Definirajte lokalne i globalne ekstreme. Što je kritična, a što stacionarna točka? U kakvom su odnosu lokalni ekstrem i kritična točka.

i) Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima lokalni minimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da vrijedi $f(x) > f(x_0)$ za svaki $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$.

ii) Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima lokalni maksimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da vrijedi $f(x) < f(x_0)$ za svaki $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$.

Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima globalni minimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako je $f(x_0) \le f(x)$ za svaki $x \in A$.

Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima globalni maksimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako je $f(x_0) \ge f(x)$ za svaki $x \in A$.
Neprekidna funkcija f na segmentu $[a, b]$ ima globalni ekstrem ili u točki lokalnog ekstrema ili na rubu intervala.

Neka je funkcija f : A → R neprekidna u točki $x_0 \in$ A:
Za točku x_0 kažemo da je stacionarna tocka ako je $f'(x_0) = 0$.
Za točku x_0 kažemo da je kritična točka ako je x_0 stacionarna točka ili ako f nije derivabilna u x_0.

U kakvom su odnosu kritične točke i ekstremi, odgovoreno je na idućem pitanju.

Kako glase nužni, a kako dovoljni uvjeti ekstrema funckije? Dokažite te uvjete.

Teorem 6 (Nužan uvjet za ekstrem) Neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $x_0 \in A$. Ako funkcija f u točki $x_0 \in A$ ima lokalni ekstrem, onda je x_0 kritična točka od f.

f ima ekstrem u $x_0 \Rightarrow x_0$ je krit. točka (

ili ekvivalentno

x_0 nije krit. točka $\Rightarrow$ f nema ekstrem u x_0

Za točku x_0 kažemo da je kritična točka ako je x_0 stacionarna točka ili ako f nije derivabilna u x_0.
Za točku x_0 kažemo da je stacionarna tocka ako je $f'(x_0) = 0$.

Teorem 7 (Dovoljan uvjet za ekstrem) Neka je dana funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in A$ kritična točka od f. Ako derivacija f' mijenja predznak u točki x_0 iz $-$ u $+$ onda je x_0 točka lokalnog minimuma, a ako derivacija f' mijenja predznak u točki x_0 iz $+$ u $-$ onda je x_0 točka lokalnog maksimuma.

Dokaz:
Jednostavno nacrtati primjer grafa s ekstremom u funkciji gdje se vidi isitnitost ovog teorema.

Teorem 8 (Dovoljan uvjet za ekstrem) Neka je dana funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in A$ stacionarna točka od f, tako da je f dvaput derivabilna u x_0. Ako je $f''(x_0) \neq 0$, tada funkcija f u točki x_0 ima lokalni ekstrem i to: ako je $f''(x_0) > 0$, tada je x_0 točka lokalnog minimuma, a ako je $f''(x_0) < 0$, tada je x_0 točka lokalnog maksimuma.

Dokaz

Prethodni dokaz možemo riječima iskazati i na sljedeći način: ako je $f''(c) > 0$, tada je f'' veća od nule i na nekoj okolini točke c. To znači da je prva derivacija f' strogo rastuća na toj okolini. Kako je $f'(c) = 0$, zaključujemo da je f' negativna lijevo od točke c i pozitivna desno do točke c. To pak znači da funkcija f strogo pada lijevo od točke c, a strogo raste desno od točke c pa je c točka lokalnog minimuma.

Kako glasi nužan a kako dovoljan (preko promjene predznaka prve derivacije ili preko druge ili viših derivacija) uvjet da funkcija *f* ima lokalni ekstrem u točki c $\in$ D_f?

Isto kao drugo pitanje samo što umjesto x_0 treba pisati c ☺.

Dokažite da je derivabilna funkcija strogo rastuća na nekom intervalu ako i samo ako je njena derivacija na tom intervalu veća od nule.

Neka je f strogo rastuća i derivabilna na intervalu (a,b). Trebamo dokazati da je $f'(x)>0$ za svaki $x\in(a,b)$.

Odaberimo proizvoljni $x\in(a,b)$. Kako je f rastuća, za $\Delta x<0$ vrijedi $f(x+\Delta x)<f(x)$ pa je

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0.$$

S druge strane, za $\Delta x>0$ vrijedi $f(x+\Delta x)>f(x)$ pa je

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0.$$

Kako je f derivabilna, to je

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0.$$

Točka x je bila proizvoljno odabrana pa zaključujemo da je $f'(x)>0$ za svaki $x\in(a,b)$.

