

Diskretna matematika - Ispitna pitanja za I kolokvij

Skupovi

1. Pojmovi: skup, element skupa (\in), prazan skup (\emptyset). Načini zadavanja skupova, skupovna inkluzija (\subseteq i \subset), jednakost skupova ($=$), partitivni skup skupa X ($P(X)$, 2^X).
2. Operacije unije (\cup), presijeka (\cap) i razlike skupova (\setminus), Osnovna svojstva ovih operacija (citirati teorem i dokazati pojedina svojstva).
3. Uređeni n -terci, Kartezijev produkt skupova (\times i oznaka Π).
4. Definicija funkcije. Osnovni pojmovi u vezi s funkcijom. Jednakost dviju funkcija.
5. Operacije nad funkcijama. Teoremi o tim operacijama. Dokažite da je kompozicija funkcija asocijativna, ali da nije komutativna.
6. Vrste funkcija (injekcija, surjekcija, bijekcija). Primjeri funkcija (niz, permutacija)
7. Ekvipotentnost skupova (\sim). Dokazati da je relacija ekvipotentnosti refleksivna, simetrična i tranzitivna. Pojam kardinalnog broja skupa.
8. Konačni i beskonačni skupovi. Prebrojivi i neprebrojivi beskonačni skupovi.
9. Dokažite da je svaki beskonačni podskup prebrojivog skupa prebrojiv.
10. Ako je A beskonačan, a K konačan skup, dokažite da je $A \setminus K$.
11. Dokažite da su skupovi cijelih brojeva \mathbf{Z} i racionalnih \mathbf{Q} prebrojivi.
12. Dokažite da je skup \mathbf{R} neprebrojiv (Cantorov teorem). Kakav je skup svih iracionalnih brojeva $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, a kakvi skupovi algebarskih i transcendentnih brojeva?
13. Možemo li kardinalne brojeve uspoređivati? Hipoteza kontinuum.

Logika

1. Pojam suda i njegove istinosne vrijednosti. Oznake.
2. Koje su osnovne logičke operacije? Što su to semantičke tablice i kako glase za pojedine osnovne logičke operacije? Što su unarne, a što binarnih operacija i koliko ih ima? Što su općenito n -arne logičke operacije i koliko ih ima?
3. Logička ekvivalentnost dviju formula algebre sudova (ilustrirati primjerima).
4. Osnovna pravila algebre sudova (citirati teorem i dokazati pojedina pravila). Što je to svojstvo dualnosti?
5. Tautologija i kontradikcija. Zakon isključenja trećeg, pravilo silogizma, zakon neproturječnosti, zakon dvostruke negacije, pravilo kontrapozicije, zakoni apsorpcije.
6. Logički posljedak, modus ponens, modus tollens.
7. Objasniti što je to dokaz po kontrapoziciji i ilustrirati primjerom
8. Skupovni prikaz algebre sudova (objasniti analogiju između operacija algebre skupova i operacija algebre sudova).
9. Pojam Booleove algebre i primjeri. Dualnost operacija u Booleovoj algebri. Što je trivijalna Booleova algebra?
10. Jedinственost nule i jedinice u Booleovoj algebri i pravila apsorpcije (dokazati).

11. Booleova podalgebra. Dajte primjer jedne algebre i njene netrivialne podalgebre..
12. Što je izomorfizam Booleovih algebri (ilustrirati primjerom Booleovih algebri D_{30} i $2^{\{a,b,c\}}$).
13. Dokazati da izomorfizam čuva sve operacije, kao i nulu i jedinicu.
14. Booleove funkcije n varijabla: koliko ih ima različitih i kakve operacije s njima možemo definirati?
15. Minterm i maksterm Booleove funkcije. Disjunktivna i konjunktivna forma (citirati teoreme i dokazati ih).
16. Problem ispunjivosti za Booleovu funkciju.
17. Pojam predikata i njegove interpretacije.
18. Što su kvantifikatori i koliko ih ima? Koje poznajete?
19. Slobodna i vezana varijabla.
20. Negacija predikata.
21. Najvažniji teoremi predikatskog računa. Vrijedi li zakon permutabilnosti za raznorodne kvantifikatore? Primjeri.

