8.1. DEFINIRANJE POJMOVA

Kod usmjerenog grafa, svaka veza povećava ulazni stupanj nekog čvora za jedan, te također izlazni stupanj tog istog ili nekog drugog čvora za jedan. Dakle, za usmjereni graf G=(V, E) vrijedi

$$\sum_{v\in V} ulazni\_stupanj(v) = \sum_{v\in V} izlazni\_stupanj(v) = |E|$$

Gdje je |E| kardinalni broj (broj elemenata u skupu E).

Kod neusmjerenog grafa, svaka veza doprinosi povećanju stupnja dva različita čvora pa slijedi

$$\sum_{v\in V} stupanj(v) = 2|E|$$

Duljina puta jednaka je broju veza na putu. Kažemo da je čvor **dohvatljiv** iz čvora **u** ako postoji put iz **u** prema **u'**. Put je **jednostavan** ako su svi čvorovi na putu različiti (osim eventualno prvog i zadnjeg).

Ciklus u usmjerenom grafu je put koji sadrži barem jednu vezu i za kojeg vrijedi $v_0 = v_k$. Ciklus je jednostavan ako su čvorovi $v_1, v_2, \ldots, v_k$ različiti. Petlju koja se zatvara sama u sebe smatramo jednostavnim ciklusom duljine 1. Graf koji nema niti jedan ciklus zovemo **neciklična**.

Često nas zanimaju dvije posebne klase ciklusa. Jedan je **Hamilton-ov** ciklus kod kojeg treba posjetiti svaki čvor u grafu točno jednom. **Euler-ov** ciklus je ciklus kod kojeg treba posjetiti svaku vezu u grafu točno jednom.

8.3. PRETRAŽIVANJE PO ŠIRINI (breadth-first search, BFS)

```
BFS(G,s)                      //definiramo algoritam BFS na grafu G i izvorišnom čvoru u s
    int distanca[1.....size(V)]   //distance čvora
    int boja[1.....size(V)]   //boje čvora
    čvor_prethodni[1......size(V)]  //prethodni pointer
    queue Q=empty                  //FIFO queue
    za svaki u iz V
        boja[u] = bijela
        distanca[u] = INF
        prethodni[u] = NULL
    boja[s] = siva    //definiranje izvora
    distanca[s] = 0

    enqueue(Q,s)  //stavi izvor u queue
    while(Q is nonempty)
        u=dequeue(Q) //u je slijedeci svor kojeg cemo posjetiti
        za svaki v iz Adj[u]
            if(boja[v] == bijela)  //ako susjed još nije otkriven
                boja[v] = siva
                distanca[v] = distanca[u] + 1
                prethodni[v] = u
                enqueue(Q,v)
        boja[u] = crna
```

Za ovaj algoritam ako uzmemo i vrijeme inicijalizacije slijedi da je vrijeme izvršavanja BFS jednako O(|V| + |E|). To je vrijeme koje je proporcionalno s veličinom prikaza grafa preko liste susjedstva.

8.4. NAJKRAĆI PUTOVI SVIH PAROVA (all-pairs shortest paths)

Vrijeme izvršavanja je $\Theta(|V|^4)$:

$$d_{ij}^{(m)} = \min_{1\le k\le |V|}\left(d_{ik}^{(m-1)} + w_{kj}\right)$$

```
Dist(int m, int i, int j)
    if(m==1) return W[i,j]  //slučaj jedne veze
    najbolji = INF
    for k = 1 to n do  //n je ukupan broj čvorova
        najbolji = min(najbolji, Dist(m-1, i, k) + w[k, j])
    return najbolji

NajkraciPut(int n, int W[1...n, 1...n])
    array D[1...n-1][1...n, 1...n]
    kopiraj W u D[1]  //inicijaliziranje D[1]
    for m = 2 to n-1 do  //računanje D[m] iz D[m-1]
        D[m] = ProduzeniPut(n, D[m-1], W)
    return D[n-1]

ProduzeniPut(int n, int d[1...n, 1...n], int W[1...n, 1...n])
    //kopiraj d u privremenu matricu
    matrix dd[1... .n, 1...n] = d[1... .n, 1....n]
    for i=1 to n do
        for j=1 to n do
            for k=1 to n do
                dd[i, j] = min(dd[i, j], d[i, k] + W[k, j])
    return dd //vrati matricu cijena
```

