava u ravnini (x, y)



  - moguć je zapis u polarnim koordinatama (r, ϕ)

$$|X[k]| = \left\{ \Re(X[k])^2 + \Im(X[k])^2 \right\}^{1/2} \qquad \phi_k = \arctan\left\{ \Im(X[k]) / \Re(X[k]) \right\}$$

  - program 23!

12. BRZA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA (FFT)

- 12.1. DEFINICIJA FFT
- 12.2. ELEMENTI FFT IZRAČUNA
- 12.3. GRAFIČKI PRIKAZ FFT IZRAČUNA
- 12.4. FFT LEPTIR I SIMBOLIČKI ZAPIS

12.1. DEFINICIJA FFT

- FFT KAO NEREDUNDANTNI IZRAČUN DFT
- PERIODIČKA PRIRODA W(N,kn)
- DEKOMPOZICIJA NA PODNIZOVE
- INDEKSIRANJE NIZA
- INVERZNA FFT

FFT KAO NEREDUNDANTNI IZRAČUN DFT

- Fast Fourier Transform (FFT)
  - razvija se od 1960
  - to je efikasan i neredundantan način izračuna DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp(-j2\pi kn/N) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{kn}$$

$$W_N = \exp(-j2\pi/N)$$

  - iste vrijednosti W(N,kn) se računaju mnogo puta
  - često su vrijednosti ±1
  - možemo uštedjeti niz operacija množenja
  - FFT je skup algoritama za efikasno računanje DFT!

PERIODIČKA PRIRODA W(N,kn)

- Simbolički zapis W(N,kn)
  - pojednostavljuje formule FFT

$$W_N = \exp\left(-j2\pi/N\right)\ ;\ W_N^{kn} = \left(\exp\left(-j2\pi/N\right)\right)^{kn} = \exp\left(-j2\pi kn/N\right)$$

  - računamo

$$W_N^{kn} = \exp\left(-j2\pi kn/N\right) = \cos\left(2\pi kn/N\right) - j\sin\left(-j2\pi kn/N\right)$$

  - za korake kn, vrijednosti sin i cos se više puta ponavljaju
  - npr. za N=8, n,k=0...7, nk=0...49,
  - sin i cos imaju efekt računa po modulu N

PERIODIČKA PRIRODA W(N,kn)

- primjer N=8, ispišimo vrijednosti W(8,kn) u tablici

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$k=0$	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	$\frac{(1-j)}{\sqrt{2}}$	$-j$	$\frac{-(1+j)}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-(1-j)}{\sqrt{2}}$	j	$\frac{(1+j)}{\sqrt{2}}$
2	1	$-j$	-1	j	1	$-j$	-1	j
3	1	$\frac{-(1+j)}{\sqrt{2}}$	j	$\frac{(1-j)}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{(1+j)}{\sqrt{2}}$	$-j$	$\frac{-(1-j)}{\sqrt{2}}$
4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
5	1	$\frac{-(1-j)}{\sqrt{2}}$	$-j$	$\frac{(1+j)}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{(1-j)}{\sqrt{2}}$	j	$\frac{-(1+j)}{\sqrt{2}}$
6	1	j	-1	$-j$	1	j	-1	$-j$
7	1	$\frac{(1+j)}{\sqrt{2}}$	j	$\frac{-(1-j)}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-(1+j)}{\sqrt{2}}$	$-j$	$\frac{(1-j)}{\sqrt{2}}$

DEKOMPOZICIJA NA PODNIZOVE

- Pretpostavimo da je N paran:
  - niz vrijednosti možemo razbiti na parne i neparne
  - ako je $N=2^i$, tada su i podnizovi parni sve do duljine 2
  - razbijanje vremenskog niza je decimacija u vremenu
  - n pišemo
ako je paran $n=2r$
ako je neparan: $n=2r+1$
  - time smo dobili indekse vrijednosti
parnog podniza: $x[2r]$
i neparnog podniza: $x[2r+1]$

DEKOMPOZICIJA NA PODNIZOVE

- FFT razbijemo po podnizovima:
  - dobijemo dvije sume

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{kn} \;\; ; \;\; 0 \le k \le (N-1)$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] \cdot W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] \cdot W_N^{(2r+1)k} =$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] \cdot \left(W_N^2\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] \cdot \left(W_N^2\right)^{rk}$$

DEKOMPOZICIJA NA PODNIZOVE

- FFT razbijemo po podnizovima:
  - uočimo:

$$W_N^2 = \exp(-2j2\pi/N) = \exp\left(-j2\pi \Big/ \tfrac{N}{2}\right) = W_{N/2}$$

  - dobijemo:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] \cdot W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] \cdot W_{N/2}^{rk} =$$

$$= G[k] + W_N^k H[k]$$

INDEKSIRANJE NIZA

- Podnizovi za N=8 su:
  - n={0 1 2 3 4 5 6 7}
  - parni n={0 2 4 6} i neparni n={1 3 5 7}
  - nadalje n={0 4} i {2 6} i {1 5} i {3 7}
  - kad dođemo do niza po 2 člana, to je elementarna FFT
  - ovisno o indeksu člana imamo faktore koje moramo efikasno identificirati i po potrebi pomnožiti
  - indekse možemo dobiti i algebarski

INDEKSIRANJE NIZA

- Algebarsko generiranje nizova
  - postupak se zove preslikavanje indeksa (Index Mapping)
  - neka je $N=N_1N_2$
  - definiramo pomoćne indekse:
    - $n_1 = 0, 1, \ldots N_1-1$
    - $n_2 = 0, 1, \ldots N_2-1$
  - definiramo funkciju preslikavanja:

    $n=(M_1n_1 + M_2n_2)_{modN}$ i $k=(J_1k_1 + J_2k_2)_{modN}$

INDEKSIRANJE NIZA

- Algebarsko generiranje nizova
  - npr. za N=4, $N_1=N_2=2$, $M_1=2$, $M_2=1$, $J_1=1$, $J_2=2$
  - $n=(2n_1 + n_2)_{modN}$
  - $k=(k_1 + 2k_2)_{modN}$

n	$n_1 = 0$	1
$n_2 = 0$	0	2
1	1	3

k	$k_1 = 0$	1
$k_2 = 0$	0	1
1	2	3

INVERZNA FFT

- Inverzna DFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{-kn}$$

  - inverzna FFT koristi istu tehniku kao i FFT
    - eksponenti su negativni
    - kružimo u suprotnom smjeru
    - množimo sa faktorom 1/N

12.2. ELEMENTI FFT IZRAČUNA

- RAZBIJANJE NA ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE
- JEDNADŽBE ELEMENTARNIH TRANSFORMACIJA
- KOEFICIJENTI ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE

RAZBIJANJE NA ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE

- Koristimo preslikavanje indeksa
  - $N=4$, $n = (2n_1 + n_2)_{modN}$ $k = (k_1 + 2k_2)_{modN}$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot W_4^{kn}$$

  - uvrstimo preslikavanje n (zasad ostavimo k)

$$X[k] = \sum_{n_2=0}^{1} \left(\sum_{n_1=0}^{1} x[n_1, n_2] \cdot W_4^{k(2n_1+n_2)} \right)$$

RAZBIJANJE NA ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE

- Nadalje
  - pojednostavljeno se piše X i x umjesto X[k] i x[n]

$$X = \sum_{n_2=0}^{1} \left(\sum_{n_1=0}^{1} x \cdot W_4^{2kn_1} \cdot W_4^{kn_2} \right)$$

  - izlučimo W(4,kn_2) jer ne ovisi o n_1

$$X = \sum_{n_2=0}^{1} \left(W_4^{kn_2} \cdot \sum_{n_1=0}^{1} x \cdot W_4^{2kn_1} \right)$$

RAZBIJANJE NA ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE

- Nadalje
  - dobijemo dvije sume kada uvrstimo n_2=0, 1:

$$X = 1\sum_{n_1=0}^{1} x \cdot W_4^{2kn_1} + W_4^k \sum_{n_1=0}^{1} x \cdot W_4^{2kn_1}$$

  - to je isto kao raniji izraz preko W(N/2,kn), za N=4

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2r] \cdot W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2r+1] \cdot W_{N/2}^{rk}$$

JEDNADŽBE ELEMENTARNIH TRANSFORMACIJA

- Izračunajmo vrijednosti X[k]
  - raspišimo i drugu sumu:

$$X = \left\{x[0] + x[2] \cdot W_4^{2k}\right\} + W_4^k \left\{x[1] + x[3] \cdot W_4^{2k}\right\}$$

  - što daje elemente spektra:

$$X[0] = \left\{x[0] + x[2] \cdot W_4^0\right\} + W_4^0 \left\{x[1] + x[3] \cdot W_4^0\right\}$$
$$X[1] = \left\{x[0] + x[2] \cdot W_4^2\right\} + W_4^1 \left\{x[1] + x[3] \cdot W_4^2\right\}$$
$$X[2] = \left\{x[0] + x[2] \cdot W_4^0\right\} + W_4^2 \left\{x[1] + x[3] \cdot W_4^0\right\}$$
$$X[3] = \left\{x[0] + x[2] \cdot W_4^2\right\} + W_4^3 \left\{x[1] + x[3] \cdot W_4^2\right\}$$

  - To je FFT po bazi 2 (radix2) s decimacijom u vremenu

KOEFICIJENTI ELEMENTARNIH TRANSFORMACIJA

- Ponavljanje koeficijenata
  - ponavljaju se koeficijenti:
    - W(4,0) i W(4,2) u elementarnim sumama
  - pojavljuju se faktori prilagođenja:
    - W(4,0), W(4,1), W(4,2) i W(4,3)
  - vrijednosti koeficijenata su:
    - W(4,0) = 1
    - W(4,1) = -j
    - W(4,2) = -1
    - W(4,3) = j

12.3. GRAFIČKI PRIKAZ FFT IZRAČUNA

- JEDNADŽBE ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE
- GRAFIČKI PRIKAZ TRANSFORMACIJE
- KOEFICIJENTI U GRAFIČKOM PRIKAZU

JEDNADŽBE ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE

- Transformiramo dostignute jednadžbe:
  - uočimo svojstva W:

$$W_4^0 = 1 = W_2^0 \;\; ; \;\; W_4^2 = W_2^1 = -1 \;\; ; \;\; W_4^3 = W_4^2 W_4^1 = W_2^1 W_4^1$$

  - dobijemo

$$X[0] = \left\{x[0] + x[2] \cdot W_2^0\right\} + W_2^0\left\{x[1] + x[3] \cdot W_2^0\right\}$$

