DIGITALNI SUSTAVI ZA OBRADU SIGNALA

DSOS14

Julije Ožegović
FESB Split

DIGITALNI SUSTAVI ZA OBRADU SIGNALA

- UVOD: ANALOGNI I DIGITALNI SUSTAVI
- I. OSNOVE DIGITALNE OBRADE SIGNALA
- II. DIGITALNI FILTRI U VREMENSKOM I FREKVENCIJSKOM PODRUČJU
- III. STRUKTURA DIGITALNIH SUSTAVA ZA OBRADU SIGNALA
- IV. DIGITALNA OBRADA SIGNALA U PRIMJENI

I. OSNOVE DIGITALNE OBRADE SIGNALA

1. DIGITALNA OBRADA SIGNALA
2. SUSTAVI ZA DIGITALNU OBRADU SIGNALA
3. ANALIZA U VREMENSKOM PODRUČJU
4. DIGITALNA KONVOLUCIJA
5. ANALIZA U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU
6. TRANSFORMACIJA APERIODIČKIH DIGITALNIH SEKVENCI
7. Z TRANSFORMACIJA

7. Z TRANSFORMACIJA

- 7.1. DEFINICIJA Z TRANSFORMACIJE
- 7.2. INVERZNA Z TRANSFORMAICIJA
- 7.3. POLOVI I NULE U Z RAVNINI
- 7.4. LTI 1. I 2. REDA U Z RAVNINI

7.1. DEFINICIJA Z TRANSFORMACIJE

- MOTIVACIJA
- DEFINICIJA Z TRANSFORMACIJE
- INTERPRETACIJE Z TRANSFORMACIJE

- MOTIVACIJA ZA Z TRANSFORMACIJU

- Z transformacija nudi skup tehnika:
  - za frekvencijsku analizu signala i sustava
  - za sintezu sustava
- Z transformacija:
  - je povezana sa Fourierovom transformacijom
  - je povezana sa diskretnim sustavima
- Z transformacija omogućava:
  - kompaktni postupak zapisa diskretnih signala i sustava
  - sintezu sustava postupcima u širokoj primjeni
  - vizualizaciju sustava kroz polove i nule u Z ravnini

DEFINICIJA Z TRANSFORMACIJE

- Z transformacija je definirana izrazom:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

  - definicija je unilateralna, od 0 do ∞,
  - X(z) ne vodi računa o vrijednostima x[n] prije n=0
  - to je često prikladno za opis rada sustava i signala, odgovara kauzalnim sustavima
  - alternativna bilateralna transformacija može biti nestabilna
  - X(z) je u biti niz potencija od z^{-1}, polinom od z^{-1}

DEFINICIJA Z TRANSFORMACIJE

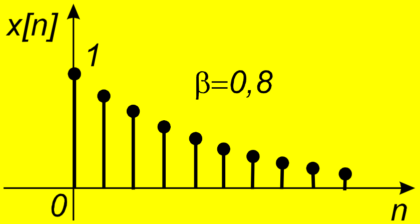
- Z transformacija:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

  - X(z) je u biti niz potencija od z^{-1}, polinom od z^{-1}
  - uzastopne vrijednosti su vrijednosti od x[n]
  - ako je X(z) iskazan polinomom, odmah možemo očitati X[n]
  - taj način je uvijek raspoloživ, iako možda ne i ekonomičan

DEFINICIJA Z TRANSFORMACIJE

- Z transformacija primjer:
  - neka je zadan $x[n]=0{,}8^n$
  - slijedi:



$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\cdot z^{-n}=$$

$$=1+0{,}8z^{-1}+0{,}64z^{-2}+0{,}512z^{-3}+\cdots=$$

$$=1+\left(0{,}8z^{-1}\right)+\left(0{,}8z^{-1}\right)^2+\left(0{,}8z^{-1}\right)^3+\cdots=$$

$$=\frac{1}{1-0{,}8z^{-1}}=\frac{z}{z-0{,}8}$$

  - signal sadrži beskonačan broj uzoraka,
    ali z transformacija je ekstremno kompaktna

