

5. REKURZIVNE RELACIJE

5.1 Fibonaccijev slijed (niz)

Primjer rekurzivnih relacija:

Svaki par zečica-zec dobiva tijekom svakog sljedećeg mjeseca par mladih: zečicu i zeca.

Pitanje: Ako je na početku bio samo jedan par $f_0 = 1$, koliko će parova f_n biti nakon n mjeseci?

Rješenje je jednoznačno određeno nizom prirodnih brojeva (f_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$ koji je dan rekurzivnom relacijom

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

gdje je $f_0 = 1$ i $f_1 = 1$.

Definicija Fibonaccijev slijed (niz) (F_n) definira se početnim vrijednostima $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$ i rekurzivnom relacijom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Propozicija 1 (A. de Moivre) Za Fibonaccijev slijed (F_n) vrijedi "zatvorena formula"

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Napomena: Može se pokazati (iz zatvorene formule) da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Ovaj broj naziva se **zlatni prerez (božanski omjer)**.

Posljedica 1 Broj F_n u Fibonaccijevom slijedu jednak je cijelom broju koji je nabliži broju $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$. Slijed (F_n) ima eksponencijalni rast.

5.1 Linearne rekurzivne relacije

Opći oblik linearne rekurzivne relacije reda n je

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} + f(n), \quad n \geq r, \quad (1)$$

gdje su c_1, c_2, \dots, c_r zadani realni ili kompleksni brojevi i $c_r \neq 0$, a $f: \{r, r+1, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ (ili \mathbb{C}).

Ovdje je n -ti član rekurzivno određen vrijednostima predhodnih članova $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-r}$ (početne vrijednosti).

Cilj: Riješiti (1) po a_n , tj. uz zadane početne vrijednosti $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-r}$ naći a_n eksplicitno kao funkciju od n (zatvorenu formu).

Linearne homogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

Rekurzivna relacija (1) je homogena ako je $f(n) \equiv 0$ za sve n . Dakle, imamo

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}, \quad n \geq r. \quad (2)$$

Propozicija 2 Ako za dva slijeda (a'_n) i (a''_n) , $n \geq 0$ vrijedi rekurzivna relacija (2), onda vrijedi i za njihovu linearnu kombinaciju $(\lambda a'_n + \mu a''_n)$, gdje su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ili \mathbb{C}) bilo koji skalari.

Rješenje od (2) tražimo u obliku:

$$a_n = x^n, \quad \underline{\text{Eulerova supstitucija.}}$$

Uvrštavanjem u (2) za $x \neq 0$ dobivamo

$$x^n = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_r x^{n-r}, \quad n \geq r,$$

što povlači (dijeljenjem s $x^{n-r} \neq 0$)

$$x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \dots - c_r = 0. \quad (3)$$

Po Osnovnom teoremu algebre karakteristična jednadžba (3) ima u skupu kompleksnih brojeva r korijena x_1, x_2, \dots, x_r (neki mogu biti međusobno jednaki). Zbog pretpostavke $c_r \neq 0$ niti jedan x_i nije 0.

Razlikujemo dva slučaja:

1. Slučaj r različitih korijena karakteristične jednačbe

Teorem 1 Neka su svi korijeni x_1, x_2, \dots, x_r karakteristične jednačbe međusobno različiti. Tada je opće rješenje linearne homogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima jednako linearnoj kombinaciji

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \dots + \lambda_r x_r^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ bilo koji kompleksni brojevi.

2. Slučaj kada postoje višestruki korijeni karakteristične jednačbe

Lema1 Ako je kompleksni broj x_0 k –struki korijen polinoma $P(x)$, onda je on $(k - 1)$ –struki korijen derivacije $P'(x)$.

Propozicija 3 Ako je kompleksni broj x_0 k –struki korijen karakteristične jednačbe (3), onda svaki od k sljedova

$$a_n = x_0^n, \quad a_n = nx_0^n, \quad \dots, \quad a_n = n^{k-1}x_0^n,$$

predstavlja rješenje rekurzivne relacije (2).

