1. OSNOVI MATEMATIKE

1.1. OSNOVNI POJMOVI MATEMATIČKE LOGIKE

1. Pod *sudom* (ili *iskazom*) podrazumijevamo suvislu deklarativnu izjavu, koja se u pogledu istinitosti podvrgava principu isključenja trećeg i kontradikcije, tj. koja (izjava) ima jednu i samo jednu vrijednost istinitosti; sud je, dakle, ili istinit ili neistinit.

2. *Operacija sa sudovima*:

2.1. *Konjunkcija*. Ako su p i q sudovi, tada je $p \wedge q$ oznaka za sud „p i q".

2.2. *Disjunkcija*. Ako su p i q sudovi, tada je $p \vee q$ oznaka za sud „p ili q".

2.3. *Implikacija*. Ako su p i q sudovi, tada je $p \Rightarrow q$ oznaka za sud „Ako je p, onda je q", tj. „p je dovoljan (uslov) za q" ili, pak, „q je potreban (uslov) za p". Znak $\Rightarrow$ čitat ćemo „implicira" ili „povlači".

2.4. *Ekvivalencija*. Ako su p i q sudovi, tada je $p \Leftrightarrow q$ oznaka za sud „p je onda i samo onda ako je q", tj. „p je potreban i dovoljan (uslov) za q" ili „p je ekvivalentno sa q".

Tablica istinitosti gornjih operacija sa sudovima:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

gdje $p=1$, tj. $q=0$ znači da je p istinit, tj. q neistinit sud.

2.5. *Negacija*. Ako je p sud, onda $\neg p$ označava sud „*nije* p" ili „*ne* p". Znak $\neg$ čitat ćemo kao „non" (latinski non = ne). U literaturi ćemo za negaciju suda p susresti još oznake: non p, $\bar{p}$, p'.

Sud non p biće istinit (neistinit) onda i samo onda ako je p neistinit (istinit).

3. Neka je p nekâ formula algebre sudova koja zavisi od parametra (varijable) x, tada $(\forall x)\ p$ znači „za svaki x je p". Simbol $\forall$ se zove *univerzalni kvantifikator* i podsjeća na prvo slovo „A" od njemačkog alle = svi ili engleskog all = svi.

Slično $(\exists x)\ p$ označava „postoji x tako da je p", a $\exists$ predstavlja *egzistencijalni kvantifikator* (potiče od njemačkog „es gibt" = „ima" ili engleskog „exists" = „postoji").

Isto tako $(\exists! x)\, p$ označava „postoji samo jedno x takvo da je p“, tj. x je vezano sa kvantifikatorom $\exists$.

ZADACI

1. Dokazati da su tačne formule:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p')$; b) $((p \wedge q) \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$; c) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.

2. Ispitaj tok istinitosti formula:

a) $(p \vee q) \wedge (r \vee p)$; b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$; c) $(p \Leftrightarrow q) \vee (r' \Rightarrow s)$.

3. Dokaži ove jednakosti:

a) $p \wedge q = q \wedge p$, $p \vee q = q \vee p$, $p \Leftrightarrow q = q \Leftrightarrow p$ (komutativnost konjunkcije, disjunkcije i ekvivalencije);

b) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$, $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r = p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ (asocijativnost konjunkcije, disjunkcije i ekvivalencije);

c) $p \wedge p = p$, $p \vee p = p$ (konjunkcija i disjunkcija su idempotentne);

d) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributivnost konjunkcije prema disjunkciji i obrnuto);

e) $\neg\neg p = p$ (involutivnost negacije);

f) $p \wedge 1 = p$, $p \Leftrightarrow 1 = p$, $p \vee 0 = p$ (1 je neutralni elemenat za konjunkciju i ekvivalenciju, a 0 disjunkciju);

g) $p \vee 1 = 1$, $p \wedge 0 = 0$ (1 je nulti elemenat za disjunkciju, a 0 za konjunkciju).

4. Provjeri ove jednakosti:

a) $\text{non}\,(\forall x)\, P(x) = (\exists x)\,\text{non}\, P(x)$; b) $\text{non}\,(\exists x)\, P(x) = (\forall x)\,\text{non}\, P(x)$;

c) $\text{non}\,((\forall x)\,\text{non}\, P(x)) = (\exists x)\, P(x)$; d) $\text{non}\,((\exists x)\,\text{non}\, P(x)) = (\forall x)\, P(x)$.

5. Neka N označava skup prirodnih brojeva. Koja je od navedenih tvrdnji istinita, a koja nije:

a) $(\forall x \in N)(\exists y \in N)\, x < y$; b) $(\exists y \in N)(\forall x \in N)\, x < y$;

c) $(\forall x \in N)(\forall y \in N)(\exists z \in N)\, x + y = z$; d) $(\forall x \in N)(\forall z \in N)(\exists y \in N)\, x + y = z$?

6. Ispitaj istinitost tvrdnji iz prethodnog zadatka ako tamo umjesto N stavimo skup Z cijelih brojeva.

7. Dokazati De Morganove formule:

a) $(p \wedge q)' = p' \vee q'$; b) $(p \vee q)' = p' \wedge q'$.