Floyd-Warshall algoritam

Vrijeme izvršavanja je $\Theta(|V|^3)$:

```
Floyd-Warshall(int n, int W[1...n,1...n])
    array d[1...n,1...n]
    for i=1 to n do
        for j=1 to n do
            d[i,j]=W[i,j]
            pred[i,j]=NULL
    for k=1 to n do
        for i = 1 to n do
            for j= 1 to n do
                if (d[i,k] + d[k,j]) < d[i,j])
                    d[i,j] = d[i,k] + d[k,j]
                    pred[i,j] = k
    return d

NajkraćiPut(i,j)
    if pred[i,j] = NULL
        ispisi(i,j)
    else
        NajkraćiPut(i,pred[i,j])
        NajkraćiPut(pred[i,j],j)
```

Najduža zajednička podsekvenca - LCS

Vrijeme izvršavanja je O(mn):

```
LCS(char x[1...m], char y[1..n])
    int c[0...m, 0...n]
    for i = 0 to m do
        c[i,0] = 0
        b[i,0] = 0
    for j = 0 to n do
        c[0,j] = 0
        b[0,j] = 0
    for i = 1 to m do
        for j = 1 to n do
            if (x[i] == y[j])
                c[i,j] = c[i-1, j-1] + 1
                b[i,j] = GOREiLIJEVO
            else if (c[i-1, j] >= c[i,j-1]
                c[i,j] = c[i-1, j]
                b[i,j] = GORE
            else
                c[i,j] = c[i, j-1]
                b[i,j] = LIJEVO
    return c[m,n]

IzvlačenjeLCS(char x[1..m], char y[1..n], int b[0…m, 0..n])
    LCS = prazan niz
    i = m        j = n
    while (i!= 0 && j != 0)
        switch b[i,j]
        case GOREiLIJEVO
            dodaj x[i] u LCS
            i-- j--  break
        case GORE
            i--  break
        case LIJEVO
            i--  break
    return LCS
```

Algoritam računa stupanj svakog čvora:

a) kada je graf dan u obliku matrice susjedstva

```
int Stupanj [1...|V|]           ; polje u koje spremamo stupnjeve čvorova
    for i = 1 to |V|            ; za svaki čvor zbraja sumu po retku
        suma = 0                ; suma se za svaki čvor inicijalizira na 0
        for j = 1 to |V|
            suma = suma + A[i,j] + A[j,i] -> za usmjeren graf za naći ukupni stupanj
        if (A[i,i]==1)
                suma=suma+1 -> dodamo samo za NEusmjeren graf
    stupanj[i] = suma           ; stupanj se sprema na odgovarajuće
mjesto u polju.
```

Vrijeme izvršavanja $O(|V|^2)$

b) kada je graf dan u obliku liste susjedstva

```
int Stupanj[1...|V|]
    for i = 1 to |V|
        Stupanj[i]=0            ; sve stupnjeve postavljamo na 0
    for i = 1 to |V|            ; idemo po čvorovima
        za svaki u iz Adj(i)    ; idemo po listi za svaki čvor
            Stupanj[i] = Stupanj[i]+1  ; za svakog susjeda nadodamo 1
            Stupanj[u]=Stupanj[u]+1 -> za usmjeren graf di triba naći ukupni stupanj

        if(čvor u == čvor i)    ; ako je petlja to dodaje 2
                Stupanj[i]=Stupanj[i]+1 -> za NEusmjeren graf
```

Vrijeme izvršavanja O(|V| + |E|)

