



FAKULTET ELEKTROTEHNIKE
STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING,
MECHANICAL ENGINEERING
AND NAVAL ARCHITECTURE

Rudjera Boškovića bb, Split



LABORATORIJ ZA BIOMEHANIKU
AUTOMATIKU I SUSTAVE

LABORATORY FOR BIOMECHANICS
AND AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

SIGNALI I SUSTAVI

(Skripta u izradi)

Dr. sc. Tamara Šupuk, doc.

Ak. god. 2008/09.

1. UVOD

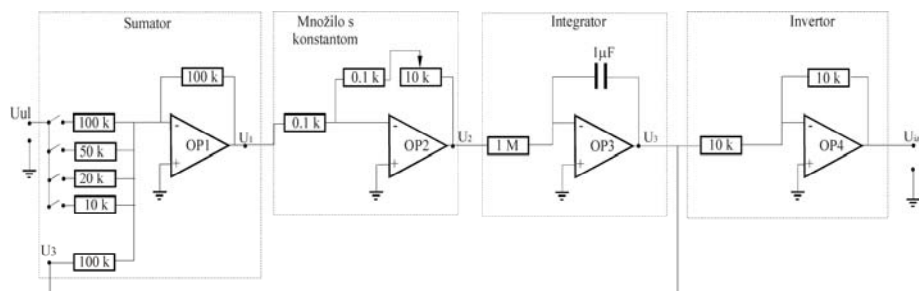
Vrlo često se, i u svakodnevnom govoru, služimo pojmovima signala i sustava. U današnjem svijetu tehnološkog zamaha i razvoja čini nam se da smo okruženi sustavima svih vrsta, tehničkim, računalnim, komunikacijskim, energetske, sustavima za automatsko upravljanje, robotskim sustavima... mogli bismo nabrajati unedogled.

Stoga je pojam sustava veoma općenit i prilično ga je teško precizno definirati. Za početak, možemo reći da je sustav cjelina koja se sastoji od međusobno povezanih objekata, pri čemu svojstva pojedinih objekata, kao i njihova međusobna povezanost i djelovanje određuju ponašanje i svojstva sustava kao cjeline.

Nebrojeno mnogo sustava možemo prepoznati kako u prirodnom okruženju (npr. živi organizam možemo promatrati kao izuzetno složeni sustav), tako i u područjima koji su rezultat ljudskog djelovanja. Stoga, ideje i principi povezani uz pojmove signala i sustava igraju vrlo važnu ulogu u različitim područjima znanosti i tehnologije kao što su (nabrojimo samo neke) komunikacije, aeronautika, elektronika, računarstvo, akustika, seizmologija, meteorologija, bioinženjerstvo, medicina, proizvodnja i distribucija energije, obrada i analiza govora i slike, itd.

Iako je fizikalna priroda signala i sustava koji se javljaju u tim međusobno vrlo različitim područjima također vrlo različita, svi ti sustavi dijele dva zajednička svojstva: signali, koje možemo promatrati kao funkcije jedne ili više međusobno nezavisnih varijabli (najčešće se signali mogu opisati kao funkcije ovisne o vremenu), u sebi sadrže informacije o ponašanju ili prirodi neke pojave, dok je osnovno svojstvo sustava da prima pojedine signale (nazivamo ih ulazni signali u sustav) i odgovara na njih tako što ili generira neki drugi signal (nazivamo ga izlazni signal iz sustava) ili se ponaša na neki određeni, željeni način.

Pokažimo to slikovito, pomoću nekoliko primjera: Vremenski promjenjivi naponi i struje u nekom električnom krugu (Sl. 1) primjeri su signala, dok krug sam po sebi predstavlja sustav koji reagira na način da narinuti napon (ulazni signal u sustav, na Sl. 1 označen kao U_{ul}) uzrokuje protjecanje struje u krugu (izlazni signal iz sustava). Kao izlazni signal ne moramo uvijek odabrati struju, npr. češće će nas zanimati napon na izlazu iz električnog sklopa (na Sl. 1 označen kao U_{iz}).



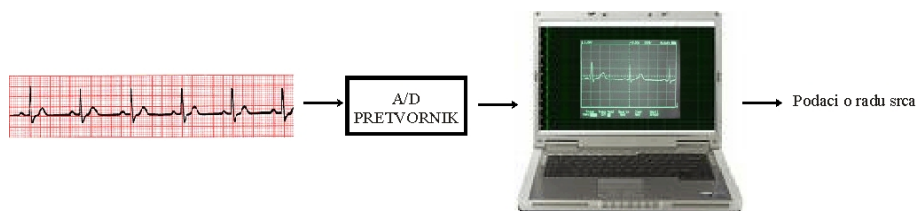
Sl. 1.1: Električni krug kao primjer sustava

U drugom primjeru, kad vozač automobila pritisne papučicu gasa, automobil odgovara na pobudu (pritiskanje papučice) tako što poveća brzinu, Sl. 2. U ovom slučaju, automobil predstavlja sustav, pritisak papučice odgovara ulazu u sustav (ili pobudi), dok ubrzanje automobila predstavlja odziv sustava.



Sl. 1.2: Automobil kao primjer sustava

Računalni program za automatsku obradu i analizu elektrokardiograma (EKG-a) također se može promatrati kao sustav, koji kao ulaz prima digitalizirani EKG signal, a kao izlaz daje kvantitativne parametre koji opisuju rad srca (broj otkucaja, možebitne anomalije u radu srca, aritmije, itd.).



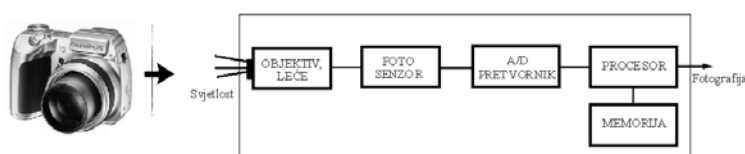
Sl. 3: Sustav za obradu i analizu EKG signala

Na slici 4 (lijevo) vidimo shematski prikaz sustava za mjerenje mišićne aktivnosti. Kad je mišić aktivan (kad se tijekom neke tjelesne aktivnosti kontrahira), njime putuju električni impulsi koji se adekvatnim elektrodama mogu mjeriti. Signali koji se na takav način mjere nazivaju se elektromiografski signali (skraćeno: EMG signali) i predstavljaju električnu aktivnost mišića. Sustav za mjerenje i obradu EMG signala sastoji se od elektroda koje se zalijepe za kožu i "osjećaju" EMG signale koji putuju duž mišića, pojačala koji pojačavaju signale (budući da su signali vrlo niskih amplituda, nekoliko desetaka μV), A/D pretvornika i računala koji obrađuje signale (npr. skida šum) i na temelju njih radi analize. Na slici 4 (desno) možemo vidjeti stvarni EMG sustav, ispitanika na kojem se mjeri, elektrode na mišićima potkoljenice, te snimljeni EMG signal na zaslonu prijenosnog računala.



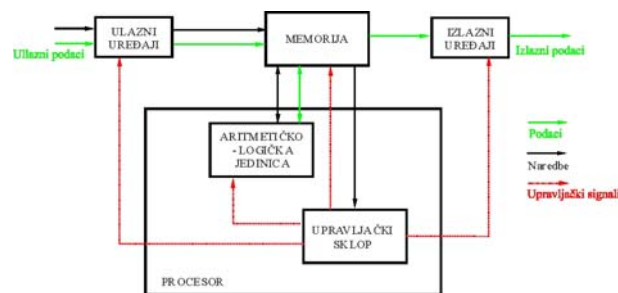
Sl. 4: Sustav za mjerenje, obradu i analizu EMG signala

I fotoaparat predstavlja sustav koji prima svjetlost reflektiranu od okoline i generira fotografiju, Sl. 5.



Sl. 5: Fotoaparat kao primjer sustava

U konačnici, i samo računalo možemo promatrati kao složeni sustav koji prima ulazne podatke, obrađuje ih prema zahtjevima korisnika (slijedeći naredbe tj. algoritme), te daje izlazne podatke, Sl. 6.



Sl. 6: Računalo kao primjer sustava

Kad se bavimo signalima i sustavima, nailazimo na mnoge probleme koje treba riješiti i mnoga pitanja koja traže odgovor. U nekim slučajevima, susrećemo se sa sustavima koje želimo detaljno analizirati da bismo razumjeli kako će odgovoriti na različite pobude. Kao primjer već smo naveli analizu električnih krugova pomoću koje želimo odrediti odziv kruga na različite naponske i strujne izvore. Također, za primjer možemo uzeti i avion kod kojeg detaljno želimo znati kako će se ponašati s obzirom na komande pilota i promjene smjera vjetra.

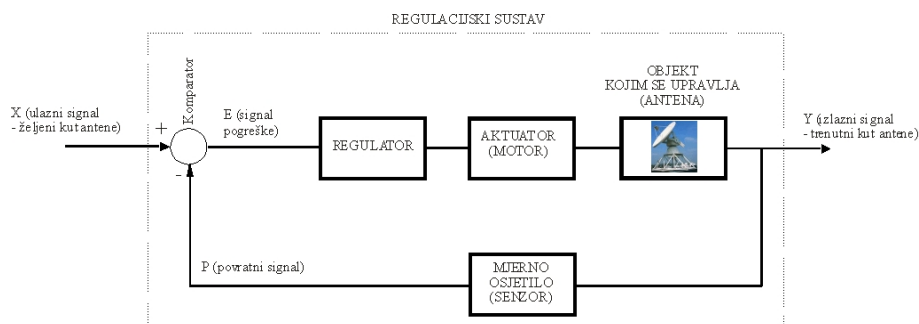
U drugim slučajevima naše zanimanje bit će usmjereno, umjesto na analiziranje ponašanja nekog postojećeg sustava, na razvoj sustava koji će obrađivati signale na neki željeni način. Npr. želimo razviti sustav koji će obnavljati i unaprijediti signale čija je kvaliteta na neki način narušena. Primjerice, tijekom razgovora između pilota aviona i kontrole leta, kvaliteta komunikacije može biti narušena zbog visoke razine pozadinskog šuma prisutnog u kabini aviona. U tom, a i mnogim sličnim slučajevima, može se razviti sustav koji će izdvojiti željeni signal (u ovom slučaju glas pilota) i odbaciti (ako ne u potpunosti, onda barem u dovoljnoj mjeri) neželjeni signal tj. šum. Slični zahtjevi (uklanjanje šuma iz željenog signala) postavljaju se i kod obrade slike. Na primjer, slike koje snimaju svemirske sonde i sateliti najčešće su lošije kvalitete no što je za različite primjene potrebno (često su mutne, sjetimo se slika krajolika na Google Earth-u). Uzroci smanjene kvalitete slike su razni, poput ograničenja opreme za snimanje, atmosferskih efekata, pogrešaka pri transmisiji (prijenosu) slike na Zemlju, itd. Stoga se slike iz Svemira rutinski obrađuju da bi se uklonili neki od nedostataka.

Pored opisanih poboljšanja i obnavljanja signala, u mnogim slučajevima postoji potreba da se razviju takvi sustavi pomoću kojih će se iz snimljenih signala izvući određene informacije. Primjerice, iz elektromiografskih signala snimljenih na sportašu koji npr. vesla ili vozi bicikl moguće je obradom EMG signala odrediti trenutak kad nastupa mišićni zamor te se povećava opasnost od ozljeda. Ovakve informacije mogu pomoći stručnjacima i trenerima u planiranju optimalnog treninga.

U telekomunikacijama naglasak će biti na generiranju takvih signala koji će se moći uspješno transmitirati (prenositi). Npr, u komunikaciji na velikim udaljenostima, kroz atmosferu, treba koristiti signale s točno određenim pojasom frekvencija u elektromagnetskom spektru. Također, prijemnik komunikacijskih signala treba imati takve karakteristike da u primljenom signalu odstrani i šumove koji nastaju prijenosom signala kroz atmosferu i interferenciju (preklapanje) s komunikacijskim signalima koji se emitiraju iz raznih drugih izvora.

Još jedno vrlo važno područje primjene signala i sustava jest upravljanje i automatska regulacija. U ovim slučajevima želimo upravljati pojedinim procesima ili želimo regulirati sustav tako da se ponaša na željeni način.

Kao primjer možemo navesti regulacijski sustav za pozicioniranje satelitske antene. Neka je antena namještena tako da prima signal s određenog satelita, tj. zakrenuta je za određeni kut u odnosu na početni (referentni) položaj. Recimo da želimo primati signal s nekog drugog satelita tj. usmjeriti antenu prema njemu (zakrenuti je za određeni kut u odnosu na trenutni položaj). Željeni kut zakreta antene dovest ćemo kao ulazni signal u regulacijski sustav, a trenutni zakret antene bit će izlazni signal iz sustava. Regulacijski sustav ima senzor koji mjeri trenutni zakret antene (izlazni signal) i putem povratne veze ovaj izlazni signal vraća na ulaz sustava, gdje se uspoređuje sa željenim zakretom. Uspoređivanje se obavlja na način da se izlazni signal oduzima od ulaznog i razlika se naziva signal pogreške. Zašto signal pogreške? Stoga što nam on kazuje koliko se željeni kut zakreta antene (ulazni signal) razlikuje od stvarnog zakreta antene (izlazni signal). Ukoliko se željeni i stvarni zakret antene međusobno razlikuju (tj. signal pogreške je različit od nule), potrebno je zakretati antenu sve dok se ne izjednače željeni i trenutni zakret tj. dok signal pogreške ne padne na nulu. Jedan od sastavnih dijelova sustava za pozicioniranje biti će i modul koji će fizički zakretati antenu i naziva se aktuator. Kao aktuator može nam npr. poslužiti istosmjerni motor upravljani strujom magnetiziranja. Prikažimo ovaj primjer blok dijagramom, Sl. 7.



Sl. 7: Blok dijagram regulacijskog sustava za pozicioniranje satelitske antene

Dakle, regulacijski proces se odvija na način da se na ulaz sustava dovede željeni zakret antene, senzor očita trenutni zakret koji se pomoću povratne veze vrati na ulaz, izračuna se razlika između željenog i trenutnog kuta (signal pogreške), ovaj signal pogreške se najčešće pomoću određenog regulatora još dodatno prilagodi aktuatoru, te da naredbu aktuatoru da pomakne antenu. Potom se, nakon pomaka opet očita trenutni položaj antene, ovaj podatak se opet vraća na ulaz i uspoređuje sa željenim, te ukoliko mu nije jednak, postupak se nastavlja sve do trenutka kad se antena ne pozicionira u željeni položaj. Ovaj proces se naziva automatsko reguliranje.

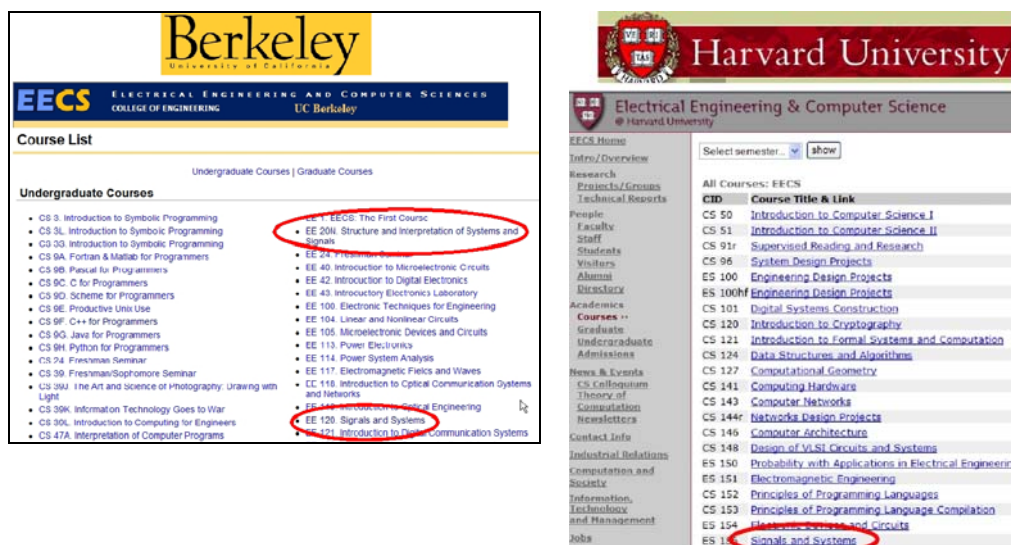
Kao još jedan primjer regulacijskog sustava možemo spomenuti i avionski autopilot. U ovom slučaju izlazni signali iz sustava bit će veličine koje opisuju ponašanje aviona (brzina, visina, nagib aviona, itd.). Sve ove veličine mjere se senzorima i kao povratna informacija vraćaju se u regulacijski sustav. Potom se, na temelju usporedbe željenih i stvarnih vrijednosti, automatski podešavaju kormilo i krilca aviona, kao i ostali uređaji, da bi se avion ponašao na željeni način (slijedio zadani kurs i točno i brzo slijedio upute pilota).

U prethodna dva primjera uveli smo vrlo važan pojam u teoriji automatskog reguliranja: povratna veza. Naime, pomoću povratne veze izlazni signali iz sustava se vraćaju na ulaz sustava i pomažu da se, usporedbom ulaznog i izlaznog signala, dobije željeni odziv sustava (bilo da je to određeni kut zakreta satelitske antene, visina aviona, brzina automobila, protok vode u sustavima za hlađenje, kretanje robota, nišanje i ispaljivanje rakete i štošta drugo).

Primjeri koje smo naveli samo su neke od izuzetno mnogo primjena u kojima susrećemo signale i sustave. Njihova važnost proizlazi ne samo iz različitosti pojava i procesa u kojima se pojavljuju, već i iz skupa ideja, analitičkih metoda i tehnika koje su razvijene (i još se uvijek razvijaju) da bi se riješili mnogi problemi vezani uz tehniku, znanost, ali i svakodnevni život. Povijest razvoja tih ideja datira iz davne prošlosti. Npr. ideju Fourierove transformacije, koja predstavlja osnovu frekvencijske analize signala i sustava, možemo pronaći kod starih Babilonaca i njihovih astronomskih studija, dok se njena matematička podloga u cijelosti razvila tijekom 18. i 19. stoljeća.

Kroz primjere smo pokušali dati odgovor na pitanje zašto učiti o signalima i sustavima tj. zbog čega su toliko važni u modernoj znanosti i tehnologiji.

Možemo zaključiti da je kolegij Signali i sustavi temeljni kolegij za moderne studije računarstva, elektronike, komunikacija, automatike, energetike, a isto tako postaje i nužan kolegij u studijima strojarstva, geologije, ekonomije, bioinženjerstva i dr.



Sl. 8: Kolegiji Signali i sustavi na Department of Electrical Engineering and Computer Science, Berkeley University of California (slika lijevo) i Harvard University (slika desno)

Na većini renomiranih svjetskih sveučilišta, u okviru programa fakulteta računarstva i elektrotehnike, Signali i sustavi se predaju kao jedan od temeljnih kolegija na nižim godinama studija. Npr. na Fakultetima elektrotehnike i računarstva (eng. *Department of Electrical Engineering and Computer Sciences – Dept of EECS*) Sveučilišta Berkeley i Harvard sastavni dio programa su kolegiji Strukture i interpretacije sustava i signala (eng. *Structures and Interpretations of Systems and Signals*) i Signali i sustavi (eng. *Signals and Systems*), Slika 8. Također, Signali i sustavi temeljni je predmet na Fakultetu elektrotehnike i računarstva pri MIT-u (Massachusetts Institute of Technology), Slika 9 (lijevo). I na mnogim europskim sveučilištima se u sklopu fakulteta za računarstvo proučavaju signali i sustavi. Kao primjer možemo navesti bečko Tehnološko sveučilište (eng. *Vienna University of Technology*) gdje se u okviru računarskih znanosti tj. tehničke informatike predavaju kolegiji Signali i sustavi I i II, Slika 9 (desno).

U nekim od primjera koje smo spomenuli, signali se kontinuirano mijenjaju u vremenu, dok se kod nekih drugih pojavljuju samo u određenim (diskretnim) vremenskim trenucima. Tako razlikujemo kontinuirane i diskretne signale i sustave. Npr., u analizi električnih krugova, ili kod

mehaničkih sustava (kao što je automobil), signali (struja, napon, brzina automobila) se mijenjaju kontinuirano (tj. brzina automobila mijenja se postepeno, npr. ako vozimo brzinom od 50km/h, ne možemo trenutno postići brzinu od 70km/s, već trebamo ubrzavati i postepeno podići brzinu do željene vrijednosti). S druge strane, ako promatramo biološki proces diobe stanice, broj novorođenih stanica jest cijeli broj (iz jedne stanice nastanu dvije, iz dvije četiri, itd., tj. ne možemo dobiti 3.25 ili 4.01 stanicu). Dakle, u ovom slučaju govorimo o diskretnim pojavama tj. sustavima. Još jedan primjer diskretnog sustava jest npr. stanje na burzi.

Massachusetts Institute of Technology
Department of Electrical Engineering and Computer Science

Odlomak iz teksta Prof. W.E.L. Grimsona, voditelja Fakulteta elektrotehnike i računarstva na MIT-u o novom programu studija:

The most significant change is our new undergraduate curriculum. Hard work by our deeply dedicated faculty members over the past several years has enabled us to introduce a new curriculum effective this fall. This new curriculum is motivated by several themes: providing more flexibility for students to design their degree program; stressing the interactions and interfaces among foundational aspects of EE and CS; using more hands-on experiences to motivate the material, and providing an opportunity for students to explore a selected set of topics in greater depth than in the past.

Under the new curriculum, students initially take a two-course sequence as an introduction to EECS, where they engage with major concepts in EECS in an integrated and hands-on fashion, using concrete systems such as a mobile robot and a cell phone as examples.

and motivations. This is typically followed by three foundation subjects chosen from a limited set of foundational subjects: applied electronics, circuits and electronics, signals and systems, computation structures, principles of software development, and introductory algorithms. Building on this base, students typically select four from a set of header courses and laboratory subjects in a range of EECS subdisciplines: microelectronic devices and circuits; communication, control and signal processing; bioelectrical science and engineering; computer systems engineering; design and analysis of algorithms; artificial intelligence; and others, including numerous laboratory subjects.

Massachusetts Institute of Technology
Department of Electrical Engineering and Computer Science
6.003 Signals and Systems Spring 2007

TU WIEN Vienna University of Technology

Computer Sciences

033 931 Data Engineering & Statistics / Bac.
033 932 Media Informatics / Bac.
033 533 Medical Informatics / Bac.
033 534 Software & Information Engineering / Bac.
033 535 Technical Informatics / Bac.
066 931 Computational Intelligence / Mas.
066 932 Computer Graphics & Digital Image Processing / Mas.
066 933 Information & Knowledge Management / Mas.
066 935 Media Informatics / Mas.
066 936 Medical Informatics / Mas.
066 937 Software Engineering & Internet Computing / Mas.
066 938 Technical Informatics / Mas.
066 939 Master Program Business Engineering and Computer Science / Mas.
881 Area of concentration: Computer Sciences / DI. *

Technical Informatics

Term and Course Number | Curriculum | Description (German only)

Compulsory Subjects

107-5112 Seminar for diploma candidate
* Signale und Systeme 1, VU
No lectures assigned (yet)
* Signale und Systeme 2, VU
No lectures assigned (yet)

Sl. 9: Kolegiji Signali i sustavi na Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology - MIT (slika lijevo) i na Faculty of Computer Sciences – Technical Informatics, Vienna University of Technology (slika desno)

Želimo li pratiti trend dionica kroz neki duži vremenski period, npr. mjesec dana, svaki dan u određeno vrijeme (neka to bude trenutak zatvaranja burze) očitavamo vrijednost dionica i na kraju mjeseca određujemo mjesečni prosjek. Stoga prikaz cijena dionica neće biti krivulja koja se kontinuirano (neprekinuto) mijenja u vremenu, već će se sastojati od niza brojeva od kojih svaki odgovara cijeni dionice u jednom određenom danu (diskretnom vremenskom trenutku). Dakle, cijena dionice predstavlja diskretni signal, a burza jedan složeni diskretni sustav čije je ponašanje ponekad vrlo teško predvidljivo.

Koncepti i tehnike vezani uz kontinuirane i diskretne sustave međusobno su usko povezani. Međutim, budući da su se kroz povijest primjenjivali za međusobno različite svrhe, tako su se i proučavali i razvijali – svaki zasebno. Kontinuirani signali i sustavi imaju korijene u fizici i, u novije vrijeme, elektrotehnici i komunikacijama. S druge strane, diskretni sustavi razvijali su se iz numeričke analize, statistike i teorije nizova, a primjenjivali su se kod analize ekonomskih i demografskih podataka. Međutim, tijekom nekoliko zadnjih desetljeća područja koja se bave kontinuiranim i diskretnim signalima i sustavima sve se više povezuju i isprepliću. Razlog leži u snažnom razvoju tehnologije, posebno integriranih krugova i digitalnih računala koji su omogućili da digitaliziramo kontinuirane signale (diskretiziramo ih po vremenu i amplitudi tj. uzorkujemo ih pomoću analogno-digitalnih pretvarača). Uzorkovanje kontinuiranih signala i pretvaranje u diskretne vrijednosti omogućuje nam da kontinuirane signale obrađujemo pomoću digitalnih računala.

Zbog sve veće povezanosti kontinuiranih i diskretnih signala i sustava te zbog uske veze između tehnika kojima se jedni i drugi procesiraju, u ovom ćemo kolegiju paralelno proučavati signale i sustave u kontinuiranom i diskretnom vremenu. Budući da su mnoge od metoda koje se primjenjuju pri analizi kontinuiranih i diskretnih sustava slične (iako ne identične), paralelno upoznavanje jednih i drugih pomoći će lakšem razumijevanju obje vrste sustava, a i lakše ćemo se fokusirati na njihove sličnosti i razlike. Također, kao što ćemo vidjeti kroz kolegij, neke pojmove (poput konvolucije) lakše je objasniti i razumjeti prvo primjerice u diskretnom vremenu, te ih potom usvojiti i u kontinuiranom vremenu. Vrijedi i obrnuto.

U dosadašnjem izlaganju opisali smo signale i sustave na vrlo općenit način tj. nastojali smo prirodu sustava predočiti najelementarnijim mogućim pojmovima. Međutim, i u ovako pojednostavljenom prikazu možemo uočiti koliko je "sustav" općenit pojam i koliko je široko primjenjiv. Iz toga slijedi da će različiti sustavi imati i različita svojstva, što opet navodi na zaključak da je nemoguće na sve vrste sustava primijeniti iste metode analize. Stoga ćemo se u okviru ovog kolegija ograničiti na proučavanje jedne specifične podvrste sustava koje nazivamo **linearni, vremenski-nepromjenjivi sustavi**, ili skraćeno **LTI sustavi** (što dolazi od engleskog naziva *Linear, Time-invariant Systems*). Naime, upravo zbog glavnih svojstva, linearnosti i vremenske nepromjenjivosti, ovakvi sustavi su izuzetno podesni za matematičko definiranje i modeliranje, te za mnoge praktične primjene.

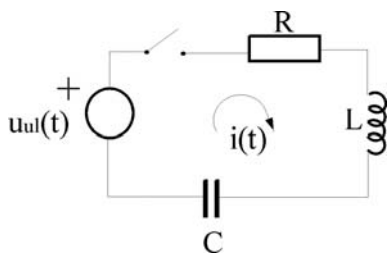
2. SIGNALI I SUSTAVI

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s analitičkim osnovama koje će nam omogućiti proučavanje signala i sustava. Naučit ćemo kako matematički opisati i prikazati signal, što je modeliranje, kako se definira energija i snaga signala, što su periodički signali. Upoznat ćemo osnovne signale koji se najčešće koriste u analizi sustava i još ponešto.

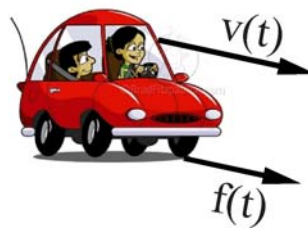
2.1 KONTINUIRANI I DISKRETNİ VREMENSKI SIGNALI

2.1.1 Primjeri i matematički prikaz

Signali mogu opisivati razne fizikalne pojave. Npr., promotrimo jednostavan strujni krug prikazan na slici 2.1. U ovom slučaju vremenski promjenjivi napon izvora ($u_{ul}(t)$) i struja u krugu ($i(t)$) predstavljaju signale. Također, vremenski promjenjiva sila koju proizvodi motor automobila ($f(t)$) i brzina automobila koja nastaje kao posljedica narinute sile ($v(t)$) primjeri su signala, Sl. 2.2. Dakle, za signal možemo reći da je apstraktni matematički opis promatranog fizikalnog procesa.



Sl. 2.1: RLC krug



Sl. 2.2: Sila i brzina kao primjeri signala

I zvuk je primjer signala koji nastaje kao brza promjena tlaka zraka u vremenu. Tako npr. zvuk možemo prikazati kao **funkciju** koja preslikava vremenske vrijednosti u vrijednosti tlaka:

Zvuk: vrijeme \rightarrow tlak

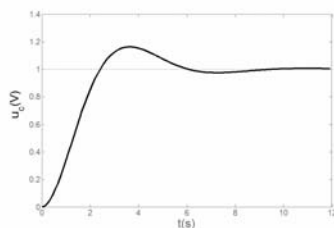
pri čemu je 'vrijeme' skup koji predstavlja vremenski interval u kojemu definiramo signal (**domena funkcije**), a 'tlak' skup koji sadrži moguće vrijednosti tlaka zraka (**kodomena funkcije**).

Stoga signal možemo definirati kao funkciju koja opisuje promatranu fizikalnu varijablu ili fizikalni proces i u sebi nosi informaciju o procesu ili sustavu.

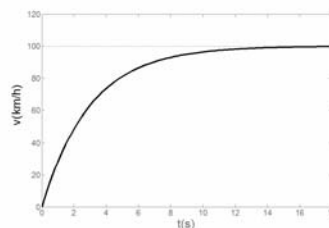
Signal je funkcija nezavisnih varijabli kao što su vrijeme, prostor, temperatura, udaljenost, itd. Mi ćemo najčešće promatrati signale koji su funkcija vremena tj. vremenski promjenjive signale i označavat ćemo ih kao $x(t)$.

Grafički prikaz signala često se naziva valni oblik signala. Prikažimo neke grafičke primjere signala:

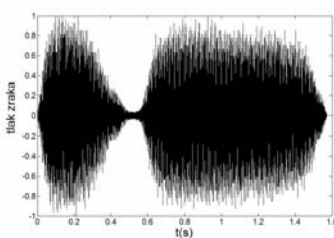
- Ako na ulaz RLC kruga prikazanog na slici 2.1 u trenutku $t=0s$ dovedemo konstantni napon $u_{ul}(t)=1V$, napon na kondenzatoru ($u_c(t)$) imat će oblik prikazan na slici 2.3.
- Brzina automobila sa slike 2.1. može npr. rasti od vrijednosti 0 do 100km/h na način prikazan na slici 2.4.
- Slike 2.5 i 2.6 prikazuju grafički zapis audio signala. Kada bismo ove signale doveli u audio sustav tj. na zvučnike, čuli bismo žvižduk vlaka (signal sa slike 2.5) i cvrkut ptica (signal sa slike 2.6).



