Definicija 3.1 Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo realnom funkcijom od m realnih varijabla.

$$(x_1, x_2, ..., x_m) \in D \xrightarrow{f} u = f(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}$$

(Svakoj uređenoj $m-$torci $(x_1, x_2, ..., x_m) \in D$ pravilom f pridružen je jedan i samo jedan realan broj $u \in \mathbb{R}$.)

- Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo funkcijom dviju varijabli.

$$(x, y) \in D \xrightarrow{f} z = f(x, y) \in \mathbb{R}$$

– $f[D] = \{ z \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}$ – slika funkcije,

– x, y – nezavisne varijable,

– z – zavisna vrijabla.

Definicija 3.2 Za bilo koju točku $T_0 \in \mathbb{R}^2$ i bilo koji broj $\varepsilon > 0$, skup

$$K(T_0; \varepsilon) \equiv \{T \in \mathbb{R}^2 \mid d(T_0, T) < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

nazivamo *(*otvorenom*)* **kuglom** polumjera ε oko točke T_0.

Definicija 3.3 Neka su dani funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, i točka T_0 koja nije izolirana točka od D. Reći ćemo da je broj $L_0 \in \mathbb{R}$ **granična vrijednost** funkcije f **u točki** T_0 ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T \in D \setminus \{T_0\})$$

$$d(T, T_0) < \delta \Rightarrow |f(T) - L_0| < \varepsilon.$$

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{T \to T_0} f(T) = L_0 \quad \text{ili} \quad \lim_{T_0} f(T) = L_0.$$

....

Napomena 3.5 Ukoliko je

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (x_0, y_0) \\ c_1}} f(x, y) = L_1 \quad \text{i} \quad \lim_{\substack{(x,y) \to (x_0, y_0) \\ c_2}} f(x, y) = L_2$$

te $L_1 \neq L_2$ tada $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ ne postoji. Ovo je postupak kako utvrditi da limes ne postoji (to je puno

Teorem (o uzastopnim limesima za funkciju dvije varijable): Neka je

$$L = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y).$$

Ako postoje uzastopni limesi

$$L_1 = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right) \quad \text{i} \quad L_2 = \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right)$$

onda je $L_1 = L_2 = L$.

Definicija 3.6 Neka je dana funkcija $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako je

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

kažemo da je funkcija f neprekidna u točki $(x_0, y_0) \in D_f$. Ako je f neprekidna u svakoj točki $(x, y) \in D_f$ kažemo da je f neprekidna funkcija.

3.5. Parcijalne derivacije

Definicija 3.7 Neka je $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkcija dviju varijabli i $(x_0, y_0) \in D$. Ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0)$$

onda $f_x(x_0, y_0)$ nazivamo prva parcijalna derivacija po x funkcije f u točki (x_0, y_0). Ako postoji limes

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0)$$

onda $f_y(x_0, y_0)$ nazivamo prva parcijalna derivacija po y funkcije f u točki (x_0, y_0).

Napomena Ako želimo naći f_x, tada u $f(x, y)$ varijablu y treba tretirati kao konstantu i derivirati po x. Analogno, ako tražimo f_y.

Napomena Graf $z{=}f(x, y)$ funkcije je ploha. Presječemo li tu plohu ravninom $x = x_0$ ili $y = y_0$ dobit ćemo ravninske krivulje Γ_2 odnosno Γ_1, redom. Geometrijska interpretacija parcijalnih derivacija $f_x(x_0, y_0)$ i $f_y(x_0, y_0)$: to su koeficijenti smjera tangente na Γ_1, odnosno Γ_2 u točki $T_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0{=}f(x_0, y_0))$.

Napomena Analogno se definiraju i parcijalne derivacije funkcija tri i više varijabli. Npr. za $u = f(x, y, z)$ imamo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0, z_0)$$

Ako funkcija f ima u točki T_0 parcijalnu derivaciju po svakoj varijabli onda kažemo da je funkcija f **derivabilna u točki** T_0. Ako je f derivabilna u svakoj točki $T \in D$, nazivamo ju **derivabilnom funkcijom**.

Definicija 3.11 Funkcija $z = f(x, y)$ je diferencijabilana funkcija u točki (x_0, y_0) ako se prirast

$$\Delta z = \triangle f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

dade zapisati u obliku

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$+\varepsilon \cdot \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$$

gdje $\varepsilon \longrightarrow 0$ kad $(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0, 0)$.

Napomena Ako postoje prve parcijalne derivacije od $z = f(x, y)$ onda kažemo da je $z = f(x, y)$ derivabilna. Derivabilnost funkcije ne jamči i difere cijabilnost (kod funkcija jedne varijable ti su pojmo ekvivalentni).