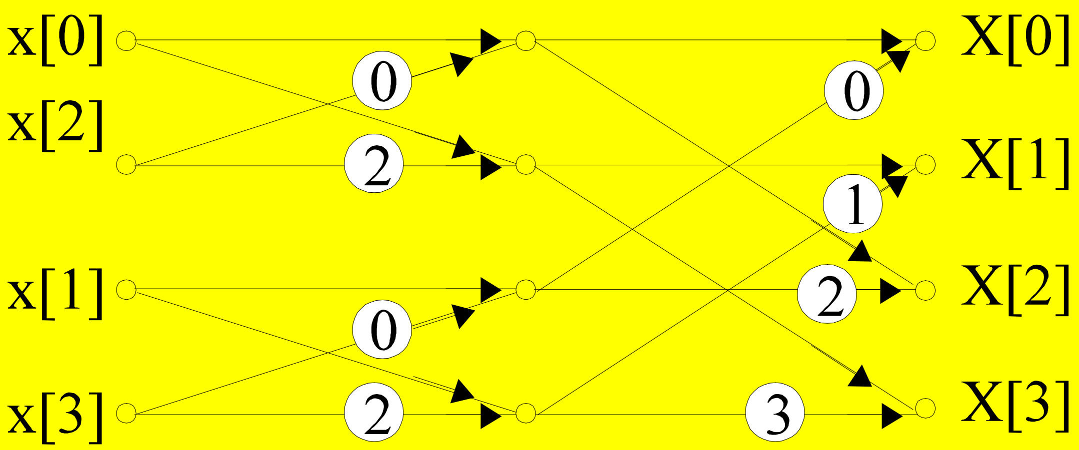
$$X[1] = \left\{x[0] + x[2] \cdot W_2^1\right\} + W_4^1\left\{x[1] + x[3] \cdot W_2^1\right\}$$

$$X[2] = \left\{x[0] + x[2] \cdot W_2^0\right\} + W_2^1\left\{x[1] + x[3] \cdot W_2^0\right\}$$

$$X[3] = \left\{x[0] + x[2] \cdot W_2^1\right\} + W_2^1 W_4^1\left\{x[1] + x[3] \cdot W_2^1\right\}$$

GRAFIČKI PRIKAZ TRANSFORMACIJE

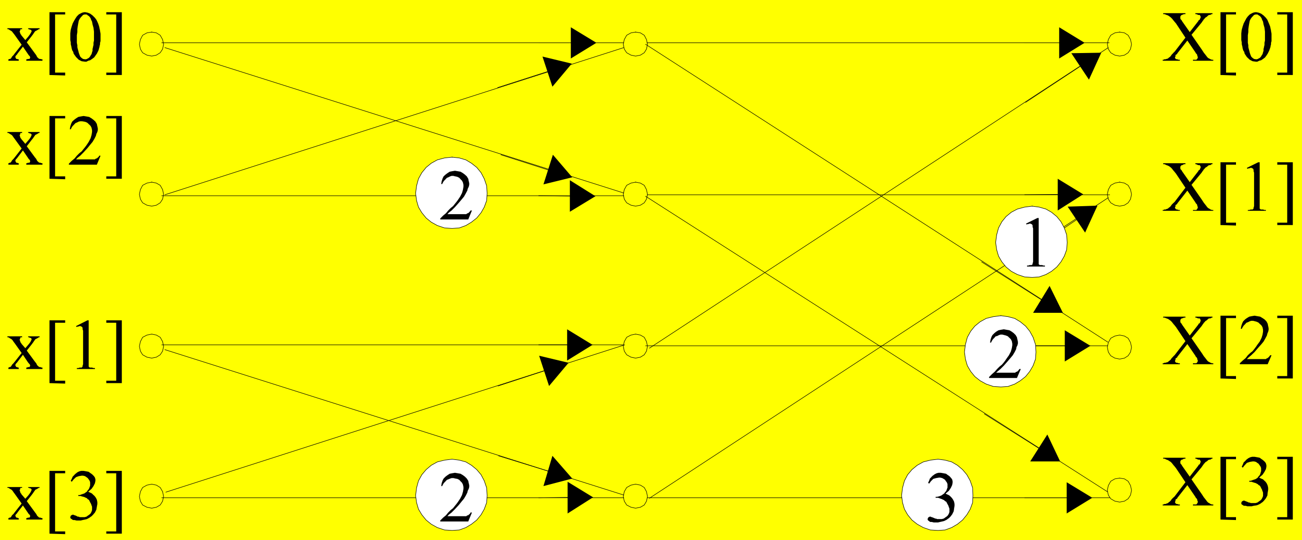
- Logički dijagram formula je:



  - razmještaj u vremenu (shuffle in time)
  - prirodni poredak u frekvenciji (natural order in frequency)
  - izračun u mjestu (in place)

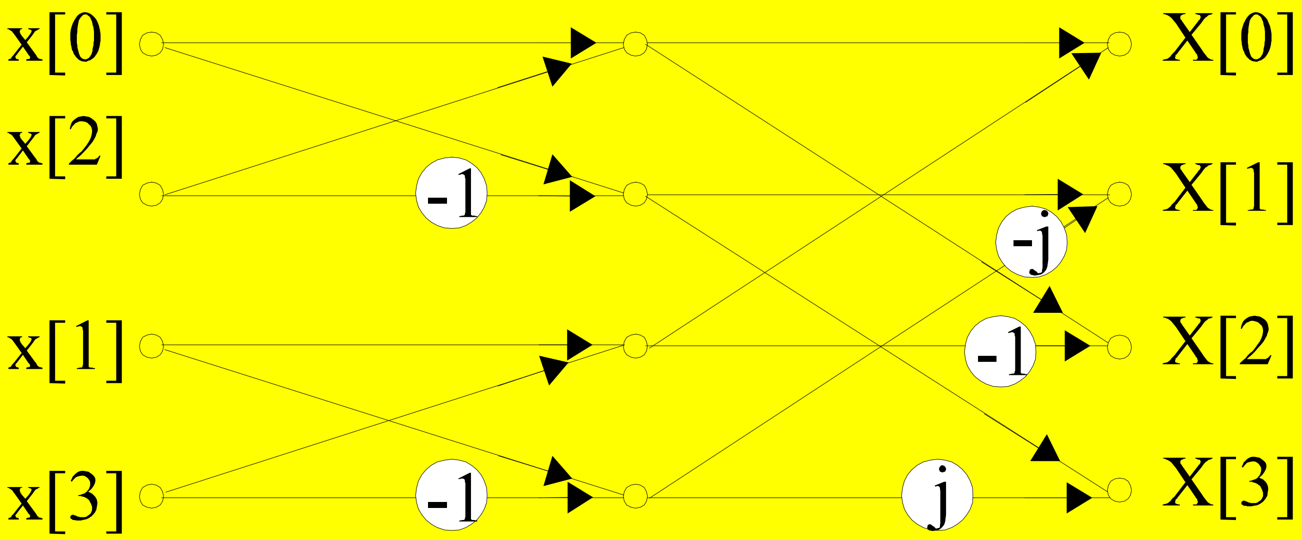
GRAFIČKI PRIKAZ TRANSFORMACIJE

- Logički dijagram transformiramo:
  - izbacimo članove jednake jedinici:



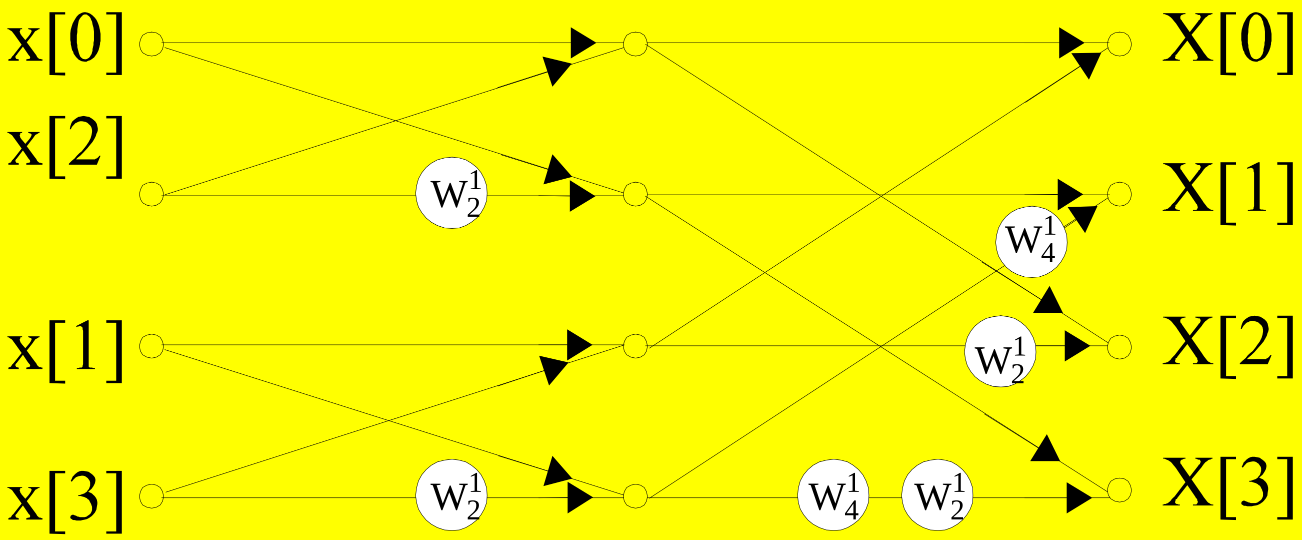
GRAFIČKI PRIKAZ TRANSFORMACIJE

- Logički dijagram transformiramo:
  - ubacimo vrijednosti preostalih članova:



GRAFIČKI PRIKAZ TRANSFORMACIJE

- Logički dijagram transformiramo:
  - sada se vratimo na W(2,...):



KOEFICIJENTI U GRAFIČKOM PRIKAZU

- Izdvajanje faktora prilagođenja:
  - transformiramo jednadžbe:

$$X=\sum_{n_2=0}^{1} W_4^{(k_1+2k_2)n_2}\cdot\left(\sum_{n_1=0}^{1} x\cdot W_4^{2(k_1+2k_2)n_1}\right)=$$

$$=\sum_{n_2=0}^{1} W_4^{k_1 n_2} W_4^{2k_2 n_2}\cdot\left(\sum_{n_1=0}^{1} x\cdot W_4^{2k_1 n_1} W_4^{4k_2 n_1}\right)$$

  - uočimo: $W_4^{4k_2 n_1}=\exp(-2\pi j k_2 n_1 4/4)=\exp(2\pi j k_2 n_1)=1\ ;\ W_4^2=W_2^1$
  - slijedi