Algoritam određuje dali je dani povezani neusmjereni graf dvodijelan.

```
Dvodijelan (G, s)               ; kao argument dobiva graf
int Pripadnost[1...size(V)]     ; za svaki element ispitamo kojoj grupi
queue Q                         ; kojoj grupi pripada
    for i = 1 to size(V)
        pripadnost[i] = 0       ; u početku inicijaliziramo na 0
pripadnost [s] = 1              ;idemo na pretraživanje po susjedima
enqueue (Q,s)                   ;S je početni čvor
while (Q is nonempty)           ; dok ima čvorova za obradit
    u = dequeue (Q)
    za svaki v iz Adj(u)                ; hajde po svim susjedima
        if (pripadnost[v] == 0)         ; nije obrađen
            if (pripadnost(u) == 1)
                pripadnost(v) = 2       ; jedna grupa 1 druga 2
            else
                pripadnost (v) = 1      ; ako je od u 2
            enqueue (Q,V)
        if (pripadnost(v) == pripadnost (u))    ; iz u ide u v
            print „Nije dvodjelan"              ; veza, pa bi
                trebali pripadati različitim skupovima
                return
print „Dvodijelan je"
```

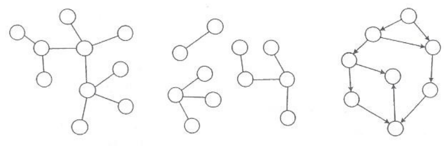
Neka je dano stablo G=(V, E)

a) Ako dodamo vezu u G tada novi graf sadrži ciklus.
Graf je povezan ako se svaki čvor može doseći iz svakog drugog čvora. Neciklični povezan graf - stablo

Budući da višestruke veze nisu dozvoljene možemo povezati samo one čvorove koji već nisu povezani (isprekidano na slici), a time dobivamo ciklus od najmanje tri člana.

b) Ako izbrišemo vezu u G, tada nam graf nije povezan.
Kod stabla svaki čvor je povezan sa najmanje jednim čvorom. Dakle, ako izbrišemo tu vezu onda to više nije stablo.

c) Postoji točno jedan jednostavan put između svaka dva čvora u G.
Mora postojati barem jedan put jer inače graf ne bi bio povezan.
Ako ima više veza tada postoji ciklus.



Slika: Slobodno stablo, šuma i dag

Algoritam za dani graf određuje dali postoji put između čvora j i k.

a) kada je graf dan u obliku liste susjedstva

```
Povezanost(G, j, k)
int dist[1...|V|]
int boja[1...|V|]
cvor pred[1...|V|]
queue Q = empty                 ; red za obradu čvorova
za svakog u iz |V|
    dist[u] = INF               ; na početku su sve distance INF
    boja[u] = bijela            ; boja bijela - neobrađeni su
    pred[u] = NULL              ; pokazivači na prethodnoga su NULL
dist[j] = 0                     ; j uzimamo kao početni čvor
boja[j] = siva
enqueue(Q,j)
while(Q is nonempty)
    u = dequeue(Q)
    za svakog v iz Adj(u)               ; obradujemo po susjedima
        if(boja[v] == bijela)           ; ako nije obrađen
            boja[v] = siva
            dist[v] = dist[u] + 1
            pred[V] = u
            enqueue(Q,v)
    boja[u] = crna
if(dist[k] == INF)  ; kada smo sve obradili trebala bi postojati distanca od k
    print „put ne postoji"
else
    print „put postoji"
```

Vrijeme izvršavanja O(|V| + |E|)

b) kada je graf dan u obliku matrice susjedstva

```
Povezanost(G, j, k)
int dist[1...|V|]
int boja[1...|V|]
cvor pred[1...|V|]
queue Q = empty                 ; red za obradu čvorova
za svakog u iz |V|
    dist[u] = INF               ; na početku su sve distance INF
    boja[u] = bijela            ; boja bijela - neobrađeni su
    pred[u] = NULL              ; pokazivači na prethodnoga su NULL
dist[j] = 0                     ; j uzimamo kao početni čvor
boja[j] = siva
enqueue(Q,j)
while(Q is nonempty)
    u = dequeue(Q)
    for v = 1 to |V| do                 ; idemo po retku matrice
        if(A[u,v] == 1)                 ; ako su susjedi
            if(boja[v] == bijela)       ; ako čvor još nije obrađen
                boja[v] = siva
                dist[v] = dist[u] + 1
                pred[V] = u
                enqueue(Q,V)
    boja[u] = crna              ; kada mu obradimo sve susjede
if(dist[k] == INF)
    print „nema puta"
else
    print „put postoji"
```