Teorem 2 Neka su x_1, x_2, \dots, x_m svi različiti korijeni karakteristične jednadžbe kratnosti k_1, k_2, \dots, k_m . Rješenje $a_n^{(i)}$ od (2), koje odgovara korijenu x_i kratnosti k_i , je linearna kombinacija k_i sljedova

$$a_n^{(i)} = \lambda_1^{(i)} x_i^n + \lambda_2^{(i)} n x_i^n + \dots + \lambda_{k_i}^{(i)} n^{k_i-1} x_i^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

pri čemu su $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{k_i}^{(i)}$ kompleksni koeficijenti. Opće rješenje je dano sa

$$a_n = a_n^{(1)} + \dots + a_n^{(m)}.$$

(ovdje imamo ukupno $r = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ slobodnih koeficijenata).

Linearne nehomogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

Opći oblik je

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} + f(n), \quad n \geq r, \quad (4)$$

gdje su c_1, c_2, \dots, c_r zadani realni ili kompleksni brojevi i $c_r \neq 0$, a $f : \{r, r+1, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ (ili \mathbb{C}).

Propozicija 4. Neka je $\left(a_n^{(0)}\right)$ opće rješenje pripadne homogene rekurzivne relacije je dano Teoremom 2. Ako znamo neko patikularno rješenje $\left(a_n^{(p)}\right)$ od (4) onda je opće rješenje nehomogene rekurzivne relacije (4) dano sa

$$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(p)}. \quad (5)$$

Napomena: Općenito nalaženje partikularnog rješenja je općenito komplicirano, ali u nekim slučajevima postoje recepti. Evo nekih:

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
$C \text{ (const.)}$	A
Cn	$An + B$
$P_k(n)$	$Q_k(n)$
$C\alpha^n$	$A\alpha^n$
$C\alpha^n \cos \beta n + D\alpha^n \sin \beta n$	$A\alpha^n \cos \beta n + B\alpha^n \sin \beta n$

Primjedba: Ako je $f(n) = C\alpha^n$ i $x = \alpha$ korijen karakteristične jednadžbe, onda partikularno rješenje ne možemo tražiti u obliku $a_n^{(p)} = A\alpha^n$.

5.2 Primjeri

Primjer 1 Dana je rekurzivna relacija

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2n, \quad n \geq 2$$

uz početni uvjet $a_0 = 1, a_1 = 2$.

Primjer 2 Dana je rekurzivna relacija

$$a_n = a_{n-1} + n - 1, \quad n \geq 1$$

uz početni uvjet $a_0 = 0$.

Primjer 3 Hanojske kule

- Imamo n kolutova s rupom u sredini, svi različitih polumjera i na ravnoj podlozi zabodena tri štapića;
- Svi kolutovi su nanizani na jedan štapić tako da je kolut s većim polumjerom uvijek ispod onog s manjim polumjerom;
- Cilj: Prenijeti sve kolute (jedan po jedan) na treći štapić tako da ni u jednom trenutku ne bude onaj s većim polumjerom iznad onog s manjim. Pri tome svaki od štapića možemo koristiti za privremeno smještanje kolutova;
- Pitanje: Koliki je najmanji broj prijenosa a_n potreban da se svih n kolutova prenese s prvog na treći štapić?

Induktivni opis:

- Za $n = 1$ (jedan kolut) imamo samo jedan prijenos $a_1 = 1$;
- Pretpostavimo da znamo prenijeti n kolutova (imamo a_n prijenosa).
- Za prijenos $n + 1$ koluta imamo sljedeće:
 - prenesemo n kolutova na drugi štapić (ukupno a_n prijenosa);
 - prenosimo najveći kolut na treći štapić (ukupno 1 prijenos);
 - prenesemo n kolutova s drugog na drugi štapić (ukupno a_n prijenosa).

Dakle, vrijedi

$$a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad a_1 = 1$$

Rješenje je:

$$a_n = 2^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Napomena: Zapravo imamo

$$a_{n+1} \leq 2a_n + 1.$$

Ali budući je

$$a_{n+1} \geq 2a_n + 1$$

imamo jednakost.

5.3 Rješavanje pomoću funkcija izvodnica

Definicija Neka je zadan niz $(c_n)_{n \geq 0}$. Funkciju

$$g(x) = \sum_{n=0} c_n x^n$$

nazivamo funkcija izvodnica (ili generirajuća funkcija) niza $(c_n)_{n \geq 0}$.

Napomena: Vrijedi:

$$\sum_{n=0}^k a_n = \sum_{n-1=0}^k a_{n-1} = \sum_{n=1}^{k+1} a_{n-1} = \sum_{n=2}^{k+2} a_{n-2}$$

Primjer Fibonaccijev niz (F_n) definira se početnim vrijednostima $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$ i rekurzivnom relacijom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Treba riješiti rekurzivnu relaciju.

6. KOMBINATORIKA

6.1 Produktno pravilo

Osnovni problem: Nalaženje kardinalnog broja ($|A|$) konačnih skupova zadanih na razne načine.

Pravilo zbrajanja:

- Ako su A i B konačni disjunktni skupovi, onda vrijedi $|A \cup B| = |A| + |B|$;

Propozicija 1 Neka su A_1 i A_2 neprazni konačni skupovi. Onda vrijedi $|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$.

Napomena: Ako se nešto može obaviti na m načina, a svaki način ima n ishoda, onda je ukupan broj mogućih ishoda jednak mn .

Teorem 1 (Produktno pravilo) Neka su A_1, A_2, \dots, A_n neprazni konačni skupovi. Onda vrijedi

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

$$\text{ili } \left| \prod_{k=1}^n A_k \right| = \prod_{k=1}^n |A_k|.$$

Skup svih funkcija $f : A \rightarrow B$, gdje su A i B neprazni konačni skupovi, označimo sa B^A .

Teorem 2 Neka su A i B neprazni konačni skupovi. Onda vrijedi $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Napomena: Bilo koja funkcija $f : A \rightarrow B$ može vrijednost $f(a_1)$ poprimiti na $|B| = m$ načina, $f(a_2)$ isto na $|B| = m$ načina, ..., $f(a_n)$ na $|B| = m$ načina, onda f možmo zadati na m^n načina.

Korolar 1 Broj uređenih n –torki sastavljenih od 0 i 1 (ili neka druga dva različita elementa) jednak je 2^n .

Skup svih funkcija $f : A \rightarrow B$, gdje su A i B neprazni konačni skupovi, označimo sa B^A .

Teorem 3 Neka je X neprazni konačan skup. Onda za partitivni skup 2^X vrijedi $|2^X| = 2^{|X|}$.

Napomena: Broj podskupova n –članog skupa jednak je broju uređenih n –torki nula i jedinica, a to je 2^n .

Propozicija 2 Neka je dan prirodan broj n . Kardinalan broj skupa svih Booleovi funkcija $F : B^n \rightarrow B$, $B = \{0, 1\}$ je jednak 2^{2^n} .

6.2 Varijacije, permutacije i kombinacije bez ponavljanja

Razlikujemo:

- Varijacije (i permutacije kao specijalan slučaj) - prebrojavamo uređene k –torke nekog konačnog skupa (poredak bitan);
- Kombinacije - prebrojavamo podskupove nekog konačnog skupa (poredak nije bitan);

Razlikujemo: varijacije i kombinacije bez i sa ponavljanjem.

Definicija Varijacijom bez ponavljanja reda k konačnog skupa $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, $k \leq n$, nazivamo bilo koju uređenu k –torku različitih elmenata iz A . Broj varijacija bez ponavljanja reda k označavamo sa P_k^n .

Varijaciju bez ponavljanja reda n nazivamo permutacija n –članog skupa. Broj permutacija n –članog skupa označavamo sa P^n .

Napomena: Svaku permutaciju skupa A_n možemo poistovjetiti s nekom bijekcijom $f : A_n \rightarrow A_n$.

Teorem 4 Broj varijacija bez ponavljanja reda $k \leq n$ skupa od n elemenata jednak je

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Broj permutacija n —članog skupa jednak je $n!$.

Definicija Kombinacijom bez ponavljanja reda k konačnog skupa $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, $k \leq n$, nazivamo bilo koji k —člani podskup od A .