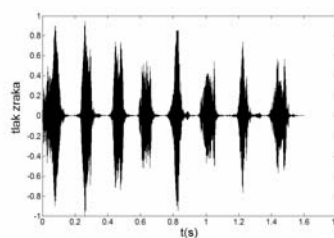
Sl. 2.3: Valni oblik napona na kondenzatoru



Sl. 2.4: Brzina automobila ovisna o vremenu



Sl. 2.5: Zvučni signal, žvižduk vlaka



Sl. 2.6: Zvučni signal, cvrkut ptice

Dosadašnji primjeri predstavljaju jednodimenzionalne signale (često se označavaju kao 1D signali) jer su funkcija jedne nezavisne varijable (u našim slučajevima vremena). I slika predstavlja signal, ali dvodimenzionalan (2D), jer je funkcija dviju prostornih varijabli. Video zapis jest trodimenzionalan (3D) signal jer je ovisan o dvjema prostornim

koordinatama i vremenu kao trećoj varijabli (naime video, za razliku od slike, nije statičan u vremenu).

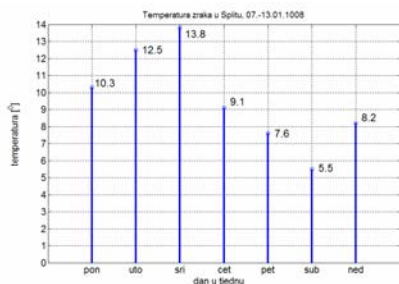
2.1.2 Diskretni i digitalni signali

U uvodnom poglavlju spominjali smo vremenski kontinuirane i diskretne signale i naglasili da je kod kontinuiranih signala nezavisna varijabla (najčešće vrijeme) kontinuirana veličina, dok kod diskretnih signala može poprimiti samo određene (diskretne) vrijednosti. Primjer diskretnog signala dan je na slici 2.7 i predstavlja temperature zraka u Splitu, izmjerene svaki dan u 12h, tijekom jednog tjedna u siječnju. Ovakav prikaz najčešće zovemo peteljasti graf (*eng. stem plot*), a čine ga uzorci signala.

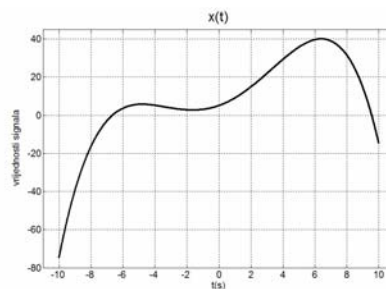
Često se vremenski diskretni signali dobivaju iz kontinuiranih, primjenom postupka **uzorkovanja**, na način da se vremenski interval u kojem je kontinuirani signal definiran podijeli na jednake dijelove (širine T – naziva se period uzorkovanja), te se diskretni signal definira samo za određene vremenske trenutke, međusobno udaljene za T sekundi. Postupak uzorkovanja prikazan je na slikama 2.8a-c. Na slici 2.8 a) vidimo kontinuirani signal $x(t)$ definiran na neprekinutom vremenskom intervalu od -10 do 10s. Uzmimo za period uzorkovanja npr. $T=1s$ i očitavamo vrijednosti signala $x(t)$ svaku sekundu tj. uzorkujemo signal, Sl. 2.8 b). Rezultat uzorkovanja prikazan je na slici 2.8 c) i predstavlja vremenski diskretni signal.

Da bismo razlikovali kontinuirane i diskretne signale, kontinuirano vrijeme ćemo označavati s 't', a diskretno s 'n'. Također, kod kontinuiranih signala ćemo koristiti zagrade (), te kontinuirani signal zapisujemo kao $x(t)$, a kod diskretnih signala koristimo uglate zagrade [] i signal zapisujemo kao $x[n]$. U našem primjeru t je neprekinuti vremenski interval, $t=[-10,10]$, dok n poprima isključivo cjelobrojne vrijednosti, $n = -10, -9, -8, \dots, 0, \dots, 8, 9, 10$. Diskretni signal na slici 2.8 c) sastoji se od uzoraka signala, $x[-10], x[-9], \dots, x[0], \dots, x[9], x[10]$.

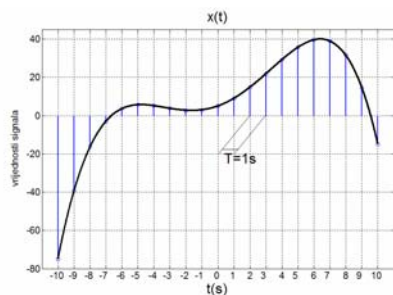
Signal također možemo uzorkovati i po amplitudi, tj. možemo diskretizirati vrijednosti koje signal poprima. Diskretizirajmo npr. po amplitudi signal sa slike 2.7: definirajmo da temperatura može poprimiti samo cjelobrojne vrijednosti tj. svaki uzorak signala zaokružimo npr. na prvu nižu cjelobrojnu vrijednost, Sl. 2.9 a). Cjelobrojne vrijednosti signala možemo kodirati u binarnom brojevnom sustavu (prikazati u binarnom obliku). Signal koji smo dobili nazivamo **digitalni** signal (diskretiziran po vremenu i amplitudi i kodiran), Sl. 2.9 b). Sada signal možemo prikazati sekvencom (nizom) binarnih brojeva: 1010, 1100, 1101, 1001, 0111, 0101, 1000.



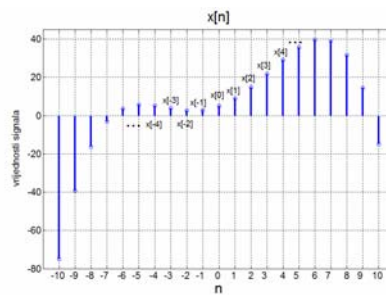
Sl. 2.7: Primjer diskretnog signala: temperatura zraka izmjenog u Splitu tijekom tjedna u siječnju, 2008.



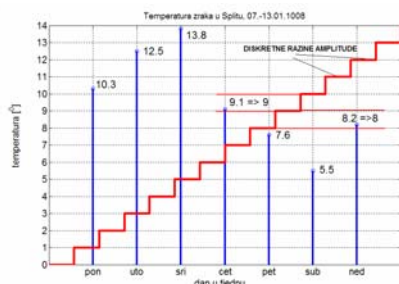
Sl. 2.8 a): Signal kontinuiran u vremenu, $x(t)$



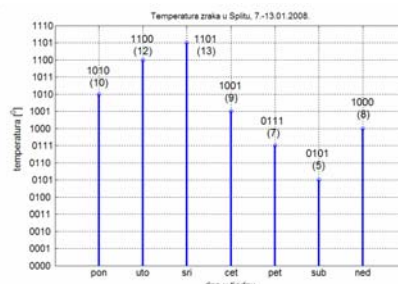
Sl. 2.8 b): Uzimanje uzoraka kontinuiranog signala (uzorkovanje)



Sl. 2.8 c): Signal diskretiziran po vremenu (diskretni signal), $x[n]$



Sl. 2.9 a): Diskretiziranje signala po amplitudi (kvantiziranje)



Sl. 2.9 b): Digitalni signal (diskretiziran po vremenu i amplitudi i kodiran u binarnom brojevnom sustavu)

Digitalno računalo radi s digitalnim podacima (signalima), kodiranim u binarnom brojevnom sustavu. Da bi digitalno računalo moglo primiti i obraditi kontinuirane signale (brzinu vozila, visinu aviona, govorni signal, ...) prvo ih treba digitalizirati pomoću uređaja koji nazivamo analogno-digitalni (A/D) pretvornik (napomenimo da se za kontinuirane signale i sustave često koristi i naziv 'analogni'). A/D pretvornici definirani su brojem bitova koji određuju broj razina na koje svodimo vrijednosti signala. Tako npr. 16-bitni A/D pretvornik ima na raspolaganju $2^{16}=65536$ različitih amplitudnih razina.

2.1.3 Matematičko modeliranje

Svojstvo sustava jest da prima, pohranjuje, transformira i prenosi signale. Već smo u uvodnom poglavlju istaknuli da nam je u konkretnim primjenama cilj odrediti, predvidjeti ili podesiti ponašanje sustava ili realizirati sustav koji bi imao neka željena svojstva. Da bismo na neki način kvantitativno opisali i analizirali sustav koji nas zanima, služimo se raznim matematičkim postupcima. Često ćemo kroz primjere vidjeti da se ponašanje različitih realnih sustava može opisati na sličan matematički način (npr. sličnim diferencijalnim jednažbama). Pogodan matematički opis nekog realnog sustava nazivamo **matematički model sustava**, a proces definiranja modela sustava naziva se **matematičko modeliranje**.

Prikažimo na jednostavnom primjeru kako se matematički modelira neki sustav. Poslužimo se RLC krugom prikazanim na slici 2.1. Neka nam je poznat valni oblik ulaznog napona, a želimo odrediti jednažbu koja opisuje kako se ponaša struja u krugu s obzirom na promjenu ulaznog napona (tj. želimo postaviti model sustava).

Prvo ćemo postaviti naponsku jednažbu kruga (ulazni napon jednak je sumi svih padova napona u krugu):

$$u_{ul}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2.1)$$

Derivirajmo jednažbu 2.1:

$$u_{ul}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad / \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{du_{ul}(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) \quad (2.2)$$

Izlučimo najveću derivaciju od $i(t)$:

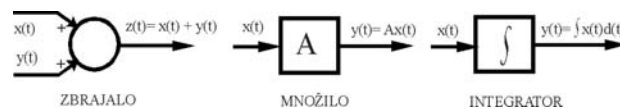
$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{LC} i(t) + \frac{1}{L} \frac{du_{ul}(t)}{dt} \quad (2.3)$$

Sada ćemo relaciju 2.3 dvaput uzastopno integrirati:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{LC} i(t) + \frac{1}{L} \frac{du_{ul}(t)}{dt} \quad / \int \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i(t) - \frac{1}{LC} \int i(t) dt + \frac{1}{L} u_{ul}(t) \quad / \int \Rightarrow$$
$$i(t) = -\frac{R}{L} \int i(t) dt - \frac{1}{LC} \int (\int i(t) dt) dt + \frac{1}{L} \int u_{ul}(t) dt \quad (2.4)$$

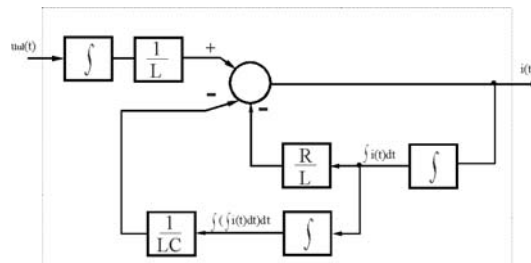
Dobili smo jednažbu u kojoj je struja izražena preko integrala struje i ulaznog napona. Ovakav model moguće je realizirati jer su integratori kao dijelovi sustava vrlo jednostavno fizički izvedivi.

Prikažimo jednadžbu 2.4 u obliku blok dijagrama koji se vrlo često koristi u grafičkom predočavanju sustava. U našem primjeru blok dijagram će sadržavati blokove za zbrajanje, množenje s konstantom i integriranje, prikazane na slici 2.10.



Sl. 2.10: Osnovni građevni blokovi blok-dijagrama

Slika 2.11 prikazuje blok-dijagram RLC kruga modeliranog integralnom jednadžbom.



Sl. 2.11: Blok dijagram modela RLC kruga

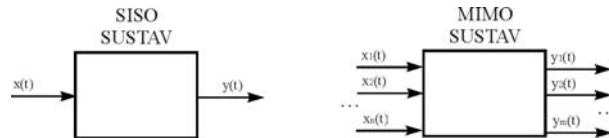
U ovom primjeru upoznali smo se s modeliranjem u vremenskom području (svi signali bili su funkcije vremena). Iako je u pitanju bio vrlo jednostavan strujni krug, za njegov opis trebala nam je integro-diferencijalna jednadžba koju uopće nije lako riješiti. Za rješavanje složenijih krugova postupak se sve više komplicira. Stoga se često kod modeliranja sustava služimo različitim transformacijama signala koje nam olakšavaju rješavanje postavljenih jednadžbi. Npr. tako se kod kontinuiranih sustava služimo tzv. Laplace-ovom transformacijom, a kod diskretnih sustava tzv. Z-transformacijom. Primjenom ovih transformacija diferencijalne jednadžbe koje opisuju sustave (a pritom najčešće složene za rješavanje) pretvaraju se u jednostavne algebarske jednadžbe kojima je mnogo jednostavnije naći rješenje. Drugim riječima, operacije deriviranja i integriranja zamjenjujemo množenjem i dijeljenjem.

Laplace-ovu i Z-transformaciju detaljnije ćemo proučiti u nekim od narednih poglavlja.

2.1.4 MIMO i SISO sustavi

Prethodni primjer prikazuje sustav s jednim ulazom (ulazni napon) i jednim izlazom (struja u krugu). Ovakvi sustavi se često nazivaju SISO

sustavi (eng. *Single Input – Single Output*) i njihov općeniti blok dijagram može se prikazati kao na slici 2.11, lijevo. Također postoje i MIMO sustavi, s više ulaza i izlaza (eng. *Multiple Input, Multiple Output*), Sl. 2.12, desno.



Sl. 2.12: SISO i MIMO sustavi

Osobno računalo jest, primjerice, MIMO sustav jer istovremeno može primati, obrađivati i generirati različite podatke (tekst, sliku, video, glazbu, itd.)

2.1.5 Energija i snaga signala

Iz različitih primjera s kojima smo se dosad upoznali, vidimo da signali mogu predstavljati mnoge fizikalne pojave. U mnogim primjerima (ali ne svim) signali su povezani s fizikalnim veličinama koje pohranjuju ili oslobađaju energiju u fizikalnom sustavu. Na primjer, ako s $u(t)$ i $i(t)$ označimo napon na otporniku i struju koja protječe kroz otpornik R , tada će snaga koja se oslobađa na otporniku biti:

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t) \frac{u(t)}{R} = \frac{1}{R} u^2(t) \quad (2.5)$$

Ukupna energija koja se razvije tijekom vremenskog intervala $t_1 \leq t \leq t_2$ će biti:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \quad (2.6)$$

Prosječnu snagu oslobođenu tijekom intervala t dobit ćemo ako ukupnu energiju podijelimo s trajanjem vremenskog intervala $(t_2 - t_1)$:

$$P_{\text{PROSJEČNA}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \quad (2.7)$$

Slično, kod automobila (slike 1.2 i 2.2) snaga koja se izgubi uslijed trenja između kotača i ceste biti će proporcionalna kvadratu brzine:

$$p(t) = bv^2(t)$$

pri čemu je b koeficijent trenja.

I u ovom slučaju možemo definirati ukupnu oslobođenu energiju i prosječnu snagu.

Imajući na umu ove jednostavne fizikalne primjere, dogovorno je usvojena slična terminologija za definiranje snage i energije bilo kojeg kontinuiranog i diskretnog vremenskog signala, $x(t)$ i $x[n]$, bez obzira imali ti signali neko stvarno fizikalno značenje ili ne. Također, kako ćemo ubrzo vidjeti, često će biti zgodno opisivati signale pomoću kompleksnih brojeva (npr. izmjenične struje i napone prikazujemo kompleksnim brojevima). Stoga je za kontinuirani vremenski signal $x(t)$ prihvaćena slijedeća definicija ukupne energije tijekom intervala $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (2.8)$$

gdje je $|x|$ modul broja x (koji može biti i kompleksan). Prosječna snaga također se dobije dijeljenjem ukupne energije duljinom vremenskog intervala $(t_2 - t_1)$:

$$P_{\text{PROSJEČNA}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (2.9)$$

Slično, ukupna energija diskretnog signala $x[n]$ tijekom diskretnog vremenskog intervala $n_1 \leq n \leq n_2$ definirana je kao:

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 \quad (2.10)$$

a prosječna snaga kao:

$$P_{\text{PROSJEČNA}} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 \quad (2.11)$$

Bitno je napomenuti da se pojmovi 'snaga' i 'energija' signala koriste u apstraktnom smislu, bez obzira na to da li se uistinu odnose na fizikalnu snagu i energiju koje nalazimo u prirodi. Čak ako ponekad i postoji veza, relacije 2.8-2.11 najčešće će imati pogrešne jedinice. Na primjer, ukoliko za signal uzmemo napon na otporniku, $u(t)$, energija u relaciji 2.8. imat će jedinicu $[V^2]$ i da bismo dobili stvarnu, fizikalnu energiju trebali bismo relaciju 2.8 podijeliti s otporom u ohmima (tada bi energija poprimila stvarnu jedinicu $[J \text{ (joule)}] = V^2/\Omega$).

U mnogim sustavima bit će nam zanimljivo izračunati snagu i energiju signala u beskonačno dugom intervalu tj. za $-\infty < t < \infty$ ili $-\infty < n < \infty$. U tim slučajevima energija će biti:

$$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (\text{za kontinuirani signal}) \quad (2.12)$$

$$E_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (\text{za diskretni signal}) \quad (2.13)$$

Za neke signale integral u 2.12 ili suma u 2.13 će divergirati (težit će u ∞). Primjer je signal koji ima konstantnu vrijednost, npr. $x(t)=4$. Za takve signale kažemo da imaju beskonačnu energiju, dok one za koje vrijedi $E_{\infty} < \infty$ zovemo signali s konačnom energijom.

Na sličan način definirat ćemo prosječnu snagu signala na beskonačnom intervalu kao:

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \right) \quad (\text{za kontinuirani signal}) \quad (2.14)$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \right) \quad (\text{za diskretni signal}) \quad (2.15)$$

Pomoću ovih definicija možemo definirati 3 vrste signala:

- Prva vrsta signala ima konačnu ukupnu energiju ($E_{\infty} < \infty$). Prosječna snaga ovakvih signala jest 0, budući da će, npr. u kontinuiranom slučaju, biti:

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{\infty}}{2T} = 0 \quad (2.16)$$

Primjer signala s konačnom energijom jest:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

Ovaj signal poprima vrijednosti na konačnom vremenskom intervalu i ima energiju $E_{\infty}=1$, te prosječnu snagu $P_{\infty}=0$.

- Druga vrsta signala ima konačnu prosječnu snagu ($P_{\infty} < \infty$) i slijedom toga, beskonačnu energiju ($E_{\infty} = \infty$).

Primjer ovakvog signala jest $x(t)=3$, za koji će vrijediti:

$$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |3|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} (9t \Big|_{-T}^T) = \lim_{T \rightarrow \infty} (18T) = \infty$$

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |3|^2 dt \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} 18T \right) = 9$$

- Kod treće vrste signala i energija i snaga imaju beskonačne vrijednosti, primjer je $x(t)=t$:

$$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |t|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} t^3 \Big|_{-T}^T \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} T^3 \right) = \infty$$

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |t|^2 dt \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \frac{2}{3} T^3 \right) = \infty$$

2.2 TRANSFORMACIJE NEZAVISNE VARIJABLE

Temeljni pojam koji susrećemo kod signala i sustava jest transformacija signala. Primjerice, signali koji predstavljaju naredbe pilota pomoću elektronskih i mehaničkih sustava transformiraju se u pogonske sile koje podešavaju rep i zakrilca aviona.

U ovom poglavlju usredotočit ćemo se na neke osnovne transformacije signala koje uključuju jednostavne promjene nezavisne varijable tj. vremenske osi. Primjenom ovih transformacija moći ćemo u naknadnim poglavljima definirati neka osnovna svojstva signala i sustava.

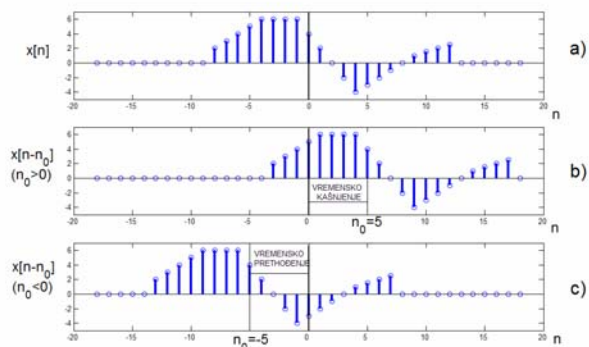
2.2.1 Primjeri transformacija nezavisne varijable

Vremenski pomak

Najjednostavniji i vrlo važan primjer transformacije nezavisne varijable jest vremenski pomak (*eng. time shift*). Pomak je ilustriran na slici 2.13 koja prikazuje diskretne signale $x[n]$ i $x[n-n_0]$ koji imaju identičan oblik, ali su međusobno pomaknuti za n_0 uzoraka.

Ako je $n_0 > 0$, signal $x[n-n_0]$ bit će na vremenskoj osi pomaknut udesno u odnosu na osnovni signal $x[n]$. Kažemo da će kasniti za signalom $x[n]$ tj. nastupat će kasnije u vremenu (svaki uzorak od signala $x[n]$ u signalu $x[n-n_0]$ nastupit će kasnije u vremenu, slike 2.13 a) i b). Primjerice, promotrimo uzorak signala $x[n]$ za vremenski trenutak $n = -1$; $x[-1]=6$, Sl 2.13 a). Taj uzorak će u signalu $x[n-n_0]$ (pri čemu je $n_0=5$) nastupiti u trenutku $n=4$, Sl 2.13 b), tj. uzorak signala $x[n-5]$ kasni u vremenu za uzorkom signala $x[n]$ za 5 diskretnih vremenskih trenutaka.

Ako je $n_0 < 0$, signal $x[n-n_0]$ bit će na vremenskoj osi pomaknut lijevo u odnosu na osnovni signal $x[n]$. Prethodit će signalu $x[n]$ tj. nastupat će ranije u vremenu (svaki uzorak signala $x[n-n_0]$ nastupit će ranije u vremenu u odnosu na uzorak od $x[n]$, slike 2.13 a) i c).



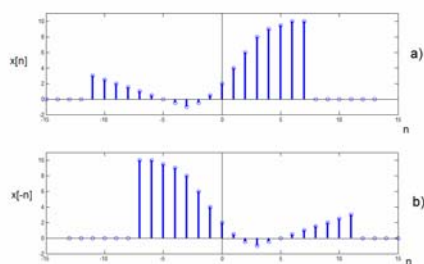
Sl. 2.13: Vremenski pomak diskretnog signala:

- a) osnovni signal, $x[n]$
- b) vremensko kašnjenje, $x[n-n_0]$, $n_0 > 0$
- c) vremensko prethođenje, $x[n-n_0]$, $n_0 < 0$

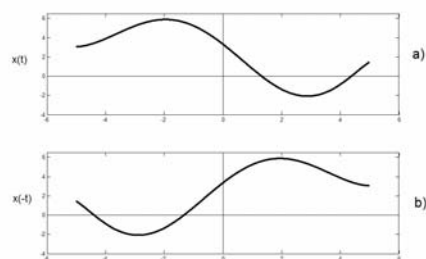
Vremenski pomak signala susrećemo npr. kod radara, sonara i sustava za mjerenje seizmičkih signala, pri čemu prijemnici smješteni na različitim lokacijama primaju signal koji se propagira kroz različite medije (voda, zrak, stijena, itd.). Razlika u vremenu propagacije signala od izvora (npr. od epicentra potresa) do primjerice dva prijemnika smještena na dvije različite lokacije predstavlja vremenski pomak između signala koje su prijemnici primili.

Vremensko obrtanje

Slijedeća transformacija vremenske osi jest obrtanje (*eng. time reversal*). Signal na slici 2.14 b), $x[-n]$ dobiven je obrtanjem signala $x[n]$ (Sl. 2.14 a) oko ordinatne osi ($n=0$). Slično, kontinuirani signal $x(-t)$ dobije se zrcaljenjem signala $x(t)$ oko pravca $t=0$, slika 2.15 a)-b). Primjerice, ako signal $x(t)$ predstavlja glazbeni zapis na kompaktnom disku, signal $x(-t)$ bio bi zvuk koji čujemo kad se CD vrti unatrag.



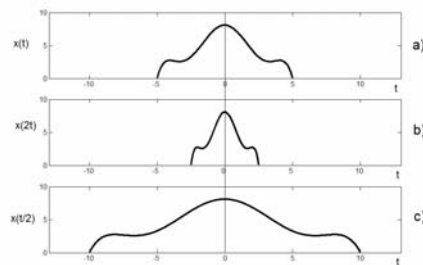
Sl. 2.14: Vremensko obrtanje diskretnog signala



Sl. 2.15: Vremensko obrtanje kontinuiranog signala

Vremensko skaliranje

Kod vremenskog skaliranja signal se sužava ili rasteže pri čemu također zadržava svoj osnovni oblik, Sl. 2.16. Signal $x(2t)$ je dvostruko sužen, a signal $x(t/2)$ dvostruko rastegnut u odnosu na osnovni signal $x(t)$. Primjerice, za $t=2.5$ signal $x(2t)$ će imati vrijednost $x(2 \cdot 2.5) = x(5)$ (pogledajmo na slici 2.16 a) koliki je $x(t)|_{t=5} = 0$. Također, za $t=10$ signal $x(t/2)$ će imati vrijednost $x(10/2) = x(5) = 0$. Na primjeru glazbe snimljene na CD koja predstavlja signal $x(t)$, signal $x(2t)$ predstavljao bi dvostruko ubrzanu glazbu, a $x(t/2)$ dvostruko usporenu glazbu.



Sl. 2.16: Vremensko skaliranje
kontinuiranog signala

Često nam je zanimljivo odrediti kakve transformacije izvršiti tako da se iz zadanog signala $x(t)$ dobije signal oblika $x(at+b)$, pri čemu su a i b zadani brojevi. Ovakva transformacija nezavisne varijable sačuvati će oblik signala $x(t)$, s tim da će rezultirajući signal biti linearno sužen (ako je $|a| > 1$), rastegnut (ako je $|a| < 1$), obrnut s obzirom na ordinatnu os (ako je $a < 0$) te pomaknut u vremenu, ulijevo (za je $b > 0$) ili udesno ($b < 0$). Primijenimo izrečeno na nekoliko primjera.

Primjer 2.1

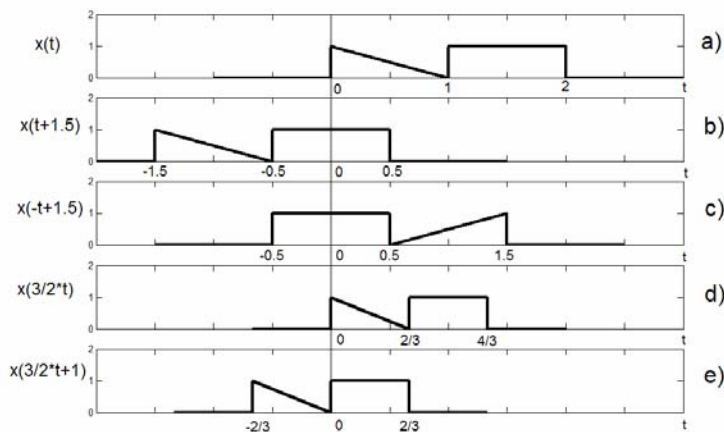
Zadan je vremenski kontinuirani signal $x(t)$, Sl. 2.17 a). Želimo odrediti i nacrtati signale $x(t+1.5)$ i $x(-t+1.5)$.

' $t+1.5$ ' odgovara vremenskom pomaku ulijevo (vremenskom prethodenju) za iznos 1.5, Sl. 2.17 b). Vrijednost signala $x(t)$ za neki vremenski trenutak $t=t_0$ pojavljuje se u signalu $x(t+1.5)$ u trenutku $t=t_0-1.5$. Primjerice, vrijednost $x(t)|_{t=1}=0$ nalazi se u signalu $x(t+1.5)$ u trenutku $t=1-1.5=-0.5$. Također, budući da je $x(t)=0$ za $t < 0$, $x(t+1.5)$ bit će nula za $t < (0-1.5)=-1.5$. Slično, kako je $x(t)=0$ za $t > 2$, $x(t+1.5)$ bit će nula za $t > (2-1.5)=0.5$.

Promotrimo signal $x(-t+1.5)$, koji se dobija kad u signalu $x(t+1.5)$ ' t ' zamijenimo sa ' $-t$ '. Stoga je $x(-t+1.5)$ zrcaljena verzija signala $x(t+1.5)$ i dobit ćemo ga tako da $x(t+1.5)$ zrcalimo s obzirom na ordinatnu os, slike 2.17 b) i c). Uzmemo li neku konkretnu vrijednost od t , npr. $t=0.5$, signal $x(-t+1.5)|_{t=0.5} = x(1) = \text{diskontinuitet (skok s 0 na 1)}$.

Primjer 2.2

Za $x(t)$, Sl. 2.17 a) signal $x(3/2*t)$ dobije se kompresijom (sužavanjem) signala $x(t)$ za faktor $2/3$, Sl. 2.17 d). Vrijednost signala $x(t)$ za $t=t_0$ pojavljuje se u signalu $x(3/2*t)$ u trenutku $t=2/3t_0$. Primjerice, vrijednost $x(t)|_{t=1}$ = skok s 0 na 1 nalazi se u signalu $x(3/2*t)$ u trenutku $t=2/3*1$. Također, budući da je $x(t)=0$ za $t<0$, $x(3/2*t)$ bit će nula za $t < (2/3*0=0)$. Slično, kako je $x(t)=0$ za $t>2$, $x(3/2*t)$ bit će nula za $t > (2/3*2=4/3)$.



Sl. 2.17: Transformacije nezavisne varijable na kontinuiranom signalu $x(t)$
 b) vremenski pomak; c) vremenski pomak i zrcaljenje
 d) vremensko skaliranje; e) vremensko skaliranje i pomak

Primjer 2.3

Da rezimiramo prethodne primjere, recimo da želimo izvršiti transformacije signala $x(t)$ tako da dobijemo signal $x(at+b)$. Postupit ćemo tako da prvo pomaknemo signal $x(t)$ za vremenski interval b (udesno za $b<0$, odnosno ulijevo za $b>0$), zatim pomaknuti signal suzimo (ako je $|a|>1$) ili rastegnemo (ako je $|a|<1$) te zrcalimo (ako je $a<0$).

Npr. želimo dobiti $x(3/2*t+1)$ na temelju signala $x(t)$ sa slike 2.17 a): prvo ćemo signal $x(t)$ pomaknuti ulijevo za 1, zatim ćemo translahirani signal suziti za faktor $2/3$ (budući da je $|a|=3/2$), Sl. 2.17 e).