8. Pomoću tablice istinitosti pokazati da su slijedeći sudovi identički istiniti (tautologije):

8.1. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p' \vee q)$; 8.2. $(p \vee q) \Leftrightarrow (p' \wedge q')$; 8.3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$;

8.4. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$; 8.5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$;

8.6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$; 8.7. $(p_1 \Rightarrow p_2) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \Rightarrow p_n) \wedge (p_n \Rightarrow p_1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee (p_1' \wedge \ldots \wedge p_n')$.

9. Ispitaj tôk istinitosti formule:
$A \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.

10. Ispitati da li su formule A i B istovrijedne, tj. da li je $A = B$ u slučaju kad je:
a) $A = p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, $B = q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$; b) $A = p \wedge (p \Rightarrow q)$, $B = q$.

11. Dokazati da je implikacija tranzitivna, tj. da je slijedeća formula tautologija:
$A \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

RJEŠENJA

1. Dokaz ćemo provesti na osnovu tablice istinitosti za datu formulu:

a)

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p')$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

b)

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$((p \wedge q) \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1

c)

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	$(q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

2. Formule a) i c) nisu ni identički istinite ni neistinite; b) Formula $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ je tautologija.

4. a) Ako za svako x ne vrijedi $P(x)$, onda postoji bar jedan x za koji nije $P(x)$ i obratno (ako postoji x za koji nije $P(x)$, onda ne vrijedi da za svako x vrijedi $P(x)$).
b), c) i d) provjeravaju se analogno.

5. a) i c) su istinite, dok su b) i d) neistinite.

6. a), c) i d) istinite, b) neistinita.

7. Dokaz De Morganovih formula možemo „pročitati“ iz tablice istinitosti:

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

Formula a) slijedi iz jednakosti 6. i 7. kolone, a formula b) iz jednakosti 9. i 10. kolone.

9. Tók istinitosti formule A proizlazi iz tabele:

p	q	r	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\Rightarrow r$	$p\Rightarrow r$	$((p\Rightarrow q)\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$	A
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1

tj. A je tautologija.

10. a) Implikacija $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ je netačna ako i samo ako je $p=1$ i $(q\Rightarrow r)=0$, tj. formula $A=p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ je netačna ako i samo ako je $p=q=1\wedge r=0$. Na isti način (prostom zamjenom slova p i q) dobije se da je $B=q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ netačno ako i samo ako je $q=p=1\wedge r=0$. Dakle, $A=B$ je tačno za sve vrijednosti istinitosti sudova p, q, r.

b) Za $p=q=1: A=1\wedge(1\Rightarrow 1)=1\wedge 1=1$, $B=q=1$, tj. $A=B$. Za $p=0$, $q=1$ je $A=0\wedge(0\Rightarrow 1)=0\wedge 1=0$, $B=q=1$, tj. $A\neq B$. Prema tome, A i B nisu istovrijedne formule.

11. Dokaz proizlazi iz tablice istinitosti:

p	q	r	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow r$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)$	$p\Rightarrow r$	A
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

1.2. SKUP, RELACIJA, FUNKCIJA, OPERACIJA

1. Kantor*, osnivač teorije skupova, pojam skupa objašnjava na sljedeći način: „Izvjesni, jasno odvojeni i individualizirani objekti naše intuicije ujedinjeni u jednu cjelinu čine skup".
Skup prihvatamo kao osnovni pojam.**

2. Ako je x elemenat skupa S, onda ćemo pisati $x\in S$; u suprotnom, $x\notin S$ ili $x \operatorname{non}\in S$. U tom smislu $S=\{x|x\in S\}$, što čitamo kao „S je skup elemenata x koji imaju osobinu da x pripada skupu S". Uopštavajući takav pristup, kažemo da skup S sadrži one elemente x koji imaju svojstvo $P(x)\,(\Leftrightarrow x\in S)$, tj. $S=\{x|P(x)\}$, što treba da znači „S je skup svih elemenata x koji imaju svojstvo $P(x)$".

---

* Georg Cantor (1845–1918), njemački matematičar, osnivač moderne teorije skupova.

** Teorija skupova neće ovdje biti tretirana kao formalizirana deduktivna teorija, već samo neformalno kao takozvana „klasična" ili „naivna" teorija skupova. Vidjeti o tome: Đuro Kurepa, Teorija skupova, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

3. Ako svaki elemenat skupa A pripada i skupu B, tada se kaže da je A *podskup od* B (ili da je B *nadskup* od A), što se zapisuje kao $A\subset B$ (ili $B\supset A$), tj. prema simbolima matematičke logike

$$A\subset B \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\,(x\in A\Rightarrow x\in B).$$

4. Jednakost skupova definiše se na sljedeći način:

$$A=B \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\,(x\in A\Leftrightarrow x\in B).$$

Ova definicija je u skladu sa $S=\{x|x\in S\}$.

5. $\emptyset$ je oznaka za *prazan skup*, tj. skup koji nema nijednog elementa. Na primjer, $\emptyset$ je skup realnih brojeva koji su rješenja jednačine $x^2+1=0$. Osim toga, za svaki skup A je $\emptyset\subset A$.
Vodeći računa o definiciji inkluzije i operacija ekvivalencije i implikacije, lako je dokazati:

$$A=B\Leftrightarrow A\subset B\wedge B\subset A.$$

6. Neka su A i B skupovi; tada definišemo operacije nad skupovima:

6.1. *Unija skupova* A i B:

$$A\cup B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x|x\in A\vee x\in B\}.$$

6.2. *Presjek skupova* A i B:

$$A\cap B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x|x\in A\wedge x\in B\}.$$

6.3. *Razlika* (*diferencija*) *skupova* A i B:

$$A\setminus B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x|x\in A\wedge x\notin B\}.$$

6.4. Ako je $A\subset I$, skup

$$A' \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x|x\notin A\wedge x\in I\}$$

nazivamo *komplementom skupa* A u odnosu na skup I.