Vrijeme izvršavanja $O(|V|^2)$

Za dva niza X i Y definiramo najkraću zajedničku supersekvencu kao niz najkraće duljine takav da su i X i Y podsekvence od Z. Npr. ako su X =(A,B) i Y=(B,C) tada je Z=(A,B,C). Nađite algoritam koji će izračunati dužinu najkraće zajedničke supersekvence /dakle ne niz nego samo dužinu). O(mn)

```
SCS(char X[1..m], char Y[1..n])
    int C[0..m][0..n]
    for i=0 to m do
        C[i,0]=i
    for j=0 to n do
        C[0,j]=j
    for i=1 to m
        for j=1 to n
            if (x[i]==y[j])
                C[i,j]=C[i-1, j-1] +1
            else if (C[i,j-1] < C[i-1,j])
                C[i,j]=C[i,j-1]+1
            else
                C[i,j]=C[i-1,j]+1
    return C[m,n]
```

Množenje lanca matrica

Vrijeme izvršavanja je $\Theta(n^3)$

```
NizMatrica(array p[i..n], int n)
    array s[1..n-1, 2..n]
    for i = 1 to n do m[i,j] = 0
    for L = 2 to n do
        for i = 1 to n-L+1 do
            j = i + L - 1
            m[i,j] = INFINITY
            for k = i to j-1 do
                q= m[i,k] + m[k+1,j] + p[i-1]*p[k]*p[j]
                if (q < m[i,j])
                    m[i,j] = q
                    s[i,j] = k
    return m[1,n]
    return s

Mnozenje(i, j)
    if(i<j)
        k = s[i,j]
        X = Mnozenje(i,k)
        Y = Mnozenje(k+1,j)
        return X*Y
    else
        return A[i]
```

Dajte algoritam kojim se, za niz prirodnih brojeva, računa najduža rastuća podsekvenca

Neka je prirodni niz brojeva A = 1, 4, 2, 3.
Taj niz sortiranog spremimo u polje B i dobijemo B = 1, 2, 3, 4.
Nakon toga tražimo najdužu zajedničku podsekvencu, dakle, LCS od A i B.

Floyd-Warshall algoritam – rekurzivno

```
Dist(int i, int j, int k)
    if k==0
        return W[i,j]
    return min(Dist(i,j,k-1), Dist(i,k,k-1)+Dist(k,j,k-1))
```

T(k, |V|) = 3T(k-1, |V|) +1

Ako postoje ciklusi sa negativnom tezinom, svakom iteracijom algoritma ce se smanjivati cijena ciklusa. U F-W algoritmo oni se očituju kroz negativne vrijednosti na dijagonali, a ne nula što bi značilo da je npr. udaljenost čvora 1 od samog sebe neka negativna vrijednost, a ne nula što je apsurdno.

Kod Floyd-Warshall-ovog algoritma koristili smo slijedeću rekurziju za računanje $d_{ij}^{(k)}$

$$d_{ij}^{(0)} = w_{ij}$$

$$d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right) \quad za\ k \ge 1$$

Međutim, u realizaciji koju smo dali na predavanju, nismo koristili referencu na (k) (dakle nismo koristili superskript (k) i (k-1) iz prethodnog izraza). Objasnite zašto je algoritam točan bez obzira što nismo koristili referencu na (k).

Odgovor na ovo pitanje leži u činjenici da za racunanje D (k) potrebni su k-ti redak i k-ti stupac iz D(k-1). Vrijednosti k-tog retka i k-tog stupca za D(k) ostaju nepromijenjene u odnosu na D (k-1), pa stoga nije potrebno koristiti referencu na k. (zatamnjeni redak i stupac se prepisu iz gornje tablice i ne mjenjaju se u trenutnoj).

