DIGITALNI SUSTAVI ZA OBRADU SIGNALA

DSOS21

Julije Ožegović
FESB Split

DIGITALNI SUSTAVI ZA OBRADU SIGNALA

- UVOD: ANALOGNI I DIGITALNI SUSTAVI
- I. OSNOVE DIGITALNE OBRADE SIGNALA
- II. DIGITALNI FILTRI U VREMENSKOM I FREKVENCIJSKOM PODRUČJU
- III. STRUKTURA DIGITALNIH SUSTAVA ZA OBRADU SIGNALA
- IV. DIGITALNA OBRADA SIGNALA U PRIMJENI

II. DIGITALNI FILTRI U VREMENSKOM I FREKVENCIJSKOM PODRUČJU

- 8. SINTEZA NEREKURZIVNIH FILTARA
- 9. SINTEZA NEREKURZIVNIH FILTARA FOURIEROVOM TRANSFORMACIJOM
- 10. SINTEZA REKURZIVNIH FILTARA
- 11. DISKRETNA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA
- 12. BRZA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA
- 13. POSTUPCI BRZE FOURIEROVE TRANSFORMACIJE
- 14. FFT OBRADA SIGNALA

8. SINTEZA NEREKURZIVNIH FILTARA

- 8.1. NEREKURZIVNI DIGITALNI FILTRI I NJIHOVA SVOJSTVA
- 8.2. FILTAR POMIČNE SREDNJE VRIJEDNOSTI

8.1. NEREKURZIVNI DIGITALNI FILTRI I NJIHOVA SVOJSTVA

- MOTIVACIJA
- DEFINICIJA FIR FILTARA
- OSNOVNA SVOJSTVA FIR FILTARA

- MOTIVACIJA ZA FIR FILTRE

- LTI kao filtar:
  - konvolucija:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

    - to je suma prethodnih uzoraka x[n] pomnoženih s težinskim faktorima h[n]
    - ima karakter srednje vrijednosti ali težinski koeficijenti mogu biti različiti
  - svako usrednjavanje ima svojstvo filtriranja:
    - ovisno o broju uzoraka za koje koeficijent nije 0
    - to je zapravo dužina odziva filtra h[n]
    - ovisno o vrijednostima samih koeficijenata

- MOTIVACIJA ZA FIR FILTRE

- LTI kao filtar:
  - FIR = Finite Impulse Response,
    - konačan odziv na impuls
    - konačan broj koeficijenata
    - moguća nerekurzivna implementacija
    - samo iznimno moguća rekurzivna implementacija
  - IIR = Infinite Impulse Response,
    - beskonačan odziv na impuls
    - beskonačan broj koeficijenata
    - moguća isključivo rekurzivna implementacija

DEFINICIJA FIR FILTARA

- Polazimo od jednadžbe diferencija:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x[n-k]$$

  - za sve rekurzivna članove $a_k=0$, $k=1,2....$; $a_0=1$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x[n-k]$$

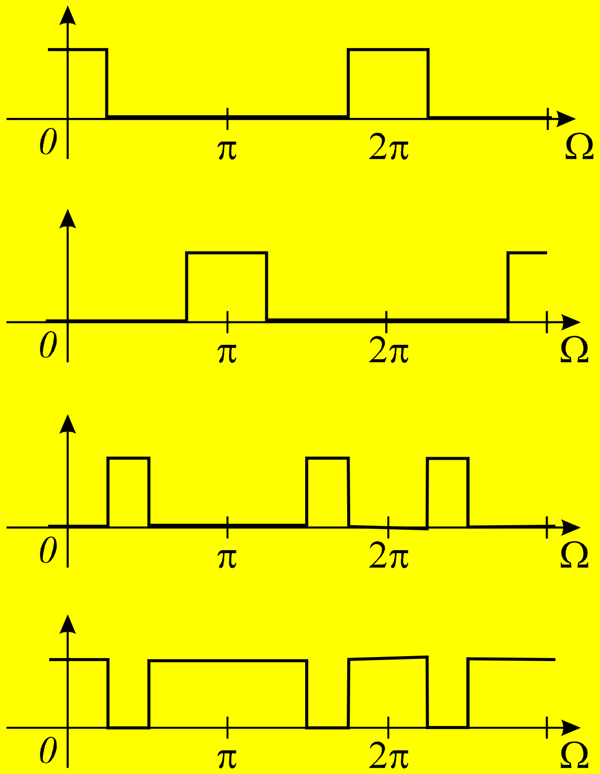
  - ako su b_k M koeficijenata impulsnog odziva h[k] imamo konvoluciju:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

  - M konačan!

DEFINICIJA FIR FILTARA

- Vrste filtara - idealne frekvencijske karakteristike:
  - niskopropusni (low pass)
  - visokopropusni (high pass)
  - propusnik pojasa (band pass)
  - nepropusnik pojasa (band stop)



DEFINICIJA FIR FILTARA

- Treba odrediti koeficijente b_k:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \cdot z^{-n} = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}$$

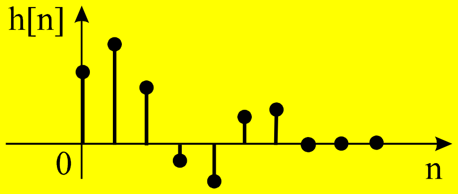
  – odnosno:

$$H(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot \exp(-jk\Omega)$$

  – dakle biramo koeficijente b_k
    - kako bi modelirali željenu frekvencijsku karakteristiku
    - pri tome smijemo koristiti konačan broj koeficijenata
    - odstupanje od željene karakteristike treba biti minimalno
    - pitanje je kriterija - koje odstupanje dozvoljavamo

OSNOVNA SVOJSTVA FIR FILTARA

- Praktičan izbor koeficijenata:
  - nekad treba i do 150 koeficijenata
  - ostale koeficijente zanemarujemo!



  - rad filtra je spor i zahtjevan po brzini procesora
  - postižemo dvije bitne prednosti:
    - stabilnost: u z ravnini ima samo nule!
    - linearna fazna karakteristika!

OSNOVNA SVOJSTVA FIR FILTARA

- Nule u z ravnini:
  - pođemo od prijenosne funkcije

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=K\frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)\cdots}$$

  - odziv u z području je

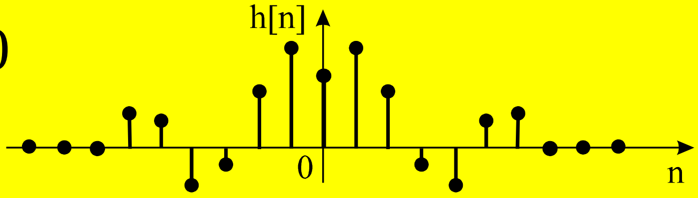
$$Y(z)\cdot\{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)\cdots\}=X(z)\cdot K\cdot\{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots\}$$

  - kako nema rekurzivnih članova ostaju samo nule:

$$Y(z)=X(z)\cdot K\cdot\{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots\}$$

OSNOVNA SVOJSTVA FIR FILTARA

- Linearna fazna karakteristika:
  - promatramo nekauzalni filtar sa simetričnim odzivom oko 0



  - frekvencijski odziv je:

$$H(\Omega) = \sum_{k=-M}^{M} b_k \cdot \exp(-jk\Omega) =$$

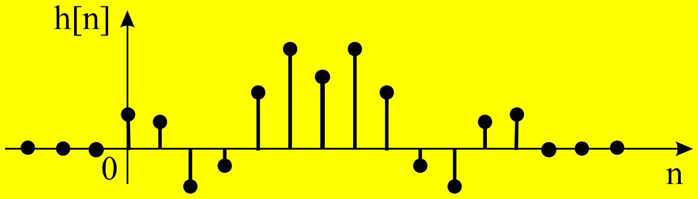
$$= b_0 + 2b_1 \cos\Omega + 2b_2 \cos 2\Omega + \cdots + 2b_M \cos M\Omega =$$

$$= b_0 + 2\sum_{k=1}^{M} b_k \cdot \cos(k\Omega)$$

  - fazni pomak je 0!

OSNOVNA SVOJSTVA FIR FILTARA

- Linearna fazna karakteristika:
  - sada odziv pomaknimo u vremenu:



  - sustav postaje kauzalan
  - fazni pomak je linearan!

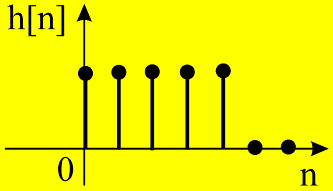
8.2. FILTAR POMIČNE SREDNJE VRIJEDNOSTI

- OSNOVNI NISKOPROPUSNI FILTAR
- VISOKOPROPUSNI I FILTAR PROPUSNIK OPSEGA

OSNOVNI NISKOPROPUSNI FILTAR

- Filtar pomične srednje vrijednosti (PSV):
  - to je najjednostavniji niskopropusni filtar

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] \qquad y[n] = \sum_{k=0}^{4} 0{,}2 \cdot x[n-k]$$



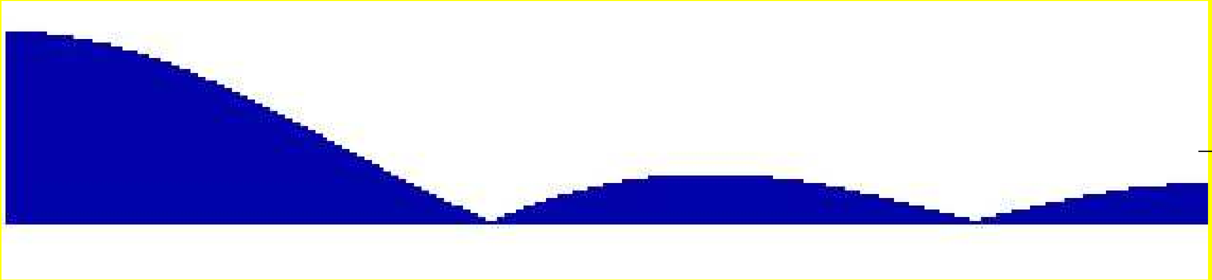
  - za filtar simetričan oko 0 imamo:

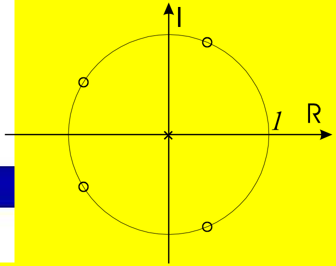
$$H(\Omega) = \frac{1}{(2M+1)}\left\{1 + 2\cos\Omega + 2\cos 2\Omega + \cdots + 2\cos M\Omega\right\}$$

