Kombinatorika

1.10.2002.

1. Dokažite da za prirodne brojeve $m \leq n$ vrijedi

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

2. Na koliko načina možemo rasporediti n jednakih kuglica u m različitih kutija tako da točno dvije kutije ostanu prazne?

3. Odredite broj nizova duljine n sastavljenih od elemenata skupa $\{0, 1, 2\}$ takvih da nikoje dvije nule nisu susjedne.

4. Neka je S n-člani skup. Nađite broj parova (X, Y), gdje su $X, Y \subseteq S$ podskupovi takvi da vrijedi $|X \Delta Y| = 1$, $|X| \geq 3$, $|Y| \geq 3$.

   Napomena. Simetrična razlika skupova definirana je s

$$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

5. Nađite funkciju izvodnicu za broj particija broja n u točno tri dijela.

Napomena. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

REZULTATI: SRIJEDA, 2.10. U 11^{00}

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 1. 10. 2002.

(1.) Dokažite da za prirodne brojeve $m \leq n$ vrijedi

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

Rj.: Računamo: $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} \frac{\cancel{k!}}{m!(k-m)!} =$

$$= \frac{n!}{m!} \frac{1}{(n-k)!(k-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

Stoga je:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^{n} \binom{n-m}{k-m} = /j = k-m/ =$$

$$= \binom{n}{m} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

(2.) Na koliko načina možemo rasporediti n jednakih kuglica u m različitih kutija tako da točno dvije kutije ostanu prazne?

Rj.: Prvo odaberemo dvije kutije koje će ostati prazne - to možemo na $\binom{m}{2}$ načina. Zatim stavimo u svaku od preostalih kutija po jednu kuglicu. Ostalo nam je $n-m+2$ kuglica, koje treba rasporediti bilo kako u $m-2$ različitih kutija. To se može na

$$\binom{n-\cancel{m}+\cancel{2}+\cancel{m}-\cancel{2}-1}{m-2-1} = \binom{n-1}{m-3}$$ načina. Po principu

produkta ukupan broj rasporeda je $\binom{m}{2}\binom{n-1}{m-3}$.

(3.) Odredite broj nizova duljine n sastavljenih od elemenata skupa $\{0,1,2\}$ takvih da nikoje dvije nule nisu susjedne.

Rj: Označimo traženi broj s a_n. Niz duljine n možemo dobiti tako da:

a) na proizvoljan niz duljine $n-1$ nadodamo zdesna 1 ili 2

b) na niz duljine $n-1$ koji ne završava nulom nadodamo zdesna nulu

Niz duljine $n-1$ koji ne završava nulom dobivamo od proizvoljnog niza duljine $n-2$ dodavanjem 1 ili 2 zdesna; to znači da takvih nizova ima $2a_{n-2}$.

Vidimo da (a_n) zadovoljava rekurzivnu relaciju

$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Karakteristična jednadžba je

$\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$ Njezini su korijeni $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$, pa

je opće rješenje $a_n = A(1-\sqrt{3})^n + B(1+\sqrt{3})^n$

Nizovi duljine 1 su: 0, 1, 2 $\Rightarrow a_1 = 3$

Nizovi duljine 2 su: 01, 02, 10, 12, 20, 21, 22 $\Rightarrow a_2 = 8$

Rješavamo sustav

$$(1-\sqrt{3})A + (1+\sqrt{3})B = 3$$
$$(1-\sqrt{3})^2 A + (1+\sqrt{3})^2 B = 8$$

Rješenja su $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$, pa slijedi

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1-\sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1+\sqrt{3})^n$$

(4.) Neka je S n-člani skup. Nađite broj parova (X,Y), gdje su $X,Y \subseteq S$ podskupovi takvi da vrijedi
$|X \triangle Y| = 1$, $|X| \geq 3$, $|Y| \geq 3$.

Napomena. Simetrična razlika skupova definirana je s

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Rj. Očito vrijedi jedan od ova dva slučaja:

1.) $X = Y \cup \{a\}$, $a \notin Y$ 2.) $Y = X \cup \{a\}$, $a \notin X$

U prvom slučaju najprije biramo skup Y. Ako je $|Y| = k$, to možemo napraviti na $\binom{n}{k}$ načina. Nakon toga od preostalih $n-k$ elemenata u S biramo element a. Ukupan broj mogućih izbora je $\sum\limits_{k\geq 3} \binom{n}{k}(n-k)$. Drugi slučaj je analogan, s time da prvo biramo skup X, a onda element a. Po principu sume broj parova je

$$2 \sum_{k\geq 3} \binom{n}{k}(n-k) = 2 \sum_{k\geq 3} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (n-k) =$$

$$= 2 \sum_{k\geq 3} \frac{n \cdot (n-1)!}{k!(n-1-k)!} = 2n \sum_{k\geq 3} \binom{n-1}{k} =$$

$$= 2n \left[2^{n-1} - \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{1} - \binom{n-1}{0} \right] = \underline{\underline{n(2^n - n^2 + n - 2)}}$$

(5.) Nađite funkciju izvodnicu za broj particija broja n u točno tri dijela.

Rj: Transponiranjem Ferrersovih dijagrama vidi se da je broj particija od n u tri dijela jednak broju particija od n u dijelove od kojih je najveći 3. Funkcija izvodnica za taj broj je:

$$\underbrace{(1+x+x^2+x^3+\ldots)}_{1}\underbrace{(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)}_{2}\underbrace{(x^3+x^6+x^9+x^{12}+\ldots)}_{3\text{ (mora se pojaviti bar jednom!)}} =$$

$$= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{x^3}{1-x^3} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

Kombinatorika
5.2.2003.

Studenti inžinjerskog smjera rješavaju zadatke 1–5. Studenti profesorskog smjera rješavaju pet zadataka po izboru, ali na zadaću moraju jasno napisati koje zadatke su izabrali. U suprotnom će se i njima bodovati prvih pet zadataka.

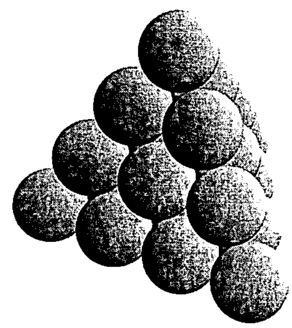
1. Unutar kvadrata sa stranicom duljine 4 zadane su 33 točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Dokažite da možemo izabrati tri zadane točke tako da opseg trokuta kojeg određuju ne bude veći od $2 + \sqrt{2}$.

2. U ribogojilištu prodaju brancine i orade u tri veličine: S (small), M (medium) i L (large). Na koliko načina možemo kupiti 10 riba za ručak? Pretpostavljamo da su sve ribe iste vrste i iste veličine međusobno jednake i da ih ima u neograničenim količinama.

3. Izračunajte sumu $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k-1}^2$

4. Među redovnim profesorima PMF-a ima 15 matematičara, 20 fizičara, 10 kemičara i 20 biologa. Na koliko se načina može izabrati šesteročlana delegacija redovnih profesora u kojoj mora biti bar jedan predstavnik svake struke?

5. Ping-pong loptice možemo složiti u pravilnu trostranu piramidu tako da donji sloj složimo u jednakostraničan trokut s n loptica duž stranice, idući sloj u trokut s $n-1$ loptica duž stranice, itd. (na slici je prikazana piramida za $n = 4$). Neka je a_n broj loptica u piramidi od n slojeva. Izvedite rekurziju za niz a_n i riješite je. Rješenje zapišite u zatvorenom obliku (bez znaka sume).



6. Koliko ima šesteroznamenkastih prirodnih brojeva s neparnim brojem neparnih znamenaka?

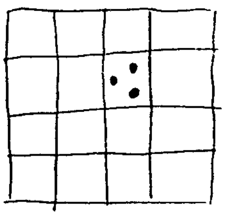
Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer (inžinjerski ili profesorski) i godinu u kojoj ste upisali kolegij. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

REZULTATI: PETAK, 7.2. U $11^{\underline{00}}$

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 5.2.2003.

1.) Unutar kvadrata sa stranicom duljine 4 zadane su 33 točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Dokažite da možemo odabrati tri zadane točke tako da opseg trokuta kojeg određuju ne bude veći od $2+\sqrt{2}$.

Rj: 

Podijelimo kvadrat na 16 jediničnih kvadrata kao na slici. Po Dirichletovom principu bar jedan jedinični kvadrat sadrži barem $\left\lfloor\frac{33-1}{16}\right\rfloor+1=3$ zadane točke. Opseg trokuta kojeg određuju te tri točke ne može biti veći od $2+\sqrt{2}$, jer je to maksimalan opseg trokuta sadržanog u jediničnom kvadratu (postiže se kad su vrhovi trokuta u vrhovima kvadrata).

2.) U ribogojilištu prodaju brancine i orade u tri veličine: S (small), M (medium) i L (large). Na koliko načina možemo kupiti 10 riba za ručak? Pretpostavljamo da su sve ribe iste vrste i iste veličine međusobno jednake i da ih ima u neograničenim količinama.

Rj: Prebrojavamo 10-kombinacije multiskupa $\{BS^\infty, BM^\infty, BL^\infty, OS^\infty, OM^\infty, OL^\infty\}$ (BS = brancin small itd.) Ima ih isto kao rješenja jednadžbe $x_1+x_2+\dots+x_6=10$ u $(\mathbb{N}_0)^6$, tj. $\binom{10+5}{5}=\binom{15}{5}=3003$.

3.) Izračunajte sumu $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k-1}^2$.

R: $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k-1}^2 = \begin{bmatrix} i=k-1 \\ k=i+1 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\binom{n}{i}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i\binom{n}{i}^2 + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}^2 =$

$= \sum_{i=1}^{n-1} \cancel{i}\,\frac{n}{\cancel{i}}\binom{n-1}{i-1}\binom{n}{i} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}}_{\text{Vandermonde}} - \binom{n}{n}^2 =$

$= n\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{n-i}\binom{n}{i}}_{\text{Vandermonde}} - \binom{n-1}{0}\binom{n}{n}\Big] + \binom{2n}{n} - 1 =$

simetrija

$= n\left[\binom{2n-1}{n} - 1\right] + \binom{2n}{n} - 1 = \binom{2n}{n} + n\binom{2n-1}{n} - n - 1 =$

$= \binom{2n}{n} + \frac{n}{2}\,\underbrace{\frac{2n}{n}\binom{2n-1}{n-1}} - n - 1 = \left(1+\frac{n}{2}\right)\binom{2n}{n} - n - 1$

4.) Među redovnim profesorima PMF-a ima 15 matematičara, 20 fizičara, 10 kemičara i 20 biologa. Na koliko se načina može izabrati šesteročlana delegacija redovnih profesora u kojoj mora biti bar jedan predstavnik svake struke?

R: Koristeći FUI dobiva se:

$\underbrace{\binom{15+20+10+20}{6}}_{\text{ukupno izbora}} - \underbrace{\binom{15+20+10}{6}}_{\text{bez biologa}} - \underbrace{\binom{15+20+20}{6}}_{\text{bez kemičara}} - \underbrace{\binom{15+10+20}{6}}_{\text{bez fizičara}} - \underbrace{\binom{20+10+20}{6}}_{\text{bez matematičara}} +$

$+ \underbrace{\binom{15+20}{6}}_{\text{bez K,B}} + \underbrace{\binom{15+10}{6}}_{\text{bez F,B}} + \underbrace{\binom{15+20}{6}}_{\text{bez F,K}} + \underbrace{\binom{20+10}{6}}_{\text{bez M,B}} + \underbrace{\binom{20+20}{6}}_{\text{bez M,K}} + \underbrace{\binom{10+20}{6}}_{\text{bez M,F}} -$

$$-\underset{\text{bez } F,K,B}{\binom{15}{6}}-\underset{\text{bez } M,K,B}{\binom{20}{6}}-\underset{\text{bez } M,F,B}{\binom{10}{6}}-\underset{\text{bez } M,F,K}{\binom{20}{6}} = \binom{65}{6}-\binom{45}{6}-\binom{55}{6}-\binom{45}{6}-\binom{50}{6}+$$

$$+\binom{35}{6}+\binom{25}{6}+\binom{35}{6}+\binom{30}{6}+\binom{40}{6}+\binom{30}{6}-\binom{15}{6}-\binom{20}{6}-\binom{10}{6}-\binom{20}{6}=$$

$$= 29795000$$

5.) Ping-pong loptice možemo složiti u pravilnu trostranu piramidu tako da donji sloj složimo u jednakostraničan trokut s n loptica duž stranice, idući sloj u trokut s $n-1$ loptica duž stranice, itd. (na slici je prikazana piramida za $n=4$). Neka je a_n broj loptica u piramidi od n slojeva. Izvedite rekurziju za niz a_n i riješite je. Rješenje zapišite u zatvorenom obliku (bez znaka sume).

Rj. Od $(n-1)$-slojne piramide dobivamo n-slojnu nadodavanjem $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ loptica. Vidimo da niz (a_n) zadovoljava rekurziju $a_n = a_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}$. Pripadna homogena:

$a_n - a_{n-1} = 0$ Karakteristična jednadžba: $x-1=0 \Rightarrow x=1$

Opće rješenje pripadne homogene rekurzije: $a_n^H = D = \text{const.}$

Kako je 1 korijen karakteristične jednadžbe (kratnosti 1), partikularno rješenje tražimo u obliku $a_n^P = n(An^2+Bn+C)$. Uvrstimo:

$$n(An^2+Bn+C) - (n-1)\left(A(n-1)^2+B(n-1)+C\right) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$$3An^2 + (2B-3A)n + A-B+C = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{6}, \quad 2B-3A = \frac{1}{2} \Rightarrow 2B = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$C = B - A = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ Partikularno rješenje je

$$a_n^P = n\left(\frac{1}{6}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{3}\right) = \frac{n}{6}(n^2+3n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Opće rješenje nehomogene rekurzije je $a_n = a_n^P + a_n^H = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + D$

Iz početnog uvjeta $a_1 = 1$ dobivamo $D = 0$, pa je broj loptica u piramidi od n slojeva jednak $a_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

6.) Koliko ima šesteroznamenkastih prirodnih brojeva s neparnim brojem neparnih znamenaka?

Rj.: 1.) slučaj - prva znamenka je neparna

po 5 mogućnosti za parne i neparne

1,3,5,7,9

odaberemo 0, 2 ili 4 mjesta za neparne znamenke

$$5 \cdot \left[\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4}\right] \cdot 5^5 = 250\,000$$

2.) slučaj - prva znamenka je parna

po 5 mogućnosti za parne i neparne

2,4,6,8

odaberemo 1, 3 ili 5 mjesta za neparne znamenke

$$4 \cdot \left[\binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5}\right] \cdot 5^5 = 200\,000$$

Po principu sume rezultat je 450 000.

Kombinatorika
22.4.2003.

Studenti inžinjerskog smjera rješavaju zadatke 1–5. Studenti profesorskog smjera rješavaju pet zadataka po izboru, ali na zadaću moraju jasno napisati koje zadatke su izabrali. U suprotnom će se i njima bodovati prvih pet zadataka.

1. Koliko ima riječi dobivenih permutiranjem slova riječi MATEMATIKA u kojima nema susjednih slova A?

2. Odredite koeficijent uz x^{10} u polinomu $(1+x^2+x^5)^n$. Izračunajte numeričku vrijednost za $n = 10$.

3. Na večeru su došli Ivica, Marica, vještica, Snjeguljica, Trnoružica, sedam patuljaka i princ na bijelom konju. Na koliko načina mogu sjesti oko okruglog stola tako da Snjeguljica i Trnoružica sjede kraj princa, a Ivica i Marica ne sjede kraj vještice (ali ne moraju sjediti skupa)?

Napomena. Bitan je samo međusobni položaj likova oko stola. Bijeli konj ne sjedi za stolom, nego je privezan za obližnje drvo.

4. U ravnini je dano n pravaca od kojih nikoja dva nisu paralelni i nikoja tri se ne sijeku u istoj točki. Na koliko je dijelova ravnina podijeljena tim pravcima?

5. Nađite funkciju izvodnicu za niz a_n zadan pomoću rekurzije

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

6. Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj koordinatnoj mreži od ishodišta do točke $(10, 10)$ koji prolaze segmentom $[\,(3,3),(4,3)\,]$ i ne prolaze točkom $(8,7)$?

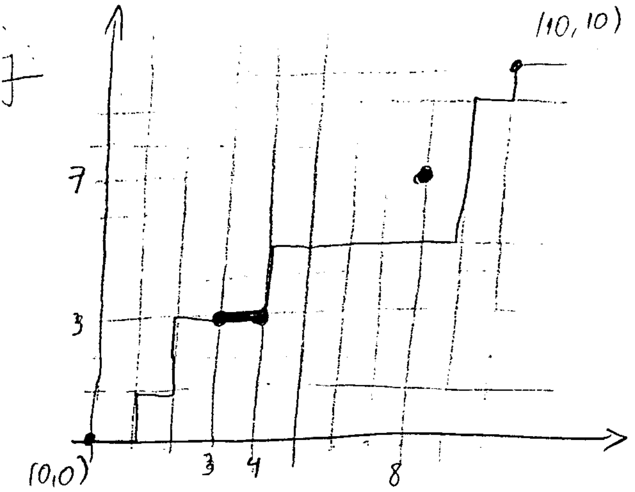
Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer (inžinjerski ili profesorski) i godinu u kojoj ste upisali kolegij. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

REZULTATI: SRIJEDA, 23.4. U 17^{00}

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 22. 4. 2003.

6.) Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj koordinatnoj mreži od ishodišta do točke $(10,10)$ koji prolaze segmentom $[(3,3),(4,3)]$ i ne prolaze točkom $(8,7)$?



Puteva koji prolaze segmentom ima:

$$\binom{6}{3}\binom{10-4+10-3}{10-4} = \binom{6}{3}\binom{13}{6} = 34320$$

Puteva koji prolaze segmentom i točkom $(8,7)$ ima:

$$\binom{6}{3}\binom{8-4+7-3}{8-4}\binom{10-8+10-7}{10-8} = \binom{6}{3}\binom{8}{4}\binom{5}{2} = 14000$$

Po principu komplementa puteva koji prolaze segmentom i ne prolaze točkom ima $34320-14000=\underline{\underline{20320}}$

2.) Odredite koeficijent uz x^{10} u polinomu $(1+x^2+x^5)^n$. Izračunajte numeričku vrijednost za $n=10$.

$$\langle x^{10}\rangle (1+x^2+x^5)^n = \langle x^{10}\rangle \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i,j,k} x^{2j+5k}$$

$2j+5k=10 \Rightarrow j=0, k=2$ ili $j=5, k=0$

Koeficijent je

$$\binom{n}{n-2,0,2} + \binom{n}{n-5,5,0} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} + \frac{n!}{(n-5)!\,5!} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120} = \frac{n(n-1)}{120}\left[60+(n-2)(n-3)(n-4)\right] =$$

$$= \frac{n(n-1)}{120}\left[n^3 - 9n^2 + 26n + 36\right] = \frac{n(n-1)(n+1)(n^2-10n+36)}{120}$$

Za $n=10$ dobivamo koeficijent 297.

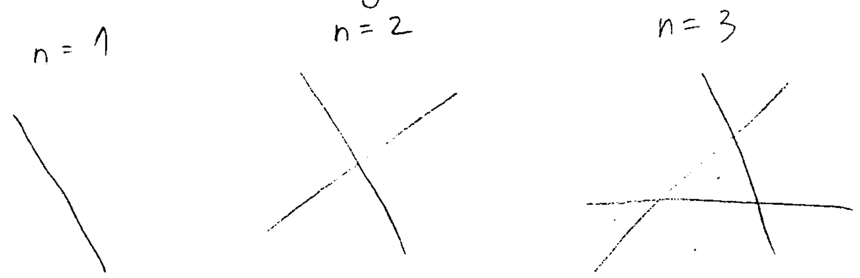
3.) Na večeru su došli Ivica, Marica, vještica, Snjeguljica, Trnoružica, sedam patuljaka i princ na bijelom konju. Na koliko načina mogu sjesti oko okruglog stola tako da Snjeguljica i Trnoružica sjede kraj princa, a Ivica i Marica ne sjede kraj vještice (ali ne moraju sjediti skupa)?

Napomena. Bitan je samo međusoban položaj likova iz bajki. Bijeli konj ne sjedi za stolom nego je privezan za obližnje drvo.

Rj. Snjeguljicu, Trnoružicu i princa možemo posjesti na dva načina (SPT ili TPS). Kad oni sjednu više nije svejedno gdje će sjediti ostali likovi iz bajke. Ukupno ima 10! rasporeda ostalih likova, ali u $2\cdot 9!$ Ivica sjedi kraj vještice, u $2\cdot 9!$ Marica sjedi kraj vještice, a u $2\cdot 8!$ Ivica i Marica oboje sjede kraj vještice. Prema FUI „dobrih" rasporeda ostalih likova ima $10! - 4\cdot 9! + 2\cdot 8! = 2257920$. Zato je ukupan broj „dobrih" rasporeda svih likova $2\cdot 2257920 = \underline{4515840}$.

4.) U ravnini je dano n pravaca od kojih nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri se ne sijeku u istoj točki. Na koliko je dijelova ravnina podijeljena s tim pravcima?

Rj. Označimo s a_n broj dijelova na koje n pravaca dijeli ravninu. Očito je $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, ...



Ako imamo $n-1$ pravaca, dodavanjem n-tog dobit će se $n-1$ novih točaka presjeka. Tih $n-1$ točaka dijele dodani pravac na n dijelova, od kojih svaki rastavlja neko od starih područja ravnine na dva nova. Prema tome, vrijedi rekurzija

$$a_n = a_{n-1} + n \Rightarrow a_n = n + a_{n-1} = n + (n-1) + a_{n-2} = \ldots = n + (n-1) + \ldots + 2 + a_1 =$$

$$= n + (n-1) + \ldots + 2 + 2 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \underline{\underline{\frac{n^2+n+2}{2}}}$$

5.) Nađite funkciju izvodnicu za niz a_n zadan pomoću rekurzije $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Rj. Vidimo da je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$, $a_6 = 32$, ... Indukcijom možemo dokazati da je $a_n = 2^{n-1}$ za $n \geq 1$. Ako tvrdnja vrijedi za brojeve do n, imamo $a_{n+1} = a_0 + \ldots + a_n = 1 + 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} =$

$$= 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n.$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za $n+1$.

Funkcija izvodnica za niz (a_n) je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{n-1} = 1 + x \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k =$$

$$= 1 + x \frac{1}{1-2x} = \frac{1-2x+x}{1-2x} = \underline{\frac{1-x}{1-2x}}.$$

1. Koliko ima riječi dobivenih permutiranjem slova riječi MATEMATIKA u kojima nema susjednih slova A?

Rj. Prvo izaberemo mjesta za slova A. Rasporeda ima isto kao binarnih nizova od 7 nula i 3 jedinice koje nisu susjedne; stavimo jedinice, razdvojimo ih s dvije nule i rasporedimo preostalih 5 nula.

$\_\ 1\ \underline{0}\ 1\ \underline{0}\ 1\ \_$

00000

Broj rasporeda je $\binom{5+3}{3} = \binom{8}{3} = 56$

Ostale znamenke čine multiskup $\{M^2, T^2, E^1, I^1, K^1\}$

Možemo ih permutirati na $\binom{7}{2,2,1,1} = 1260$ načina

Po principu produkta ukupan broj riječi je

$56 \cdot 1260 = \underline{\underline{70\,560}}$

5.) Drugi način: neka je $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Vidimo da je

$\frac{f(x)-a_0}{x} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^n$, pa niz (a_{n+1}) ima FI $\frac{f(x)-a_0}{x} = \frac{f(x)-1}{x}$

S druge strane, niz $(a_0+a_1+\ldots+a_n)_n$ očito ima FI $(1+x+x^2+\ldots)f(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ Zbog rekurzije nizovi su jednaki, pa im se i FI podudaraju: $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{f(x)}{1-x} \Rightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)f(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{1-x-x}{x(1-x)} f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1-2x}{x(1-x)} f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{\cancel{x}(1-x)}{\cancel{x}(1-2x)} = \underline{\underline{\frac{1-x}{1-2x}}}$$

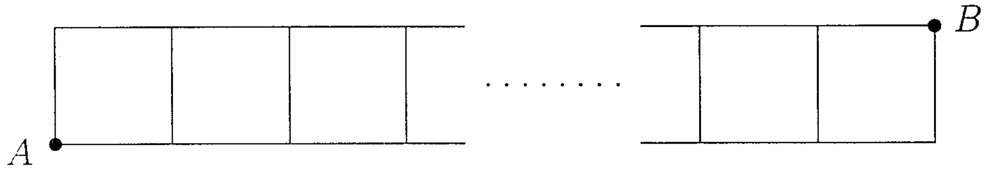
Kombinatorika
2.7.2003.

Studenti inžinjerskog smjera rješavaju zadatke 1–5. Studenti profesorskog smjera rješavaju pet zadataka po izboru, ali na zadaću moraju jasno napisati koje zadatke su izabrali. U suprotnom će se i njima bodovati prvih pet zadataka.

1. Koliko ima particija skupa od $3n$ elemenata na tročlane podskupove?

2. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^9 u čijem zapisu se pojavljuje niz znamenaka 123 (na uzastopnim mjestima)?

3. Koliko ima (ne nužno najkraćih) puteva od točke A do točke B duž segmenata mreže sastavljene od n kvadrata (kao na slici), koji svakim segmentom prolaze najviše jednom?



4. U hladnjaku kafića nalazi se 15 bočica soka od naranče, 6 od jabuke i 20 od borovnice. U kafić je došla grupa od n matematičara. Njihova narudžba glasi: "Donesi nam svakom po jednu bočicu soka, ali tako da broj sokova od naranče bude djeljiv s 5, da broj sokova od jabuke bude prost i da dobijemo barem 3 soka od borovnice." Na koliko načina konobar može zadovoljiti narudžbu ako je bitno koji matematičar pije koju vrstu soka? Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu i izračunajte taj broj za $n = 10$.

5. Neki jezik koristi n slova. Niz slova je riječ tog jezika ako se između dva jednaka slova u nizu ne nalaze dva jednaka slova.
   (a) Koliko iznosi maksimalna duljina riječi tog jezika?
   (b) Odredite broj riječi maksimalne duljine u tom jeziku.

6. Koliko ima binarnih nizova od n jedinica i $2n$ nula u kojima se između svake dvije jedinice nalaze barem dvije nule?

Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer (inžinjerski ili profesorski) i godinu u kojoj ste upisali kolegij. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

REZULTATI: PETAK, 4.7. U 11^{00}

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 2.7.2003.

(1.) Koliko ima particija skupa od $3n$ elemenata na tročlane podskupove?

Rj.: I način: $$\frac{\binom{3n}{3}\binom{3n-3}{3}\binom{3n-6}{3}\cdots\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{n!}$$

Biramo prvi tročlani podskup, zatim drugi od preostalih elemenata, pa treći itd. Na kraju dijelimo s $n!$ jer poredak podskupova nije bitan.

II način: $$\frac{(3n)!}{(3!)^n \cdot n!} = \frac{(3n)!}{6^n \cdot n!}$$

broj permutacija svih elemenata (za podskupove uzimamo prva tri, zatim iduća tri itd.)

poredak unutar podskupova nije bitan

poredak podskupova nije bitan

(2.) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^9 u čijem zapisu se pojavljuje niz znamenaka 123 (na uzastopnim mjestima)?

Rj.: Brojeve možemo identificirati s uređenim devetorkama znamenaka $\{0,1,\dots,9\}$ (nadopisivanjem vodećih nula).

A_i = skup svih brojeva u čijem se zapisu niz 123 pojavljuje na mjestima $i, i+1, i+2$.

Očito je $|A_i| = 10^6$, $i = 1,2,\dots,7$ $\quad (|A_i| = 0$ za $i > 7)$

Želimo izračunati $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_7|$. Primijenit ćemo FUI

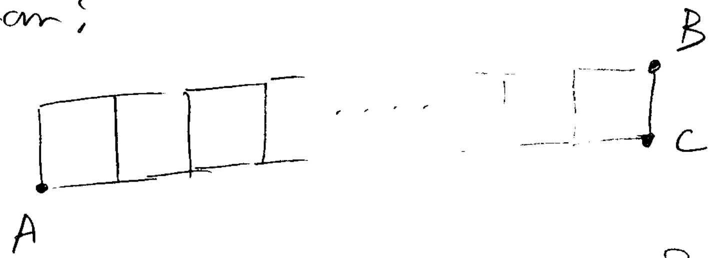
$$|A_i \cap A_j| = \begin{cases} 0, & \text{ako je } |i-j| < 3 \\ 10^3, & \text{ako je } |i-j| \geq 3 \end{cases} \qquad |A_i \cap A_j \cap A_k| = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \{i,j,k\} = \{1,4,7\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$|A_1\cup\cdots\cup A_7| = \sum_{i=1}^{7}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le 7}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le 7}|A_i\cap A_j\cap A_k| =$$

$$= 7\cdot 10^6 - 10^3\cdot(4+3+2+1) + 1 = \underline{\underline{6990001}}$$

$i=1 \quad i=2 \quad \ldots \quad 4$

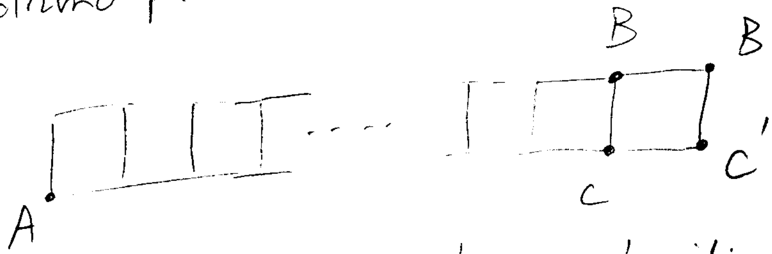
3.) Koliko ima (ne nužno najkraćih) puteva od točke A do točke B duž segmenata mreže sastavljene od n kvadrata (kao na slici), koji svakim segmentom prolaze najviše jednom?



Rj.: a_n = broj puteva od A do B

b_n = broj puteva od A do C

Promotrimo put u mreži od $n+1$ kvadrata od A do B'



Takav put prolazi segmentom BB', ili prolazi segmentima CC', C'B'. U prvom slučaju puteva ima a_n (isto koliko puteva od A do B), a u drugom b_n (isto koliko puteva od A do C). Prema tome, vrijedi $a_{n+1} = a_n + b_n$. Slično se vidi da je $b_{n+1} = a_n + b_n$.

Iz prve relacije izrazimo $b_n = a_{n+1} - a_n$, $b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$ i uvrstimo u drugu: $a_{n+2} - a_{n+1} = \cancel{a_n} + a_{n+1} - \cancel{a_n} \Rightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1}$, tj. $a_{n+1} = 2a_n$. Kako je $a_1 = 2$ očito vrijedi $a_n = 2^n$...

4.) U hladnjaku kafića nalazi se 15 bočica soka od naranče, 6 od jabuke i 20 od borovnice. U kafić je došla grupa od n matematičara. Njihova narudžba glasi: „Donesi nam svakom po jednu bočicu soka, ali tako da broj sokova od naranče bude djeljiv s 5, da broj sokova od jabuke bude prost i da dobijemo barem 3 soka od borovnice." Na koliko načina konobar može zadovoljiti narudžbu ako je bitno koji matematičar pije koju vrstu soka? Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu i odredite taj broj za $n = 10$

Rj: $$f(x) = \left(1 + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{15}}{15!}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{20}}{20!}\right)$$

naranča jabuka borovnica

$$\langle x^{10}\rangle f(x) = 1\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{8!} + 1\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{7!} + 1\cdot\frac{1}{5!}\,\frac{1}{5!} + \frac{1}{5!}\,\frac{1}{2!}\,\frac{1}{3!} =$$

$$= \frac{1}{80640} + \frac{1}{30240} + \frac{1}{14400} + \frac{1}{1440} = \frac{979}{1209600}$$

Broj načina za $n = 10$:

$$10!\,\langle x^{10}\rangle f(x) = 3628800\cdot\frac{979}{1209600} = \underline{\underline{2937}}$$

5.) Neki jezik koristi n slova. Niz slova je riječ tog jezika ako i samo ako se između dva jednaka slova u nizu ne nalaze dva jednaka slova.

a) Koliko iznosi maksimalna duljina riječi tog jezika?

b) Odredite broj riječi maksimalne duljine u tom jeziku.

Rj: a) Riječ ne može sadržati četiri ista slova pa duljina riječi nije veća od $3n$. Kako je aaabbbccc... riječ tog jezika, maksimalna duljina riječi jednaka je $3n$.

b) Tvrdimo da se svaka riječ maksimalne duljine može dobiti iz riječi aaabbbccc... zamjenom dva susjedna različita slova i permutiranjem slova. Iz toga slijedi da riječi maksimalne duljine ima točno $2^{n-1} \cdot n!$ Tvrdnju ćemo dokazati ako pokažemo da između dva ista slova u riječi maksimalne duljine može biti najviše jedan razmak, tj. da su mogući samo ovi rasporedi: aaa, aa_a, a_aa, a_a_a. U suprotnom, imali bismo bar dva razmaka između dva ista slova, na kojima bi morala biti različita slova: a b c a. Ako su preostala dva slova b desno od ove grupe, treće slovo a mora biti lijevo: a...a b c a...b...b (analogno se radi za obrnuti raspored). Razmatranjem svih mogućih položaja još jednog slova c vidimo da uvijek imamo dva ista slova između dva ista slova.

6. Koliko ima binarnih nizova od n jedinica i $2n$ nula u kojima se između svake dvije jedinice nalaze barem dvije nule?

Rj. Kada stavimo po dvije nule između susjednih jedinica (100100100...), ostanu nam još dvije nule viška. Njih možemo rasporediti na bilo koje od $n+1$ mjesta (_ 1 00 1 00 1 ... 1 _). Broj rasporeda jednak je broju rasporeda dva jednaka predmeta u $n+1$ različitih kutija, a to je po „principu kuglica i štapića"

$$\binom{n+2}{2} = \underline{\underline{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}.$$

Kombinatorika
17.9.2003.

1. Obrazac za odgovore na prijemnom ispitu sastoji se od 33 retka (koji odgovaraju zadacima) sa po 5 kvadratića (koji odgovaraju rješenjima). U svakom zadataku treba izabrati jedno od 5 ponuđenih rješenja, od kojih je točno jedno ispravno, i zacrniti odgovarajući kvadratić. Neki zadaci mogu ostati bez odgovora, ali nije dozvoljeno zacrniti više od jednog kvadratića u retku. Točno rješenje donosi 20 bodova, netočno -5, a neoznačavanje rješenja 0 bodova.

   (a) Koliko ukupno ima dozvoljenih popunjavanja obrasca (bez višestrukih odgovora)?

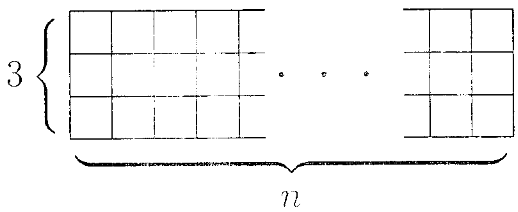
   (b) Koliko ima dozvoljenih popunjavanja obrasca koja donose točno 100 bodova?

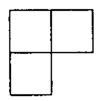
   Napomena. Primjerak obrasca otisnut je na stražnjoj strani testa.

2. Dokažite: $$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} = 2^{4n-2}$$

3. Koliko ima prirodnih brojeva koji dijele bar jedan od brojeva 10^{60}, 20^{50}, 30^{40}?

4. Nađite formulu za broj popločavanja pravokutnika dimenzija $3 \times n$ pločicama sa slike.



Pločica: 

5. Odredite funkciju izvodnicu za Fibonaccijeve brojeve ($F_0 = 0$; $F_1 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$).

Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer (inžinjerski ili profesorski) i godinu u kojoj ste upisali kolegij. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

REZULTATI: PETAK, 19. 9. U 11^{00}

Vedran Krčadinac

Obrazac za odgovore

10. srpnja 2003.

Prezime i ime: ______________________________ Studij:____

JMBG: | | | | | | | | | | | | | |

1.	A	B	C	D	E	21.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E	22.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E	23.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E	24.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E	25.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E	26.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E	27.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E	28.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E	29.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E	30.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E	31.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E	32.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E	33.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E						
15.	A	B	C	D	E						
16.	A	B	C	D	E						
17.	A	B	C	D	E						
18.	A	B	C	D	E						
19.	A	B	C	D	E						
20.	A	B	C	D	E						

KOMBINATORIKA, 17. 9. 2003.

1.) Obrazac za odgovore na prijemnom ispitu sastoji se od 33 retka (koji odgovaraju zadacima) sa po 5 kvadratića (koji odgovaraju rješenjima). U svakom zadatku treba izabrati jedno od 5 ponuđenih rješenja, od kojih je točno jedno ispravno, i zacrniti odgovarajući kvadratić. Neki zadaci mogu ostati bez odgovora, ali nije dozvoljeno zacrniti više od jednog kvadratića u retku. Točno rješenje donosi 20 bodova, netočno −5, a neoznačavanje rješenja 0 bodova.

a) Koliko ukupno ima dozvoljenih popunjavanja obrasca (bez višestrukih odgovora)?

b) Koliko ima dozvoljenih popunjavanja obrasca koja donose točno 100 bodova?

Rj. a) U svakom zadatku imamo 6 mogućnosti (5 rješenja ili neoznačavanje). Ukupan broj mogućnosti je 6^{33}.

b) 100 bodova možemo dobiti na sljedeće načine:

1.) 5 točno, 0 netočno, 28 neoznačeno $\rightsquigarrow \binom{33}{5}$ načina

2.) 6 točno, 4 netočno, 23 neoznačeno $\rightsquigarrow \binom{33}{6}\binom{27}{4}\cdot 4^4$ načina

3.) 7 točno, 8 netočno, 18 neoznačeno $\rightsquigarrow \binom{33}{7}\binom{26}{8}4^8$ načina

4.) 8 točno, 12 netočno, 13 neoznačeno $\rightsquigarrow \binom{33}{8}\binom{25}{12}4^{12}$ načina

5.) 9 točno, 16 netočno, 8 neoznačeno $\rightsquigarrow \binom{33}{9}\binom{24}{16}4^{16}$ načina

6.) 10 točno, 20 netočno, 3 neoznačeno $\rightarrow \binom{33}{10}\binom{23}{20}4^{20}$ načina

Ukupno: $\binom{33}{5}+\binom{33}{6}\binom{27}{4}4^4+\binom{33}{7}\binom{26}{8}4^8+\binom{33}{8}\binom{25}{12}4^{12}+\binom{33}{9}\binom{24}{16}4^{16}+\binom{33}{10}\binom{23}{20}4^{20}$

2.) Dokažite: $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} = 2^{4n-2}$.

Rj: $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} = \left[\begin{array}{l}\text{Simetričnost u}\\ \text{drugoj sumi}\end{array}\right] =$

$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4n-4i-1} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \binom{4n}{4(n-i-1)+3} =$

$= \left[\begin{array}{l}\text{Supstitucija } j=n-i-1\\ \text{u drugoj sumi}\end{array}\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \binom{4n}{4j+3} =$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} = \frac{1}{2}\, 2^{4n-1} = 2^{4n-2}$. Jednakost $\sum_{k\geq 0} \binom{m}{2k+1} = 2^{m-1}$

najlakše se dokaže oduzimanjem relacija $\sum_{k\geq 0} \binom{m}{k} = 2^m$ i

$\sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{m}{k} = 0$ (rađeno na vježbama!)

3.) Koliko ima prirodnih brojeva koji dijele bar jedan od brojeva $10^{60}, 20^{50}, 30^{40}$?

Rj: $10^{60} = 2^{60}\cdot 5^{60}$, $20^{50} = 2^{100}\cdot 5^{50}$, $30^{40} = 2^{40}\cdot 3^{40}\cdot 5^{40}$

Djelitelji su oblika $2^i\cdot 3^j\cdot 5^k$.

Djelitelji od 10^{60}: $0\leq i\leq 60$, $j=0$, $0\leq k\leq 60$ $\rightarrow$ $61\cdot 61 = 3721$

Djelitelji od 20^{50}: $0\leq i\leq 100$, $j=0$, $0\leq k\leq 50$ $\rightarrow$ $101\cdot 51 = 5151$

Djelitelji od 30^{40}: $0\leq i,j,k\leq 40$ $\rightarrow$ $41^3 = 68921$

Djelitelji od 10^{60} i 20^{50}: $0\leq i\leq 60$, $j=0$, $0\leq k\leq 50$ $\rightarrow$ $61\cdot 51 = 3111$

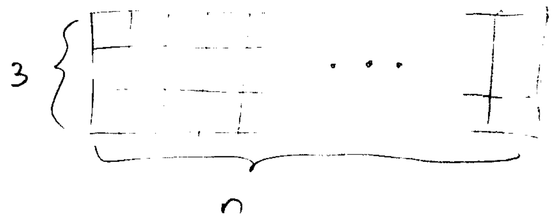
Djelitelji od 10^{60} i 30^{40}: $0\leq i\leq 40$, $j=0$, $0\leq k\leq 40$ $\rightarrow$ $41^2 = 1681$

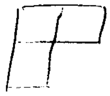
Djelitelji od 20^{50} i 30^{40}: $0\leq i\leq 40$, $j=0$, $0\leq k\leq 40$ $\rightarrow$ $41^2 = 1681$

Djelitelji od 10^{60} i 20^{50} i 30^{40}: $0\leq i,k\leq 40$, $j=0$ $\rightarrow$ $41^2 = 1681$

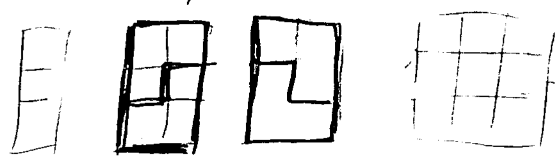
FUI: $3721+5151+68921-3111-1681-1681+1681 = \underline{73001}$

4. Nađite formulu za broj popločavanja pravokutnika dimenzija $3\times n$ pločicama sa slike.



Pločica: 

Rj: Neka je a_n traženi broj popločavanja



Očito je $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0$

Niz a_n zadovoljava rekurziju $a_n = 2a_{n-2}$

Karakteristična jednadžba: $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$$a_n = C_1(\sqrt{2})^n + C_2(-\sqrt{2})^n$$

$$a_1 = C_1\sqrt{2} - C_2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2$$

$$a_2 = 2C_1 + 2C_2 = 4C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(-\sqrt{2})^n = \underline{(\sqrt{2})^{n-2}\left(1 + (-1)^n\right)}$$

5. Odredite funkciju izvodnicu za Fibonaccijeve brojeve ($F_0 = 0;\ F_1 = 1;\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2$).

Rj: $f(x) = \sum_{n\geq 0} F_n x^n \quad /\cdot x \quad /\cdot x^2$

$$\left.\begin{aligned} x f(x) &= \sum_{n\geq 0} F_n x^{n+1} = \sum_{n\geq 1} F_{n-1} x^n \\ x^2 f(x) &= \sum_{n\geq 0} F_n x^{n+2} = \sum_{n\geq 2} F_{n-2} x^n \end{aligned}\right\} +$$

$$(x + x^2) f(x) = \underbrace{F_0}_{=0} + \sum_{n\geq 2} \underbrace{(F_{n-1} + F_{n-2})}_{=F_n} x^n = \sum_{n\geq 2} F_n x^n = f(x) - F_0 - F_1 x$$

$$= f(x) - x$$

$$\Rightarrow \quad (x+x^2-1)f(x) = -x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Kombinatorika
1.12.2003.

1. Parlament ima 151 zastupničkih mjesta. Izborni prag je prešlo 7 stranaka (to su stranke koje su osvojile bar jedno zastupničko mjesto). Koliko ima mogućih raspodjela zastupničkih mjesta u kojima niti jedna stranka nema apsolutnu većinu?

2. Koliko ima parova prirodnih brojeva (k, n) za $k < n \leq 10^6$ takvih da vrijedi $\binom{n}{k+1} = 3\binom{n}{k}$?

3. U novčaniku imamo 7 kovanica od jedne kune, 5 kovanica od dvije kune, 4 kovanice od pet kuna, 6 novčanica od deset kuna i 3 novčanice od dvadeset kuna. Napišite funkciju izvodnicu za broj načina na koji možemo platiti račun od n kuna. Kovanice i novčanice iste vrijednosti smatramo jednakim.

4. Na koliko načina možemo kovanice iz prethodnog zadatka posložiti u niz tako da kovanice iste vrijednosti ne čine blok (tj. nisu sve susjedne)?

5. Promatramo $n \times n$ matrice nad $\{0, 1, 2\}$ koje u svakom retku i stupcu imaju točno jednu jedinicu i jednu dvojku, a ostali elementi su nule. Dokažite da je broj takvih matrica jednak $n! \cdot D_n$, gdje je D_n broj deranžmana (permutacija n-članog skupa bez fiksne točke).

Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer (inžinjerski ili profesorski) i godinu u kojoj ste upisali kolegij. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

REZULTATI: SRIJEDA 3.12. U 14^{00}

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 1.12.2003.

1. Parlament ima 151 zastupničkih mjesta. Izborni prag je prošlo 7 stranaka. Koliko ima mogućih raspodjela zastupničkih mjesta u kojima niti jedna stranka nema apsolutnu većinu?

Rj.: Ukupan broj raspodjela zastupničkih mjesta je jednak broju rješenja jednadžbe $x_1+x_2+\dots+x_7=151$ za $x_i\in\mathbb{N}$. (svih 7 stranaka je prošlo izborni prag, dakle imaju bar jednog zastupnika!) Taj broj je jednak broju rješenja jednadžbe $y_1+y_2+\dots+y_7=144$ za $y_i\in\mathbb{N}_0$ $[y_i=x_i-1]$, a znamo da je to $\binom{144+6}{6}=\binom{150}{6}$ ("problem kuglica i štapića").

Broj raspodjela u kojima jedna stranka (npr. prva) ima apsolutnu većinu jednak je broju rješenja jednadžbe $x_1+x_2+\dots+x_7=151$ uz uvjete $x_i\in\mathbb{N}$, $x_1\geq 76$. Taj broj je jednak broju rješenja jednadžbe $y_1+y_2+\dots+y_7=69$ za $y_i\in\mathbb{N}_0$ $[y_1=x_1-76,\ y_i=x_i-1,\ i\geq 2]$, tj. $\binom{69+6}{6}=\binom{75}{6}$.

Prema tome broj raspodjela u kojima niti jedna stranka nema apsolutnu većinu je $\binom{150}{6}-7\binom{75}{6}$.

2. Koliko ima parova prirodnih brojeva (k,n), $k<n\leq 10^6$ takvih da je $\binom{n}{k+1}=3\binom{n}{k}$?

Rj.: $\binom{n}{k+1}=3\binom{n}{k} \iff \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{3n!}{k!(n-k)!} \iff \frac{1}{k+1}=\frac{3}{n-k}$

$\iff n-k=3k+3 \iff n=4k+3.$

Vidimo da je n jednoznačno određen sa k i da vrijedi

$$n = 4k+3 \le 10^6 \Rightarrow 4k \le 10^6-3 \Rightarrow k \le 250000 - \frac{3}{4} = 249999.25 \Rightarrow$$

$\Rightarrow k \le 249999$. Prema tome, parova ima $\underline{\underline{249999}}$.

(3.) U novčaniku imamo 7 kovanica od jedne kune, 5 kovanica od dvije kune, 4 kovanica od pet kuna, 6 novčanica od deset kuna i 3 novčanice od dvadeset kuna. Napišite funkciju izvodnicu za broj načina na koje možemo platiti račun od n kuna. Kovanice i novčanice iste vrijednosti smatramo jednakim.

Rj.

$$\underbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)}_{1}\cdot\underbrace{(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})}_{2}\cdot\underbrace{(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})}_{5}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{(1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40}+x^{50}+x^{60})}_{\boxed{10}}\cdot\underbrace{(1+x^{20}+x^{40}+x^{60})}_{\boxed{20}}$$

(4.) Na koliko [illegible] na možemo kovanice iz prethodnog zadatka [illegible] u niz tako da kovanice iste vrijednosti [illegible])?

Rj. Radi se o [illegible] multiskupa $\{①^7, ②^5, ⑤^4\}$

Ukupan broj [illegible]tacija je multinomni koeficijent $\binom{16}{7,5,4}$, a [illegible] traženih permutacija je prema FUI

$$\binom{16}{7,5,4} - \underbrace{\binom{10}{1,5,4}}_{\text{① čine blok}} - \underbrace{\binom{12}{7,1,4}}_{\text{② čine blok}} - \underbrace{\binom{13}{7,5,1}}_{\text{⑤ čine blok}} + \underbrace{\binom{6}{1,1,4}}_{\text{① i ② čine blok}} + \underbrace{\binom{7}{1,5,1}}_{\text{① i ⑤}} +$$

$$+ \underbrace{\binom{9}{7,1,1}}_{\text{② i ⑤}} - \underbrace{\binom{3}{1,1,1}}_{\text{①, ② i ⑤ čine blok}} = 1441440 - 1260 - 3960 - 10296 +$$

$$+ 30 + 42 + 72 - 6 = \underline{\underline{1426062}}$$

5. Promatramo $n \times n$ matrice nad $\{0,1,2\}$ koje u svakom retku i stupcu imaju točno jednu jedinicu i jednu dvojku, a ostali elementi su nule. Dokažite da je broj takvih matrica jednak $n! \cdot D_n$, gdje je D_n broj deranžmana (permutacija n-članog skupa bez fiksne točke).

Rj.: Jedinice očito možemo rasporediti na $n!$ načina (u prvom retku možemo staviti jedinicu na bilo koje od n mjesta, u drugom na bilo koje mjesto osim [illegible] na kojem je jedinica u prvom [illegible]). [illegible] općenitosti možemo pretpostaviti da su jedinice na dijagonali – broj rasporeda dvojki [illegible] ćemo postići [illegible] slučaju raspored dvojki [illegible] pridružuje se mjesto na kojem se dvojka nalazi u i-tom retku. Pridruživanje je permutacija jer imamo točno jednu dvojku u svakom retku i stupcu, a nema fiksne točke jer dvojke ne mogu biti na dijagonali (tamo su jedinice). Obrnuto, svakom deranžmanu na analogni način možemo pridružiti raspored dvojki. Prema tome, za fiksan raspored jedinica broj mogućih rasporeda dvojki je D_n. Po principu produkta ukupan broj matrica je $n! \cdot D_n$.

Kombinatorika
18.2.2004.

1. Oko okruglog stola treba posjesti igrače Dinama i Hajduka (po 11 iz svake ekipe). Igrači trebaju alternirati (Dinamo, Hajduk, Dinamo, Hajduk,...), golmani trebaju sjediti skupa, a kapetani ne smiju sjediti skupa. Na koliko je to načina moguće napraviti (bitan je samo relativni položaj igrača oko stola)?

2. Dokažite da za sve prirodne brojeve $m < n$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^m \binom{n}{k} = 0$$

3. Pismeni ispit iz kombinatorike sastoji se od 5 zadataka, od kojih svaki nosi maksimalno 20 bodova. Student je redom osvojio 10, 5, 18, 5 i 2 boda, dakle ukupno 40 bodova. Na koliko načina mu asistent može pokloniti 5 bodova koji mu nedostaju za prolaz (tj. povećati broj bodova na nekim zadacima tako da zbroj bude 45)?

4. Koliko ima permutacija multiskupa $\{a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2\}$ (sa n različitih elemenata multipliciteta 2) u kojima su susjedni elementi različiti?

5. Nađite funkciju izvodnicu niza definiranog rekurzijom $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = n \cdot 2^n$ za $n \geq 2$.

Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer (inžinjerski ili profesorski) i ime profesora kod kojeg ste slušali predavanja. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

REZULTATI: petak, 20.2. u 14^{00} ili prije na forumu
`http://degiorgi.math.hr/forum/viewforum.php?f=11`

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 18.2.2004.

(1.) Oko okruglog stola treba posjesti igrače Dinama i Hajduka (po 11 iz svake ekipe). Igrači trebaju alternirati (Dinamo, Hajduk, Dinamo, Hajduk, ...), golmani trebaju sjediti skupa, a kapetani ne smiju sjediti skupa. Na koliko je to načina moguće napraviti (bitan je samo relativni položaj igrača oko stola)?

Rj: Rasporedi u kojima igrači alterniraju i golmani sjede skupa:

$$\underbrace{2}_{\text{posjednemo golmane}} \cdot \underbrace{(10!)^2}_{\text{posjednemo ostale igrače (10! mogućnosti za Dinamo i 10! za Hajduk)}}$$

Rasporedi u kojima igrači alterniraju, golmani sjede skupa i kapetani sjede skupa:

$$\underbrace{2}_{\text{golmani}} \cdot \underbrace{(10+9)}_{\text{posjednemo kapetane, u istoj ili suprotnoj orijentaciji kao golmane}} \cdot \underbrace{(9!)^2}_{\text{ostali igrači}}$$

Po principu komplementa traženih rasporeda ima:

$$2\cdot(10!)^2 - 2\cdot 19\cdot(9!)^2 = 2\cdot(9!)^2[100-19] = \underline{\underline{162\cdot(9!)^2}}$$

(2.) Dokažite da za sve prirodne brojeve $m<n$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^m \binom{n}{k} = 0$$

Rj: Indukcijom po m dokazujemo tvrdnju $(\forall n>m)\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^m\binom{n}{k}=0$

Baza $(m=1)$: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot k\cdot\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cancel{k}\,\frac{n}{\cancel{k}}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1} =$

$= (-n)\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}}_{=0} = 0$ Zadnja formula dokazuje se uvrštavanjem $x=-1$ u binomni teorem $(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $1, 2, \ldots, m$. Dokazujemo za $m+1$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^{m+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^{m+1} \frac{n}{\cancel{k}} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m \binom{n-1}{k-1} =$$

$$= (-n) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (k+1)^m \binom{n-1}{k} = (-n) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} k^l \binom{n-1}{k} =$$

$$= (-n) \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k^l \binom{n-1}{k}}_{=0} = 0$$

Za $l=0$ to smo imali u bazi, a za $l=1,2,\ldots,m$ vrijedi po pretpostavci.

3. Pismeni ispit sastoji se od 5 zadataka, od kojih svaki nosi maksimalno 20 bodova. Student je redom osvojio 18, 10, 5, 5 i 2 bodova, dakle ukupno 40 bodova. Na koliko mu načina asistent može poklaniti 5 bodova koji mu nedostaju za prolaz (tj. povećati broj bodova na nekim zadacima tako da zbroj bude 45)?

Rj: Neka je x_i broj bodova poklonjenih na i-tom zadatku. Prebrojavamo rješenja jednadžbe $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5$ uz uvjete $0 \le x_1 \le 2$, $x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$. Funkcija izvodnica za broj rješenja jednadžbe $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=n$ uz iste uvjete je:

$$f(x) = (1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+\ldots)^4 = (1+x+x^2)\frac{1}{(1-x)^4} =$$

$$= (1+x+x^2) \sum_{n\ge 0} \binom{n+3}{3} x^n$$ Vidimo da je koeficijent uz x^5

$$\binom{5+3}{3} + \binom{4+3}{3} + \binom{3+3}{3} = \binom{8}{3} + \binom{7}{3} + \binom{6}{3} = \underline{\underline{111}}$$ To je broj

rješenja jednadžbe za $n=5$.

4. Koliko ima permutacija multiskupa $\{a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2\}$ (za n različitih elemenata multipliciteta 2) u kojima su susjedni elementi različiti?

Rj: Skup svih permutacija označimo A. Znamo da je

$$|A| = \binom{2n}{2,2,\ldots,2} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

Neka je A_i skup permutacija u kojima su elementi a_i susjedni. Možemo ih shvatiti kao permutacije multiskupa $\{a_1^2, \ldots, \boxed{a_i a_i}^1, \ldots, a_n^2\}$

$$\Rightarrow |A_i| = \binom{2n-1}{1,2,2,\ldots,2} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$$ Analogno se vidi

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \binom{2n-2}{1,1,2,\ldots,2} = \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}, \ldots, |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}, \ldots$$

Prebrojavamo elemente skupa $|A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n)| =$

$$= |A| - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = (FUI) = |A| - \sum_i |A_i| + \sum_{i_1<i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| -$$

$$- \sum_{i_1<i_2<i_3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \ldots = \frac{(2n)!}{2^n} - n \cdot \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} +$$

$$+ \binom{n}{2} \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} - \binom{n}{3} \frac{(2n-3)!}{2^{n-3}} + \ldots = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$$

5. Nađite funkciju izvodnicu niza definiranog rekurzijom

$a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = n \cdot 2^n$ za $n \geq 2$.

Rj:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$x f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^n \quad / \cdot (-2)$$

$$x^2 f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+2} = \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^n \quad / \cdot (-2)$$

$+ \Rightarrow$

$$(1-2x-2x^2)f(x) = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{a_0} + (\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_1 - 2a_0})x + \sum_{n\geq 2} (\underbrace{a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2}}_{= n\cdot 2^n}) x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 2} n\cdot 2^n x^n = 1 + x \sum_{n\geq 2} 2^n n x^{n-1} = 1 + x \sum_{n\geq 2} 2^n (x^n)' = 1 + x\Big(\sum_{n\geq 2} 2^n x^n\Big)' =$$

$$= 1 + x\left(\frac{1}{1-2x} - 1 - 2x\right)' = 1 + x\left(\frac{2}{(1-2x)^2} - 2\right) = 1 + 2x\,\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+4x-4x^2}{(1-2x)^2} =$$

$$= \frac{1-4x+4x^2+8x^2-8x^3}{(1-2x)^2} = \frac{1-4x+12x^2-8x^3}{(1-2x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1-4x+12x^2-8x^3}{(1-2x)^2(1-2x-2x^2)}$$

Kombinatorika
21.6.2004.

1. Na Trećem hrvatskom matematičkom kongresu predavanja su se održavala u šest blokova (tri prijepodnevna i tri poslijepodnevna termina). U sekciji C bilo je ukupno 6 pozvanih predavanja od 50 minuta i 21 kratkih priopćenja od 15 minuta. Na koliko je načina organizator mogao napraviti raspored za sekciju C tako da svaki blok počinje pozvanim predavanjem, nakon čega slijede tri ili četiri kratka priopćenja? Bitno je ne samo koje se predavanje, odn. priopćenje održava u kojem bloku, nego i redoslijed priopćenja unutar blokova!

2. Izračunajte sumu: $\sum_{i=0}^{n} i \binom{2n}{i}$

3. Niz (a_n) zadan je sa $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ i rekurzijom $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2} + 4a_{n-3}$, za $n \geq 4$. Odredite sve indekse n za koje je a_n djeljiv sa 3.

4. Bacamo k različito obojanih igraćih kocka. Nađite funkciju izvodnicu za broj načina da zbroj dobivenih brojeva bude najviše n. Izračunajte taj broj za $k = 3$ i $n = 10$.

5. Komisija od 5 članova bira najbolju od 50 web stranica. Svaki član komisije pregledava i ocjenjuje 20 stranica, a svaku stranicu pregledavaju dva člana komisije.

   (a) Dokažite da postoje dva člana komisije koji zajedno pregledavaju bar 5 web stranica.

   (b) Može li se postići da svaka dva člana komisije zajedno pregledavaju točno 5 web stranica? Svoju tvrdnju dokažite!

Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer (inžinjerski ili profesorski) i ime profesora kod kojeg ste slušali predavanja. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

REZULTATI: srijeda, 23.6. u 11^{00} ili prije na forumu
`http://degiorgi.math.hr/forum/viewforum.php?f=11`

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 21.6.2004.

(1.) Na Trećem hrvatskom matematičkom kongresu predavanja su se održavala u šest blokova (tri prijepodnevna i tri poslijepodnevna termina). U sekciji C bilo je ukupno 6 pozvanih predavanja od 50 minuta i 21 kratkih priopćenja od 15 minuta. Na koliko je načina organizator mogao napraviti raspored za sekciju C tako da svaki blok počinje pozvanim predavanjem, nakon čega slijede 3 ili 4 kratka priopćenja? Bitno je ne samo koje se predavanje, odn. priopćenje održava unutar kojeg bloka, nego i redoslijed priopćenja unutar blokova!

Rj. U sekciji C očito su se održala tri bloka od 3 priopćenja i tri bloka od 4 priopćenja. Rasporeda „kratkih" i „dugih" blokova ima $\binom{6}{3}=20$. Ako je ta informacija zadana, točan raspored jednoznačno je određen permutacijom pozvanih predavanja i permutacijom priopćenja. Po principu produkta ukupan broj rasporeda je $\binom{6}{3}\cdot 6!\cdot 21!$

(2.) Izračunajte: $\sum_{i=0}^{n} i\binom{2n}{i}$

Rj. Suma broji parove (S,x), pri čemu je $S\subseteq \mathbb{N}_{2n}$, $|S|\leq n$, $x\in S$ (prvo biramo S, $|S|=i$, zatim biramo $x\in S$). Ako parove prebrojimo tako da prvo biramo x, a zatim nadopunimo do skupa S, dobivamo: $2n\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n-1}{i}$ Ova suma je broj podskupova od najviše $n-1$ elemenata $(2n-1)$-članog skupa. Ima ih pola od ukupnog broja podskupova $(2n-1)$-članog skupa, tj. $\frac{1}{2}\cdot 2^{2n-1} = 2^{2n-2}$ (komplementiranje je bijekcija s podskupovima od barem n elemenata). Dakle, rezultat je

$$2n \cdot 2^{2n-2} = \underline{\underline{n \cdot 2^{2n-1}}}$$

(3.) Niz (a_n) zadan je sa $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ i rekurzijom $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2} + 4a_{n-3}$, za $n \geq 4$. Odredite sve indekse n za koje je a_n djeljiv s 3.

Rj.: Modulo 3 rekurzija je ekvivalentna sa $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$. Nadalje, očito je da će se ostaci pri dijeljenju a_n sa 3 ciklički ponavljati čim ponovo dobijemo 3 uzastopna člana koja su $\equiv 1 \pmod 3$. Prema tome, dovoljno je izračunati prvih nekoliko članova niza modulo 3:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$a_n \pmod 3$	1	1	1	0	2	0	2	1	0	0	1	1	2	1	1	1	...

dalje će se ciklički ponavljati

Vidimo da je a_n djeljiv sa 3 za $\underline{\underline{n \equiv 4, 6, 9 \text{ ili } 10 \pmod{13}}}$.

(4.) Bacamo k različito obojanih igraćih kocka. Nađite funkciju izvodnicu za broj načina da zbroj dobivenih brojeva bude najviše n. Izračunajte taj broj za $k=3$ i $n=10$.

Rj: Neka je $f(x)$ funkcija izvodnica za broj načina da zbroj dobivenih brojeva bude točno n. Vrijedi:

$$f(x) = (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^k = x^k(1+x+..+x^5)^k =$$

$$= x^k\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^k = \frac{x^k(1-x^6)^k}{(1-x)^k}$$

Ako je $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, tražena funkcija izvodnica je

$$g(x) = a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 + (a_0+a_1+a_2+a_3)x^3 + \ldots$$

Vidimo da je $g(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n\geq 0} x^n = f(x)\cdot\frac{1}{1-x}$ $\Rightarrow$

$$g(x) = \frac{x^k(1-x^6)^k}{(1-x)^{k+1}}$$

---

5. Komisija od 5 članova bira najbolju od 50 web stranica. Svaki član komisije pregledava i ocjenjuje 20 stranica, a svaku stranicu pregledavaju dva člana komisije.

a) Dokažite da postoje dva člana komisije koji zajedno pregledavaju bar 5 web stranica.

b) Može li se postići da svaka dva člana komisije zajedno pregledavaju točno 5 web stranica? Svoju tvrdnju dokažite!

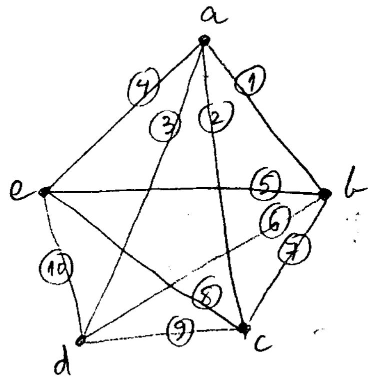
Rj a) Koristimo jaku formu Dirichletovog principa.

Predmeti: web stranice, $m=50$

Kutije: (neuređeni) parovi članova komisije, $n=\binom{5}{2}=10$

Bar jedan par članova komisije zajedno pregledava barem

$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{49}{10} \right\rfloor + 1 = \lfloor 4.9 \rfloor + 1 = 5$ web stranica.



b) Moguće je postići traženi raspored.

Članovi komisije: $\{a, b, c, d, e\}$

Web stranice: $\{1, 2, .., 50\}$

$a = \{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

$b = \{1, 5, 6, 7, 11, 15, 16, 17, 21, 25, 26, 27, 31, 35, 36, 37, 41, 45, 46, 47\}$

$c = \{2, 7, 8, 9, 12, 17, 18, 19, 22, 27, 28, 29, 32, 37, 38, 39, 42, 47, 48, 49\}$

$d = \{3, 6, 9, 10, 13, 16, 19, 20, 23, 26, 29, 30, 33, 36, 39, 40, 43, 46, 49, 50\}$

$e = \{4, 5, 8, 10, 14, 15, 18, 20, 24, 25, 28, 30, 34, 35, 38, 40, 44, 45, 48, 50\}$

3.) $k=3 \Rightarrow g(x) = \dfrac{x^3(1-x^6)^3}{(1-x)^4} = x^3(1-3x^6+3x^{12}-x^{18}) \sum_{n\geq 0} \binom{n+3}{3} x^n$

$\langle x^{10} \rangle g(x) = \langle x^7 \rangle (1-3x^6+3x^{12}-x^{18}) \sum_{n\geq 0} \binom{n+3}{3} x^n =$

$= \binom{10}{3} - 3\binom{4}{3} = \underline{\underline{108}}$

Kombinatorika
3.9.2004.

1. Koliko ima osmeroznamenkastih neparnih prirodnih brojeva u čijem zapisu nema susjednih znamenaka 8?

2. Imamo 6 Kiki i 8 Bronhi bombona. Na koliko načina možemo dati jedan ili više bombona svakom od četvero djece? Svako dijete mora dobiti bar jedan bombon, ali neki bomboni mogu ostati neraspoređeni. Djeca su međusobno različita, a bomboni iste vrste jednaki!

3. Riješite sustav rekurzija $a_n = 4a_{n-1} + b_{n-1} + 1$, $b_n = -2a_{n-1} + b_{n-1} + 2$ uz početne uvjete $a_1 = 2$, $b_1 = 1$.

4. Od ukupno 200 studenata druge godine njih 100 je položilo Matematičku analizu 3 (MA3), 150 Kombinatoriku (K), a 175 Računarski praktikum 1 (RP1). MA3 i K je položilo 75 studenata, MA3 i RP1 je položilo 80 studenata, a K i RP1 je položilo 130 studenata.

   (a) Dokažite da najviše 5 studenata nije položilo niti jedan od spomenuta tri ispita.

   (b) Koliko najviše, a koliko najmanje studenata je položilo sva tri ispita? Svoju tvrdnju dokažite!

5. Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za broj riječi duljine n sastavljenih od slova iz multiskupa $\{A^\infty, B^\infty, C^2\}$ koje sadrže bar dva slova A i paran broj slova B. Izračunajte broj takvih riječi za $n = 10$.

Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer i ime profesora kod kojeg ste slušali predavanja. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

REZULTATI: ponedjeljak, 6.9. u 11^{00} sati.

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 3. 9. 2004.

1.) Koliko ima osmeroznamenkastih neparnih prirodnih brojeva u čijem zapisu nema susjednih znamenaka 8?

R: 1.) Vodeća znamenka je 8:

- Jedna znamenka 8 $\longrightarrow 9^6 \cdot 5 = 2\,657\,205$
- Dvije znamenke 8 $\longrightarrow 5 \cdot 9^5 \cdot 5 = 1\,476\,225$
- Tri znamenke 8 $\longrightarrow \binom{4}{2} 9^4 \cdot 5 = 196\,830$
- Četiri znamenke 8 $\longrightarrow 9^3 \cdot 5 = 3\,645$

$+$

$4\,333\,905$

2.) Vodeća znamenka nije 8:

- Bez znamenke 8 $\longrightarrow 8 \cdot 9^6 \cdot 5 = 21\,257\,640$
- Jedna znamenka 8 $\longrightarrow 6 \cdot 8 \cdot 9^5 \cdot 5 = 14\,171\,760$
- Dvije znamenke 8 $\longrightarrow \binom{5}{2} \cdot 8 \cdot 9^4 \cdot 5 = 2\,624\,400$
- Tri znamenke 8 $\longrightarrow \binom{4}{1} 8 \cdot 9^3 \cdot 5 = 116\,640$

$+$

$38\,170\,440$

Ukupno: $4333905 + 38170440 = \underline{\underline{42\,504\,345}}$

2.) Imamo 6 Kiki i 8 Bronhi bombona. Na koliko načina možemo dati jedan ili više bombona svakom od četvero djece? Svako dijete mora dobiti bar jedan bombon, ali neki bomboni mogu ostati neraspoređeni. Djeca su međusobno različita, a bomboni iste vrste jednaki!

R: A = rasporedi u kojima neka djeca ne moraju dobiti bombon

$$|A| = \underbrace{\binom{6+4}{4}}_{\text{Kiki}} \cdot \underbrace{\binom{8+4}{4}}_{\text{Bronhi}} = \binom{10}{4} \cdot \binom{12}{4} = 103550$$

(Pomoću 4 pregrade podijelimo bombone iste vrste u 5 hrpica, od kojih zadnja odgovara neraspoređenim)

A_i = rasporedi u kojima i-to dijete ne dobiva bombon

$$|A_i| = \binom{6+3}{3}\binom{8+3}{3} = \binom{9}{3}\binom{11}{3} = 13860$$

$$|A_i \cap A_j| = \binom{6+2}{2}\binom{8+2}{2} = \binom{8}{2}\binom{10}{2} = 1260$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{6+1}{1}\binom{8+1}{1} = 7 \cdot 9 = 63$$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$ (svi bomboni neraspoređeni)

Rasporedi u kojima svako dijete dobiva bar jedan bombon:

$$|A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = (FUI) =$$

$$= |A| - \binom{4}{1}|A_i| + \binom{4}{2}|A_i \cap A_j| - \binom{4}{3}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \binom{4}{4}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$$

$$= 103950 - 4 \cdot 13860 + 6 \cdot 1260 - 4 \cdot 63 + 1 = \underline{\underline{55819}}$$

3.) Riješite sustav rekurzija $a_n = 4a_{n-1} + b_{n-1} + 1$, $b_n = -2a_{n-1} + b_{n-1} + 2$ uz početne uvjete $a_1 = 2$, $b_1 = 1$.

$b_{n-1} = a_n - 4a_{n-1} - 1 \Rightarrow b_n = a_{n+1} - 4a_n - 1$. Uvrstimo u drugu jednadžbu: $a_{n+1} - 4a_n - 1 = -2a_{n-1} + a_n - 4a_{n-1} - 1 + 2 \Rightarrow$

$a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1} = 2$ Karakteristična jednadžba:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$$

$a_n^H = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$ $\quad a_n^P = A = \text{const.} \Rightarrow A - 5A + 6A = 2 \Rightarrow A = 1$

Opće rješenje rekurzivne jednadžbe: $a_n = a_n^H + a_n^P = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + 1$

Početni uvjeti: $a_1 = 2$, $b_1 = 1 = a_2 - 4a_1 - 1 = a_2 - 9 \Rightarrow a_2 = 10$

$$\begin{aligned} 2C_1 + 3C_2 &= 1 \ /\cdot 2 \\ 4C_1 + 9C_2 &= 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3C_2 &= 7 \\ C_2 &= \tfrac{7}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2C_1 &= 1 - 3C_2 = 1 - 7 = -6 \\ C_1 &= -3 \end{aligned}$$

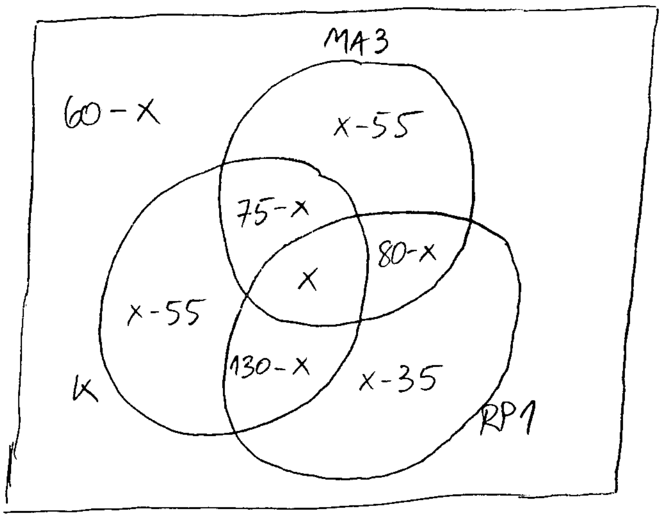
$$\underline{\underline{a_n = -3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^{n-1} + 1}} \Rightarrow \underline{\underline{b_n}} = a_{n+1} - 4a_n - 1 = \underline{\underline{6 \cdot 2^n - 7 \cdot 3^{n-1} - 4}}$$

4.) Od ukupno 200 studenata druge godine njih 100 je položilo Matematičku analizu 3 (MA3), 150 Kombinatoriku (K), a 175 Računarski praktikum 1 (RP1). MA3 i K je položilo 75 studenata, MA3 i RP1 je položilo 80 studenata, a K i RP1 je položilo 130 studenata.

(a) Dokažite da najviše 5 studenata nije položilo niti jedan od spomenuta tri ispita.

(b) Koliko najviše, a koliko najmanje studenata je položilo sva tri ispita? Svoju tvrdnju dokažite!

Rj (a) Označimo sa x broj studenata koji su položili sva tri ispita. Tada vrijedi sljedeći Vennov dijagram:



Broj studenata koji su položili samo MA3 je $x-55 \geq 0 \Rightarrow$ $x \geq 55 \Rightarrow -x \leq -55 \Rightarrow \underline{\underline{60-x \leq 5}}$

Broj studenata koji nisu položili niti jedan ispit je $60-x$, pa je tvrdnja dokazana.

(b) Sa Vennovog dijagrama vidimo da je $55 \leq x \leq 60$

5.) Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za broj riječi duljine n sastavljenih od slova iz multiskupa $\{A^{\infty}, B^{\infty}, C^{2}\}$ koje sadrže bar dva slova A i paran broj slova B. Izračunajte broj takvih riječi za $n=10$

Rj: $$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)}_{A}\underbrace{\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots\right)}_{B}\underbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)}_{C}$$

$$f(x) = (e^x-1-x)\,\frac{e^x+e^{-x}}{2}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^x-xe^x+1-e^{-x}-xe^{-x}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2x}-(1+x)(e^x+e^{-x})\right]\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{2x}-\left(1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3\right)(e^x+e^{-x})\right]$$

$$10!\,\langle x^{10}\rangle f(x) = \frac{10!}{2}\left[\frac{2^{10}}{10!}+\frac{2^9}{9!}+\frac{1}{2}\,\frac{2^8}{8!}-2\cdot\frac{1}{10!}-3\cdot\frac{1}{8!}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2^{10}+10\cdot 2^9+10\cdot 9\cdot 2^7-2-3\cdot 10\cdot 9\right] = \underline{\underline{8696}}$$

Kombinatorika
28.9.2004.

1. Svaka točka ravnine obojana je crveno ili plavo. Dokažite da u ravnini postoji pravokutnik kojem su vrhovi obojani istom bojom.

2. Koliko ima $m \times n$ matrica popunjenih brojevima 0 i 1 koje u svakom retku i stupcu imaju paran broj jedinica?

3. Koliko ima prirodnih brojeva $n \leq 10^6$ koji su djeljivi sa 7 i nisu djeljivi sa 10, 12 i 25?

4. Neka a_n označava broj funkcija $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ sa svojstvom $f \circ f = id$. Nađite linearnu rekurziju za niz (a_n).

5. Odredite funkciju izvodnicu niza zadanog rekurzijom

$$(n+2)a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = a_1 = 1.$$

Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer i ime profesora kod kojeg ste slušali predavanja. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

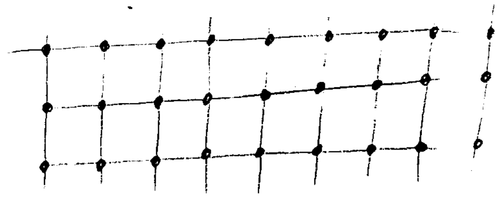
Rezultati: SRIJEDA, 29. 9. U $13^{\underline{00}}$

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 28.9.2004.

1.) Svaka točka ravnine obojana je crveno ili plavo. Dokažite da u ravnini postoji pravokutnik kojem su vrhovi obojani istom bojom.

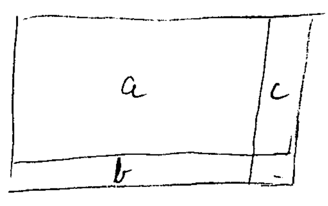
Rj: Izaberemo tri paralelna „horizontalna" pravca i povučemo 9 na njih okomitih „vertikalnih" pravaca.



Promatramo njihova sjecišta. Tri sjecišta na istom vertikalnom pravcu obojana su na jedan od $2^3 = 8$ načina. Prema Dirichletovom principu postoje dva vertikalna pravca na kojima su odgovarajuća sjecišta obojana isto. Bar dva sjecišta na svakom od njih obojana su istom bojom, pa smo dobili jednakobojni pravokutnik.

2.) Koliko ima $m \times n$ matrica popunjenih brojevima 0 i 1 koje u svakom retku i stupcu imaju paran broj jedinica?

Rj: Svakoj takvoj matrici možemo pridružiti $(m-1)\times(n-1)$ matricu dobivenu odbacivanjem zadnjeg retka i zadnjeg stupca. Obrnuto, od proizvoljne $(m-1)\times(n-1)$ matrice popunjene s 0 i 1 na jedinstven način možemo napraviti $m \times n$ matricu s parnim brojem jedinica u recima i stupcima. Proširimo retke i stupce s parnim brojem jedinica nulom, a s neparnim jedinicom. Element u donjem desnom kutu jednoznačno je određen, jer je broj dodanih jedinica u zadnjem retku iste parnosti kao u zadnjem stupcu. Ako je a broj jedinica u staroj matrici, b broj dodanih jedinica u zadnjem retku, a c u stupcu, očito su $a+b$ i $a+c$ oba parni, tj. $a+b \equiv a+c \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow b \equiv c \pmod 2$



Prema tome, u donjem desnom kutu treba staviti nulu ako su b_i i parni, a jedinicu ako su neparni. Vidimo da je opisano pridruživanje bijekcija, pa traženih matrica ima isto kao proizvoljnih $(m-1)\times(n-1)$ matrica nad $\{0,1\}$, a to je $2^{(m-1)\cdot(n-1)} = 2^{mn-m-n+1}$.

3) Koliko ima prirodnih brojeva $n \leq 10^6$ koji su djeljivi sa 7 i nisu djeljivi sa 10, 12 i 25?

Rj. Budući da je 7 relativno prost sa 10, 12 i 25, to su brojevi oblika $n = 7m$, $m \leq \left\lfloor \frac{10^6}{7} \right\rfloor = 142857$ za koje m nije djeljiv sa 10, 12 i 25.

Označimo $A_k = \{ m \in \{1,2,\ldots,142857\} \mid k \text{ dijeli } m \}$. Trebamo izračunati $|A_{10}^c \cap A_{12}^c \cap A_{25}^c| = |\mathbb{N}_{142857} \setminus (A_{10} \cup A_{12} \cup A_{25})| = |FUI| =$

$= 142857 - |A_{10}| - |A_{12}| - |A_{25}| + |A_{10} \cap A_{12}| + |A_{10} \cap A_{25}| + |A_{12} \cap A_{25}| -$

$- |A_{10} \cap A_{12} \cap A_{25}|$

$|A_{10}| = \left\lfloor \frac{142857}{10} \right\rfloor = 14285$, $|A_{12}| = \left\lfloor \frac{142857}{12} \right\rfloor = 11904$, $|A_{25}| = \left\lfloor \frac{142857}{25} \right\rfloor = 5714$

Znamo da je $A_k \cap A_l = A_{NZV(k,l)}$, pa je

$|A_{10} \cap A_{12}| = |A_{60}| = \left\lfloor \frac{142857}{60} \right\rfloor = 2380$ $|A_{10} \cap A_{25}| = |A_{50}| = \left\lfloor \frac{142857}{50} \right\rfloor = 2857$,

$|A_{12} \cap A_{25}| = |A_{10} \cap A_{12} \cap A_{25}| = |A_{300}| = \left\lfloor \frac{142857}{300} \right\rfloor = 476$

Uvrštavanjem dobivamo broj $\underline{\underline{116\,191}}$.

(5.) Odredite funkciju izvodnicu niza zadanog rekurzijom $(n+2)a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ i početnim uvjetima $a_0 = a_1 = 1$

Rj: $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n\geq 2} a_{n+2} x^{n+2} \quad \Big/ \frac{d}{dx}$

$f'(x) = 1 + \sum_{n\geq 0} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} = 1 + \sum_{n\geq 0} (a_{n+1} + a_n) x^{n+1} =$

$= 1 + \sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^{n+1} + x \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \cancel{1} + f(x) - \cancel{1} + x f(x) = (1+x) f(x)$

Dobili smo diferencijalnu jednadžbu $\frac{df}{dx} = (1+x) \cdot f$.

Separiramo varijable i integriramo: $\frac{df}{f} = (1+x)\,dx \quad \Big/ \int$

$\ln f = \int (1+x)\,dx = x + \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow f(x) = e^{x + \frac{x^2}{2} + C}$

Znamo da je $1 = a_0 = f(0) = e^C \Rightarrow C = 0$, pa je

tražena funkcija izvodnica $f(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}$

(4.) Neka a_n označava broj funkcija $f: \{1, 2, .., n\} \to \{1, 2, .., n\}$ sa svojstvom $f \circ f = id$. Nađite linearnu rekurziju za niz (a_n).

Rj Tražene funkcije su permutacije koje u rastavu na disjunktne cikluse imaju samo transpozicije (cikluse duljine 2) i fiksne točke. Neka je $f \in S_n$ jedna takva funkcija. Ako je $f(n) = n$, restrikcija $f' = f|_{\mathbb{N}_{n-1}}$, $f' \in S_{n-1}$ ima isto svojstvo ($f' \circ f' = id$). Ako je $f(n) = k < n$, onda restrikciju $f|_{\mathbb{N}_{n-1} \setminus \{k\}}$ možemo identificirati s funkcijom $f'' \in S_{n-2}$ koja također ima svojstvo $f'' \circ f'' = id$. Pridruživanje ide i u obrnutom smjeru, s time da imamo $n-1$ mogućih izbora za k. Prema tome, vrijedi rekurzija $a_n = a_{n-1} + (n-1) a_{n-2}$.

Kombinatorika
2.2.2005.

1. Zadan je n-člani skup S i prirodan broj k.
   (a) Koliko ima uređenih k-torki $(S_1, \ldots, S_k)$ podskupova od S sa svojstvom $S_i \cap S_j = \emptyset$ za $1 \leq i < j \leq k$?
   (b) Koliko ima uređenih k-torki $(S_1, \ldots, S_k)$ podskupova od S sa svojstvom $S_1 \cap \cdots \cap S_k = \emptyset$?

2. Na kolokviju iz Kombinatorike postavljena su tri zadatka. Kolokviju je pristupilo 120 studenata. Prvi zadatak riješilo je 56 studenata, drugi 44, a treći 34. Sva tri zadatka riješilo je 12 studenata, a točno dva zadatka 17 studenata. Koliko studenata nije riješilo niti jedan zadatak?

3. Koliko ima binarnih nizova duljine n u kojima se ne pojavljuju tri uzastopne jedinice niti tri uzastopne nule?

4. U vlaku se nalazi $n \geq 2$ putnika. Na koliko načina oni mogu izaći na četiri stanice tako da na prvoj stanici izađe najviše jedan putnik, na drugoj stanici paran broj putnika, na trećoj stanici barem jedan putnik, a na četvrtoj svi koji su ostali u vlaku? Putnici su međusobno različiti (nije svejedno da li na prvoj stanici izlazi Ana ili Branko) i stanice su međusobno različite (nije svejedno da li Ana izlazi na prvoj ili na drugoj stanici).

   Uputa: koristite eksponencijalnu funkciju izvodnicu.

5. Dokažite da je broj nesukladnih trokuta opsega n čije su duljine stranica prirodni brojevi jednak broju particija od $n-3$ u dijelove 2, 3 i 4.

Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer i ime profesora kod kojeg ste slušali predavanja. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

Rezultati: petak, 4.2. u 11^{00} ili prije na forumu
`http://degiorgi.math.hr/forum/viewforum.php?f=11`

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 2.2.2005.

1. Zadan je n-člani skup S i prirodan broj k.

(a) Koliko ima uređenih k-torki $(S_1, \ldots, S_k)$ podskupova od S sa svojstvom $S_i \cap S_j = \emptyset$ za $1 \le i < j \le k$?

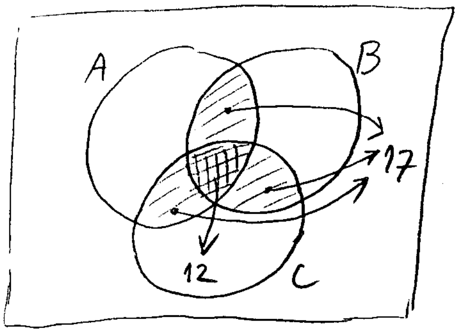
(b) Koliko ima uređenih k-torki $(S_1, \ldots, S_k)$ podskupova od S sa svojstvom $S_1 \cap \cdots \cap S_k = \emptyset$?

Rj. (a) Za svaki od n elemenata iz S treba se odlučiti kojem od podskupova $S_1, \ldots, S_k$ će pripadati, a moguće je također da ne pripada niti jednom od podskupova. Imamo n uzastopnih izbora između $k+1$ mogućnosti, pa je ukupan broj k-torki $\underline{(k+1)^n}$.

(b) Uz ovaj uvjet moguće je element iz S svrstati u više podskupova $S_1, \ldots, S_k$, jedino nije dozvoljeno da pripada svima (jer bi tada presjek bio neprazan). Prema tome, elementima iz S pridružujemo prave podskupove skupa $\{1, \ldots, k\}$, a njih ima $2^k - 1$. Ukupan broj k-torki je $\underline{(2^k - 1)^n}$.

2. Na kolokviju iz Kombinatorike postavljena su tri zadatka. Kolokviju je pristupilo 120 studenata. Prvi zadatak riješilo je 56 studenata, drugi 44, a treći 34. Sva tri zadatka riješilo je 12 studenata, a točno dva zadatka 17 studenata. Koliko studenata nije riješilo niti jedan zadatak?

Rj. Neka je A, B, C redom skup studenata koji su riješili prvi, drugi i treći zadatak.



$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C| =$
$= 17 + 3\cdot 12 = 53$

Prema FUI vrijedi:

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$
$$= 56+44+34 - 53 + 12 = 93$$

Broj studenata koji nisu riješili niti jedan zadatak je
$120 - |A\cup B\cup C| = 120 - 93 = \underline{\underline{27}}$

3.) Koliko ima binarnih nizova duljine n u kojima se ne pojavljuju tri uzastopne jedinice niti tri uzastopne nule?

Rj. Neka a_n označava broj takvih nizova. Očito je $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2^3 - 2 = 8$. Skup svih nizova duljine n možemo podijeliti na dva podskupa:

1.) Nizovi koji završavaju s dva ista simbola (00 ili 11):
Takav niz dobivamo dodavanjem 00 ili 11 na proizvoljan niz duljine $n-2$, ovisno o tome završava li s 1 ili 0. Prema tome, ovaj podskup ima a_{n-2} elemenata.

2.) Nizovi koji završavaju s dva različita simbola (01 ili 10). Takav niz dobivamo dodavanjem 1 ili 0 na proizvoljan niz duljine $n-2$, ovisno o tome završava li s 0 ili 1. Ovaj podskup ima a_{n-1} elemenata.

Vidimo da (a_n) zadovoljava rekurziju $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, koju zadovoljavaju Fibonaccijevi brojevi. Budući da je $a_1 = 2F_2$ i $a_2 = 2F_3$, indukcijom slijedi $a_n = 2F_{n+1}$ za sve prirodne brojeve n.

4.) U vlaku se nalazi $n \geq 2$ putnika. Na koliko načina oni mogu izaći na četiri stanice tako da na prvoj stanici izađe najviše jedan putnik, na drugoj stanici paran broj putnika, na trećoj stanici barem jedan putnik, a na četvrtoj svi koji su ostali u vlaku? Putnici su međusobno različiti (nije svejedno da li na prvoj stanici izlazi Ana ili Branko) i stanice su međusobno različite (nije svejedno da li Ana izlazi na prvoj ili na drugoj stanici).

Uputa: koristite eksponencijalnu funkciju izvodnicu.

Rj: EFI: $f(x) = (1+x)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)$

$$= (1+x)\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot(e^x-1)\cdot e^x = \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}+xe^x+xe^{-x}\right)\left(e^{2x}-e^x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{3x}+e^x+xe^{3x}+xe^x-e^{2x}-1-xe^{2x}-x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{n!}x^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{n!}x^{n+1}+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^{n+1}-\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!}x^n-1-\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!}x^{n+1}-x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{n!}x^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n\geq 1}\frac{n3^{n-1}}{n!}x^n+\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n!}x^n-\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!}x^n-\sum_{n\geq 1}\frac{n2^{n-1}}{n!}x^n-1-x\right)$$

Vidimo da je za $n \geq 2$ koeficijent uz x^n jednak

$$\frac{1}{2n!}\left(3^n+1+n3^{n-1}+n-2^n-n2^{n-1}\right)=\frac{1}{2n!}\left[3^{n-1}(n+3)-2^{n-1}(n+2)+n+1\right]$$

Broj načina na koje putnici mogu izaći iz vlaka je $\underline{\underline{\dfrac{3^{n-1}(n+3)-2^{n-1}(n+2)+n+1}{2}}}$.

5.) Dokažite da je broj nesukladnih trokuta opsega n čije su duljine stranica prirodni brojevi jednak broju particija od $n-3$ u dijelove 2, 3 i 4.

Rj. Trokute identificiramo sa skupom $T=\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3 \mid a\geq b\geq c,\ a<b+c,\ a+b+c=n\}$ (a,b,c su duljine stranica). Particije identificiramo sa skupom $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{N}_0^3 \mid 2x+3y+4z=n-3\}$ (x,y,z su redom broj dijelova 2, 3 i 4). Definirat ćemo bijekciju $\phi: T\to P$, $\phi(a,b,c)=(b-c,\ b+c-a-1,\ a-b)$.

Funkcija ϕ je dobro definirana jer je $b-c\geq 0$, $b+c-a-1\geq 0$, $a-b\geq 0$ i $2(b-c)+3(b+c-a-1)+4(a-b)=\underline{2b}-\underline{2c}+\underline{3b}+\underline{3c}-\underline{3a}-3+\underline{4a}-\underline{4b}=a+b+c-3=n-3 \Rightarrow \phi(a,b,c)\in P$ za sve $(a,b,c)\in T$.

Funkcija ϕ je bijekcija jer ima inverznu funkciju $\psi: P\to T$, $\psi(x,y,z)=(x+y+2z+1,\ x+y+z+1,\ y+z+1)$. Očito je $x+y+2z+1\geq x+y+z+1\geq y+z+1$, $\underline{x}+\underline{y}+\underline{2z}+1+\underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+1+\underline{y}+\underline{z}+1=$ $=2x+3y+4z+3=n-3+3=n$ i $x+y+z+1+y+z+1=$ $=x+2y+2z+2>x+y+2z+1 \Rightarrow \psi(x,y,z)\in T$ za sve $(x,y,z)\in P$.

Vrijedi $\phi(\psi(x,y,z))=\phi(x+y+2z+1,\ x+y+z+1,\ y+z+1)=$ $=(x,y,z)\Rightarrow \phi\circ\psi=1_P$. Analogno se vidi da je $\psi\circ\phi=1_T$.

Kombinatorika
18.4.2005.

1. (a) Uplatili smo dvije kombinacije lota 6/45 koje nemaju zajedničkih brojeva. Na koliko načina mogu biti izvučeni brojevi tako da dobijemo točno jednu "trojku"? Dopunski broj zanemarite.

   (b) Koliko ima uređenih k-torki $(S_1, \ldots, S_k)$ podskupova n-članog skupa S sa svojstvom $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \ldots \subseteq S_k \subseteq S$?

2. Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od ishodišta do točke $(10, 10)$ koji ne prolaze niti točkom $(2, 3)$, niti segmentom $[(5, 5), (5, 6)]$, niti točkom $(8, 8)$?

3. Ako F_n označava n-ti Fibonaccijev broj, dokažite da vrijedi

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} = F_{n+1}$$

4. Neka je a_n broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 = n$, pri čemu je $x_1 \geq 3$, $1 \leq x_2 \leq 10$, a x_3 je nenegativan i paran. Nađite funkciju izvodnicu niza (a_n) i pomoću nje izračunajte a_{123}.

   Napomena. Nula je paran broj!

5. U kvadratu duljine stranice 1000 zadano je 4049 krugova promjera 1. Dokažite da unutar kvadrata postoji pravokutnik dimenzija 10×20 koji ne siječe niti jedan od zadanih krugova.

Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer i ime profesora kod kojeg ste slušali predavanja. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

Rezultati: četvrtak, 21.4. u 10^{00} ili prije na forumu
`http://degiorgi.math.hr/forum/viewforum.php?f=11`

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 18. 4. 2005.

1.) a) Uplatili smo dvije kombinacije lota 6/45 koje nemaju zajedničkih brojeva. Na koliko načina mogu biti izvučeni brojevi tako da dobijemo točno jednu "trojku"? Dopunski broj zanemarite.

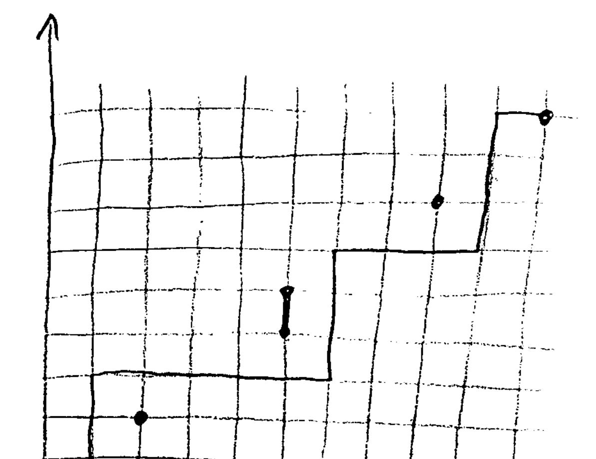
b) Koliko ima uređenih k-torki $(S_1, \ldots, S_k)$ podskupova n-članog skupa S sa svojstvom $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_k \subseteq S$?

Rj. a)
$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{Tri broja iz prve kombinacije...}} \Bigg[\underbrace{\binom{6}{0}\binom{33}{3} + \binom{6}{1}\binom{33}{2} + \binom{6}{2}\binom{33}{1}}_{\text{...nula, jedan ili dva broja iz druge kombinacije...}} \Bigg] \cdot \underbrace{2}_{\text{...ili obrnuto!}} = \underline{\underline{364\,760}}$$

b) Za svaki $x \in S$ treba izabrati najmanji indeks i za koji je $x \in S_i$. Tada je $x \in S_j$ za sve $j \geq i$ i $x \notin S_j$ za $j < i$. Ako x ne pripada niti jednom od podskupova, stavljamo $i = 0$. Prema tome, za svaki $x \in S$ imamo $k+1$ izbora, pa je traženi broj $\underline{(k+1)^n}$.

2.) Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od ishodišta do točke $(10, 10)$ koji ne prolaze niti točkom $(2,3)$, niti segmentom $[(5,5), (5,6)]$, niti točkom $(8,8)$?

Rj.



A = skup svih najkraćih puteva

A_1 = putevi koji prolaze točkom $(2,3)$

A_2 = putevi koji prolaze segmentom $[(5,5), (5,6)]$

A_3 = putevi koji prolaze točkom $(8,8)$

$$|A| = \binom{10+10}{10} = \binom{20}{10} = 184756$$

$$|A_1| = \binom{5}{2}\cdot\binom{15}{7} = 64350 \qquad |A_2| = \binom{10}{5}\binom{9}{4} = 31752$$

$$|A_3| = \binom{16}{8}\binom{4}{2} = 77220 \qquad |A_1\cap A_2| = \binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{9}{4} = 12600$$

$$|A_1\cap A_3| = \binom{5}{2}\cdot\binom{11}{5}\binom{4}{2} = 27720 \qquad |A_2\cap A_3| = \binom{10}{5}\binom{5}{2}\binom{4}{2} = 15120$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3| = \binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2} = 6000$$

Broj traženih puteva je prema FUI $|A|-|A_1|-|A_2|-|A_3| +$
$+|A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + |A_2\cap A_3| - |A_1\cap A_2\cap A_3| = \underline{\underline{60874}}$

3.) Ako F_n označava n-ti Fibonaccijev broj, dokažite da vrijedi

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-i}{i} = F_{n+1}$$

Rj: Označimo sumu na lijevoj strani sa $s_n := \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-i}{i}$.

Vrijedi: $s_1 = \binom{1}{0} = F_2$, $s_2 = \binom{2}{0}+\binom{1}{1} = 2 = F_3$. Dovoljno je dokazati da niz (s_n) zadovoljava rekurziju za Fibonaccijeve brojeve, $s_n = s_{n-1}+s_{n-2}$. Imamo dva slučaja:

1) $n=2k$ paran $\Rightarrow$ $s_{n-1}+s_{n-2} = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1-i}{i} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-2-i}{i} =$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1-i}{i} + \sum_{i=1}^{k}\binom{2k-1-i}{i-1} = \underset{\substack{\| \\ 1}}{\binom{2k-1}{0}} + \sum_{i=1}^{k-1}\Big[\underbrace{\binom{2k-1-i}{i}+\binom{2k-1-i}{i-1}}_{\text{Pascalova f.}}\Big] + \underset{\substack{\| \\ 1}}{\binom{k-1}{k-1}} =$$

$$= \binom{2k}{0} + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{2k-i}{i} + \binom{k}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{2k-i}{i} = s_n$$

2.) $n=2k+1$ neparan $\Rightarrow$ $s_{n-1}+s_{n-2} = \sum_{i=0}^{k}\binom{2k-i}{i} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1-i}{i} =$

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{2k-i}{i} + \sum_{i=1}^{k}\binom{2k-i}{i-1} = \binom{2k}{0} + \sum_{i=1}^{k}\Big[\binom{2k-i}{i}+\binom{2k-i}{i-1}\Big] =$$

$$= \binom{2k+1}{0} + \sum_{i=1}^{k}\binom{2k+1-i}{i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{2k+1-i}{i} = s_n$$

4.) Neka je a_n broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1+x_2+x_3=n$, pri čemu je $x_1 \geq 3$, $1 \leq x_2 \leq 10$, a x_3 je nenegativan i paran. Nađite funkciju izvodnicu niza (a_n) i pomoću nje izračunajte a_{123}. Napomena: Nula je paran broj!

Rj: FI:
$$f(x) = \underbrace{(x^3+x^4+x^5+\dots)}_{x_1}\underbrace{(x+x^2+\dots+x^{10})}_{x_2}\underbrace{(1+x^2+x^4+x^6+\dots)}_{x_3} =$$

$$= \frac{x^3}{1-x}\cdot\frac{x(1-x^{10})}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2} = \frac{x^4(1-x^{10})}{(1-x)^3(1+x)} = x^4(1-x^{10})\left[\frac{A}{1-x}+\frac{B}{(1-x)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{C}{(1-x)^3}+\frac{D}{1+x}\right] = x^4(1-x^{10})\,\frac{A(1-x)^2(1+x)+B(1-x)(1+x)+C(1+x)+D(1-x)^3}{(1-x)^3(1+x)} =$$

$$= \frac{x^4(1-x^{10})}{(1-x)^3(1+x)}\left[A(1-x-x^2+x^3)+B(1-x^2)+C(1+x)+D(1-3x+3x^2-x^3)\right]$$

$$\left.\begin{aligned} A+B+C+D&=1\\ -A\phantom{{}-B}+C-3D&=0\\ -A-B\phantom{{}+C}+3D&=0\\ A\phantom{{}-B+C}-D&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2A+B+C&=1\\ -4A\phantom{{}+B}+C&=0\\ 2A-B&=0 \end{aligned}\right\}+ \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow 2C=1 \Rightarrow C=\tfrac{1}{2}\\ &\Rightarrow A=\tfrac{1}{4}C=\tfrac{1}{8}=D\\ &\Rightarrow B=2A=\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

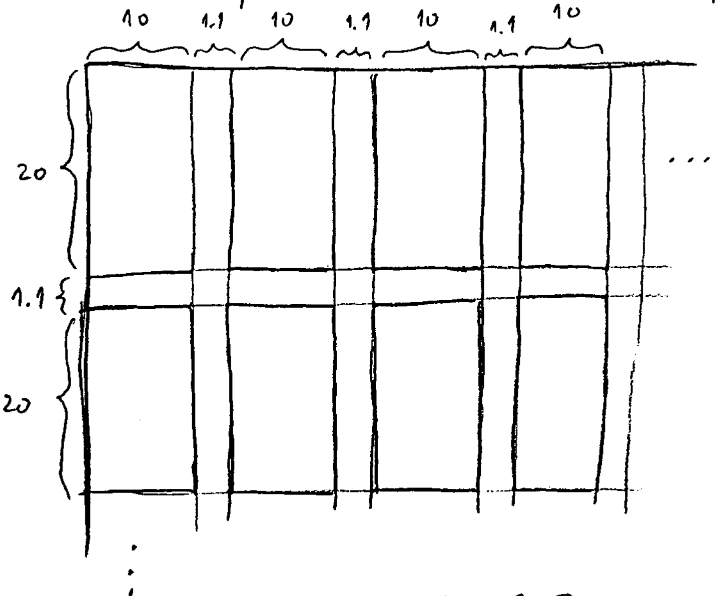
$$A - D = 0 \Rightarrow D=A$$

$$f(x) = x^4(1-x^{10})\left[\frac{1}{8}\sum_{n\geq 0}x^n + \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\binom{n+1}{1}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}x^n + \frac{1}{8}\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n\right]$$

$$\langle x^{123}\rangle f(x) = \cancel{\frac{1}{8}} + \frac{1}{4}\cdot 120 + \frac{1}{2}\cdot\binom{121}{2} - \cancel{\frac{1}{8}} - \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot 110+\frac{1}{2}\binom{111}{2}-\frac{1}{8}\right) = \underline{\underline{580}}$$

5.) U kvadratu duljine stranice 1000 zadano je 4049 krugova promjera 1. Dokažite da unutar kvadrata postoji pravokutnik dimenzija 10×20 koji ne siječe niti jedan od zadanih krugova.

Rj.: Podijelimo veliki kvadrat na $90 \cdot 48 = 4320$ pravokutnika dimenzija 10×20, između kojih ostavimo razmake duljine 1.1



$$90 \cdot 10 + 89 \cdot 1.1 = 997.9 < 1000$$
$$47 \cdot 20 + 46 \cdot 1.1 = 990.6 < 1000$$

Zbog razmaka krug promjera 1 može sijeći najviše jedan od pravokutnika na koje smo podijelili kvadrat.

Prema tome, kad bi svaki od pravokutnika sijekao neki od krugova, imali bismo barem 4320 krugova, što je kontradikcija.

Vidimo da smo zapravo mogli zadati 4319 krugova.

Kombinatorika
29.6.2005.

1. Koliko ima djelitelja broja 30^{30} koji imaju točno 30 djelitelja?

2. Pismeni ispit položilo je $n \geq 3$ studenata. Usmeni se polaže kod tri profesora. Na koliko načina možemo rasporediti studente profesorima tako da prvi i drugi profesor pitaju bar po jednog studenta, a treći bar dvoje? Nije bitan redoslijed odgovaranja, nego samo koji će student odgovarati kod kojeg profesora!

3. Riješite rekurziju $a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 24n$ uz početne uvjete $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 2$.

4. Zadani su nizovi (f_n) i (g_n) čije su eksponecijalne funkcije izvodnice redom $F(x)$ i $G(x)$. Ako je $G(x) = e^x \cdot F(x)$, izvedite vezu među nizovima (f_n) i (g_n). Koristeći tu vezu odredite inverz matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=0}^n$, $a_{ij} = \binom{i}{j}$.

5. Na konferenciji je sudjelovao određen broj matematičara od kojih su se neki međusobno rukovali. Dokažite da je broj matematičara koji su se rukovali neparno mnogo puta paran.

Napomena. Na zadaću obavezno napišite smjer i ime profesora kod kojeg ste slušali predavanja. Dozvoljeno je korištenje Bronštejna, logaritamskih tablica, kalkulatora i papira s formulama.

Rezultati: petak, 1.7. u 11^{00} ili prije na forumu
`http://degiorgi.math.hr/forum/viewforum.php?f=11`

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, 29. 6. 2005.

1. Koliko ima djelitelja broja 30^{30} koji imaju točno 30 djelitelja?

Rj: $30^{30} = 2^{30} \cdot 3^{30} \cdot 5^{30}$

Djelitelji su oblika $2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$ za $0 \leq x_i \leq 30$, $i = 1, 2, 3$ (ima ih ukupno 31^3). Taj djelitelj ima $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)$ djelitelja. Prema tome, uz supstituciju $y_i = x_i + 1$, prebrojavamo rješenja jednadžbe $y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Faktori su oblika $y_i = 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i} 5^{\gamma_i}$

$$\Rightarrow 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ &\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 \\ &\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \\ &\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Svaka od jednadžbi očito ima 3 rješenja. Ukupan broj rješenja je $3^3 = \underline{\underline{27}}$. Dakle, 30^{30} ima točno 27 djelitelja koji imaju 30 djelitelja.

2. Pismeni ispit (iz Elementarne matematike) položilo je $n \geq 3$ studenata. Usmeni se polaže kod tri profesora. Na koliko načina možemo rasporediti studente profesorima tako da prvi i drugi pitaju bar jednog studenta, a treći bar dvoje? Nije bitan redoslijed odgovaranja, nego samo koji će student odgovarati kod kojeg profesora.

Rj: Ekvivalentno: funkcije $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_3$ t.d. $|f^{-1}(1)| \geq 1$, $|f^{-1}(2)| \geq 1$, $|f^{-1}(3)| \geq 2$. Možemo ih prebrojiti na dva načina:

<u>1. način</u>: FUI

$$3^n - 2^n - 2^n - (2^n + n \cdot 2^{n-1}) + 1 + (1+n) + (1+n) =$$

Ukupan broj rasporeda; 1. prof. ne pita nikog; 2. prof ne pita nikog; 3. prof pita najviše jednog studenta; 1. i 2. prof ne pitaju nikog; 1. prof ne pita nikog, a 3. najviše jednog; 2. prof ne pita nikog, a 3. najviše jednog

$= 3^n - (n+6)2^{n-1} + 2n + 3$

2. način: EFI za broj rasporeda je $f(x) = (e^x-1)^2(e^x-1-x) =$

$= (e^{2x} - 2e^x + 1)(e^x - 1 - x) = e^{3x} - 2e^{2x} + e^x - e^{2x} + 2e^x - 1 - xe^{2x} + 2xe^x - x =$

$= e^{3x} - xe^{2x} - 3e^{2x} + 2xe^x + 3e^x - 1 - x =$

$= \sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{n!}x^n - \sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}x^n - 3\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!}x^n + 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}x^n + 3\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n - 1 - x$

$n!\langle x^n\rangle f(x) = 3^n - n\cdot 2^{n-1} - 3\cdot 2^n + 2n + 3 = 3^n - (n+6)2^{n-1} + 2n + 3.$ (za $n\geq 2$)

3.) Riješite rekurziju $a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 24n$ uz početne uvjete $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 2$.

Rj: Karakt. jednadžba: $x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x^2-1)(x-1) =$
$= (x-1)^2(x+1) = 0$ Rješenja: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Opće rješenje homogene rekurzije: $a_n^H = A + Bn + C(-1)^n$

Obzirom da je 1 dvostruko rješenje karakteristične jednadžbe, partikularno rješenje tražimo u obliku $a_n^P = n^2(Dn+E) = Dn^3 + En^2$

Uvstimo u rekurziju:

$D(n+3)^3 + E(n+3)^2 - D(n+2)^3 - E(n+2)^2 - D(n+1)^3 - E(n+1)^2 + Dn^3 + En^2 = 24n$

$D(\cancel{n^3} + 9n^2 + 27n + 27) + E(n^2 + 6n + 9) - D(\cancel{n^3} + 6n^2 + 12n + 8) - E(n^2 + 4n + 4) -$

$- D(\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1) - E(n^2 + 2n + 1) + \cancel{Dn^3} + En^2 = 24n$

$n^2(\cancel{9D} + \cancel{E} - \cancel{6D} - \cancel{E} - \cancel{3D} - \cancel{E} + \cancel{E}) + n(\underline{27D} + \cancel{6E} - \underline{12D} - \cancel{4E} - \underline{3D} - \cancel{2E}) +$

$+ 27D + 9E - 8D - 4E - D - E = 24n$

$12D\cdot n + 18D + 4E = 24n \Rightarrow \begin{matrix} 12D = 24 \\ 18D + 4E = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} D = 2 \\ E = -9 \end{matrix}$

Dakle, $a_n^P = 2n^3 - 9n^2$

Opće rješenje nehomogene rekurzije: $a_n = A + Bn + C(-1)^n + 2n^3 - 9n^2$.

$a_0 = A + C \quad \Rightarrow C = -A$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= A + B - C - 7 = 2 \\ a_2 &= A + 2B + C - 20 = 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &2A + B = 9 \\ &2B = 22 \Rightarrow B = 11 \end{aligned} \quad \Rightarrow 2A = 9 - 11 = -2 \Rightarrow A = -1 \quad \Rightarrow C = 1.$$

Konačno rješenje: $\underline{\underline{a_n = 2n^3 - 9n^2 + 11n - 1 + (-1)^n}}$.

4. Zadani su nizovi (f_n) i (g_n) čije su eksponencijalne funkcije izvodnice redom $F(x)$ i $G(x)$. Ako je $G(x) = e^x \cdot F(x)$, izvedite vezu među nizovima (f_n) i (g_n). Koristeći tu vezu odredite inverz matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=0}^n$, $a_{ij} = \binom{i}{j}$.

Rj. $\sum_{n\geq 0} \frac{g_n}{n!} x^n = G(x) = e^x F(x) = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!} x^i \sum_{j\geq 0} \frac{f_j}{j!} x^j = \sum_{n\geq 0} h_n x^n$,

za $h_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \frac{f_{n-i}}{(n-i)!}$. Vidimo da je $\frac{g_n}{n!} = h_n$, tj.

$$g_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!(n-i)!} f_{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f_{n-i} = (\text{simetrija}) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f_i$$

Matrično zapisano, vidimo da je $\begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$.

Analogno bi se iz $F(x) = e^{-x} \cdot G(x)$ dobilo $f_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} g_i$

Ako označimo $B = [b_{ij}]_{i,j=0}^n$, $b_{ij} = (-1)^{i-j} \binom{i}{j} = (-1)^{i+j} \binom{i}{j}$,

drugu vezu možemo zapisati kao $\begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$.

Vidimo da je $B = A^{-1}$.

5. Na konferenciji je sudjelovao određen broj matematičara od kojih su se neki međusobno rukovali. Dokažite da je broj matematičara koji su se rukovali neparno mnogo puta paran.

Rj.: Neka su $M_1, \ldots, M_n$ matematičari, a R relacija rukovanja: $R = \{(M_i, M_j) \mid M_i \text{ se rukovao sa } M_j\}$. Relacija je simetrična (tj. $(M_i, M_j) \in R \Rightarrow (M_j, M_i) \in R$), pa je njezin broj elemenata paran, $|R| = 2r$. Označimo sa x_i broj matematičara s kojima se rukovao M_i. Tada je $\sum_{i=1}^{n} x_i = |R| = 2r$.

Nadalje, označimo $P = \{i \in \{1, .., n\} \mid x_i \text{ je paran}\}$ i $N = \{i \in \{1, .., n\} \mid x_i \text{ je neparan}\}$. Vrijedi: $\sum_{i \in P} x_i + \sum_{j \in N} x_j = 2r$

$\Rightarrow \sum_{j \in N} x_j = 2r - \sum_{i \in P} x_i =$ paran broj. Suma neparnih brojeva je parna ako i samo ako ih ima parno mnogo.

Dakle, $|N|$ je paran, što je trebalo dokazati.