2.2.2 Periodički signali

Periodički vremenski kontinuirani signali su oni za koje postoji takva pozitivna vrijednost T za koju će vrijediti:

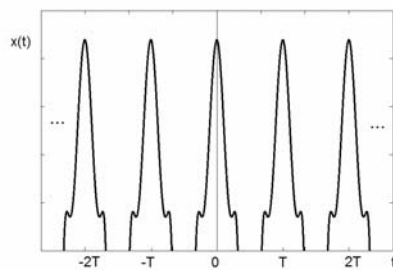
$$x(t) = x(t + T), \quad \text{za svaku vrijednost od } t. \quad (2.17)$$

Drugim riječima, periodički signal ima svojstvo da ostane nepromijenjen ako ga u vremenu pomaknemo za vrijednost T . Za takav signal kažemo da je *periodičan s periodom T* , primjer je dan na slici 2.18. Na slici vidimo da će vrijediti $x(t) = x(t + mT)$, za svaku cjelobrojnu vrijednost m . Također, $x(t)$ će biti periodičan i s periodima $2T, 3T, 4T, \dots$. Kažemo da je *osnovni period T_0* signala $x(t)$ najmanja pozitivna vrijednost od T za koju vrijedi relacija 2.17. Definicija osnovnog perioda ima smisla za sve periodičke signale, osim ukoliko je signal konstanta (npr. $x(t)=2$). U tom slučaju osnovni period je nedefiniran jer je $x(t)$ periodičan za bilo koju vrijednost od T (stoga ne možemo odrediti najmanju pozitivnu vrijednost). Signale koji nisu periodički zovemo *aperiodičkim* signalima.

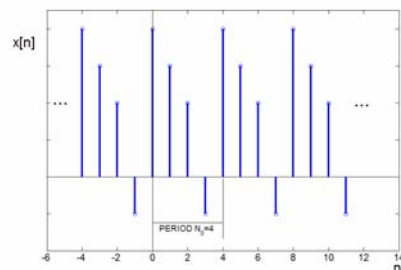
Na isti način definiramo periodične signale u diskretnom području i kažemo da je vremenski diskretni signal $x[n]$ periodičan s periodom N , pri čemu je N pozitivan cijeli broj, ako vrijedi:

$$x[n] = x[n + N], \text{ za svaku vrijednost od } n. \quad (2.18)$$

Također, signal će biti periodičan i za periode $2N, 3N, \dots$. Osnovni period N_0 je najmanja vrijednost od N za koju vrijedi relacija 2.18. Primjer diskretnog periodičkog signala s osnovnim periodom $N_0=4$ prikazan je na slici 2.19.



Sl. 2.18: Vremenski kontinuirani periodički signal s periodom T



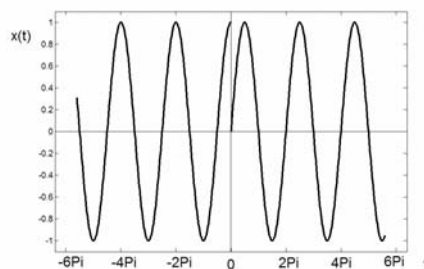
Sl. 2.19: Vremenski diskretni periodički signal s osnovnim periodom $N_0=4$

Primjer 2.4

Ispitajmo periodičnost signala:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), & \text{za } t < 0 \\ \sin(t), & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$

Iz trigonometrije znamo da vrijedi: $\cos(t) = \cos(t+2\pi)$ i $\sin(t) = \sin(t+2\pi)$, tj. da su zasebno gledajući funkcije \sin i \cos periodične, s periodom $T=2\pi$. Međutim, vidimo na slici 2.20 da signal $x(t)$ u točki $t=0$ ima diskontinuitet (prekid) koji se javlja samo na tom mjestu. Budući da se kod periodičkih signala *svaka* pojava u signalu mora periodički ponavljati, zaključujemo da signal $x(t)$ nije periodičan.



Sl. 2.20: Ispitivanje periodičnosti kontinuiranog signala $x(t)$

2.2.3 Parni i neparni signali

Još jedna od korisnih karakteristika signala odnosi se na simetričnost s obzirom na ordinatnu os. Za signal $x(t)$ ili $x[n]$ kažemo da je *paran* ako zrcaljenjem signala s obzirom na ordinatnu os dobijemo identičan signal, tj. ako vrijedi slijedeće:

$$x(-t) = x(t) \quad (\text{u kontinuiranom vremenu}) \quad (2.19)$$

odnosno:

$$x[-n] = x[n] \quad (\text{u diskretnom vremenu}) \quad (2.20)$$

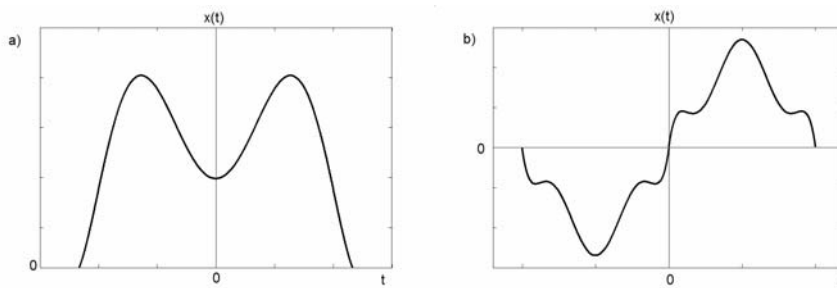
S druge strane, signal će biti *neparan* ako vrijedi:

$$x(-t) = -x(t) \quad (\text{u kontinuiranom vremenu}) \quad (2.21)$$

odnosno:

$$x[-n] = -x[n] \quad (\text{u diskretnom vremenu}) \quad (2.22)$$

Neparni signal u točki $t=0$ nužno mora imati vrijednost 0, budući da na temelju relacija 2.21 i 2.22 imamo: $x(0) = -x(0)$ i $x[0] = -x[0]$. Primjeri parnog i neparnog vremenski kontinuiranog signala dani su na slici 2.21.



Sl. 2.21: a) Parni vremenski kontinuirani signal
b) Neparni vremenski kontinuirani signal

Bitno je naglasiti da se svaki signal može rastaviti na parni i neparni dio, tj. svaki signal možemo zapisati kao:

$$x(t) = \text{Par}\{x(t)\} + \text{Nepar}\{x(t)\} \quad (2.23)$$

pri čemu su $\text{Par}\{x(t)\}$ i $\text{Nepar}\{x(t)\}$ parni i neparni dio signala, redom.

Parni dio može se izraziti kao:

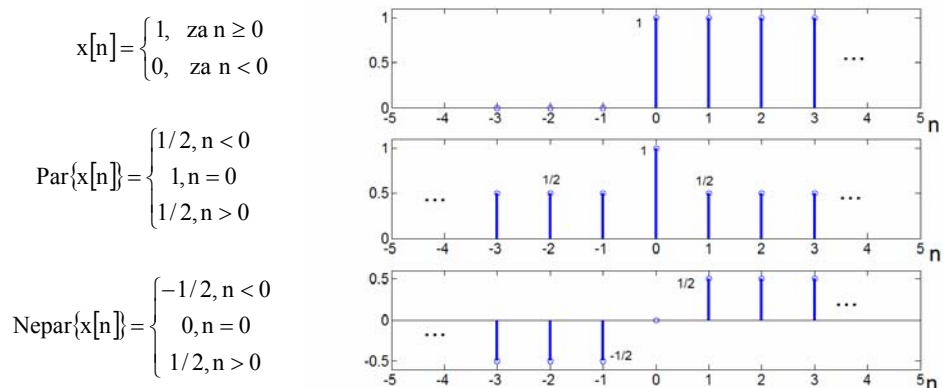
$$\text{Par}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (2.24)$$

a neparni kao:

$$\text{Nepar}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (2.25)$$

Za diskretno vremensko područje vrijede analogne relacije.

Rastav diskretnog vremenskog signala $x[n]$ na parni i neparni dio prikazan je na slici 2.26.



Sl. 2.26: Rastav diskretnog vremenskog signala $x[n]$ na parni i neparni dio:

$$x[n] = \text{Par}\{x[n]\} + \text{Nepar}\{x[n]\}$$

2.3 EKSPONENCIJALNI I SINUSNI SIGNALI

U ovom i narednom poglavlju upoznat ćemo nekoliko osnovnih vremenski kontinuiranih i diskretnih signala s kojima ćemo se često susretati u analizi sustava i koji će nam služiti kao osnova pomoću koje ćemo graditi mnoge druge, složenije signale.

2.3.1 Vremenski kontinuirani kompleksni eksponencijalni i sinusni signali

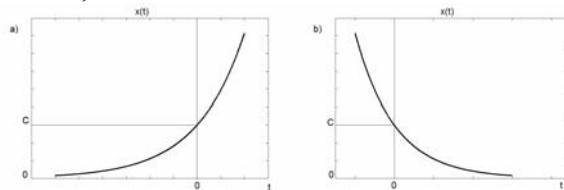
Vremenski kontinuirani *eksponencijalni signal* u općenitom obliku može se zapisati kao:

$$x(t) = Ce^{at} \quad (2.25)$$

pri čemu 'C' i 'a' mogu biti realni ili kompleksni brojevi. Ovisno o vrijednostima ovih parametara, eksponencijalna funkcija može imati nekoliko različitih karakteristika, kao što ćemo vidjeti u tekstu koji slijedi.

Realni eksponencijalni signali

Ako su 'C' i 'a' realni brojevi, signal $x(t)$ nazivamo realna eksponencijala. Ako 'a' ima pozitivnu vrijednost, tada $x(t)$ s vremenom raste, Sl. 2.27 a). Ovakav oblik signala susrećemo u mnogim fizikalnim procesima kao što su lančana reakcija u atomskoj eksploziji, složene kemijske reakcije i dr. Ako je $a < 0$, signal $x(t)$ nazivamo padajuća eksponencijala, Sl. 2.27 b) i također ga susrećemo u mnogim procesima kao što je radioaktivno raspadanje, odziv RC krugova ili prigušenih mehaničkih sustava. Ako je $a = 0$, $x(t)$ poprima konstantnu vrijednost, C.



Sl. 2.27: Vremenski kontinuirana realna eksponencijalna funkcija, $x(t) = Ce^{at}$: a) $a > 0$; b) $a < 0$

Periodički kompleksni eksponencijalni i sinusni signali

Slijedeća vrsta eksponencijalnih signala jest ona za koje parametar 'C' ima realnu vrijednost (označit ćemo je s A), a parametar 'a' čisto imaginarnu vrijednost (označit ćemo je s $j\omega_0$), tj. biti će:

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t} \quad (2.26)$$

Svojstvo ovog signala jest periodičnost. Odredimo osnovni period. Prisjetimo se, na temelju relacije 2.17, da bi $x(t)$ bio periodičan, mora vrijediti:

$$Ae^{j\omega_0 t} = Ae^{j\omega_0 (t+T)} \quad (2.27)$$

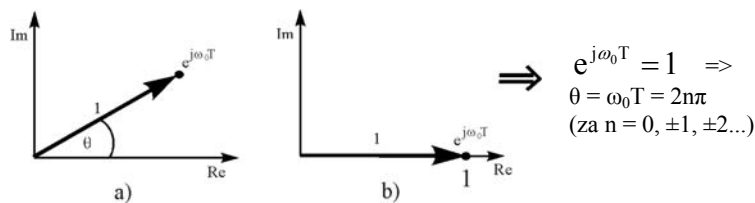
odnosno,

$$Ae^{j\omega_0 t} = Ae^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

Da bi jednakost bila zadovoljena, mora vrijediti:

$$e^{j\omega_0 T} = 1 \quad (2.28)$$

Ako je $\omega_0=0$, tada će $x(t)$ imati konstantnu vrijednost A i bit će periodičan za svaku vrijednost T . Da bismo odredili period za $\omega_0 \neq 0$, predočimo kompleksni broj $e^{j\omega_0 T}$ kao vektor u kompleksnoj ravnini*, koji ima modul 1 i kut nagiba prema realnoj osi $\theta = \omega_0 T$, Sl 2.28 a).



Sl. 2.28: Određivanje perioda kompleksne eksponencijale

Na slici 2.28 b) vidimo da će $e^{j\omega_0 T}$ poprimiti čisto realnu vrijednost 1 (tj. $e^{j\omega_0 T} = 1$) kad bude zadovoljeno $\theta = 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, tj:

$$\omega_0 T = 2n\pi, \quad \text{za } n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

odnosno:

$$T = \frac{2n\pi}{\omega_0} \quad \text{za } n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Osnovni period T_0 (definiran kao najmanja pozitivna vrijednost od T) će biti:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}, \quad (2.29)$$

$$\text{a viši periodi će biti } \pm \frac{4\pi}{|\omega_0|}, \pm \frac{6\pi}{|\omega_0|}, \pm \frac{8\pi}{|\omega_0|}, \dots$$

Također, signal $e^{-j\omega_0 t}$ će imati isti osnovni period.

* Napomena: Prikaz kompleksnog broja u kompleksnoj ravnini i izvod Eulerove relacije vidjeti u matematičkom repertoriju na str. **XXXXX**.

Primjenom Eulerove relacije* kompleksna eksponencijala iz relacije 2.26 može se prikazati kao suma dva sinusoidalna signala na način:

$$Ae^{j\omega_0 t} = A \cos(\omega_0 t) + j A \sin(\omega_0 t) \quad (2.30)$$

Također, vrijedit će:

$$Ae^{-j\omega_0 t} = A \cos(\omega_0 t) - j A \sin(\omega_0 t) \quad (2.31)$$

Sumirajmo relacije 2.30 i 2.31 i izlučimo $\cos(\omega_0 t)$. Bit će:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad (2.32)$$

Ako oduzmemo relaciju 2.31 od 2.30 i izlučimo $\sin(\omega_0 t)$, bit će:

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \quad (2.33)$$

Pokazali smo kako osnovne trigonometrijske funkcije \sin i \cos možemo prikazati pomoću kompleksne eksponencijale.

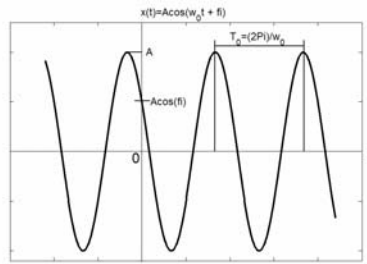
Ovim dolazimo do još jednog osnovnog signala koji se često koristi u analizi sustava; *sinusoidalnog signala* kojeg u općem obliku zapisujemo kao:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta) \quad (\text{sinusni signal}) \quad (2.34)$$

ili

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (\text{kosinusni signal}) \quad (2.35)$$

pri čemu parametre 'A', ' ω_0 ' i ' θ ' nazivamo amplituda, kružna frekvencija i faza signala, redom. Uz sekundu kao jedinicu vremena, jedinice od θ i ω_0 bit će radijani, [rad] i radijani po sekundi, [rad/s], redom. Kružnu frekvenciju je uobičajeno pisati i kao $\omega_0 = 2\pi f_0$, pri čemu frekvencija f_0 ima jedinicu 1/s, odnosno Hertz, [Hz]. Sinusoidalni signal prikazan je na slici 2.29 i ima isti osnovni period T_0 kao kompleksna eksponencijala, dan izrazom 2.29.



Sl. 2.29: Vremenski kontinuirani sinusoidalni signal, $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$

Signale koji se ponašaju po sinusnom zakonu također često susrećemo prirodi, npr. odziv idealnog titrajnog LC kruga ima sinusni oblik, ili jednostavni mehanički sustav koji se sastoji od mase obješene na oprugu. I zvučni signal koji odgovara čistom glazbenom tonu također je sinusni signal.

Prikažimo još općeniti oblik sinusoidalnog signala (npr. onaj dan izrazom 2.35) pomoću kompleksnih eksponencijala. Primijenimo opet Eulerovu relaciju:

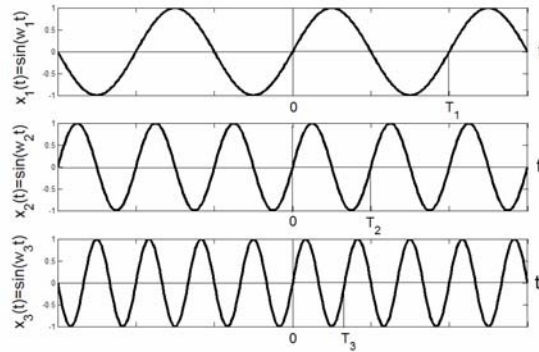
$$Ae^{j(\omega_0 t + \theta)} = A \cos(\omega_0 t + \theta) + j A \sin(\omega_0 t + \theta)$$

$$Ae^{-j(\omega_0 t + \theta)} = A \cos(\omega_0 t + \theta) - j A \sin(\omega_0 t + \theta)$$

Slijedi:

$$A \cos(\omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 t} \quad (2.36)$$

Iz relacije 2.29 vidimo da je osnovni period sinusoidalnog signala ili kompleksne eksponencijale, T_0 inverzno proporcionalan s $|\omega_0|$, koju ćemo nazvati osnovna kružna frekvencija. Slika 2.30 ilustrira što to znači: kako povećavamo frekvenciju ω ($\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$), time povećavamo brzinu osciliranja signala tj. smanjujemo period T ($T_1 > T_2 > T_3$). U slučaju smanjivanja frekvencije, raste period.



Sl. 2.30: Odnos između osnovne frekvencije i perioda za vremenski kontinuirani sinusoidalni signal:
 $\omega_2 = 2 \omega_1$ i $\omega_3 = 3 \omega_1$, te posljedično: $T_2 = (1/2)T_1$ i $T_3 = (1/3)T_1$

Svi periodički signali, uključujući sinusoidalne i kompleksno eksponencijalne, imaju beskonačnu ukupnu energiju i konačnu prosječnu snagu. Odredimo npr. energiju i snagu signala iz relacije 2.26, tijekom jednog perioda:

$$E_{\text{period}} = \int_0^{T_0} |Ae^{j\omega_0 t}|^2 dt = A^2 \int_0^{T_0} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = A^2 \int_0^{T_0} 1 dt = A^2 T_0 \quad (2.37)$$

$$P_{\text{period}} = \frac{1}{T_0} E_{\text{period}} = A^2 \quad (2.38)$$

Budući da signal ima beskonačno mnogo perioda, ukupna energija E_∞ koju dobijemo kad integriranje provedemo na intervalu $t \in (-\infty, \infty)$ poprima beskonačnu vrijednost. Međutim, svi periodi signala imaju isti oblik. Budući da prosječna snaga signala za svaki period ima vrijednost A^2 , prosječna snaga za n perioda opet će imati istu vrijednost, tj:

$$P_{n_perioda} = \frac{1}{nT_0} E_{n_perioda} = \frac{1}{nT_0} \int_0^{nT_0} |Ae^{j\omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{nT_0} A^2 \int_0^{nT_0} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{nT_0} A^2 nT_0 = A^2 \quad (2.39)$$

Stoga će i prosječna snaga signala na beskonačnom vremenskom intervalu imati istu vrijednost, tj:

$$P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |Ae^{j\omega_0 t}|^2 dt \right) = A^2 \quad (2.40)$$

Često ćemo se susretati s *harmonički povezanim* periodičkim signalima od kojih svi imaju isti osnovni period T_0 . Prisjetimo se, da bi signal $e^{j\omega_0 t}$ bio periodičan s periodom T , mora vrijediti relacija:

$$e^{j\omega_0 T} = 1$$

tj: $\omega_0 T = 2n\pi$, odnosno: $T = \frac{2n\pi}{\omega_0}$ za $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Osnovni period definirali smo za $n=1$ kao:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|},$$

a viši periodi su: $2T_0, 3T_0, 4T_0, \dots$

Analogno, osnovna frekvencija jest:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

a više frekvencije će biti: $2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0, \dots$

Višim harmonicima osnovnog signala $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ zvat ćemo signale istog oblika, kojima su osnovne frekvencije višekratnici od ω_0 (tj. $k\omega_0$, za $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$), označavat ćemo ih s $x_k(t)$ i zvati k -ti harmonik signala $x(t)$:

$$x_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots \quad (2.41)$$

Za $k=0$, $x_k(t)$ jest konstanta, a za bilo koju drugu vrijednost od k , $x_k(t)$ je periodičan s frekvencijom $k\omega_0$ i vlastitim osnovnim periodom:

$$T_k = \frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|} \quad (2.42)$$

k -ti harmonik $x_k(t)$ također je periodičan i s periodom T_0 i u tom vremenskom intervalu prođe točno k svojih osnovnih perioda. Na slici 2.30 signal $x_1(t)$ predstavlja osnovni signal, a $x_2(t)$ i $x_3(t)$ njegov drugi i treći harmonik, redom.

Primjer 2.5

Ponekad će biti zgodno prikazati sumu dviju kompleksnih eksponencijala kao produkt sinusoidalnog signala i kompleksne eksponencijale. Primjerice, želimo odrediti i nacrtati modul signala zadanog kao:

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j9t}$$

Prvo ćemo u desnoj strani izlučiti kompleksnu eksponencijalu s frekvencijom koju ćemo odrediti kao srednju vrijednost od $\omega_1=2$ i $\omega_2=9$, tj. $\omega=(2+9)/2=11/2$:

$$x(t) = e^{j\frac{11}{2}t} (e^{-j\frac{7}{2}t} + e^{j\frac{7}{2}t})$$

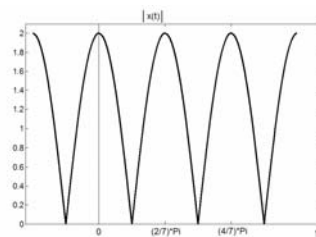
ako na izraz u zagradama primijenimo Eulerovu relaciju, dobit ćemo:

$$x(t) = 2e^{\frac{j11}{2}t} \cos\left(\frac{7}{2}t\right)$$

Modul ovog signala će biti:

$$|x(t)| = \left| 2e^{\frac{j11}{2}t} \cos\left(\frac{7}{2}t\right) \right| = 2 \left| \cos\left(\frac{7}{2}t\right) \right|$$

i prikazan je na slici 2.31. Ovakav signal često nazivamo *puno-valno ispravljen signal* (sve negativne vrijednosti signala 'ispravljamo' na pozitivne, tj. određujemo modul). Spomenimo i *polu-valno ispravljene signale* kod kojih svim negativnim vrijednostima signala pridjeljujemo vrijednost 0.



Sl. 2.31: Punovalno ispravljen sinusoidalni signal

Općeniti kompleksni eksponencijalni signali

Najopćenitiji oblik eksponencijalne funkcije dane izrazom 2.25 jest kad su oba parametra, 'C' i 'a' kompleksni brojevi.

Izrazimo parametar 'C' u polarnom obliku, a parametar 'a' pomoću Kartezijevih koordinata, odnosno:

$$C = |C|e^{j\theta}$$

$$a = \sigma + j\omega_0$$

Tada će signal biti:

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega_0)t} = |C|e^{\sigma t} e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

Primjenom Eulerove relacije, biti će:

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{\sigma t} \sin(\omega_0 t + \theta) \quad (2.43)$$

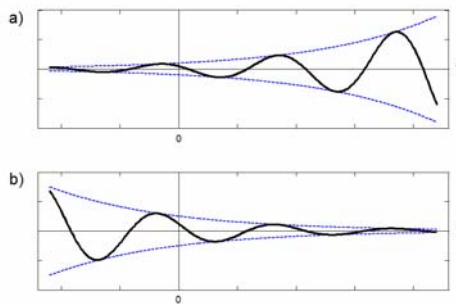
pri čemu su realni i imaginarni dio signala $x(t)$:

$$\text{Re}(x(t)) = |C|e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (2.44)$$

$$\text{Im}(x(t)) = |C|e^{\sigma t} \sin(\omega_0 t + \theta) \quad (2.45)$$

Za $\sigma = 0$, realni i imaginarni dio signala imaju čisti sinusoidalni oblik. Kad je $\sigma > 0$, $\text{Re}(x(t))$ i $\text{Im}(x(t))$ predstavljaju sinusoidalne funkcije

pomnožene s rastućom realnom eksponencijalom, Sl 2.32 a), dok su za $\sigma < 0$, $\text{Re}(x(t))$ i $\text{Im}(x(t))$ sinusoidalne funkcije pomnožene s padajućom realnom eksponencijalom, Sl 2.32 b). Isprekidane linije na slici 2.32 prikazuju funkcije $\pm|C|e^{\sigma t}$ koje predstavljaju amplitudu (tj. modul) signala $x(t)$ iz relacije 2.43. Stoga iscrtane linije predstavljaju ovojnici (anvelopu) oscilirajuće krivulje na način da vrhovi oscilacija dodiruju ovojnice; prikaz anvelope na zgodan način vizualizira trend amplitude oscilacija.



Sl. 2.32: a) Eksponencijalno rastući sinusoidalni signal,

$$|C|e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta), \sigma > 0$$

b) Eksponencijalno padajući sinusoidalni signal,

$$|C|e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta), \sigma < 0$$

Sinusne signale pomnožene s padajućom eksponencijalom često nazivamo *prigušenim sinusoidama*. Prigušene sinusne signale nalazimo npr. kod odziva RLC krugova i u mehaničkim sustavima koje sadrže prigušujuće sile. Ovi sustavi sadrže mehanizme koji troše energiju (otpornici u strujnim krugovima oslobađaju toplinu, sila trenja u mehaničkim sustavima), te su odzivi takvih sustava prigušeno oscilirajući.

2.3.2 Vremenski diskretni kompleksni eksponencijalni i sinusni signali

Vremenski diskretni *eksponencijalni signal* u općenitom obliku prikazujemo kao:

$$x[n] = C\alpha^n \quad (2.46)$$

pri čemu 'C' i 'α' mogu biti realni ili kompleksni brojevi. $x[n]$ možemo prikazati i na način:

$$x[n] = Ce^{an} \quad (2.47)$$

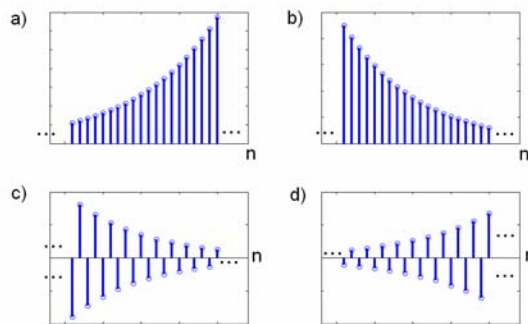
pri čemu je:

$$\alpha = e^a$$

Iako je oblik diskretnog signala prikazan relacijom 2.47 sličniji kontinuiranoj eksponencijali iz izraza 2.25, često će nam biti prikladnije koristiti oblik $C\alpha^n$.

Realni eksponencijalni diskretni signali

Ako su 'C' i 'α' realni brojevi, signal $C\alpha^n$ može imati dva oblika, kako je prikazano na slici 2.33. Ako je $|\alpha| > 1$, amplituda signala eksponencijalno raste s porastom diskretnog vremena n, Sl 2.33 a). Za $|\alpha| < 1$, amplituda signala eksponencijalno pada, Sl 2.33 b). Nadalje, ako je α pozitivan sve vrijednosti signala $C\alpha^n$ imaju isti predznak, dok za negativan α vrijednosti signala alterniraju u predznaku (susjedne vrijednosti signala imaju različit predznak), Sl 2.33 c) i d).



Sl. 2.33: Realni eksponencijalni diskretni signal, $x[n] = C\alpha^n$

a) $\alpha > 1$, b) $0 < \alpha < 1$, c) $-1 < \alpha < 0$, d) $\alpha < -1$

Kompleksni eksponencijalni i sinusni diskretni signali

Ako je 'C' realan (označit ćemo ga s A), a parametar 'a' čisto imaginaran (označit ćemo ga s $j\omega_0$), signal $x[n]$ će biti:

$$x[n] = Ae^{j\omega_0 n} \quad (2.48)$$

Kao i u kontinuiranom slučaju, ovaj signal je usko povezan sa sinusoidalnim signalom:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) \quad (2.49)$$

Ako za n uzmemo da je bezdimenzionalan, onda ω_0 i θ za jedinicu imaju radijane, rad. Tri primjera sinusoidalna diskretna signala prikazana su na slici 2.34.

Kao i u kontinuiranom slučaju, primijenit ćemo Eulerovu relaciju da bismo povezali kompleksnu eksponencijalu i sinusoidalne signale:

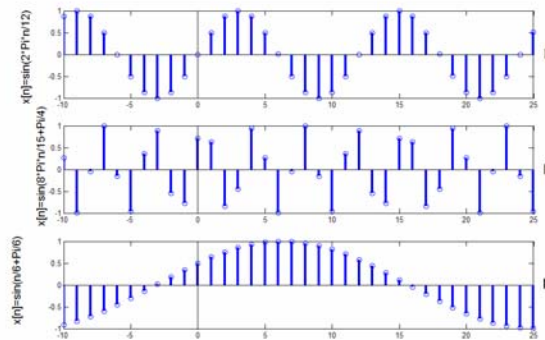
$$Ae^{j\omega_0 n} = A \cos(\omega_0 n) + jA \sin(\omega_0 n) \quad (2.50)$$

i,

$$A \cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 n} \quad (2.51)$$

Signali u relacijama 2.48 i 2.49 primjeri su diskretnih signala s beskonačnom ukupnom energijom i konačnom prosječnom snagom.

Primjerice, budući da je $|Ae^{j\omega_0 n}|^2 = A^2$, svaki uzorak u signalu 2.47 doprinosi ukupnoj energiji signala s A^2 , ukupna energija za interval $-\infty < n < \infty$ je beskonačna, dok je prosječna snaga A^2 .



Sl. 2.34: Diskretni sinusoidalni signali

Općeniti kompleksni eksponencijalni signali

Najopćenitiji oblik diskretne eksponencijalne funkcije dane izrazom 2.47 jest kad su oba parametra, 'C' i 'a' kompleksni brojevi.

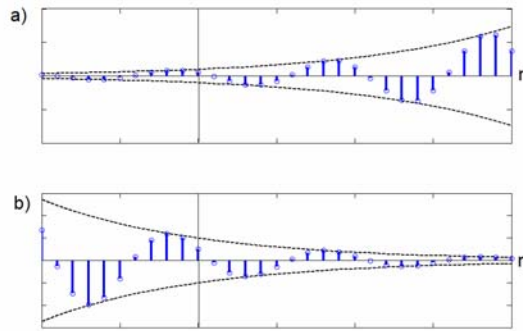
Izrazimo li parametar 'C' u polarnom obliku kao $C = |C|e^{j\theta}$, a parametar 'a' pomoću Kartezijevih koordinata kao $a = \sigma + j\omega_0$, signal će imati oblik:

$$x[n] = Ce^{an} = |C|e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega_0)n} = |C|e^{\sigma n} e^{j(\omega_0 n + \theta)} \quad (2.52)$$

Primjenom Eulerove relacije, biti će:

$$x[n] = Ce^{an} = |C|e^{\sigma n} \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C|e^{\sigma n} \sin(\omega_0 n + \theta) \quad (2.53)$$

Za $\sigma = 0$, realni i imaginarni dio signala imaju čisti sinusoidalni oblik. Kad je $\sigma > 0$, $\text{Re}(x(t))$ i $\text{Im}(x(t))$ predstavljaju sinusoidalne funkcije pomnožene s rastućom realnom eksponencijalom, Sl 2.35 a), dok su za $\sigma < 0$, $\text{Re}(x(t))$ i $\text{Im}(x(t))$ sinusoidalne funkcije pomnožene s padajućom realnom eksponencijalom, Sl 2.35 b).