  - kauzalni filtar ima isti odziv, samo je fazni pomak linearan
  - filtar PSV može biti ostvaren i rekurzivno

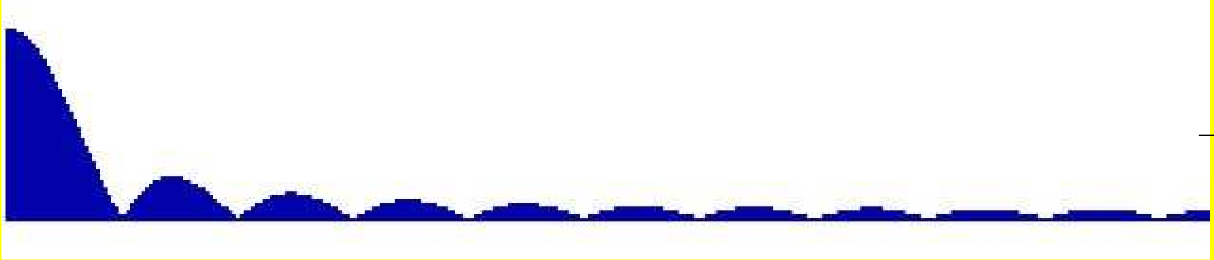
OSNOVNI NISKOPROPUSNI PSV FILTAR

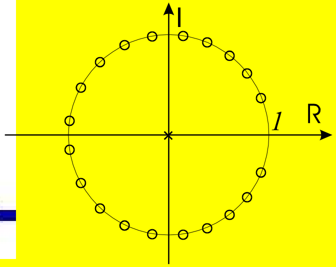
- frekvencijski odziv PSV filtra:
  - za 2M+1=5





  - za 2M+1=21





VISOKOPROPUSNI I FILTAR PROPUSNIK

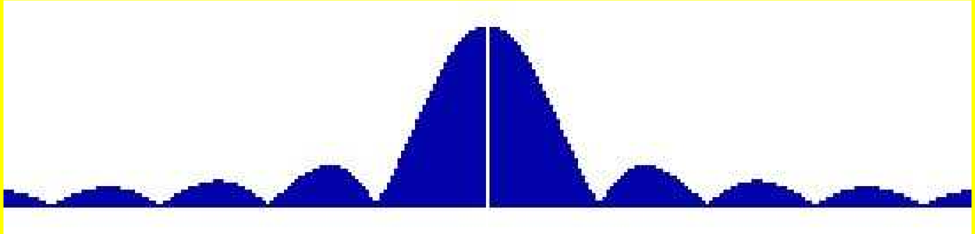
- Modulacija:
  - modulacija (množenje) u vremenskom području odgovara konvoluciji u frekvencijskom području
  - moduliramo odziv s $\cos(n\Omega_0)$ za $\Omega_0=\pi/2$ imamo:

$$h[n]=\frac{1}{(2M+1)}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

  - Ω_0 je željena centralna frekvencija filtra
  - obavimo konvoluciju sa spektrom $\cos(n\Omega_0)$ a to je linija na mjestu Ω_0
  - efekt je u pomaku propusnog pojasa sa 0 u Ω_0

VISOKOPROPUSNI PSV FILTAR

- Izaberemo centralnu frekvenciju:
  - za $\Omega_0=\pi/2$ imamo propusnik opsega:



  - za $\Omega_0=\pi$ imamo visokopropusni filtar:

9. SINTEZA NEREKURZIVNIH FILTARA FOURIEROVOM TRANSFORMACIJOM

- 9.1. SINTEZA FIR FOURIEROVOM TRANSFORMACIJOM
- 9.2. PROZORI, KVADRATIČNI I TROKUTASTI
- 9.3. VON HANN i HAMMING PROZOR
- 9.4. KAISEROV I PROZOR JEDNAKOG VALOVANJA
- 9.5. DIGITALNI DIFERENCIJATORI

9.1. SINTEZA FIR FOURIEROVOM TRANSFORMACIJOM

- PRIMJENA FOURIEROVE TRANSFORMACIJE
- IDEALNI NISKOPROPUSNI FILTAR
- PRIMJENA MODULACIJE
- ODSTUPANJE STVARNOG FILTRA

SINTEZA FIR FOURIEROVOM TRANSFORMACIJOM

- Mane sinteze u vremenskom području:
  - teško je pogađati koeficijente,
    pa provjeravati frekvencijski odziv
- Mane sinteze u z području
  - veliki broj nula, treba pogađati njihovu poziciju
- Koristimo sintezu u frekvencijskom području
  - specificiramo željenu frekvencijsku karakteristiku
  - inverznom Fourierovom transformacijom
    izračunamo koeficijente vremenskog odziva filtra

SINTEZA FIR FOURIEROVOM TRANSFORMACIJOM

- Koristimo Fourierovu transformaciju:
  - Fourierova transformacija aperiodičkog niza

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\Omega n)$$

  - inverzna Fourierova transformacija daje:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) \cdot \exp(j\Omega n) \cdot d\Omega$$

  - odnosno za prijenosnu funkciju

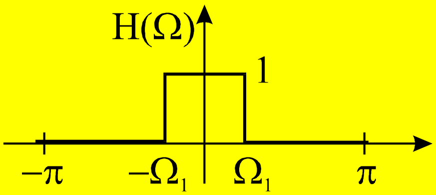
$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(\Omega) \cdot \exp(j\Omega n) \cdot d\Omega$$

SINTEZA FIR FOURIEROVOM TRANSFORMACIJOM

- Problem integracije ovisno od $H(\Omega)$:
  - određivanje integrala može biti teško
  - stoga koristimo idealizirani frekvencijski odziv
- Problem broja koeficijenata
  - koeficijenti sporije ili brže teže nuli
  - radi konačnosti filtra i kašnjenja koristimo konačni broj koeficijenata
  - ostale koeficijente zanemarujemo
  - rezultat je odstupanje od željene karakteristike filtra

IDEALNI NISKOPROPUSNI FILTAR

- Integracija idealnog nisko propusnog filtra:
  - koristimo filtar gornje frekvencije Ω_1



  - integriramo

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega)\cdot \exp(j\Omega n)\cdot d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_1}^{\Omega_1} 1{,}0\cdot \exp(j\Omega n)\cdot d\Omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\exp(j\Omega n)}{jn}\right]_{-\Omega_1}^{\Omega_1} =$$

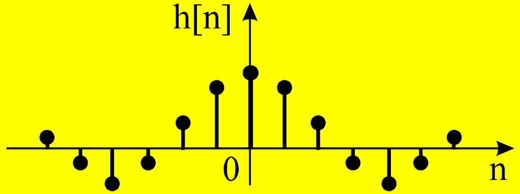
$$= \frac{1}{2\pi jn}\left\{\exp(j\Omega_1 n) - \exp(-j\Omega_1 n)\right\}$$

  - dobijemo

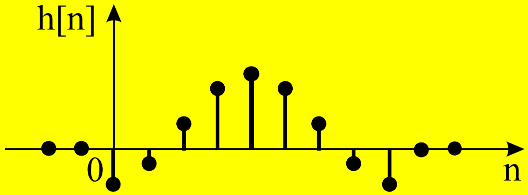
$$h[n] = \frac{1}{n\pi}\sin(n\Omega_1) = \frac{\Omega_1}{\pi}\frac{\sin(n\Omega_1)}{n\Omega_1} = \frac{\Omega_1}{\pi}\sin c(n\Omega_1)$$

IDEALNI NISKOPROPUSNI FILTAR

- Odziv idealnog nisko propusnog filtra:
  - odziv je oblika sin(x)/x
  - to je beskonačni odziv, +- beskonačno



  - trebamo odrezati repove
    i pomaknuti od nule desno da postane kauzalan:



PRIMJENA MODULACIJE

- Modulaciju primijenimo kao prije:
  - odziv oblika sin(x)/x moduliramo frekvencijom filtra

$$h[n] = \frac{1}{n\pi}\sin(n\Omega_1)\cos(n\Omega_0)$$

  - frekvencijski odziv će biti

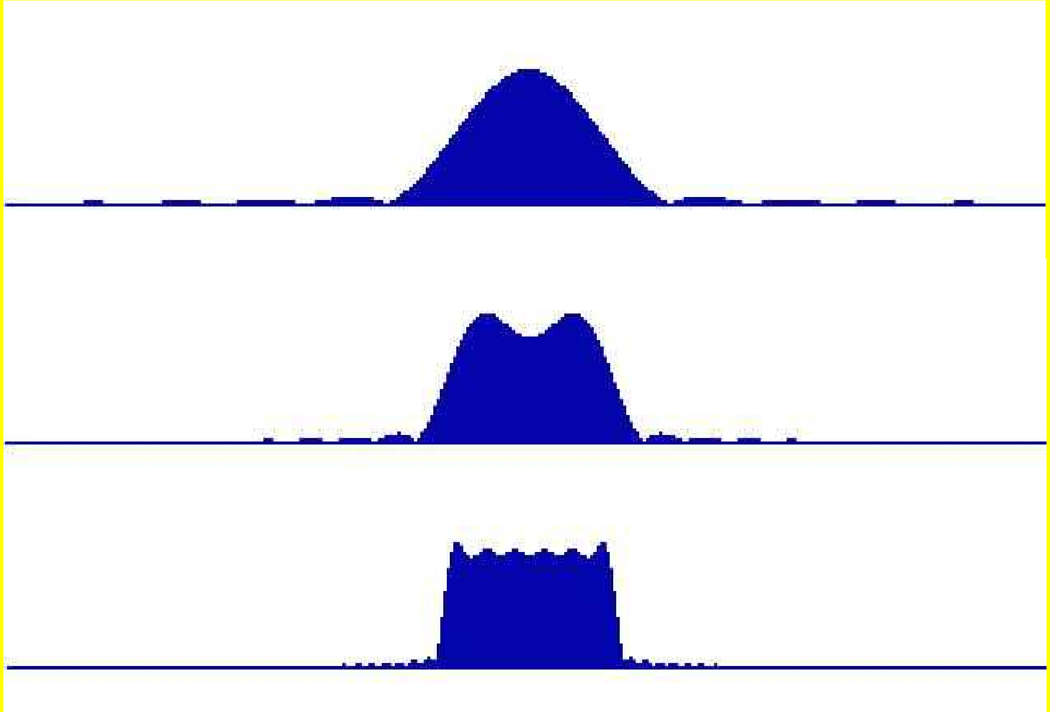
$$H(\Omega) = \frac{\Omega_1}{\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} h[k]\cdot\cos(k\Omega)$$

