

Ime i prezime: _____ Dio: 1. 2. 3.
(zaokružite dio gradiva koji odgovarate)

1. dio				2. dio				3. dio			
1	2	3	Σ	1	2	3	Σ	1	2	3	Σ

1. dio

- (8 bodova) Procijenite apsolutnu i relativnu pogrešku pri izračunavanju vrijednosti funkcije $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x + 200$ ako je $x = 100 \pm 1$.
- (10 bodova) Preoblikujte sustav $Ax = b$ tako da se može riješiti Jacobijevom metodom, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 10 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nađite onu aproksimaciju rješenja sustava za koju je rezidual u normi $\|\cdot\|_\infty$ manji od $\varepsilon = 0.06$.

- (7 bodova) Što je norma? Definirajte vektorske norme (1-norma, 2-norma i ∞ -norma) i iz njih izvedene inducirane matrice norme. U kom smislu su navedene norme ekvivalentne? Kako je definirana Frobeniusova (Euklidska) matrice norma?

Rješenja:

$$1. \Delta f^* = 0.5 \cdot 10^{-4}, \delta f^* = 0.249 \cdot 10^{-6}$$

$$2. \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.095 \\ 0.0621875 \\ 0.08125 \end{bmatrix}$$

2. dio

- (9 bodova) Za funkciju $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ na intervalu $[-1, 1]$ nađite interpolacijski polinom stupnja 3 na ekvidistantnoj i Čebiševljevoj mreži. Izračunajte vrijednost oba polinoma u $x = 0.75$, te pripadne relativne pogreške.
- (9 bodova) Metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika $y(x) = a \ln x + b$ koja aproksimira sljedeći skup podataka:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.5	1.7	2.4	2.9	3.3

Koristite sustav normalnih jednadžbi. Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih pogrešaka S .

3. (**7 bodova**) Kako glasi standardna baza polinoma stupnja n ? Izvedite formule za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma. Koja se baza polinoma pri tome koristi i kako se izvrednjuju dobiveni polinomi?

Rješenja:

1. Ekvidistantna mreža: $P(x) = 0.038462 + 0.339366(x + 1) - 0.254525(x + 1)(x + \frac{1}{3})$;
 $P(0.75) = 0.149815$; $\frac{|P(0.75) - f(0.75)|}{|f(0.75)|} = 1.256590$

Čebiševljeva mreža: $P(x) = 0.038462 + 0.198938(x + 1) - 0.132625(x + 1)(x + \frac{1}{2})$; $P(0.75) = 0.096487$; $\frac{|P(0.75) - f(0.75)|}{|f(0.75)|} = 0.453336$

2. $y(x) = 1.736587 \ln x + 0.497221$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.497221	1.700931	2.405056	2.904641	3.292150

$$S = 0.000117$$

3. dio

1. (**8 bodova**) Newtonovom metodom s točnošću $0.5 \cdot 10^{-4}$ riješite jednadžbu

$$\sin x - 5x + \frac{1}{2} = 0.$$

2. (**8 bodova**) Primjenom generaliziranog trapeznog pravila izračunajte aproksimaciju integrala $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} e^x dx$ koristeći 7 čvorova i izračunajte pogrešku.

3. (**9 bodova**) Numerički riješite Cauchyjev problem

$$y'' - xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

metodom RK-2 na intervalu $[0, 1]$ s korakom $h = 0.5$.

Rješenja:

1. $x \approx x_3 = 0.124919$
 2. $I^* = 0.478623$, $|E_6| \leq 0.176185$
 3. $y(0.5) \approx 0.5$, $y(1) \approx 1$