Sl. 2.35: a) Eksponencijalno rastući diskretni sinusoidalni signal,

$$|C|e^{\sigma n} \cos(\omega_0 n + \theta), \sigma > 0$$

b) Eksponencijalno padajući diskretni sinusoidalni signal,

$$|C|e^{\sigma n} \cos(\omega_0 n + \theta), \sigma < 0$$

2.3.3 Periodičnost diskretnih kompleksnih eksponencijalnih signala

Uz mnoge sličnosti među kontinuiranim i diskretnim signalima, postoji i nekoliko bitnih razlika. Neke od njih odnose se na eksponencijalne signale $e^{j\omega_0 t}$ i $e^{j\omega_0 n}$. U poglavlju 2.3.1 utvrdili smo dva svojstva kontinuiranog signala $e^{j\omega_0 t}$ (i analogno, $\cos \omega_0 t$):

- 1) porastom vrijednosti ω_0 raste i brzina osciliranja signala, tj. za svake dvije međusobno različite vrijednosti ω_0 , signali će međusobno biti različiti.
- 2) signal je periodičan za bilo koju vrijednost frekvencije ω_0

U ovom poglavlju opisat ćemo obje navedene karakteristike u diskretnom vremenu i uočiti ćemo bitne razlike između diskretne i kontinuirane eksponencijale.

Prvo navedeno svojstvo neće vrijediti u diskretnom vremenu. Dokažimo to! Promotrimo diskretnu kompleksnu eksponencijalu s frekvencijom $\omega_0 + 2\pi$:

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = 1 * e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \quad (2.54)$$

analogno, vrijedit će:

$$\cos(\omega_0 + 2\pi)n = \cos \omega_0 n \quad (2.55)$$

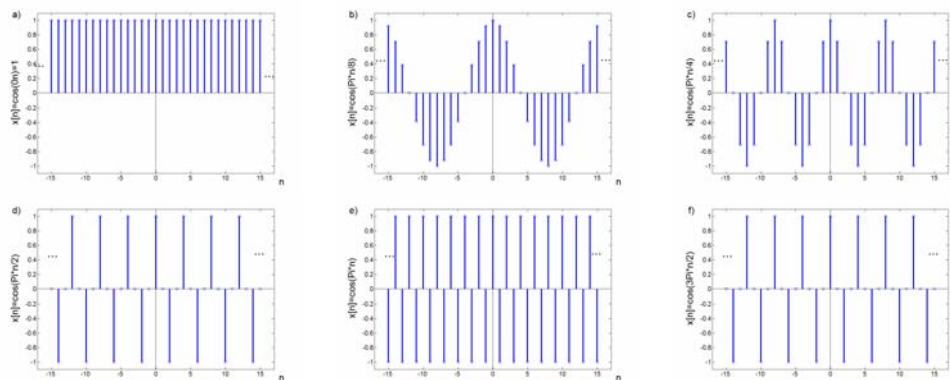
Iz relacija 2.54 i 2.55 vidimo da su signali na frekvenciji $\omega_0 + 2\pi$ isti kao na frekvenciji ω_0 , tj. imamo sasvim drugačiju situaciju nego kod kontinuiranih signala gdje su signali $e^{j\omega_0 t}$ (i analogno, $\cos\omega_0 t$) međusobno različiti za različite ω_0 . U diskretnom vremenu, signali s frekvencijom ω_0 su isti kao signali s frekvencijama $(\omega_0 \pm 2\pi)$, $(\omega_0 \pm 4\pi)$, $(\omega_0 \pm 6\pi)$... Stoga, kad promatramo diskretne eksponencijale i sinusoidne, u obzir uzimamo samo frekvencijski interval širine 2π , unutar kojeg biramo vrijednost ω_0 . Iako, uzimajući u obzir relaciju 2.54, možemo uzeti bilo koji interval širine 2π , najčešće biramo interval $0 \leq \omega_0 < 2\pi$ ili $-\pi \leq \omega_0 < \pi$. Stoga signali $e^{j\omega_0 n}$ i $\cos\omega_0 n$ ne osciliraju sve brže s porastom ω_0 . Umjesto toga, kao što je prikazano na slici 2.36, kako povećavamo ω_0 , počevši od vrijednosti 0, signal sve brže oscilira, dok ne dostignemo $\omega_0 = \pi$. Kad ω_0 nastavi rasti iznad π , oscilacije se počinju usporavati dok ω_0 ne dosegne 2π . Za $\omega_0 = 2\pi$ dobijemo signal istog oblika kao kad je $\omega_0 = 0$. Stoga niskofrekventni (tj. sporo oscilirajući) diskretni sinusni i eksponencijalni signali imaju frekvencije ω_0 bliske vrijednostima 0, 2π , 4π , 6π ..., dok su kod visokofrekventnih (brzo oscilirajućih) diskretnih signala ω_0 bliske vrijednostima π , 3π , 5π ... Primijetimo, za slučaj $\omega_0 = \pi$ (ili za bilo koji drugi neparni višekratnik od π):

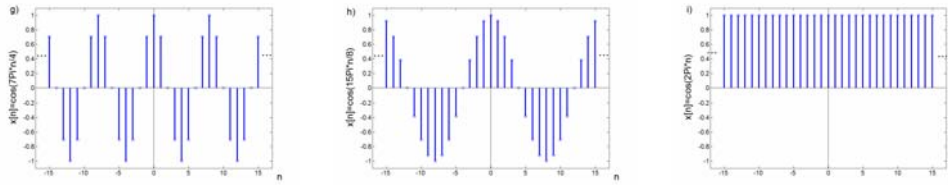
$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n, \quad (2.56)$$

analogno:

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

te ovi signali brzo osciliraju, mijenjajući predznak u svakom diskretnom vremenskom trenutku, Sl 2.36 e).





Sl. 2.36: Diskretni sinusoidalni signali $x[n] = \cos \omega_0 n$, za različite frekvencije,

$$\omega_0 = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{8}, 2\pi$$

Slijedeće svojstvo koje želimo razmotriti jest periodičnost diskretnih kompleksnih eksponencijala i sinusoida. Da bi signal $e^{j\omega_0 n}$ (analogno i $\cos(\omega_0 n)$) bio periodičan s periodom $N > 0$, treba vrijediti:

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \quad (2.57)$$

analogno:

$$\cos(\omega_0(n+N)) = \cos(\omega_0 n)$$

Tj, treba biti zadovoljeno:

$$e^{j\omega_0 N} = 1 \quad (2.58)$$

analogno:

$$\cos(\omega_0 N) = 1$$

Da bi jednakost 2.58 bila zadovoljena, $\omega_0 N$ mora biti višekratnik od 2π , tj. mora postojati takav cjelobrojni m da vrijedi:

$$\omega_0 N = m2\pi \quad (2.59)$$

ili, ekvivalentno:

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad (2.60)$$

Sukladno relaciji 2.60, signali $e^{j\omega_0 n}$ i $\cos(\omega_0 n)$ su periodički ako je $\omega_0/2\pi$ racionalan broj (tj. razlomak s cjelobrojn timer brojnikom i nazivnikom), u suprotnom nisu periodički. Primjerice, signali na slikama 2.37 a) i b) su periodički, a signal na Sl. 2.37 c) nije.

Odredimo sada osnovni period i osnovnu frekvenciju diskretne kompleksne eksponencijale, pri čemu ćemo osnovnu frekvenciju definirati kao i u kontinuiranom slučaju. Stoga, ako je $x[n]$ periodičan s osnovnim periodom N_0 , osnovna frekvencija će biti $2\pi/N_0$. Razmotrimo periodičku eksponencijalu $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ uz $\omega_0 \neq 0$. Kako smo upravo vidjeli, ω_0 mora

zadovoljavati relaciju 2.60 za cjelobrojne vrijednosti m i N , pri čemu je $N > 0$. Stoga signal $e^{j\omega_0 n}$ možemo zapisati kao: $e^{j(\frac{m}{N}2\pi)n}$

Osnovni period N_0 ćemo definirati kao najmanju cjelobrojnu vrijednost za koju će vrijediti:

$$e^{j(\frac{m}{N}2\pi)(n+N_0)} = e^{j(\frac{m}{N}2\pi)n} \quad (2.61)$$

tj. mora vrijediti:

$$e^{j(\frac{m}{N}2\pi)N_0} = 1 \quad (2.62)$$

Relacija 2.62 će vrijediti kad je zadovoljeno:

$$\frac{m}{N}2\pi N_0 = k2\pi, \text{ pri čemu je } k \text{ pozitivan cijeli broj.}$$

Tj., osnovni period N_0 će biti:

$$N_0 = k \frac{N}{m} \quad (2.63)$$

Moramo odabrati takav minimalan k da kN/M ima cjelobrojnu vrijednost. N i m mogu imati neki najveći zajednički djelitelj kojeg ćemo označiti s $\text{nzd}(N,m)$ koji definiramo kao najveći cjelobrojni broj kojim su djeljivi N i m . Primjerice, $\text{nzd}(2,3)=1$; $\text{nzd}(2,4)=2$; $\text{nzd}(8,12)=4$. Podijelimo brojnik i nazivnik u relaciji 2.63 s $\text{nzd}(N,m)$:

$$N_0 = k \frac{\frac{N}{\text{nzd}(N,m)}}{\frac{m}{\text{nzd}(N,m)}} \quad (2.64)$$

Budući da su brojnik i nazivnik u relaciji 2.64 cjelobrojni, te budući da tražimo minimalnu cjelobrojnu vrijednost za N_0 , minimalan k će iznositi:

$$k = \frac{m}{\text{nzd}(N,m)}, \quad (2.65)$$

Osnovni period N_0 će biti:

$$N_0 = \frac{N}{\text{nzd}(N,m)}, \quad (2.66)$$

a osnovna frekvencija:

$$\omega_{\text{osnovna_fr}} = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi}{N} \text{nzd}(N,m) \quad (2.67)$$

U tablici 2.1 istaknuli smo neke razlike između vremenski kontinuiranog signala $e^{j\omega_0 t}$ i diskretnog $e^{j\omega_0 n}$. Primijetimo da, kao i u kontinuiranom

slučaju, za $\omega_0=0$ diskretni signal će biti konstanta te će s osnovnom frekvencijom jednakom nuli i nedefiniranim osnovnim periodom.

Tablica 2.1: Usporedba signala $e^{j\omega_0 t}$ i $e^{j\omega_0 n}$

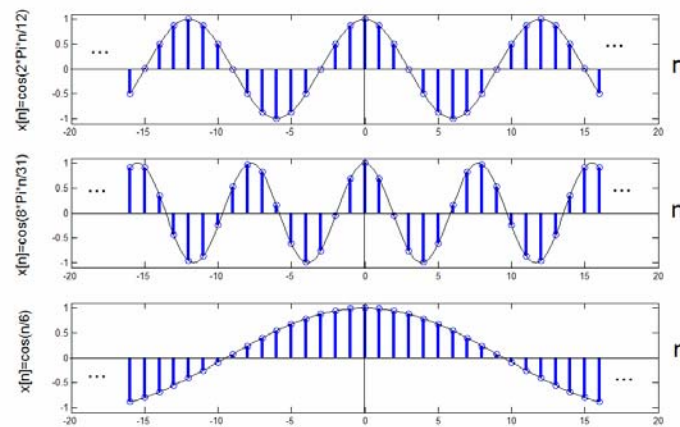
$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Različiti signali za različite vrijednosti ω_0	Identični signali za vrijednosti ω_0 i $\omega_0 \pm N2\pi$ (N cijeli broj)
Periodički za bilo koju vrijednost ω_0	Periodički samo ako vrijedi: $\omega_0=2\pi m/N$, za neke cjelobrojne vrijednosti $N>0$ i m
Osnovna frekvencija ω_0	Osnovna frekvencija* ω_0/m
Osnovni period: za $\omega_0=0$, period je nedefiniran za $\omega_0 \neq 0$, period je $2\pi/\omega_0$	Osnovni period*: za $\omega_0=0$, period je nedefiniran za $\omega_0 \neq 0$, period je $m(2\pi/\omega_0)$

* S pretpostavkom da m i N nemaju zajedničkih faktora

Primjer 2.6

Primijenimo gornje relacije tj. za signale prikazane na slici 2.37 provjerimo da li su periodični te odredimo osnovni period i osnovnu frekvenciju:

- a) $x[n]=\cos(2\pi n/12)$;
- b) $x[n]=\cos(8\pi n/31)$;
- c) $x[n]=\cos(n/6)$.



Sl. 2.37: Vremenski kontinuirani i diskretni sinusoidalni signali

a) $x[n]$ u općem obliku glasi $x[n]=\cos(\omega_0 n)$, tj., ω_0 će biti $\omega_0 = \frac{2\pi}{12}$. Prema relaciji 2.60, $x[n]$ će biti periodičan ako postoje cjelobrojni m i N takvi da vrijedi: $\omega_0 = m \frac{2\pi}{N}$. U našem slučaju $m=1$, $N=12$ i signal je periodičan.

Budući da je $\text{nzd}(m,N) = \text{nzd}(1,12)=1$, osnovni period će biti $N_0=12$, a osnovna frekvencija $\omega_{\text{osnovna_fr}} = \frac{2\pi}{12}$.

Možemo zamisliti da smo diskretni signal $x[n]=\cos(2\pi n/12)$ dobili uzorkujući kontinuirani signal $x(t)=\cos(2\pi t/12)$ tj. uzimajući uzorke za cjelobrojnim vremenskim trenucima ($n=\dots,-2,-1,0,1,2,\dots$), Sl. 2.37. Ovaj kontinuirani signal jest periodičan s osnovnim periodom $T_0=12\text{s}$ i osnovnom frekvencijom $\omega_0=2\pi/12$. Kako se i $x[n]$ ponavlja svakih 12 uzoraka, osnovni periodi za kontinuirani i diskretni signal se podudaraju.

b) $x[n]=\cos(8\pi n/31)=\cos(\omega_0 n)$, tj., $\omega_0 = \frac{8\pi}{31} = m \frac{2\pi}{N}$. $m=4$, $N=31$ te je signal periodičan. Najveći zajednički djelitelj je $\text{nzd}(m,N)=\text{nzd}(4,31)=1$, osnovni period je $N_0=31$, a osnovna frekvencija $\omega_{\text{osnovna_fr}} = \frac{2\pi}{31}$.

$x[n]$ može se promatrati kao vremenski diskretizirana verzija kontinuiranog signala $x(t)=\cos(8\pi t/31)$ čija je osnovni period $T_0=31/4$ sekunde i osnovna frekvencija $\omega_0=8\pi/31$. Dakle, osnovni periodi kontinuiranog i diskretnog signala se međusobno ne poklapaju i to stoga što je diskretni signal definiran samo za cjelobrojne vremenske trenutke. Na primjer, ne postoji uzorak u vremenskom trenutku $t=31/4$, kada $x(t)$ završava jedan period (počevši od $t=0$). Slično, ne postoji uzorak ni u vremenima $t=2*31/4$, $t=3*31/4$, kada $x(t)$ prijeđe dva tj. tri perioda. Međutim, postoji uzorak u trenutku $t=4*31/4=31$, kada $x(t)$ završi četiri perioda. To možemo vidjeti na slici Sl. 2.37 b) gdje se diskretni signal $x[n]$ ne ponavlja nakon svakog perioda kontinuiranog signala ($T_0=31/4$ sek), već nakon četiri prijeđena perioda, tj. nakon svakih 31 uzoraka.

c) $x[n]=\cos(n/6)=\cos(\omega_0 n)$, tj., $\omega_0 = \frac{1}{6}$. Vidimo da ne postoje takvi cjelobrojni m i N za koje će vrijediti relacija 2.60, te možemo zaključiti za signal nije periodičan.

Naime, promotrimo na slici 2.37 c) kontinuiranu sinusoidu $x(t)=\cos(t/6)$ s osnovnim periodom $T_0=12\pi$, a viši periodi su $2T_0$, $3T_0,\dots$ Dakle, nijedan period od $x(t)$ neće imati cjelobrojni vrijednost, pa se ni uzorci od $x[n]$ nikad neće ponavljati tj. $x[n]$ nije periodičan.

Rješavanjem slijedećeg primjera i primjenom uzorkovanja kontinuiranih signala dobit ćemo dublji uvid u periodičnost diskretnih kompleksnih eksponencijala.

Primjer 2.7

Neka je $x(t)$ vremenski kontinuiran signal, $x(t)=e^{j\omega_0 t}$ s osnovnom frekvencijom ω_0 i periodom $T_0=2\pi/\omega_0$. Razmotrimo diskretan signal kojeg smo dobiti uzorkovanjem signala $x(t)$ s periodom uzorkovanja T , tj:

$$x[n] = x(nT) = e^{j\omega_0 nT}$$

- Pokazati da je $x[n]$ periodičan ako i samo ako je T/T_0 racionalan broj, tj. $T/T_0=p/q$ gdje su p i q cijeli brojevi.
- Ako je $x[n]$ periodičan (tj. vrijedi $T/T_0=p/q$), Odrediti osnovni period i osnovnu frekvenciju za $x[n]$. Izraziti osnovnu frekvenciju pomoću $\omega_0 T$.
- S pretpostavkom da je $T/T_0=p/q$, odrediti koliko perioda od $x(t)$ je potrebno da se dobije broj uzoraka koji čini osnovni period od $x[n]$.

a) $x[n]$ možemo zapisati kao: $x[n]=e^{j\frac{T}{T_0}2\pi n}$. Da bi $x[n]$ bio periodičan s periodom N , mora vrijediti:

$$e^{j\frac{T}{T_0}2\pi(n+N)} = e^{j\frac{T}{T_0}2\pi n}, \text{ tj: } e^{j\frac{T}{T_0}2\pi N} = 1, \text{ odnosno:}$$

$$\frac{T}{T_0}2\pi N = m2\pi \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{m}{N} \quad (2.68)$$

gdje su m i N cjelobrojni brojevi, odnosno, T/T_0 jest racionalan broj.

b) Iz relacije 2.68 izrazimo period diskretnog signala N :

$$N = \frac{T_0}{T} m = \frac{q}{p} m$$

Osnovni period će biti najmanja pozitivna vrijednost od N . Na isti način koji smo primijenili u relacijama 2.63-2.66 možemo zaključiti da će osnovni period biti:

$$N_0 = \frac{q}{\text{nzd}(p,q)}$$

pri čemu je $\text{nzd}(p,q)$ najveći zajednički djelitelj od p i q .

Osnovna frekvencija će biti:

$$\omega_{\text{osn_fr}} = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi}{q} \text{nzd}(p,q)$$

Izrazimo $\omega_{\text{osn_fr}}$ pomoću $\omega_0 T$:

$$\omega_{\text{osn_fr}} = \frac{2\pi}{q} \frac{p}{p} \text{nzd}(p,q) = \frac{T}{T_0} \frac{2\pi}{p} \text{nzd}(p,q) = \frac{\text{nzd}(p,q)}{p} \omega_0 T$$

c) potrebno je $p/\text{nzd}(p,g)$ perioda od $x(t)$.

Primjer 2.8

Odrediti osnovni period diskretnog signala $x[n] = e^{j(\frac{2}{3}\pi)n} + e^{j(\frac{3}{4}\pi)n}$.

Signal $x[n]$ se sastoji od dvije kompleksne eksponencijale. Za prvu eksponencijalu vrijednosti m i N su: $m=1$, $N=3$, te će osnovni period, prema relaciji 2.66, biti $N_0=3$. Kod druge eksponencijale $m=3$, $N=8$, te će osnovni period biti $N_0=8$.

Da bi signal $x[n]$ bio periodičan, obje eksponencijale trebaju proći cijeli broj svojih osnovnih perioda. Najmanji broj n za koji će to vrijediti jest 24. Naime, tijekom intervala od 24 vremenski diskretna trenutka, prva eksponencijala će proći 8 svojih osnovnih perioda, druga će proći 3 osnovna perioda, dok će ukupni signal $x[n]$ proći točno jedan osnovni period.

2.4 JEDINIČNI IMPULS I JEDINIČNI ODSKOČNI SIGNAL

U ovom poglavlju upoznat ćemo još dva osnovna signala, jedinični impuls i jedinični odskočni signal, u kontinuiranom i diskretnom vremenu. U narednom poglavlju vidjet ćemo kako ove signale možemo koristiti za definiranje i prikaz drugih signala. Počnimo s diskretnim vremenom.

2.4.1 Diskretni jedinični impuls i jedinični odskočni signal

Jedan od najjednostavnijih diskretnih signala jest jedinični impuls (često ga nazivamo i jedinični uzorak te Dirac-ov ili delta impuls), kojeg definiramo kao, Sl 2.38 a):

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

Jedinični odskočni signal (često ga zovemo i step signal) definiramo kao, Sl 2.38 b):

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

Ova dva signala usko su povezana. Naime, jedinični impuls možemo prikazati kao prvu diferenciju step signala, odnosno kao razliku step signala i vremenski pomaknutog step signala (udesno za jedan uzorak), tj:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (2.71)$$

Obrnuto, diskretni jedinični step može se prikazati kao beskonačna suma jediničnih uzoraka, tj:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (2.71a)$$

Relacija 2.71a ilustrirana je na slici 2.39. Budući da jedinični impuls ima vrijednost različitu od nule samo u točki u kojoj je argument impulsa nula (tj. za $m=0$), sa slike vidimo da za $n < 0$ beskonačna suma iz relacije 2.71 ima vrijednost 0, a za $n \geq 0$ ima vrijednost 1. Nadalje, ako promijenimo varijablu 'm' (po kojoj zbrajamo) u ' $k = n - m$ ' i uvrstimo supstituciju u relaciju 2.71, diskretni jedinični odskočni signal moći ćemo pisati kao:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^0 \delta[n-k]$$

ili, ekvivalentno:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \quad (2.72)$$

Relacija 2.72 ilustrirana je na slici 2.40. U ovom slučaju $\delta[n-k]$ imat će vrijednost 1 kad je $k = n$, stoga opet vidimo da će suma iz relacije 2.72 biti 0 za $n < 0$, odnosno 1 za $n \geq 0$.

Relaciju 2.72 možemo promatrati kao superpoziciju zakašnjelih jediničnih impulsa, odnosno jedinični step signal možemo prikazati kao sumu jediničnog impulsa $\delta[n]$ za $n=0$, udesno pomaknutog impulsa za jedan uzorak tj. $\delta[n-1]$ za $n=1$, zatim pomaknutog impulsa za dva uzorka tj. $\delta[n-2]$ za $n=2$, itd. Ovakova interpretacija signala bit će nam korisna u trećem poglavlju.

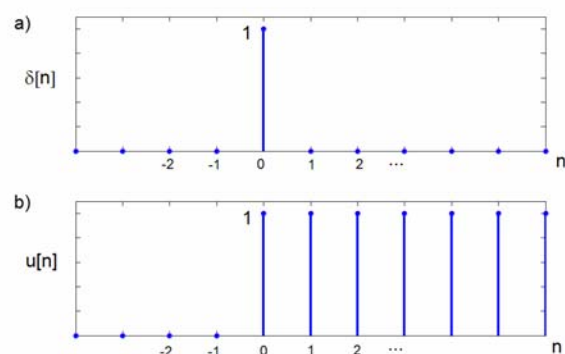
Jedinični impuls može se upotrijebiti za uzorkovanje nekog signala u vremenskom trenutku $n=0$. Naime, budući da je $\delta[n]$ različit od nule (i jednak 1) samo za $n = 0$, vrijedit će:

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \quad (2.73)$$

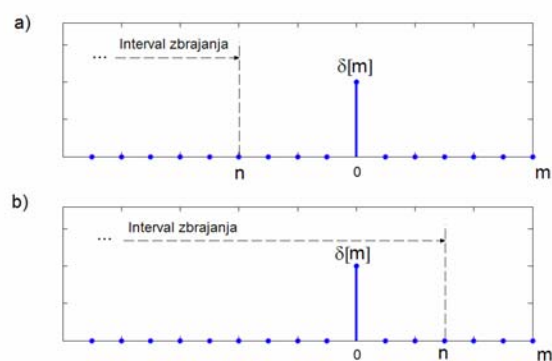
Još općenitije, ako promotrimo pomaknuti jedinični impuls $\delta[n-n_0]$ u trenutku $n = n_0$, vrijedit će:

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0] \quad (2.74)$$

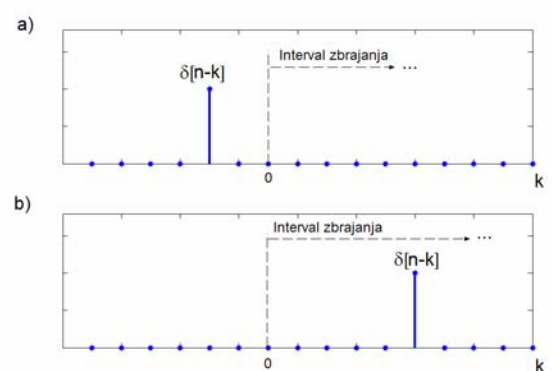
Ovo svojstvo uzorkovanja koje posjeduje jedinični impuls bit će nam od osobite važnosti u narednim poglavljima.



Sl. 2.38: a) Diskretni jedinični impuls (Dirac-ov impuls);
b) Diskretni jedinični odskočni signal (step signal)



Sl. 2.39: Beskonačna suma iz relacije 2.71 za: a) $n < 0$, b) $n > 0$



Sl. 2.40: Suma iz relacije 2.72 za: a) $n < 0$, b) $n > 0$

2.4.2 Kontinuirani jedinični odskočni signal i jedinični impuls

Vremenski kontinuirani jedinični odskočni signal (ili step signal) definira se na sličan način kao i u diskretnom vremenu, odnosno, Sl 2.41:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.75)$$

Primijetimo na slici 2.41 da step funkcija ima diskontinuitet u vremenu $t=0$. Vremenski kontinuirani jedinični impuls $\delta(t)$ povezan je sa step funkcijom na sličan način kao što su povezani u diskretnom vremenu. Naime, kontinuirani step signal definiramo kao beskonačni integral jediničnog impulsa:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (2.76)$$

Iz prethodne relacije također možemo dobiti izraz za $\delta(t)$, analogan izrazu za diskretni impuls $\delta[n]$ iz 2.71, tj. slijedi da je Dirac-ov impuls prva derivacija kontinuirane jedinične odskočne funkcije:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (2.77)$$

Za razliku od diskretnog vremenskog područja, kod deriviranja jedinične odskočne funkcije postoje određene poteškoće s obzirom da $u(t)$ ima diskontinuitet u $t=0$ te stoga nije derivabilna. Međutim, relaciju 2.77 interpretirat ćemo na način da funkciju $u(t)$ aproksimiramo funkcijom $u_{\Delta}(t)$, prikazanom na slici 2.42a), koja raste iz vrijednosti 0 i 1 u kratkom vremenskom intervalu Δ . Stoga signal $u(t)$ možemo smatrati idealizacijom od $u_{\Delta}(t)$, kad interval Δ teži u nulu, tj. možemo pisati:

$$u(t) = u_{\Delta}(t) \Big|_{\Delta \rightarrow 0} \quad (2.78)$$

Definirajmo sad derivaciju funkcije $u_{\Delta}(t)$ kao:

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt} \quad (2.79)$$

i prikazimo je na slici 2.42b). Primijetimo da je $\delta_{\Delta}(t)$ predstavlja impuls trajanja Δ koji uvijek ima jediničnu površinu, bez obzira na vrijednost Δ . Kad Δ teži u nulu, impuls $\delta_{\Delta}(t)$ postaje sve už i viši, pri čemu zadržava vrijednost površine 1. Sad jedinični impuls $\delta(t)$ možemo definirati kao:

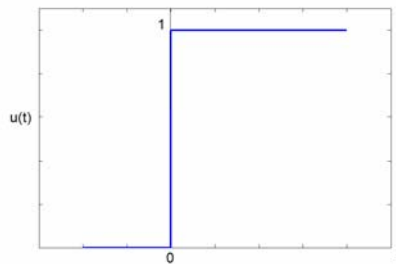
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) \quad (2.80)$$

i smatrati ga idealizacijom impulsa $\delta_{\Delta}(t)$, kad trajanje impulsa Δ postaje zanemarivo malo. Budući da $\delta(t)$ nema trajanja, ali ima jediničnu površinu, grafički ga prikazujemo na način prikazan slikom 2.43a), pri čemu strelica

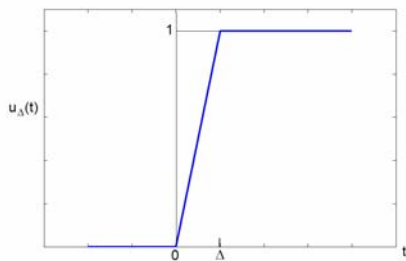
predstavlja puls beskonačno kratkog trajanja, koncentriranog u trenutku $t=0$, dok visina strelice i '1' pored strelice označavaju površinu impulsa. Još općenitije, skalirani impuls $k\delta(t)$ imat će površinu k , te će vrijediti:

$$\int_{-\infty}^t k\delta(\tau)d\tau = ku(t)$$

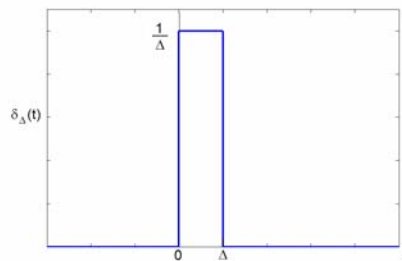
Skalirani impuls s površinom k prikazan je na slici 2.43b), pri čemu visina strelice označava površinu skaliranog impulsa.



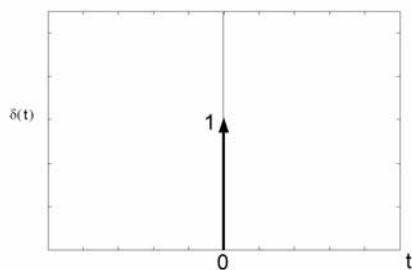
Sl. 2.41: Vremenski kontinuirani step signal, $u(t)$



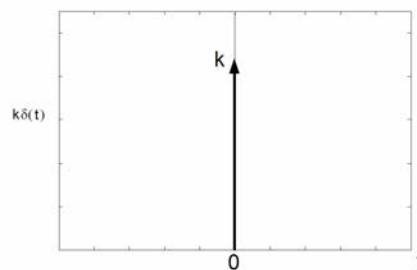
Sl. 2.42 a): Aproksimacija kontinuirane step funkcije, $u_A(t)$



Sl. 2.42 b): Derivacija funkcije $u_A(t)$, $\delta_A(t)$



Sl. 2.43 a): Vremenski kontinuiran jedinični impuls, $\delta(t)$



Sl. 2.43 b): Skalirani impuls, $k\delta(t)$

Kao i u diskretnom vremenu, na jednostavan grafički način možemo predočiti integral iz relacije 2.76, Sl 2.44. Budući da je površina jediničnog impulsa $\delta(\tau)$ koncentrirana u trenutku $\tau = 0$, vidimo da će integral imati vrijednost 0 za $t < 0$ i 1 za $t \geq 0$. Također, relacija 2.76 može se napisati na

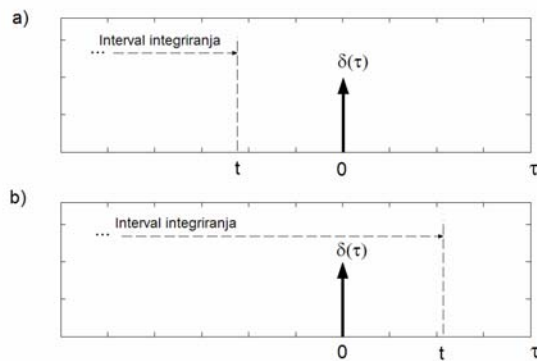
drugačiji način, analogno kao za diskretan slučaj iz relacije 2.72, ako uvedemo supstituciju varijable po kojoj integriramo na način: $\sigma = t - \tau$. Biti će:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{\infty}^0 \delta(t - \sigma) (-d\sigma)$$

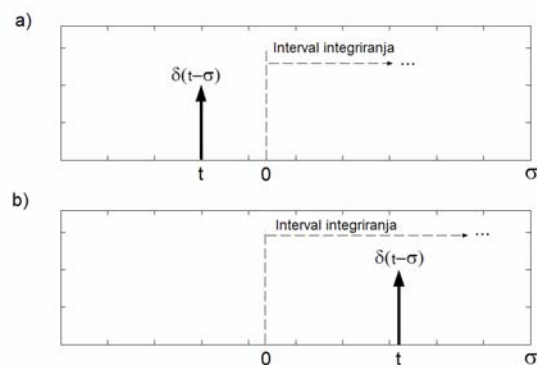
ili, ekvivalentno:

$$u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \sigma) d\sigma \quad (2.81)$$

Grafička interpretacija relacije 2.81 prikazana je na slici 2.45. Budući da je u ovom slučaju površina pomaknutog impulsa koncentrirana u vremenskom trenutku $\sigma = t$, opet vidimo da je integral u relaciji 2.81 0 za $t < 0$ i 1 za $t \geq 0$. Ovakav grafička ilustracija bit će nam izuzetno korisna u narednom poglavlju.