  - odnosno za kauzalni filtar s 2M+1 koeficijenata

$$|H(\Omega)| = \frac{\Omega_1}{\pi} + 2\sum_{k=1}^{M} h[k]\cdot\cos(k\Omega)$$

PRIMJENA MODULACIJE

- Primjeri filtara $\Omega_0=\pi/2$, $\Omega_1=\pi/6$:
  - M=10
  - M=25
  - M=75



ODSTUPANJE STVARNOG FILTRA

- Odstupanje Fourierove transformacije:
  - uzimanje redom koeficijenata Fourierove transformacije rezultira najmanjom kvadratnom greškom
  - odbacivanje koeficijenata daje filtar sa najmanjom kvadratnom greškom

$$e = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|H_D(\Omega) - H_A(\Omega)\right|^2 \cdot d\Omega$$

  - u praksi nas interesiraju druga svojstva filtra:
    - valovanje propusnog opsega
    - valovanje nepropusnog opsega
    - strmina brida

9.2. PROZORI, KVADRATIČNI I TROKUTASTI

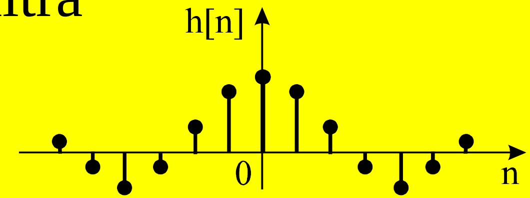
- KONCEPT PRIMJENE PROZORA
- SPEKTAR PROZORA
- KVADRATIČNI PROZOR
- TROKUTASTI PROZOR

- KONCEPT PRIMJENE PROZORA

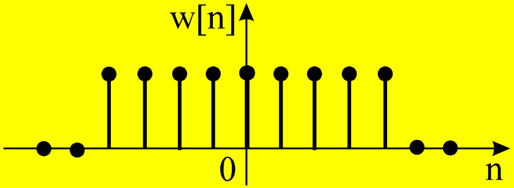
- Tehnika odbacivanja parametara odziva:
  - odbacivanje članova odziva filtra jednako je množenju s **konačnom funkcijom prozora**
  - prozor definira koliko će članova odziva ostati "biti vidljivo", zovemo ga "prozor vidljivosti"
  - funkcija prozora može imati koeficijente jednake 1 to je kvadratični prozor
  - druge prozore dobijemo kad su koeficijenti funkcije različiti od 1
    - trokutasti (Bartlett) prozor
    - Van Hannov, Hammingov, Kaiserov...

- KONCEPT PRIMJENE PROZORA

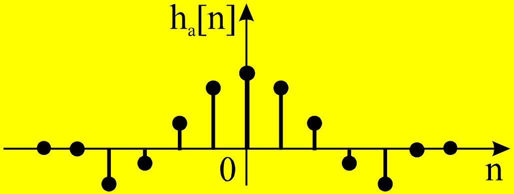
- Najjednostavniji je kvadratični prozor:
  - odziv idealnog filtra



  - prozor



  - množenje odziva s prozorom



- SPEKTAR PROZORA

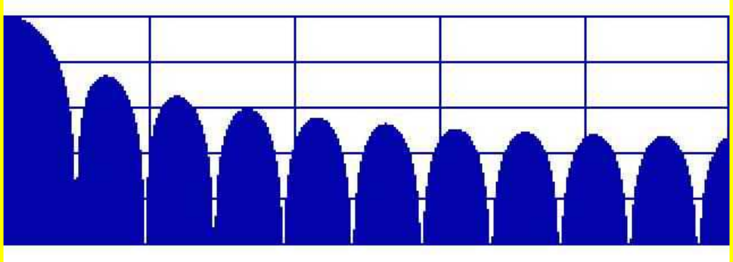
- Svojstvo množenja:
  - množenje u vremenskom području
    je konvolucija u frekvencijskom području:

$$h_d[n]\cdot w[n] \leftrightarrow H_D(\Omega) * W(\Omega)$$

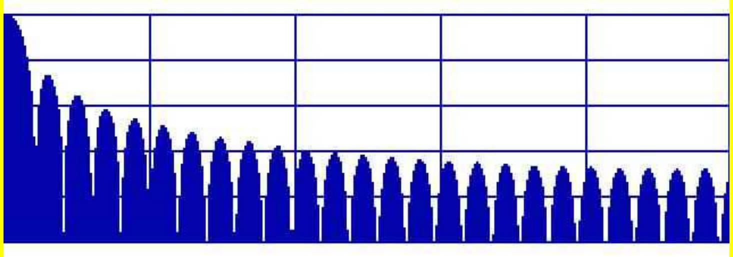
  - dakle obavljamo konvoluciju spektra idealnog filtra
    sa spektrom prozora!
  - prozor je npr. kvadratičan u vremenskom području, pa mu
    je spektar oblika sin(x)/x ili sinc(x) u frekvencijskom
  - slijedi: sva valovanja u frekvencijskom području
    uzrokuje prozor!

- KVADRATIČNI PROZOR

- Kvadratični prozor ima spektar sin(x)/x:
  - Gibbsov fenomen: koliko god širili prozor
    - prvi vrh valovanja će uvijek biti oko 9% amplitude
    - vrhovi valovanja će se samo približavati
  - M=21 (program 15)



  - M=51

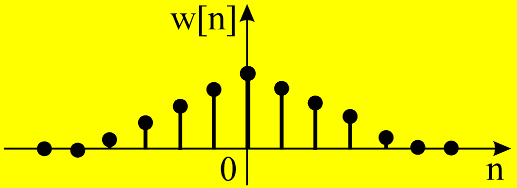


  - prednost: minimalna kvadratna pogrješka

- TROKUTASTI PROZOR

- Izbjegnimo nagli prekid odziva:
  - linearno smanjenje komponenti daje **trokutasti prozor**
  - jedinično pojačanje (Bartlett)

$$w[n] = \frac{(M+1) - n}{(M+1)^2} \ ; \ -M \le n \le M$$

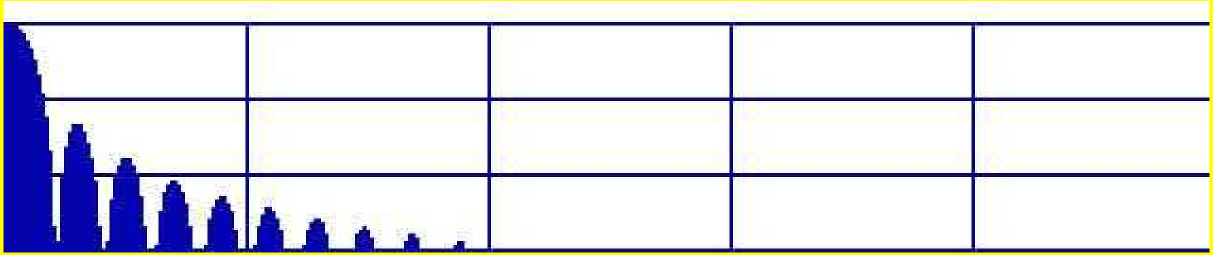


  - Jednostavno izračunamo spektar :

$$|W(\Omega)| = \frac{1}{(M+1)} + \frac{2}{(M+1)^2}\{M\cos(\Omega) + (M-1)\cos(2\Omega) + \cdots + \cos(M\Omega)\}$$

- TROKUTASTI PROZOR

– Spektar trokutastog prozora:



– Trokutasti prozor dobije se konvolucijom dvaju kvadratičnih

– Spektar je umnožak spektara dvaju kvadratičnih prozora!

– Stoga je valovanje manje nego kod kvadratičnih prozora!

9.3. VON HANN I HAMMING PROZOR

- KRITERIJI DIZAJNA FILTARA
- VON HANN PROZOR
- HAMMINGOV PROZOR
- USPOREDBA FIR FILTARA

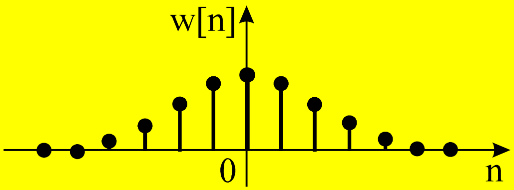
- KRITERIJI DIZAJNA FILTRA

- Biramo prozor prema željenom svojstvu filtra:
  - kvadratični prozor daje najmanju pogrješku i najstrmiji brid između propusnog i nepropusnog područja
  - trokutasti prozor daje nešto bolje gušenje bočnih pojasa ali i nešto lošiju strminu
  - konvolucija spektra prozora i filtra
    - širina prijelaza propusnog i nepropusnog područja ovisi o širini glavnog pojasa prozora
    - valovanje ovisi o razini bočnih pojasa prozora
  - idealni prozor bi bio impuls u frekvencijskoj domeni
  - stvarni prozori su kompromisi oštrog ruba i valovanja

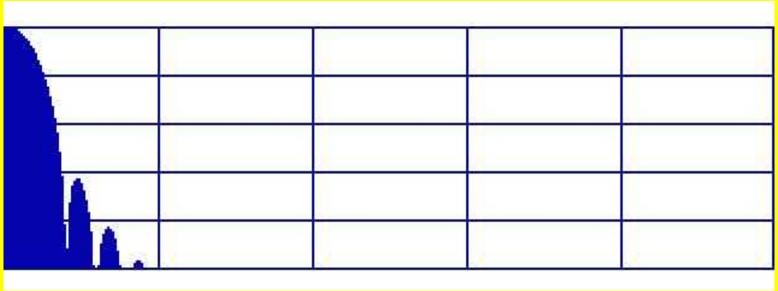
- VON HANN PROZOR

- Umjesto trokuta uvodi cos:
  - za 2M+1 komponenti

$$w[n] = 0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{n\pi}{M+1}\right) \;;\; -M \le n \le M$$



  - spektar Von Hannovog prozora je (program 16):

