Rekurzivne relacije

1. Kako definiramo Fibonaccijev slijed (F_n)? Izvedi zatvorenu formulu (Moivreovu) za (F_n).

Definicija: Fibonaccijev niz (F_n) definira se početnim vrijednostima $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$ i rekurzivnom relacijom:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots$$

Propozicija (A. de Moivre): Za Fibonaccijev niz $(F_n)_{n \in N_0}$ vrijedi "zatvorena formula":

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dokaz: Rješenje rekurzivne relacije

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \; , \; n \geq 2$$

tražimo u obliku $F_n = x^n$, pa je $\qquad x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$

$$\Rightarrow \quad x^{n-2}(x^2 - x - 1) = 0 \qquad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Dakle, rješenja rekurzivne relacije su:

$$F_n^{(1)} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{i} \quad F_n^{(2)} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Linearna kombinacija ovih rješenja je također rješenje rekurzivne relacije:

$$F_n = \lambda\, F_n^{(1)} + \mu\, F_n^{(2)} \quad , \quad \lambda, \mu \in R$$

Iz početnih uvjeta $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$ slijedi: $\lambda + \mu = 0$, $\quad \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow$ "zatvorena formula".

2. Zlatni prerez i veza s Fibonaccijevim slijedom.

Iz zatvorene formule slijedi da je: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618...$

Ovaj broj se zove **zlatni prerez** (božanski omjer).

3. Što su linearne rekurzivne relacije (homogene i nehomogene)? Što je Eulerova supstitucija i kako glasi karakteristična jednadžba pridružena linearnoj rekurzivnoj relaciji?

Opći oblik **linearne rekurzivne relacije reda r** je:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} + f(n) \quad , \quad n \geq r \quad ,$$

gdje su $c_1, c_2, \dots, c_r$ zadani realni ili kompleksni brojevi, $c_r \neq 0$, a $f(n)$ je zadana funkcija koja prirodnim brojevima $n \geq r$ pridružuje realne ili kompleksne brojeve.

Ako $\exists n\ f(n) \neq 0$, onda kažemo da je linearna rekurzivna relacija **nehomogena.**

U specijalnom slučaju, kad je $f(n) \equiv 0$ za sve n, kažemo da je linearna rekurzivna relacija **homogena**.

Rješenje linearne homogene rekurzivne relacije tražimo pomoću **Eulerove supstitucije**:

$$a_n = x^n \quad .$$

Nakon uvrštenja Eulerove supstitucije u linearnu homogenu rekurzivnu relaciju i dijeljenja sa x^{n-r} dobije se tzv. **karakteristična jednadžba** rekurzivne relacije:

$$x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \dots - c_r = 0 \quad .$$

4. Opće rješenje homogene linearne rekurzivne relacije (citirati i dokazati teorem).

Opće rješenje homogene linearne rekurzivne relacije ovisi o korijenima pripadne karakteristične jednadžbe.

Razlikujemo dva slučaja:

a) Slučaj r različitih korijena karakteristične jednadžbe

Teorem: Neka su svi korijeni x_1, x_2, ..., x_r karakteristične jednadžbe međusobno različiti. Tada je **opće rješenje linearne homogene rekurzivne relacije** s konstantnim koeficijentima jednako linearnoj kombinaciji:

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \ldots + \lambda_r x_r^n$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ kompleksni koeficijenti.

Dokaz: Preskočen

b) Slučaj kada postoje višestruki korijeni karakteristične jednadžbe

Teorem: Neka su x_1, x_2, ..., x_m svi različiti korijeni karakteristične jednadžbe kratnosti k_1, k_2, ..., k_m. Rješenje $a_n^{(i)}$ linearne homogene rekurzivne relacije koje odgovara korijenu x_i kratnosti k_i je linearna kombinacija:

$$a_n^{(i)} = \lambda_1^{(i)} x_i^n + \lambda_2^{(i)} n\, x_i^n + \ldots + \lambda_{k_i}^{(i)} n^{k_i - 1} x_i^n \quad , \qquad n \geq 0,$$

gdje su $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \ldots, \lambda_{k_i}^{(i)}$ kompleksni koeficijenti. Opće rješenje je dano sa:

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \ldots + a_n^{(m)}$$

Opće rješenje ima ukupno $r = k_1 + k_2 + ... + k_m$ slobodnih koeficijenata.