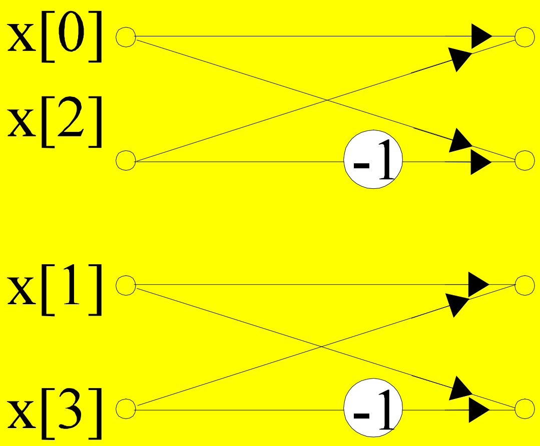
$$X=\sum_{n_2=0}^{1} W_4^{k_1 n_2} W_2^{k_2 n_2}\cdot\left(\sum_{n_1=0}^{1} x\cdot W_2^{k_1 n_1}\right)$$

12.4. FFT LEPTIR I SIMBOLIČKI ZAPIS

- OSNOVNI GRAFIČKI ELEMENT - LEPTIR
- FAKTOR PRILAGOĐENJA
- RAČUNANJE U MJESTU
- PROCJENA BROJA OPERACIJA

OSNOVNI GRAFIČKI ELEMENT - LEPTIR

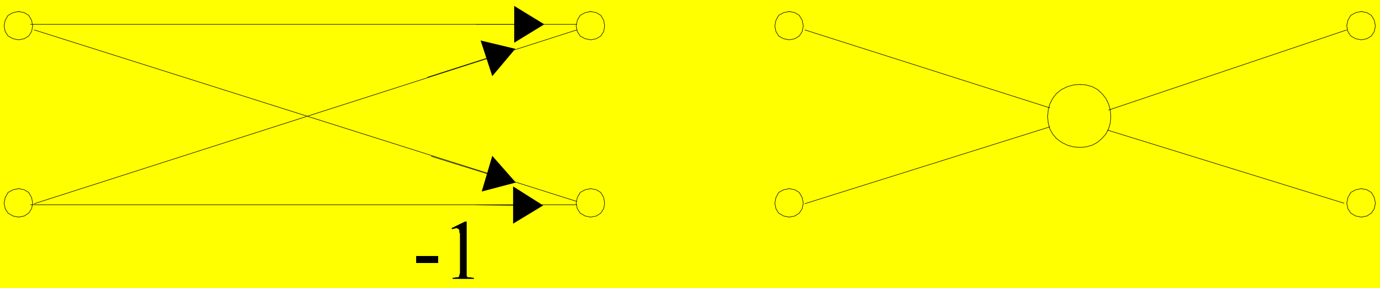
- Osnovna dvočlana transformacija:
  - podsjetimo se na lijevu stranu logičkog dijagrama:



  - programski radi se o jednom zbrajanju i jednom oduzimanju

OSNOVNI GRAFIČKI ELEMENT - LEPTIR

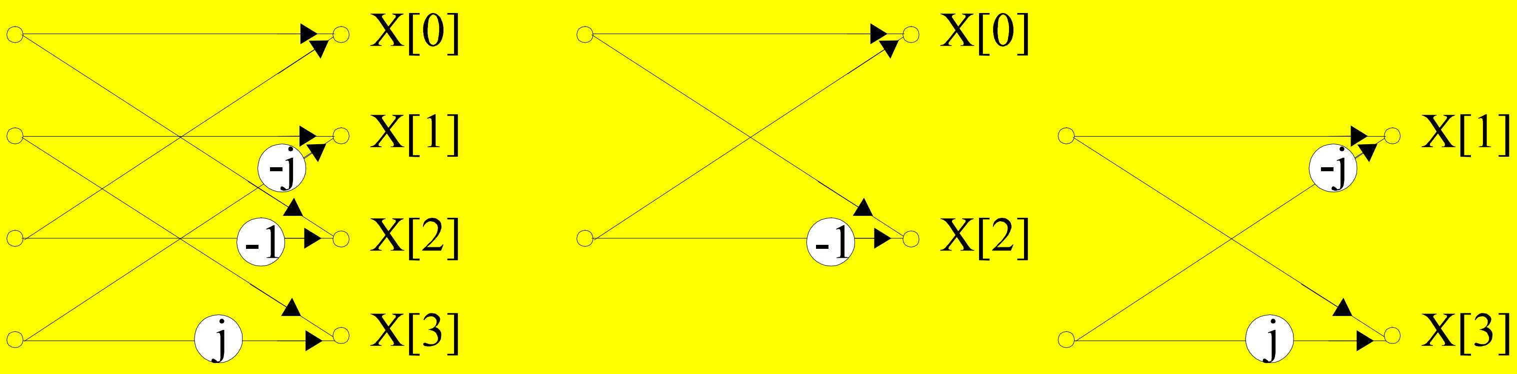
- Osnovna dvočlana transformacija:
  - pojednostavljeno crtamo:



  - to je FFT **leptir** (butterfly)

FAKTOR PRILAGOĐENJA

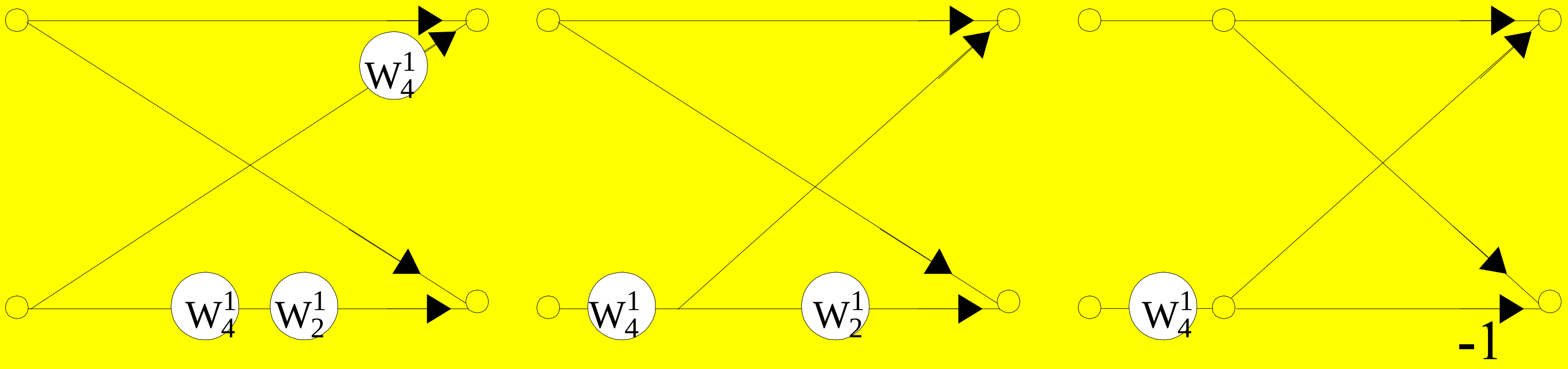
- Drugi krug transformacije:
  - podsjetimo se na desnu stranu logičkog dijagrama:



  - donji (desni) član također uključuje osnovni leptir, ali preko faktora prilagođenja

FAKTOR PRILAGOĐENJA

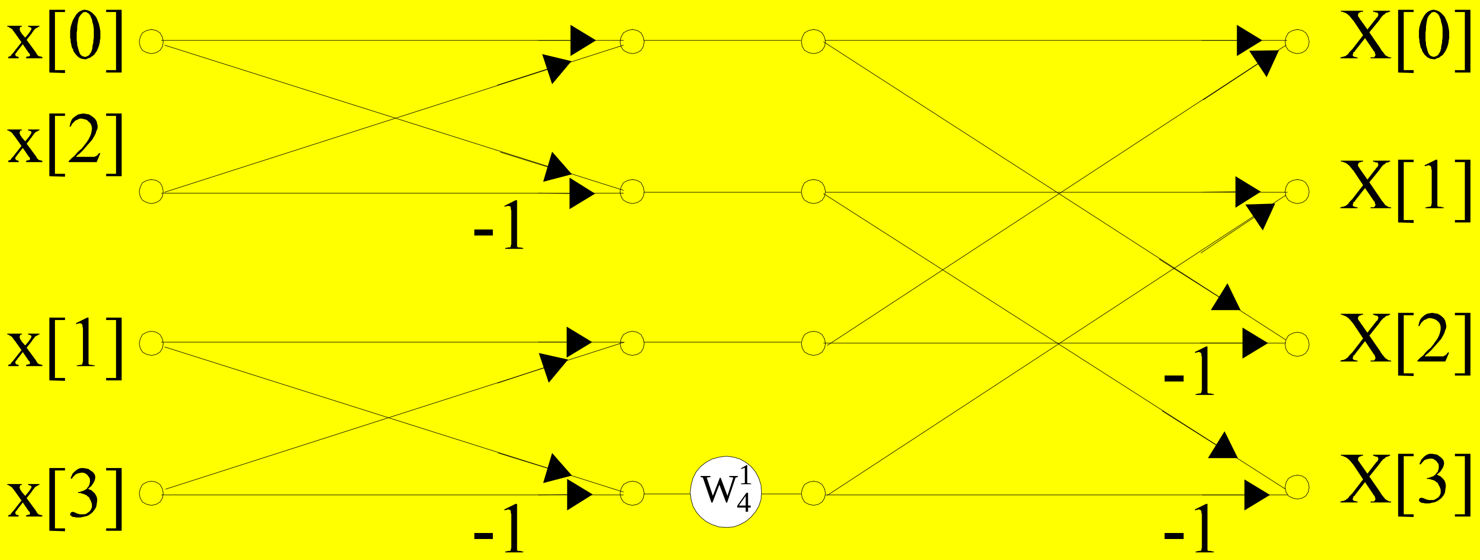
- Drugi krug transformacije:
  - izdvojimo faktor prilagođenja:



  - dobili smo osnovni elementarni član za FFT
  - faktor prilagođenja ovisi o krugu računanja

FAKTOR PRILAGOĐENJA

- Drugi krug transformacije:
  - za primjer N=4 imamo:



RAČUNANJE U MJESTU

- Karakteristike elementarne transformacije:
  - u svakom krugu računanja:
    - pojedini podatak se koristi samo dva puta u istom leptiru
    - nakon toga se više ne koristi
    - rezultati leptira mogu se smjestiti u iste dvije varijable
    - treba samo paziti na drugo korištenje
  - računanje u mjestu zahtjeva razmještaj podataka
    - razmještaj u vremenu, prirodni poredak u frekvenciji
    - ili razmještaj u frekvenciji, prirodni poredak u vremenu

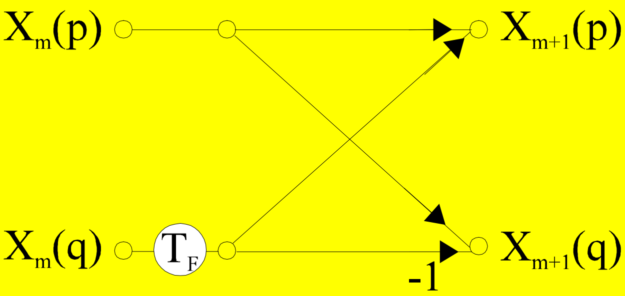
RAČUNANJE U MJESTU

- FFT na uzorku od N članova:
  - koristimo nizove $N=2^i$,
  - DFT dekomponiramo na V koraka elementarnih FFT:

$$N = 2^i \;\; ; \;\; V = \log_2 N = i$$

  - u m-tom koraku imamo:

$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + T_F X_m(q)$$
$$X_{m+1}(q) = X_m(p) - T_F X_m(q)$$



PROCJENA BROJA OPERACIJA

- Broj operacija za FFT:
  - koristimo nizove $N=2^i$, dakle V = log2(N) = i koraka
  - u svakom koraku imamo N kompleksnih množenja
  - procijenimo broj operacija: $$K_{FFT} = N\log_2(N)$$
  - za DFT smo procijenili: $$K_{DFT} \approx N^2$$
  - poboljšanje je: $$E = \frac{K_{DFT}}{K_{FFT}} = \frac{N^2}{N\log_2(N)} = \frac{N}{\log_2(N)}$$

13. POSTUPCI FFT-a

- 13.1. DECIMACIJA PO BAZI 2 U VREMENU
- 13.2. IZRAČUN NA ISTOM MJESTU I IZBOR RAZMJEŠTAJA
- 13.3. DECIMACIJA PO BAZI 2 PO FREKVENCIJI

13.1. DECIMACIJA PO BAZI 2

- PRIMJENA PRESLIKAVANJA INDEKSA
- CRTANJE DIJAGRAMA TOKA SIGNALA
- CRTANJE DIJAGRAMA PRIMJENOM LEPTIRA

PRIMJENA PRESLIKAVANJA INDEKSA

- Decimacija preslikavanjem indeksa:
  - indekse rastavljamo po bazi 2
    - time pratimo decimaciju po bazi 2
  - npr. za N=8

$$n = 4n_1 + 2n_2 + n_3 \ ; \ k = k_1 + 2k_2 + 4k_3$$

  - konstruiramo tablice preslikavanja
  - nacrtamo dijagram koristeći potencije od W_N
  - korigiramo dijagram koristeći leptire i faktore prilagođenja

PRIMJENA PRESLIKAVANJA INDEKSA

- Decimacija preslikavanjem indeksa:
  - izračunamo tablice preslikavanja indeksa (npr. N=8)
  - izabran je prirodni poredak po frekvenciji
  - uzorci su razmješteni u vremenu

n_1	n_2	n_3	n
0	0	0	0
1	0	0	4
0	1	0	2
1	1	0	6
0	0	1	1
1	0	1	5
0	1	1	3
1	1	1	7

k_1	k_2	k_3	n
0	0	0	1
1	0	0	2
0	1	0	3
1	1	0	4
0	0	1	5
1	0	1	6
0	1	1	7
1	1	1	8

PRIMJENA PRESLIKAVANJA INDEKSA

- Decimacija preslikavanjem indeksa:
  - Jednadžbe su (N=8)

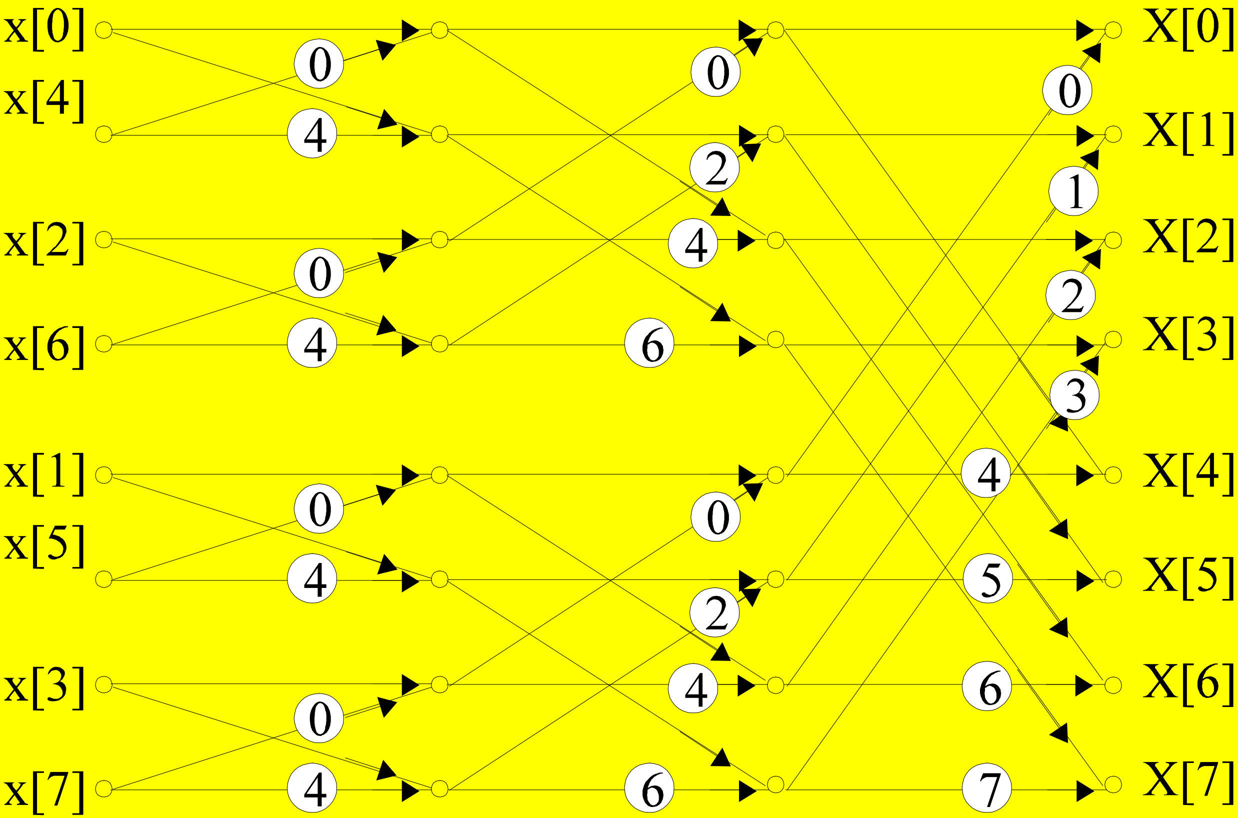
$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{7} x[n]\cdot W_8^{kn}=$$

$$=\sum_{n_3=0}^{1}\left(\sum_{n_2=0}^{1}\left(\sum_{n_1=0}^{1} x\cdot W_8^{k(4n_1+2n_2+n_3)}\right)\right)=$$

$$=\sum_{n_3=0}^{1} W_8^{kn_3}\left(\sum_{n_2=0}^{1} W_8^{2kn_2}\left(\sum_{n_1=0}^{1} x\cdot W_8^{4kn_1}\right)\right)$$

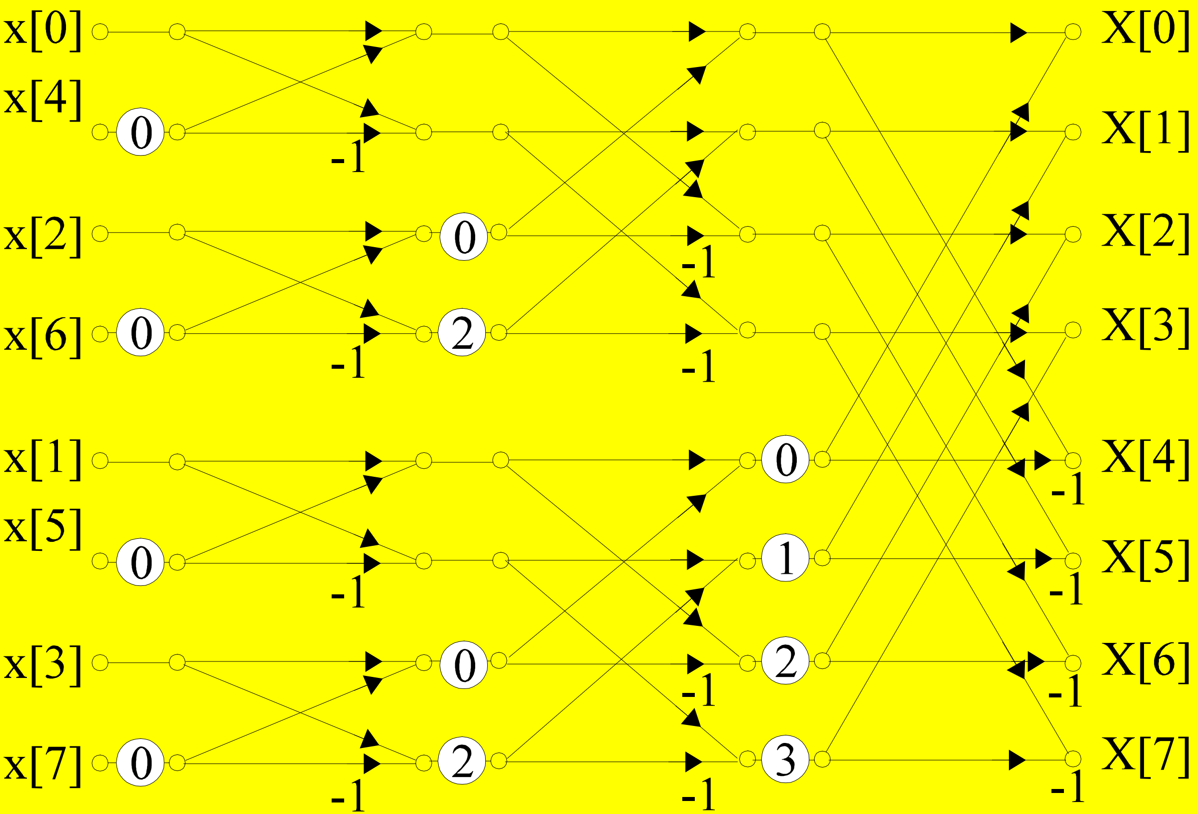
DIJAGRAM TOKA SIGNALA

- Crtamo dijagram toka signala (potencije W_N):



DIJAGRAM TOKA SIGNALA - LEPTIR

- Dijagram toka signala s leptirima (potencije W_N):



