DISKRETNE STRUKTURE

***

– RELACIJE –

I DEO

Šta je to relacija?

U raznim oblastima se često javlja potreba da se između izvesnih objekata uspostave izvesne **veze**, **odnosi** ili **relacije**.

Na primer, često se javlja potreba

- da se izvesni objekti uporede prema nekom zadatom kriterijumu,
- da se poređaju u skladu sa nekim pravilom,
- da se odrede izvesne sličnosti između objekata, i da se oni grupišu u grupe međusobno sličnih objekata, itd.

U matematici se sve ovo može uraditi korišćenjem matematičkog pojma **relacije**, koji definišemo i bavimo se njime u daljem tekstu.

Binarnu relaciju ϱ na nepraznom skupu A definišemo kao bilo koji podskup Dekartovog kvadrata A^2:

$$\varrho \subseteq A^2.$$

Ako je

$$(x, y) \in \varrho,$$

onda kažemo

x **je u relaciji** ϱ **sa** y.

Često umesto $(x, y) \in \varrho$ pišemo $x\,\varrho\,y$.

a) Skup $\varrho = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ je jedna binarna relacija na skupu $\{1,2,3\}$. Umesto $(1,2) \in \varrho$, piše se $1\,\varrho\,2$.

Kako je to relacija manje za brojeve, uobičajeno označavanje je $1 < 2$.

b) Na partitivnom skupu proizvoljnog skupa A, inkluzuja $\subseteq$ je jedna binarna relacija.

c) Skup $\{(x,x) \mid x \in A\}$ određuje relaciju jednakosti na nepraznom skupu A; oznaka relacije je $=$, odnosno piše se $a = a$ za svaki element $a \in A$.

d) Poznate binarne relacije na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, pored jednakosti, jesu i $<$, $\leqslant$, $|$, a njihove definicije su:

$x < y \Leftrightarrow (\exists z)(x + z = y)$ **manje** (strogo manje)

$x \leqslant y \Leftrightarrow (x = y \vee x < y)$ **manje ili jednako**

$x \mid y \Leftrightarrow (\exists z)(x \cdot z = y)$ **deli, je delitelj**

Analogno prvim dvema definišu se i relacije

$>$ **veće** (strogo veće) $\geqslant$ **veće ili jednako**

Slično pojmu binarne relacije, za bilo koji prirodan broj n uvodimo pojam **n-arne relacije** ϱ na nepraznom skupu A koja se definiše kao bilo koji podskup Dekartovog stepena A^n.

Broj n se naziva **arnost** ili **dužina** relacije ϱ.

Relacije arnosti 1 nazivamo **unarne relacije**.
Unarne relacije su zapravo "obični" podskupovi skupa A.

Relacije arnosti 2 su upravo **binarne relacije**.
Relacije arnosti 3 nazivamo **ternarne relacije**.

U matematici se najčešće radi sa binarnim relacijama.

Zato, jednostavnosti radi, umesto **binarna relacija** mi govorimo kraće samo **relacija**.

a) Ako je A skup tačaka na pravoj, onda se svojstvom

x je između y i z

definiše jedna ternarna relacija na A.

b) Skup

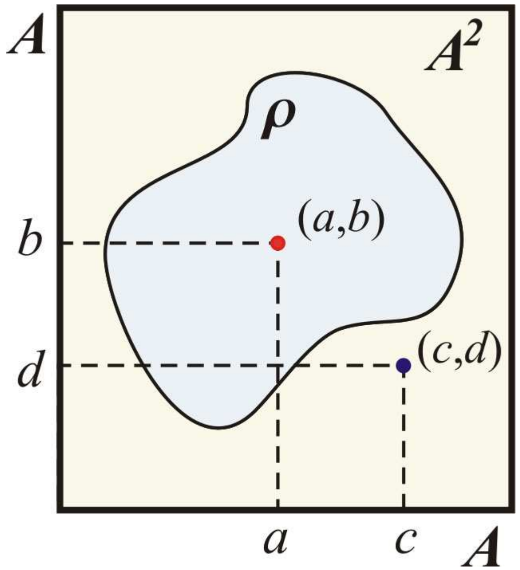
$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

je ternarna relacija na skupu $\mathbb{R}$.

c) Skup $\mathbb{N}_p$ parnih brojeva je unarna relacija na skupu $\mathbb{N}$.

Kao što smo ranije rekli, Dekatrov kvadrat A^2 skupa A se grafički predstavlja kvadratom čija donja i leva ivica predstavljaju skup A.

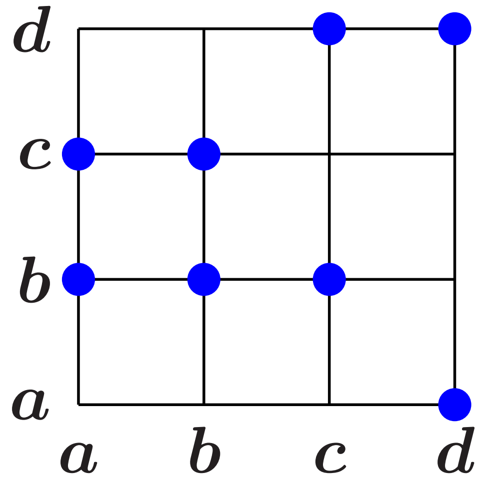
Binarne relacije na A se u tom slučaju predstavljaju kao skupovi tačaka sa odgovarajućim koordinatama u tom kvadratu.



U ovom primeru je $(a, b) \in \varrho$, što pišemo $a\,\varrho\,b$, dok $(c, d) \notin \varrho$.

Ako je skup A konačan, onda kvadrat A^2 predstavljamo mrežom horizontalnih i vertikalnih duži, čiji preseci predstavljaju tačke iz A^2.

Relaciju $\varrho \subseteq A^2$ predstavljamo tako što parove tačaka iz ϱ u toj mreži označavamo malim kružićima.



Na primer, za $A = \{a, b, c, d\}$, gornja slika predstavlja relaciju

$$\varrho = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d)\}.$$

Relacija ϱ na konačnom skupu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ može se predstaviti i **Bulovom matricom**

$$M_\varrho = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix}$$

gde je

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ako } (a_i, a_j) \in \varrho \\ 0 & \text{ako } (a_i, a_j) \notin \varrho \end{cases}$$

Matrica se naziva Bulovom jer se sastoji samo od **Bulovih vrednosti** – **nula** (oznaka za netačno) i **jedinica** (oznaka za tačno).

Ranije razmatrana relacija

$$\varrho = \{(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d)\},$$

na skupu $A = \{a,b,c,d\}$, može se predstaviti Bulovom matricom:

$$M_\varrho = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primetimo da ova matrica veoma liči na kvadratnu mrežu (rotiranu za $-90°$), kojom je ranije bila predstavljena ista ova relacija.

Još jedan način grafičkog predstavljanja relacija je uz pomoć grafova.

Orijentisani graf ili **digraf** je uređeni par (G, E) za koji važi:

– G je neprazan skup, koji nazivamo **skupom čvorova**, a njegove elemente **čvorovima** grafa;

– $E \subseteq G^2$ je neprazan skup koji nazivamo **skupom grana**, a njegove elemente **granama** grafa.

Jasno, E je ništa drugo do binarna relacija na skupu čvorova G.

Za granu $e = (a, b) \in E$ kažemo da **počinje** u čvoru a a **završava se** u čvoru b, što grafički predstavljamo na sledeći način:

Jednostavnosti radi, kada je iz konteksta jasno da se radi o digrafu, umesto "digraf" kažemo i samo "graf".

Neka je graf $G = (G, E)$ zadat sa:

$$G = \{a, b, c\}, \quad E = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, b)\}.$$

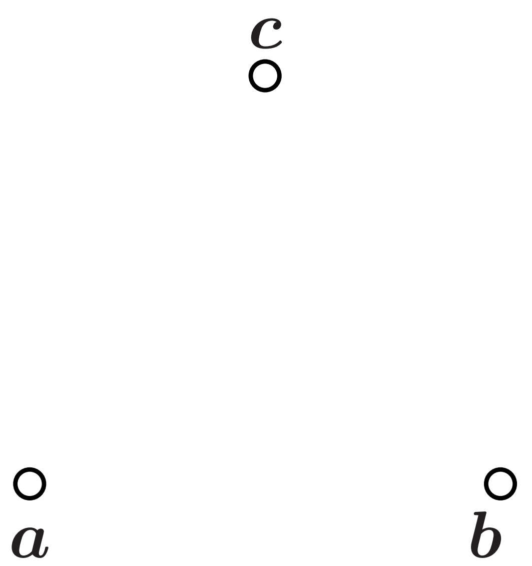
Ovaj graf (relaciju) grafički predstavljamo na sledeći način:

Jednostavnosti radi, kada je iz konteksta jasno da se radi o digrafu, umesto "digraf" kažemo i samo "graf".

Neka je graf $G = (G, E)$ zadat sa:

$$G = \{a, b, c\}, \quad E = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, b)\}.$$

Ovaj graf (relaciju) grafički predstavljamo na sledeći način:

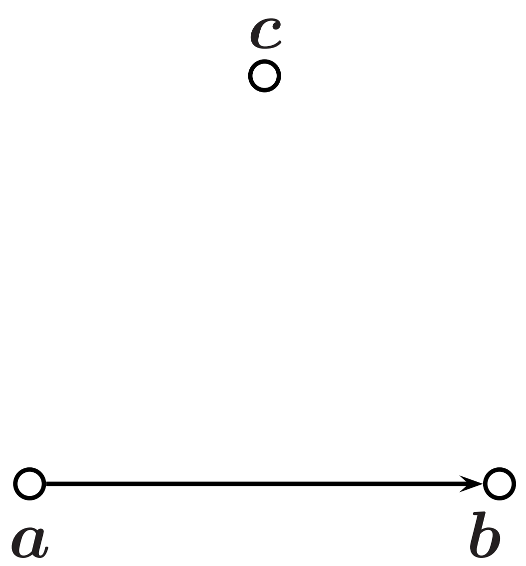


Jednostavnosti radi, kada je iz konteksta jasno da se radi o digrafu, umesto "digraf" kažemo i samo "graf".

Neka je graf $G = (G, E)$ zadat sa:

$$G = \{a, b, c\}, \quad E = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, b)\}.$$

Ovaj graf (relaciju) grafički predstavljamo na sledeći način:

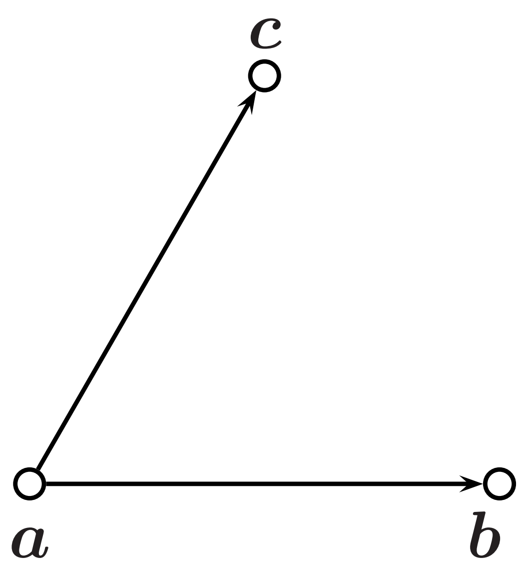


Jednostavnosti radi, kada je iz konteksta jasno da se radi o digrafu, umesto "digraf" kažemo i samo "graf".

Neka je graf $G = (G, E)$ zadat sa:

$$G = \{a, b, c\}, \quad E = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, b)\}.$$

Ovaj graf (relaciju) grafički predstavljamo na sledeći način:

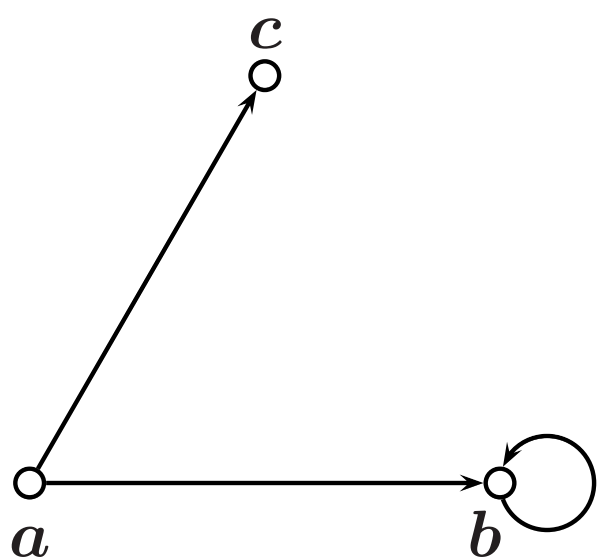


Jednostavnosti radi, kada je iz konteksta jasno da se radi o digrafu, umesto "digraf" kažemo i samo "graf".

Neka je graf $G = (G, E)$ zadat sa:

$$G = \{a, b, c\}, \quad E = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, b)\}.$$

Ovaj graf (relaciju) grafički predstavljamo na sledeći način:

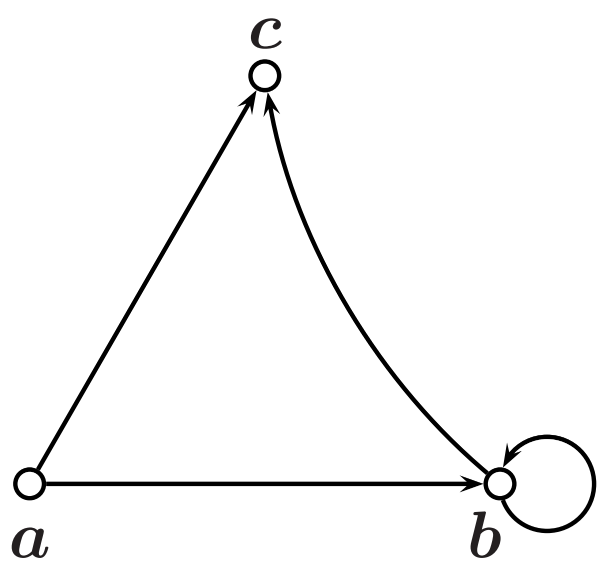


Jednostavnosti radi, kada je iz konteksta jasno da se radi o digrafu, umesto "digraf" kažemo i samo "graf".

Neka je graf $G = (G, E)$ zadat sa:

$$G = \{a, b, c\}, \quad E = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, b)\}.$$

Ovaj graf (relaciju) grafički predstavljamo na sledeći način:



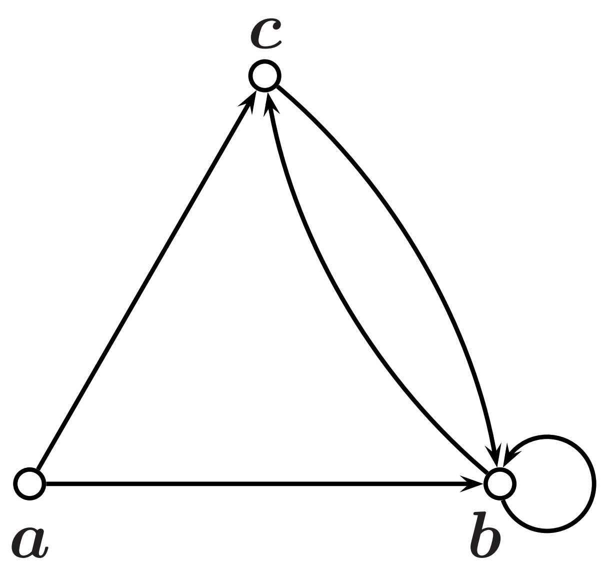
Primer grafa

Jednostavnosti radi, kada je iz konteksta jasno da se radi o digrafu, umesto "digraf" kažemo i samo "graf".

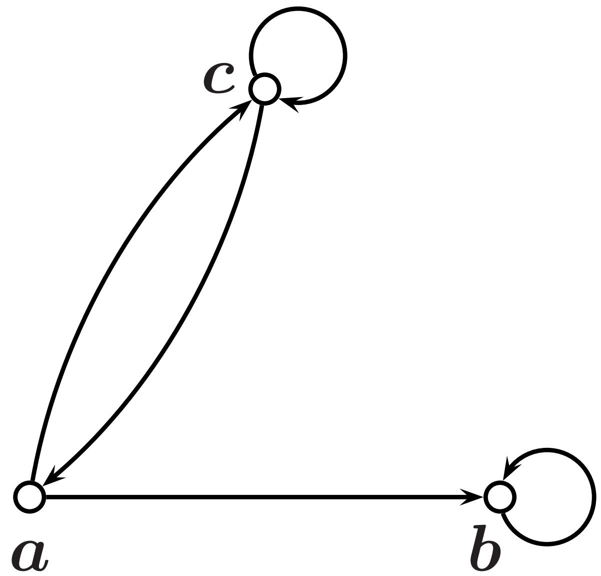
Neka je graf $G = (G, E)$ zadat sa:

$$G = \{a, b, c\}, \quad E = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, b)\}.$$

Ovaj graf (relaciju) grafički predstavljamo na sledeći način:



Neka je graf (G, E) grafički prikazan sa



Tada je $G = \{a, b, c\}$ i

$$E = \{(a, b), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}.$$

Napomenimo da granu oblika (a, a) zovemo petlja.

Naziv "graf" potiče upravo od grafičkog načina njihovog predstavljanja.

Naziv "orijentisani graf" ističe činjenicu da kod svake grane razlikujemo njen početni i njen završki čvor.

U grafičkom predstavljanju grafa, orijentacija je određena strelicom.

"Digraf" je skraćenica naziva orijentisanog grafa na engleskom jeziku – "directed graph".

U matematici se takođe izučavaju i neorijentisani grafovi.

Za razliku od orijentisanih grafova, kod kojih je grana uređeni par čvorova, kod neorijentisanih grafova grana je neuređeni par čvorova.

Zadatak 1.1. Neka je $A = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$ i neka je ϱ relacija na A definisana sa

$$a \,\varrho\, b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \text{ deli } b \text{ u skupu } \mathbb{N}.$$

(a) Predstaviti relaciju ϱ kao skup uređenih parova.

(b) Predstaviti relaciju ϱ grafom.

(c) Predstaviti relaciju ϱ Bulovom matricom.

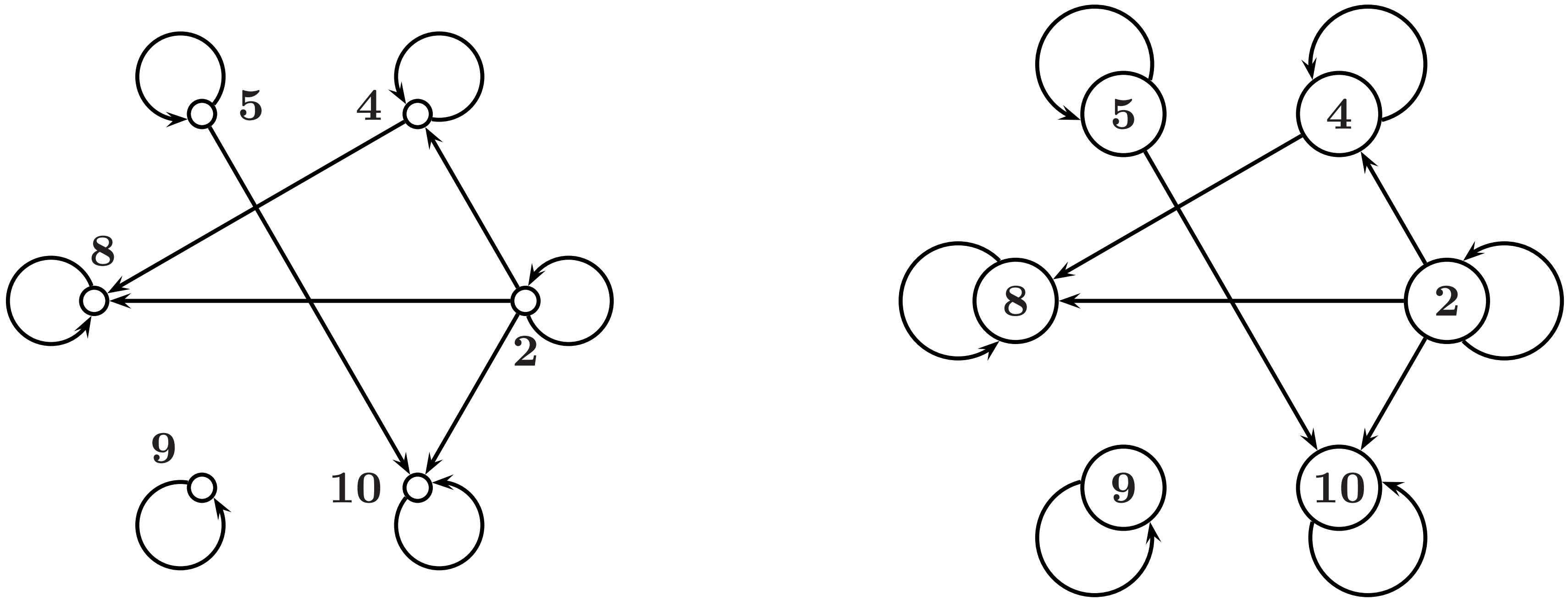
Rešenje: a) Imamo da je

$$\varrho = \{(2,2), (2,4), (2,8), (2,10), (4,4), (4,8),$$
$$(5,5), (5,10), (8,8), (9,9), (10,10)\}.$$

(b) Kako je

$$\varrho = \{(2,2),(2,4),(2,8),(2,10),(4,4),(4,8),\\ (5,5),(5,10),(8,8),(9,9),(10,10)\},$$

ϱ **se može predstaviti grafom na jedan od sledećih načina:**



(c) Kako je

$$\varrho = \{(2,2),(2,4),(2,8),(2,10),(4,4),(4,8),\\ (5,5),(5,10),(8,8),(9,9),(10,10)\},$$

ϱ se može predstaviti sledećom Bulovom matricom:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kako se iz ovog predstavljanja ne vidi baš jasno koja vrsta, odnosno kolona, odgovara određenom elementu iz A, to relaciju ϱ možemo predstaviti i tablicom

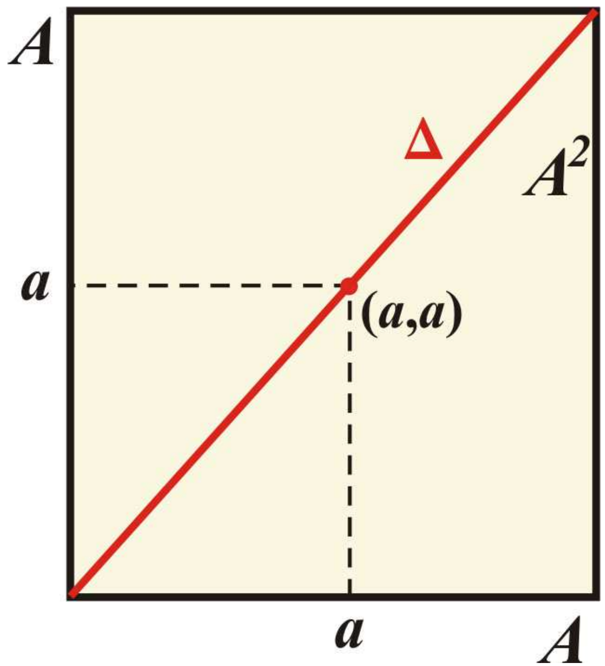
	2	4	5	8	9	10
2	1	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0	1
8	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	1

Prazna relacija definiše se kao prazan podskup od A^2.

Puna ili **univerzalna relacija** definiše se kao ceo skup A^2.

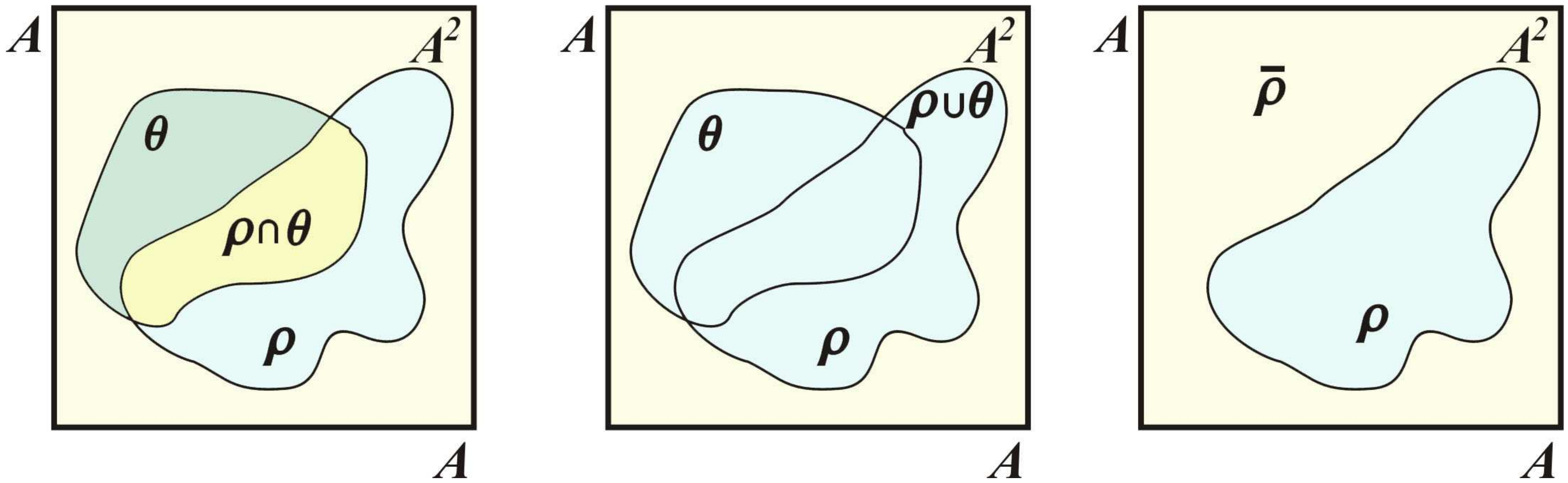
Relacija jednakosti na skupu A naziva se često i **dijagonalna relacija** ili **dijagonala** i označava se sa Δ.

Dakle, $\Delta = \{(x,x) \mid x \in A\}$



Kako relacije na skupu A predstavljaju podskupove od A^2, to se pojmovi **presek relacija**, **unija relacija** i **komplement relacije** definišu kao preseci skupova:

$$\varrho \cap \theta = \{(x,y) \in A^2 \mid (x,y) \in \varrho \wedge (x,y) \in \theta\};$$
$$\varrho \cup \theta = \{(x,y) \in A^2 \mid (x,y) \in \varrho \vee (x,y) \in \theta\};$$
$$\overline{\varrho} = \{(x,y) \in A^2 \mid (x,y) \notin \varrho\}.$$



Jednakost relacija takođe definišemo kao jednakost skupova,

$$\varrho = \theta \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall (x, y) \in A^2)\, (x, y) \in \varrho \Leftrightarrow (x, y) \in \theta\,),$$

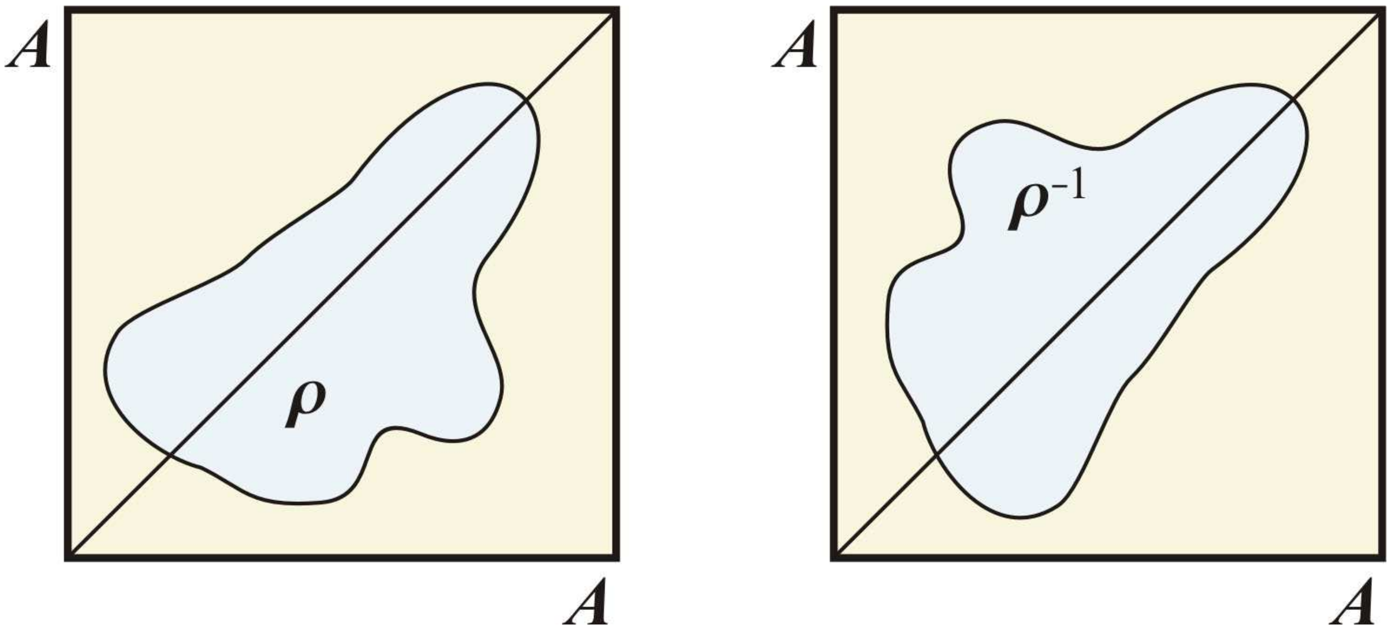
a **inkluziju relacija** kao inkluziju skupova:

$$\varrho \subseteq \theta \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall (x, y) \in A^2)\, (x, y) \in \varrho \Rightarrow (x, y) \in \theta\,).$$

Inverzna relacija relacije ϱ na skupu A, u oznaci ϱ^{-1}, je relacija na skupu A definisana sa:

$$\varrho^{-1} = \{(y,x) \in A^2 \mid (x,y) \in \varrho\}.$$

Na slici se vidi da se inverzna relacija ϱ^{-1} dobija rotacijom relacije ϱ oko dijagonale.



Primeri operacija sa relacijama

Razmatramo relacije na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$.

a) Presek relacija $\leqslant$ i $\geqslant$ je relacija jednakosti, a njihova unija je puna relacija, tj. $\mathbb{N}^2$.

b) Komplement relacije $<$ je relacija $\geqslant$, a inverzna relacija za $<$ je relacija $>$.

c) Relacija jednakosti je sama sebi inverzna, a njen komplement je relacija $\neq$.

d) Relacija **deli**, $|$, je podskup relacije $\leqslant$.

Kompozicija ili **proizvod** relacija ϱ i θ na skupu A je relacija $\varrho \circ \theta$ na A, definisana na sledeći način:

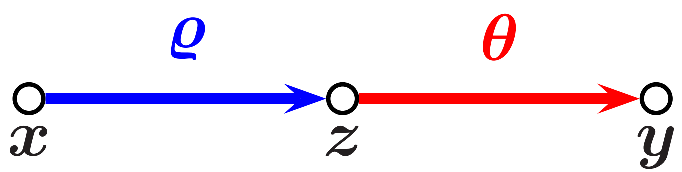
$$\varrho \circ \theta = \{(x, y) \in A^2 \mid (\exists z \in A)((x, z) \in \varrho \wedge (z, y) \in \theta)\}$$

odnosno

$$\varrho \circ \theta = \{(x, y) \in A^2 \mid (\exists z \in A)(\, x\,\varrho\, z \;\wedge\; z\,\theta\, y\,)\}$$

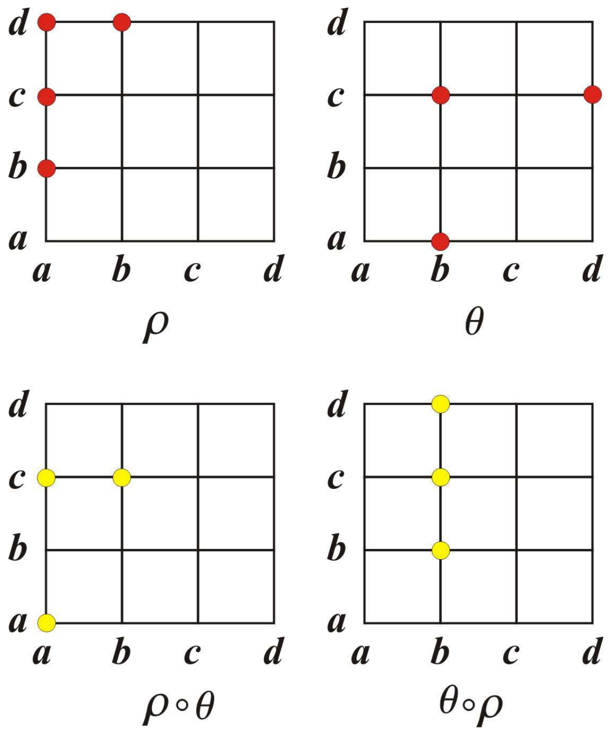
Drugim rečima, relacija θ se **nastavlja (nadovezuje)** na ϱ.

To nadovezivanje može se grafički prikazati na sledeći način



Neka je $A = \{a, b, c, d\}$, **i**

$$\varrho = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d)\},\ \theta = \{(b, a), (b, c), (d, c)\}.$$

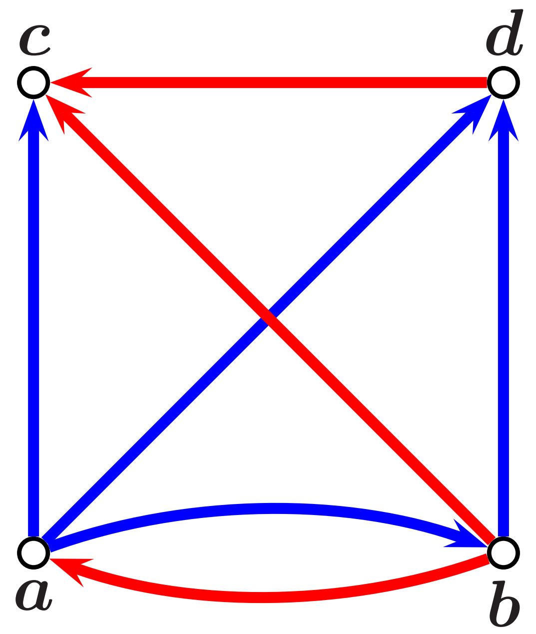


Tada je

$$\varrho \circ \theta = \{(a, a), (a, c), (b, c)\},\ \theta \circ \varrho = \{(b, b), (b, c), (b, d)\}.$$

Neka je ponovo $A = \{a, b, c, d\}$, i

$$\varrho = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d)\}, \quad \theta = \{(b, a), (b, c), (d, c)\}.$$



Ove relacije možemo grafički predstaviti tako da relaciji ϱ odgovaraju plave strelice, a relaciji θ crvene.

Tada relacijama $\varrho \circ \theta$ i $\theta \circ \varrho$ odgovaraju kombinacije strelica:

$\varrho \circ \theta$: plava–crvena; $\theta \circ \varrho$: crvena–plava

Dakle,

$$\varrho \circ \theta = \{(a, a), (a, c), (b, c)\}, \quad \theta \circ \varrho = \{(b, b), (b, c), (b, d)\}.$$

Tvrđenje 1: Za proizvoljne relacije ϱ, θ i σ na skupu A važi:

$$\varrho \circ (\theta \circ \sigma) = (\varrho \circ \theta) \circ \sigma,$$

tj. kompozicija relacija je asocijativna operacija.

Dokaz:

Dokazaćemo samo da važi inkluzija

$$\varrho \circ (\theta \circ \sigma) \subseteq (\varrho \circ \theta) \circ \sigma,$$

jer se obratna inkluzija dokazuje na potpuno isti način.

Asocijativnost kompozicije

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rrr, bend left, "\varrho \circ (\theta \circ \sigma)"] & & & b \end{tikzcd}$$

$$(a, b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow$$

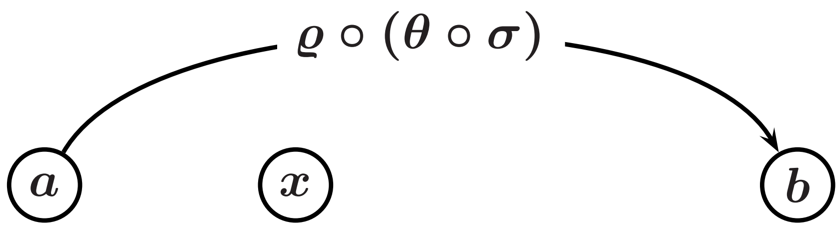
$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$



$$(a, b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow$$

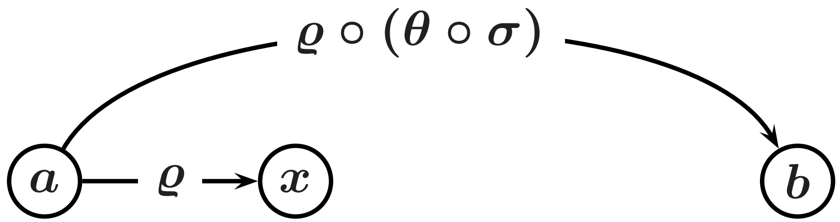
$$\Rightarrow (\exists x \in A) \qquad\qquad \wedge$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$



$$(a, b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists x \in A)(a, x) \in \varrho \wedge$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

Asocijativnost kompozicije

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\varrho"] \arrow[rr, bend left, "\varrho \circ (\theta \circ \sigma)"] & x \arrow[r, bend left, "\theta \circ \sigma"] & b \end{tikzcd}$$

$$(a, b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow$$

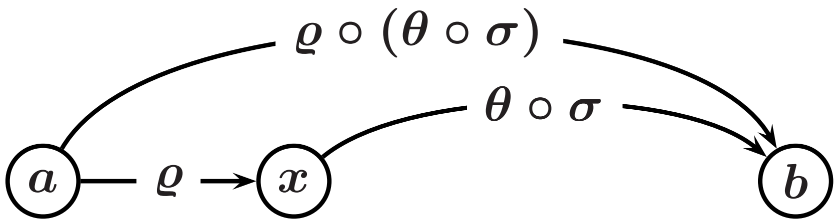
$$\Rightarrow (\exists x \in A)(a, x) \in \varrho \wedge (x, b) \in \theta \circ \sigma$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$



$$(a, b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists x \in A)(a, x) \in \varrho \wedge (x, b) \in \theta \circ \sigma$$

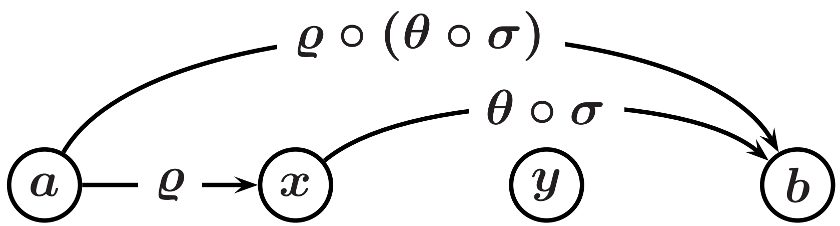
$$\Rightarrow (\exists x \in A) \qquad (a, x) \in \varrho \wedge$$

$$\Rightarrow$$

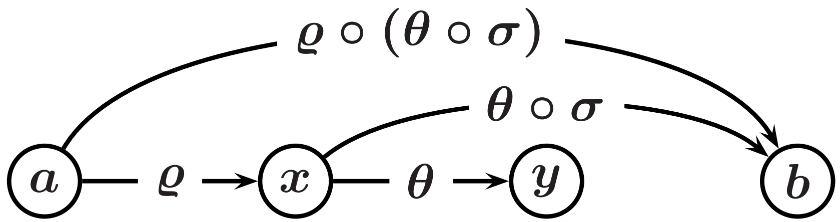
$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

Asocijativnost kompozicije



$$
\begin{aligned}
&(a, b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow (\exists x \in A)(a, x) \in \varrho \wedge (x, b) \in \theta \circ \sigma \\
&\quad \Rightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in A)(a, x) \in \varrho \wedge \Big(\qquad\qquad \wedge \qquad\qquad \Big) \\
&\quad \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$



$$(a, b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists x \in A)(a, x) \in \varrho \wedge (x, b) \in \theta \circ \sigma$$

$$\Rightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in A)(a, x) \in \varrho \wedge \Big((x, y) \in \theta \wedge \qquad\qquad \Big)$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

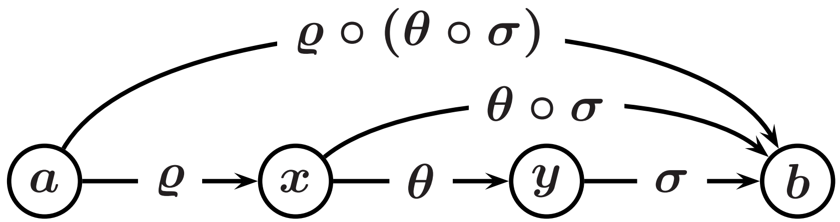
$$\Rightarrow$$

Asocijativnost kompozicije

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\varrho"] \arrow[rrr, bend left=40, "\varrho \circ (\theta \circ \sigma)"] & x \arrow[r, "\theta"] \arrow[rr, bend left, "\theta \circ \sigma"] & y \arrow[r, "\sigma"] & b \end{tikzcd}$$

$$
\begin{aligned}
(a, b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) &\Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists x \in A)(a, x) \in \varrho \wedge (x, b) \in \theta \circ \sigma \\
&\Rightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in A)(a, x) \in \varrho \wedge \big((x, y) \in \theta \wedge (y, b) \in \sigma\big) \\
&\Rightarrow \\
&\Rightarrow \\
&\Rightarrow
\end{aligned}
$$

Asocijativnost kompozicije



$$(a, b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists x \in A)(a, x) \in \varrho \wedge (x, b) \in \theta \circ \sigma$$

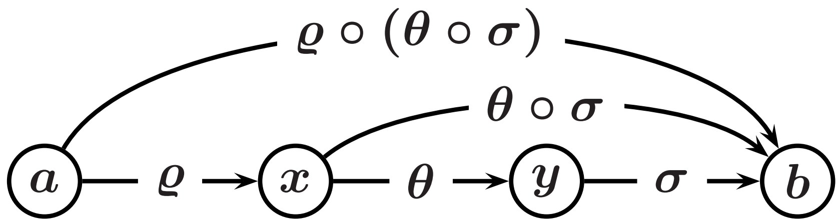
$$\Rightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in A)(a, x) \in \varrho \wedge \big((x, y) \in \theta \wedge (y, b) \in \sigma\big)$$

$$\Rightarrow (\exists y \in A)(\exists x \in A)$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

Asocijativnost kompozicije



$$(a, b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists x \in A)(a, x) \in \varrho \wedge (x, b) \in \theta \circ \sigma$$

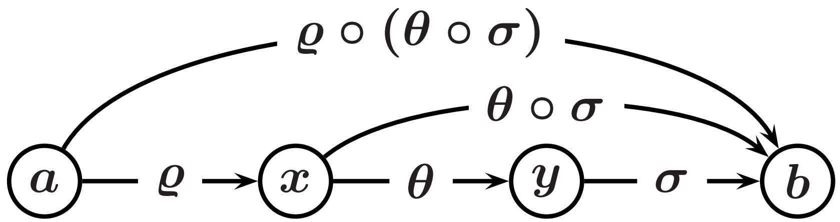
$$\Rightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in A)(a, x) \in \varrho \wedge \big((x, y) \in \theta \wedge (y, b) \in \sigma\big)$$

$$\Rightarrow (\exists y \in A)(\exists x \in A)\big((a, x) \in \varrho \wedge (x, y) \in \theta\big) \wedge (y, b) \in \sigma$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

Asocijativnost kompozicije



$$(a,b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists x \in A)(a,x) \in \varrho \wedge (x,b) \in \theta \circ \sigma$$

$$\Rightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in A)(a,x) \in \varrho \wedge \big((x,y) \in \theta \wedge (y,b) \in \sigma\big)$$

$$\Rightarrow (\exists y \in A)(\exists x \in A)\big((a,x) \in \varrho \wedge (x,y) \in \theta\big) \wedge (y,b) \in \sigma$$

$$\Rightarrow (\exists y \in A) \qquad\qquad\qquad\qquad \wedge (y,b) \in \sigma$$

$$\Rightarrow$$

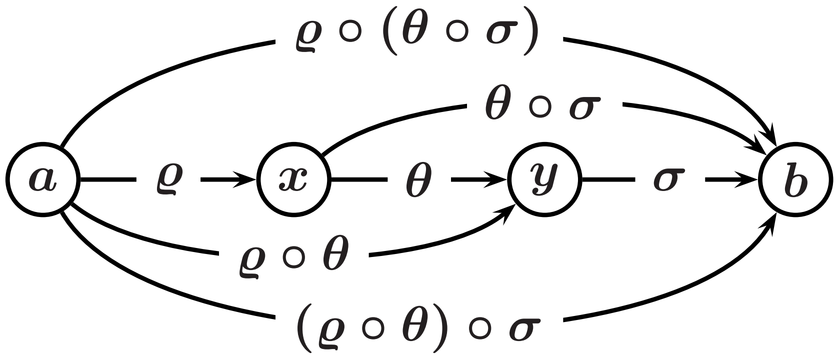
Asocijativnost kompozicije

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\varrho"] \arrow[rrr, bend left=50, "\varrho \circ (\theta \circ \sigma)"] \arrow[rr, bend right, "\varrho \circ \theta"'] & x \arrow[r, "\theta"] \arrow[rr, bend left, "\theta \circ \sigma"] & y \arrow[r, "\sigma"] & b
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a,b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow (\exists x \in A)(a,x) \in \varrho \wedge (x,b) \in \theta \circ \sigma \\
&\quad \Rightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in A)(a,x) \in \varrho \wedge \big((x,y) \in \theta \wedge (y,b) \in \sigma\big) \\
&\quad \Rightarrow (\exists y \in A)(\exists x \in A)\big((a,x) \in \varrho \wedge (x,y) \in \theta\big) \wedge (y,b) \in \sigma \\
&\quad \Rightarrow (\exists y \in A)(a,y) \in \varrho \circ \theta \wedge (y,b) \in \sigma \\
&\quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
a \arrow[r, "\varrho"] \arrow[rr, bend right, "\varrho\circ\theta"'] \arrow[rrr, bend left=50, "\varrho\circ(\theta\circ\sigma)"] \arrow[rrr, bend right=50, "(\varrho\circ\theta)\circ\sigma"'] & x \arrow[r, "\theta"] \arrow[rr, bend left, "\theta\circ\sigma"] & y \arrow[r, "\sigma"] & b
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a,b) \in \varrho \circ (\theta \circ \sigma) \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow (\exists x \in A)(a,x) \in \varrho \wedge (x,b) \in \theta \circ \sigma \\
&\qquad \Rightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in A)(a,x) \in \varrho \wedge \big((x,y) \in \theta \wedge (y,b) \in \sigma\big) \\
&\qquad \Rightarrow (\exists y \in A)(\exists x \in A)\big((a,x) \in \varrho \wedge (x,y) \in \theta\big) \wedge (y,b) \in \sigma \\
&\qquad \Rightarrow (\exists y \in A)(a,y) \in \varrho \circ \theta \wedge (y,b) \in \sigma \\
&\qquad \Rightarrow (a,b) \in (\varrho \circ \theta) \circ \sigma
\end{aligned}
$$



$$(a,b)\in\varrho\circ(\theta\circ\sigma)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\exists x\in A)(a,x)\in\varrho\wedge(x,b)\in\theta\circ\sigma$$

$$\Rightarrow(\exists x\in A)(\exists y\in A)(a,x)\in\varrho\wedge\big((x,y)\in\theta\wedge(y,b)\in\sigma\big)$$

$$\Rightarrow(\exists y\in A)(\exists x\in A)\big((a,x)\in\varrho\wedge(x,y)\in\theta\big)\wedge(y,b)\in\sigma$$

$$\Rightarrow(\exists y\in A)(a,y)\in\varrho\circ\theta\wedge(y,b)\in\sigma$$

$$\Rightarrow(a,b)\in(\varrho\circ\theta)\circ\sigma$$

Ovim smo dokazali da je $\varrho\circ(\theta\circ\sigma)\subseteq(\varrho\circ\theta)\circ\sigma$. $\square$

Tvrđenje 2: Postoji skup A i relacije ϱ i θ na A takve da je

$$\varrho \circ \theta \neq \theta \circ \varrho.$$

tj. da **kompozicija relacija ne mora biti komutativna operacija**.

Dokaz: U primeru kompozicije relacija koji smo dali napred je

$$\varrho \circ \theta \neq \theta \circ \varrho,$$

što dokazuje naše tvrđenje. $\square$

Druga svojstva kompozicije

Tvrđenje 3: Za proizvoljnu relaciju ϱ na skupu A važi

$$\varrho \circ \Delta = \Delta \circ \varrho = \varrho.$$

Dokaz: Neka je $(x, y) \in \varrho \circ \Delta$. To znači da postoji $z \in A$ takav da je $(x, z) \in \varrho$ i $(z, y) \in \Delta$, odnosno $(x, z) \in \varrho$ i $z = y$, odakle dobijamo da je $(x, y) \in \varrho$. Prema tome, dokazali smo da je $\varrho \circ \Delta \subseteq \varrho$.

Sa druge strane, ako je $(x, y) \in \varrho$, tada imamo da je $(x, y) \in \varrho$ i $(y, y) \in \Delta$, pa prema definiciji kompozicije relacija dobijamo da je $(x, y) \in \varrho \circ \Delta$. Ovim smo dokazali da je $\varrho \subseteq \varrho \circ \Delta$, pa konačno zaključujemo da je $\varrho \circ \Delta = \varrho$.

Na isti način dokazujemo da je $\Delta \circ \varrho = \varrho$. $\square$

Tvrđenje 3: Za proizvoljne relacije ρ, θ i σ na skupu A važi:

(a) $\rho \circ (\theta \cup \sigma) = (\rho \circ \theta) \cup (\rho \circ \sigma)$; $\quad (\rho \cup \theta) \circ \sigma = (\rho \circ \sigma) \cup (\theta \circ \sigma)$;

(b) $\rho \circ (\theta \cap \sigma) \subseteq (\rho \circ \theta) \cap (\rho \circ \sigma)$; $\quad (\rho \cap \theta) \circ \sigma \subseteq (\rho \circ \sigma) \cap (\theta \circ \sigma)$;

(c) $(\rho \cup \theta)^{-1} = \rho^{-1} \cup \theta^{-1}$;

(d) $(\rho \cap \theta)^{-1} = \rho^{-1} \cap \theta^{-1}$;

(e) $(\rho \circ \theta)^{-1} = \theta^{-1} \circ \rho^{-1}$;

(f) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;

(g) $(\overline{\rho})^{-1} = \overline{(\rho^{-1})}$.

Dokaz: Ostavlja se za vežbu. $\square$

Tvrđenje 3: Za proizvoljne relacije ρ, θ i σ na skupu A važi:

$$\rho \subseteq \theta \;\Rightarrow\; \sigma \circ \rho \subseteq \sigma \circ \theta, \qquad \rho \subseteq \theta \;\Rightarrow\; \rho \circ \sigma \subseteq \theta \circ \sigma.$$

Dokaz: Neka je $\rho \subseteq \theta$.

Ako $(x, y) \in \sigma \circ \rho$, tada postoji $z \in A$ takav da je $(x, z) \in \sigma$ i $(z, y) \in \rho$. Kako je $\rho \subseteq \theta$, to imamo da je $(x, z) \in \sigma$ i $(z, y) \in \theta$, što znači da je $(x, y) \in \sigma \circ \theta$.

Prema tome, dobili smo da je $\sigma \circ \rho \subseteq \sigma \circ \theta$, čime je dokazana prva implikacija.

Druga implikacija se dokazuje analogno. $\square$

Relacija ϱ na skupu A je **refleksivna** ako za svaki $x \in A$ važi

$$(x, x) \in \varrho.$$

Drugim rečima, relacija ϱ je refleksivna ako i samo ako je

$$\Delta \subseteq \varrho$$

tj., ako ϱ **sadrži dijagonalu**.

Prema tome, dijagonala je refleksivna relacija.

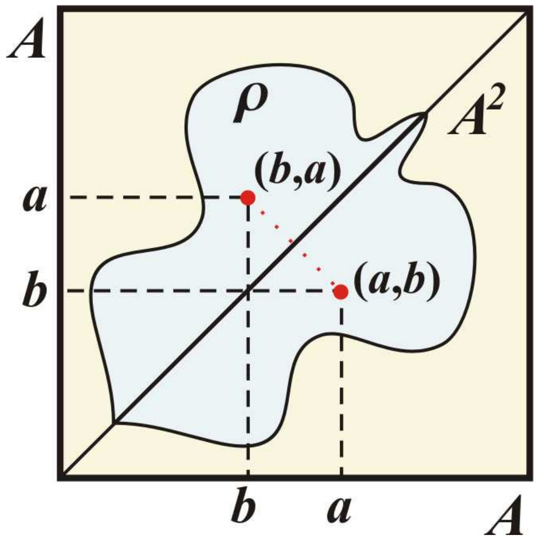
Za relaciju ϱ na A, relacija $\varrho \cup \Delta$ je najmanja refleksivna relacija na A koja sadrži ϱ, i zovemo je **refleksivno zatvorenje** relacije ϱ.

Relacija ϱ na A je **simetrična** ako za sve $x, y \in A$ važi

$$(x, y) \in \varrho \Rightarrow (y, x) \in \varrho.$$

Drugim rečima, ϱ je simetrična relacija ako je $\varrho \subseteq \varrho^{-1}$, što je ekvivalentno sa $\varrho = \varrho^{-1}$.

Naziv "**simetrična**" potiče iz činjenice da su to relacije **simetrične u odnosu na dijagonalu**, što je prikazano na sledećoj slici:



Relacija ϱ na A je **antisimetrična** ako za sve $x, y \in A$ važi

$$(x, y) \in \varrho \ \wedge \ (y, x) \in \varrho \ \Rightarrow \ x = y,$$

Ovaj uslov je ekvivalentan sa

$$\varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq \Delta.$$

Drugim rečima, antisimetrična relacija ne može sadržati nijedan par različitih tačaka u A^2 simetričan u odnosu na dijagonalu.

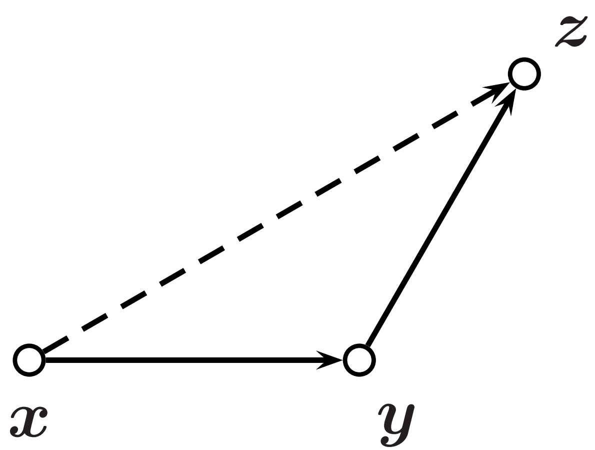
Odatle i potiče naziv "antisimetrična" relacija.

Relacija ϱ na A je **tranzitivna** ako za sve $x, y, z \in A$ važi

$$(x, y) \in \varrho \wedge (y, z) \in \varrho \Rightarrow (x, z) \in \varrho.$$

Ekvivalentna formulacija ovog uslova je $\varrho \circ \varrho \subseteq \varrho$.

Tranzitivnost se grafički može predstaviti na sledeći način – ako je x u relaciji sa y, i y je u relaciji sa z, onda se trougao može zatvoriti relacijom između x i z:



Neka je ϱ relacija na skupu A. Za $n \in \mathbb{N}^0$, **n-ti stepen** relacije ϱ, u oznaci ϱ^n, definišemo sa:

$$\varrho^0 \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \qquad \varrho^1 \stackrel{\text{def}}{=} \varrho \qquad \varrho^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \varrho^n \circ \varrho$$

Takođe, relacije ϱ^+ i ϱ^* definišemo na sledeći način:

$$\varrho^+ \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varrho^n \qquad \varrho^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} \varrho^n$$

a) ϱ^+ je najmanja tranzitivna relacija na A koja sadrži ϱ, i zovemo je **tranzitivno zatvorenje** relacije ϱ;

b) ϱ^* je najmanja refleksivna i tranzitivna relacija na A koja sadrži ϱ, i zovemo je **refleksivno-tranzitivno zatvorenje** relacije ϱ.

Neka je dat graf (G, E), čvorovi $a, b \in G$ i neka je

$$e_1 = (a_1, b_1),\ e_2 = (a_2, b_2),\ \ldots,\ e_n = (a_n, b_n) \in E$$

niz grana za koje važi

- $a = a_1$ (a je početni čvor);
- $b_n = b$ (b je završni čvor);
- $b_k = a_{k+1}$ (grana e_{k+1} se nadovezuje na granu e_k), za svaki k, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Tada za ovaj niz grana kažemo da je **put iz čvora a u čvor b**, a broj n grana u nizu nazivamo **dužinom** tog puta.

$$a = a_1 \xrightarrow{e_1} b_1 = a_2 \xrightarrow{e_2} b_2 = a_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow b_{n-1} = a_n \xrightarrow{e_n} b_n = b$$

Tranzitivno zatvorenje relacije ϱ na skupu A može se predstaviti pomoću puteva u grafu (A, ϱ), na sledeći način:

$$(a, b) \in \varrho^+ \text{ ako i samo ako postoji put iz } a \text{ u } b.$$

Takođe, za $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$(a, b) \in \varrho^n \text{ ako i samo ako postoji put dužine } n \text{ iz } a \text{ u } b.$$

Na ovaj način bi smo mogli izraziti i tranzitivnost relacije:

Relacija ϱ na skupu A je tranzitivna ako i samo ako svaki put u grafu (A, ϱ) ima prečicu dužine 1, tj., postoji grana koja spaja početnu i krajnju tačku tog puta.

a) Relacije $=$, $\leqslant$, $\geqslant$ i $|$ na skupu $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva su refleksivne.

Sve te relacije su i tranzitivne, $=$ je simetrična a $\leqslant$, $\geqslant$ i $|$ su anti-simetrične.

Ako relaciju deljenja $|$ posmatramo na skupu celih brojeva, tada ona nije antisimetrična. Na primer, za svaki ceo broj $n \neq 0$ važi: $-n \mid n$ i $n \mid -n$, pri čemu je $n \neq -n$.

b) Relacija $\varrho = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$ je refleksivna na skupu $\{1,2\}$, ali nije na skupu $\{1,2,3\}$, jer ne sadrži dijagonalu ovog poslednjeg.

c) Relacija $\varrho = \{(x,y) \mid |x-y| < 1\}$ na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ je refleksivna i simetrična, ali nije tranzitivna.

d) Relacija paralelnosti za prave u ravni:

$$p \| q \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \text{ i } q \text{ se ne seku ili se poklapaju}$$

je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Relacija ortogonalnosti

$$p \perp q \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \text{ i } q \text{ se seku pod pravim uglom}$$

je samo simetrična.

Zadatak 1.2. Neka je na skupu celih brojeva zadata sledeća relacija

$$x \,\varrho\, y \iff (\exists u \in \mathbb{Z})\ x = yu.$$

Koja od sledećih svojstava ima ova relacija:

(a) refleksivna

(b) simetrična

(c) anti-simetrična

(d) tranzitivna

Rešenje: Dokazaćemo da ova relacija ima svojstva (a) i (d), a nema ostala svojstva.

(a) Relacija ϱ je refleksivna jer za svaki $x \in \mathbb{Z}$ važi da je $x = x \cdot 1$, što znači da je $x \,\varrho\, x$.

(b) Relacija ϱ nije simetrična jer je, na primer, $6\,\varrho\,2$, a nije $2\,\varrho\,6$. Naime, postoji $u \in \mathbb{Z}$ tako da je $6 = 2 \cdot u$ $(u = 3)$, ali ne postoji $v \in \mathbb{Z}$ tako da je $2 = 6 \cdot v$.

(c) Relacija ϱ nije anti-simetrična, jer su, na primer, 2 i -2 različiti elementi iz $\mathbb{Z}$ za koje važi da je $2\,\varrho\,-2$ i $-2\,\varrho\,2$. Naime, $2 = (-2)\cdot(-1)$ i $-2 = 2 \cdot (-1)$.

(d) Relacija ϱ je tranzitivna jer ako su $x, y, z \in \mathbb{Z}$ elementi takvi da je $x\,\varrho\,y$ i $y\,\varrho\,z$, odnosno postoje $u, v \in \mathbb{Z}$ tako da je $x = yu$ i $y = zv$, tada je

$$x = yu = (zv)u = z(vu),$$

i kako je jasno da je $vu \in \mathbb{Z}$, to dobijamo da je $x\,\varrho\,z$. $\square$

Zadatak 1.3. Neka je $S = \{1, 2, 3\}$ i neka je relacija R na S zadata sa

$$R = \{(2, 1), (1, 2), (3, 3), (2, 2), (1, 1)\}.$$

Koja od sledećih svojstava ima ova relacija:

(a) refleksivna

(b) simetrična

(c) anti-simetrična

(d) tranzitivna

Rešenje: Dokazaćemo da R ima svojstva (a), (b) i (d), a nema (c).

(a) Relacija

$$R = \{(2,1),(1,2),(3,3),(2,2),(1,1)\}$$

je refleksivna jer sadrži sve parove $(1,1)$, $(2,2)$ i $(3,3)$ sa dijagonale Dekartovog kvadrata skupa S.

(b) Relacija R je i simetrična, jer van dijagonale sadrži samo parove $(1,2)$ i $(2,1)$, koji su međusobno simetrični.

(c) Relacija R nije anti-simetrična, jer sadrži parove $(1,2)$ i $(2,1)$, pri čemu je $1 \neq 2$.

(d) Kako su za $R = \{(2,1),(1,2),(3,3),(2,2),(1,1)\}$ tačne sledeće implikacije

$$
\begin{array}{l}
(1,1) \in R \ \wedge\ (1,1) \in R \ \Rightarrow\ (1,1) \in R \\
(1,1) \in R \ \wedge\ (1,2) \in R \ \Rightarrow\ (1,2) \in R \\
(1,2) \in R \ \wedge\ (2,1) \in R \ \Rightarrow\ (1,1) \in R \\
(1,2) \in R \ \wedge\ (2,2) \in R \ \Rightarrow\ (1,2) \in R \\
(2,1) \in R \ \wedge\ (1,1) \in R \ \Rightarrow\ (2,1) \in R \\
(2,1) \in R \ \wedge\ (1,2) \in R \ \Rightarrow\ (2,2) \in R \\
(2,2) \in R \ \wedge\ (2,1) \in R \ \Rightarrow\ (2,1) \in R \\
(2,2) \in R \ \wedge\ (2,2) \in R \ \Rightarrow\ (2,2) \in R \\
(3,3) \in R \ \wedge\ (3,3) \in R \ \Rightarrow\ (3,3) \in R
\end{array}
$$

to zaključujemo da je R tranzitivna relacija.

Primetimo da je zadatak bilo moguće uraditi i na drugi način.

Naime, možemo uočiti da su svi elementi iz skupa $\{1,2\}$ međusobno u relaciji R, dok je 3 u relaciji samo sa samim sobom.

Prema tome, kolekcija koja se sastoji od skupova $\{1,2\}$ i $\{3\}$ je particija skupa S, i dva elementa iz S su u relaciji R ako i samo ako su u istom bloku te particije, odakle zaključujemo da je R relacija ekvivalencije koja odgovara toj particiji.

Iz toga potom dalje sledi da R ima svojstva (a), (b) i (d), a nema svojstvo (c). $\square$

Relacija ϱ na skupu A je **relacija ekvivalencije** na A ako je

❶ **refleksivna**

❷ **simetrična**

❸ **tranzitivna**

Umesto "relacija ekvivalencije" ponekad kažemo samo "ekvivalencija".

Glavni primer relacija ekvivalencije je **jednakost**, tj. dijagonalna relacija.

To je **najmanja** relacija ekvivalencije na A, u smislu da svaka relacija ekvivalencije na A mora da je sadrži, dok nijedan pravi podskup od Δ nema svojstvo refleksivnosti, pa nije relacija ekvivalencije na A.

I univerzalna relacija je relacija ekvivalencije.

Primer 1.1. Neka je n proizvoljan prirodan broj, i neka je relacija $\equiv_n$ na skupu $\mathbb{Z}$ svih celih brojeva definisana sa

$$x \equiv_n y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} n \mid x - y,$$

ili, ekvivalentno, sa

$$x \equiv_n y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \text{ i } y \text{ imaju isti ostatak pri deljenju sa } n.$$

Dokazati da je $\equiv_n$ relacija ekvivalencije.

Napomena 1.1. Relacija $\equiv_n$ poznata je pod nazivom **kongruencija po modulu n**.

Dokaz: (1) Za svaki $x \in \mathbb{Z}$ imamo da $n \mid 0 = x - x$, odakle je $x \equiv_n x$, što znači da je relacija $\equiv_n$ refleksivna.

(2) Za proizvoljne $x, y \in \mathbb{Z}$ imamo da je

$$x \equiv_n y \;\Leftrightarrow\; n \mid x - y \;\Leftrightarrow\; n \mid -(x-y) \;\Leftrightarrow\; n \mid y - x \;\Leftrightarrow\; y \equiv_n x,$$

i dakle, relacija $\equiv_n$ je simetrična.

(3) Neka su $x, y, z \in \mathbb{Z}$ elementi takvi da je $x \equiv_n y$ i $y \equiv_n z$, tj. $n \mid x - y$ i $n \mid y - z$. Tada

$$n \mid (x - y) + (y - z) = x - z,$$

pa je $x \equiv_n z$, što znači da je $\equiv_n$ tranzitivna relacija.

Prema tome, $\equiv_n$ je relacija ekvivalencije. $\square$

Primer 1.2. Relacija paralelnosti za prave u ravni, paralelnost za ravni u prostoru, sve su to primeri relacija ekvivalencije.

Neka je ϱ relacija ekvivalencije na A i $a \in A$.

Klasa ekvivalencije elementa a u odnosu na relaciju ekvivalencije ϱ definiše se kao skup svih elemenata iz A koji su u relaciji ϱ sa a, tj.

$$[a]_\varrho \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid a\,\varrho\,x\}.$$

Takođe govorimo i **ϱ-klasa** elementa a, ili kraće samo **klasa** elementa a, u slučajevima kada je jasno o kojoj se relaciji ekvivalencije radi.

Tvrđenje 1.

1) Svaka klasa je neprazna - klasa elementa x sadrži makar taj element.

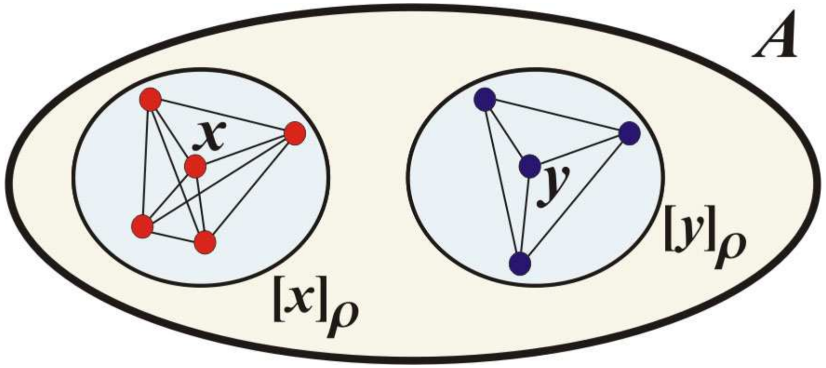
Dokaz: Za svaki $x \in A$, zbog refleksivnosti imamo da je $x\,\varrho\,x$, pa je $x \in [x]_\varrho$.

2) Ukoliko su dva elementa x i y u relaciji ϱ, tada su njihove klase jednake, tj. oni određuju jednu istu klasu: $[x]_\varrho = [y]_\varrho$.

Dokaz: Neka je $a \in [x]_\varrho$, tj. $a\,\varrho\,x$. Prema pretpostavci, $x\,\varrho\,y$, pa na osnovu tranzitivnosti dobijamo da je $a\,\varrho\,y$, tj. $a \in [y]_\varrho$.

Odavde zaključujemo da je $[x]_\varrho \subseteq [y]_\varrho$. Na isti način dokazujemo i obratnu inkluziju, čime dobijamo da je $[x]_\varrho = [y]_\varrho$.

3) Ukoliko x i y nisu u relaciji ϱ, tada su njihove klase disjunktne.



Dokaz: Pretpostavimo da postoji $a \in [x]_\varrho \cap [y]_\varrho$. Tada je $a\,\varrho\,x$ i $a\,\varrho\,y$, pa na osnovu simetričnosti i tranzitivnosti dobijamo da je $x\,\varrho\,y$, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom.

Odavde zaključujemo da klase $[x]_\varrho$ i $[y]_\varrho$ moraju biti disjunktne.

Iz 2) i 3) sledi da ako dve klase $[x]_\varrho$ i $[y]_\varrho$ nisu disjunktne, tj. imaju neprazan presek, onda moraju da budu jednake.

4) Unija svih ϱ-klasa je jednaka celom skupu A.

Dokaz: Kako su sve ϱ-klase sadržane u A, to je i njihova unija sadržana u A.

Obratno, kako je svaki element $x \in A$ sadržan u nekoj ϱ-klasi, tj. $x \in [x]_\varrho$, to je jasno da je A sadržan u uniji svih ϱ-klasa.

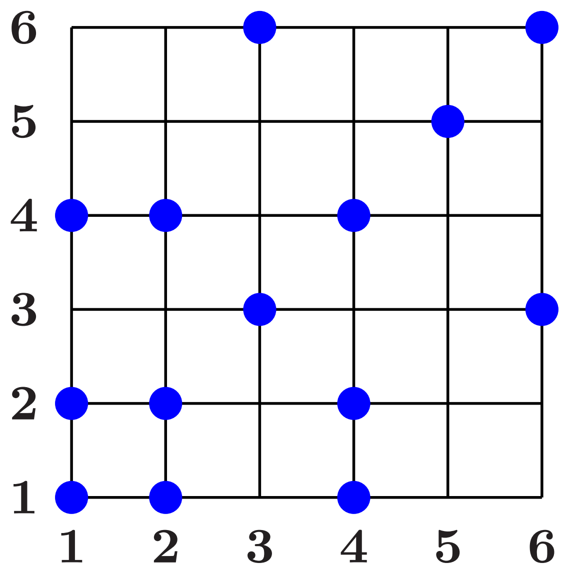
Prema tome, dokazali smo da je A jednak uniji svih ϱ-klasa.

Kada neku ϱ-klasu zapišemo u obliku $[x]_\varrho$, tada kažemo da je x predstavniik te klase.

Kako je $[x]_\varrho = [y]_\varrho$, za svaki $y \in [x]_\varrho$ (prema 2)), to ravnopravno sa x i y može predstavljati tu klasu, tj., klasu ekvivalencije može označavati (predstavljati) svaki njen član.

Primeri klasa

a) Neka je ϱ relacija na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ zadata sa



ili matricom $M_\varrho = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tada je ϱ relacija ekvivalencije sa klasama

$$[1]_\varrho = [2]_\varrho = [4]_\varrho = \{1,2,4\},$$
$$[3]_\varrho = [6]_\varrho = \{3,6\},$$
$$[5]_\varrho = \{5\}.$$

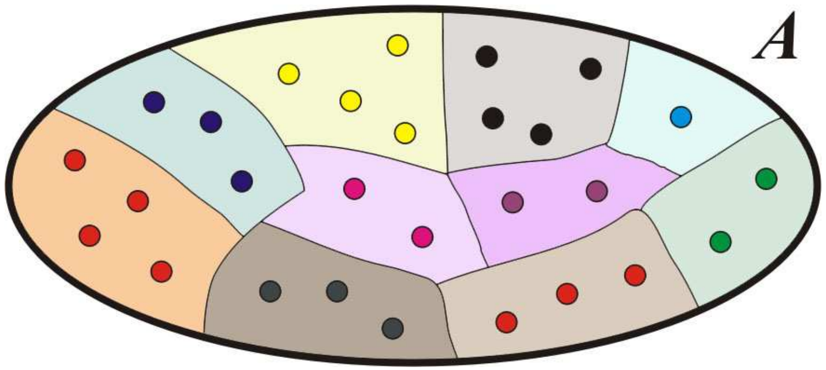
b) Klase ekvivalencije za relaciju $\equiv_3$ na $\mathbb{N}^0$ su skupovi brojeva sa istim ostatkom pri deljenju sa 3:

$$\{1, 4, 7, \dots\}; \quad \{2, 5, 8, \dots\}; \quad \{0, 3, 6, 9, \dots\}.$$

c) Dijagonala na proizvoljnom skupu A ima jednočlane klase: svaki element je samo sa sobom u relaciji pa je i sam u klasi.

d) Relacija paralelnosti razbija skup svih pravih u ravni na pravce: u istoj klasi su sve međusobno paralelne prave.

Kao što smo videli, relacija ekvivalencije razbija skup na međusobno disjunktne klase ekvivalencije.



Relacija ekvivalencije grupiše, udružuje u jednu klasu sve one elemente koje objedinjuje zajedničko svojstvo - ono koje opisuje ta relacija.

Na primer, kod relacije $\equiv_3$, to je svojstvo da imaju isti ostatak pri deljenju sa 3.

Zadatak 1.4. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$.

Odrediti koje od sledećih relacija definisanih na A su relacije ekvivalencije, i za one koje su relacije ekvivalencije odrediti njihove klase:

(a) $R_1 = \{(2, 2), (1, 1)\}$

(b) $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(c) $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 3)\}$

(d) $R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 1)\}$

(e) $R_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\}$

Rešenje: Dokazaćemo da relacije (b) i (e) jesu relacije ekvivalencije, a ostale nisu.

(a) Relacija $R_1 = \{(2, 2), (1, 1)\}$ očito nije refleksivna, jer ne sadrži par $(3, 3)$, zbog čega nije ni relacija ekvivalencije.

(b) Relacija $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ je očigledno relacija ekvivalencije čije su klase jednoelementne: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

(c) Relacija $R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(3,1),(1,3)\}$ je očito refleksivna i simetrična, ali nije tranzitivna, pa nije relacija ekvivalencije.

Naime, imamo da je $(2,1) \in R_3$ i $(1,3) \in R_3$, ali $(2,3) \notin R_3$.

(d) Relacija $R_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(3,2),(2,1)\}$ nije relacija ekvivalencije, jer nije simetrična. Zaista, $(3,2) \in R_4$, ali $(2,3) \notin R_4$.

(e) U slučaju relacije

$$R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1)\}$$

imamo da su svi elementi iz skupa A međusobno u toj relaciji, što znači da je to univerzalna relacija na A, odnosno, R_5 je relacija ekvivalencije sa samo jednom klasom: $\{1,2,3\}$. $\square$

Dakle, relacija ekvivalencije određuje jednu particiju (razbijanje) skupa A na međusobno disjunktne skupove čija je unija ceo skup A.

To nas dovodi do sledeće formalne definicije:

Familiju $\{A_i\}_{i \in I}$ podskupova skupa A zovemo **particija** ili **razbijanje** skupa A ako za tu familiju važi sledeće: sledeće uslove:

1) **Za svaki** $i \in I$ **je** $A_i \neq \emptyset$;

2) **Za sve** $i, j \in I$ **je ili** $A_i \cap A_j = \emptyset$ **ili** $A_i = A_j$;

3) $\bigcup \{A_i \mid i \in I\} = A$.

Skupove A_i nazivamo **blokovima** particije Π.

Ako je ϱ relacija ekvivalencije na skupu A, tada prema Tvrđenju 2, familija svih ϱ-klasa jeste jedna particija skupa A.

Tu particiju označavamo sa $\boldsymbol{\Pi_\varrho}$, tj.

$$\boldsymbol{\Pi_\varrho \stackrel{\text{def}}{=} \{[x]_\varrho \,|\, x \in A\}}.$$

Obratno, ako je data particija $\Pi = \{A_i \,|\, i \in I\}$ skupa A, tada možemo definisati relaciju ϱ_Π na A na sledeći način:

$$\boldsymbol{(x, y) \in \varrho_\Pi \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists i \in I)\ x, y \in A_i},$$

tj. ako x i y pripadaju istom bloku particije Π.

Tvrđenje 2:

a) Za svaku relaciju ekvivalencije ϱ na skupu A, Π_ϱ je particija od A.

b) Za svaku particiju Π skupa A, ϱ_Π je relacija ekvivalencije na A.

c) Štaviše, važi i sledeće:

$$\varrho_{(\Pi_\varrho)} = \varrho \quad \text{i} \quad \Pi_{(\varrho_\Pi)} = \Pi.$$

Jednakosti iz Tvrđenja 3, pod c), mogu se pojasniti na sledeći način:

c1) Ako za relaciju ekvivalencije ϱ formiramo odgovarajuću particiju Π_ϱ, a potom za tu particiju formiramo odgovarajuću relaciju ekvivalencije $\varrho_{(\Pi_\varrho)}$, onda dobijamo relaciju ekvivalencije od koje smo krenuli.

$$\varrho \longrightarrow \Pi_\varrho \longrightarrow \varrho_{(\Pi_\varrho)} = \varrho$$

c2) Ako za particiju Π formiramo odgovarajuću relaciju ekvivalencije ϱ_Π, a potom za tu relaciju ekvivalencije formiramo odgovarajuću particiju $\Pi_{(\varrho_\Pi)}$, onda dobijamo particiju od koje smo krenuli.

$$\Pi \longrightarrow \varrho_\Pi \longrightarrow \Pi_{(\varrho_\Pi)} = \Pi$$

Zadatak 1.5. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Odrediti koje od sledećih kolekcija skupova predstavljaju particije skupa A. Za one koje nisu particije navesti razlog zbog čega to nisu.

(a) $\{\{1, 2\}, \emptyset, \{3, 4, 5\}, \{6, 7\}\}$

(b) $\{\{1, 4\}, \{2, 3, 7\}, \{5, 6\}\}$

(c) $\{\{1, 7\}, \{3, 4, 6\}\}$

(d) $\{\{1, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 6, 7\}\}$

(e) $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$

Rešenje: Dokazaćemo da kolekcije (b) i (e) jesu particije skupa A, dok ostale nisu.

Potsetićemo se da kolekcija podskupova od A jeste particija tog skupa ako se sastoji od nepraznih skupova, koji su po parovima disjunktni i unija im je ceo skup A.

(a) Kolekcija $\{\{1,2\},\emptyset,\{3,4,5\},\{6,7\}\}$ nije particija skupa A jer se ne sastoji od nepraznih skupova.

(b) Kolekcija $\{\{1,4\},\{2,3,7\},\{5,6\}\}$ je particija jer se sastoji od nepraznih, međusobno disjunktnih skupova čija je unija jednaka celom skupu A.

(c) Kolekcija $\{\{1,7\},\{3,4,6\}\}$ se sastoji od nepraznih, disjunktnih podskupova od A, ali unija tih podskupova nije ceo skup A (2 i 5 nisu u toj uniji), pa ni to nije particija skupa A.

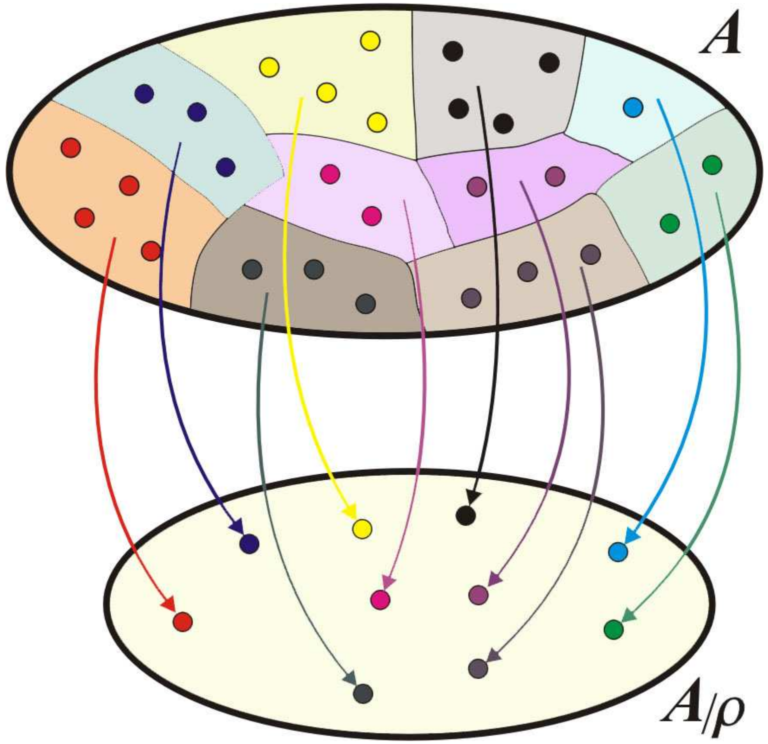
(d) Kolekcija $\{\{1,5\},\{3,4,5\},\{2,6,7\}\}$ nije particija od A jer skupovi $\{1,5\}$ i $\{3,4,5\}$ iz te kolekcije nisu međusobno disjunktni.

(e) Kolekcija $\{\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$ je particija skupa A sa samo jednim blokom - celim tim skupom A. $\square$

Particiju koja odgovara relaciji ekvivalencije ϱ na skupu A nazivamo takođe i faktor skupom skupa A u odnosu na ϱ.

Drugim rečima, faktor skup skupa A u odnosu na relaciju ekvivalencije ϱ je skup svih klasa ekvivalencije skupa A u odnosu na ϱ.

Taj faktor skup označavamo sa A/ϱ.



Kao što se vidi sa slike desno, faktor skup se zapravo dobija tako što se svaka ϱ-klasa sažme u jedan element.