3.9. Ekstremi funkcija više varijabli

Definicija 3.18 Za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, kažemo da ima lokalni maksimum (minimum) u točki $T_0 \in D$, ako postoji ε-okolina $K(T_0, \varepsilon) \subseteq D$ točke T_0 sa svojstvom da je

$f(T) < f(T_0)$, za svaku točku $T \in K(T_0, \varepsilon) \setminus \{T_0\}$

($f(T) > f(T_0)$, za svaku točku $T \in K(T_0, \varepsilon) \setminus \{T_0\}$)

Ukoliko je

$f(T) \leq f(T_0)$, za svaki $T \in D$

($f(T) \geq f(T_0)$, za svaki $T \in D$)

onda kažemo da f ima globalni maksimum (minimum) u točki $T_0 \in D$.

Kao i do sada promatrat ćemo funkcije dviju varijabli.

Teorem 3.19 (Nužan uvjet za lokalni ekstrem) Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ima u točki $T_0 = (x_0, y_0) \in D$ lokalni ekstrem i ako je u toj točki derivabilna, onda je

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Točka u kojima se prve parcijalne derivacije poništavaju naziva se stacionarna točka.

Teorem 3.9 (Schwartzov) Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, derivabilna na nekoj ε-kugli $K((x_0, y_0); \varepsilon) \subseteq D$ i neka f ima na toj kugli i parcijalnu derivaciju drugoga reda po x i y redom, f_{xy}. Ako je funkcija

$$f_{xy}|_{K((x_0,y_0);\varepsilon)} : K((x_0, y_0); \varepsilon) \to \mathbb{R}$$

neprekidna u točki (x_0, y_0), onda postoji parcijalna derivacija drugoga reda funkcije f po y i x redom u točki (x_0, y_0) i pritom je

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Teorem 3.12 Ako parcijalne derivacije f_x i f_y postoje u okolini točke (x_0, y_0) i neprekidne su u točki (x_0, y_0) tada je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilana funkcija u točki (x_0, y_0).

Definicija 3.13 Totalni diferencijal $df(x_0, y_0)$ funkcije f u točki (x_0, y_0) definiramo kao

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$

gdje su dx i dy diferencijali nezavisnih varijabli x i y.

Napomena Budući je $\triangle x = dx$ i $\triangle y = dy$, onda linearnu aproksimaciju možemo zapisati kao

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).$$

Teorem 3.20 (Dovoljan uvjet za lokalni ekstrem) Neka je $T_0 = (x_0, y_0) \in D$ stacionarna točka funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, i neka su druge parcijalne derivacije funkcije f neprekidne na nekoj ε-kugli $K(T_0; \varepsilon) \subseteq D$. Neka je

$$D(T_0) = f_{xx}(T_0) \cdot f_{yy}(T_0) - [f_{xy}(T_0)]^2 =$$
$$= \begin{vmatrix} f_{xx}(T_0) & f_{xy}(T_0) \\ f_{xy}(T_0) & f_{yy}(T_0) \end{vmatrix}.$$

Tada vrijedi:

- Ako je $D(T_0) > 0$ i $f_{xx}(T_0) > 0$, tada je f u točki T_0 ima lokalni minimum $f(T_0)$;
- Ako je $D(T_0) > 0$ i $f_{xx}(T_0) < 0$, tada je f u točki T_0 ima lokalni maksimum $f(T_0)$;
- Ako je $D(T_0) < 0$, tada f u točki T_0 nema ekstrem.

Napomena Ako je $D(T_0) = 0$ ne možemo zaključiti ništa o ekstremu. U ovom slučaju možemo imati ekstrem, ali i sedlastu točku. Tu je potrebno daljnje ispitivanje.

Slično imamo za funkcije tri varijable.

Teorem 3.19a) (Nužan uvjet za lokalni ekstrem) Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, ima u točki $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ lokalni ekstrem i ako je u toj točki derivabilna, onda je

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \;\; f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \;\; f_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Teorem 3.21 Ako je $z = f(x, y)$ neprekidna na zatvorenom omeđenom skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$, tada postoje točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) u kojima f ima globalni maksimum $f(x_1, y_1)$ i globalni minimum $f(x_2, y_2)$, redom.

Traženje globalnih ekstrema:

a) Nađu se stacionarne točke (lokalni ekstremi) funkcije f i vrijednosti od f u njima;

b) Nađu točke ekstrema od f na rub od D i vrijednosti od f u njima;

c) Točka kojoj pripada najveća vrijednost od f iz $a)$ i $b)$ je točka globalnog maksimuma, a točka kojoj pripada najmanja vrijednost od f je točka globalnog minimuma.