Kako definiramo konveksnost i konkavnost funkcije? Koja su svojstva grafa konveksne i konkavne funkcije? Kako možemo provjeriti konveksnost i konkavnost pomoću druge derivacije? Što su točke infleksije i kako ih pronalazimo? (ovo pitanje se najviše puta ponavlja)

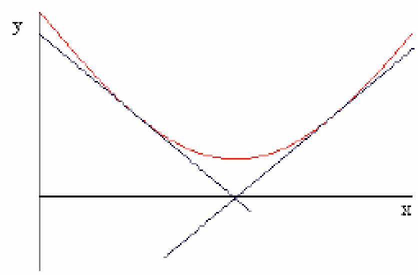
Definicija 4 Za funkciju $f:A\to\mathbb{R}$ kažemo da je konveksna na intervalu $(a,b)\subseteq A$ ako za proizvoljne točke $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1\neq x_2$, vrijedi

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Za funkciju $f:A\to\mathbb{R}$ kažemo da je konkavna na intervalu $(a,b)\subseteq A$ ako za proizvoljne točke $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1\neq x_2$, vrijedi

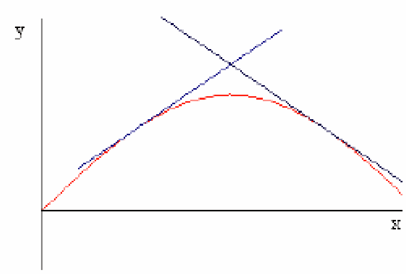
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

U slucaju strogih nejednakosti, za funkciju *f* kažemo da je strogo konveksna odnosno strogo konkavna.
*stroge nejednakosti→ umjesto <= ide <, a umjesto >= ide >.



graf strogo konveksne funkcije i tangenta

Ako je $f:A\to\mathbb{R}$ konveksna na intervalu $(a,b)\subseteq A$, onda se njen graf nalazi iznad tangente u svakoj točki $x\in(a,b)$.



graf strogo konkavne funkcije i tangenta

Ako je $f:A\to\mathbb{R}$ konkavna na intervalu $(a,b)\subseteq A$, onda se njen graf nalazi ispod tangente u svakoj točki $x\in(a,b)$.

Kako provjeriti konveksnost i konkavnost pomoću druge derivacije?
U koliko je neka funkcija dvaput derivabilna na nekom intervalu (a, b), onda vrijedi:

i) funkcija je konveksna na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$,
ii) funkcija je konkavna na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$,
iii) ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo konveksna na intervalu (a, b),
iv) ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo konkavna na intervalu (a, b).

Točka infleskije je točka u kojoj funkcija prelazi iz konkavnosti u konveksnost ili obratno:

Definicija 4 Za neprekidno derivabilnu funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da ima infleksiju u točki $x_0 \in A$ ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je funkcija f na intrervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ strogo konveksna, a na intervalu $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ strogo konkavna ili obrnuto.
Točku $(x_0, f(x_0))$ nazivamo točkom infleksije grafa funkcije f.

Teorem 12 Neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima na nekoj okolini $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ točke $x_0 \in A$ neprekidne derivacije do uključivo reda n, za $n \geq 3$. Neka je

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ako je n neparan, tada funkcija f ima infleksiju u točki x_0.
Ako je još $f'(x_0) = 0$ i ako je n paran, tada funkcija f ima ekstrem u točki x_0 i to lokalni minimum za $f^{(n)}(x_0) > 0$ i lokalni maksimum za $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Definirajte pojmove konkavnosti i konveksnosti, te točke infleksije. Kako glasi dovoljan uvjet za točku infleksije?
Prvo podpitanje je odgovoreno!

Teorem 11 (Dovoljan uvjet za postojanje infleksije) Neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ dvaput derivabilna na nekoj okolini $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ točke $x_0 \in A$ osim možda u točki x_0. Ako f'' mijenja predznak u točki x_0 onda f u točki x_0 ima infleksiju.

Preporucujem i ovo znat:

Teorem 10 (Nužan uvjet za postojanje infleksije) Ako funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima infleksiju u točki $x_0 \in A$ i ako $f''(x_0)$ postoji, onda je $f''(x_0) = 0$.

Definirajte pojam niza i limesa niza. Definirajte podniz i gomilište. Dokažite da je limes niza jedinstven.

Definicija 1 Svaku funkciju $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo niz realnih brojeva (kraće niz).
Broj $a(n) \equiv a_n$ nazivamo opći član niza (ili $n-$ti član niza).

Niz obično označavamo sa (a_n) ili $\{a_n\}$ ili ponekad sa

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad .$$

Definicija 4 Kažemo da je realan broj a granična vrijednost ili limes niza $\{a_n\}$ ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ takav da } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Pišemo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Ako limes postoji kažemo da je niz $\{a_n\}$ konvergentan odnosno da konvergira (prema a). U protivnom kažemo da je divergentan odnosno da divergira.