7. *Partitivni skup* $P(A)$ skupa A je skup svih podskupova od A, tj.

$$P(A) \overset{\mathrm{Df}}{=} \{B|B\subset A\}.$$

Primjer: Neka je $A=\{1, 2, 3\}$, tada je:

$P(A)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, A\}$.

8. *Uređen par* elemenata a i b je

$$(a, b) \overset{\mathrm{Df}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\},$$

gdje se a naziva prva *koordinata* (*komponenta* ili *projekcija*) i b druga koordinata uređenog para (a, b).
Na osnovu ove definicije dokazuje se da je

$$(a, b)=(c, d) \Leftrightarrow (a=c) \wedge (b=d).$$

Analogno se definiše uređena n-torka

$(a_1, \ldots, a_n)$ koja se označava, takođe, sa $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

9. Neka su A i B skupovi, tada je *Dekartov* (*Kartezijev*)* *proizvod* tih skupova

$$A \times B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}, \text{ tj.}$$

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a, b) \in A \times B.$$

Analogno, za kakav god konačan broj (ne nužno različitih skupova)

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ je $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \overset{\mathrm{Df}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots$
$\ldots \wedge a_n \in A_n\}$.

Ako je $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$, umjesto $A \times A \times \ldots \times A$ pišemo A^n.

10. Neka je $\varrho \subset A \times B$, tada je ϱ (*binarna*) *relacija u skupu* $A \times B$. Ako je $A=B$, onda se kaže da je ϱ *relacija u skupu* A.
Umjesto $(x, y) \in \varrho$ uobičajeno je pisati $x \varrho y$. Slično $(x, y) \notin \varrho \Leftrightarrow x \operatorname{non} \varrho y$.

11. Neka je $\varrho \subset S \times S$, tada su moguća svojstva relacije ϱ, na primjer:

11.1. *refleksivnost*: $(\forall a \in S) a \varrho a$;

11.2. *simetričnost*: $(\forall a, b \in S) a \varrho b \Rightarrow b \varrho a$;

11.3. *antisimetričnost*: $(\forall a, b \in S) a \varrho b \wedge b \varrho a \Rightarrow a=b$;

11.4. *tranzitivnost*: $(\forall a, b, c \in S) a \varrho b \wedge b \varrho c \Rightarrow a \varrho c$.

12. Binarna relacija ϱ u S je *relacija ekvivalencije* ako je *refleksivna*, *simetrična* i *tranzitivna*. Takva relacija se često označava sa $\sim$.

13. Binarna relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna zove se *relacija* (*djelimičnog*, *parcijalnog*) *uređenja*. Relacija uređenja najčešće se označava sa $\leqq$ ili sa $\geqq$. Za skup S u kome je definisana relacija $\leqq$ (parcijalnog) uređenja kaže se da je (*parcijalno*) *uređen* tom relacijom.
Ako je skup S uređen relacijom $\leqq$ koja ima osobinu

$$(\forall a, b \in S)(a \leqq b) \vee (b \leqq a),$$

kaže se da je S tom relacijom *totalno* (*potpuno*) uređen.

* Renatus Cartesius je latinsko ime i prezime francuskog matematičara i filozofa Dekarta (René Descartes, 1596–1650).

14. Neka su X i Y dva neprazna skupa. *Preslikavnje* ili *funkcija* f *skupa* X u *skup* Y je pravilo prema kome se svakom $x \in X$ pridružuje jedno i samo jedno $y \in Y$. Tu činjenicu zapisujemo na jedan od slijedećih načina:

$$f: X \rightarrow Y;\ f:(x, y),\ x \in X,\ y \in Y;\ X \xrightarrow{f} Y;\ x \mapsto f(x),\ x \in X,\ f(x)=y \in Y,$$

gdje se x naziva *original* (*nezavisno promjenljiva*),

$y=f(x)$ *slika* (*zavisno promjenljiva*), a

X se naziva *definicioni* skup (ili *domen*) preslikavanja.

Gornja definicija funkcije može se kraće zapisati:

$$f: X \rightarrow Y \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X)(\exists! y \in Y) f(x)=y.$$

Moguća je slijedeća veza između funkcije i relacije:

Relacija $f \subset X \times Y$ je funkcija $f: X \rightarrow Y$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

(1) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y=z$;

(2) $\cup \{x | (x, y) \in f\}=X$.

15. Neka je $f: X \rightarrow Y \wedge A \subset X$, tada je $f(A)=\{y | (\exists x \in A) y=f(x)\}$.

16. Neka je $f: X \rightarrow Y$. Ako je $f(X)=Y$, tada kažemo da je f *preslikavanje skupa* X *na* skup Y ili da je f *surjekcija* (ili *preslikavanje na*).

17. Ako važi implikacija

$f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$, onda se f naziva *uzajamno jednoznačno* (*preslikavanje*) ili *injekcija*, ili $1-1$ preslikavanje (sa X u Y).

18. Preslikavanje f koje je $1-1$ i *na* zove se *bijekcija*. Ako su X i Y konačni, onda se za bijekciju $f: X \rightarrow Y$ kaže da je *permutacija*.

19. Ako je $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$, onda je *složeno preslikavanje* $gf: A \rightarrow C$ (ili *kompozicija preslikavanja* f i g) definisana sa

$$(\forall x \in A)(gf)(x)=g(f(x)).$$

20. Preslikavanje $f: X \rightarrow X$ definisano sa $f(x)=x$ za svako $x \in X$ naziva se *identičkim preslikavanjem* skupa X.

21. Ako je $f: X \rightarrow X$ i ako postoji preslikavanje $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ takvo da su složena preslikavanja ff^{-1} i $f^{-1}f$ identička preslikavanja, tj. takva da je

$$(\forall y \in f(X)) f(f^{-1}(y))=y \wedge (\forall x \in X) f^{-1}(f(x))=x,$$

tada preslikavanje f^{-1} nazivamo *inverznim preslikavanjem* preslikavanja f.

22. Ako je $f: X \rightarrow Y$ obostrano jednoznačno preslikavanje, tada postoji inverzno preslikavanje $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ i ono je jedinstveno.

23. Neka je $S \neq \emptyset$. Tada preslikavanje $f: S \times S \to S$ nazivamo *binarnom operacijom f* u S. Prema definiciji preslikavanja (vidi 14) izlazi:

$$(\forall a, b \in S)(\exists! c \in S) f(a, b) = c,$$

što zapisujemo u obliku $afb = c$, gdje je *a lijevi operand, b desni operand, c rezultat operacije* sa operatorom f. Skup S sa operacijom f nazivamo *grupoidom* i označavamo sa (S, f).

24. *Grupoid* $(S, \circ)$ naziva se *grupa* ako vrijede osobine:

1° *internost*: $(\forall a, b \in S)(\exists! c \in S)\, a \circ b = c$;

2° *asocijativnost*: $(\forall a, b, c \in S)(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

3° *egzistencija neutralnog ili jediničnog elementa*:

$$(\exists e \in S)(\forall a \in S)\, e \circ a = a = a \circ e$$

(e se naziva *neutralnim* ili *jediničnim elementom*);

4° egzistencija inverznog (simetričkog) elementa:

$$(\forall a \in S)(\exists \bar{a} \in S)\, a \circ \bar{a} = e = \bar{a} \circ a,$$

gdje je *e jedinični element* u S. Elemenat $\bar{a}$ (označava se sa a^{-1} ili $-a$) naziva se *inverznim* ili *simetričnim elementom* elementa a.
Ako pored osobina 1° – 4° u grupi $(S, \circ)$ vrijedi:

5° komutativnost: $(\forall a, b \in S)\, a \circ b = b \circ a$, tada se kaže da je grupa *komutativna* ili *Abelova*.*

Neka je $(T, \circ)$ grupa i $T \subset S$, tada grupu $(T, \circ)$ nazivamo podgrupom grupe $(S, \circ)$.

25. *Struktura* $(S, \circ, *)$ gdje su $\circ$ i $*$ dvije binarne interne operacije u S naziva se *prsten* ako je:

1° $(S, \circ)$ Abelova grupa;

2° operacija $*$ je asocijativna;

3° za sve $a, b, c \in S$ vrijedi

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c);$$

$$(b \circ c) * a = (b * a) \circ (c * a),$$

tj. lijeva i desna distributivnost operacije $*$ prema operaciji $\circ$.

26. Prsten $(S, \circ, *)$ je *tijelo* ako je $(S \setminus \{0\}, *)$ grupa, gdje je 0 neutralni element za operaciju $\circ$.

* Nils Abel (1802 – 1829), norveški matematičar.

27. *Komutativno tijelo* je *polje*.
Uobičajene su oznake $(G, \cdot)$ za grupu, $(R, +, \cdot)$ za prsten, $(\Phi, +, \cdot)$ za tijelo, „0" je neutralni elemenat za adiciju $+$, „1" je neutralni elemenat za multiplikaciju.

28. *Vektorskim prostorom* ili *linearnim prostorom* nad tijelom $(\Phi, +, \cdot)$ nazivamo Abelovu grupu $X = \{x, y, \ldots\}$, u kojoj je definisano množenje s elementima iz Φ, tj.

$$(\forall x \in X)(\forall \alpha \in \Phi)\, \alpha x \in X.$$

Pri tome vrijedi:

1° $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$; 2° $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$; 3° $\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta)x$; 4° $1x = x$ za sve elemente $\alpha, \beta \in \Phi$, $x, y \in X$. Sa 1 je označen neutralni element multiplikacije u polju Φ. Elemente iz X zovemo *vektorima*, elemente iz Φ *skalarima*, operaciju $+$ skupa X vektorsko sabiranje, operacija $(\alpha, x) \to \alpha x$ množenja vektora $x \in X$ skalarom $\alpha \in \Phi$.

29. Neka su $(A, \circ)$ i $(B, *)$ grupoidi. Ako postoji bijekcija (preslikavanje 1 – 1 i *na*) $f: A \to B$ tako da vrijedi

$$(\forall x, y \in A)\, f(x \circ y) = f(x) * f(y),$$

kaže se da su grupoidi $(A, \circ)$ i $(B, *)$ *izomorfni*, a za preslikavanje f kaže se da je *izomorfizam* od A na B.
Ako je $A = B$, f se zove *automorfizam*.

ZADACI

1. Dokazati da za operacije $\cup$, $\cap$ nad skupovima vrijedi:

a) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ (idempotentnost $\cup$ i $\cap$);
b) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (komutativnost);
c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asocijativnost);
d) $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ (apsorptivnost);
e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivnost $\cup$ prema $\cap$, tj. obratno, $\cap$ prema $\cup$);
f) zapisati distributivnost $\cap$ prema $\cap$, tj. $\cup$ prema $\cup$ i dokazati da odgovarajuće formule vrijede.

2. Dokazati De Morganove* formule:
$(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

3. Ako su $A, B \subset S$ i $A' = C_s A$, $B' = C_s A$, dokazati:

a) $\emptyset = S$, $S' = \emptyset$; b) $(A')' = A$; c) $A \cup A' = S$, $A \cap A' = \emptyset$;

* Augustus de Morgan (1806 – 1871), engleski matematičar i logičar.

d) $A\subset B\Leftrightarrow A'\supset B'\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A$;

e) $A\cap B=\emptyset\Leftrightarrow A\subset B'\Leftrightarrow B\subset A'$; f) $A\cup B=S\Leftrightarrow A'\subset B\Leftrightarrow B'\subset A$.

4. Dokazati (Dedekind)*:

$(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$.

5. Neka je simetrična razlika skupova $A\triangle B\overset{\mathrm{Df}}{=}(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Dokazati da vrijedi:

a) $A\triangle B=B\triangle A$; b) $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$;

c) $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$; d) $A\triangle\emptyset=A$, $A\triangle A=\emptyset$;

e) $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$; f) $A\triangle B=[A\setminus(A\cap B)]\cup[B\setminus(A\cap B)]$;

g) Ako je A, B, $C\subset S$, vrijedi

$$(A\triangle B\triangle C)'=[(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)]\setminus(A\cap B\cap C),$$
$$=[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)]\setminus(A\cap B\cap C),$$

(vidi prethodni zadatak).

6. Ako su A, B, C, D skupovi, dokazati da je:

a) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;

b) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$;

c) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$;

d) $(A\times B)\setminus(C\times D)=((A\setminus C)\times B)\cup(A\times(B\setminus D))$;

e) $(A\times B)\cup(C\times D)\subset(A\cup C)\times(B\cup D)$.

7. Iz $A\triangle X=A\Rightarrow X=\emptyset$. Dokazati.

8. Ispitati osobine binarnih relacija:

a) $=$, $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$ na skupu realnih brojeva;

b) inkluzije $\subset$ na $P(S)$, tj. na partitivnom skupu skupa S;

c) $=$ u skupu brojeva $A\subset R$;

d) paralelnost $\|$ u skupu pravih u Euklidovoj** ravni R^2;

e) okomitost $\perp$ u skupu pravih u R^2;

f) $(N, |)$, gdje je N skup prirodnih brojeva i

$a|b\overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow}(\exists k\in N)\,b=ka\,(a,\ b\in N)$.

g) „a je relativno prosto prema b“, tj. kraće $(a, b)=1$, gdje su a, $b\in N$;

h) relacije kongruentnosti, koja se definiše na sljedeći način:

$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)\overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow}(\exists k\in Z)\,a-b=km,\ (a,\ b,\ m\in Z,\ m\neq 0)$.

(Ako a, b nisu kongruentni (mod m), to se zapisuje kao $a\not\equiv b$ (mod m)).

* Richard Dedekind (1831 – 1916), njemački matematičar.

** Euklid (oko 330 – oko 275), starogrčki matematičar.

9. Neka je $f:x\mapsto\dfrac{2x-a-b}{b-a}$, $(x\in[a,\ b],\ a,\ b\in R)$. Dokazati da je f bijekcija sa $[a, b]$ na $[-1, 1]$.

10. Odrediti sve funkcije $f:A\to B$ ako je:

a) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$; b) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c\}$;

c) $A=\{1, 2\}$, $B=\{a, b, c\}$.

Uoči preslikavanja koja su sirjekcija, injekcija ili bijekcija!

11. Ako su A, $B\subset X$, gdje je X domen funkcije f, dokazati da je:

$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$, $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

12. Ispitati da li su slijedeće strukture grupe:

a) $S=\{1, -1, i, -i\}$ u odnosu na obično sabiranje;

b) isti skup u odnosu na množenje brojeva $(i^2=-1)$;

c) $S=\{f_i(x)|i=1, 2, 3, 4\}$, gdje je

$f_1(x)=x$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_3(x)=-x$, $f_4(x)=-\dfrac{1}{x}$ uz operaciju $f_i\circ f_j=f_i(f_j(x))$, i, $j=\overline{1, 4}$ (tj. $i, j\in\{1, 2, 3, 4\}$).

d) $(N, \cdot)$, $(Z, \cdot)$, $(Q, \cdot)$, $(R, \cdot)$; e) $(N, +)$, $(Z, +)$, $(Q, +)$, $(R, +)$;

f) $S=\left\{\dfrac{1+2m}{1+2n}\,\middle|\,m,\ n\in Z\right\}$ u odnosu na obično množenje;

g) $S=\left\{f:x\mapsto\dfrac{ax+b}{cx+d}\,\middle|\,a,\ b,\ c,\ d,\ x\in R,\ ad-bc=1\right\}$;

$f(x)*g(x)=f(g(x))$;

h) $(R^+, *)$, $a*b=a^b$; i) $(R^+, \odot)$, $a\odot b=a^2b^2$.

13. $S=\{f:X\to X|f$ je bijekcija$\}$ i

$(\forall f,\ g\in S)\,f(x)\circ g(x)=f(g(x))$. Dokazati da je $(S, \circ)$ grupa.

14. a) Neka je $nZ=\{n\cdot z|z\in Z\}$ $(n\in N)$. Ispitati da li je struktura $(nZ, +, \cdot)$ prsten, tijelo ili polje.

Isto pitanje važi i za strukture:

b) $(Q, +, \cdot)$, $(R, +, \cdot)$, $(C, +, \cdot)$; c) $(\{a+b\sqrt{2}|a,\ b\in Z\}, +, \cdot)$;

d) $(S, +, \cdot)$, gdje je S skup polinoma sa cijelim (realnim) koeficijentima.

15. Neka je $(G, \cdot)$ grupa. Dokazati da je:

a) $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$; b) $(a^n)^{-1}=(a^{-1})^n$, $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$; c) $xa=xb\Rightarrow a=b$;

d) $ax=bx\Rightarrow a=b$; e) $ax=b\Rightarrow x=a^{-1}b$; f) $xa=b\Rightarrow x=ba^{-1}$,

gdje su a, b, $x\in G$; m, $n\in Z$.

2*

16. Dokazati da brojevi oblika $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, gdje a, b, $c\in Q$, obrazuju polje u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$.
Naći inverzni elemenat elementa $x=1-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$.

17. U prstenu $(Z, +, \cdot)$ definisane su operacije:

$$a\oplus b:\overset{\mathrm{Df}}{=}a+b+1;$$

$$a\odot b:\overset{\mathrm{Df}}{=}ab+a+b.$$

Pokazati da su $(Z, +, \cdot)$ i $(Z, \oplus, \odot)$ izomorfni prsteni.

18. Pokazati da je X vektorski prostor nad poljem Φ ako je:
a) $X=R$, $\Phi=R$ ili $X=R^n$, $\Phi=R$ $(n\in N)$ i vrijedi
$(\forall x, y\in R^n)\, x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)\wedge \lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$,
$\lambda\in R$, $x=(x_1\ x_2, \ldots, x_n)\in R^n$.
b) $\Phi=C$, $X=C$, c) $X=C$, $\Phi=R$,
d) X je skup svih polinoma stepena $\leqq n$, $\Phi=R$.

19. Skup G čine funkcije

$f_1(x)=x$, $f_2(x)=1/x$, $f_3(x)=1-x$, $f_4(x)=1/(1-x)$, $f_5(x)=(x-1)/x$, $f_6(x)=x/(x-1)$,

a operacija $\circ$ definisana je kao u zadatku 12. c).
Napišite Kelijevu* tablicu kompozicije za grupoid $(G, \circ)$ i dokažite da je to grupa!

20. Neka je $P(S)$ partitivni skup skupa S i $\triangle$ simetrična razlika skupova. Dokazati da je $(P(S), \triangle)$ grupa.

21. Pokazati da su $(R, +)$, $(R^+, \cdot)$ grupe koje su izomorfne.
(Primjedba: $f: R\to R^+$ definisati sa $f(x)=2^x$.)

22. Dokazati da u komutativnoj grupi G vrijedi:

$$(\forall a, b\in G)(\forall n\in Z)\,(ab)^n=a^nb^n.$$

RJEŠENJA

1. Sve formule se na osnovu definicija jednakosti skupova i operacija $\cap$, $\cup$ svode na dokazivanje analognih formula u algebri sudova.

Npr.:

d) $x\in A\cup(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B)\Leftrightarrow x\in A$;

e) $x\in A\cup(B\cap C)\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Primjedba: Uporedite ovaj zadatak sa zadatkom 1.1.3!

---

* Arthur Cayley (1821 – 1895), engleski matematičar.

2. Niz ekvivalencija
$x\in(A\cup B)'\Leftrightarrow x\notin A\cup B\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)'\Leftrightarrow(x\notin A\wedge x\notin B)\Leftrightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Leftrightarrow x\in A'\cap B'$ proizlazi na slijedeći način: prve dvije na osnovu definicije komplementa i unije, treća na osnovu De Morganove formule za sudove, četvrta, opet, prema definiciji komplementa i posljednja prema definiciji presjeka. Sad je, na osnovu tranzitivnosti ekvivalencije: $x\in(A\cup B)'\Leftrightarrow x\in A'\cap B'$, što prema definiciji jednakosti znači da je $(A\cup B)'=A'\cap B'$.
Druga De Morganova formula dokazuje se analogno.