Dokaz: Preskočen

5. Što je to partikularno rješenje nehomogene linearne rekurzivne relacije i kako tražimo opće rješenje?

Opće rješenje nehomogene linearne rekurzivne relacije je:

$$a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(p)}$$

gdje je: $a_n^{(o)}$ - opće rješenje pripadne homogene rekurzivne relacije,

$a_n^{(p)}$ - partikularno rješenje nehomogene jednadžbe.

Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe $a_n^{(p)}$ je rješenje koje zadovoljava nehomogenu linearnu rekurzivnu relaciju.

Napomena: Općenito nalaženje partikularnog rješenja je komplicirano, ali u nekim slučajevima postoje recepti.
Ako x = 1 (u zadnjem slučaju x = b) nije korijen karakteristične jednadžbe, onda partikularno rješenje nalazimo ovako:

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
C (konstanta)	A
$C\,n$	$A\,n + B$
$P_k(n)$	$Q_k(n)$
$C\,b^n$	$A\,b^n$

Ako x = 1 (u zadnjem slučaju x = b) jeste korijen karakteristične jednadžbe kratnosti m, onda partikularno rješenje nalazimo ovako:

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
C (konstanta)	$A\,n^m$
$C\,n$	$n^m\,(A\,n + B)$
$P_k(n)$	$n^m\,Q_k(n)$
$C\,b^n$	$A\,n^m\,b^n$

6. Hanojske kule i slični primjeri.

Primjer 1: Hanojske kule

- Imamo n kolutova s rupom u sredini, svi različitih polumjera i na ravnoj podlozi zabodena tri štapića.
- Svi kolutovi su nanizani na jedan štapić tako da je kolut s većim polumjerom uvijek ispod onog s manjim polumjerom
- Cilj: Prenijeti sve kolutove (jedan po jedan) na treći štapić tako da ni u jednom trenutku ne bude onaj s većim polumjerom iznad onog s manjim. Pri tome svaki od štapića možemo koristiti za privremeno smještanje kolutova.
- Pitanje: Koliki je najmanji broj prijenosa a_n potreban da se svih n kolutova prenese s prvog na treći štapić?

Induktivni opis:

- Za n = 1 (jedan kolut) imamo samo jedan prijenos $a_1 = 1$
- Pretpostavimo da znamo prenijeti n kolutova (imamo a_n prijenosa)
- Za prijenos n + 1 koluta imamo sljedeće:
  - prenesemo n kolutova na drugi štapić (ukupno a_n prijenosa)
  - prenosimo najveći kolut s prvog na treći štapić (ukupno 1 prijenos)
  - prenesemo n kolutova s drugog na treći štapic (ukupno a_n prijenosa).

Dakle, vrijedi: $a_{n+1} = 2\,a_n + 1$, $a_1 = 1$ (nehomogena jednadžba)

Karakteristična jednadžba je $x - 2 = 0$. Korijen ove jednadžbe $x = 2$.

Rješenje pripadne homogene jednadžbe $a_{n+1} = 2\,a_n$ je: $a_n^{(o)} = \lambda\, 2^n$.

Budući da $x = 1$ nije rješenje karakteristične jednadžbe, partikularno rješenje je $a_n^{(p)} = A$. Dalje je $A = 2\,A + 1$, pa je $A = -1$.

Opće rješenje nehomogene jednadžbe je: $a_n = \lambda\, 2^n - 1$.

Za $a_1 = 1$, iz općeg rješenja slijedi da je $1 = 2\,\lambda - 1$, pa je $\lambda = 1$.

Konačno je: $a_n = 2^n - 1$.

Primjer 2: $a_n = a_{n-1} + n - 1$, $n \geq 1$ uz početni uvjet $a_0 = 0$.

Karakteristična jednažba je $x = 1 \Rightarrow a_n^{(o)} = \lambda\, 1^n = \lambda$.

Budući da je $x = 1$ korijen karakteristične jednadžbe, $m = 1 \Rightarrow a_n^{(p)} = n\,(A\,n + B)$.

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n = \lambda + \frac{1}{2} n\,(n-1) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{2} n\,(n-1)$$

Primjer 3: $a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + 2\,n$, $n \geq 2$ uz početne uvjete $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.