13.2. IZRAČUN NA ISTOM MJESTU I IZBOR RAZMJEŠTAJA

- UVJETI IZRAČUNA NA ISTOM MJESTU

- DIJAGRAM ZA RAZMJEŠTAJ PO FREKVENCIJI

- PROBLEMI PRIRODNOG REDOSLIJEDA
  U VREMENU I PO FREKVENCIJI

UVJETI IZRAČUNA U MJESTU

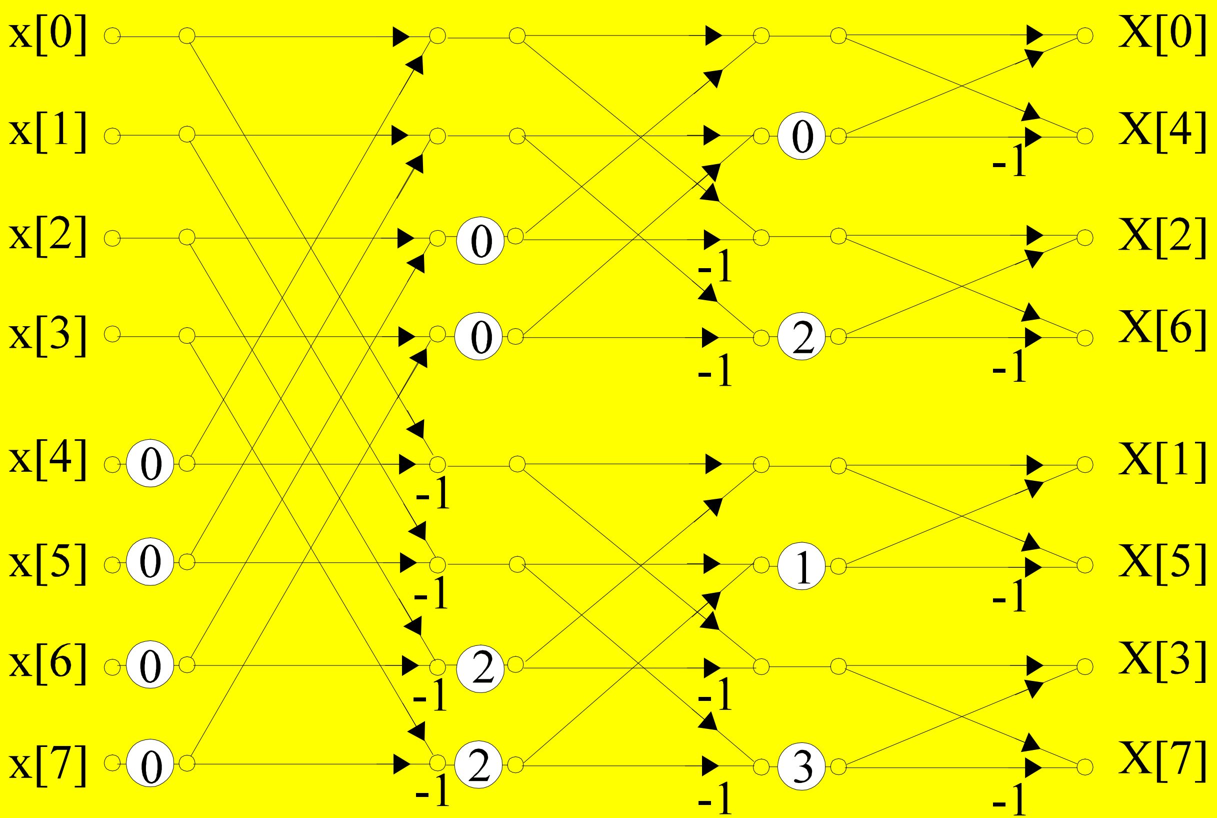
- Izračun u mjestu:
  - bazira se na svojstvu leptira
    - podatak koristi samo taj leptir
    - podatak se koristi samo dva puta
    - nakon toga podatak se može obrisati
    - to znači nova vrijednost se može smjestiti na istom mjestu
  - razmještaj u vremenu
    - vrijednosti se razmjeste da u prvom krugu idu leptiri na susjednim vrijednostima
    - u drugom i trećem krugu preskače se na svaku drugu pa na svaku četvrtu vrijednost
    - leptiri u višim krugovima ne koriste uzastopne vrijednosti, ali je očuvano svojstvo leptira

UVJETI IZRAČUNA U MJESTU

- Izračun u mjestu:
  - razmještaj po frekvenciji
    - vrijednosti se razmjeste da u posljednjem krugu leptiri dadu rezultate na susjednim vrijednostima
    - u prvom i drugom krugu preskače se na svaku četvrtu pa na svaku drugu vrijednost
    - leptiri više ne koriste uzastopne vrijednosti ali je očuvano svojstvo leptira
  - redoslijed uzimanja podataka
    - bez obzira na raspored (u memoriji), redoslijedi uzimanja podataka su isti
    - radi se o decimaciji u vremenu

DIJAGRAM RAZMJEŠTAJA PO FREKVENCIJI

- Razmještaj po frekvenciji:

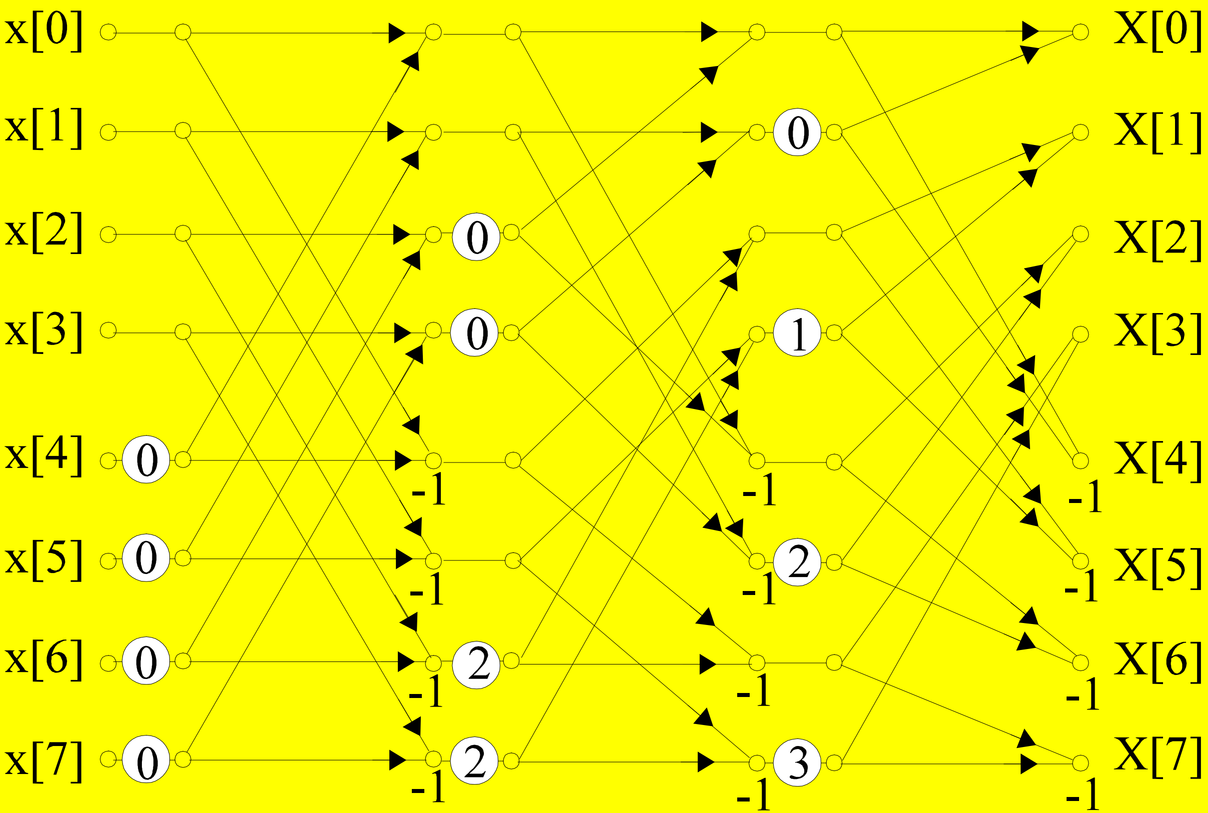


POREDAK PO VREMENU I PO FREKVENCIJI

- Prirodni poredak po vremenu i po frekvenciji:
  - može se organizirati obrada da se sačuvaju oba prirodna poretka
  - gubi se svojstvo leptira da rezultat koristi iste ulazne pozicije
  - stoga treba koristiti različita memorijska polja (not in place)

POREDAK PO VREMENU I PO FREKVENCIJI

- Prirodni poredak po vremenu i po frekvenciji:



13.3. DECIMACIJA PO BAZI DVA PO FREKVENCIJI

- GENERIRANJE INDEKSA DA DECIMACIJU PO FREKVENCIJI
- LEPTIR ZA DECIMACIJU PO FREKVENCIJI
- REDOSLIJEDI ZA DECIMACIJU PO FREKVENCIJI

INDEKSI ZA DECIMACIJU PO FREKVENCIJI

- Decimacija po frekvenciji:
  - umjesto da se ulazi uzimaju na preskok
  - izlazi se generiraju preskačući indekse
  - posljedično, ulazi se uzimaju redom
  - decimaciju po frekvenciji možemo smatrati prirodnom
  - za početak izaberimo razmještaj po frekvenciji
  - indekse definiramo formulama (N=4):

$$n = n_1 + 2n_2 \quad ; \quad k = 2k_1 + k_2$$

INDEKSI ZA DECIMACIJU PO FREKVENCIJI

- Decimacija po frekvenciji:
  - dobijemo (N=4):

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{3} x[n]\cdot W_4^{kn}=$$

$$=\sum_{n_2=0}^{1}\left(\sum_{n_1=0}^{1} x[n_1,n_2]\cdot W_4^{k(n_1+2n_2)}\right)$$

  - slijedi:

$$X=\sum_{n_2=0}^{1} W_4^{2kn_2}\left(\sum_{n_1=0}^{1} x\cdot W_4^{kn_1}\right)=$$

$$=1\sum_{n_1=0}^{1} x\cdot W_4^{kn_1}+W_4^{2k}\sum_{n_1=0}^{1} x\cdot W_4^{kn_1}$$

INDEKSI ZA DECIMACIJU PO FREKVENCIJI

- Decimacija po frekvenciji:
  - raspišemo formulu:

$$X = \left\{x[0] + x[1]W_4^k\right\} + W_4^{2k}\left\{x[2] + x[3]W_4^k\right\}$$

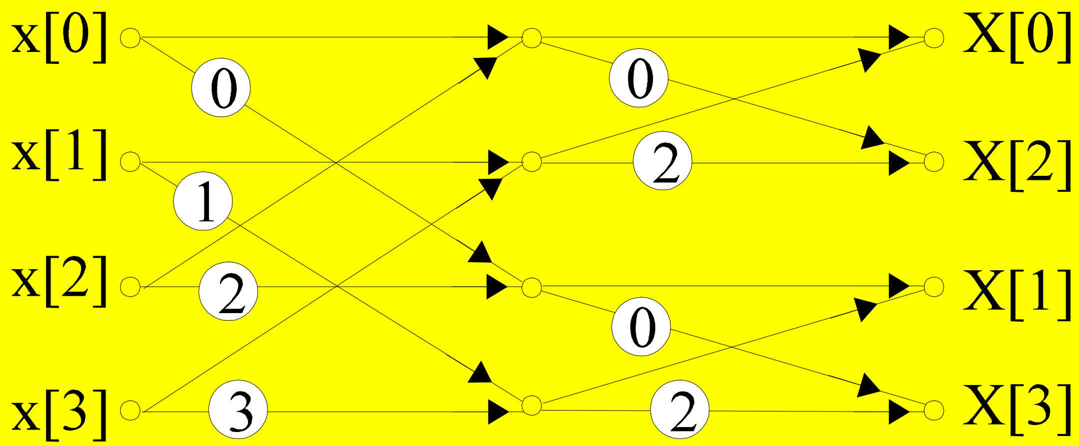
  - indeksi su:

n	$n_1 = 0$	1
$n_2 = 0$	0	1
1	2	3

k	$k_1 = 0$	1
$k_2 = 0$	0	2
1	1	3

INDEKSI ZA DECIMACIJU PO FREKVENCIJI

- Decimacija po frekvenciji:
  - nacrtamo graf:

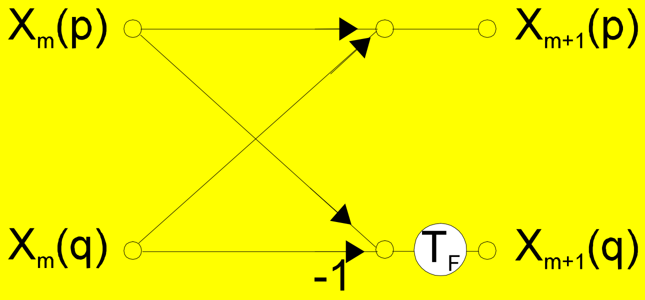


LEPTIR ZA DECIMACIJU PO FREKVENCIJI

- Leptir i faktor prilagođenja:
  - jednadžbe za izračun u mjestu:

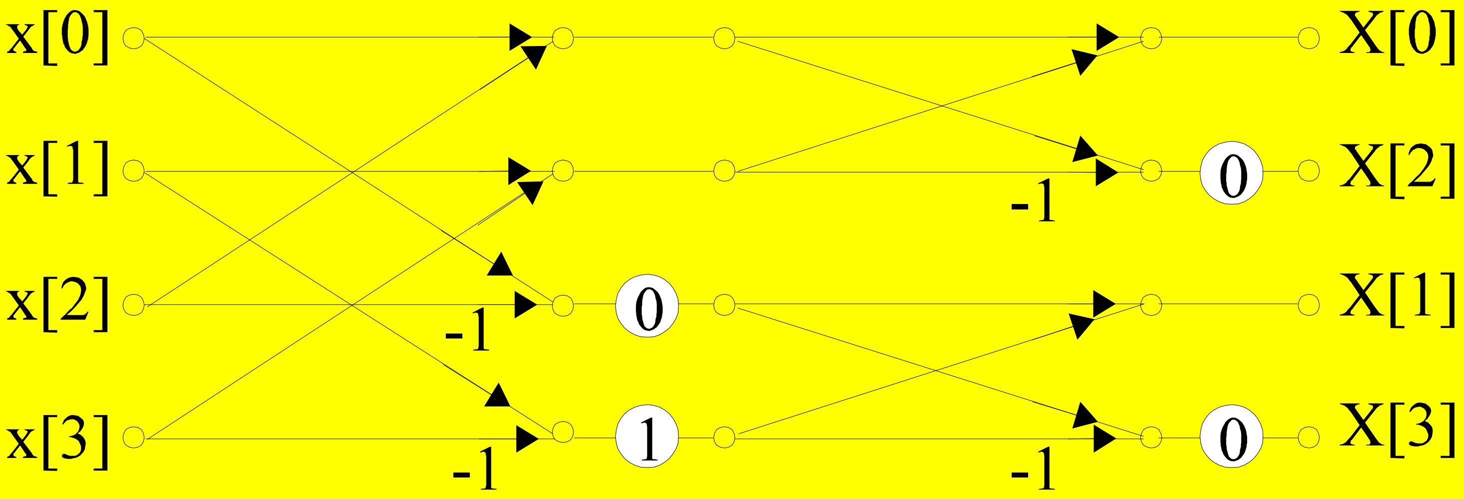
$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + X_m(q)$$
$$X_{m+1}(q) = \{X_m(p) - X_m(q)\}T_F$$

  - leptir i primjena



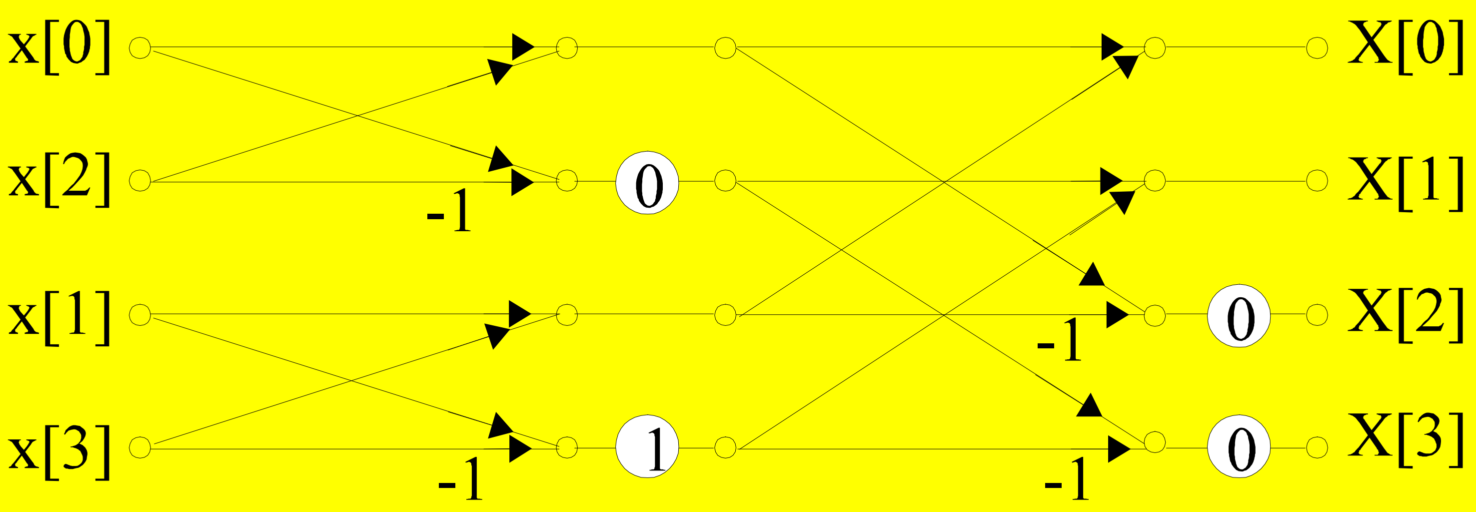
LEPTIR ZA DECIMACIJU PO FREKVENCIJI

- Leptir i faktor prilagođenja:
  – crtamo dijagram:



REDOSLIJEDI ZA DECIMACIJU PO FREKVENCIJI

- Redoslijed i raspored:
  - prije: prirodni redoslijed u vremenu, raspored po frekv.
  - sada: prirodni redoslijed p frekvenciji, raspored u vremenu



14. FFT OBRADA SIGNALA

- 14.1. SPEKTRALNA ANALIZA I PROZORI
- 14.2. ANALIZA LTI SUSTAVA
- 14.3. BRZA KONVOLUCIJA
- 14.4. SEGMENTACIJA SIGNALA

14.1. SPEKTRALNA ANALIZA I PROZORI

- KORIŠTENJE SPEKTRALNE ANALIZE
- CURENJE SPEKTRA
- KORIŠTENJE PROZORA

KORIŠTENJE SPEKTRALNE ANALIZE

- Spektralna analiza:
  - dekompozicija signala na komponente spektra
  - FFT je prirodan izbor
  - spektar će dati bitne informacije o signalu, inače skrivene u vremenskom signalu
  - postupak je istraživački, pri tome načelno nećemo mijenjati sam signal
  - često primjenjujemo na prirodne signale, npr. burza
  - također često ispitujemo sustave: promatramo spektar odziva, često statistički radi šuma

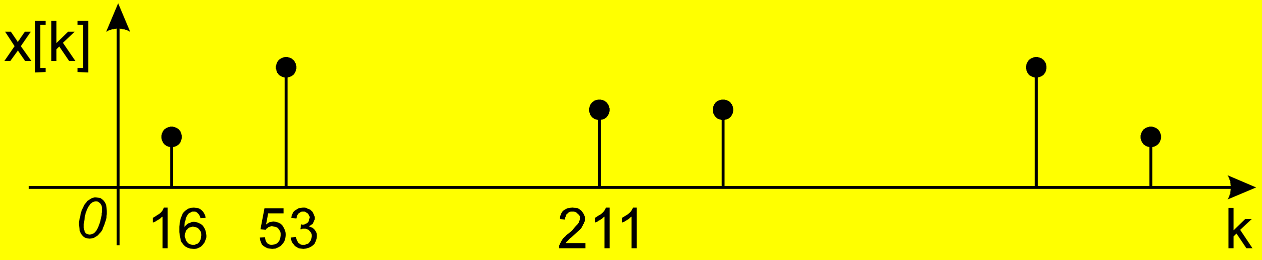
KORIŠTENJE SPEKTRALNE ANALIZE

- Spektralna analiza:
  - kod stvarno periodičkih signala
    - periodi se nastavljaju jedan na drugi
    - sve komponente spektra su harmonici osnovne frekvencije
    - dobijemo linijski spektar
  - kod aperiodičkih signala
    - spektar se širi, "curi" oko spektralnih linija
    - smatramo da smo dobili uzorkovani kontinuirani spektar

KORIŠTENJE SPEKTRALNE ANALIZE

- Primjer periodičkog signala:

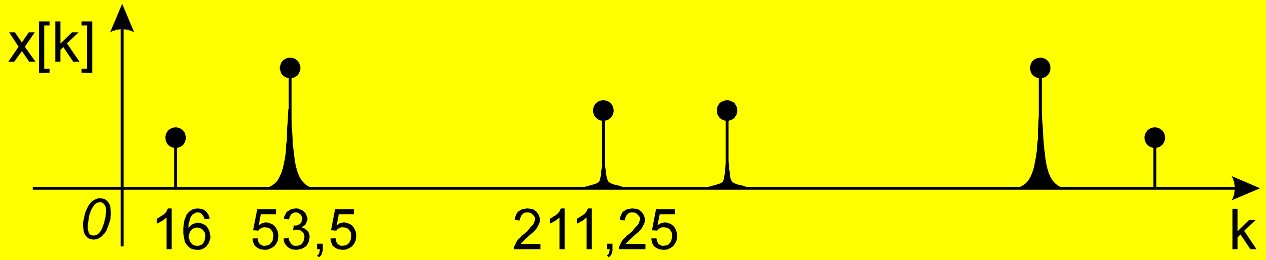
$$x[n] = 0{,}1\sin\left(\frac{2\pi n}{512}\cdot 16\right) + 0{,}2\sin\left(\frac{2\pi n}{512}\cdot 53\right) + 0{,}15\sin\left(\frac{2\pi n}{512}\cdot 211\right)$$