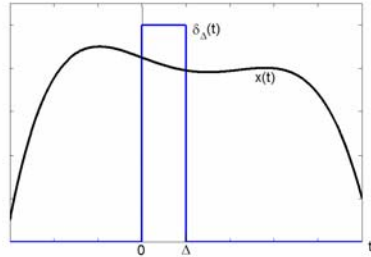


Sl. 2.44: Integral dan u relaciji 2.76 za:
a) $t < 0$, b) $t > 0$

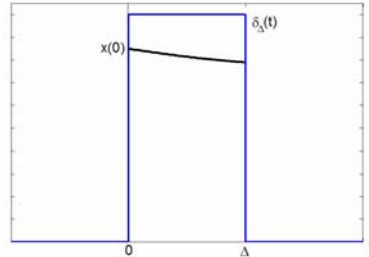


Sl. 2.45: Grafički prikaz relacije 2.81:
veza između jediničnog impulsa i step funkcije;

a) $t < 0$, b) $t > 0$



Sl. 2.46 a): Grafovi funkcija $x(t)$ i $\delta_\Delta(t)$



Sl. 2.46 b): Uvećan prikaz dijela umnoška $x(t)\delta_\Delta(t)$ koji je različit od 0

Kao i u diskretnom slučaju, vremenski kontinuirani impuls ima vrlo bitno svojstvo uzorkovanja. Naime, u mnogim slučajevima bit će nam korisno promatrati umnožak jediničnog impulsa i nekog vremenski kontinuiranog signala $x(t)$. Prikažimo grafički signal $x(t)$ i aproksimirani Dirac-ov impuls $\delta_\Delta(t)$, Sl. 2.46a) i promotrimo njihov umnožak $x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$. Slika 2.46b) uvećano prikazuje dio umnoška različit od nule. Naime, umnožak $x_1(t)$ će imati vrijednost 0 izvan vremenskog intervala $0 \leq t \leq \Delta$. Odaberemo li dovoljno mali Δ tako da $x(t)$ možemo smatrati konstantnim na intervalu $0 \leq t \leq \Delta$, možemo pisati:

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

Budući da je $\delta(t)$ limes od $\delta_\Delta(t)$, kad $\Delta \rightarrow 0$, slijedi:

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (2.82)$$

Na isti način možemo uzorkovati signal $x(t)$ u nekom drugom proizvoljnom vremenskom trenutku t_0 tako da signal pomnožimo s pomaknutim Dirac-ovim impulsom, odnosno:

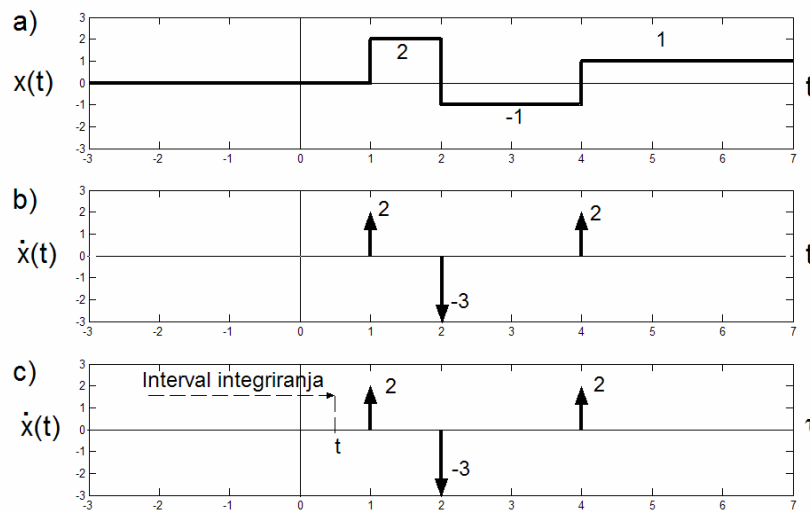
$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \quad (2.83)$$

Primjer 2.9

Odrediti i nacrtati derivaciju signala $x(t)$ prikazanog na slici 2.47a).

Zbog veze između kontinuiranog jediničnog impulsa i step signala, na jednostavan način možemo odrediti i nacrtati derivaciju zadanog signala. Naime, derivacija od $x(t)$ jest 0, osim na mjestima diskontinuiteta. U slučaju step funkcije, vidjeli smo da je derivacija jednaka jediničnom impulsu smještenom u točku diskontinuiteta, relacija 2.77. Nadalje, ako pomnožimo

obje strane relacije 2.77 s brojem k , vidimo da će derivacija odskočnog signala s diskontinuitetom k biti impuls visine k u točki diskontinuiteta. Ovo pravilo također vrijedi i za bilo koji drugi signal s odskočnim diskontinuitetom, kao što je signal $x(t)$ prikazan na slici 2.47a). Stoga možemo nacrtati derivaciju signala $x(t)$, Sl. 2.47b), kao niz impulsa smještenih u točke diskontinuiteta od $x(t)$, čija visina je jednaka iznosu diskontinuiteta. Primijetimo, npr., da diskontinuitet signala $x(t)$ u točki $t = 2$ ima vrijednost -3 , te $\dot{x}(t)$ u istoj točki ima impuls visine -3 .



Sl. 2.47: a) Signal s diskontinuitetima, $x(t)$; b) derivacija signala $x(t)$, $\dot{x}(t)$; c) Integriranje signala $\dot{x}(t)$ rezultira s $x(t)$

Da bismo provjerili rezultat, možemo integriranjem signala $\dot{x}(t)$ dobiti osnovni signal $x(t)$. Budući da su $x(t)$ i $\dot{x}(t)$ nula za $t \leq 0$, trebamo izvršiti provjeru samo za $t > 0$, tj:

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau \quad (2.84)$$

Kao što je prikazano na slici 2.47 c), za $t < 1$, integral u relaciji 2.84 će biti nula, budući da se u intervalu integriranja ne nalazi nijedan impuls signala $\dot{x}(t)$. Za $1 < t < 2$, unutar intervala integriranja nalazi se samo prvi impuls (smješten u točku $t=1$), stoga će vrijednost integrala biti 2. Za $2 < t < 4$, u intervalu integriranja nalaze se dva impulsa i integral će imati vrijednost sume obje njihove površine, odnosno, $2 - 3 = -1$. Konačno, za $t > 4$, sva tri impulsa ulaze u interval integriranja, stoga će vrijednost integrala biti $2 - 3 + 2 = 1$. Vidimo da će rezultat biti upravo signal $x(t)$.

2.5 KONTINUIRANI I DISKRETNI SUSTAVI

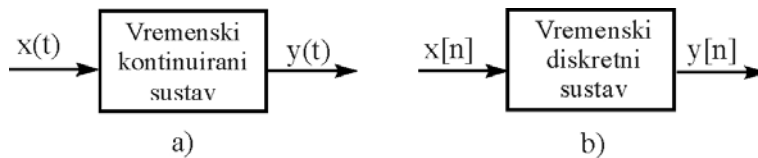
Kao što smo u uvodu naveli, sustave možemo promatrati kao procese kod kojih se ulazni signali u sustav transformiraju ili uzrokuju nekakvu vrstu odziva sustava, pri čemu se generiraju izlazni signali.

Kontinuirani sustav jest onaj koji prima i na izlazu daje vremenski kontinuirane signale, Sl. 2.48 a). Ulazno – izlaznu vezu kontinuiranog sustava često ćemo prikazivati na način:

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad (2.85)$$

Slično, diskretni sustav jest onaj koji prima i generira vremenski diskretne signale, Sl. 2.48 b). Ulazno – izlaznu vezu diskretnog sustava prikazivat ćemo kao:

$$x[n] \rightarrow y[n] \quad (2.86)$$



Sl. 2.48: a) Kontinuirani sustav b) Diskretni sustav

2.5.1 Jednostavni primjeri sustava

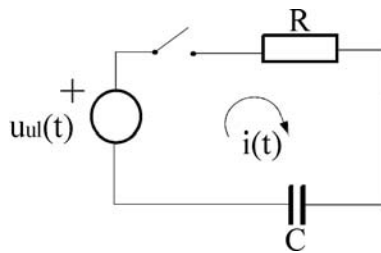
Jedan od značajnijih motiva za razvoj općenitih tehnika za analizu i razvoj sustava jest što se mnogi sustavi, koje susrećemo u posve različitim primjenama, mogu opisati vrlo sličnim matematičkim modelima. Radi ilustracije, krenut ćemo s nekoliko jednostavnih primjera.

Primjer 2.10

Promotrimo jednostavan RC krug na slici Sl. 2.49. Ako za ulazni signal uzmemo ulazni napon, $u_{ul}(t)$, a za izlazni signal napon na kondenzatoru, $u_c(t)$, zadatak nam je dobiti matematičku jednadžbu koja će povezivati ulaz i izlaz, tj. predstavljati ulazno-izlaznu vezu sustava.

Napišimo naponsku jednadžbu kruga:

$$u_{ul}(t) = Ri(t) + u_c(t)$$



Sl. 2.49: RC krug

Također, znamo da napon na kondenzatoru ovisi o struji koja protječe kroz njega na način:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

Uvrstimo izraz za struju u naponsku jednadžbu kruga:

$$\begin{aligned} u_{ul}(t) &= RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) \Rightarrow \\ \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) &= \frac{1}{RC} u_{ul}(t) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Dobivena diferencijalna jednadžba (2.87) predstavlja ulazno-izlaznu vezu ovog jednostavnog sustava.

Primjer 2.11

Prisjetimo se automobila, Sl 2.2, kojeg smo također promatrali kao sustav. Neka je pogonska sila $f(t)$ ulazni signal, a postignuta brzina $v(t)$ izlazni signal sustava. Nađimo ulazno-izlaznu vezu sustava. Pođimo od Newtonovog zakona koji kaže da je umnožak mase i akceleracije tijela u gibanju jednako sumi svih sila koje djeluju na tijelo (pritom sile koje djeluju u smjeru gibanja imaju predznak +, a sile u smjeru suprotnom od gibanja imaju predznak -). Na automobil će djelovati dvije sile: pogonska sila $f(t)$ zbog koje se auto giba i sila trenja koja se suprostavlja gibanju, a koja je proporcionalna brzini automobila, tj. $f_{tr}(t) = bv(t)$, pri čemu je b koeficijent trenja [b]=kg/s. Dakle, jednadžba će glasiti:

$$ma(t) = f(t) - bv(t)$$

Budući da akceleraciju definiramo kao vremensku promjenu brzine, gornja jednadžba će glasiti:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = f(t) - bv(t), \text{ tj.}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{b}{m}v(t) = \frac{1}{m}f(t) \quad (2.88)$$

Ako usporedimo jednađbe 2.87 i 2.88, vidimo da su ulazno-izlazne veze dva međusobno veoma različita fizikalna sustava ustvari potpuno jednake. Naime, obje predstavljaju linearnu diferencijalnu jednađbu prvog reda, koju u općem obliku možemo zapisati kao:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t), \quad (2.89)$$

pri čemu je $x(t)$ ulaz u sustav, $y(t)$ izlaz, dok su a i b konstante. Kroz ova dva jednostavna primjera pokazali smo da ćemo metode za analizu posebne klase sustava koji se daju opisati relacijom 2.89 moći primijeniti u različitim prilikama.

Primjer 2.12

Prikažimo sad jednostavan primjer diskretnog sustava koji opisuje stanje na bankovnom računu iz mjeseca u mjesec. Označimo s $y[n]$ stanje na kraju n -tog mjeseca, i pretpostavimo da se stanje iz mjeseca u mjesec mijenja po slijedećoj jednađbi:

$$y[n] = 1.01y[n - 1] + x[n]$$

ili, ekvivalentno:

$$y[n] - 1.01y[n - 1] = x[n] \quad (2.90)$$

pri čemu $x[n]$ predstavlja neto uplatu na račun (uplata minus isplata), a član $1.01y[n - 1]$ predstavlja činjenicu da se suma na računu iz prethodnog mjeseca uvećava za iznos kamate od 1%.

Primjer 2.13

Kao drugi primjer diskretnog sustava, razmotrimo jednostavnu digitalnu simulaciju diferencijalne jednađbe 2.88, u kojoj ćemo vrijeme podijeliti na diskretne intervale duljine Δ i aproksimirati derivaciju $dv(t)/dt$ u trenutku $t = n\Delta$ s diferencijom:

$$\frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta}$$

Ako stavimo $v[n] = v(n\Delta)$ i $f[n] = f(n\Delta)$, dobit ćemo slijedeći diskretni model koji povezuje uzorkovane signale $f[n]$ i $v[n]$:

$$v[n] - \frac{m}{m + \Delta b} v[n-1] = \frac{\Delta}{m} f[n] \quad (2.91)$$

Usporedbom jednadžbi 2.90 i 2.91, vidimo da obje jednadžbe imaju isti oblik koji se u općem obliku može zapisati kao:

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n] \quad (2.92)$$

i koji predstavlja linearnu jednadžbu diferencija prvog reda.

...

2.5.2 Povezivanje sustava

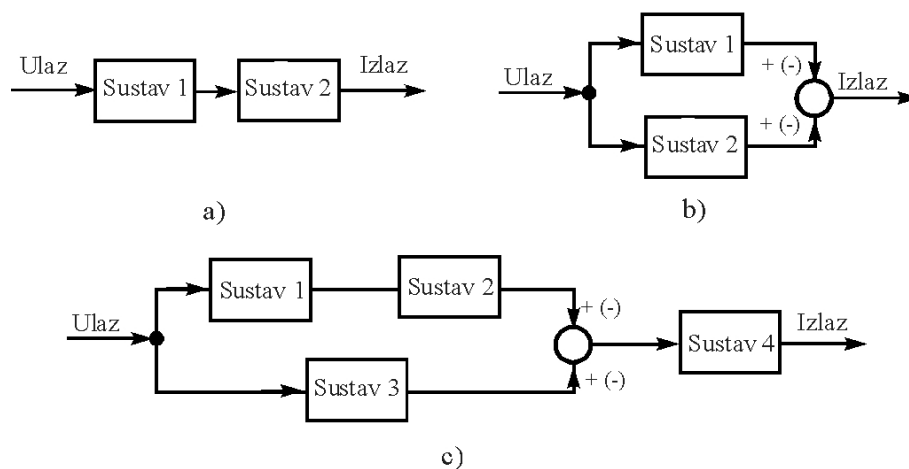
Mnogi realni sustavi grade se povezivanjem više podsustava. Primjer jest audio sustav, koji nastaje povezivanjem radio prijemnika, CD playera, pojačala, te jednog ili nekoliko zvučnika. Kad promatramo sustav kao skup međusobno povezanih komponenti, razumijevanje svojstava pojedinih komponenti i načina kako su povezane pomoći će nam u analizi rada i ponašanja sustava u cijelosti.

Iako postoje mnogi načini povezivanja komponenti (ili blokova) sustava, najčešće se koriste slijedeći:

Serijska ili kaskadna veza sustava prikazana je na slici 2.50 a). Ovakve prikaze sustava nazivamo blok dijagramima. Kod serijske veze izlazni signal iz Sustava 1 ulazi u Sustav 2, te ukupni sustav transformira ulaz tako da ga prvo obrađuje Sustavom 1, te potom Sustavom 2. Primjer serijske veze jest radio prijemnik nakon kojeg slijedi pojačalo. Slično, u serijsku vezu možemo spojiti tri i više sustava.

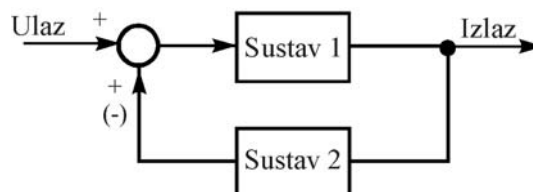
Paralelna veza prikazana je na slici 2.50 b). Ovdje ulazni signal ulazi u oba sustava, 1 i 2. Simboli '+' i '-' označavaju zbrajanje odnosno oduzimanje što znači da se ukupni izlaz sustava dobije zbrajanjem ili oduzimanjem izlaza iz sustava 1 i 2. Primjer paralelne veze jest jednostavan audio sustav s nekoliko mikrofona s kojih se signali vode u zajedničko pojačalo i zvučnik.

Slika 2.50 c) prikazuje složeniji sustav koji se dobije kaskadnim povezivanjem sustava 1 i 2, paralelnim spojem sa sustavom 3, te još serijski dodanim sustavom 4.



Sl. 2.50: a), b) c)

Još jedan bitan način povezivanja sustava jest povratna veza, koja može biti pozitivna ili negativna, što ovisi o predznaku povratnog signala, Sl. 2.51. U blok dijagramu na slici 2.51 izlaz iz Sustava 1 jest ulaz u Sustav 2, dok se izlaz iz Sustava 2 vraća na zbrajalo gdje se dodaje (ili oduzima) vanjskom ulaznom signalu. Zbroj (ili razlika) ulaznog i povratnog signala predstavlja ulaz u Sustav 1. Sustave s povratnom vezom vrlo često nalazimo u praksi, posebice kod automatskog reguliranja. U uvodnom poglavlju naveli smo 2 primjera sustava s povratnom vezom (sustav za pozicioniranje i autopilot).



Sl. 2.51: Povratna veza

2.6 OSNOVNA SVOJSTVA SUSTAVA

U ovom poglavlju upoznat ćemo nekoliko osnovnih svojstava vremenski kontinuiranih i diskretnih sustava. Ova svojstva imaju važna fizikalna značenja i relativno jednostavan matematički opis u kojem se koristimo "matematičkim jezikom signala i sustava" kojeg smo počeli upoznavati.

2.6.1 Sustavi sa i bez memorije

Za sustav kažemo da nema memoriju ako njegov izlaz za svaki vremenski trenutak ovisi samo o ulazu u tom promatranom vremenskom trenutku (a ne i o ulazu u nekim prethodnim vremenskim trenucima). Primjerice, sustav s ulazno - izlaznom vezom:

$$y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2 \quad (2.95)$$

jest bez memorije jer izlaz $y[n]$ u nekom određenom vremenskom trenutku n_0 ovisi samo o ulazu $x[n]$ u tom trenutku n_0 . Slično, otpornik možemo smatrati sustavom bez memorije: ako za ulaz $x(t)$ promatramo struju koja protječe kroz otpornik, te za izlaz $y(t)$ uzmemo napon na otporniku, veza između ulaza i izlaza će biti:

$$y(t) = Ri(t) \quad (2.96)$$

pri čemu je R otpor. Najjednostavniji sustav bez memorije bio bi sustav identiteta koji ulaz preslikava na izlaz:

$$y(t) = x(t)$$

ili, u diskretnom slučaju:

$$y[n] = x[n]$$

Primjer sustava s memorijom bio bi akumulator ili zbrajalo:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (2.97)$$

Još jedan primjer sustava s memorijom jest jednostavno kašnjenje u kojem izlaz poprima vrijednost ulaza u prethodnom vremenskom trenutku tj. kasni za ulazom za jedan vremenski trenutak:

$$y[n] = x[n - 1] \quad (2.98)$$

Kondenzator kod kojeg za izlaz promatramo napon na kondenzatoru, a ulaz struju kroz kondenzator, jest primjer kontinuiranog sustava s memorijom, budući da će ulazno – izlazna veza biti:

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (2.99)$$

Naime, napon u trenutku t ovisi o struji u istom trenutku, ali i u svim prethodnim vremenskim trenucima.

Pojednostavljeno govoreći, da bi sustav imao memoriju, treba imati neki mehanizam koji pohranjuje informacije o ulaznim vrijednostima u vremenskim trenucima različitim od trenutnog vremena. Primjerice, jednostavno kašnjenje iz relacije 2.98 mora pohraniti prethodnu vrijednost ulaza. Slično, akumulator mora "zapamtiti" ili pohraniti sve prethodne ulaze. Akumulator računa sumu svih prethodnih ulaza, od početnog do trenutnog vremena, i stoga u svakom vremenskom trenutku akumulator mora dodati trenutni ulaz prethodnoj ukupnoj sumi. Tj, veza između ulaza i izlaza može se opisati kao:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] \quad (2.100)$$

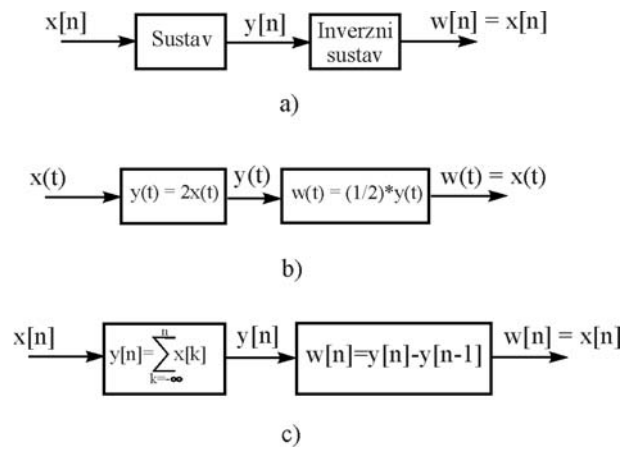
ili, ekvivalentno:

$$y[n] = y[n - 1] + x[n] \quad (2.101)$$

U mnogim fizikalnim sustavima memorija je direktno povezana s pohranom energije. Primjerice, kondenzator iz 2.99 pohranjuje energiju u obliku električnog naboja, koji predstavlja integral struje. Stoga, RC krug iz primjera 2.10 ima memoriju fizički pohranjenu u kondenzatoru. U diskretnim sustavima koji predstavljaju računala odnosno digitalne mikroprocesore, memorija se odnosi na registre u koje se pohranjuju binarne informacije.

2.6.2 Invertibilnost i inverzni sustavi

Za sustav kažemo da je invertibilan ako za različite ulaze daje različite izlaze, tj. ako ne postoje takva dva ulazna signala za koje bi sustav dao identičan izlaz. Kao što je prikazano na slici 2.52 a) za diskretni slučaj, ako je sustav invertibilan, tada postoji njemu inverzan sustav koji kad se kaskadno spoji s osnovnim sustavom, na izlazu daje signal $w[n]$ jednak ulazu $x[n]$ u osnovni sustav. Stoga serijska veza na slici 2.52 a) ima ukupnu ulazno – izlaznu vezu kao i sustav identiteta.



Sl. 2.52: *Primjeri invertibilnih sustava:*
a) *Invertibilan sustav, općenito*
b) *Invertibilan sustav dan relacijom 2.102*
c) *Invertibilan sustav dan relacijom 2.97*

Primjer invertibilnog sustava u kontinuiranom vremenu jest:

$$y(t) = 2x(t) \quad (2.102)$$

a njemu inverzni sustav će biti:

$$w(t) = (1/2)*y(t) \quad (2.102)$$

Ovaj primjer ilustriran je na slici 2.52 b). Još jedan primjer invertibilnog sustava je akumulator dan relacijom 2.97. Za ovaj sustav razlika između trenutnog i njemu prethodećeg izlaza jest upravo trenutna vrijednost ulaza. Stoga će inverzni sustav biti, Sl 2.52 b):

$$w[n] = y[n] - y[n - 1] \quad (2.103)$$

Primjer neinvertibilnog sustava jest:

$$y[n] = 0 \quad (2.104)$$

koji za bilo koji ulaz daje nulu na izlazu. Također, i sustav:

$$y(t) = x^2(t) \quad (2.105)$$

budući da na temelju poznatog izlaza ne možemo točno odrediti ulaz (tj. ne možemo znati predznak ulaznog signala).

Primjere invertibilnih sustava često nalazimo u telekomunikacijama tj. u sustavima za kodiranje i dekodiranje informacija. Primjerice, želimo li osigurati siguran prijenos informacija tj. neometanu privatnu komunikaciju, prvo se signal koji prenosimo šifrira (tj. primijeni se enkripcija), da bi se po primitku dešifrirao pomoću dekodera. Da bismo na temelju primljene informacije mogli dešifrirati poslanu, dekoder mora biti invertibilni sustav.

2.6.3 Kauzalnost

Za sustav kažemo da je kauzalan ako izlaz u nekom vremenskom trenutku ovisi samo o ulazu u tom trenutku i ulazu u prethodnim vremenskim trenucima. S druge strane, sustav čiji trenutni izlaz ovisi i o budućim vrijednostima ulaza smatramo nekauzalnim. Primjerice, RC krug iz primjera 2.10 jest kauzalan sustav jer napon na kondenzatoru ovisi samo o trenutnoj i prethodnim vrijednostima napona izvora. Slično, kretanje automobila jest kauzalno jer na trenutno ponašanje vozila ne utječe djelovanje vozača koje će se odviti u budućnosti. Također, sustavi opisani relacijama 2.95 – 2.99 su kauzalni, ali slijedeća dva sustava nisu:

$$y[n] = x[n] - x[n+1] \quad (2.106)$$

i

$$y(t) = x(t+1) \quad (2.107)$$

Svi sustavi bez memorije su nužno i kauzalni jer trenutni izlaz ovisi samo o trenutnom ulazu.

Iako su kauzalni sustavi od velike važnosti, nisu nužno svi sustavi na koje u tehnici nailazimo kauzalni. Primjerice, u primjenama gdje nezavisna varijabla nije vrijeme (npr. obrada slike), kauzalnost nije neophodna. Ili, u obradi signala koja se ne odvija u realnom vremenu (npr. obrada prethodno snimljenih signala kao što su govor, geofizikalni, meteorološki signali, itd.). Primjerice, ako neki od signala želimo filtrirati tako da uklonimo brze promjene u signalu (visoke frekvencije) i tako izgladimo signal tj. istaknemo trend promjene signala, često ćemo koristiti nekauzalan sustav koji nazivamo filter s pomičnim prosjekom (*eng. moving – average filter*) i koji radi tako da trenutnu vrijednost signala zamijeni vrijednošću koja se dobije kao srednja vrijednost M uzoraka signala koji se nalaze lijevo od promatranog uzorka (prethode mu) i M uzoraka signala koji se nalaze desno od promatranog uzorka (kasne za trenutnim uzorkom). Ovakav sustav može se prikazati slijedećom ulazno – izlaznom vezom:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k] \quad (2.108)$$

Primjer 2.14

Kad provjeravamo kauzalnost sustava, treba pažljivo promotriti ulazno-izlaznu vezu. Ispitajmo npr. kauzalnost slijedećeg sustava:

$$y[n] = x[-n] \quad (2.109)$$

Vidimo da za neku pozitivnu vrijednost vremena n_0 ($n_0 > 0$) izlaz $y[n_0]$ ovisi samo o ulaznom signalu $x[-n_0]$ u vremenskom trenutku $-n_0$, koji je negativan i stoga predstavlja prošlost u odnosu na n_0 . Dakle, mogli bismo zaključiti da je sustav kauzalan. Međutim, ne smijemo biti brzopleti u zaključivanju, tj. ulazno – izlaznu vezu sustava treba provjeriti za sve vremenske trenutke. Naime, za $n < 0$, npr. $n = -5$, bit će: $y[-5] = x[5]$, tj. izlaz u trenutku $n = -5$ će ovisiti o vrijednosti ulaza koja će nastupiti u budućnosti (u trenutku $n = 5$). Stoga zaključujemo da se radi o nekauzalnom sustavu.

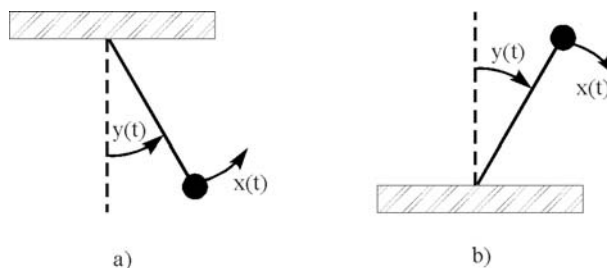
Takoder, trebamo razlikovati utjecaj ulaza na izlaz i utjecaj neke druge funkcije koja se koristi za definiranje sustava. Primjerice, razmotrimo slijedeći sustav:

$$y(t) = x(t)\cos(t + 1) \quad (2.110)$$

Ovdje je izlaz u nekom vremenu t jednak ulazu u tom istom vremenu, pomnoženom s brojem čija vrijednost ovisi o vremenu prema funkciji $\cos(t+1)$. Dakle, jedino trenutna vrijednost ulaza utječe na trenutni izlaz i zaključujemo da je sustav kauzalan.

2.6.4 Stabilnost

Stabilnost je još jedno bitno svojstvo sustava. Pojednostavljeno govoreći, stabilan sustav jest onaj kod kojeg ulazi malenih vrijednosti uzrokuju izlaze koji ne divergiraju (ne idu u beskonačnost). Primjerice, promotrimo njihalo na slici 2.53 a) kod kojega je ulaz narinuta sila $x(t)$, a izlaz kutni pomak kuglice, $y(t)$. U ovom slučaju, gravitacija i napetost konopa su sile koje će imati suprotno djelovanje od narinute sile i nastojat će vratiti kuglicu u početan položaj. Stoga, ako narinemo silu $x(t)$, vrlo malog intenziteta, rezultirajući pomak kuglice u odnosu na početni vertikalni položaj također će biti malen i sustav će biti stabilan. S druge strane, kod obrnutog njihala na slici 2.53 b) koji predstavlja nestabilan sustav, gravitacija djeluje tako da podupire ulaznu silu te uslijed i vrlo male sile $x(t)$ nastaje veliki pomak kuglice tj. njihalo se obrće.



Sl. 2.53: a) *Stabilno njihalo*
b) *Nestabilno, obrnuto njihalo*

Sustavi kojima se modeliraju lančane reakcije ili rast populacije u uvjetima neograničene opskrbe hrane i nedostatka prirodnih neprijatelja primjeri su nestabilnih sustava, budući da na mali ulaz sustav reagira neograničenim rastom izlaza. Još jedan nestabilan sustav jest model bankovnog računa iz primjera 2.12. Naime, ako na račun stavimo neki početni polog (tj. $x[0]$ = pozitivan iznos) i ako nema potrošnje, odnosno isplate sredstava, tada će zbog kamata suma na računu neograničeno rasti.

Na temelju prethodnih primjera intuitivno shvaćamo pojam stabilnosti.

Formalna definicija stabilnosti koju ćemo inače koristiti jest slijedeća:

Stabilan sustav jest onaj koji na ograničenu pobudu (tj. pobudu koja ne raste van određenih granica) daje također ograničeni odziv (tj. i izlaz ne divergira tj. ostaje unutar određenih granica). Primjerice, stabilan sustav bi bio bankovni račun bez kamata, kao i automobil iz primjera 2.11. Narinimo npr. na automobil u mirovanju vremenski konstantnu silu $f(t) = F$. Automobil će se početi kretati i brzina će rasti, ali ne neograničeno, budući da i sila trenja također raste s porastom brzine. U stvari, brzina će rasti sve do trenutka dok se sila trenja ne izjednači s vanjskom silom. U tom trenutku će brzina biti:

$$f_{tr} = bV = F \Rightarrow V = F / b$$

Još jedan primjer stabilnosti jest sustav opisan relacijom 2.108. Naime, ako je ulaz $x[n]$ ograničen nekim brojem B (tj. $x[n] \leq B$, za svaki n), tada će najveća moguća vrijednost izlaza $y[n]$ biti također B jer se $y[n]$ dobije kao srednja vrijednost konačnog broja ulaznih uzoraka. Stoga je i izlaz ograničen, te je sustav stabilan.

S druge strane, akumulator opisan relacijom 2.97 sumira sve prošle vrijednosti ulaza te predstavlja nestabilan sustav, jer će suma kontinuirano rasti čak i za ograničeni $x[n]$. Naime, ako na ulaz akumulatora dovedemo step signal $u[n]$, izlaz će biti:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = (n+1)u[n]$$

Tj., $y[0] = 1$, $y[1] = 2$, $y[2] = 3$, itd., te će $y[n]$ neograničeno rasti.

Primjer 2.15

Ako mislimo da bi sustav mogao biti nestabilan, tada je dobar način provjere taj da potvrdimo da za određeni ograničeni ulaz daje neograničeni izlaz. Ukoliko nađemo samo jedan takav ulaz, zaključujemo da je sustav nestabilan. Ako takav ulaz ne postoji ili ga je teško naći, koristit ćemo se drugim metodama za utvrđivanje stabilnosti.

Kao primjer ovakvog pristupa, provjerimo stabilnost slijedećih sustava:

$$S_1: y(t) = tx(t) \quad (2.111)$$

$$S_2: y(t) = e^{x(t)} \quad (2.112)$$

Kad tražimo ulaze kojima ćemo provjeriti stabilnost, možemo krenuti od jednostavnih signala poput konstante ili step signala. Primjerice, sustav S_1 za ulaz $x(t) = 1$ daje izlaz $y(t) = t$, koji je neograničen jer bilo koju konstantnu vrijednost odaberemo, $|y(t)|$ će je za određeni t prijeći. Stoga zaključujemo da je sustav S_1 nestabilan.

Za sustav S_2 bit će nemoguće pronaći neki određeni ograničeni ulaz koji bi rezultirao neograničenim izlazom. Stoga ćemo probati pokazati da svi ograničeni ulazi daju također ograničene izlaze, tj. da je sustav stabilan. Neka je B neki proizvoljan pozitivan broj i neka $x(t)$ bude proizvoljan signal ograničen s B , tj. neka vrijedi:

$$|x(t)| < B, \text{ ili } -B < x(t) < B, \text{ za svaki } t \quad (2.113)$$

Primjenom relacije 2.112, vidimo da ako $x(t)$ zadovoljava relaciju 2.113, tada i $y(t)$ mora zadovoljavati slijedeće:

$$e^{-B} < y(t) < e^B \quad (2.114)$$

Zaključujemo da ako je bilo koji ulaz u S_2 ograničen s proizvoljnim pozitivnim brojem B , da je odgovarajući izlaz ograničen s e^B , te je stoga sustav S_2 stabilan.

2.6.5 Vremenska nepromjenjivost

Općenito govoreći, sustav je vremenski nepromjenjiv ili invarijantan ako se njegova svojstva i ponašanje ne mijenjaju tijekom vremena. Primjerice, RC krug sa slike 2.49 jest vremenski nepromjenjiv, ako su vrijednosti R i C konstantne tijekom vremena. Da na krugu izvodimo mjerenja, očekivali

bismo jednake rezultate bilo da mjerenje vršimo danas ili sutra. S druge strane, da R i C ovise o vremenu, bilo bi za očekivati da rezultati mjerenja ovise o trenutku kad se mjerenje izvodilo.

Svojstvo vremenske invarijantnosti jednostavno možemo opisati pomoću dosad usvojenog matematičkog zapisa signala i sustava. Naime, za sustav kažemo da je vremenski nepromjenjiv ako vremenski pomak ulaznog signala uzrokuje identični vremenski pomak izlaznog signala. Drugim riječima, ako diskretni vremenski nepromjenjiv sustav na ulaz $x[n]$ odgovori odzivom $y[n]$, onda će na vremenski pomaknuti ulaz $x[n - n_0]$ odgovoriti odzivom $y[n - n_0]$. U kontinuiranom slučaju, za vremenski nepromjenjiv sustav S: $x(t) \rightarrow y(t)$ vrijedit će S: $x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$.

Na nekoliko slijedećih primjera pokazat ćemo kako možemo provjeriti da li je određeni sustav vremenski nepromjenjiv.

Primjer 2.16

Ispitati da li je sustav definiran kao $y(t) = \sin[x(t)]$ vremenski nepromjenjiv. Da bismo ispitali vrijedi li traženo svojstvo, trebamo provjeriti da li vremenska nepromjenjivost vrijedi za bilo koji ulaz i bilo koji vremenski pomak t_0 . Stoga, neka je $x_1(t)$ proizvoljan ulaz u sustav i neka je:

$$y_1(t) = \sin[x_1(t)] \quad (2.115)$$

odgovarajući izlaz. Uzmimo sada drugi ulazni signal dobiven pomakom signala $x_1(t)$:

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \quad (2.116)$$

Odziv na pobudu $x_2(t)$ će biti:

$$y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t - t_0)] \quad (2.117)$$

Također, na temelju relacije 2.115 će vrijediti:

$$y_1(t - t_0) = \sin[x_1(t - t_0)] \quad (2.118)$$

Usporedimo li relacije 2.117 i 2.118, vidimo da vrijedi $y_2(t) = y_1(t - t_0)$, te je stoga sustav vremenski nepromjenjiv.

Primjer 2.17

Kao slijedeći primjer, promotrimo vremenski diskretan sustav:

$$y[n] = nx[n] \quad (2.119)$$

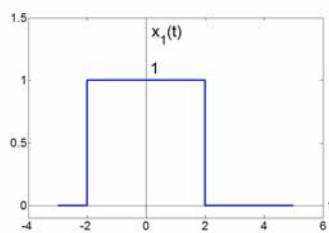
Ovo je vremenski promjenjiv sustav, što možemo dokazati koristeći metodu iz prethodnog primjera. Međutim, nekad je lakše, ako sumnjamo da je sustav vremenski promjenjiv probati naći ulazni signal koji će potvrditi našu pretpostavku. Primjerice, uzmimo za ulazni signal $x_1[n] = \delta[n]$ koji na izlazu daje nulu, budući da je $n\delta[n] = 0$. Uzmemo li sad za ulaz pomaknuti delta impuls, tj. $x_2[n] = \delta[n - 1]$, izlaz će biti $y_2[n] = n\delta[n - 1] = \delta[n - 1]$. Vidimo da iako je $x_2[n]$ pomaknuta verzija od $x_1[n]$, izlaz $y_2[n]$ nije pomaknuta verzija od $y_1[n]$ te zaključujemo da sustav nije vremenski nepromjenjiv.

Sustav u ovom primjeru predstavlja pojačanje ovisno o vremenu. Naime, ako znamo da ulaz u trenutnom vremenu ima npr. vrijednost 1, ne možemo odrediti vrijednost izlaza ukoliko ne znamo trenutno vrijeme. Za razliku od ovog primjera, sustav iz relacije 2.102 ima konstantno pojačanje te je vremenski nepromjenjiv. Svi sustavi iz relacija 2.96 - 2.108 su također vremenski invarijantni. Slijedeći primjer ilustrira jedan vremenski promjenjiv sustav.

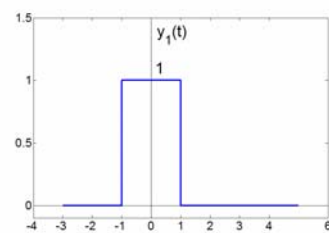
Primjer 2.18

Pokazati da je sustav $y(t) = x(2t)$ vremenski promjenjiv.

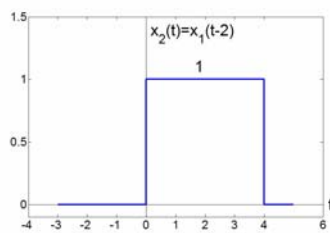
Ovaj sustav predstavlja vremensko skaliranje tj. $y(t)$ jest vremenski komprimirana verzija ulaza $x(t)$. Intuitivno možemo zaključiti da će i vremenski pomak ulaza također biti komprimiran, te sustav neće biti vremenski nepromjenjiv. Pokažimo to primjerom. Neka je ulaz $x_1(t)$ signal prikazan na slici 2.54 a). Odgovarajući izlaz $y_1(t)$ imat će oblik kao na slici 2.54 b). Ako pomaknemo ulaz za 2 udesno, odnosno $x_2(t) = x_1(t - 2)$, Sl 2.54 c), izlaz $y_2(t) = x_2(2t)$ će biti kao na slici Sl 2.54 d). Usporedbom slika 2.54 d) i e) vidimo da $y_2(t)$ nije jednak $y_1(t - 2)$, tj. dokazali smo da je sustav vremenski promjenjiv.



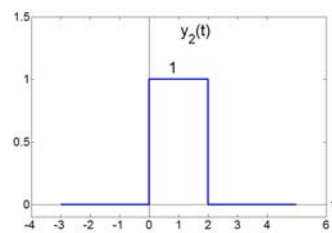
a)



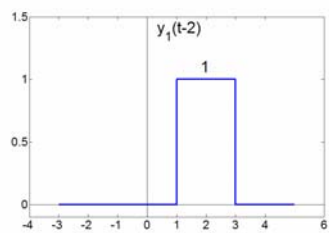
b)



c)



d)



e)

Sl. 2.54: a) Ulaz $x_1(t)$ u sustav iz primjera 2.18

b) Odziv sustava $y_1(t)$ na ulazni signal $x_1(t)$

c) Pomaknuti ulaz, $x_2(t) = x_1(t - 2)$

d) Odziv $y_2(t)$ na ulaz $x_2(t)$

e) Pomaknuti signal $y_1(t - 2)$.

Primijetimo da je $y_2(t) \neq y_1(t - 2)$ što znači da sustav nije vremenski nepromjenjiv

2.6.6 Linearnost

Linearan sustav, u kontinuiranom i diskretnom vremenu, jest onaj koji zadovoljava svojstvo superpozicije koje kaže slijedeće: Ako na ulaz sustava dovedemo pobudu koja se sastoji od sume signala pomnoženih konstantama, i odziv će biti suma odziva na pojedinačne signale, pomnoženih konstantama. Formulirajmo ovu definiciju preciznije: Neka je $y_1(t)$ odziv sustava na pobudu $x_1(t)$ i $y_2(t)$ odziv na pobudu $x_2(t)$. Sustav je linearan ako vrijedi:

1. Odziv na $x_1(t) + x_2(t)$ jest $y_1(t) + y_2(t)$
2. Odziv na $ax_1(t)$ jest $ay_1(t)$, pri čemu je a proizvoljna realna ili kompleksna konstanta.

Prvo od navedenih svojstava nazivamo svojstvo aditivnosti, a drugo svojstvo homogenosti. Uvjet linearnosti jednako glasi i za diskretne signale i sustave. Sustavi zadani relacijama 2.96 – 2.104, 2.106 – 2.108 i 2.119 su linearni, dok su sustavi iz relacija 2.105 i 2.115 nelinearni. Primijetimo da sustav može biti linearan bez da bude vremenski nepromjenjiv (kao onaj iz relacije 2.119), te također može biti vremenski nepromjenjiv, bez da bude linearan (primjeri su sustav $y(t) = \sin[x(t)]$ i onaj iz relacije 2.105).

Svojstva aditivnosti i homogenosti koja definiraju linearan sustav mogu se objediniti u jednu relaciju:

$$\text{za koninuirano vrijeme: } ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t) \quad (2.120)$$

$$\text{za diskretno vrijeme: } ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n] \quad (2.120)$$

pri čemu su a i b proizvoljne realne ili kompleksne konstante. Nadalje, svojstvo linearnosti može se iskazati i na slijedeći način: ako je $x_k[n]$, $k=1, 2, 3, \dots$, skup ulaza u linearan diskretni sustav, te $y_k[n]$, $k=1, 2, 3, \dots$, skup odgovarajućih izlaza, tada će odziv na linearnu kombinaciju ulaza danu kao:

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + \dots \quad (2.121)$$

biti:

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + a_3 y_3[n] + \dots \quad (2.122)$$

Ovo vrlo važno svojstvo poznato je i kao svojstvo superpozicije i vrijedi za kontinuirane i diskretne sustave. Direktna posljedica superpozicije jest da odziv sustava na ulaz koji ima vrijednost 0 za sve vremenske trenutke također ima vrijednost nula, tj. ako je $x[n] \rightarrow y[n]$, biti će:

$$0 = 0 * x[n] \rightarrow 0 * y[n] = 0 \quad (2.123)$$

U slijedeća 4 primjera pokazat ćemo kako možemo za dani sustav provjeriti da li je linearan, primjenom definicije linearnosti.

Primjer 2.19

Ispitati linearnost sustava S zadanog ulazno - izlaznom relacijom:

$$y(t) = tx(t)$$

Promotrimo 2 proizvoljna ulaza $x_1(t)$ i $x_2(t)$ za koja će biti:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

Neka je $x_3(t)$ linearna kombinacija od $x_1(t)$ i $x_2(t)$, tj. neka je:

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

pri čemu su a i b proizvoljne konstante. Ako je $x_3(t)$ ulaz u sustav S , odgovarajući izlaz može se izraziti kao:

$$y_3(t) = t \cdot x_3(t) = t(ax_1(t) + bx_2(t)) = atx_1(t) + btx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t), \quad \text{tj:}$$

$y_3(t) = ay_1(t) + by_2(t)$,
te zaključujemo da je sustav linearan.

Primjer 2.20

Primijenimo metodu iz prethodnog primjera da bismo provjerili linearnost na sljedeći sustav:

$$y(t) = x^2(t)$$

Ako definiramo $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$ na način kao u prethodnom primjeru, biti će:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

i

$$\begin{aligned} x_3(t) \rightarrow y_3(t) &= x_3^2(t) \\ &= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 \\ &= a^2x_1^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) + b^2x_2^2(t) \\ &= a^2y_1(t) + 2abx_1(t)x_2(t) + b^2y_2(t) \neq ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Budući da je $y_3(t) \neq ay_1(t) + by_2(t)$, zaključujemo da je sustav nelinearan.

Primjer 2.21

Kad provjeravamo linearnost sustava, bitno je naglasiti da sustav mora zadovoljavati i svojstvo aditivnosti i homogenosti, te da signali, kao i konstante mogu biti i kompleksni. Da bismo naglasili važnost ovih činjenica, promotrimo sljedeći primjer sustava:

$$y[n] = \operatorname{Re}\{x[n]\}$$

Ispitajmo zasebno svojstva aditivnosti i homogenosti. Provjerimo prvo aditivnost:

Promotrimo dva ulaza u sustav, $x_1[n]$ i $x_2[n]$:

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = \operatorname{Re}\{x_1[n]\}$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = \operatorname{Re}\{x_2[n]\}$$

Neka je treći ulaz u sustav definiran kao suma prva dva:

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

Odziv na $x_3[n]$ će biti:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \operatorname{Re}\{x_3[n]\} = \operatorname{Re}\{x_1[n] + x_2[n]\} \\ &= \operatorname{Re}\{x_1[n]\} + \operatorname{Re}\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

Budući da vrijedi $y_3[n] = y_1[n] + y_2[n]$, zaključujemo da je sustav aditivan. Proverimo sad svojstvo homogenosti:

Dovedimo na ulaz sustava proizvoljnu kompleksnu pobudu oblika:

$$x_1[n] = r[n] + j*s[n]$$

Odgovarajući odziv će biti:

$$y_1[n] = \operatorname{Re}\{x_1[n]\} = r[n]$$

Pomnožimo sada $x_1[n]$ s nekim kompleksnim brojem, npr., $a = j$, tj. na ulaz dovedimo pobudu:

$$x_2[n] = j*x_1[n] = j(r[n] + j*s[n]) = -s[n] + j*r[n]$$

Odziv $y_2[n]$ na ulaz $x_2[n]$ će biti:

$$y_2[n] = \operatorname{Re}\{x_2[n]\} = \operatorname{Re}\{-s[n] + j*r[n]\} = -s[n],$$

dok bi $ay_1[n]$ bilo jednako $j*r[n]$.

Dakle, možemo zaključiti da je $y_2[n] \neq ay_1[n]$, tj. da sustav nije homogen te stoga nije ni linearan!

Primjer 2.22

Promotrimo sustav

$$y[n] = 2x[n] + 3 \quad (2.124)$$

Ovaj sustav nije linearan, što možemo potvrditi na nekoliko načina, uključujući i metodu primijenjenu u primjerima 2.19 i 2.20. Prikažimo konkretnim primjerom da sustav ne zadovoljava svojstvo aditivnosti: neka je npr. $x_1[n] = 2$ i $x_2[n] = 3$. Biti će:

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3 = 7$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3 = 9$$

i

$$y_1[n] + y_2[n] = 7 + 9 = 16$$

Međutim, odziv na $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$ će biti:

$$y_3[n] = 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 = 13$$

Vidimo da ne vrijedi jednakost $y_3[n] = y_1[n] + y_2[n]$, tj. ne vrijedi svojstvo aditivnosti te stoga ni linearnosti. Također, za $x[n] = 0$ biti će $y[n] = 3$, te sustav ne zadovoljava nužnu posljedicu linearnosti "nula unutra – nula van", danu relacijom 2.123.

Dakle, dokazali smo da sustav nije linearan iako bi se na prvi pogled takvim mogao činiti, budući da je relacija 2.124 kojom je opisan sustav linearna algebarska jednačba.

ZADACI ZA PRIMJENU GRADIVA OBJAŠNJENOG U 2. POGLAVLJU

2.1. Izraziti kompleksne brojeve pomoću Kartezijevih koordinata ($x+jy$):

$$\frac{1}{2}e^{j\pi}, \frac{1}{2}e^{-j\pi}, e^{j\pi/2}, e^{-j\pi/2}, e^{j5\pi/2}, \sqrt{2}e^{j\pi/4}, \sqrt{2}e^{j9\pi/4}, \sqrt{2}e^{-j9\pi/4}, \sqrt{2}e^{-j\pi/4}$$

2.2. Izraziti kompleksne brojeve pomoću polarnih koordinata ($re^{j\phi}$, pri čemu je $-\pi < \phi \leq \pi$):

$$5, \quad -2, \quad -3j, \quad \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 1 + j, \quad (1 - j)^2, \quad j(1 - j), \quad (i+j)/(1-j), \\ (\sqrt{2} + j\sqrt{2})/(1 + j\sqrt{3})$$

2.3. Odrediti P_{∞} i E_{∞} za svaki od slijedećih signala:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x(t) = e^{-2t}u(t) & \text{b) } x(t) = e^{j(2t + \pi/4)} & \text{c) } x(t) = \cos(t) \\ \text{d) } x[n] = (1/2)^n u[n] & \text{e) } x[n] = e^{j(\pi/2n + \pi/8)} & \text{f) } x[n] = \cos(\pi/4 * n) \end{array}$$

2.4. Neka signal $x[n]$ ima vrijednost nula za $n < -2$ i $n > 4$. Za svaki od slijedećih signala odredi vrijednosti od n za koje će signal imati vrijednost 0:

$$\text{a) } x[n - 3] \quad \text{b) } x[n + 4] \quad \text{c) } x[-n] \quad \text{d) } x[-n + 2] \quad \text{e) } x[-n - 2]$$

2.5. Neka signal $x(t)$ ima vrijednost nula za $t < 3$. Za svaki od slijedećih signala odredi vrijednosti od t za koje će signal imati vrijednost 0:

$$\text{a) } x(1 - t) \quad \text{b) } x(1 - t) + x(2 - t) \quad \text{c) } x(1 - t)x(2 - t) \quad \text{d) } x(3t) \quad \text{e) } x(t/3)$$

2.6. Odrediti da li je signal periodičan. Ukoliko jest, odrediti osnovni period:

$$\text{a) } x(t) = 2e^{j(t + \pi/8)}u(t) \quad \text{b) } x[n] = u[n] + u[-n]$$

$$\text{c) } x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta[n - 4k] - \delta[n - 1 - 4k])$$

2.7. Za svaki od signala, odrediti intervale nezavisne varijable u kojima 1) parni, 2) neparni dio signala ima vrijednost nula:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x[n] = u[n] - u[n - 4] & \text{b) } x(t) = \sin(1/2 * t) \\ \text{c) } x[n] = (1/2)^n u[n - 3] & \text{d) } x(t) = e^{-5t}u(t + 2) \end{array}$$

2.8. Izraziti realni dio svakog od slijedećih signala u obliku $Ae^{-at}\cos(\omega t + \phi)$, pri čemu su A , a , ω i ϕ realni brojevi, te $A > 0$ i $-\pi < \phi \leq \pi$:

$$\text{a) } x(t) = -2 \quad \text{b) } x(t) = \sqrt{2} e^{j\pi/4} \cos(3t + 2\pi)$$

$$c) x(t) = e^{-t} \sin(3t + \pi) \quad d) x(t) = j e^{(-2 + j100)t}$$

2.9. Odrediti da li je signal periodičan. Ukoliko jest, odrediti osnovni period:

$$a) x(t) = j e^{j10t} \quad b) x(t) = e^{(-1 + j)t} \quad c) x[n] = e^{j7\pi n}$$

$$d) x[n] = 3e^{j3\pi(n + 1/2)/5} \quad e) x[n] = 3e^{j3/5(n + 1/2)}$$

2.10. Odrediti osnovni period signala $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$.

2.11. Odrediti osnovni period signala $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$.

2.12. Zadan je diskretni signal $x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n - 1 - k]$. Odrediti takve

cjelobrojne vrijednosti M i n_0 tako da se $x[n]$ može izraziti kao:

$$x[n] = u[Mn - n_0]$$

2.13. Zadan je vremenski kontinuirani signal $x(t) = \delta(t + 2) - \delta(t - 2)$.
Odrediti E_{∞} za signal koje se dobije kao:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

2.14. Zadan je periodički signal :

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

s periodom $T = 2$. Derivacija ovog signala povezana je s nizom impulsa,

$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[t - 2k]$, također s periodom $T = 2$. Može se pokazati da vrijedi:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2). \text{ Odrediti vrijednosti } A_1, t_1, A_2 \text{ i } t_2.$$

2.15. Razmotrimo sustav S s ulazom $x[n]$ i izlazom $y[n]$, koji se dobije serijskom vezom sustava S_1 i S_2 . Ulazno-izlazne veze sustava S_1 i S_2 su:

$$S_1: y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n - 1]$$

$$S_2: y_2[n] = x_2[n - 2] + 1/2 * x_2[n - 3]$$

pri čemu su $x_1[n]$ i $x_2[n]$ ulazni signali u sustave.

a) Odrediti ulazno-izlaznu vezu sustava S .

b) Da li će se ulazno-izlazna veza sustava S promijeniti ako zamijenimo mjesta sustavima S_1 i S_2 u serijskoj vezi (tj. ako S_2 prethodi sustavu S_1)?

2.16. Neka je ulazno-izlazna veza diskretnog sustava zadana kao:

$$y[n] = x[n]x[n-2],$$

pri čemu su $x[n]$ i $y[n]$ ulazni i izlazni signal iz sustava.

- Ima li sustav memoriju?
- Odrediti izlaz sustava kad na ulaz dovedemo signal $A\delta[n]$, pri čemu je A proizvoljan realan ili kompleksan broj.
- Je li sustav invertibilan?

2.17. Neka je ulazno-izlazna veza kontinuiranog sustava zadana kao:

$$y(t) = x(\sin(t))$$

pri čemu su $x(t)$ i $y(t)$ ulazni i izlazni signal iz sustava.

- Da li je sustav kauzalan?
- Da li je sustav linearan?

2.18. Ulazno-izlazna veza diskretnog sustava zadana je kao:

$$y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k],$$

pri čemu je n_0 konačan, pozitivni cijeli broj.

- Da li je sustav linearan?
- Da li je sustav vremenski nepromjenjiv?
- Ako je $x[n]$ ograničen s konačnim cijelim brojem B (tj. $|x[n]| < B$, za svaki n), može se pokazati da je $y[n]$ ograničen s cijelim brojem C , te možemo zaključiti da je zadani diskretni sustav stabilan. Izraziti C pomoću B i n_0 .

2.19. Za svaki od slijedećih sustava, zadanih ulazno-izlaznim vezama, odrediti da li je sustav linearan, vremenski nepromjenjiv ili oboje:

- $y(t) = t^2 x(t-1)$
- $y[n] = x^2[n-2]$
- $y[n] = x[n+1] - x[n-1]$
- $y[n] = \text{Nep}\{x(t)\}$

2.20. Vremenski kontinuiran linearan sustav S , s ulazom $x(t)$ i izlazom $y(t)$ ima slijedeće ulazno-izlazne parove:

$$x(t) = e^{j2t} \xrightarrow{S} y(t) = e^{j3t},$$

$$x(t) = e^{-j2t} \xrightarrow{S} y(t) = e^{-j3t}.$$

- Ako je $x_1(t) = \cos(2t)$, odrediti odgovarajući izlaz $y_1(t)$ sustava S .
- Ako je $x_2(t) = \cos(2(t-1/2))$, odrediti odgovarajući izlaz $y_2(t)$ sustava S .

2.21. Zadan je vremenski kontinuiran signal $x(t)$ kao:

$$x(t) = \begin{cases} t+1 & -2 \leq t < -1 \\ 1 & -1 \leq t < 0 \\ 2 & 0 \leq t < 1 \\ -t+2 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

Nacrtati $x(t)$ i sljedeće signale:

- a) $x(t-1)$ b) $x(2-t)$ c) $x(2t+1)$ d) $x(4-t/2)$ e) $(x(t) + x(-t))u(t)$
f) $x(t)(\delta(t+3/2) - \delta(t-3/2))$

2.22. Vremenski diskretan signal $x[n]$ na intervalu $-4 \leq n \leq 3$ ima sljedeće vrijednosti: $-1, -1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1/2$. Za ostale vrijednosti od n , signal $x[n]$ ima vrijednost nula.

Nacrtati $x[n]$ i sljedeće signale:

- a) $x[n-4]$ b) $x[3-n]$ c) $x[3n]$ d) $x[3n+1]$
e) $x[n]u[3-n]$ f) $x[n-2]\delta[n-2]$ g) $1/2*x[n] + 1/2*(-1)^n x[n]$
h) $x[(n-1)^2]$

2.23. Nacrtati signale zadane izrazima, te odrediti i nacrtati njihove parne i neparne dijelove:

$$\text{a) } x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ -t+2 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \quad \text{b) } x(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ t+2 & -2 \leq t < -1 \\ -t & -1 \leq t < 0 \\ t & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \quad \text{c) } x(t) = \begin{cases} -2t & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

2.24. Nacrtati zadane diskretne signale te odrediti i nacrtati njihove parne i neparne dijelove:

- a) $x[n] = u[n] - u[-n-1]$
b) $x[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 3\delta[n] + \delta[n-7]$
c) $x[n] = -\delta[n+4] + 2\delta[n+3] + 2\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3]$

2.25. Odrediti da li je signal periodičan. Ako jest, odrediti osnovni period:

- a) $x(t) = 3\cos(4t + \pi/3)$ b) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$
c) $x(t) = (\cos(2t - \pi/3))^2$ d) $x(t) = \text{Par}\{\cos(4\pi t)u(t)\}$
e) $x(t) = \text{Par}\{\sin(4\pi t)u(t)\}$

2.26. Odrediti da li je signal periodičan. Ako jest, odrediti osnovni period:

- a) $x[n] = \sin(6\pi/7*n + 1)$ b) $x[n] = \cos(n/8 - \pi)$
c) $x[n] = \cos(\pi/2*n) \cos(\pi/4*n)$
d) $x[n] = 2\cos(\pi/4*n) + \sin(\pi/8*n) - 2\cos(\pi/2*n + \pi/6)$

2.27. Za sustave zadane ulazno-izlaznom vezom ispitati da li su:

- 1) s memorijom
 - 2) vremenski nepromjenjivi
 - 3) linearni
 - 4) kauzalni
- Objasniti zaključke.

a) $y(t) = x(t - 2) + x(2 - t)$ b) $y(t) = \cos(3t) * x(t)$

2.28. Ispitati da li je sustav invertibilan. Ako jest, odrediti inverzni sustav. Ako nije, naći dva ulazna signala u sustav koja daju identičan izlaz:

a) $y(t) = x(t - 4)$ b) $y(t) = \cos(x(t))$ c) $y[n] = nx[n]$

2.29. Ovaj problem ilustrira jednu od najznačajnijih posljedica linearnosti i vremenske nepromjenjivosti sustava. Naime, ako znamo odziv LTI sustava na neku pobudu, možemo odrediti odzive na mnoge druge ulazne signale. Pogledajmo to na primjeru:

Neka je zadan LTI sustav koji na pobudu $x_1(t)$ daje odziv $y_1(t)$. Pobuda i odziv definirani su kao:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \quad y_1(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t < 1 \\ -2t + 4 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

Odrediti i nacrtati odzive sustava na slijedeće pobude:

a) $x_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2 \\ -1 & 2 \leq t < 4 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$ b) $x_3(t) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t < 0 \\ 2 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$

2.30. Neka je z kompleksni broj s polarnim koordinatama (r, ϕ) i Kartezijevim koordinatama (x, y) . Broj zadan polarnim koordinatama zapisati pomoću Kartezijevih. Nacrtati broj u kompleksnoj ravnini za slučajeve kad je:

1) $r = 2, \phi = \pi/4$

2) $r = 2, \phi = \pi/2$

Označiti na slikama realni i imaginarni dio broja:

a) $z_1 = re^{-j\phi}$ b) $z_2 = r$ c) $z_3 = re^{j(\phi + \pi)}$ d) $z_4 = re^{j(-\phi + \pi)}$ e) $z_5 = re^{j(\phi + 2\pi)}$

2.31. Zapisati savki od kompleksnih brojeva pomoću polarnih koordinata, nacrtati ih u kompleksnoj ravnini i na slici označiti modul i kut svakog broja:

$$\begin{array}{lllll}
\text{a) } 1 + j\sqrt{3} & \text{b) } -5 & \text{c) } -5 - 5j & \text{d) } 3 + 4j & \text{e) } (1 - j\sqrt{3})^3 \\
\text{f) } (1 + j)^5 & \text{g) } (\sqrt{3} + j^3)(1 - j) & \text{h) } \frac{2 - j(6/\sqrt{3})}{2 + j(6/\sqrt{3})} & \text{i) } \frac{1 + j\sqrt{3}}{\sqrt{3} + j} \\
\text{j) } j(1 + j)e^{j\pi/6} & \text{k) } (\sqrt{3} + j)2\sqrt{2}e^{-j\pi/4} & \text{l) } \frac{e^{j\pi/3} - 1}{j\sqrt{3} + 1}
\end{array}$$

2.32. Primjenom Eulerove relacije dokazati slijedeće jednakosti:

a) $\cos^2\phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi)$

b) $(\sin\alpha)(\sin\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

c) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

2.33. Neka je z kompleksni broj: $z = x + jy = re^{j\phi}$.

Kompleksno konjugirani par broja z će biti: $z^* = x - jy = re^{-j\phi}$. Dokazati slijedeće relacije, pri čemu su z , z_1 i z_2 proizvoljni kompleksni brojevi:

a) $zz^* = r^2$

b) $z/z^* = e^{j2\phi}$

c) $z + z^* = 2\operatorname{Re}\{z\}$

d) $z - z^* = 2j\operatorname{Im}\{z\}$

e) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

f) $(az_1z_2)^* = az_1^*z_2^*$ pri čemu je a proizvoljan realni broj

g) $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$

h) $\operatorname{Re}\{z_1/z_2\} = \frac{1}{2}[(z_1z_2^* + z_1^*z_2)/(z_2z_2^*)]$

RJEŠENJA ZADATAKA

2. POGLAVLJE

2.1. Pretvorba polarnih u Kartezijeve koordinate:

$-1/2$; $-1/2$; j ; $-j$; j ; $1+j$; $1+j$; $1-j$; $1-j$

2.2. Pretvorba Kartezijevih u polarne koordinate:

$5e^{j0}$; $2e^{j\pi}$; $3e^{-j\pi/2}$; $e^{-j\pi/3}$; $\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$; $2e^{-j\pi/2}$; $\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$; $e^{j\pi/2}$; $e^{-j\pi/12}$.

2.3. a) $E_{\infty}=1/4$; $P_{\infty}=0$; b) $E_{\infty}=\infty$; $P_{\infty}=1$;

c) $E_{\infty}=\infty$; $P_{\infty}=1/2$; d) $E_{\infty}=4/3$; $P_{\infty}=0$;

e) $E_{\infty}=\infty$; $P_{\infty}=1$; f) $E_{\infty}=\infty$; $P_{\infty}=1/2$;

2.4. a) $n < 1$ i $n > 7$ b) $n < -6$ i $n > 0$ c) $n < -4$ i $n > 2$

d) $n < -2$ i $n > 4$ e) $n < -6$ i $n > 0$

2.5. a) $t > -2$ b) $t > -2$ c) $t < 1$ d) $t < 9$

2.6. a) nije periodičan, jer je $x(t) = 0$ za $t < 0$

b) nije periodičan

c) periodičan; osnovni period $N=4$

2.7. a) $\text{Par}\{x[n]\}=0$ za $\text{modul}(n) > 3$

b) $\text{Par}\{x(t)\}=0$ svaki t

c) $\text{Par}\{x[n]\}=0$ za $\text{modul}(n) < 3$ i $\text{modul}(n)$ teži u ∞ .

d) $\text{Par}\{x(t)\}=0$ za $\text{modul}(t)$ teži u ∞ .

2.8. a) $\text{Re}\{x(t)\} = 2e^{0t}\cos(0t + \pi)$ b) $\text{Re}\{x(t)\} = e^{0t}\cos(3t + 0)$

c) $\text{Re}\{x(t)\} = e^{-t}\cos(3t + \pi/2)$ d) $\text{Re}\{x(t)\} = e^{-2t}\cos(100t + \pi/2)$

2.9. a) periodičan je; osnovni period $\pi/5$

b) nije periodičan

c) periodičan je; osnovni period 2

d) periodičan je; osnovni period 10.

e) nije periodičan

2.10. Signal je periodičan, osnovni period jest π .

2.11. Signal je periodičan, osnovni period jest 35.

2.12. $M = -1$; $n_0 = -3$.

2.13. $E_\infty = 4$

2.14. $A_1 = 3$; $t_1 = 0$; $A_2 = -3$; $t_2 = 1$

2.15. a) $y[n] = 2x[n - 2] + 5x[n - 3] + 2x[n - 4]$
b) Ne.

2.16. a) sustav ima memoriju
b) $y[n] = 0$
c) sustav nije invertibilan

2.17. a) sustav nije kauzalan
b) sustav je linearan

2.18. a) sustav je linearan
b) sustav je vremenski nepromjenjiv
c) $C \leq (2n_0 + 1)B$

2.19. a) sustav je linearan, nije vremenski nepromjenjiv
b) sustav nije linearan, je vremenski nepromjenjiv
c) sustav je linearan i vremenski nepromjenjiv
d) sustav je linearan, nije vremenski nepromjenjiv

2.20. a) $x_1(t) = \cos(2t) \rightarrow y_1(t) = \cos(3t)$
b) $x_2(t) = \cos(2(t-1/2)) \rightarrow y_2(t) = \cos(3t - 1)$

$$2.21. \quad \text{a) } x(t-1) = \begin{cases} t & -1 \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 2 & 1 \leq t < 2 \\ -t+3 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \quad \text{b) } x(2-t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 2 & 1 \leq t < 2 \\ 1 & 2 \leq t < 3 \\ -t+3 & 3 \leq t < 4 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

$$\text{c) } x(2t+1) = \begin{cases} 2t+2 & -1.5 \leq t < -1 \\ 1 & -1 \leq t < -0.5 \\ 2 & -0.5 \leq t < 0 \\ -2t+1 & 0 \leq t < 0.5 \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \quad \text{d) } x(4-t/2) = \begin{cases} (1/2)t-2 & 4 \leq t < 6 \\ 2 & 6 \leq t < 8 \\ 1 & 8 \leq t < 10 \\ -(1/2)t+5 & 10 \leq t < 12 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

$$e) (x(t) + x(-t))u(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 1 \\ -2t + 3 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

$$f) x(t)[\delta(t + 3/2) - \delta(t - 3/2)] = -0.5\delta(t + 3/2) - 0.5\delta(t - 3/2)$$

$$2.22. a) x[n - 4] = -\delta[n] - 0.5\delta[n - 1] + 0.5\delta[n - 2] + \delta[n - 3] + \delta[n - 4] + \delta[n - 5] + \delta[n - 6] + 0.5\delta[n - 7]$$

$$b) x[3 - n] = 0.5\delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \delta[n - 3] + \delta[n - 4] + 0.5\delta[n - 5] - 0.5\delta[n - 6] - \delta[n - 7]$$

$$c) x[3n] = -0.5\delta[n + 1] + \delta[n] + 0.5\delta[n - 1]$$

$$d) x[3n + 1] = 0.5\delta[n + 1] + \delta[n]$$

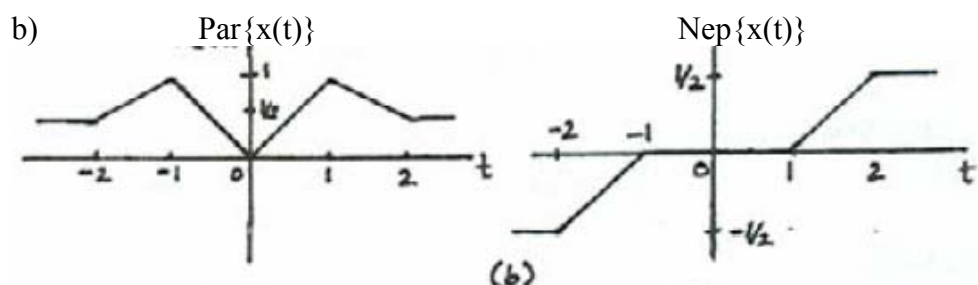
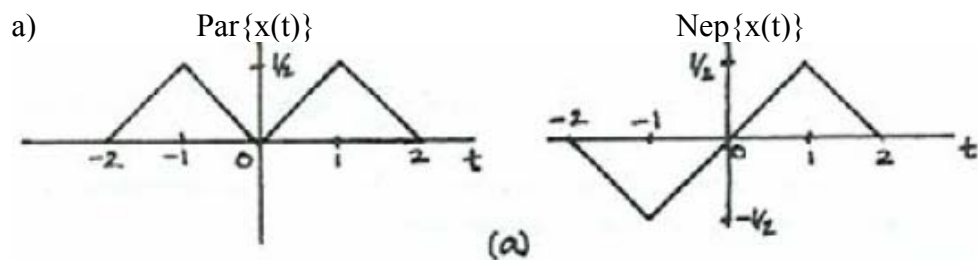
$$e) x[n]u[3 - n] = x[n]$$

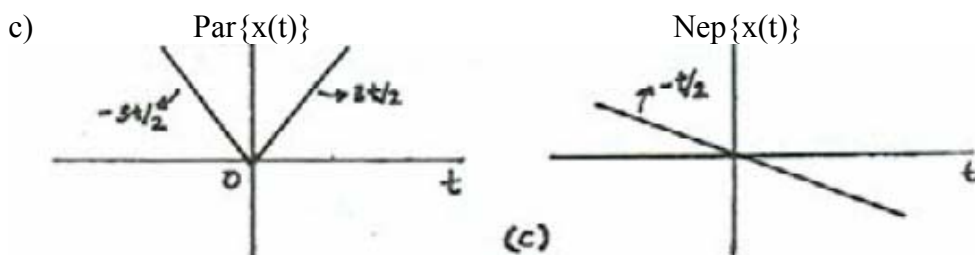
$$f) x[n - 2]\delta[n - 2] = \delta[n - 2]$$

$$g) 1/2 * x[n] + 1/2 * (-1)^n x[n] = -\delta[n + 4] + 0.5\delta[n + 2] + \delta[n] + \delta[n - 2]$$

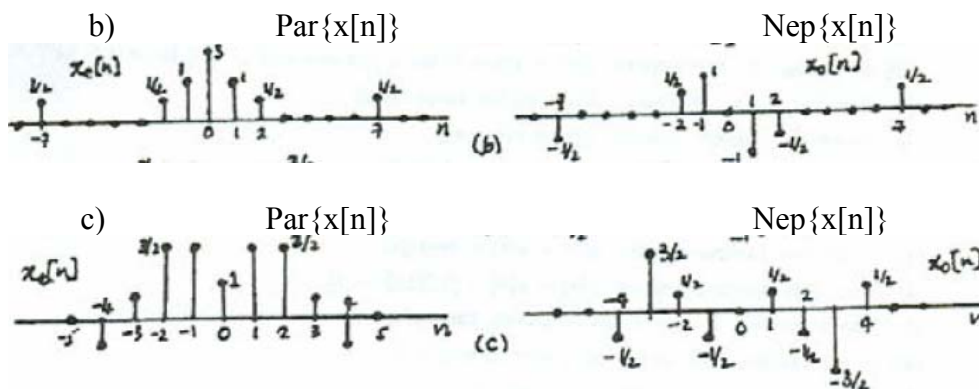
$$h) x[(n - 1)^2] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2]$$

2.23.





2.24. a) $\text{Par}\{x[n]\} = \delta[n]$ $\text{Nep}\{x[n]\} = u[n-1] - u[-n-1]$



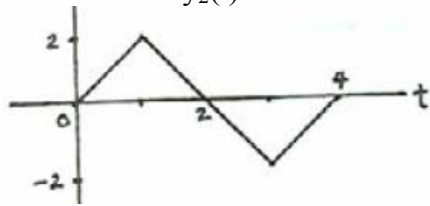
- 2.25. a) periodičan, period = $\pi/2$
 b) periodičan, period = 2
 c) periodičan, period = $\pi/2$
 d) neperiodičan, diskontinuitet u $t = 0$
 e) nije periodičan

- 2.26. a) periodičan, period = 7
 b) nije periodičan
 c) periodičan, period = 8
 d) periodičan, period = 16

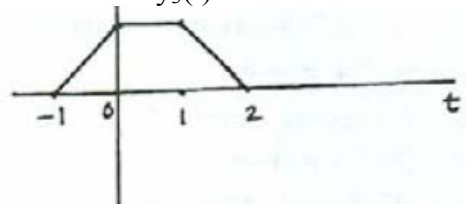
- 2.27. a) ima memoriju, vremenski nepromjenjiv, linearan, nekauzalan
 b) nema memoriju, vremenski promjenjiv, linearan, kauzalan

- 2.28. a) invertibilan; inverzni sustav: $y(t) = x(t+4)$
 b) nije invertibilan; signali $x(t)$ i $x_1(t) = x(t) + 2\pi$ imaju isti izlaz
 c) nije invertibilan; signali $\delta[n]$ i $2\delta[n]$ imaju isti izlaz

2.29. $y_2(t)$



$y_3(t)$



- 2.30. a) $z_1 = x - jy$
 b) $z_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$
 c) $z_3 = -x - jy = -z$
 d) $z_4 = -x + jy$
 e) $z_5 = x + jy$

- 2.31. a) $2e^{j\pi/3}$ b) $5e^{j\pi}$ c) $5\sqrt{2} e^{j3\pi/4}$
 d) $5e^{j(53.13^\circ)}$ e) $8e^{-j\pi}$ f) $4\sqrt{2} e^{j5\pi/4}$
 g) $2\sqrt{2} e^{-j5\pi/12}$ h) $e^{-j2\pi/3}$ i) $e^{j\pi/6}$
 j) $\sqrt{2} e^{j11\pi/12}$ k) $4\sqrt{2} e^{-j\pi/12}$ l) $(1/2)e^{j\pi/3}$

3. LINEARNI, VREMENSKI NEPROMJENJIVI SUSTAVI

U poglavlju 2.6 naveli smo i objasnili nekolicinu osnovnih svojstava sustava. Među njima su i linearnost i vremenska nepromjenjivost, svojstva koja "igraju glavnu ulogu" u analizi signala i sustava. Dva su tome razloga. Prvo, mnogi fizikalni sustavi imaju ova svojstva i stoga se mogu modelirati kao linearni, vremenski nepromjenjivi (LTI) sustavi. Drugo, postoje načini i metode kako LTI sustave matematički analizirati što nam omogućuje detaljan uvid u njihovo ponašanje.

Jedan od glavnih razloga zašto su LTI sustavi tako "zgodni" za matematičko opisivanje i analiziranje jest što posjeduju svojstvo superpozicije opisano u poglavlju XXX. Posljedica ovog svojstva jest ako možemo ulaz u LTI sustav prikazati kao linearnu kombinaciju skupa osnovnih signala, tada možemo iskoristiti superpoziciju da izračunamo izlaz sustava također kao linearnu kombinaciju odziva na osnovne signale.

Kao što ćemo vidjeti u narednim poglavljima, jedna od bitnih karakteristika jediničnog impulsa, u diskretnom i kontinuiranom vremenu, jest da se većina ostalih signala može prikazati kao linearna kombinacija vremenski pomaknutih impulsa. Ova činjenica, zajedno sa svojstvima superpozicije i vremenske nepromjenjivosti, omogućit će nam opis ponašanja LTI sustava pomoću njegovog odziva na jedinični impuls.

3.1 DISKRETNi LTI SUSTAVI: KONVOLUCIJSKA SUMA

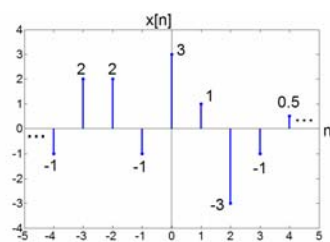
3.1.1 Prikaz diskretnih signala pomoću jediničnih impulsa

Osnovna ideja kako pomoću diskretnog jediničnog impulsa prikazati općeniti diskretni signal jest zamisliti signal kao niz pojedinačnih skaliranih impulsa. Da bismo matematički interpretirali navedeno, promotrimo signal $x[n]$ prikazan na slici 3.1 a). Na slikama 3.1 b) – e) izdvojili smo četiri vremenski pomaknuta, skalirana jedinična impulsa pri čemu je faktor skaliranja jednak vrijednosti $x[n]$ u vremenskom trenutku n u kojem se pojavljuje jedinični impuls. Na primjer:

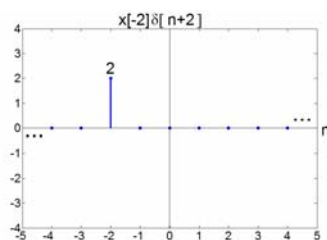
$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1] & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0] & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

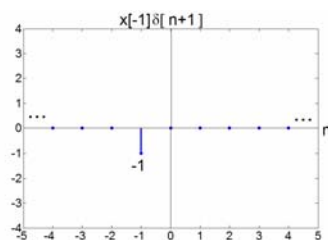
$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1] & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$



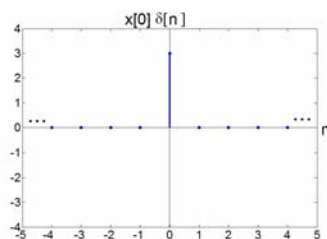
a)



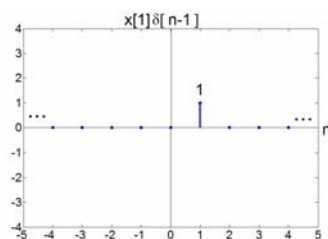
b)



c)



d)



e)

Sl. 3.1: Dekompozicija diskretnog signala na skaliranu sumu pomaknutih impulsa

Stoga, suma četiri impulsa na slikama 3.1 b) – e) jednaka je signalu $x[n]$ na intervalu $-2 \leq n \leq 1$. Općenitije, signal $x[n]$ možemo zapisati kao:

$$x[n] = \dots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \dots \quad [3.1]$$

Za svaku vrijednost od n , samo jedan član sume iz relacije 3.1 ima vrijednost različitu od nule tj. $x[n]$ će imati vrijednost tog člana. Opći oblik relacije 3.1 će biti:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad [3.2]$$

Relacija 3.2 predstavlja zapis nekog diskretnog signala $x[n]$ pomoću linearne kombinacije vremenski pomaknutih jediničnih impulsa $\delta[n-k]$, pri čemu je svaki impuls u trenutku k skaliran s vrijednošću signala $x[k]$. Kao primjer, razmotrimo step signal, $x[n] = u[n]$. Budući da je $u[k] = 0$ za $k < 0$ i $u[k] = 1$ za $k \geq 0$, relacija 3.2 će glasniti:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

što je identično relaciji koju smo dobili i u poglavlju 2.4.1 (relacija 2.72). Relacija 3.2 prestavlja svojstvo pomaka diskretnog jediničnog impulsa. Budući da uzorci $\delta[n-k]$ imaju ne-nultu vrijednost samo za $k = n$, suma s desne strane relacije 3.2 "pomiče se" duž niza vrijednosti od $x[k]$. U slijedećem poglavlju, primijenit ćemo ovakav prikaz signala da bismo diskretan LTI sustav opisali pomoću tzv. *konvolucijske sume*.

3.1.2 Odziv diskretnih LTI sustava na jedinični impuls i prikaz sustava pomoću konvolucijske sume

Važnost svojstva pomaka u relacijama 3.1 i 3.2 leži u činjenici da se svaki signal $x[n]$ može prikazati kao superpozicija skaliranih verzija vrlo jednostavnih elementarnih signala, točnije pomaknutih jediničnih impulsa $\delta[n-k]$, od kojih svaki ima ne-nultu vrijednost (tj. vrijednost 1) u samo jednom vremenskom trenutku k . Odziv *linearnog* sustava na signal $x[n]$ bit će superpozicija skaliranih odziva sustava na svaki od ovih pomaknutih impulsa. Štoviše, svojstvo vremenske nepromjenjivosti kaže nam da su odzivi *vremenski nepromjenjivog* sustava na vremenski pomaknute jedinične impulse jednostavno vremenski pomaknute verzije jedni drugih.

Na temelju ovih dviju činjenica izvest ćemo prikaz *linearnog, vremenski nepromjenjivog* sustava pomoću konvolucijske sume.

Razmotrimo prvo odziv linearnog (ali potencijalno vremenski promjenjivog) sustava na proizvoljan ulaz $x[n]$. Slijedeći relaciju 3.2, ulaz

možemo prikazati kao linearnu kombinaciju pomaknutih jediničnih impulsa. Neka je, zatim, $h_k[n]$ odziv linearnog sustava na pomaknuti jedinični impuls $\delta[n - k]$. Iz svojstva superpozicije (relacije...) slijedi da će odziv linearnog sustava $y[n]$ na ulaz $x[n]$ (prikazan pomoću relacije 3.2) biti skalirana linearna kombinacija ovih osnovnih odziva $h_k[n]$. Dakle, odziv linearnog sustava $y[n]$ na ulaz $x[n]$ prikazan pomoću relacije 3.2 matematički možemo zapisati kao:

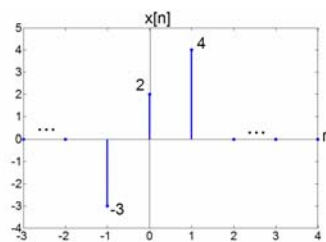
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \quad [3.3]$$

Stoga, na temelju relacije 3.3, ako znamo odziv linearnog sustava na skup vremenski pomaknutih jediničnih impulsa, možemo odrediti i odziv na neki proizvoljni ulaz $x[n]$. Ilustrirajmo relaciju 3.3 primjerom na slici 3.2. Signal $x[n]$, Sl 3.2 a), dovodi se na ulaz linearnog sustava koji na signale $\delta[n + 1]$, $\delta[n]$, $\delta[n - 1]$ daje odzive $h_{-1}[n]$, $h_0[n]$ i $h_1[n]$, redom, prikazane na slici 3.2 b). Budući da se $x[n]$ može prikazati kao linearna kombinacija impulsa $\delta[n + 1]$, $\delta[n]$ i $\delta[n - 1]$, svojstvo superpozicije omogućava nam da i odziv na ulaz $x[n]$ zapišemo kao linearnu kombinaciju odziva na pojedinačne pomaknute impulse. Stoga signale $x[n]$ i $y[n]$ možemo zapisati kao:

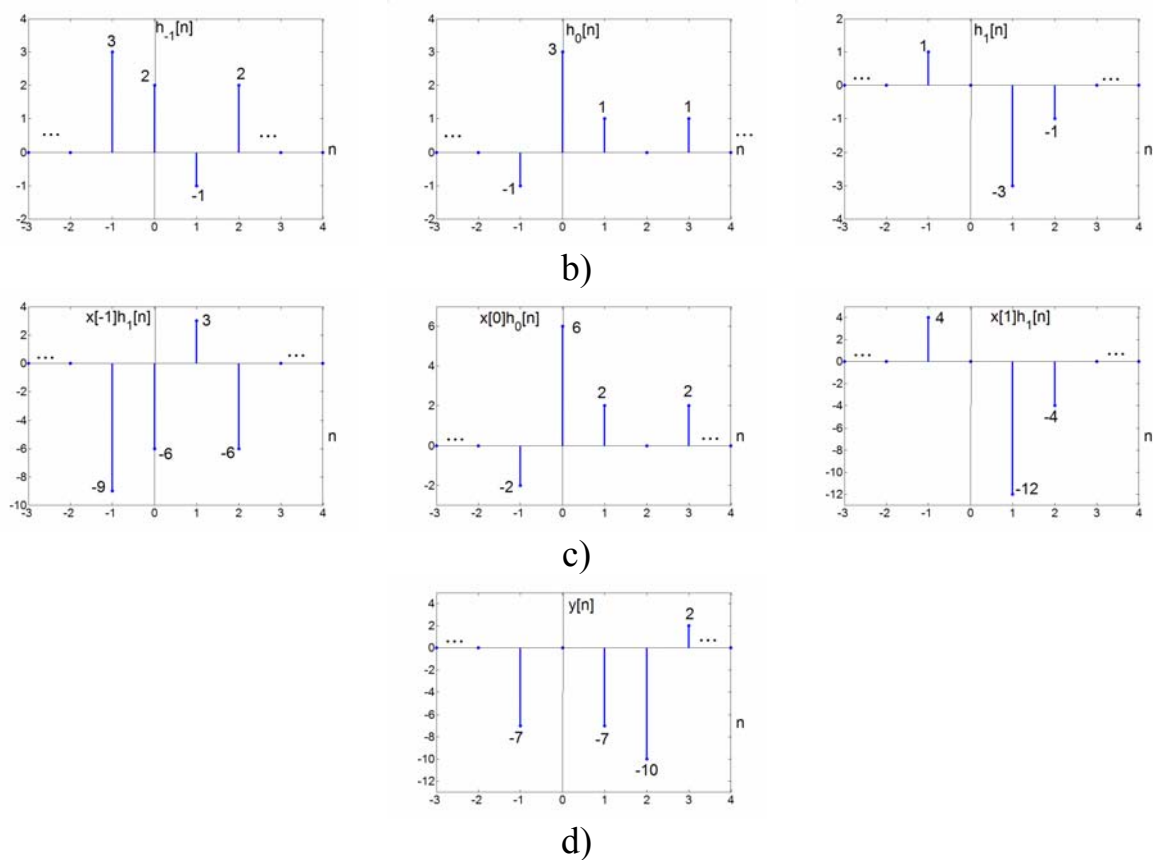
$$x[n] = x[-1]\delta[n + 1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n - 1] = -3\delta[n + 1] + 2\delta[n] + 4\delta[n - 1]$$

$$y[n] = x[-1]h_{-1}[n] + x[0]h_0[n] + x[1]h_1[n] = -3h_{-1}[n] + 2h_0[n] + 4h_1[n] \quad [3.4]$$

Pojedinačne članove sume 3.4 vidimo na slici 3.2 c), a ukupna suma koja predstavlja odziv sustava $y[n]$ prikazana je na slici 3.2 d).



a)



Sl. 3.2: Grafička interpretacija odziva diskretnog linearnog sustava matematički opisanog relacijom 3.3

Općenito, odzivi $h_k[n]$ za različite vrijednosti od k ne moraju biti međusobno povezani. Međutim, ako je linearan sustav usto i vremenski nepromjenjiv, tada su ovi odzivi na vremenski pomaknute jedinične impulse naprosto vremenski pomaknute verzije jedni drugih. Izrazimo to matematički: ako je $\delta[n - k]$ vremenski pomaknuta verzija od $\delta[n]$, tada će odziv $h_k[n]$ biti vremenski pomaknuti odziv $h_0[n]$, odnosno:

$$h_k[n] = h_0[n - k] \quad [3.5]$$

Radi lakšeg zapisivanja, ispustit ćemo indeks 0 kod $h_0[n]$ i definirat ćemo odziv na jedinični impuls kao:

$$h[n] = h_0[n] \quad [3.6]$$

Također, često ćemo ga nazivati i *impulsni odziv sustava*. Stoga $h[n]$ predstavlja izlaz LTI sustava kad na ulaz dovedemo delta impuls $\delta[n]$. Tada relacija 3.3 poprima oblik:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad [3.7]$$

Relacija 3.7 naziva se *konvolucijska suma* ili superpozicijska suma, a desni dio relacije naziva se *konvolucija* signala $x[n]$ i $h[n]$. Operaciju konvolucije simbolički ćemo zapisivati kao:

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] \quad [3.8]$$

Može se pokazati da za konvoluciju vrijedi zakon komutacije:

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Primijetimo da izraz 3.7 predstavlja odziv LTI sustava na proizvoljan ulazni signal, na način da ga prikazuje pomoću odziva na jedinični impuls. *Stoga možemo zaključiti da je neki LTI sustav u potpunosti određen svojim odzivom na jedan jedini signal tj. na jedinični impuls. Drugim riječima, dovoljno je znati odziv sustava na delta impuls – ako imamo tu informaciju, moći ćemo odrediti i odziv na bilo koji drugi ulazni signal, tj. moći ćemo odrediti što sustav daje na izlazu kad mu na ulaz dovedemo signal bilo kakvog oblika.*

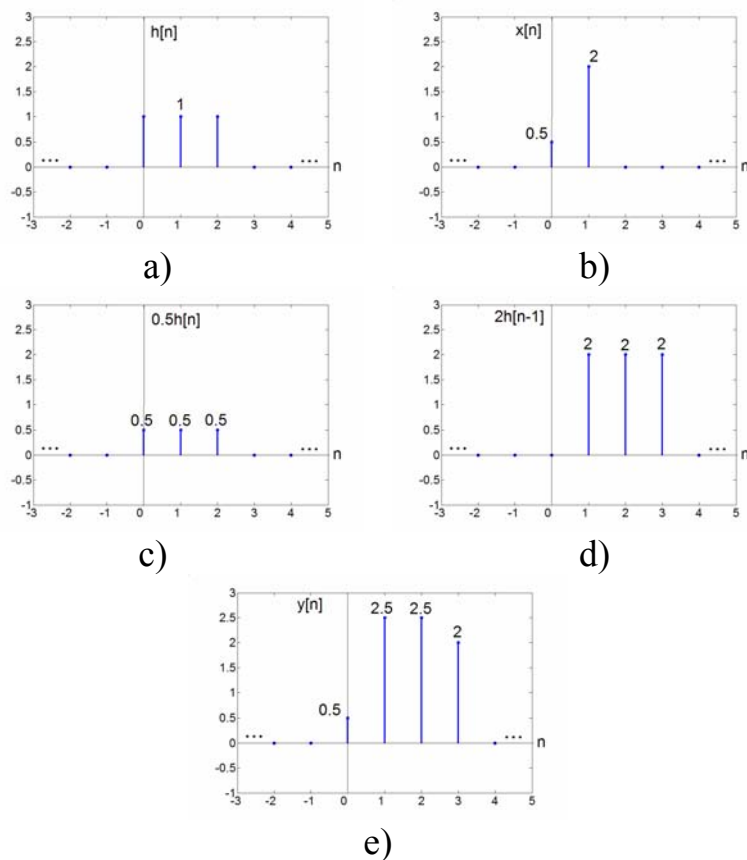
Primjer 3.1

Neka je neki LTI sustav zadan odzivom na jedinični impuls $h[n]$, prikazanim na slici 3.3 a). Dovedimo na ulaz sustava signal $x[n]$ prikazan na slici 3.3 b). Zadatak je odrediti odziv sustava $y[n]$ na ulaz $x[n]$.

Pogledamo li $x[n]$ na slici 3.3 b), vidimo da ima samo dvije ne-nultne vrijednosti i to $x[0]$ i $x[1]$. Stoga će relacija 3.6 glasiti:

$$y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = 0.5h[n] + 2h[n-1] \quad [3.9]$$

Članovi prethodne sume, $0.5h[n]$ i $2h[n-1]$ prikazani su na slikama 3.3 c) i d). Njihovim sumiranjem dobit ćemo odziv $y[n]$, prikazan na slici 3.3 e).