INTERPRETACIJA Z TRANSFORMACIJE

- Z transformacija interpretacija:
  - neka je z = exp(jΩ)
  - dobijemo:

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot \exp(-j\Omega n)$$

  - a to je Fourieroa transformacija, uzeta od n=0!
  - z transformacija i Fourierova transformacija su srodne!
  - neka je z **operator vremenskog pomaka**
  - množenje sa z znači pomak u vremenu za T

INTERPRETACIJA Z TRANSFORMACIJE

- Z transformacija i jedinični impuls:
  - neka je x[n]=δ[n]
  - dobijemo:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta[n]\cdot z^{-n}=z^{-n}\Big|_{n=0}=1$$

  - za pomaknuti impuls dobijemo:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta[n-n_0]\cdot z^{-n}=z^{-n}\Big|_{n=n_0}=z^{-n_0}$$

  - vremenski pomak kod z transformacije rezultira jednostavnim množenjem sa z u frekvencijskom području

INTERPRETACIJA Z TRANSFORMACIJE

- Z transformacija i i konvolucija:
  - konvolucija u vremenskom području odgovara množenju u frekvencijskom području
  - primjer: ako je u vremenskom području
    - x[n] = 1 –2 3 –1 –1; h[n]=2 1 –1; y[n] = 2 –3 3 3 –6 0 1
  - tad je u frekvencijskom području:

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3} - z^{-4} \qquad H(z) = 2 + z^{-1} - z^{-2}$$

$$X(z) \cdot H(z) = 2 - 3z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} - 6z^{-4} + z^{-6}$$

  - dobijemo neposredno traženi y[n]!

7.2. INVERNA Z TRANSFORMACIJA

- DEFINICIJA INVERNE Z TRANSFORMACIJE
- RAZVOJ NA PARCIJALNE RAZLOMKE
- REKURZIVNI ALGORITAM
- TEOREM KONAČNE VRIJEDNOSTI

DEFINICIJA INVERZNE Z TRANSFORMACIJE

- Za niz potencija od z:
  - signal se može rekonstruirati čitanjem koeficijenata
- formalno, inverzna z transformacija je

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

  - krivuljni integral je teško primjenjiv
  - raspoložive su jednostavnije metode:
    - transformacija niza potencija (vidi gore)
    - razbijanje na parcijalne razlomke
      i korištenje elementarnih transformacija
    - rekurzivni algoritam

RAZVOJ NA PARCIJALNE RAZLOMKE

- Polazimo od kompaktnog zapisa:

$$X(z)=\frac{1}{z(z-1)(2z-1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{(z-1)}+\frac{C}{(2z-1)}$$

  – Svodimo na zajednički nazivnik

$$X(z)=\frac{A(z-1)(2z-1)+Bz(2z-1)+Cz(z-1)}{z(z-1)(2z-1)}=\frac{z^2(2A+2B+C)+z(-3A-B-C)+A}{z(z-1)(2z-1)}$$

  – Riješimo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned}(2A+2B+C)&=0\\(-3A-B-C)&=0\\A&=1\end{aligned}$$

$$X(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{(z-1)}-\frac{4}{(2z-1)}$$

RAZVOJ NA PARCIJALNE RAZLOMKE

- Transformiramo elementarne funkcije:
  - imamo

$$\delta[n] \leftrightarrow 1 \;;\; u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \;;\; a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

  - sredimo X(z)

$$X(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{(z-1)} - \frac{4}{(2z-1)} = z^{-1}\left\{1 + \frac{z}{(z-1)} - \frac{2z}{(z-0{,}5)}\right\}$$

  - dobijemo x[n]

$$x[n] = \delta[n-1] + u[n-1] - 2\left(0{,}5^{n-1}u[n-1]\right)$$

$$x[n] = 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}75 \;\; 0{,}875$$

- REKURZIVNI ALGORITAM

- Pretpostavimo da z transformacija prikazuje LTI:

$$y[n] = x[n] * h[n] \;\leftrightarrow\; Y(z) = X(z) \cdot H(z)\ ;\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