3. a) $x\in\emptyset'\Leftrightarrow x\in S\ (\wedge x\notin\emptyset)$, $x\in S'\Leftrightarrow x\notin S\Leftrightarrow x\in\emptyset$;
b) $x\in(A')'\Leftrightarrow(x\in A')'\Leftrightarrow((x\in A)')'\Leftrightarrow x\in A$;
c) $x\in A\cup A'\Leftrightarrow x\in A\vee x\notin A\Leftrightarrow x\in S\ (A,\ A'\subset S)$,
$x\in A\cap A'\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin A\Leftrightarrow x\in\emptyset$;
d) $A\subset B\Leftrightarrow(x\in A\Rightarrow x\in B)\Leftrightarrow(x\notin B\Rightarrow x\notin A)\Leftrightarrow(x\in B'\Rightarrow x\in A')\Leftrightarrow B'\subset A'$;
e) $A\cap B=\emptyset\Leftrightarrow(x\in A\Rightarrow x\notin B)\Leftrightarrow A\subset B'\Leftrightarrow B\subset A'\Leftrightarrow A\subset B'$;
f) $A\cup B=S\Leftrightarrow A'\cap B'=\emptyset\overset{\mathrm{e)}}{\Leftrightarrow}A'\subset B\Leftrightarrow B'\subset A$.

4. Neka je $a=x\in A$, $b=x\in B$, $c=x\in C$ i formule $\alpha=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$, $\beta=(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$. Tada je Dedekindova formula, prema definiciji jednakosti skupova, ekvivalentna sa formulom $\alpha=\beta$ u algebri sudova.

5. a) Proizlazi iz definicije simetrične razlike na osnovu komutativnosti unije.
b) Dokažimo prvo $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.
Postupak nastaviti kao u prethodnom zadatku.

6. a) $(x, y)\in(A\cup B)\times C\Leftrightarrow x\in A\cup B\wedge y\in C\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge y\in C\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in C)$
$\Leftrightarrow(x, y)\in A\times C\vee(x, y)\in B\times C\Leftrightarrow(x, y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$, gdje niz ekvivalencija slijedi na osnovu: definicije Dekartovog proizvoda, definicije unije, distribucije $\wedge$ prema $\vee$, definicije Dekartovog proizvoda i definicije unije, respektivno.
Slično se dokazuju i ostale formule.

7. Pretpostavimo da je $X\neq\emptyset$, tj. neka postoji $x\in X$. Tada postoje dvije mogućnosti:
1° $x\in X\wedge x\in A\Rightarrow x\notin A\Delta X$,
2° $x\in X\wedge x\notin A\Rightarrow x\in A\Delta X$,
što je kontradiktorno sa $A\Delta X=A$, te pretpostavka $X\neq\emptyset$ otpada. Dakle, $X=\emptyset$.

8. a) $=$ je relacija ekvivalencije na skupu relanih brojeva, $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$ su relacije poretka;
b) $\subset$ je relacija poretka na $P(S)$; c) $=$ je relacija ekvivalencije u skupu brojeva $A\subset R$;
d) $\|$ u skupu pravih iz R^2 je relacija ekvivalencije; e) $\perp$ je simetrična;
f) relacija poretka; g) $(a, b)=1\Rightarrow(b, a)=1$; h) relacija ekvivalencije;

9. $f^{-1}: y\mapsto\frac{1}{2}[(b-a)y+a+b]\ (y\in[-1, 1]\xrightarrow{f^{-1}}[a, b])$.

10. a) Skup svih preslikavanja $\{f: A\mapsto B\}=\{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$, gdje je svaka uređena trojka, u stvari, $(f(1), f(2), f(3))$. Sva preslikavanja, osim (a, a, a) i (b, b, b), jesu surjekcije, nema injekcija ni bijekcija;
b) u ovom slučaju ima $3^3=27$ preslikavanja. Preslikavanja $(f(1), f(2), f(3))\in\{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)\}$ su surjektivna i injektivna, tj. bijektivna;
c) ima $3^2=9$ preslikavanja. Nema surjekcija, injekcije su $(f(1), f(2))\in\{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$.

11. $y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow(\exists x\in A\cup B)\,y=f(x)\Leftrightarrow(\exists x\in A)\vee(\exists x\in B)$
$y=f(x)\Leftrightarrow((\exists x\in A)\,y=f(x))\vee((\exists x\in B)\,y=f(x))\Leftrightarrow(y\in f(A))\vee(y\in f(B))\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$;
$y\in f(A\cap B)\Leftarrow(\exists x\in A\cap B)\,y=f(x)\Leftarrow((\exists x\in A)\wedge(\exists x\in B))\,y=f(x)\Leftarrow((\exists x\in A)\,y=f(x))\wedge$
$\wedge((\exists x\in B)\,y=f(x))\Leftarrow(y\in f(A))\wedge(y\in f(B))\Leftrightarrow y\in f(A)\cap f(B)$.

Obrnuta inkluzija ne vrijedi u opštem slučaju, može npr. biti $A,\ B \neq \emptyset$, $f(A)=f(B)$, $A \cap B=\emptyset$, pa je $f(A \cap B)=\emptyset \neq f(A) \cap f(B)=f(A)$.

12. a) Ne; b) da; c) da; d) $(N, \cdot)$, $(Z, \cdot)$ nisu, $(Q, \cdot)$ i $(R, \cdot)$ su grupe; e) $(N, +)$ nije grupa; f) da; g) da; h) ne; i) ne.

14. a), c) i d) prsten; b) polje.

15. a) Kako je

$$\begin{aligned}(a\cdot b)\cdot(b^{-1}a^{-1}) &= a\,(b\cdot b^{-1})\,a^{-1} && \text{(asocijativnost)}\\ &= a\cdot a^{-1} && (bb^{-1}=e)\\ &= e\end{aligned}$$

to je $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$;

b) dokaz indukcijom;

c) $xa=xb \Rightarrow x^{-1}(xa)=x^{-1}(xb) \Rightarrow a=b$, pošto je $x^{-1}x=e$ za svako $x \in G$;

e) $ax=b \Rightarrow a^{-1}(ax)=a^{-1}b \Rightarrow x=a^{-1}b$.