Definicija 7 Podniz niza $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ je svaka kompozicija $a \circ n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdje je $n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija (niz u $\mathbb{N}$).

Dakle, podniz nekog niza $\{a_n\}$ je ponovno niz.
Općenito, $k-$ti član podniza $a \circ n$ je

$$(a \circ n)(k) = a(n(k)) = a_{n(k)} = a_{n_k}.$$

Definicija 6 Kažemo da je realan broj r gomilište niza $\{a_n\}$ ako svaka $\varepsilon-$ okolina od r sadrži beskonačno članova tog niza, odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (\exists n' \in \mathbb{N}) \text{ takav da je } n' > n \text{ i } |a_{n'} - r| < \varepsilon.$$

Niz može imati najviše jedan limes. Dokaz:

Neka su a i $\bar{a}$ dva različita (konačna) limesa niza $\{a_n\}$. Neka je $\varepsilon = |a - \bar{a}|/2$. Tada se unutar intervala $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ mora nalaziti beskonačno članova niza, dok se izvan toga intervala nalazi samo konačno članova niza. Isto mora vrijediti i za interval $(\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon)$. Kako su intervali disjunktni, to je nemoguće.

Definirajte niz, podniz, limes i gomilište. Koji je odnos limesa i gomilišta.

Prvo podpitanje jke odgovoreno na prethodnom pitanju.

Odnos limesa i gomilišta:

Najveće gomilište se naziva limes superior i označava s

$$\limsup a_n,$$

a najmanje gomilište se naziva limes inferior i označava

$$\liminf a_n.$$

Napomena: Limes je gomilište, dok gomilište općenito ne mora biti limes.

Ukoliko je niz $\{a_n\}$ konvergentan onda je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup a_n = \liminf a_n.$$

Što je red brojeva? Kako definiramo sumu reda? Što je geometrijski red, kada ima sumu i kako je računamo?

Definicija 8 Red realnih brojeva je uređeni par $((a_n), (s_k))$ realnih nizova (a_n) i (s_k), pri čemu je

$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Broj a_n nazivamo $n-$ti član reda, broj $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ nazivamo $k-$ta parcijalna suma, a niz (s_k) niz parcijalnih suma.

Red $(\{a_n\}, \{s_k\})$ kraće zapisujemo kao

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots .$$

Definicija 9 Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da konvergira ako konvergira niz pripadnih parcijalnih suma (s_k). U tom slučaju graničnu vrijednost

$$\lim_{k\to\infty} s_k = s$$

nazivamo sumom reda i pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Još se koriste izrazi: red je konvergentan ili niz $\{a_n\}$ je zbrojiv ili sumabilan.

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne konvergira kažemo da divergira.

GEOMETRIJSKI RED:

Primjer Red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad q \in \mathbb{R}.$$

nazivamo geometrijski red. Uočimo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

- $q = 1 \Longrightarrow s_k = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = k$
  $\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} k = +\infty$, red divergira;
- $q = -1 \Longrightarrow s_k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{k-1} \Longrightarrow$

$$s_k = \begin{cases} (1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) = 0, & k \text{ paran} \\ (1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + 1 = 1, & k \text{ neparan} \end{cases}$$

Dakle za q=+-1 red divergira.

• $q \neq \pm 1 \implies$ (suma kon. geom. reda) $\implies$

$$s_k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q} \implies$$

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-q^k}{1-q} = \frac{1}{1-q} \lim_{k\to\infty} \left(1-q^k\right) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-q} \cdot (1-0) = \frac{1}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{divergira} & |q| > 1. \end{cases}$$

Dakle red $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konvergira za $|q| < 1$, a inače (za $|q| \geq 1$) divergira.

Kako glasi nužan uvjet konvergencije reda brojeva? Dokažite taj uvjet.

Teorem 10 (nužan uvjet konvergencije) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira onda je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Dakle, postoje redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ za koje vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a divergentni su, ali su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ za koje vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ jedini "kandidati" za konvergenciju.

DOKAZ:

Neka je

$$s = \sum a_n = \lim s_n,$$

pri čemu je $\{s_n\}$ limes niza parcijalnih suma. Kako limes niza ne ovisi o pomicanju indeksa za konačan broj mjesta, vrijedi $\lim s_{n-1} = s$. Sada imamo

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) \overset{\text{Tm. 6.6 (ii)}}{=} \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$$

i teorem je dokazan.

Kako definiramo red brojeva i kako definiramo konvergenciju reda? Dokažite nužan uvjet konvergencije.

Ovo je vec odgovoreno kroz kombinaciju gornja dva pitanja.

Navedite nužan uvjet i opišite kriterije konvergencije redova s pozitivnim članovima – poredbene, D'Alembertov; Cauchijev; Raabov.