Diskretna matematika - Ispitna pitanja za II kolokvij

Relacije

1. Pojam relacije. Osnovni pojmovi. Binarna relacija i binarna relacija na skupu.
2. Predočavanje binarnih relacija. Koliko imamo različitih binarnih relacija na skupu X od n elemenata?
3. Osnovna svojstva binarnih relacija na skupu: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, potpunost. Dati primjere binarnih relacija koje imaju (nemaju) pojedino svojstvo.
4. Operacije s binarnim relacijama: kompozicija relacija, inverzna relacija. Karakterizacija pojmova refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, potpunost pomoću operacija s relacijama (citirati i dokazati)
5. Pojam relacija ekvivalencije i razreda (klase) ekvivalencije. Svojstva razreda ekvivalencije (citirati teorem i dokazati).
6. Particija skupa i pridružena relacija ekvivalencije na tom skupu (citirati teorem i dokazati)
7. Što je kvocijenti skup nekog skupa po zadanoj relaciji ekvivalencije na tom skupu?. Ilustriraj primjerom kvocijentnog skupa od \mathbf{Z} po relaciji $\equiv (\text{mod } n)$. Dokazati da je relacija kongruencije po modulu n relacija ekvivalencije na \mathbf{Z} .
8. Dokažite da je relacija ekvipotentnosti skupova (\sim) relacije ekvivalencije. Šta su u tom slučaju klase ekvivalencije, a što kvocijenti skup?
9. Što je to relacija parcijalnog poretka, a što relacija potpunog poretka. Primjerima $(2^X, \subseteq)$ i $(\mathbf{N}, |)$ pokaži da parcijalno poredani skup ne mora biti i potpuno poredan.
10. Što je to dobro uređen skup? Primjer potpuno uređenog skupa koji nije dobro uređen skup.
11. Definiraj pojmove donje (gornje) međe, odozdol (odozgor) omeđenog podskupa, infimuma (supremuma), minimuma (maksimuma) i ilustriraj primjerima u (\mathbf{R}, \leq) , $(2^X, \subseteq)$ i $(\mathbf{N}, |)$
12. Kartezijev produkt parcijalno poredanih skupova. Primjerom pokaži da Kartezijev produkt totalno poredanih skupova ne mora biti totalno poredan. Što je to leksikografski poredak?
13. Jednostavnim primjerima objasni što je to Hasseov dijagram relacije poretka na nekom skupu.
14. Kako definiramo izomorfizam parcijalno poredanih skupova? Dajte primjer.
15. Što je to mreža, a što potpuna mreža? Kako definiramo operacije zbrajanja i množenja u mreži? Pojam nule i jedinice. Sve ilustrirajte jednostavnim primjerima.
16. Teorem o operacijama $+$ i \cdot na potpunoj mreži.
17. Što je to distributivna a što komplementirana mreža? Primjeri.