Put (putanja, staza (path)) duljine k, iz čvora u prema čvoru u', u usmjerenom grafu $G=(V,E)$, je niz čvorova $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ takvih da je $u = v_0$ i $u' = v_k$ te $(v_{i-1}, v_i) \in E$ za $i = 1,2,\ldots k$. **Duljina puta** (length) jednaka je broju veza na putu. Kažemo da je čvor u' **dohvatljiv** (reachable) iz čvora u ako postoji put iz u prema u'. (Uočite da je svaki čvor dohvatljiv iz samog sebe i to putem čija je duljina 0). Put je **jednostavan** (simple) ako su svi čvorovi na putu različiti (osim eventualno prvog i zadnjeg). Na slici je put $(1,2,3,4)$ jednostavan, dok put $(2,3,4,3)$ nije jednostavan.

Ciklus (cycle) u usmjerenom grafu je put koji sadrži barem jednu vezu i za kojeg vrijedi $v_0 = v_k$. Ciklus je jednostavan ako su čvorovi $v_1, v_2, \ldots, v_k$ različiti. Petlju koja se zatvara sama u sebe (kao za čvor 2 na slici) smatramo jednostavnim ciklusom duljine 1.

Kod neusmjerenog grafa, put i ciklus definiramo na isti način kao i za usmjereni uz još jedan dodatni zahtjev za ciklus. Naime kod neusmjerenog grafa imamo još i uvjet da je $k \ge 3$, što znači da ciklus mora "posjetiti" barem tri različita čvora. Na taj način se eliminira trivijalni ciklus (u, u', u) gdje se pomičemo naprijed-nazad po istoj vezi. Na slici imamo put $(1,2,3,1)$ koji je ciklus.

Graf koji nema niti jedan ciklus zovemo **neciklični** (acyclic).

Često nas zanimaju dvije posebne klase ciklusa. Jedan je **Hamilton-ov ciklus** kod kojeg treba posjetiti svaki čvor u grafu točno jednom. **Euler-ov ciklus** je ciklus kod kojeg treba posjetiti svaku vezu u grafu točno jednom. (Postoje i varijante kod kojih govorimo ne o ciklusu nego o putu.)

Neusmjereni graf je **povezan** (connected) ako se svaki čvor može doseći iz svakog drugog čvora. Neciklični povezani graf zove se **slobodno stablo** (free tree) ili često samo **stablo** (tree). Izraz "slobodno" koristimo da se naglasi da stablo nema korijen, kao što je to uobičajeno kod strukture podataka

Povezane komponente grafa su oni čvorovi za koje vrijedi relacija povezanosti. Tako na slici imamo tri povezane komponente $(1,2,3)$, (4) i $(5,6)$. Povezani graf ima samo jednu povezanu komponentu. Ako se neciklični graf sastoji od više slobodnih stabala, zove se **šuma**.

Usmjereni graf je **strogo povezan** ako se bilo koja dva čvora mogu doseći jedan iz drugoga. (Postoji i slaba povezanost o kojoj nećemo govoriti). Slično kao i kod neusmjerenog grafa, i ovdje postoje **strogo povezane komponente**.

Za usmjereni neciklični graf često koristimo skraćenicu **dag** (Directed Acyclic Graph).

Za dva grafa G=(V, E) i G'=(V', E') kažemo da su **izomorfna** ako postoji funkcija bijekcije f:V→V' takva da je (u, v) element od E onda i samo onda ako je (f(u), f(v)) element od E'. Izomorfni grafovi su u osnovi isti, osim što čvorovi imaju različite nazive.

Neusmjereni graf koji ima max broj veza naziva se **potpuni graf**.

Za dani graf G kažemo da je podskup čvorova V'⊆V formira **kliku** ako je podgraf uzorkovan s V' potpun. Podskup čvorova V' formira **neovisni skup** ako podgraf uzorkovan s V' nema veza.

Dvodijeljan graf je neusmjereni graf G=(V, E) kod kojeg se skup čvorova V može podijeliti na dva skupa V_1 i V_2 takva da (u, v)∈E implicira ili u∈V_1 i v∈V_2 ili u∈V_2 i v∈V_1. Drugim riječima, sve veze idu izmedu dva skupa V_1 i V_2.

Komplement grafa G=(V, E) je graf na istom skupu čvorova, ali kod kojeg su veze komplementi veza na grafu G. (kada od potpunog grafa oduzmemo veze grafa G).

Inverz usmjerenog grafa je graf na istom skupu čvorova, ali s vezama čiji je smjer invertiran.