  – uzmimo istu z transformaciju

$$X(z) = \frac{1}{z(z-1)(2z-1)} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z)\{z(z-1)(2z-1)\} = X(z)$$

$$2z^3Y(z) - 3z^2Y(z) + zY(z) = X(z)$$

- REKURZIVNI ALGORITAM

- Pretpostavimo da z transformacija prikazuje LTI:
  - dobijemo

$$2y[n+3]-3y[n+2]+y[n+1]=x[n]$$

$$2y[n]-3y[n-1]+y[n-2]=x[n-3]$$

$$y[n]=1{,}5y[n-1]-0{,}5y[n-2]+0{,}5x[n-3]$$

  - odnosno

$$h[n]=1{,}5h[n-1]-0{,}5h[n-2]+0{,}5\delta[n-3]$$

$$h[n]=0\ \ 0\ \ 0\ \ 0{,}5\ \ 0{,}75\ \ 0{,}875$$

TEOREM KONAČNE VRIJEDNOSTI

- Definicija teorema konačne vrijednosti:
  - ako $x[n] \leftrightarrow X(z)$
  - tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(x[n]\right)=\lim_{z\to 1}\left\{\left(\frac{z-1}{z}\right)X(z)\right\}$$

  - odziv na step u[n]

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}\cdot H(z)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(y[n]\right)=\lim_{z\to 1}\left\{\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right)H(z)\right\}=\lim_{z\to 1}\left[H(z)\right]$$

TEOREM KONAČNE VRIJEDNOSTI

- Primjer odziva na step:
  - ako je:

$$y[n] - 0{,}8y[n-1] = x[n]$$

$$H(z) = \frac{z}{(z - 0{,}8)}$$

  - slijedi:

$$\operatorname*{limes}_{n\to\infty}(y[n]) = y(\infty) = \operatorname*{limes}_{z\to 1}[H(z)] = \frac{1}{(1-0{,}8)} = 5{,}0$$

7.3. POLOVI I NULE U Z RAVNINI

- DEFINICIJA POLOVA I NULA
- Z RAVNINA
- ZNAČAJ JEDINIČNOG KRUGA
- FREKVENCIJA U Z PODRUČJU

- DEFINICIJA POLOVA I NULA

- Opći oblik z transformacije je razlomak:
  - a to su polinomi od z koje možemo pisati u obliku:

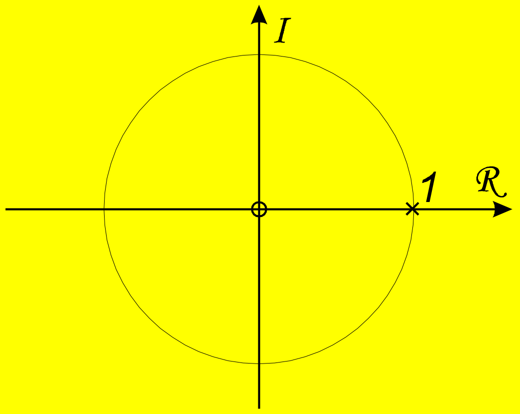
$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = K\,\frac{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\cdots}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)\cdots}$$

  - z_k su **nule** od X(z); to su vrijednosti od z za koje je X(z)=0
  - p_k su **polovi** od X(z); to su vrijednosti od z za koje je X(z)=∞
  - za realne funkcije, polovi i nule su
    - realni
    - konjugirano kompleksni b±jc

- Z RAVNINA

- Crtamo polove i nule u kompleksnoj ravnini:
  - ravninu zovemo **z-ravnina**
  - npr.

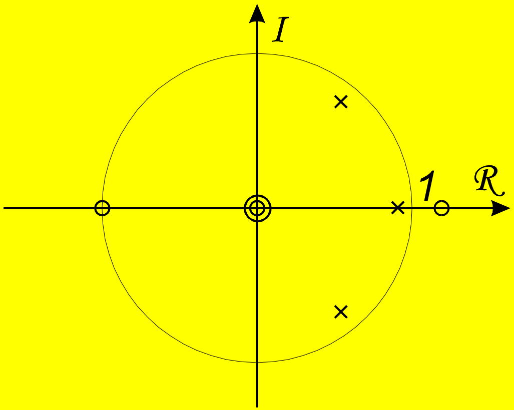
$$u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \;\; ; \;\; z_1 = 0 + j0 \;\; , \;\; p_1 = 1 + j0$$

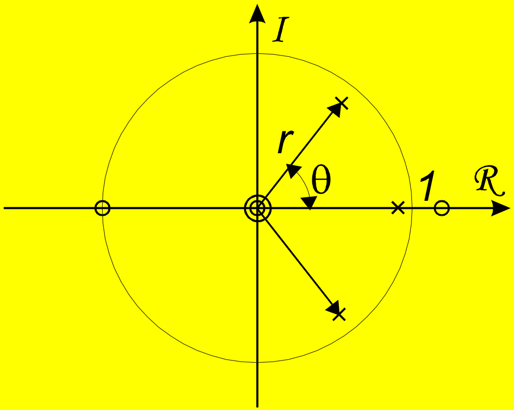


- Z RAVNINA

- Crtamo polove i nule u kompleksnoj ravnini:
  - primjer

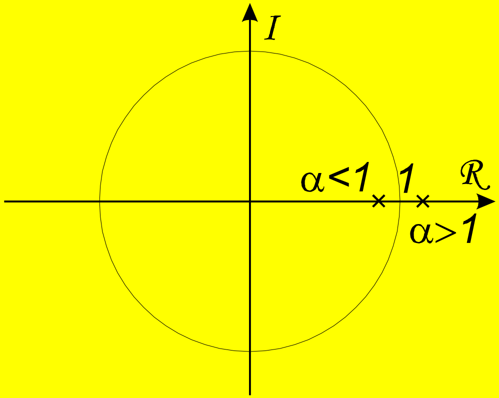
$$X(z)=\frac{z^2(z-1,2)(z+1)}{(z-0,5+j0,7)(z-0,5-j0,7)(z-0,8)}=\frac{z^2(z-1,2)(z+1)}{(z-r\exp(j\theta))(z-r\exp(-j\theta))(z-0,8)}$$





- ZNAČAJ JEDINIČNOG KRUGA

- Položaj polova je bitan:
  - neka je $$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{(z-\alpha)}$$
  - jednadžba diferencija je: $$h[n]=\alpha h[n-1]+\delta[n-1]$$
  - odziv je: $$h[n]=0,1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4\cdots$$
  - za $\alpha>1$: raspiruje se
  - za $\alpha<1$: teži nuli
  - slijedi pol mora biti **unutar jediničnog kruga**!