Teorem 10 (nužan uvjet konvergencije) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira onda je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Dakle, postoje redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ za koje vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a divergentni su, ali su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ za koje vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ jedini "kandidati" za konvergenciju.

KRITERIJI KONVERGENCIJE:

Prije svega zamislimo da imamo dva reda: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s pozitivnim članovima.

i) Poredbeni kriterij I Red je konvergentan ako ima konvergentnu majorantu, a divergentan ako ima divergentnu minorantu.

*Objašnjenje majorante i minorante:

Definicija 11 Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dva reda s pozitivnim članovima. Kažemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ minoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0$ povlači $a_n \leq b_n$.

ii) Poredbeni kriterij II Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r.$$

a) ako je $0 < r < +\infty$, tada oba reda ili konvergiraju ili divergiraju;

b) ako je $r = 0$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira;

c) ako je $r = 0$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira;

e) ako je $r = +\infty$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira, tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

d) ako je $r = +\infty$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira;

iii) D'Alambertov kriterij Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Ako je $q < 1$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

iv) Cauchyjev kriterij Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Ako je $q < 1$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

v) Raabeov kriterij Neka je

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q.$$

Ako je $q > 1$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je $q < 1$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Što je niz funkcija? Definirajte konvergenciju po točkama i uniformnu konvergenciju niza funkcija, te navedite u kakvom su odnosu?

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$. Označimo s $\mathbb{R}^D$ skup svih funkcija iz D u $\mathbb{R}$, tj.

$$\mathbb{R}^D = \{f \mid f : D \to \mathbb{R}\}$$

Definicija 13 Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$. Niz funkcija je svaka funkcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^D$, pri čemu je

$$f(n) = f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Funkciju f_n nazivamo $n-$ti član niza.

Niz funkcija označavamo s $\{f_n\}$ ili ponekad sa

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots \quad .$$

Definicija 14 Niz funkcija $\{f_n\}$ konvergira u točki x prema funkciji f_0 ako niz realnih brojeva $\{f_n(x)\}$ konvergira prema $f_0(x)$.

Niz funkcija $\{f_n\}$ konvergira po točkama ili obično prema funkciji f_0 na skupu $A \subseteq D$ ako niz realnih brojeva $\{f_n(x)\}$ konvergira prema $f_0(x)$ za svaki $x \in A$. Simbolički zapisujemo

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon.$$

Napomena: n_0 iz definicije ovisi općenito o x i ε.

Definicija 15 Niz funkcija $\{f_n\}$ konvergira jednoliko (ili uniformno) prema funkciji f_0 na skupu $A \subseteq D$ ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall x \in A)\,(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon.$$

Napomena: n_0 iz ove definicije ovisi općenito samo o ε.

Niz funkcija koji konvergira uniformno konvergira i po točkama na nekom skupu.
Ako niz neprekidnih funkcija $\{f_n\}$ konvergira uniformno prema funkciji f_0, tada je i f_0 neprekidna funkcija.
Ako konvergencija nije uniformna, tada funkcija f ne mora biti neprekidna funkcija.

Što je Taylorov razvoj funkcije *f* u točki x_0? Navedite primjer razvoja neke funkcije u MacLaurinov red?

Teorem 17 Neka funkcija f ima na intervalu (a,b) derivaciju do $n+1$ reda. Tada za proizvoljnu točku $x_0 \in (a,b)$ i za svaki $x \in (a,b)$ vrijedi

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

... gdje je R_n ostatak.

Teorem 18 Neka funkcija f ima na intervalu (a,b) derivacije proizvoljnog reda. Tada za proizvoljnu točku $x_0 \in (a,b)$ i za svaki $x \in (a,b)$ vrijedi

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{5}$$

ako i samo ako niz ostataka $\{R_n(x)\}$ teži prema 0 za svaki $x \in (a,b)$.

Red potencija (5) se naziva Taylorov red ili Taylorov razvoj funkcije f u točki x_0.

Taylorov razvoj funkcije f u točki $x_0 = 0$ naziva se MacLaurinov razvoj,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Primjer funkcije f(x) = cos x:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x &\Longrightarrow\quad & f'(0) = 0\\
f''(x) &= -\cos x &\Longrightarrow\quad & f''(0) = -1\\
f'''(x) &= \sin x &\Longrightarrow\quad & f'''(0) = 0\\
f^{iv}(x) &= \cos x &\Longrightarrow\quad & f^{iv}(0) = 1\\
f^{v}(x) &= -\sin x &\Longrightarrow\quad & f^{v}(0) = 0
\end{aligned}$$

zaključujemo

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{Z} \\ (-1)^k & n = 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

pa je

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{-1}{6!}x^6 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}$$