CURENJE SPEKTRA

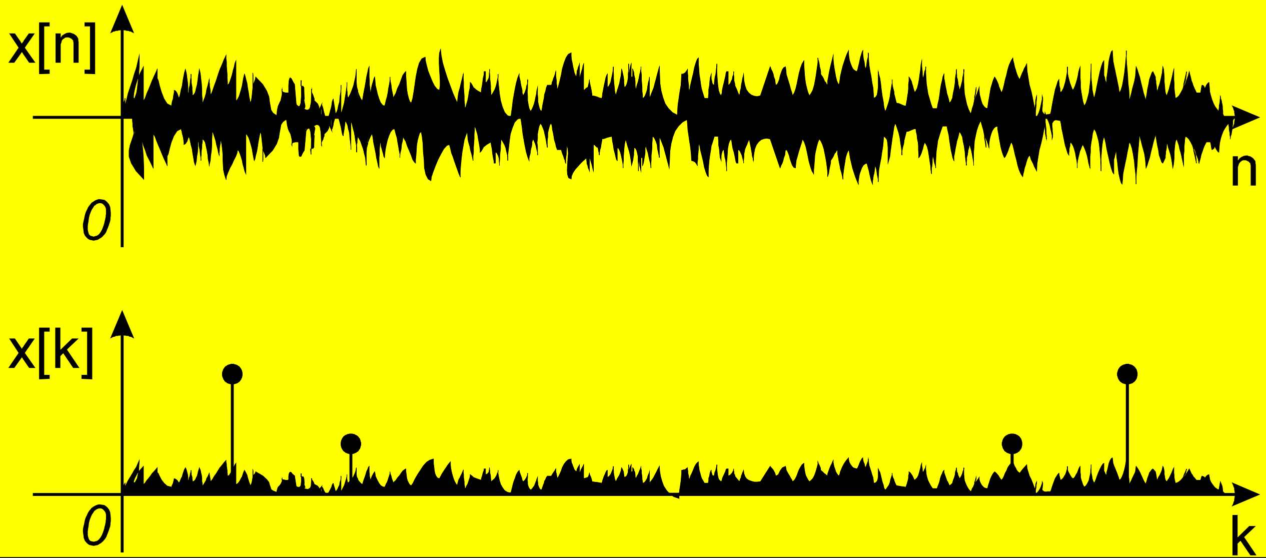
- Primjer aperiodičkog signala:

$$x[n] = 0{,}1\sin\left(\frac{2\pi n}{512}\cdot 16\right) + 0{,}2\sin\left(\frac{2\pi n}{512}\cdot 53{,}5\right) + 0{,}15\sin\left(\frac{2\pi n}{512}\cdot 211{,}25\right)$$



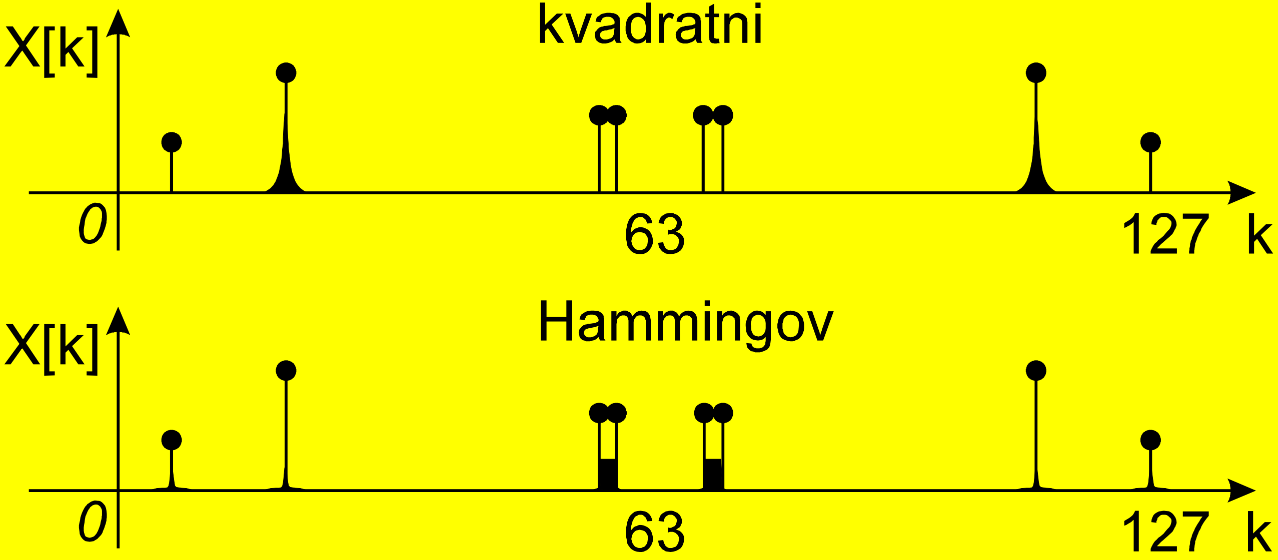
KORIŠTENJE SPEKTRALNE ANALIZE

- Izdvajanje signala iz šuma:
  - ukupna snaga šuma može biti znatna, ali je po komponenti mala
  - snaga signala može biti mala, ali je po komponenti znatna



KORIŠTENJE PROZORA

- Prozori ublažuju krajnje uzorke:
  - curenje spektra možemo ublažiti prozorima, da se približimo periodičkom signalu



14.2. SPEKTRALNA ANALIZA LTI SUSTAVA

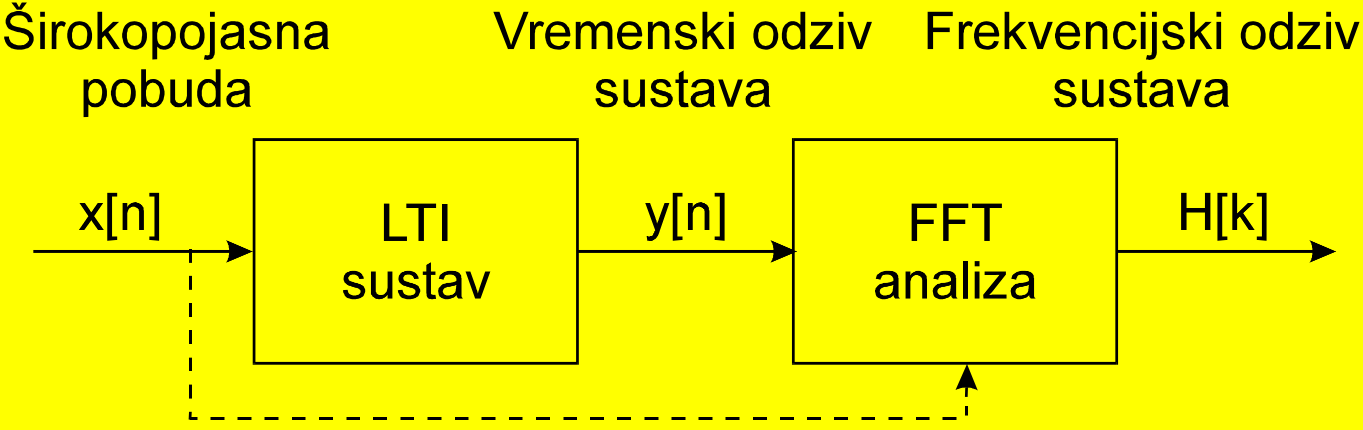
- POBUDA I ODZIV
- TEHNIKA ISPITIVANJA
- BROJ UZORAKA ODZIVA

POBUDA I ODZIV KOD TESTRANJA LTI

- Ispitivanje LTI:
  - ispitujemo spektar odziva,
    time doznamo svojstvene frekvencije sustava
  - sustav često pobudimo impulsom ili step funkcijom
  - zabilježimo vremenski odziv sustava
  - FFT nam služi za izračunavanje spektra odziva
  - da bi test dao bolje rezultate,
    pobuda mora imati širokopojasni spektar
  - alternativno, trebamo snimiti i pobudu i njen spektar

TEHNIKA TESTRANJA LTI

- Sustav ispitivanja LTI:
  - pobudimo širokopojasnom pobudom i snimimo odziv
  - FFT izračunamo spektar odziva



TEHNIKA TESTRANJA LTI

- Ako pobudni signal nije idealan:
  - snimimo pobudni signal
  - FFT izračunamo spektar signala
  - izračunamo spektar odziva sustava:

$$H[k] = \frac{Y[k]}{X[k]} \ ; \ Y[k] = X[k] \cdot H[k]$$

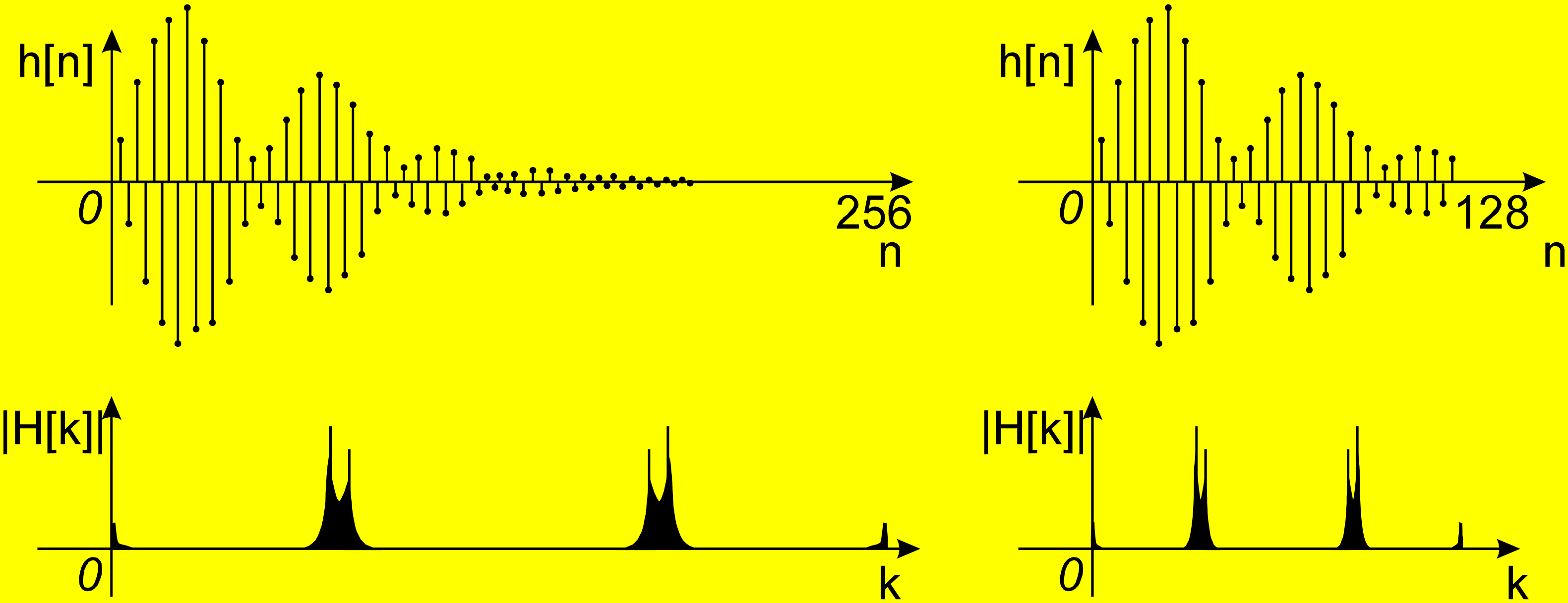
  - najjednostavnije je testirati impulsom, čiji je spektar bijeli šum
  - zbog niske energije impulsa, nekad koristimo step odziv na impuls dobijemo kao diferenciju prvog reda