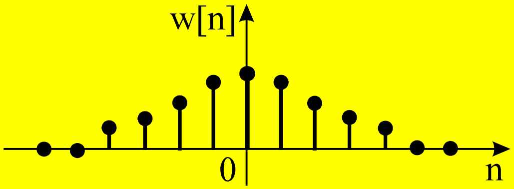


  - oštar pad, ali značajni bočni pojasi, oko –32 dB

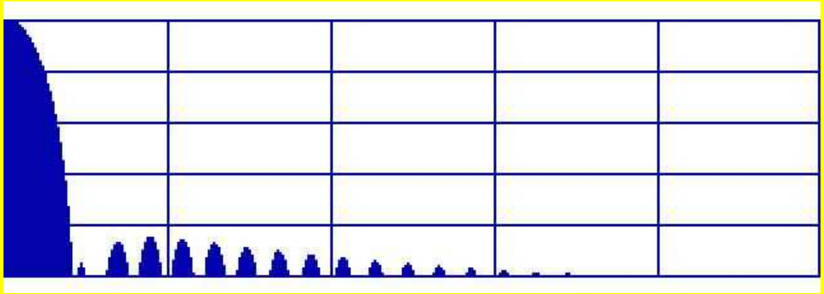
- HAMMING PROZOR

- Nadalje optimizira bočne pojase:
  - za 2M+1 komponenti

$$w[n] = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{n\pi}{M}\right) \;;\; -M \le n \le M$$



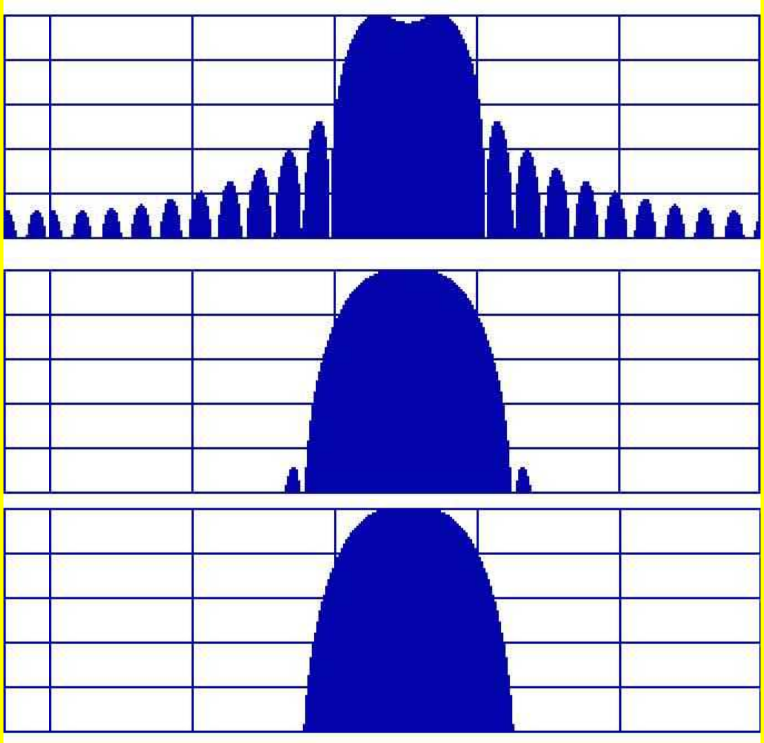
  - spektar Hammingovog prozora je (program 16):



  - blaži pad, ali bitno smanjeni bočni pojasi, – 40 dB

- USPOREDBA FIR FILTARA

- Pogledajmo 3 filtra s 51 članom (program 17):
  - **kvadratični** strm, znatni bočni pojasi
  - **Von Hann** širi, neznatni bočni pojasi
  - **Hamming** najpopularniji!



9.4. KAISEROV I PROZOR JEDNAKOG VALOVANJA

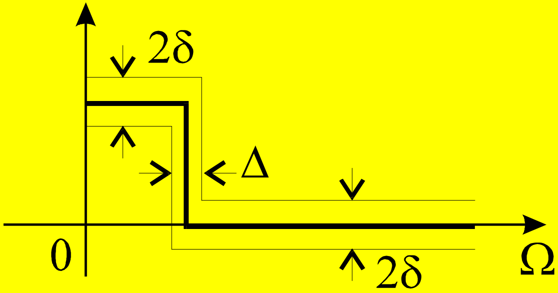
- KAISEROV PROZOR
- PROZOR JEDNAKOG VALOVANJA

- KAISEROV PROZOR

- Podešavanje prozora:
  - Von Hann i Hamming prozori su fiksni
  - Kaiser uvodi prozor gdje dizajner bira oblik prozora

$$w[n] = \frac{I_0\left(\alpha\sqrt{1-\left(\frac{n}{M}\right)^2}\right)}{I_0(\alpha)} \ ; \ -M \le n \le M \qquad I_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]^2$$

  - Parametri se specificiraju prema
    - maksimalnom valovanju δ
    - strmini filtra Δ



- KAISEROV PROZOR

- Podešavanje prozora:
  - Parametar α određuje strminu i valovanje koriste se empirijske formule:

$$A = -20\log\delta$$

$$\alpha = 0{,}1102(A - 8{,}7) \qquad A \geq 50$$

$$\alpha = 0{,}5842(A - 21)^{0{,}4} + 0{,}07886(A - 21) \qquad 21 < A < 50$$

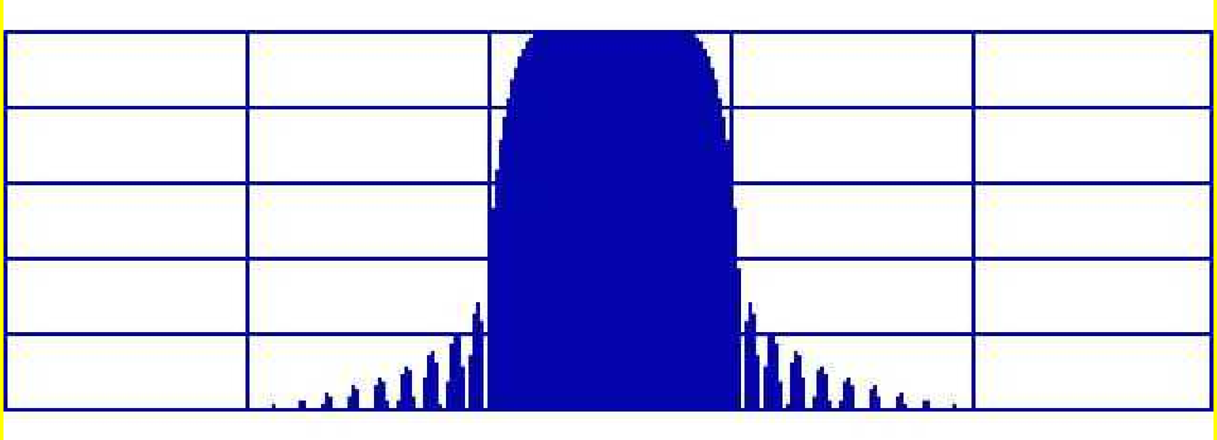
$$\alpha = 0 \qquad A \leq 21$$

  - broj parametara M ovisi o strmini Δ:

$$M \geq \frac{A - 7{,}95}{28{,}72\Delta}$$

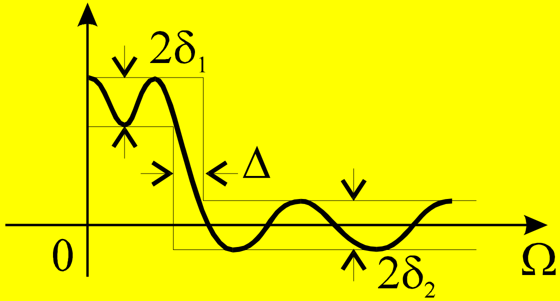
- KAISEROV PROZOR

- Primjer (Program 18):
  - δ=0,02 Δ=7,5^{o} α=2,652395 M=89



- PROZOR JEDNAKOG VALOVANJA

- Ideja je rasporediti energiju pogrješke:
  - neka valovanje bude jednako u ciklusu frekvencija
  - tada će možda maksimalno valovanje biti prihvatljivo
  - specifikacija filtra



9.5. DIGITALNI DIFERENCIJATORI

- DEFINICIJA I SPEKTAR
- VREMENSKI ODZIV
- PRIMJENA PROZORA

- DEFINICIJA I SPEKTAR DIGIT. DIFER.

- Derivacija:
  - daje brzinu promjene, često se koristi
- Diferencija:
  - možemo koristiti diferenciju prvog reda:

$$\Delta x = x[n] - x[n-1]$$

  - spektar takvog “diferencijatora” je:

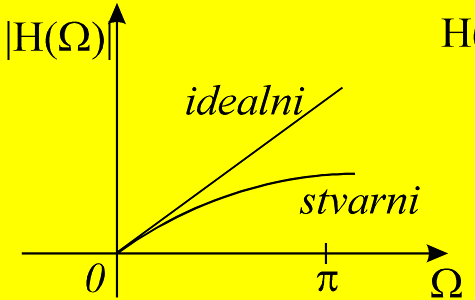
$$H(\Omega) = 1 - \exp(-j\Omega) = 1 - \cos\Omega + j\sin\Omega$$

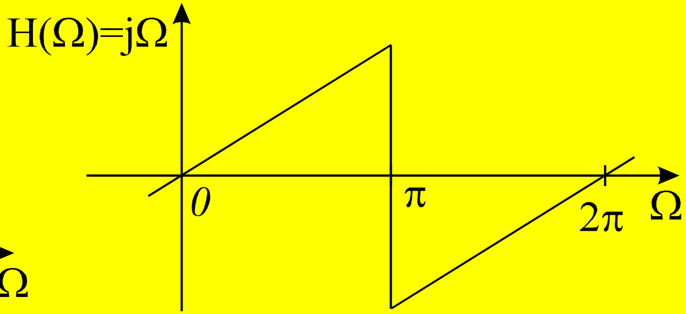
- DEFINICIJA I SPEKTAR DIGIT. DIFER.

- Spektar diferencijatora:
  - odnosno amplituda spektra je:

$$|H(\Omega)| = \left\{(1-\cos\Omega)^2 + (\sin\Omega)^2\right\}^{1/2} = 2\sin\left(\Omega/2\right)$$

  - za male vrijednosti **Ω** je: $|H(\Omega)| = 2\sin\left(\Omega/2\right) \approx 2\left(\Omega/2\right) = \Omega$
  - idealni diferencijator ima fazni pomak 90^o





VREMENSKI ODZIV DIGIT. DIFER.