Teorem 5 Broj kombinacija bez ponavljanja reda $k \leq n$ skupa od n elemenata jednak je

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Svojstva:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
4. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Pascalov trokut

$$\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
 n = 0 & \binom{0}{0} & & & & & & 1 & & & & & & \\
 n = 1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & 1 & 1 & & & & & \\
 n = 2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & 1 & 2 & 1 & & & & \\
 n = 3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 n = 4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 n = 5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
 \end{array}$$

Propozicija 3 (Binomna formula) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dokaz. Matematičkom indukcijom ili kombinatorički.

6.3 Varijacije, permutacije i kombinacije s ponavljanjem

Definicija Neka je zadan skup od k elemenata $A_k = \{a_1, \dots, a_k\}$. Promatrajmo sve uređene n –torke elemenata iz A u kojima se element a_1 pojavljuje n_1 puta, element a_2 pojavljuje n_2 puta, ..., element a_k pojavljuje n_k puta, pri čemu je $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Takve n –torke nazivamo permutacije n –tog reda s ponavljanjem, a njihov broj označavamo s $P_{n_1 n_2 \dots n_k}^n$.

Teorem 6 Broj permutacije n –tog reda s ponavljanjem skupa $A_k = \{a_1, \dots, a_k\}$, u kojima se element a_i pojavljuje n_i puta, $i = 1, \dots, k$, jednak je

$$P_{n_1 n_2 \dots n_k}^n = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Teorem 7 (Multinomni teorem)

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k},$$

gdje u gornjoj sumi zbrajamo po svim k –torkama cijelih brojeva $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0$ takvim da je $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Definicija Neka je zadan skup od n elemenata $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$. Promatrajmo sve uređene k –torke elemenata iz A , pri čemu se svaki element može i ponavljati. Takve k –torke nazivamo varijacije k –tog reda s ponavljanjem n –članog skupa, a njihov broj označavamo s V_n^k .

Teorem 8

$$V_n^k = n^k.$$

Definicija Neka je zadan skup od n elemenata $A_k = \{a_1, \dots, a_k\}$. Promatrajmo sve neuređene k –torke elemenata iz A , pri čemu se svaki element može i ponavljati. Takve neuređene k –torke nazivamo kombinacije k –tog reda s ponavljanjem n –članog skupa.

Teorem 9 Broj kombinacije k –tog reda s ponavljanjem n –članog skupa jednak je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

6.4 Formula uključivanja i isključivanja

Ako su A_1 i A_2 konačni skupovi, onda je

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Slično, za tri konačna skupa

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = & |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - \\ & - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Teorem 9 (Formula uključivanja i isključivanja ili Sylvesteroва formula) Neka su A_1, A_2, \dots, A_k konačni skupovi. Onda vrijedi

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_k| = & \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_k|. \end{aligned}$$

Općenitiji problem:

Neka je zadan konačan skup X s N elemenata. Neka su $S(1), \dots, S(n)$, neka svojstva koja imaju neki njegovi elementi. Pretpostavka je da znamo za svaki element ima li svojstvo $S(i)$ ili ne. Neki element može imati više navedenih svojstava.

Oznake:

- N_0 je broj elemenata iz X koje nemaju ni jedno od svojstava $S(1), \dots, S(n)$;
- $N_{i_1 \dots i_k}$ je broj elemenata iz X koji imaju svojstva $S(i_1), \dots, S(i_k)$.

Teorem 10 (Formula uključivanja i isključivanja)

$$N_0 = N - \sum_{i < j} N_{ij} + \sum_{i < j < k} N_{ijk} + \dots + (-1)^n N_{12 \dots n}.$$

Napomena: Ako je $n = 2$, tj. ako imamo samo dva svojstva $S(1), S(2)$, onda je

$$N_0 = N - (N_1 + N_2) + N_{12}$$

Primjer: Koliko ima permutacija bez ponavljanja f skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ takvih da je $f(k) \neq k$ za sve $k = 1, 2, \dots, n$? Takve permutacije kod kojih niti jedan element nije na svom mjestu nazivamo neredima ili deranžmanima.