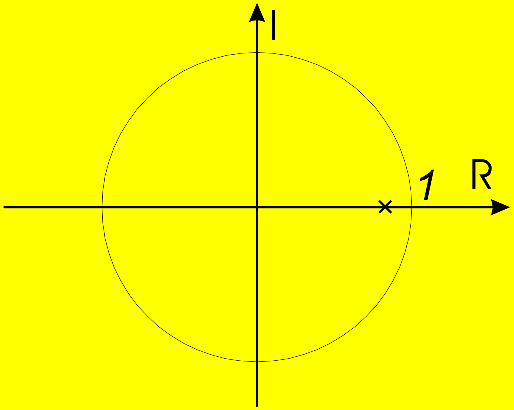


- ZNAČAJ JEDINIČNOG KRUGA

- Položaj polova je bitan:
  - neka je

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{(z-0,8)}$$

  - za

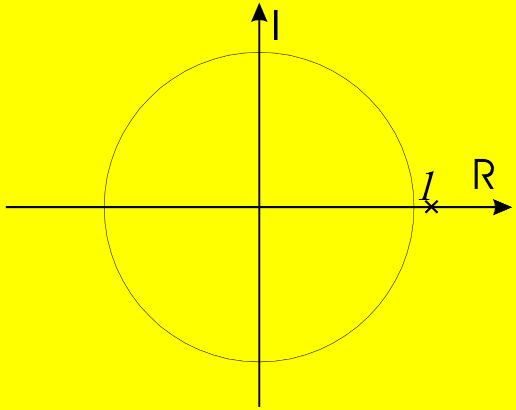


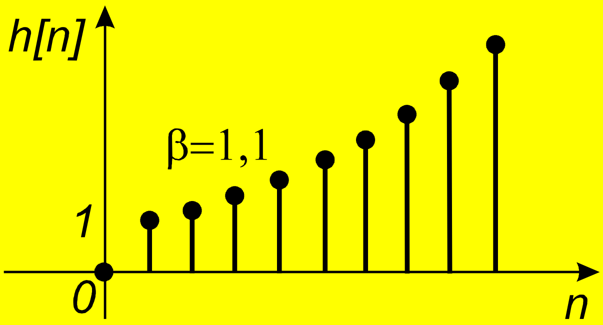
- ZNAČAJ JEDINIČNOG KRUGA

- Položaj polova je bitan:
  - neka je

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{(z-1{,}1)}$$

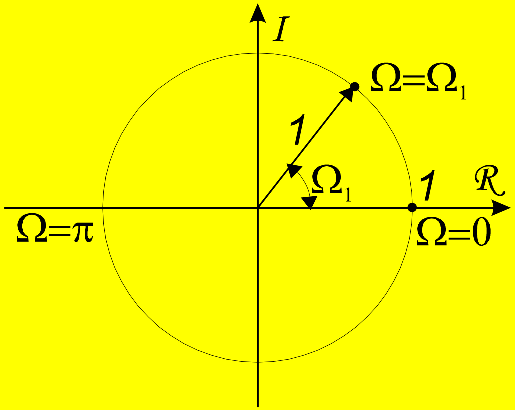
  - za





- FREKVENCIJA U Z PODRUČJU

- Neka je $z = \exp(j\Omega)$:
  - vrijednosti : $z = \exp(j\Omega)$ leže u z ravnini
  - vrijedi $|\exp(j\Omega_1)|=1$, $\theta= \Omega_1$

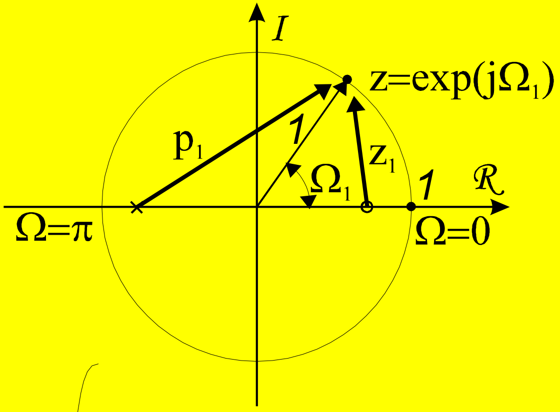


  - kružeći s desna na lijevo obilazimo sve frekvencije s periodom 2π - to je posljedica uzorkovanja

- FREKVENCIJA U Z PODRUČJU

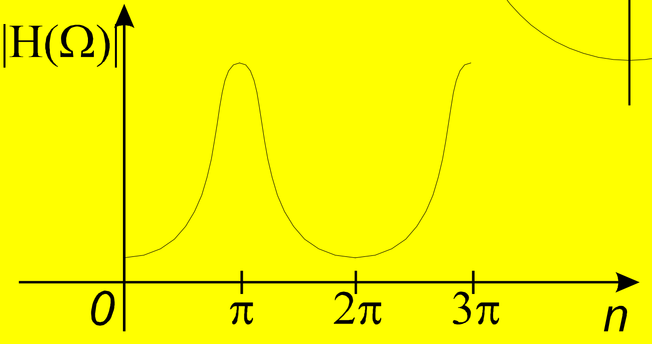
- Izračunajmo frekvensijku karakteristiku LTI:
  - neka je $$H(z)=\frac{(z-0{,}8)}{(z+0{,}8)}$$
  - zamijenimo z=exp(jΩ)

$$H(\Omega)=\frac{(\exp(j\Omega)-0{,}8)}{(\exp(j\Omega)+0{,}8)}$$



$$H(\Omega)\underset{z=0\cdots2\pi}{=}\frac{z_1}{p_1}$$

  - dobijemo:



7.4. LTI 1. I 2. REDA U Z RAVNINI

- LTI KAO SERIJSKI SPOJ SUSTAVA 1. I 2. REDA
- SVOJSTVA SUSTAVA 1. REDA
- SVOJSTVA SUSTAVA 2. REDA

LTI KAO SERIJSKI SPOJ SUSTAVA

- Interpretacija H(z):
  - imamo:

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=K\frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)\cdots}$$

  - sustav prvog stupnja:

$$H_1(z)=\frac{(z-z_1)}{(z-p_1)}$$

  - sustav drugog stupnja:

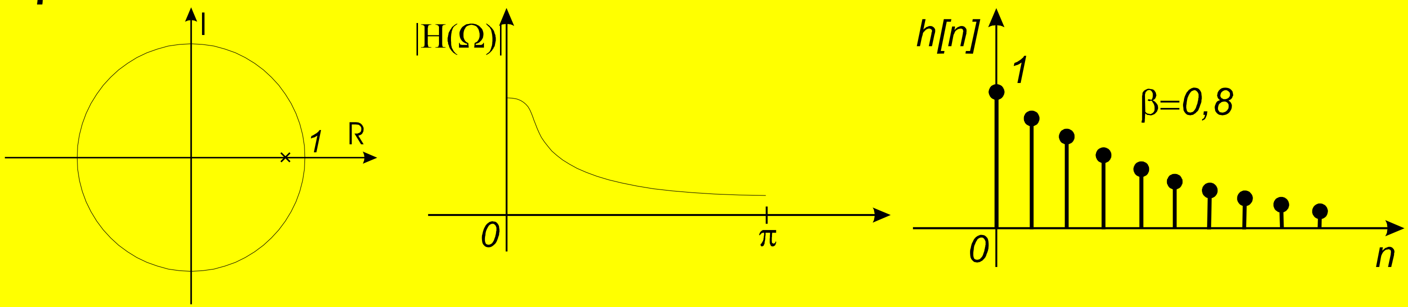
$$H_2(z)=\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z-p_2)(z-p_3)}$$

  - slijedi:

$$H(z)=K\cdot H_1(z)\cdot H_2(z)\cdots$$

SUSTAV PRVOG REDA

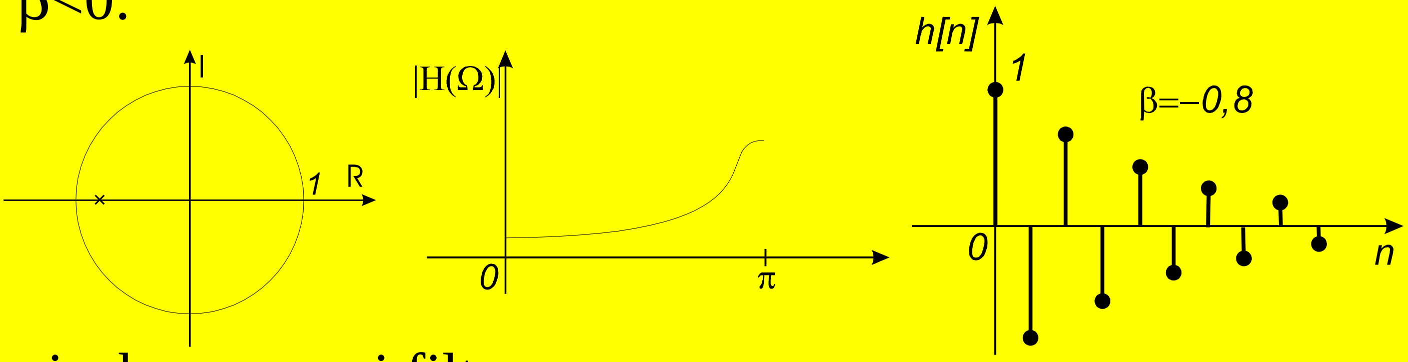
- Sustav prvog reda
  - imamo: $$H_1(z) = \frac{z}{(z-\beta)}$$
  - β>0:



  - niskopropusni filtar
  - karakteristična istosmjerna komponenta
  - eksponencijalni odziv $$y[n] = \beta y[n-1] + x[n]$$

SUSTAV PRVOG REDA

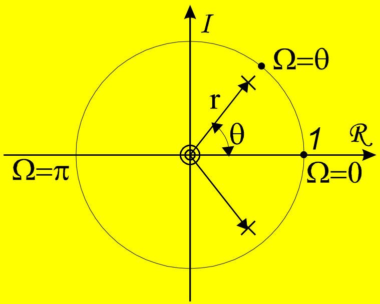
- Sustav prvog reda
  - imamo: $$H_1(z) = \frac{z}{(z-\beta)}$$
  - $\beta<0$:

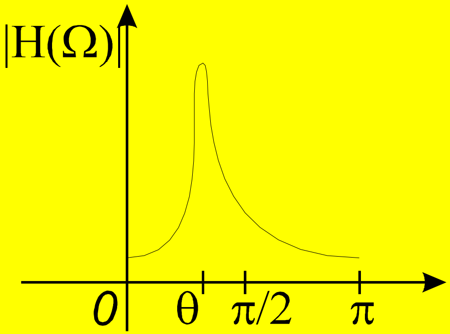


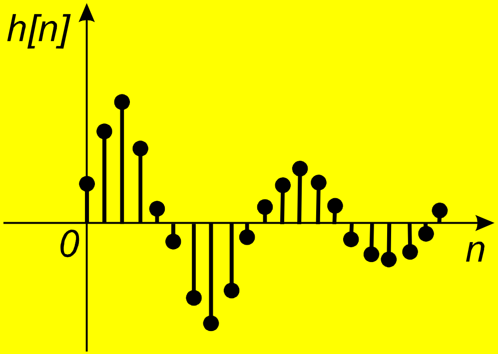
  - visokopropusni filtar
  - karakteristična frekvencija polovine frekvencije uzorkovanja
  - eksponencijalni alternirani odziv $$y[n] = -\beta y[n-1] + x[n]$$

SUSTAV DRUGOG REDA

- Sustav drugog reda
  - imamo:
    $$H_2(z) = \frac{z^2}{(z - p_2)(z - p_3)} = \frac{z^2}{(z - r \cdot \exp(j\theta))(z - r \cdot \exp(-j\theta))}$$
  - polovi su često konjugirano-kompleksni
  - frekvencija ovisi o θ, a širina pojasa o r
    uski pojas postiže se s r približno 1







UPOTREBA POLOVA I NULA

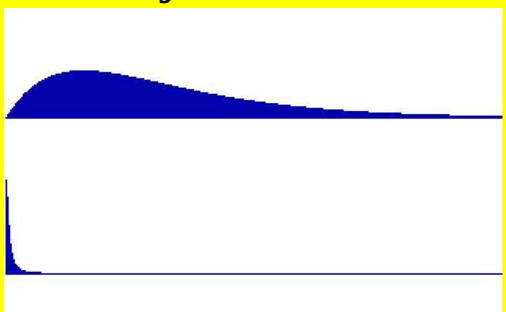
- Upotreba polova i nula
  - polovi su dominantni
  - postavimo polove prema željenoj karakteristici
  - dodamo potreban broj nula da se otkloni kašnjenje odziva
  - pol bliže jediničnoj kružnici:
    - uži frekvencijski pojas
    - duži vremenski odziv
  - pol dalji od jedinične kružnice
    - širi frekvencijski pojas
    - kraći vremenski odziv

UPOTREBA POLOVA I NULA

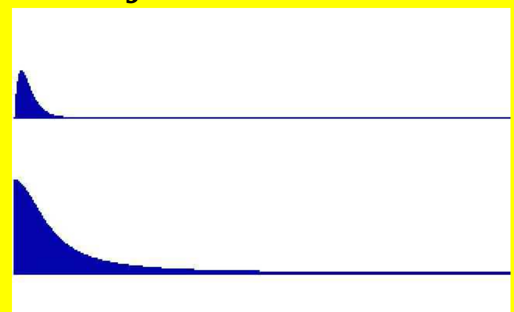
- Program 10 – sustav prvog reda:
  - pol 0,98+j0

t

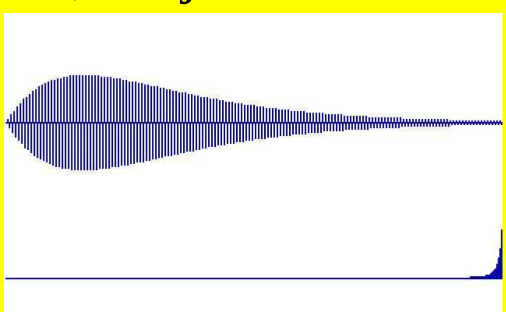
f



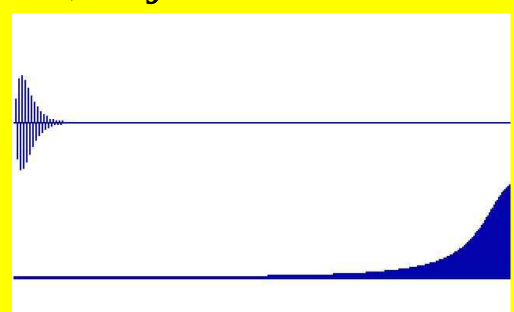
pol 0,8+j0



  - pol -0,98+j0



pol -0,8+j0

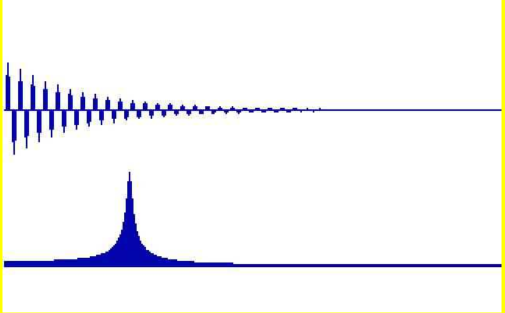


UPOTREBA POLOVA I NULA

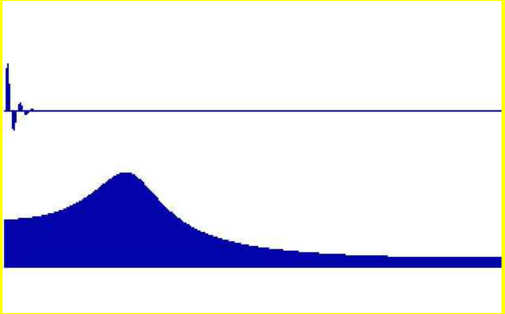
- Program 10 – sustav drugog reda:
  - pol $0{,}98+j45^o$

t

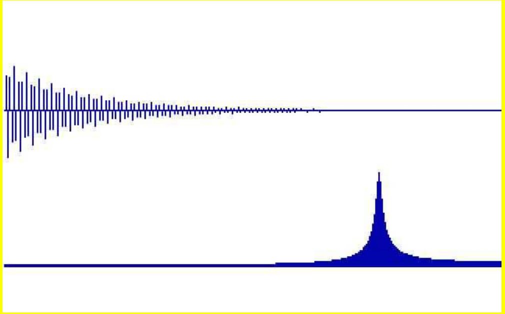
f



pol $0{,}8+j45^o$



  - pol $0{,}98+j135^o$



pol $0{,}8+j135^o$