BROJ UZORAKA ODZIVA

- Zbog decimacije po bazi 2 trebamo $N=2^i$ uzoraka:
  - odziv može biti dugačak
    - obuhvatimo manje uzoraka odziva
    - dio odziva je izgubljen
    - spektar je grublji (manje komponenti)
    - unesena je pogrješka zbog izgubljene informacije
  - obuhvatimo više uzoraka
    - nadopunimo odziv nulama (zero padding)
    - odziv je kompletan
    - spektar je finiji (više komponenti)
    - spektar je precizan

BROJ UZORAKA ODZIVA

- Primjer s 256 i 128 točaka:



14.3. BRZA KONVOLUCIJA

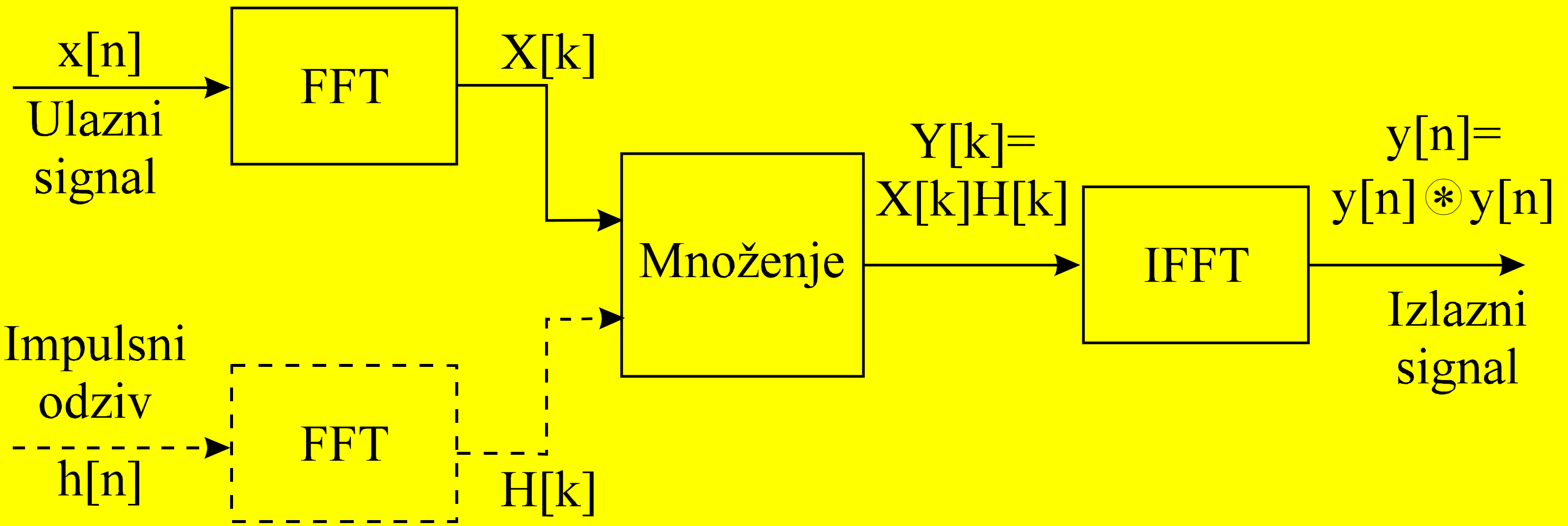
- FILTRIRANJE U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU
- PROBLEM CIRKULARNE KONVOLUCIJE
- SEGMENTACIJA SIGNALA

FILTRIRANJE U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU

- Procedura filtriranja u frekvencijskom području:
  - uzorkujemo ulazni signal
  - izračunamo impulsni odziv LTI (jedanput)
  - izračunamo FFT za signal
  - izračunamo FFT za odziv LTI, dovoljno jedanput
  - obavimo množenje u frekvencijskom području
  - izračunamo IFFT za odziv
  - dobijemo blok izlaznih uzoraka,
    koje možemo reproducirati

FILTRIRANJE U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU

- Dijagram filtriranja u frekvencijskom području:

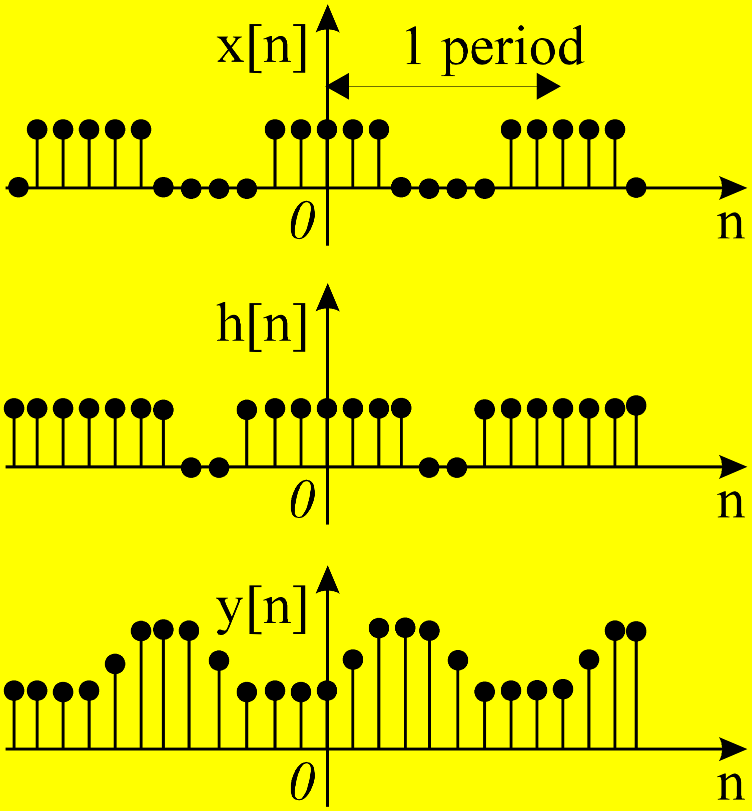


PROBLEM CIRKULARNE KONVOLUCIJE

- Cirkularna konvolucija:
  - odnosi se na periodični signal
  - uzima u obzir utjecaj prethodnog perioda
  - generira komponente koji utječu na slijedeći period
  - za stvarno periodične signale je OK
  - problem nastaje za aperiodičke signale - treba nam obična, "linearna" konvolucija
  - RJEŠENJE: adekvatna segmentacija signala

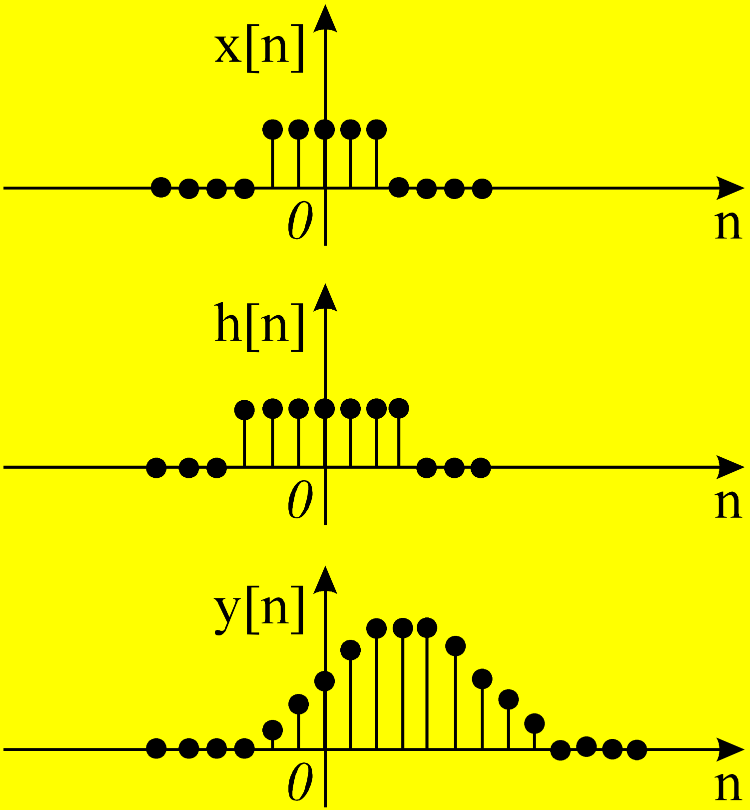
PROBLEM CIRKULARNE KONVOLUCIJE

- Primjer za cirkularnu konvoluciju:



PROBLEM CIRKULARNE KONVOLUCIJE

- Primjer za linearnu konvoluciju:



SEGMENTACIJA SIGNALA

- Odziv izračunat konvolucijom:
  - za signal koji traje N_1 uzoraka
  - za odziv koji traje N_2 uzoraka
  - u najgorem slučaju imat ćemo ukupni odziv:

$$N_o = N_1 + N_2 - 1$$

  - nadopunimo signal sa 2^i-N_1 nula, $2^i \geq N_o$
  - izračunamo FFT po bloku 2^i,
  - množimo sa frekvencijskim odzivom LTI
  - pomoću IFFT dobijemo 2^i uzoraka izlaza

SEGMENTACIJA SIGNALA

- Za kontinuirani aperiodički signal:
  - podijelimo na blokove po N_1 uzoraka
  - nadopunimo do $2^i \geq N_o$ izračunamo FFT, množimo
  - pomoću IFFT dobijemo 2^i uzoraka izlaza
  - reproduciramo N_1 uzoraka izlaza (uključimo ostatak prethodnog bloka)
  - preostalih 2^i - N_1 uzoraka izlaza sačuvamo, da bi ih pribrojili uzorcima slijedećeg bloka

SEGMENTACIJA SIGNALA

- Primjer segmentacije signala: