DIGITALNI SUSTAVI ZA OBRADU SIGNALA

DSOS13

Julije Ožegović
FESB Split

DIGITALNI SUSTAVI ZA OBRADU SIGNALA

- UVOD: ANALOGNI I DIGITALNI SUSTAVI
- I. OSNOVE DIGITALNE OBRADE SIGNALA
- II. DIGITALNI FILTRI U VREMENSKOM I FREKVENCIJSKOM PODRUČJU
- III. STRUKTURA DIGITALNIH SUSTAVA ZA OBRADU SIGNALA
- IV. DIGITALNA OBRADA SIGNALA U PRIMJENI

I. OSNOVE DIGITALNE OBRADE SIGNALA

1. DIGITALNA OBRADA SIGNALA
2. SUSTAVI ZA DIGITALNU OBRADU SIGNALA
3. ANALIZA U VREMENSKOM PODRUČJU
4. DIGITALNA KONVOLUCIJA
5. ANALIZA U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU
6. TRANSFORMACIJA APERIODIČKIH DIGITALNIH SEKVENCI
7. Z TRANSFORMACIJA

5. ANALIZA U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU

- 5.1. OSNOVE FREKVENCIJSKE ANALIZE
- 5.2. DISKRETNI FOURIEROV NIZ
- 5.3. SVOJSTVA I ENERGIJA SPEKTRA
- 5.4. SVOJSTVA DISKRETNOG FOURIEROVOG NIZA

5.1. OSNOVE FREKVENCIJSKE ANALIZE

- POVIJESNI RAZVOJ
- SVOJSTVA FREKVENCIJSKE ANALIZE
- PRIMJENA FREKVENCIJSKE ANALIZE

- POVIJEST FREKVENCIJSKE ANALIZE

- Frekvencijska analiza započinje radovima Fouriera:
  - Baron de Fourier, bavi se protokom topline
  - dokazuje da se svaki signal može prikazati sumom sinusoidalnih signala
    - periodični signali **linijskim spektrom**, sumom sinusoida u harmonijskom odnosu (harmonijski = signal s višekratnikom osnovne frekvencije)
    - aperiodički signali **kontinuiranim spektrom**
  - Našao je rješenje u kontinuiranom području
  - Značajno zbog široke promjene na tehničke probleme

POVIJEST FREKVENCIJSKE ANALIZE

- Fourierova analiza u diskretnim sustavima
  - prilagođena diskretnom signalu
    (koji je suma impulsa pomaknutih za period uzorkovanja)
  - masovno se koristi u digitalnim računalima
    - prikazuje se spektar signala i
    - frekvencijsko ponašanje sustava
  - konvolucija
    - je snažno sredstvo analize u vremenskom području
    - zašto bi se bavili frekvencijskim područjem?

POVIJEST FREKVENCIJSKE ANALIZE

- Razlozi rada u frekvencijskom području
  - sinusoidalni signali se pojavljuju u prirodi
  - odziv LTI je jednostavan:
    - mijenja samo amplitudu i fazu
    - ne može mijenjati frekvenciju
  - Signal predstavljamo spektrom
  - LTI predstavljamo frekvencijskom karakteristikom
    - komponente množimo s pojačanjem odziva, pa ih superponiramo
  - Dizajn LTI započinjemo specifikacijom u frekvencijskom području

- SVOJSTVA FREKVENCIJSKE ANALIZE

- Za primjenu na signale i sustave bitno je:
  - signal se može prikazati odnosno sintetizirati
    - od sinusnih i kosinusnih komponenti
    - prikladne frekvencije, faze i amplitude
    - parne funkcije sadrže samo kosinuse
    - neparne funkcije sadrže samo sinuse
  - Aproksimacija konačnim brojem komponenti daje najbolji prikaz u smislu najmanjih kvadrata

SVOJSTVA FREKVENCIJSKE ANALIZE

- Za signale:
  - Za periodičke signale:
    - imamo harmonijske komponente i linijski spektar
    - matematički to je **Fourierov niz**
    - možemo zapisati u eksponencijalnom obliku
  - Za neperiodičke signale:
    - beskonačnu sumu (integral) i kontinuirani spektar
    - komponente nisu u harmonijskom odnosu
    - matematički to je **Fourierova transformacija**
  - Inverzna Fourierova transformacija
    - rekonstruira vremenski signal

- PRIMJENA FREKVENCIJSKE ANALIZE

- Postoje Furierove tehnike za diskretni signal:
  - diskretni Fourierov niz
    - primjenjuje se na periodičke signale
  - Fourierova transformacija u diskretnom vremenu
    - primjenjuje se na neperiodičke signale
  - Diskretna Fourierova transformacija (DFT)
    - ima ključni značaj, za signal pretpostavljamo da je periodičan!
  - Brza Fourierova transformacija (FFT)
    - je optimalni način izvođenja DFT

5.2. DISKRETNI FOURIEROV NIZ

- DEFINICIJA FOURIEROVOG NIZA
- BROJ STUPNJEVA SLOBODE SIGNALA
- PROŠIRENJE OSNOVNOG SPEKTRA
- PRIKAZ AMPLITUDOM I FAZOM

- DEFINICIJA FOURIEROVOG NIZA

- Periodički signal prikazujemo Fourierovim nizom:
  - koeficijenti a_k linijskog spektra prikazuju amplitudu svake komponente k-struke frekvencije

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)$$

  - N je broj uzoraka u periodu signala

- DEFINICIJA FOURIEROVOG NIZA

- Računanje Fourierovog niza:
  - U stvarnosti računamo:

$$A \cdot \exp(-j\Omega n) = A \cdot \cos(\Omega n) - jA \cdot \sin(\Omega n)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \{\cos(2\pi kn/N) - j \cdot \sin(2\pi kn/N)\}$$

  - imamo realni i imaginarni dio:

$$a_k = \Re(a_k) + j \cdot \Im(a_k)$$

- DEFINICIJA FOURIEROVOG NIZA

- Frekvencija uzoraka:
  - Izračunajmo a_k za k=1,2,...:

$$a_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left\{\cos\left(2\pi\frac{1}{N}n\right) - j\cdot\sin\left(2\pi\frac{1}{N}n\right)\right\}$$

$$a_2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left\{\cos\left(2\pi\frac{2}{N}n\right) - j\cdot\sin\left(2\pi\frac{2}{N}n\right)\right\}$$

$$a_3 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left\{\cos\left(2\pi\frac{3}{N}n\right) - j\cdot\sin\left(2\pi\frac{3}{N}n\right)\right\}$$

  - a_1 je komponenta frekvencije $2\pi/N$, dakle N uzoraka
  - a_2 je komponenta frekvencije $4\pi/N$, dakle N/2 uzoraka
  - a_3 je komponenta frekvencije $6\pi/N$, dakle N/3 uzoraka

- DEFINICIJA FOURIEROVOG NIZA

- Rekonstrukcija vremenskog signala:
  - Rekonstruiramo vremenski signal jednadžbom sinteze:

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right)$$

  - U stvarnosti računamo: $A\cdot\exp(j\Omega n)=A\cdot\cos(\Omega n)+jA\cdot\sin(\Omega n)$

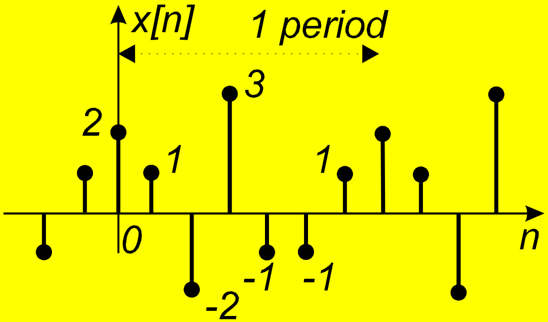
$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} a_k \{\cos(2\pi kn/N)+j\cdot\sin(2\pi kn/N)\}$$

  - imaginarne komponente se ponište

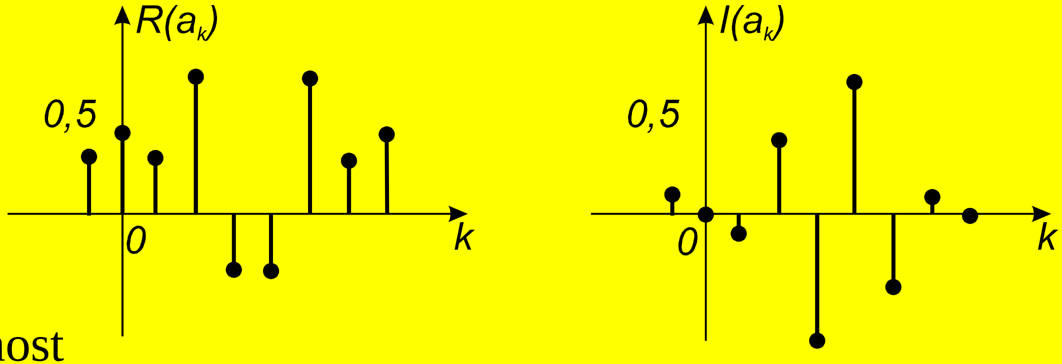
PRIMJER FOURIEROVOG NIZA

- Signal sa N=7:
  - transformiramo:

$$a_k = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6} x[n]\exp\left(\frac{-j2\pi kn}{7}\right)$$



  - dobijemo:



  - uočavamo:
    - zrcalnost
    - parnost/neparnost

PRIMJER FOURIEROVOG NIZA

- Signal sa N=7:
  - program 7 daje:

PROGRAM 7: Discrete Fourier Series
for real signal with 7 sample values

0	0.428571,	0.000000
1	0.301801,	-0.108658
2	0.786407,	0.384777
3	-0.302493,	-0.668791
4	-0.302492,	0.668793
5	0.786405,	-0.384778
6	0.301801,	0.108658

BROJ STUPNJEVA SLOBODE SIGNALA

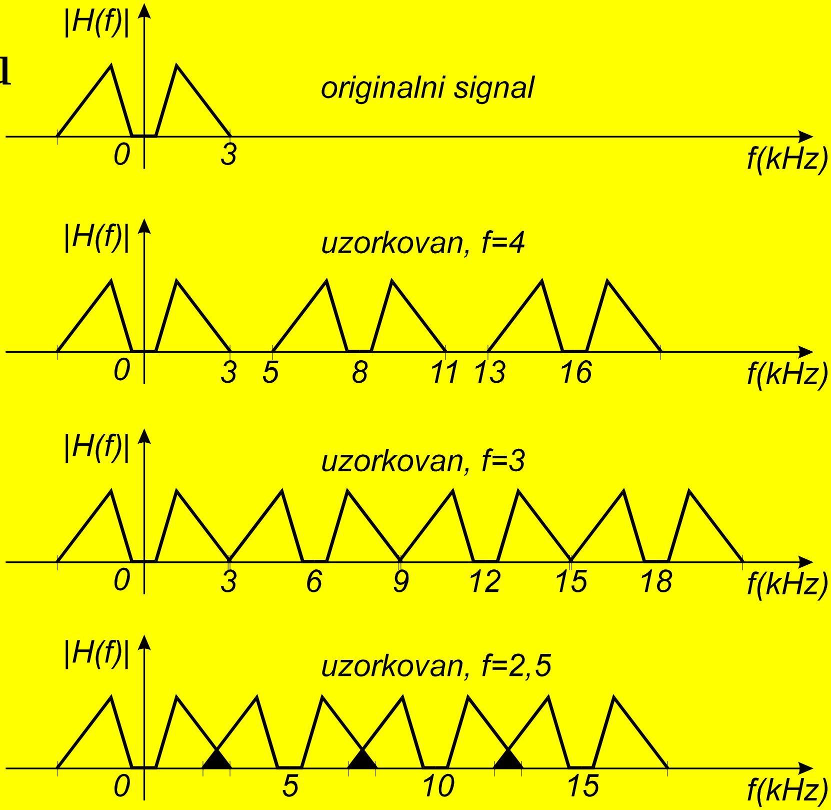
- Broj komponenti u spektru:
  - izračunali smo po N komponenti u realnom i imaginarnom dijelu spektra
  - ukupno imamo N vrijednost:
    - istosmjernu komponentu a_0
    - tri realne komponente koje se parno zrcale
    - tri imaginarne komponente koje se neparno zrcale
  - broj uzoraka signala jednak je broju vrijednosti u spektru
  - to je logično jer svaka komponenta se zasebno mijenja
  - broj komponenti nazivamo **broj stupnjeva slobode**

PROŠIRENJE OSNOVNOG SPEKTRA

- Nastavljamo računati komponente:
  - spektar je periodičan sa periodom N
    $$a_k = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6} x[n]\exp\left(\frac{-j2\pi kn}{7}\right)$$
  - to je posljedica digitalnog signala
    - niz uzoraka predstavlja osnovni signal
    - istovremeno se kroz uzorke može provući beskonačan broj harmonijskih signala
    - stoga je spektar zapravo beskonačan, koristimo osnovni signal
  - spektar se proteže u pozitivnu i negativnu beskonačnost
  - potvrda potrebe za anti aliasing filtrima!

PROŠIRENJE OSNOVNOG SPEKTRA

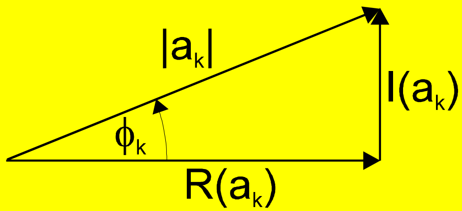
- SPEKTAR SE PONAVLJA
  - za prenisku frekvenciju dolazi do prekrivanja
  - aliasing
  - potrebno analogno filtriranje
  - anti-aliasing filtar



PRIKAZ AMPLITUDOM I FAZOM

- Kompleksni parovi predstavljaju vektore:
  - amplituda:

$$|a_k| = \left\{ \Re(a_k)^2 + \Im(a_k)^2 \right\}^{1/2}$$



  - fazni kut:

$$\phi_k = \arctan\left\{ \Im(a_k) / \Re(a_k) \right\}$$

  - često su nam bitne samo amplitude

5.3. SVOJSTVA I ENERGIJA SPEKTRA

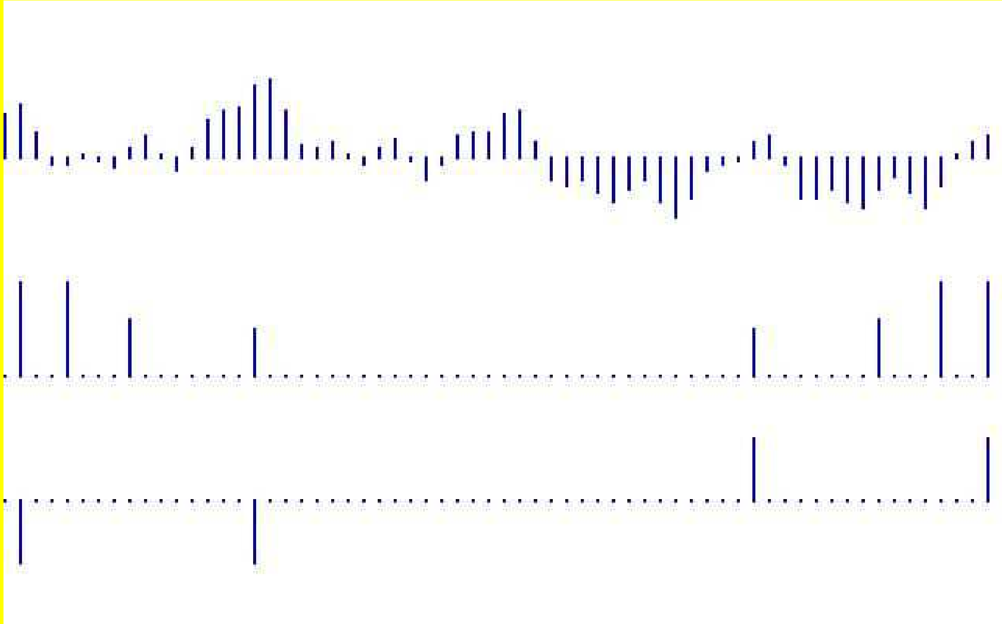
- ODNOS FREKVENCIJA SIGNALA I UZORKOVANJA
- SPEKTAR JEDINIČNOG IMPULSA
- SPEKTAR POMAKNUTOG JEDINIČNOG IMPULSA
- PARSEVALOV TEOREM

- ODNOS FREKVENCIJA SIGNALA I UZORKOVANJA

- Program 8, N=64:

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{64}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{16}\right) + 0.6\cos\left(\frac{2\pi n}{8}\right) + 0.5\sin\left(\frac{2\pi n}{4}\right); 0 \le n \le 63$$

  - signal je opisan sa svoje 4 harmonijske komponente 1/64, 4/64, 8/64 i 16/64
  - donji graf prikazuje faze

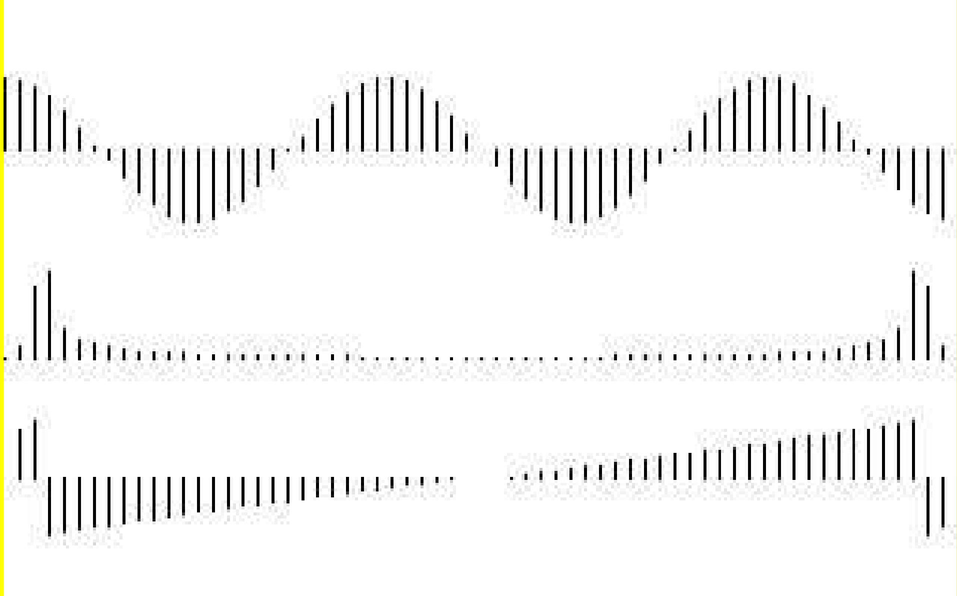


- ODNOS FREKVENCIJA SIGNALA I UZORKOVANJA

- Program 8b:

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi \cdot 2{,}5}{64} n\right) \quad ; \quad 0 \le n \le 63$$

  - komponenta nije višekratnik osnovne frekvencije
  - umjesto jedne imamo čitav niz oko 2,5



- SPEKTAR JEDINIČNOG IMPULSA

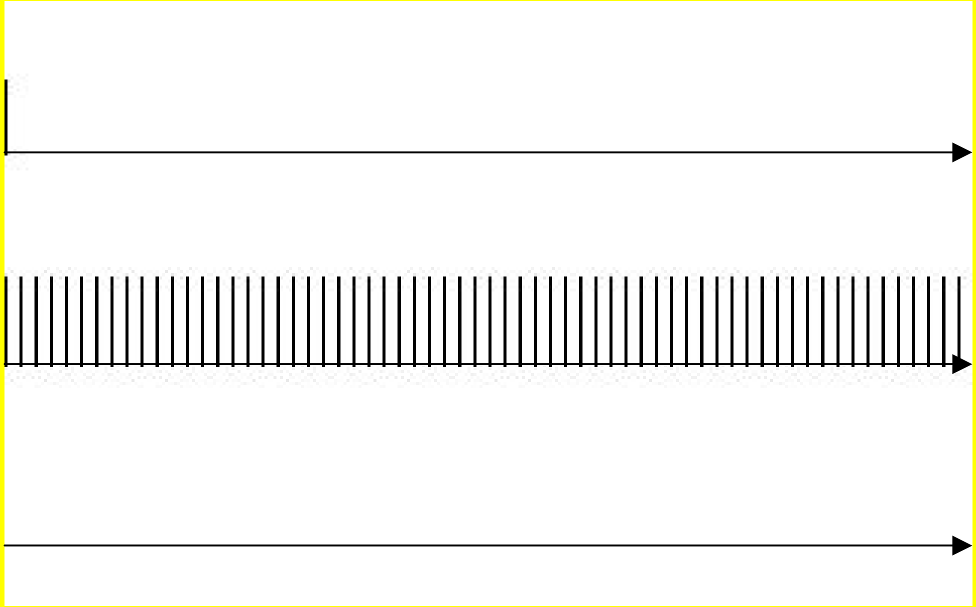
- Jedinični impuls:

$$x[n] = \delta[n] \quad ; \quad 0 \le n \le 63$$

  – spektar je konstantan = bijeli šum

  – daje sve frekvencije = idealan za testiranje

  – fazni spektar je 0 (nula)



- SPEKTAR JEDINIČNOG IMPULSA

- Jedinični impuls algebarski:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right) \qquad x[n] = \delta[n] \;\; ; \;\; 0 \le n \le 63$$

  – slijedi: $$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]\exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{N}\exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)\bigg|_{n=0} = \frac{1}{N}\exp(0) = \frac{1}{N}$$

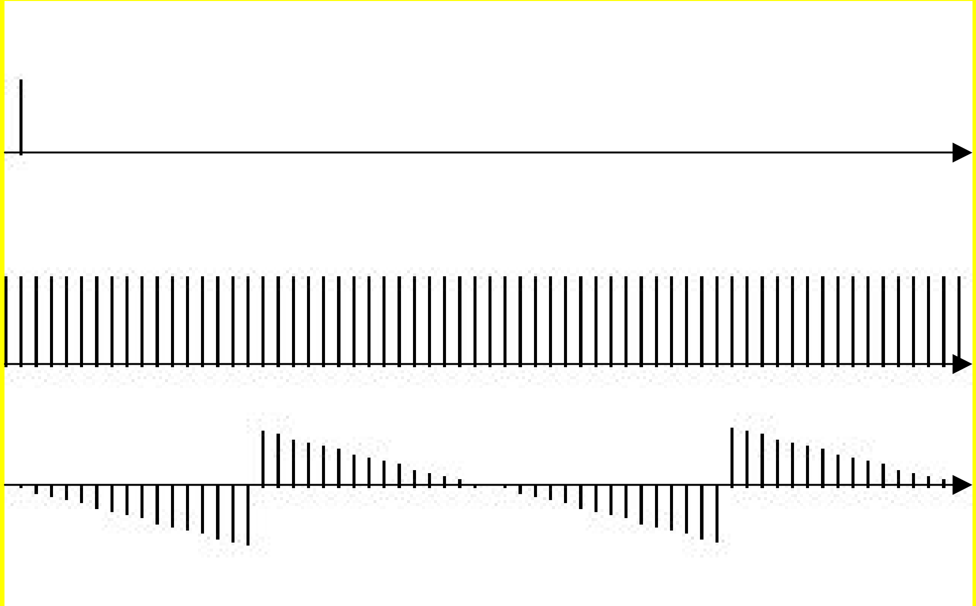
$$\Re(a_k) = \frac{1}{N} \;\; ; \;\; \Im(a_k) = 0 \Rightarrow |a_k| = \frac{1}{N} \;\; ; \;\; \phi_k = \arctan(0) = 0$$

- SPEKTAR POMAKNUTOG JEDINIČNOG IMPULSA

- Pomaknuti jedinični impuls:

$$x[n] = \delta[n-1] \quad ; \quad 0 \le n \le 63$$

  - spektar je ponovo konstantan = bijeli šum
  - fazni spektar je **linearan**



- PARSEVALOV TEOREM

- Teorem očuvanja energije:
  - energija je ista u vremenskom i frekvencijskom području
  - za realni periodični digitalni signal vrijedi:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\{x[n]\}^2=\sum_{n=0}^{N-1}\left|a_k\right|^2$$

  - lijeva strana prikazuje:
    - srednju vrijednost energije jedne komponente,
    - izračunatu kroz jedan period vremenskog signala
  - desna strana prikazuje:
    - spektralnu energiju signala,
    - izračunatu kroz jednu instancu spektra

- PARSEVALOV TEOREM

- Za jedinični impuls izračunamo:
  - u vremenskom području:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\{\delta[n]\}^2 = \frac{1}{N}\cdot(1) = \frac{1}{N}$$

  - u frekvencijskom području :

$$\sum_{n=0}^{N-1}|a_k|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{1}{N}\right|^2 = N\left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N}$$

5.4. SVOJSTVA DISKRETNOG FOURIEROVOG NIZA

- LINEARNOST
- VREMENSKI POMAK
- DIFERENCIJA I INTEGRACIJA
- KONVOLUCIJA I MODULACIJA

- LINEARNOST DFN

- Svojstvo linearnosti definiramo:
  - spektar sume dvaju signala
    jednak je sumi njihovih spektara
  - ako vrijedi:

$$x_1[n] \leftrightarrow a_k \quad \mathrm{i} \quad x_2[n] \leftrightarrow b_k$$

  - tada je:

$$A \cdot x_1[n] + B \cdot x_2[n] \;\leftrightarrow\; A \cdot a_k + B \cdot b_k$$

  - kod sume spektara voditi računa o amplitudi i fazi!

- VREMENSKI POMAK DFN

- Vremenski pomak definiramo:
  - ako vrijedi:

$$x[n] \leftrightarrow a_k$$

  - tada je:

$$x[n-n_0] \leftrightarrow a_k \cdot \exp(-j2\pi k n_0 / N)$$

  - za n_0=N vrijedi:

$$x[n-N] \leftrightarrow a_k \cdot \exp(-j2\pi kN/N) = a_k$$

  - odnosno spektar je nepromijenjen
    za kašnjenje punog perioda, odnosno višekratnika n_0=mN

- DIFERENCIJA DFN

- Diferenciju definiramo:
  - ako vrijedi:

$$x[n] \leftrightarrow a_k$$

  - tada je:

$$x[n] - x[n-1] \;\leftrightarrow\; a_k \cdot \{1 - \exp(-j2\pi k/N)\}$$

  - kao neposredna primjena svojstva linearnosti i vremenskog pomaka

- INTEGRACIJA DFN

- Integraciju definiramo:
  - ako vrijedi $a_0=0$ i:

$$x[n] \leftrightarrow a_k$$

  - tada je:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \;\leftrightarrow\; a_k \cdot \{1-\exp(-j2\pi k/N)\}^{-1}$$

  - i predstavlja pomičnu sumu koja je periodična ako je istosmjerna komponenta $a_0=0$,
  - u suprotnom gornja definicija ne vrijedi

- KONVOLUCIJA DFN

- Integraciju definiramo:
  - ako su signali x_1 i x_2 istog perioda i:

$$x_1[n] \leftrightarrow a_k \quad i \quad x_2[n] \leftrightarrow b_k$$

  - tada je:

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[n-m] \leftrightarrow N \cdot a_k \cdot b_k$$

  - ili: konvolucija u vremenskom području jednaka je množenju u frekvencijskom području
  - radi se o konvoluciji unutar jednog perioda koja se još zove cirkularna konvolucija $\circledast$

- MODULACIJA DFN

- Modulaciju definiramo:
  - ako su signali x_1 i x_2 istog perioda i:

$$x_1[n] \leftrightarrow a_k \quad \text{i} \quad x_2[n] \leftrightarrow b_k$$

  - tada je:

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \sum_{m=0}^{N-1} a_m \cdot b_{k-m}$$

  - ili: modulacija u vremenskom području jednaka je konvoluciji u frekvencijskom području

6. TRANSFORMACIJA APERIODIČKIH DIGITALNIH SEKVENCI

- 6.1. TRANSFORMACIJA APERIODIČKIH SEKVENCI
- 6.2. INVERZNA TRANSFORMACIJA APERIODIČKIH SEKVENCI
- 6.3. TRANSFORMACIJA JEDINIČNOG IMPULSA I SVOJSTVA
- 6.4. FREKVENCIJSKI ODZIV LTI SUSTAVA
- 6.5. JEDNADŽBA DIFERENCIJA i FREKVENCIJSKI ODZIV, SVOJSTVA

6.1. TRANSFORMACIJA APERIODIČKIH SEKVENCI

- MOTIVACIJA
- PRISTUP TRANSFORMACIJI APERIODIČKIH SEKVENCI
- DEFINICIJA TRANSFORMACIJE APERIODIČKIH SEKVENCI

- MOTIVACIJA

- Aperiodičke sekvence
  - mnogi praktični signali u prirodi su aperiodički
  - znači da se ne ponavljaju striktno, npr. dnevne promjene temperature
  - da bi signal nosio informaciju, ne smije biti unaprijed poznat
  - u analognim sustavima koristimo Fourierovu transformaciju
  - Fourierovu transformaciju za digitalne nizove ovdje izvodimo digitalno!

- PRISTUP TRANSFORMACIJE APS

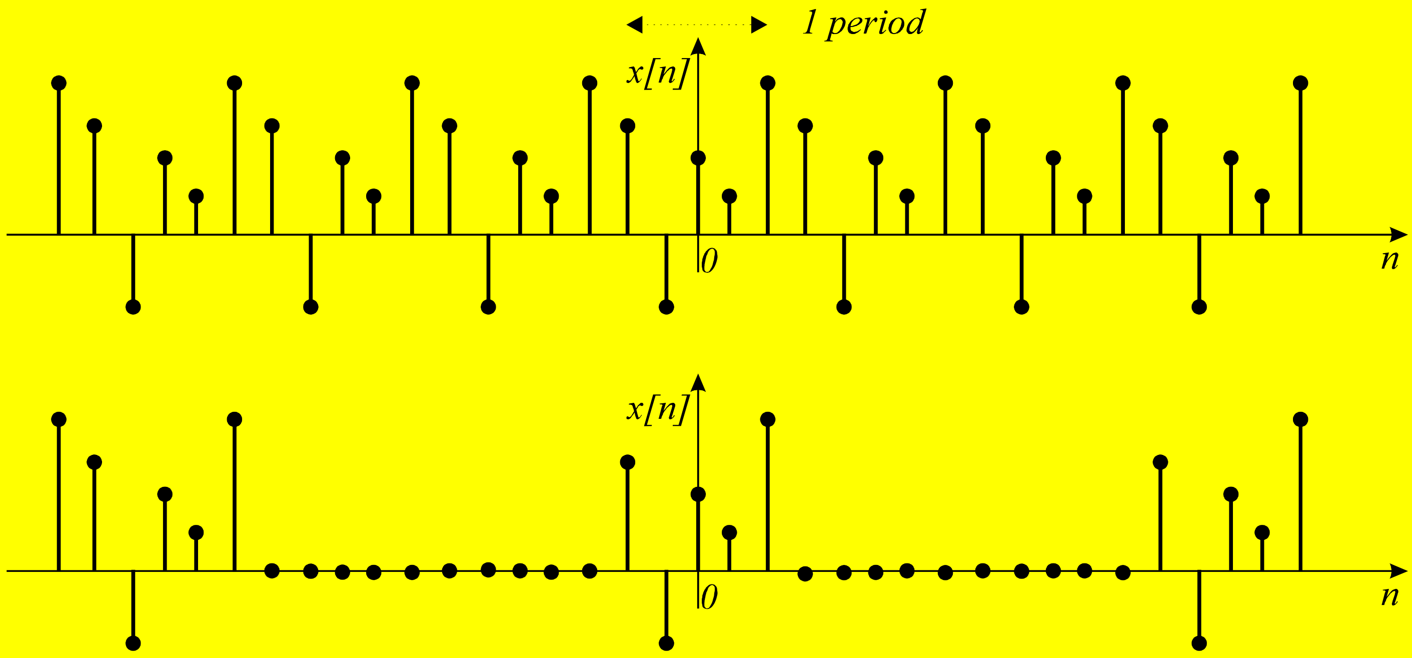
- Transformacija aperiodičkih sekvenci:
  - počinjemo s Fourierovim nizom:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)$$

  - njega primjenjujemo na jedan period striktno periodičkog signala, u trajanju N uzoraka
  - sada pokušajmo razmicati uzastopne periode, a razmak popunjavati nulama
  - na kraju su susjedni periodi beskonačno udaljeni
  - posljedično $N \rightarrow \propto$

PRISTUP TRANSFORMACIJE APS

- Transformacija signala razmicanjem perioda:



- DEFINICIJA TRANSFORMACIJE APS

- $N \rightarrow \propto$:
  - koeficijenti a_k postaju beskonačno gusti zbog

$$\exp\left(\frac{-j2\pi kn}{\infty}\right)$$

  - i teže nuli - nestaju zbog $1/N = 1/\propto$
  - međutim, produkt $N \cdot a_k$ ostaje konačan, označimo ga sa $X_k = N \cdot a_k$
  - također označimo $\Omega = 2\pi k/N$, kontinuirana varijabla "frekvencije" jer k ide do $\propto$
  - stoga možemo pisati $X_k = X(\Omega)$

DEFINICIJA TRANSFORMACIJE APS

- Dobijemo jednadžbu transformacije APS :
  - granice sumacije možemo proširiti na $\pm\infty$ jer smo razmakli susjedne periode u beskonačnost:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\exp(-j\Omega n)$$

  - ispitujemo korelaciju niza diskretnih uzoraka s vrijednostima komponente spektra frekvencije Ω
  - Ω je kontinuiran, pa je spektar **kontinuiran**

6.2. INVERZNA TRANSFORMACIJA APERIODIČKIH SEKVENCI

- PRISTUP INVERZNOJ TRANSFORMACIJI APERIODIČKIH SEKVENCI
- DEFINICIJA INVERZNE TRANSFORMACIJE APERIODIČKIH SEKVENCI

- PRISTUP INVERZNOJ TRANSFORMACIJI APS

- Koristimo slične argumente:
  - polazimo od jednadžbe sinteze:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right)$$

  - definiramo osnovnu frekvenciju (osnovni harmonik)

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad ; \quad \Omega = k \cdot \Omega_0$$

  - odnosno

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{N}$$

- DEFINICIJA INVERZNE TRANSFORMACIJE APS

- Definiramo:
  - kako je:

$$X(\Omega) = N \cdot a_k \Rightarrow a_k = \frac{X(k\Omega_0)}{N}$$

  - dobijemo:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{X(k\Omega_0)}{N} \right\} \exp(jk\Omega_0 n)$$

  - odnosno

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) \cdot \exp(jk\Omega_0 n) \cdot \Omega_0$$

- DEFINICIJA INVERZNE TRANSFORMACIJE APS

- Sada $N \to \infty$:
  - osnovna frekvencija $\Omega_0 \to 0$, postaje $d\Omega$
  - frekvencija $k\Omega_0$ postaje Ω
  - sumacija postaje integriranje
  - spektar je periodičan, pa integriramo unutar jednog perioda spektra (simbolički označimo sa 2π)

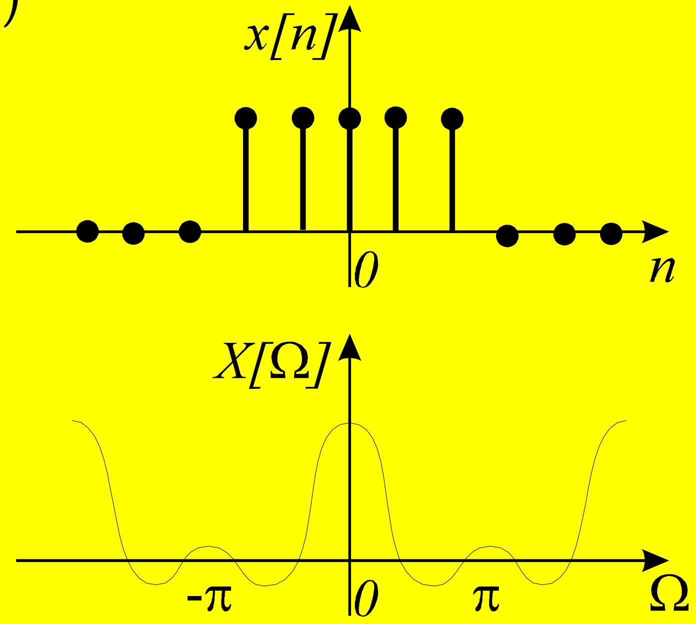
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) \cdot \exp(j\Omega n) \cdot d\Omega$$

  - dobijemo Fourierove parove, koje možemo koristiti

- TRANSFORMACIJA APS PRIMJER

- Za signal sa 5 članova imamo:

$$X(\Omega) = 0{,}2(1 + 2\cos\Omega + 2\cos 2\Omega)$$



6.3. TRANSFORMACIJA JEDINIČNOG IMPULSA I SVOJSTVA

- SPEKTAR JEDINIČNOG I POMAKNUTOG JEDINIČNOG IMPULSA
- SVOJSTVA TRANSFORMACIJE APERIODIČKIH SEKVENCI

- SPEKTAR JEDINIČNOG I POMAKNUTOG IMPULSA

- Računamo:
  - uvrstimo $x[n] = \delta[n]$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\exp(-j\Omega n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\exp(-j\Omega n)$$

  - pa slijedi:

$$X(\Omega) = \exp(-j\Omega n)\Big|_{n=0} = 1$$

  - kao i kod Fourierovog niza, imamo sve frekvencije, ali sada kontinuirano!

- SPEKTAR JEDINIČNOG I POMAKNUTOG IMPULSA

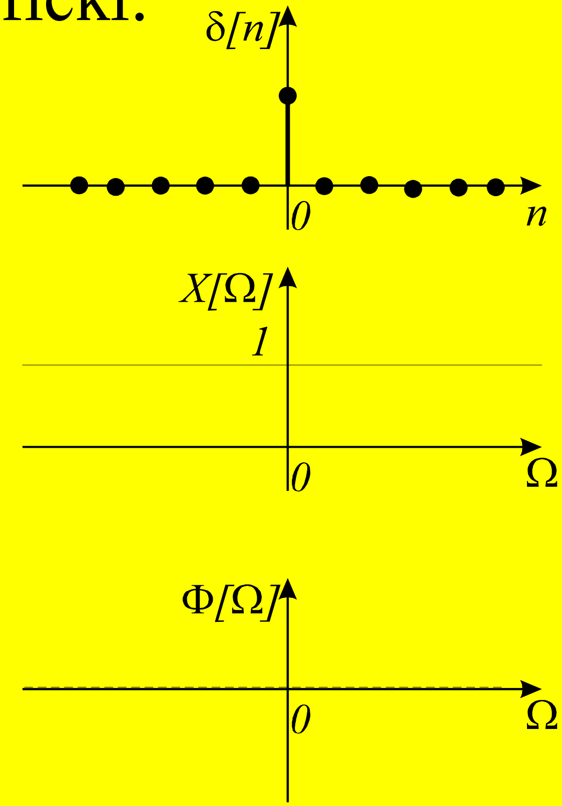
- Za pomaknuti impuls računamo:
  - uvrstimo $x[n] = \delta[n]$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1] \exp(-j\Omega n) = \exp(-j\Omega n)\Big|_{n=1} = \exp(-j\Omega)$$

  - pa slijedi: $|X(\Omega)| = |\exp(-j\Omega)| = 1$
  - ali faza više nije 0!

- SPEKTAR JEDINIČNOG I POMAKNUTOG IMPULSA

- Grafički:



- SVOJSTVA TRANSFORMACIJE APS

- Vrijede ista svojstva kao kod Fourierovog niza:
  - Ako: $x_1[n] \leftrightarrow X_1(\Omega)$ i $x_2[n] \leftrightarrow X_2(\Omega)$
  - **Linearnost**:

$$A \cdot x_1[n] + B \cdot x_2[n] \leftrightarrow A \cdot X_1(\Omega) + B \cdot X_2(\Omega)$$

  - **Vremenski pomak**:

$$x[n - n_0] \leftrightarrow X(\Omega) \cdot \exp(-j\Omega n_0)$$

  - **Konvolucija**:

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(\Omega) \cdot X_2(\Omega)$$

6.4. FREKVENCIJSKI ODZIV LTI SUSTAVA

- ODNOS VELIČINA U VREMENSKOM I FREKVENCIJSKOM PODRUČJU
- RAČUNANJE ODZIVA
- ODZIV NA JEDINIČNI IMPULS

- ODNOS VELIČINA

- Opis LTI sustava
  - Transformacija APS ima drugu korisnu primjenu - opisuje ponašanje LTI u frekvencijskom području
  - osnovni odnosi veličina:

vremenski:	$x[n]$	$h[n]$	$y[n]=x[n]*h[n]$
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
frekvencijski:	$X[\Omega]$	$H[\Omega]$	$Y[\Omega]=X[\Omega]H[\Omega]$

- RAČUNANJE ODZIVA

- Množenje vektora
  - Koristimo svojstvo da je konvolucija u vremenskom ekvivalentna množenju u frekvencijskom području
  - Računamo:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| \cdot \exp(j\Phi_X(\Omega))$$

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| \cdot \exp(j\Phi_H(\Omega))$$

  - pa je:

$$X(\Omega) \cdot H(\Omega) = |X(\Omega)| \cdot |H(\Omega)| \cdot \exp(j\{\Phi_X(\Omega) + \Phi_H(\Omega)\})$$

  - pomnožimo veličine, a zbrojimo fazne kutove!

- ODZIV NA JEDINIČNI IMPULS

- Koristimo spektar jediničnog impulsa

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

  – Računamo:

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega) = 1 \cdot H(\Omega) = H(\Omega)$$

  – zaključujemo da je i ovdje iskorišten jedinični spektar i svojstvo testiranja sustava jediničnim impulsom

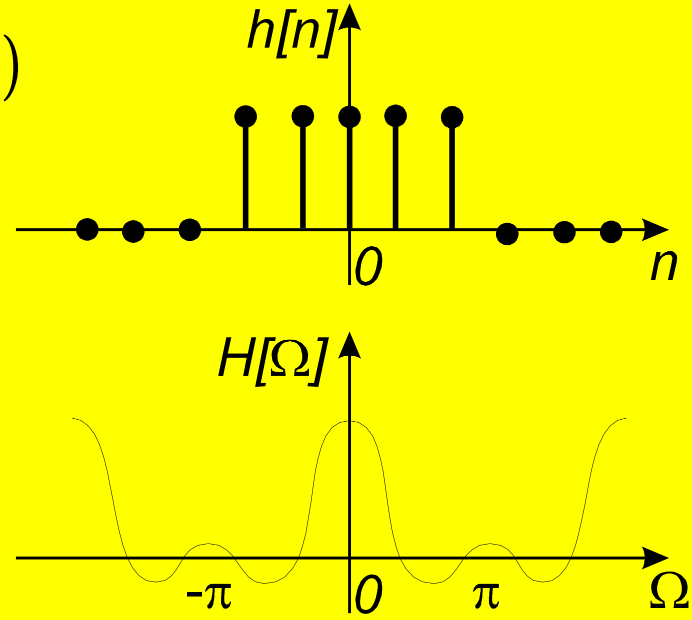
  – kao što impulsni odziv h[n] potpuno opisuje LTI, tako je LTI potpuno opisan frekvencijskim odzivom H[Ω]

- PRIMJER FREKVENCIJSKOG ODZIVA

- Za odziv od 5 impulsa:
  - dobijemo isto kao i za signal!

$$X(\Omega) = 0{,}2(1 + 2\cos\Omega + 2\cos 2\Omega)$$

  - to je niskopropusni filtar



6.5. JEDNADŽBA DIFERENCIJA I FREKVENCIJSKI ODZIV, SVOJSTVA

- TRANSFORMACIJA SUME ČLANOVA
- PRIJENOSNA FUNKCIJA

- TRANSFORMACIJA SUME ČLANOVA

- Polazimo od jednadžbe diferencija

$$\sum_{k=0}^{P} c_k \cdot y[n-k] = \sum_{k=0}^{Q} d_k \cdot x[n-k]$$

  - to su sume pomaknutih impulsa, transformiramo

$$\sum_{k=0}^{P} c_k \cdot \exp(-jk\Omega) \cdot Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{Q} d_k \cdot \exp(-jk\Omega) \cdot X(\Omega)$$

- PRIJENOSNA FUNKCIJA

- Izračunamo prijenosnu funkciju
  - izlučimo X[Ω] i Y[Ω] jer ne ovise o k:

$$Y(\Omega)\cdot\sum_{k=0}^{P} c_k\cdot\exp(-jk\Omega) = X(\Omega)\cdot\sum_{k=0}^{Q} d_k\cdot\exp(-jk\Omega)$$

  - izračunamo H[Ω]:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{Q} d_k\cdot\exp(-jk\Omega)}{\sum_{k=0}^{P} c_k\cdot\exp(-jk\Omega)}$$

- PRIJENOSNA FUNKCIJA PRIMJER

- Filtar propusnik opsega

$$y[n]=1{,}5\cdot y[n-1]-0{,}85\cdot y[n-2]+x[n]$$

  - Program 9:

$$H(\Omega)=\frac{1}{1-1{,}5\exp(-j\Omega)+0{,}85\exp(-j2\Omega)}=\frac{1}{(1-1{,}5\cos\Omega+0{,}85\cos 2\Omega)+j(1{,}5\sin\Omega+0{,}85\sin 2\Omega)}$$