- Idealni diferencijator:
  - imamo:

$$H(\Omega) = j\Omega$$

  - inverzna Fourierova transformacija daje:

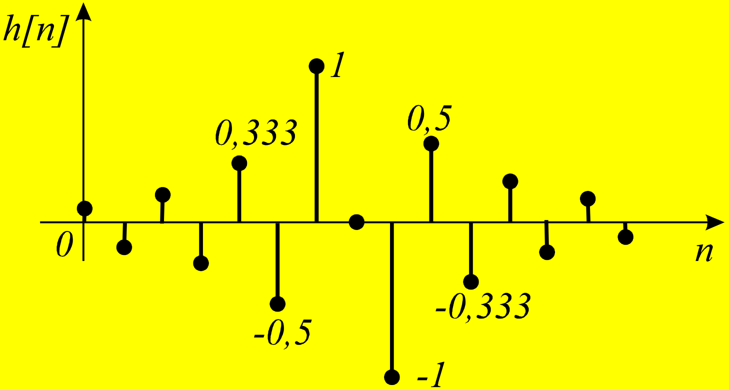
$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega)\cdot \exp(j\Omega n)\cdot d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} j\Omega \cdot \exp(j\Omega n)\cdot d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[j\Omega\frac{\exp(j\Omega n)}{jn}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp(j\Omega n)}{n}\cdot d\Omega\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\exp(j\Omega n)\left\{\frac{\Omega}{n} - \frac{1}{jn^2}\right\}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left\{\exp(jn\pi)\left\{\frac{\pi}{n} - \frac{j}{n^2}\right\} - \exp(-jn\pi)\left\{\frac{-\pi}{n} + \frac{j}{n^2}\right\}\right\}$$

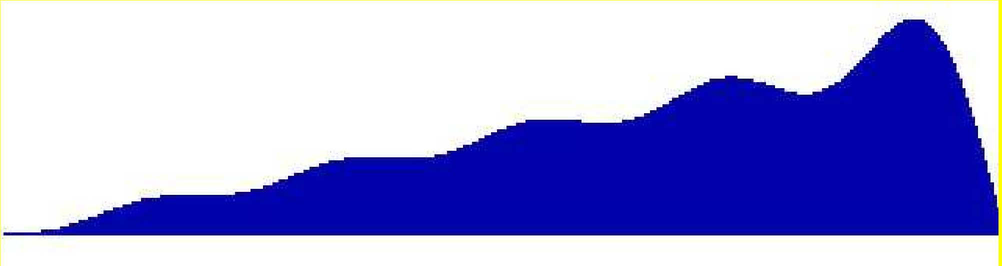
VREMENSKI ODZIV DIGIT. DIFER.

- Idealni diferencijator:
  - kako je: $$\exp(jn\pi) = \exp(-jn\pi) = (-1)^n$$
  - slijedi: $$h[n] = (-1)^n \frac{1}{2\pi}\left\{\left\{\frac{\pi}{n} + \frac{j}{n^2}\right\} - \left\{\frac{-\pi}{n} + \frac{j}{n^2}\right\}\right\} = \frac{(-1)^n}{n}$$
  - grafički, kauzalan konačan:

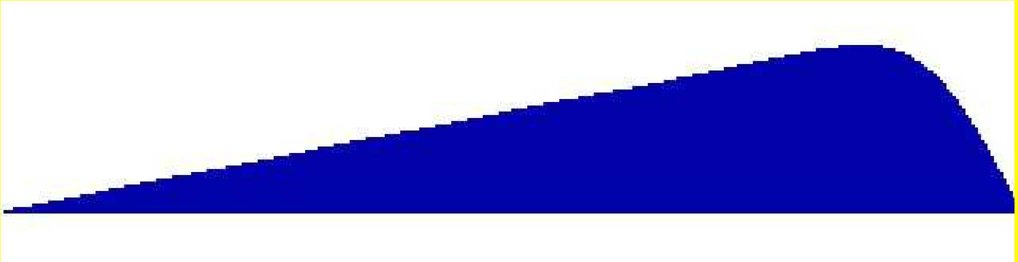


PRIMJENA PROZORA

- Konačnost znači primjenu prozora:
  - kvadratičan prozor, 2M+1=21 parametra (program 19):



  - Hammingov prozor 2M+1=21:



10. SINTEZA REKURZIVNIH FILTARA

- 10.1. REKURZIVNI DIGITALNI FILTRI I SVOJSTVA (IIR)
- 10.2. SINTEZA IIR POMOĆU NULA I POLOVA
- 10.3. SINTEZA POMOĆU ANALOGNIH FILTARA
- 10.4. IMPULSNO INVARIJANTNI FILTRI
- 10.5. FILTRI S UZORKOVANJEM FREKVENCIJA
- 10.6. DIGITALNI INTEGRATORI

10.1. REKURZIVNI DIGITALNI FILTRI I SVOJSTVA

- JEDNADŽBA DIFERENCIJA
- OPĆI OBLIK FREKVENCIJSKOG ODZIVA
- ULOGA NULA I POLOVA

IIR I JEDNADŽBA DIFERENCIJA

- Jednadžba diferencija
  - opći oblik jednadžbe diferencija

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x[n-k]$$

  - u z području daje

$$Y(z) \cdot \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k} = X(z) \cdot \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}$$

  - odnosno

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}}$$

IIR I FREKVENCIJSKI ODZIV

- Frekvencijski odziv
  - polinomi se mogu faktorizirati

$$H(z)=K\frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)\cdots}$$

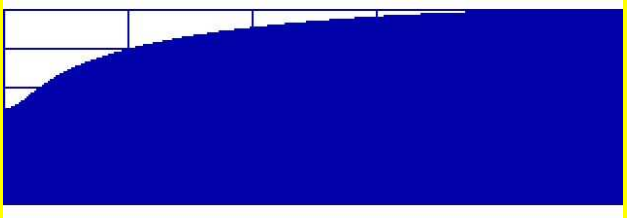
  - a za z=exp(jΩ) dobijemo frekvencijski odziv:

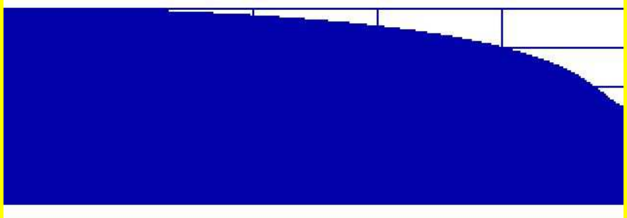
$$H(\Omega)=K\frac{(\exp(j\Omega)-z_1)(\exp(j\Omega)-z_2)(\exp(j\Omega)-z_3)\cdots}{(\exp(j\Omega)-p_1)(\exp(j\Omega)-p_2)(\exp(j\Omega)-p_3)\cdots}$$

  - znamo da polovi i nule mogu biti realni ili konjugirano kompleksni

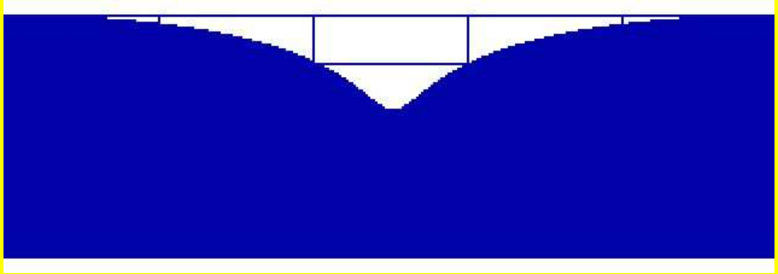
IIR I ULOGA NULA I POLOVA

- Nule guše signal određene frekvencije
  - realne: odziv je prigušen na visokim ili niskim frekv.
  - +0,9 -0,9



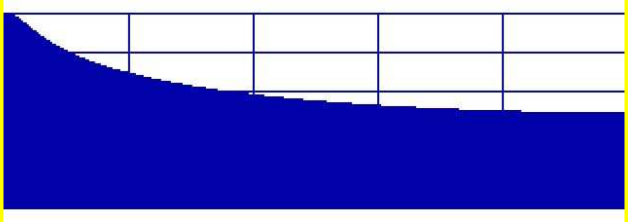


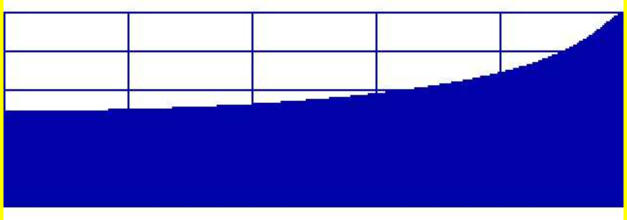
  - imaginarne: odziv je prigušen na frekvenciji nule 0,9; 90^o:



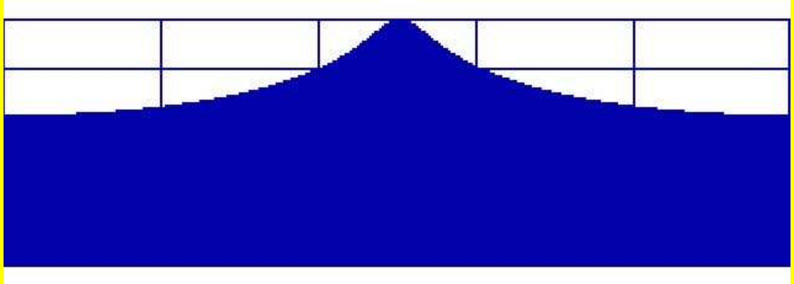
IIR I ULOGA NULA I POLOVA

- Polovi pojačavaju signal određene frekvencije
  - realni: odziv je pojačan na visokim ili niskim frekv.
  - +0,9 -0,9





  - imaginarni: odziv je pojačan na frekvenciji pola 0,9; 90°:



10.2. REKURZIVNI DIGITALNI FILTRI I SVOJSTVA

- PRISTUP I SVOJSTVA POSTUPKA
- SERIJSKI SPOJ ELEMTENTARNIH FILTARA
- MEĐUSOBNI UTJECAJ POLOVA I NULA

IIR POLOVI I NULE - SVOJSTVA POSTUPKA

- Biramo raspored polova i nula u Z ravnini
  - postavimo polove i nule
  - izračunamo jednadžbu diferencija
  - izračunamo frekvencijski odziv
  - korigiramo položaj polova i nula
    - NEPRECIZNO!
    - ali ipak daje nekakve rezultate
  - koristimo poznavanje utjecaja polova i nula na frekvencijski odziv

IIR SERIJSKI SPOJ ELEMENTARNIH FILTARA

- Biramo raspored polova i nula u Z ravnini
  - ako je prijenosna funkcija:

$$H(z) = K\frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)\cdots}$$

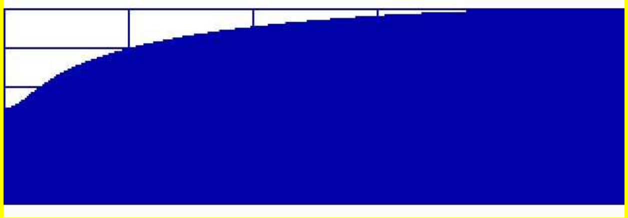
  - možemo pisati:

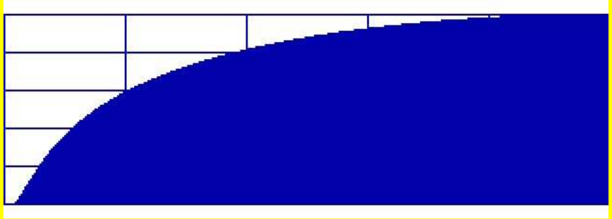
$$H(z) = K\frac{(z-z_1)}{(z-p_1)}\cdot\frac{(z-z_2)}{(z-p_2)}\cdot\frac{(z-z_3)}{(z-p_3)}\cdots$$

  - to je serijski spoj elementarnih filtara
  - ponašanje elementarnih filtara je poznato i predvidivo

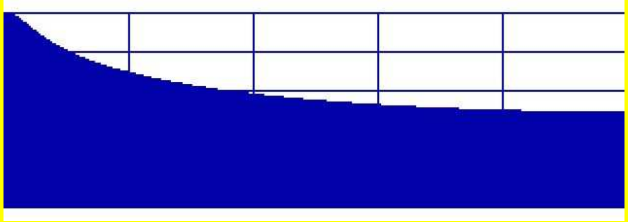
IIR SERIJSKI SPOJ ELEMENTARNIH FILTARA

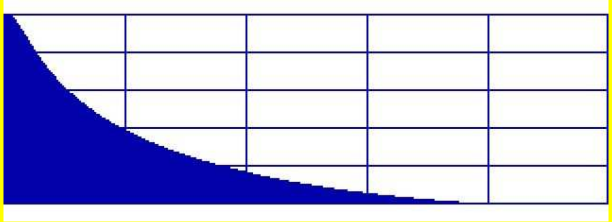
- Za pojačani efekt dupliciramo nule i polove
  - npr. jednostruka i dvostruka realna nula 0,9 reda 1 i 2:





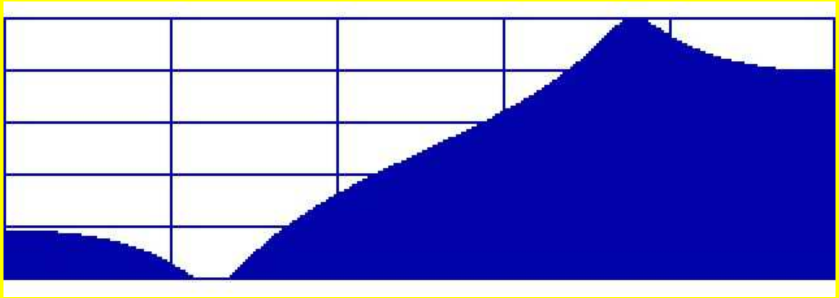
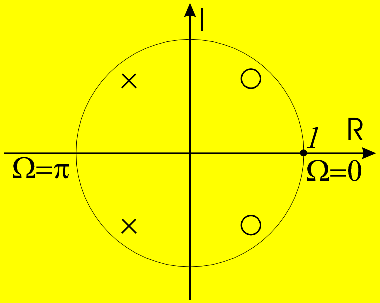
  - jednostruki i dvostruki realni pol 0,9 reda 1 i 2



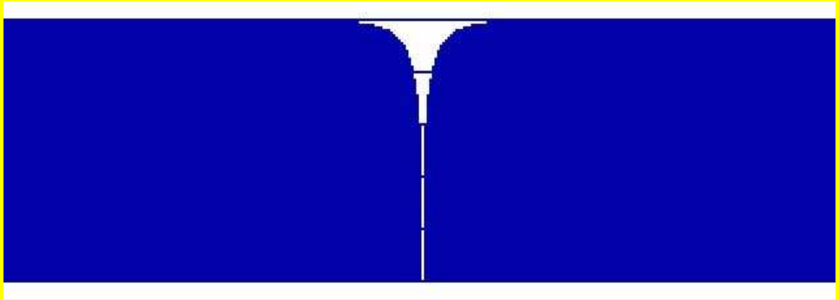
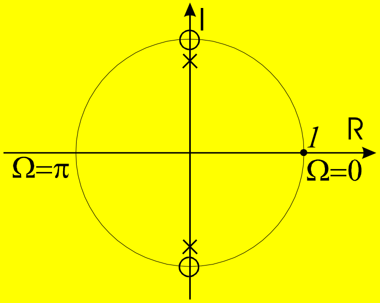


IIR MEĐUSOBNI UTJECAJ POLOVA I NULA

- Također kombiniramo nule i polove
  - npr. udaljeni pol i nula:

  - bliski pol i nula:

10.3. SINTEZA IIR POMOĆU ANALOGNIH FILTARA

- ANALOGNI FILTRI I LAPLACE TRANSFORMACIJA
- BILINEARNA TRANSFORMACIJA
- BUTTERWORTH FILTAR
- CHEBYSHEV FILTAR

ANALOGNI FILTRI

- Analogni filtri
  - izrađuju se od kondenzatora, otpornika i pojačala
  - matematski se opisuju diferencijalnim jednadžbama
  - jedna od metoda rješavanja je Laplace transformacija
- Laplace transformacija
  - daje prijenosne funkcije slične z transformaciji, s=jω

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\cdots}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\cdots}$$

  - područje je $0 < \omega < \infty$, odgovara I osi kompleksne s ravnine

BILINEARNA TRANSFORMACIJA

- Transformiramo kutnu frekvenciju ω u Ω
  - područje 0-∞ treba transformirati u 0-π
  - koristimo bilinearnu transformaciju:

$$F(z)=\frac{z-1}{z+1}$$

  - spektar bilinearne funkcije je:

$$F(\Omega)=\frac{\exp(j\Omega)-1}{\exp(j\Omega)+1}=\frac{\exp(j\Omega/2)\{\exp(j\Omega/2)-\exp(-j\Omega/2)\}}{\exp(j\Omega/2)\{\exp(j\Omega/2)+\exp(-j\Omega/2)\}}=$$

$$=\frac{2j\sin(\Omega/2)}{2\cos(\Omega/2)}=j\cdot\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

BILINEARNA TRANSFORMACIJA

- Svojstva spektra bilinearne funkcije:
  - tan(x) je periodičan s periodom 2π, od -∝ do -∝
  - nelinearno transformiramo ω u Ω
  - iz H(s) izvedemo H(ω) jer je s=jω

$$H(\omega)=K\frac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2)(j\omega-z_3)\cdots}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)(j\omega-p_3)\cdots}$$

  - sad se zamijeni

$$j\omega=j\cdot\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

  - i dobije se H(Ω)

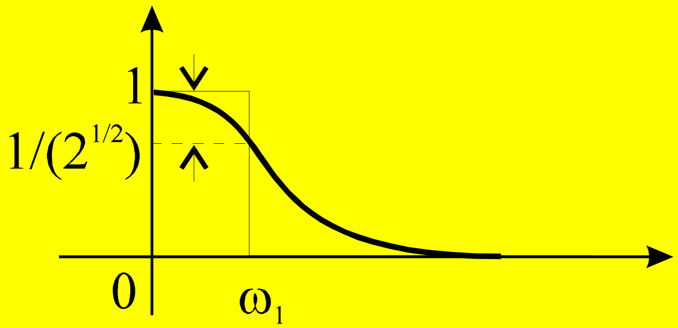
BILINEARNA TRANSFORMACIJA

- Ostvarenje filtra u vremenskom području:
  - na osnovu poznatog H(Ω)
  - izračuna se H(z)
  - sada su na raspolaganju dvije mogućnosti:
    - koristiti polove i nule, za serijski spoj elementarnih filtara
    - koristiti jednadžbu diferencija

BUTTERWORTH FILTAR

- Definicija i svojstva Butterworth filtra:
  - prijenosna funkcija je:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^{2n}\right\}^{1/2}}$$



  - posjeduje svojstvo maksimalne plosnatosti,
    tj. nema valovanja u propusnom i nepropusnom pojasu

BUTTERWORTH FILTAR

- Polovi i nule Butterworth filtra:
  - bilinearna transformacija daje:

$$\left|H(\omega)\right| = \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\tan(\Omega/2)}{\tan(\Omega_1/2)}\right)^{2n}\right\}^{1/2}}$$

  - niskopropusni BF n-tog reda ima
    - jednu n-struku nulu na mjestu -1
    - n polova postavljenih kružno u z ravnini

BUTTERWORTH FILTAR

- Polovi i nule Butterworth filtra:
  - realne i imaginarne komponente polova se računaju

$$PR_m = \left\{1 - \tan^2\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)\right\} \Big/ d$$

$$PI_m = 2\tan\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right) \Big/ d$$

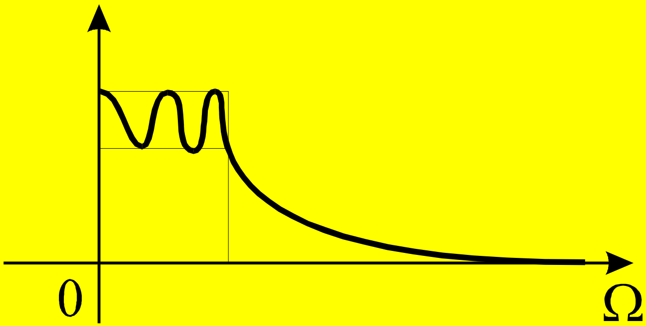
$$d = 1 - 2\tan\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right) + \tan^2\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)$$