Teorem 3.20a) (Dovoljan uvjet za lokalni ekstrem) Neka je $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ stacionarna točka funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, i neka su druge parcijalne derivacije funkcije f neprekidne na nekoj ε-kugli $K(T_0; \varepsilon) \subseteq D$. Neka je

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx}(T_0) & f_{xy}(T_0) & f_{xz}(T_0) \\ f_{xy}(T_0) & f_{yy}(T_0) & f_{yz}(T_0) \\ f_{xz}(T_0) & f_{yz}(T_0) & f_{zz}(T_0) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(T_0) & f_{xy}(T_0) \\ f_{xy}(T_0) & f_{yy}(T_0) \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \Delta_1 = f_{xx}(T_0)$$

- Ako je $\Delta_3 > 0,\ \Delta_2 > 0$ i $\Delta_1 > 0,$ tada je f u točki T_0 ima lokalni minimum $f(T_0)$;
- Ako je $\Delta_3 < 0,\ \Delta_2 > 0$ i $\Delta_1 < 0,$ tada je f u točki T_0 ima lokalni maksimum $f(T_0)$;
- U svim ostalim slučajevima kada je $\Delta_2 \neq 0,\ f$ u točki T_0 nema lokalni ekstrem;
- Ako je $\Delta_2 = 0$ nema odluke.

Definicija 4.1 Dvostruki integral funkcije $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ nad pravokutnikom $K \subseteq \mathbb{R}^2$ je broj

$$I = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \triangle x \triangle y$$

(uz oznake od prije) ukoliko on postoji.

Uobičajena oznaka je

$$I = \iint_K f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Definicija 4.2 Trostruki integral funkcije $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ nad nad kvadrom $K \subseteq \mathbb{R}^3$ je broj

$$J = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \triangle x \triangle y \triangle z$$

ukoliko on postoji.

Uobičajena oznaka je

$$J = \iiint_K f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Napomena:

1. Suma $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \triangle x \triangle y$ naziva se Riemannovom sumom, a integral $\iint_K f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ Riemannovim integralom funkcije f nad K.

2. Limes iz Definicije 4.1. uvijek postoji ukoliko je funkcija f neprekidna. On postoji i za neke prekidne funkcije.

Teorem 4.3 (Fubini) Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, pri čemu je $K = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ pravokutnik. Tada vrijedi

$$\iint_K f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Uobičajeni zapis je

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y,$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

i pritom kažemo da smo proveli integraciju u redoslijedu yx, odnosno xy.

Definicija 4.4 Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija pri čemu je $D \subset \mathbb{R}^2$ omeđen skup. Neka je $K \subset \mathbb{R}^2$ bilo koji pravokutnik što sadrži D, a funkcija $\widetilde{f} : K \to \mathbb{R}$ trivijalno proširenje funkcije f. Ako je funkcija $\widetilde{f}$ integrabilna onda **dvostruki integral** *(na D)* od f definiramo formulom

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (1)$$

Teorem 4.7 Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, funkcija, pri čemu je

$$D = \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \end{array} \right\},$$

gdje su φ_1, φ_2 i g_1, g_2 neprekidne funkcije (Slika 4.9.). Tada je

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \qquad (4)$$

Teorem 4.5 Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija, pri čemu je $D \subset \mathbb{R}^2$ omeđen grafovima neprekidnih funkcija $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi_1 \le \varphi_2$ (Slika 4.6.(a)). Tada je

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Posve slično, kad je $D \subset \mathbb{R}^2$ omeđen grafovima neprekidnih funkcija $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$, $\psi_1 \le \psi_2$ (Slika 4.6.(b)), vrijedi

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \qquad (3)$$

Teorem 4.6 Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ funkcija, pri čemu je $K = [a,b] \times [c,d] \times [r,s] \subset \mathbb{R}^3$ kvadar. Tada vrijedi:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

"Izmijenjujući mjesta" varijablama dobivamo analogne integracijske formule.

4.4 Nekoliko primjena višestrukog integrala

Pokazali smo da ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, neprekidna i nenegativna, onda pripadni dvostruki integral mjeri volumen geometrijskoga tijela Ω određenoga osnovicom D i plohom G_f, tj.

$$V(\Omega) = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Primijetimo da u slučaju konstantne funkcije $f(x,y) = 1$ promatrani integral mjeri površinu ravninskoga skupa D, tj.

$$P(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

U slučaju trostrukog integrala, ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, predstavlja gustoću tvarnoga tijela Ω što zaprema geometrijsko tijelo D, $\Omega \equiv D$, pripadni integral mjeri masu, tj.

$$m(\Omega) = \iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Uočimo da za konstantnu funkciju $f(x,y,z) = 1$ (homogenost) pripadni integral mjeri volumen tvarnoga tijela Ω što zaprema geometrijsko tijelo D, $\Omega \equiv D$

$$V(\Omega) = \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$