16. $x^{-1}=\dfrac{1}{43}(5+9\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})$.

17. Lako se provjerava da su $(Z, +, \cdot)$ i $(Z, \oplus, \odot)$ prsteni. Ako je $f: x \mapsto x-1$, $(x \in Z)$, tada nije teško provjeriti da je

$(\forall x,\ y \in Z)\ f(x+y)=f(x) \oplus f(y)$, $f(x\cdot y)=f(x) \odot f(y)$ (i da je f bijekcija), tj. dati prsteni su izomorfni.

19. Kelijeva tablica operacije $\circ$ je:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

Koristeći tu tablicu, lako se provjerava:

(i) operacija $\circ$ je interna, tj.

$(\forall i,\ j=\overline{1, 6})\ f_i \circ f_j=f_i(f_j(x)) \in \{f_k \mid k=\overline{1, 6}\}$;

(ii) $f_i \circ f_1=f_1 \circ f_i=f_i$ za svako $i=\overline{1, 6}$, tj.

f_1 je neutralni elemenat operacije $\circ$;

(iii) $f_i \circ f_i=f_1$, za $i=1, 2, 3, 6$, dok je $f_4 \circ f_5=f_5 \circ f_4=f_1$, tj. $f_i^{-1}=f_i$ za $i=1, 2, 3, 6$ dok je $f_4^{-1}=f_5$ i $f_5^{-1}=f_4$;

(iv) lako se provjerava asocijativnost, tako npr. $(f_2 \circ f_3) \circ f_6=f_4 \circ f_6=f_3$, $f_2 \circ (f_3 \circ f_6)=f_2 \circ f_4=f_3$ itd. Da li je ovo Abelova grupa?

1.3. OSNOVNE OSOBINE SKUPA REALNIH BROJEVA I NJEGOVIH PODSKUPOVA

1. Struktura $(R, +, \cdot)$ je polje, tj.:

1.1. $(R, +)$ je Abelova grupa;

1.2. $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa gdje je 0 neutralni elemenat u odnosu na operaciju sabiranja;

1.3. vrijedi distributivnost $(\forall x,\ y,\ z \in R)\ x(y+z)=xy+xz$.

2. U skupu R definisana je binarna relacija $\leqq (\subset R^2)$, za koju vrijedi:

2.1. $\leqq$ je relacija totalnog poretka;

2.2. $x \leqq y \Rightarrow x+z \leqq y+z$ za svako $z \in R$;

2.3. $0 \leqq x,\ 0 \leqq y \Rightarrow 0 \leqq x \cdot y$.

3. Neka je $R \supset A \neq \emptyset$. Kaže se da je A *ograničen odozgo* (*odozdo*) ako postoji $M \in R$ (tj. $m \in R$) takav da je $x \leqq M$ ($m \leqq x$) za svako $x \in A$. Pri tome se M (tj. m) naziva *majoranta*, (*minoranta*) skupa A. Skup je *ograničen* ako je ograničen i odozgo i odzdo.

4. Ako u skupu svih majoranti (minoranti) skupa A postoji najmanji (najveći) elemenat, on se naziva *supremum* (*infimum*) skupa A i označava $\sup A$ ($\inf A$). Ako je još $\sup A=a \in A$ ($\inf A=b \in A$), onda je a maksimum (b minimum) skupa A i pišemo $a=\max A$ ($b=\min A$).

5. Svaki neprazan odozgo ograničen podskup skupa realnih brojeva ima supremum u R (aksiom supremuma).

6. Skup realnih brojeva R potpuno je okarakterisan sa 1, 2. i 5. tj. skup realnih brojeva je totalno uređeno polje na kome vrijedi aksiom supremuma. Ostala svojstva realnih brojeva mogu se izvesti iz ovih svojstava.

7. U skupu racionalnih brojeva

$Q=\left\{\dfrac{p}{q} \mid p \in Z,\ q \in N\right\}$ vrijede sve osobine 1. i 2, ali ne vrijedi princip supremuma.

8. *Apsolutna vrijednost realnog broja je preslikavanje* $|\ |: R \to R_0^+$ koje je definisano formulom:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Važe slijedeće relacije:

(i) $|-x|=|x|$;

(ii) $|xy|=|x|\,|y|$;

(iii) $|x+y| \leqq |x|+|y|$;

(iv) $||x|-|y|| \leqq |x-y|$;

(v) $(\forall a>0)\,|x| \leqq a \Leftrightarrow -a \leqq x \leqq a$;

(vi) $(\forall a>0)\,|x|>a \Leftrightarrow x>a \vee x<-a$.

9. Neki jednostavni podskupovi u R.

Neka je $a,\ b \in R$, $a<b$, tada uvodimo slijedeće oznake:

$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}=I$;

$[a, b]=\{x \mid a \leqq x \leqq b\}=\bar{I}$;

$(a, b]=[a, b] \setminus \{a\}=(a, b) \cup \{b\}$;

$[a, b)=[a, b] \setminus \{b\}=(a, b) \cup \{a\}$.

Skup $\bar{I}$ se naziva *zatvoreni interval* ili *segment*, a I se naziva *otvoreni interval* ili samo *interval*.