Cijeli brojevi

1. Definirajte relaciju 'biti djelitelj' ($|$) i ispitajte strukture $(\mathbf{N}, |)$ i $(\mathbf{Z}, |)$.
2. Citiraj i dokaži teorem o svojstvima relacije 'biti djelitelj' ($|$).
3. Najveća zajednička mjera i najmanji zajednički višekratnik dvaju (ili više) cijelih brojeva, Osnovna svojstva (citirati i dokazati pojedine propozicije).
4. Teorem o dijeljenju (citirati i dokazati).
5. Euklidov algoritam. Citirajte i dokažite teorem.
6. Objasni jednakost $Nzm(a, b) = sa + tb$. Citiraj i dokaži pripadajući teorem.
7. Što su to prosti, a što složeni brojevi? Eratostenovo sito.
8. Dokaži da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.
9. Osnovni teorem aritmetike (citiraj i dokaži).
10. Dokaži formulu $Nzm(a, b) \cdot nzu(a, b) = ab$.
11. Broj pozitivnih djelitelja $\tau(n)$ prirodnog broja n . Dokaži formulu za $\tau(n)$.
12. Kako se definira kongruencija po modulu n . Dokaži da je $\equiv (\text{mod } n)$ relacija ekvivalencije na skupu \mathbf{Z} .
13. U kakvom su odnosu operacije zbrajanja i množenja (potenciranja) i relacija $\equiv (\text{mod } n)$. Citirati i dokazati pojedine tvrdnje.
14. Definicija Eulerove funkcije φ . Citirajte teorem o vrijednosti $\varphi(n)$ i dokažite neke posljedice toga teorema.
15. Eulerova kongruencija. Citirajte teorem.
16. Mali Fermatov teorem. Citirajte ga i dokažite.

Diskretna matematika - Ispitna pitanja za III kolokvij

Diofantske jednačbe

1. Objasni pojam diofantske jednačbe. Daj neke primjere diofantskih jednačbi (osim $ax + by = c$).
2. Citiraj i dokaži teorem o rješivosti diofantske jednačbe $ax + by = c$. Daj primjere.

Uvod u kombinatoriku

1. Pravilo zbrajanja za konačne disjunktne skupove. Produktno pravilo (citiraj i dokaži teorem).
2. Koliki su $|B^A|$ i $|2^X|$ za konačne skupove A , B i X ? Citiraj i dokaži svaku pojedinu tvrdnju.
3. Koliko ima različitih Booleovih funkcija od n varijabla (citiraj i dokaži tvrdnju)?
4. Što su to varijacije bez ponavljanja, a što permutacije bez ponavljanja? Kako ih prebrojavamo (citiraj i dokaži svaku pojedinu tvrdnju)?
5. Što su to kombinacije bez ponavljanja i kako ih prebrojavamo (binomni koeficijenti)? Citiraj i dokaži tvrdnju. Koja su svojstva binomnih koeficijenata?
6. Koja su svojstva binomnih koeficijenata? (Dokaži pojedina svojstva)
7. Kako glasi binomna formula? Dokaži binomnu formulu (indukcijom; kombinatorički).
8. Što su to permutacije s ponavljanjem i kako ih prebrojavamo (citiraj i dokaži formulu)?
9. Citiraj i dokaži multinomnu formulu.
10. Što su to varijacije s ponavljanjem i kako ih prebrojavamo (citiraj i dokaži formulu)?
11. Što su to kombinacije s ponavljanjem i kako ih prebrojavamo (citiraj i dokaži formulu)?
12. Kako glasi formula uključivanja i isključivanja (Sylvesterova formula)? Citiraj i dokaži teorem.
13. Izvedi formulu za ukupan broj deranžmana u skupu svih permutacija bez ponavljanja reda n .

Rekurzivne relacije

1. Kako definiramo Fibonaccijev slijed (F_n) ? Izvedi zatvorenu formulu (Moivreovu) za (F_n) .
2. Zlatni prerez i veza s Fibonaccijevim slijedom.
3. Što su linearne rekurzivne relacije (homogene i nehomogene)? Što je Eulerova supstitucija i kako glasi karakteristična jednačba pridružena linearnoj rekurzivnoj relaciji?

4. Opće rješenje homogene linearne rekurzivne relacije (citiraj i dokaži teorem za slučaj kad postoje samo jednostruki korjeni karakteristične jednačbe; citiraj teorem za slučaj kada postoje i višestruki korjeni).
5. Što je to partikularno rješenje nehomogene linearne rekurzivne relacije i kako tražimo opće rješenje? (Citiraj i dokaži formulu za opće rješenje.)
6. Hanojske kule i slični primjeri.