  - ako je n paran, mijenjamo $m\pi/n$ sa sa $(2m+1)\pi/2n$

CHEBYSHEV FILTAR

- Definicija i svojstva Chebyshev filtra:
  - prijenosna funkcija je:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\left\{1+\varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\right\}^{1/2}}$$



  - C_n je Chebyshev polinom n-tog reda

$$C_0(x)=1\ ;\ C_1(x)=x\ ;\ C_n(x)=2xC_{n-1}(x)-C_{n-2}(x)$$

  - posjeduje veću strminu brida,
    ali uz cijenu valovanja u propusnom pojasu

CHEBYSHEV FILTAR

- Polovi i nule Chebyshev filtra:
  - bilinearna transformacija daje:

$$\left|H(\Omega)\right| = \frac{1}{\left\{1+\varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{\tan(\Omega/2)}{\tan(\Omega_1/2)}\right)\right\}^{1/2}}$$

  - niskopropusni CF n-tog reda ima
    - jednu n-struku nulu na mjestu -1
    - n polova postavljenih “kardioidno” u z ravnini

CHEBYSHEV FILTAR

- Polovi i nule Chebyshev filtra:
  – realne i imaginarne komponente polova se računaju

$$PR_m = 2\left\{1 - a\tan\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)\cos\phi\right\}\Big/ d - 1$$

$$PI_m = 2b\cdot\tan\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)\sin\phi$$

$$d = \left\{1 - a\tan\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)\cos\phi\right\}^2 + b^2\tan^2\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)\sin^2\phi$$

$$a = 0{,}5\left(c^{1/n} - c^{-1/n}\right)\ ;\ b = 0{,}5\left(c^{1/n} + c^{-1/n}\right)\ ;\ c = \left(1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2}\right)^{1/2}$$

  – ako je n paran, mijenjamo $\phi = m\pi/n$ sa sa $(2m+1)\pi/2n$

10.4. IMPULSNO INVARIJANTNI FILTRI

- PRISTUP SINTEZI
- IZBOR FREKVENCIJE UZORKOVANJA
- KORIŠTENJE ELEMENTARNIH FILTARA

PRISTUP SINTEZI IIF

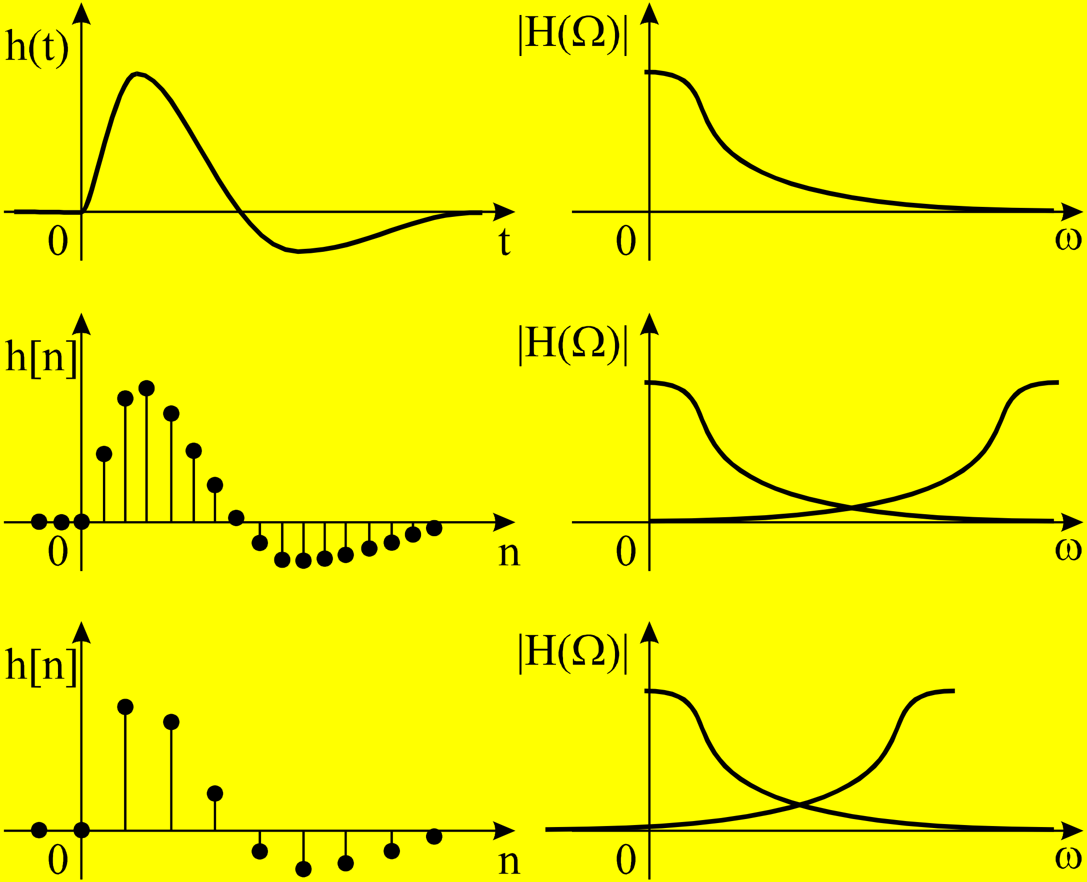
- Impulsno invarijantni filtri:
  - uzmemo vremenski odziv analognog filtra
  - uzorkujemo taj odziv, pazimo na dovoljan broj uzoraka
  - dobijemo vremenski odziv digitalnog filtra
  - ostvarimo konvoluciju!
- Problemi:
  - vremenski odziv analognog filtra često NIJE dostupan
  - radimo konvoluciju - a to NIJE rekurzivni filtar!

IZBOR FREKVENCIJE UZORKOVANJA

- Spektar digitalnog filtra:
  - ako je frekvencija uzorkovanja odziva dovoljna
    - preklapanje frekvencija je zanemarivo
  - ako je frekvencija uzorkovanja niska
    - preklapanje frekvencija znatno izobličava rad filtra

IZBOR FREKVENCIJE UZORKOVANJA

- Grafički:



KORIŠTENJE ELEMENTARNIH FILTARA

- Analogni filtar zadan u s području:

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\cdots}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\cdots}$$

  – razbijemo na parcijalne razlomke:

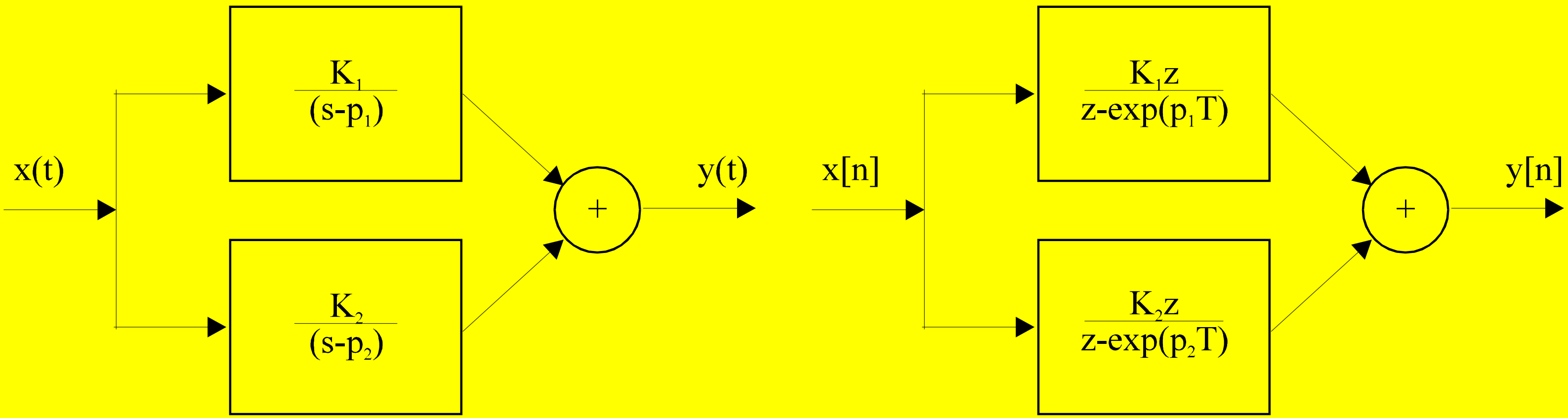
$$H(s) = \frac{K_1}{(s-p_1)} + \frac{K_2}{(s-p_2)} + \frac{K_3}{(s-p_3)}\cdots$$

  – elementarne filtre prebacimo u z područje:

$$H_i(z) = \frac{K_i}{1-\exp(p_i T)z^{-1}} = \frac{K_i z}{z-\exp(p_i T)}$$

KORIŠTENJE ELEMENTARNIH FILTARA

- Paralelni spoj filtara:
  - ostvarimo filtar kao PARALELNI spoj elementarnih filtara



10.5. FILTRI S UZORKOVANJEM FREKVENCIJE

- DEFINICIJA I SVOJSTVA
- DIGITALNI REZONATOR I KOMBINATOR
- FILTAR PROPUSNIK OPSEGA

FILTRI S UZORKOVANJEM FREKVENCIJE

- Definicija i svojstva:
  - poznato je da su neki FIR filtri ostvarivi rekurzivno
  - ovi filtri su mnogo ekonomičniji
  - koristimo digitalni rezonator i kombinator
  - kombinator daje negativni signal zakašnjen m perioda
  - rezonator
    - pobuđen originalnim impulsom počinje oscilirati
    - pobuđen suprotnim impulsom prestane oscilirati
  - zajedno čine elementarni propusnik opsega

DIGITALNI REZONATOR

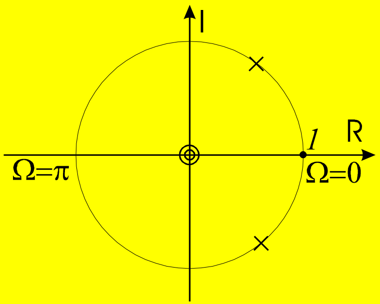
- Rezonator ima polove na jediničnoj kružnici:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^2}{\{z-\exp(j\theta)\}\{z-\exp(-j\theta)\}}=\frac{z^2}{z^2-2z\cdot\cos\theta+1}$$

  – jednadžba diferencija je jednostavna:

$$y[n]=2\cos\theta y[n-1]-y[n-2]+x[n]$$

  – ali odziv oscilira karakterističnom frekvencijom

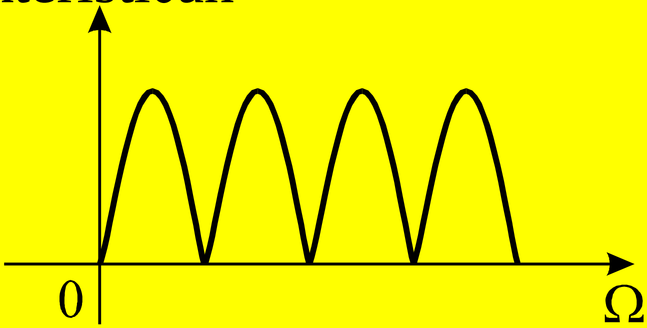


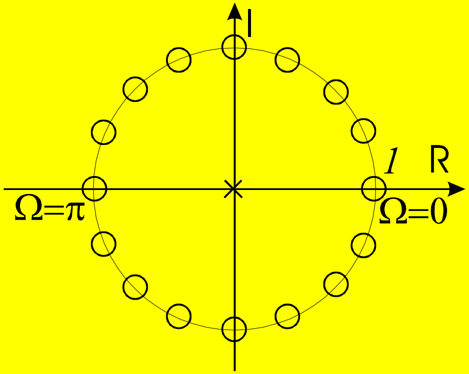
DIGITALNI KOMBINATOR

- Kombinator je sklop čistog kašnjenja:

$$H(z) = 1 - z^{-m} = \frac{z^m - 1}{z^m}$$

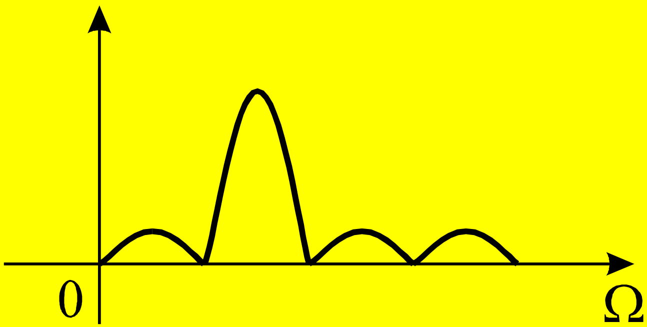
  - ima m nula raspoređenih po jediničnoj kružnici, također i m-struki pol u nuli koji ne smeta:
  - frekvencijski odziv je karakterističan

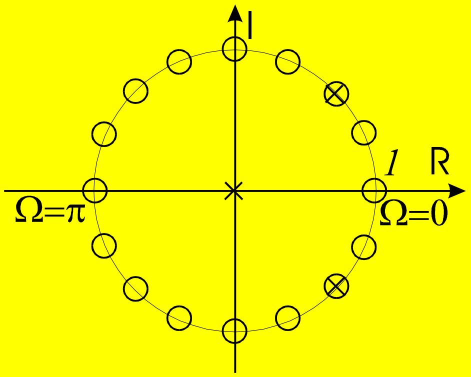




UZORKOVANJE FREKVENCIJA

- Konstruiramo kombinator i rezonator:
  - tako da par polova rezonatora poništi par nula kombinatora
  - kombinator sada pobuđuje rezonatora (serijski spoj)
  - na mjestu poništenih nula, imamo frekvencijski propust

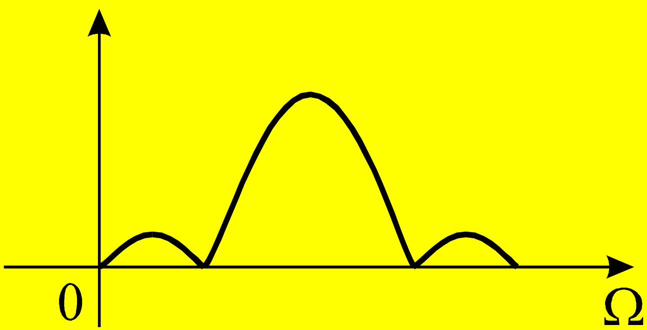


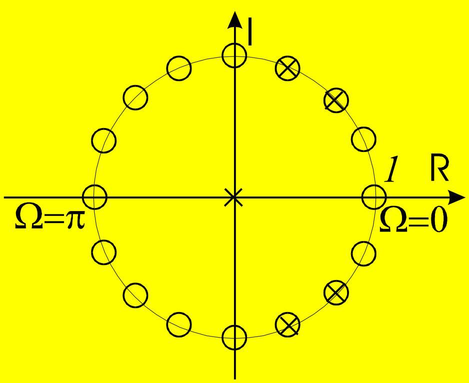


  - ostvarenje filtra je vrlo ekonomično

UZORKOVANJE FREKVENCIJA

- Konstrukcija filtra propusnika opsega:
  - koristimo više rezonatora
  - njihove frekvencije su jednake nulama kombinatora
  - tako poništimo više parova nula, potpuno ili približno
  - postignemo traženi propusni opseg





10.6. DIGITALNI INTEGRATORI

- DEFINICIJA I SVOJSTVA
- POMIČNA SUMA
- TRAPEZNO PRAVILO
- SIMPSONOVO PRAVILO

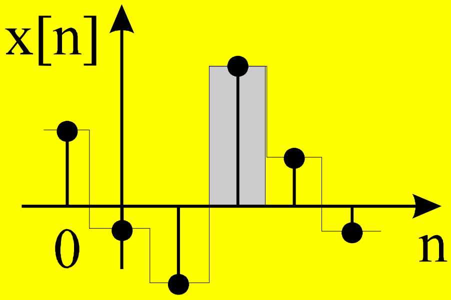
SVOJSTVA DIGITALNIH INTEGRATORA

- Digitalni integrator:
  - integrira ulazni signal, daje površinu ispod krivulje
  - često se koristi u praksi
  - koristimo više poznatih algoritama
    - pomičnu sumu
    - trapezno pravilo
    - Simpsonovo pravilo
  - integracija je prirodno rekurzivni proces
  - pribrajamo nove vrijednosti zajedničkoj sumi
  - problem je ocijeniti veličinu elementarnih površina

POMIČNA SUMA

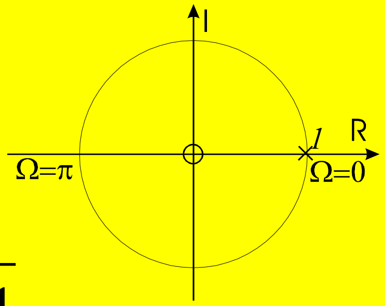
- Digitalni integrator pomične sume definiramo:

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$



  - prijenosna funkcija je:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$



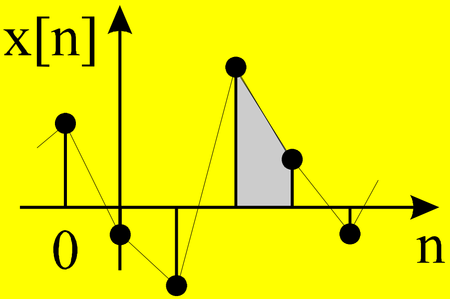
  - a frekvencijska karakteristika

$$H(\Omega) = \frac{1}{1-\exp(-j\Omega)} = \frac{\exp(j\Omega)}{\exp(j\Omega)-1}$$

TRAPEZNO PRAVILO

- Digitalni integrator trapeznog pravila definiramo:

$$y[n] = y[n-1] + 0{,}5\{x[n] + x[n-1]\}$$

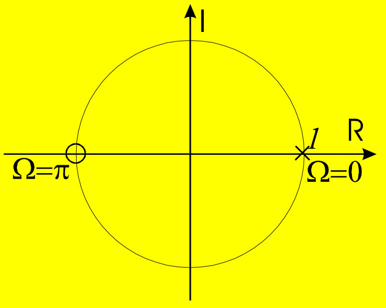


  – prijenosna funkcija je:

$$H(z) = \frac{0{,}5\left(1 + z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)} = \frac{z+1}{2(z-1)}$$

  – a frekvencijska karakteristika

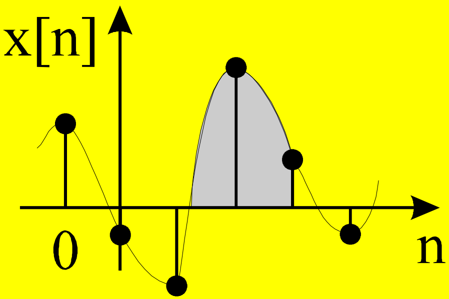
$$H(\Omega) = \frac{\exp(j\Omega) + 1}{2\{\exp(j\Omega) - 1\}}$$



SIMPSONOVO PRAVILO

- Digitalni integrator Simpsonovog pravila definiramo:

$$y[n] = y[n-2] + 0{,}333\{x[n] + 4x[n-1] + x[n-2]\}$$

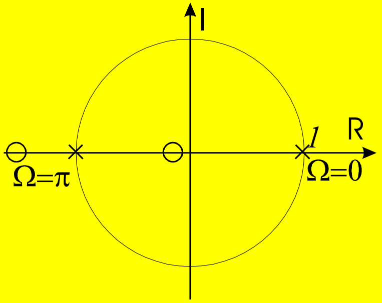


  - prijenosna funkcija je:

$$H(z) = \frac{0{,}333\left(1 + 4z^{-1} + z^{-2}\right)}{\left(1 - z^{-2}\right)} = \frac{z^2 + 4z + 1}{3\left(z^2 - 1\right)}$$

  - a frekvencijska karakteristika

$$H(\Omega) = \frac{\exp(2j\Omega) + 4\exp(j\Omega) + 1}{3\{\exp(2j\Omega) - 1\}}$$



USPOREDBA INTEGRATORA

- Točnost integracije:
  - ovisi o procjeni signala između uzoraka
  - kod svih je integratora dobra za spore signale
    - tada imamo dovoljno uzoraka
  - kod brzih signala rad integratora je lošiji
    - zbog malog broja uzoraka procjena površina je lošija
  - izbor ovisi o aplikaciji
    - npr. za signale sa šumom, izabrat ćemo trapezni integrator jer potiskuje visoke frekvencije