Sl. 3.3: a) Impulsni odziv LTI sustava, $h[n]$
 b) Ulazni signal u sustav, $x[n]$
 c) i d) Odzivi na ne-nulte vrijednosti ulaza koji glase $x[0]=0.5$ i $x[1]=2$
 e) Ukupni odziv sustava koji se dobije kao suma odziva pod c) i d)

Ako razmotrimo efekt superpozicijske sume na svaki pojedinačni uzorak izlaznog signala, dobit ćemo još jedan veoma koristan način vizualizacije kako izračunati izlaz $y[n]$ primjenom konvolucijske sume. Primjerice, pogledajmo kako bismo mogli izračunati izlazni uzorak za neko određeno vrijeme n . Pogodan način je grafički prikaz signala $x[k]$ i $h[n-k]$, iz relacije 3.7, u funkciji varijable k . Množeći ova dva signala dobijemo niz uzoraka koji ćemo označiti s $g[k]$, tj. $g[k] = x[k]h[n-k]$. Zbrajanjem svih uzoraka niza $g[k]$ dobit ćemo izlazni uzorak, $y[n]$ u vremenskom trenutku n . Stoga, da bismo izračunali $y[n]$ za sve vremenske trenutke n , trebamo ponoviti ovaj postupak za svaku vrijednost od n . Slijedeći primjer ilustrira kako se primjenjuje navedeni postupak.

Primjer 3.2

Uzmimo opet problem iz primjera 3.1 i odredimo izlaznu sekvencu, $y[n]$. Niz $x[k]$ prikazan je na slici 3.4 a), dok je signal $h[n - k]$ (promatran kao funkcija od k , s fiksnim n) pomaknuta i vremenski obrnuta verzija impulsnog odziva $h[k]$. Stoga, ako znamo kako izgleda signal $h[k]$, signal $h[n - k]$ dobit ćemo tako da $h[k]$ pomaknemo za n uzoraka (udesno, ako je $n < 0$, odnosno ulijevo ako je $n > 0$), te ga vremenski obrnemo. Rezultat za naš primjer prikazan je na slici 3.4 b) i to za slijedeće vrijednosti od n : $n < 0$, $n = 0, 1, 2, 3$ i $n > 3$. Sad kad smo nacrtali $x[k]$ i $h[n - k]$ za sve vrijednosti od n , množimo ova dva signala i sumiramo ih duž cijelog intervala od k . Primjerice, za $n < 0$, vidimo na slici 3.4 da će umnožak $x[k]h[n - k]$ imati vrijednost 0, za sve k , budući da se ne-nulte vrijednosti od $x[k]$ i $h[n - k]$ međusobno ne preklapaju. Iz toga slijedi da će biti $y[n] = 0$, za $n < 0$. Za $n = 0$ produkt $x[k]h[0 - k]$ ima jedan ne-nulti uzorak s vrijednošću 0.5, te stoga zaključujemo:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0 - k] = 0.5 \quad [3.10]$$

Umnožak $x[k]h[1 - k]$ ima dva ne-nulta uzorka (vidjeti sliku 3.4) koja ćemo sumirati da dobijemo izlazni uzorak $y[1]$:

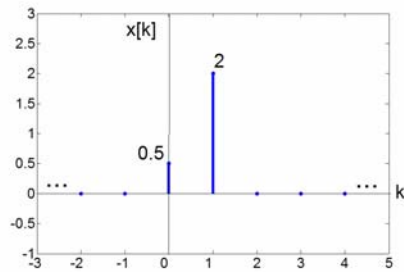
$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1 - k] = 0.5 + 2 = 2.5 \quad [3.11]$$

Slično, bit će:

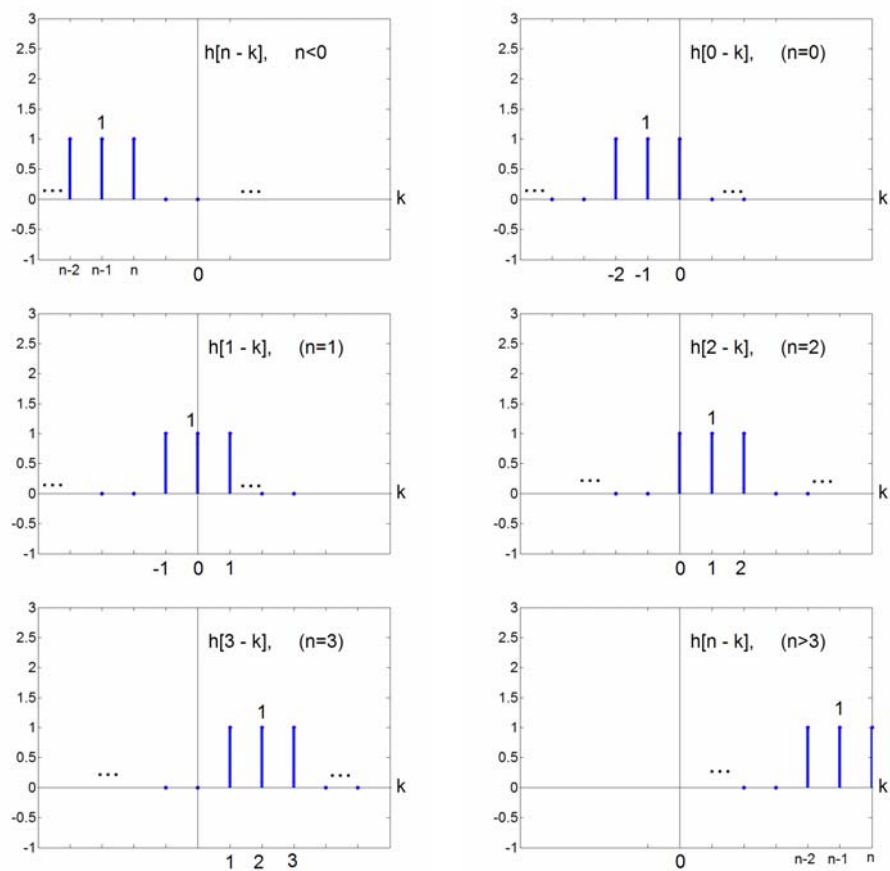
$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2 - k] = 0.5 + 2 = 2.5 \quad [3.12]$$

$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3 - k] = 2 \quad [3.13]$$

Konačno, za $n > 3$, umnožak $x[k]h[n - k]$ ima vrijednost 0, za sve uzorke od k , na temelju čega zaključujemo da je $y[n] = 0$ za $n > 3$. Izlazni signal biti će, naravno, isti kao onaj što smo ga dobili u prethodnom primjeru.



a)



b)

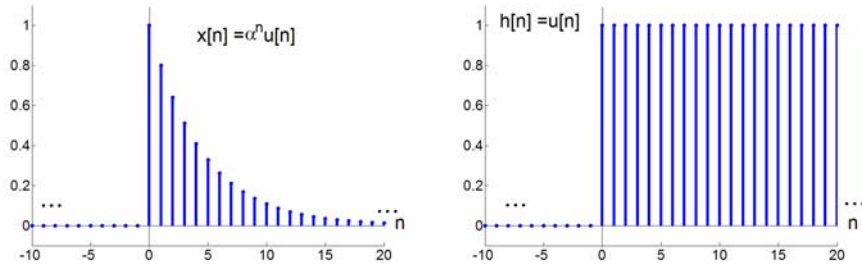
Sl. 3.4: Interpretacija relacije 3.7 za signale $h[n]$ i $x[n]$ sa slike 3.3 a) i b);

a) Signal $x[k]$, kao funkcija od k

b) Signal $h[n-k]$, kao funkcija od k , uz fiksni n , za nekoliko različitih vrijednosti n ($n < 0$, $n = 0, 1, 2, 3$, $n > 3$). Svaki od ovih signala dobije se vremenskim pomicanjem i obrtanjem impulsnog odziva $h[k]$.

Primjer 3.3

Odrediti odziv LTI sustava zadanog odzivom na jedinični impuls $h[n] = u[n]$, ako na ulaz sustava dovedemo signal $x[n] = \alpha^n u[n]$, pri čemu je $0 < \alpha < 1$. Signali su prikazani na slici 3.5, za $\alpha = 0.8$.



Sl. 3.5: Signali $x[n]$ i $h[n]$

Da bismo vizualizirali problem računanja konvolucije, na slici 3.6 smo prikazali signal $x[k]$ te signale $h[n - k]$ za $n < 0$, $n = -1, 0, 1$ i $n > 0$. Na slici vidimo da za $n < 0$ nema preklapanja između nenulatih vrijednosti od $x[k]$ i $h[n - k]$ te je umnožak $x[k]h[n - k] = 0$, za sve vrijednosti od k . Stoga je, na temelju relacije 3.7, $x[n] = 0$ za $n < 0$. Za $n \geq 0$,

$$x[k]h[n - k] = \begin{cases} \alpha^k & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

Stoga, za $n \geq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k \quad [3.13]$$

Da bismo izračunali gore navedenu sumu, poslužimo se "trikom":

$$(1 - \alpha) \sum_{k=0}^n \alpha^k = \sum_{k=0}^n \alpha^k - \alpha \sum_{k=0}^n \alpha^k = (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n) - (\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n+1}) = 1 - \alpha^{n+1} \Rightarrow$$

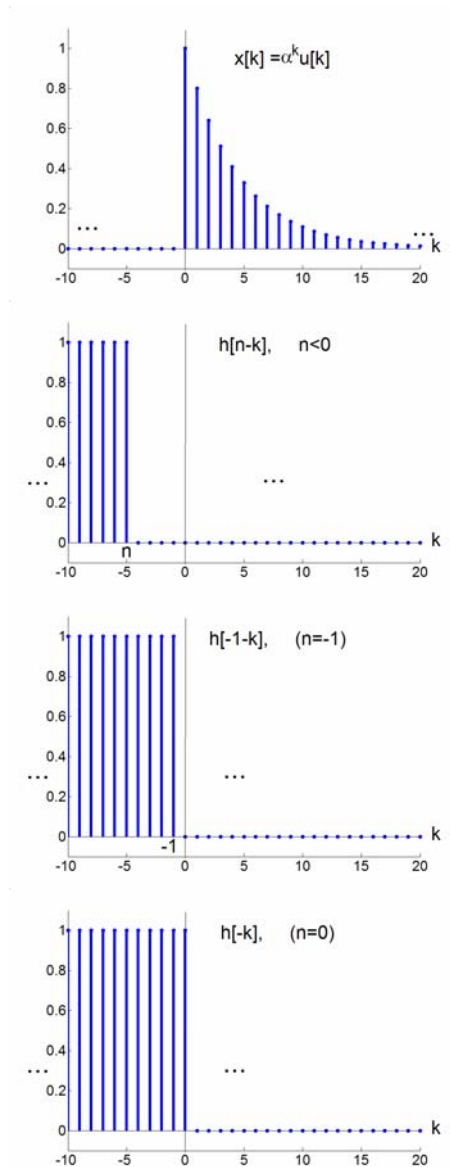
$$\sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \quad [3.14]$$

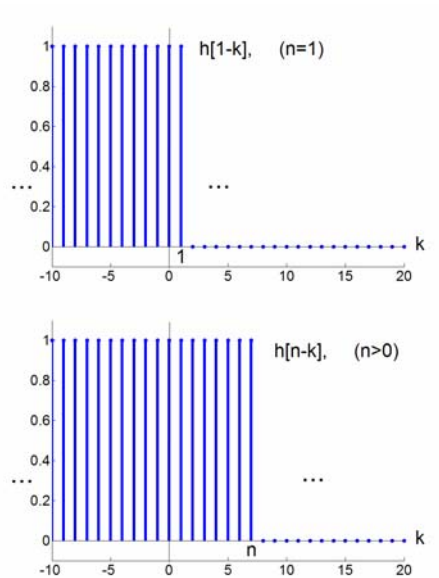
Dakle, za $n \geq 0$, izlazni signal $y[n]$ biti će jednak:

$$y[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha},$$

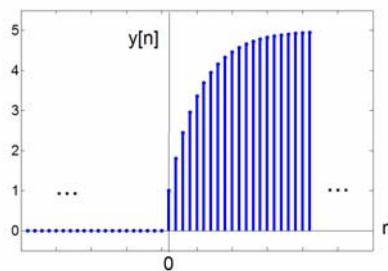
Tj., za bilo koju vrijednost n , odziv $y[n]$, prikazan na slici 3.6a), možemo zapisati kao:

$$y[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} u[n]$$





Sl. 3.6: Grafička interpretacija konvolucije iz primjera 3.3



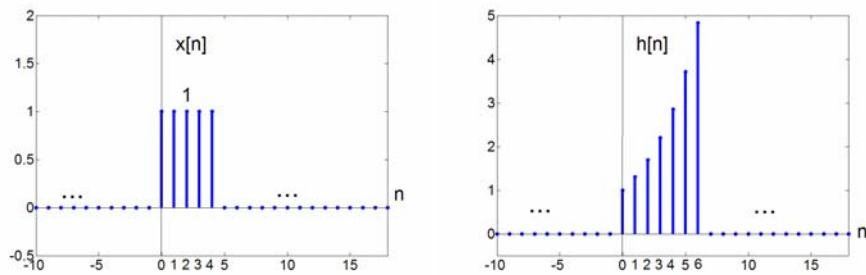
Sl. 3.6 a): Odziv sustava $y[n]$ za primjer 3.3

Primjer 3.4

Odredimo konvoluciju slijedećih signala:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \quad \text{i} \quad h[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}, \quad \text{pri čemu je } \alpha > 1.$$

Signali su prikazani na slici 3.7., za vrijednost α odabrali smo 1.3. Da bismo izračunali konvoluciju, promotrit ćemo pet različitih intervala od n , Sl. 3.8:



Sl. 3.7: Signali $x[n]$ i $h[n]$

Interval 1: Za $n < 0$, nema preklapanja između nenulatih vrijednosti od $x[n]$ i $h[n - k]$ te je $y[n] = 0$.

Interval 2: Za $0 \leq n \leq 4$,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

Stoga će u ovom intervalu odziv $y[n]$ biti:

$$y[k] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} \quad [3.14]$$

Ovu sumu možemo izračunati primjenom relacije 3.14, pri čemu ćemo uvrstiti slijedeću supstituciju: $r = n - k$. Biti će:

$$y[k] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} = \sum_{r=n}^0 \alpha^r = \sum_{r=0}^n \alpha^r = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

Interval 3: Za $n > 4$ i $n - 6 \leq 0$ (tj. $4 < n \leq 6$)

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & 0 \leq k \leq 4 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

Odziv $y[n]$ u ovom intervalu će biti:

$$y[k] = \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k}$$

Ovu sumu također ćemo izračunati pomoću relacije 3.14:

$$y[k] = \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^4 (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \frac{1 - (\alpha^{-1})^5}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

Interval 4: Za $n > 6$ i $n - 6 \leq 4$ (tj. $6 < n \leq 10$)

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & (n-6) \leq k \leq 4 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

Te će odziv $y[n]$ biti:

$$y[k] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k}$$

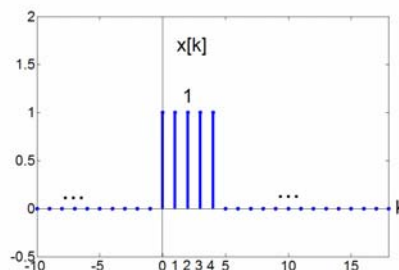
I ovu sumu ćemo izračunati primjenom relacije 3.14, pri čemu ćemo primijeniti supstituciju: $r = k - n + 6$. Biti će:

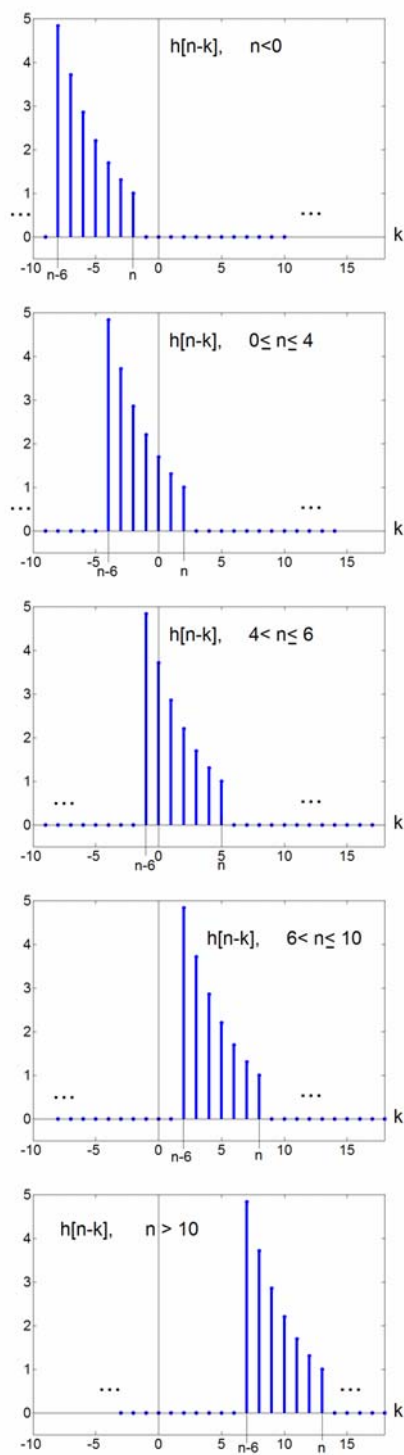
$$y[k] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k} = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \frac{1 - (\alpha^{-1})^{11-n}}{1 - (\alpha^{-1})} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

Interval 5: Za $n - 6 > 4$, tj. $n > 10$, budući da nema preklapanja između nenulih vrijednosti između $x[n]$ i $h[n - k]$, je $y[n]$ će biti nula.

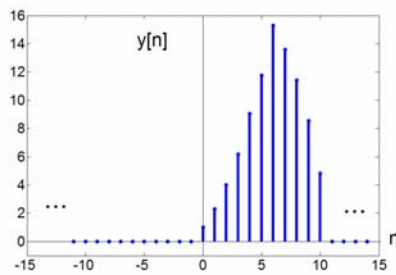
U konačnici, odziv $y[n]$ na cijelom vremenskom području n će biti, Sl. 3.9:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} & 4 < n \leq 6 \\ \frac{1 - \alpha}{\alpha^{n-4} - \alpha^7} & 6 < n \leq 10 \\ 0 & 10 < n \end{cases}$$





Sl. 3.8: Grafička interpretacija konvolucije iz primjera 3.4



Sl. 3.9: Rezultat konvolucije, $y[n]$

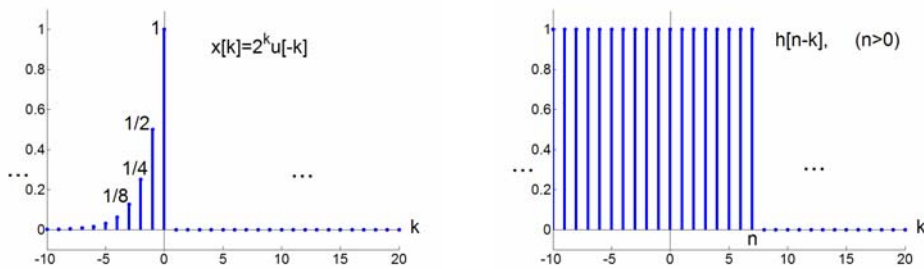
Primjer 3.5

Odrediti konvoluciju signala $x[n]$ i $h[n]$ zadanih kao:

$$x[n] = 2^n u[-n]$$

$$h[n] = u[n]$$

Sekvence $x[k]$ i $h[n - k]$ kao funkcije vremenske varijable k prikazane su na slici 3.10.



Sl. 3.10: Sekvence $x[k]$ i $h[n - k]$ kao funkcije varijable k

Primijetimo da je $x[k] = 0$ za $k > 0$ i $h[n - k] = 0$ za $k > n$. Također primijetimo da je umnožak $x[k]h[n - k]$ uvijek različit od nule, bez obzira kolika je vrijednost od n .

Kad je $n \geq 0$, $x[k]h[n - k]$ ima vrijednosti različite od nule na intervalu $k \leq 0$. Tj., biti će:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^0 x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^0 2^k \quad [3.15]$$

Da bismo izračunali ovu sumu, primijenit ćemo poznatu formulu:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \text{ pri čemu je } 0 < |\alpha| < 1$$

Uvrstimo u relaciju 3.15 supstituciju $k = -r$. Bit će:

$$y[n] = \sum_{r=-\infty}^0 2^{-r} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r = \frac{1}{1-(1/2)} = 2,$$

Dakle, za $n \geq 0$, $y[n] = 2$.

Za $n < 0$, $x[k]h[n-k]$ ima vrijednosti različite od nule na intervalu $k \leq n$. Tj., biti će:

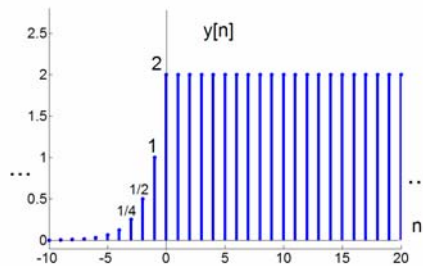
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n 2^k \quad [3.16]$$

Uvrstimo u relaciju 3.16 supstituciju $k = -r$ i zatim $m = r + n$. Bit će:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n 2^k = \sum_{r=-\infty}^{-n} 2^{-r} = \sum_{r=-n}^{\infty} 2^{-r} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^n 2 = 2^{n+1}$$

Dakle, za $n < 0$, $y[n] = 2^{n+1}$.

Signal $y[n]$ prikazan je na slici 3.11.



ZADACI ZA PRIMJENU GRADIVA OBJAŠNJENOG U 3. POGLAVLJU

3.1. Zadani su signali:

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n - 1] - \delta[n - 3] \quad \text{i} \quad h[n] = 2\delta[n + 1] + 2\delta[n - 1]$$

Odrediti i nacrtati sljedeće signale:

a) $y_1[n] = x[n] \otimes h[n]$

b) $y_2[n] = x[n + 2] \otimes h[n]$

c) $y_3[n] = x[n] \otimes h[n + 2]$

3.2. Zadan je signal:

$$h[n] = (1/2)^{n-1}(u[n + 3] - u[n - 10])$$

Odrediti A i B kao funkcije od n tako da vrijedi sljedeće:

$$h[n - k] = \begin{cases} (1/2)^{n-k-1} & A \leq k \leq B \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

3.3. Zadani su ulazni signal $x[n]$ i impulsni odziv $h[n]$:

$$x[n] = (1/2)^{n-2}u[n - 2] \quad \text{i} \quad h[n] = u[n + 2]$$

Odrediti i nacrtati izlaz $y[n] = x[n] \otimes h[n]$

3.4. Odrediti i nacrtati $y[n] = x[n] \otimes h[n]$, ako je zadano:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 3 \leq n \leq 8 \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \quad h[n] = \begin{cases} 1 & 4 \leq n \leq 15 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

3.5. Zadani su:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \quad \text{i} \quad h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

Pri čemu je N cijeli broj i vrijedi $N \leq 9$. Odrediti N, ako vrijedi: $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ i ako je poznato: $y[4] = 5$ i $y[14] = 0$.

3.6. Izračunati i nacrtati konvoluciju $y[n] = x[n] \otimes h[n]$, pri čemu su:

$$x[n] = (1/3)^n u[-n - 1] \quad \text{i} \quad h[n] = u[n - 1]$$

3.7. Odrediti i nacrtati konvoluciju slijedeća dva signala:

$$x(t) = \begin{cases} t+1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \quad \text{i} \quad h[n] = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

3.8. Neka je:

$$h(t) = e^{2t}u(-t+4) + e^{-2t}u(t-5)$$

Odrediti A i B tako da vrijedi:

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2(t-\tau)} & \tau < A \\ 0 & A < \tau < B \\ e^{2(t-\tau)} & B < \tau \end{cases}$$

3.9. Neka je:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \quad \text{i} \quad h(t) = x(t/a) \text{ pri čemu je } 0 < a \leq 1$$

a) Odrediti i nacrtati $y(t) = x(t) \otimes h(t)$

b) Ako $dy(t)/dt$ ima samo 3 diskontinuiteta, kolika je vrijednost od a?

3.10. Neka je:

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5) \quad \text{i} \quad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

a) odrediti $y(t) = x(t) \otimes h(t)$

b) odrediti $g(t) = (dx(t)/dt) \otimes h(t)$

c) kako su međusobno povezani $g(t)$ i $y(t)$?

3.11. Neka je:

$$y(t) = e^{-t}u(t) \otimes \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k)$$

Pokazati da za $y(t)$ vrijedi: $y(t) = Ae^{-t}$ za $0 \leq t < 3$ i odrediti vrijednost od A.

3.12. Neka diskretni sustav S_1 ima impulsni odziv:

$$h[n] = (1/5)^n u[n]$$

Odrediti cjelobrojnu vrijednost A tako da vrijedi: $h[n] - Ah[n-1] = \delta[n]$

3.13. Koji od impulsnih odziva pripada stabilnom LTI sustavu?

a) $h(t) = e^{-(1-2j)t}u(t)$ b) $h(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$

3.14. Koji od impulsnih odziva pripada stabilnom LTI sustavu?

a) $h[n] = n*\cos(\pi/4*n)u[n]$ b) $h[n] = 3^n u[-n + 10]$

3.15. Odredite točnost slijedećih zaključaka:

a) Ako je $x[n] = 0$ za $n < N1$ i $h[n] = 0$ za $n < N2$, tada je $x[n] \otimes h[n] = 0$ za $n < N1 + N2$.

b) Ako je $y[n] = x[n] \otimes h[n]$, tada vrijedi $y[n - 1] = x[n - 1] \otimes h[n - 1]$

c) Ako je $x(t) = 0$ za $n < T1$ i $h(t) = 0$ za $n < T2$, tada je $x(t) \otimes h(t) = 0$ za $n < T1 + T2$.

3.16. Kontinuirani LTI sustav opisan je diferencijalnom jednačbom $d(y(t))/dt + 4y(t) = x(t)$. Za sustav također vrijedi uvjet početnog mirovanja kao i početni uvjet $y(0) = 0$. Odrediti odziv $y(t)$ ako na ulaz sustava dovedemo pobudu oblika:

$$x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$$

3.17. Neka su ulaz i izlaz kauzalnog LTI sustava povezani slijedećom jednačbom diferencija:

$$y[n] = (1/4)y[n - 1] + x[n]$$

Odrediti $y[n]$ ako je $x[n] = \delta[n - 1]$.

3.18. Neka su S1 i S2 dva serijski spojena diskretna kauzalna LTI sustava, zadana slijedećim ulazno-izlaznim jednačbama diferencija:

S1: $w[n] = (1/2)w[n - 1] + x[n]$, pri čemu je $x[n]$ ulaz i $w[n]$ izlaz iz S1

S2: $y[n] = ay[n - 1] + bw[n]$, pri čemu je $w[n]$ ulaz i $y[n]$ izlaz iz S2

Jednačba diferencija koja povezuje ulaz $x[n]$ i ulukap izlaz iz sustava, $y[n]$ jest:

$$y[n] = (1/8)y[n - 2] + (3/4)y[n - 1] + x[n]$$

a) Odrediti a i b

b) Odrediti impulsni odziv serijskog spoja S1 i S2.

3.19. Zadana je jednačba diferencija prvog reda $y[n] + 2y[n - 1] = x[n]$.

Pod pretpostavkom da vrijedi uvjet početnog mirovanja (tj. ako je $x[n]=0$ za $n < n_0$, tada je i $y[n] = 0$ za $n < n_0$), odrediti impulsni odziv sustava opisanog zadanom jednačbom diferencija. Primijeniti rekurziju.

3.20. Kauzalan LTI diskretan sustav za kojeg vrijedi uvjet početnog mirovanja opisan je jednačbom diferencija:

$y[n] + 2y[n - 1] = x[n] + 2x[n - 2]$. Odrediti odziv sustava na pobudu oblika:

$$x[n] = \delta[n + 2] + 2\delta[n + 1] + 3\delta[n] + 2\delta[n - 1] + 2\delta[n - 2] + \delta[n - 4]$$

3.21. Kauzalan LTI diskretan sustav opisan je jednačbom diferencija:

$$y[n] - (1/2)y[n - 1] = x[n].$$

Na sustav dovedemo pobudu oblika $x[n] = (1/3)^n u[n]$. Odrediti odziv sustava. Odziv izračunati kao sumu partikularnog i homogenog rješenja. Za partikularno rješenje pretpostaviti oblik identičan pobudi. Homogeno rješenje odrediti pomoću rekurzije.

Za sustav vrijedi uvjet početnog mirovanja, odnosno ako je $x[n]=0$ za $n < n_0$, i $y[n]=0$ za $n < n_0$.

3.22. Kauzalan LTI kontinuirani sustav za kojeg vrijedi uvjet početnog mirovanja opisan je diferencijalnom jednačbom: $dy(t)/dt + 2y(t) = x(t)$

a) Odrediti odziv sustava $y_1(t)$ na pobudu $x_1(t) = e^{3t}u(t)$.

b) Odrediti odziv sustava $y_2(t)$ na pobudu $x_2(t) = e^{2t}u(t)$.

3) Odrediti odziv sustava $y_3(t)$ na pobudu $x_3(t) = ae^{3t}u(t) + be^{2t}u(t)$, pri čemu su a i b realni brojevi. Pokazati da vrijedi: $y_3(t) = ay_1(t) + by_2(t)$ (budući da je sustav linearan).

3.23. Nacrtati blok dijagram kauzalnog LTI sustava opisanog jednačbom diferencija:

a) $y[n] = 1/3y[n - 1] + 1/2x[n]$

b) $y[n] = 1/3y[n - 1] + x[n - 1]$

3.24. Nacrtati blok dijagram kauzalnog LTI sustava opisanog diferencijalnom jednačbom:

a) $y(t) = -1/2 dy(t)/dt + 4x(t)$

b) $dy(t)/dt + 3y(t) = x(t)$

Koristiti integratore!

RJEŠENJA ZADATAKA

3. POGLAVLJE

3.1.

a) $y_1[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4]$

b) $y_2[n] = y_1[n+2]$

c) $y_3[n] = y_1[n+2]$

3.2. $A = n - 9; B = n + 3$

3.3. $y[n] = 2(1-(1/2)^{n+1})u[n]$

$$3.4. y[n] = \begin{cases} n-6 & 7 \leq n \leq 11 \\ 6 & 12 \leq n \leq 18 \\ 24-n & 19 \leq n \leq 23 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

3.5. $N = 4$

$$3.6. y[n] = \begin{cases} 3^{n+1}/2 & n < 0 \\ 1/2 & n \geq 0 \end{cases}$$

$$3.7. y(t) = \begin{cases} t+3 & -2 < t \leq -1 \\ t+4 & -1 < t \leq 0 \\ 2-2t & 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

3.8. $A = t - 5; B = t - 4$

$$3.9. a) y(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq a \\ a & a \leq t \leq 1 \\ 1+a-t & 1 \leq t \leq 1+a \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

b) $a = 1$

3.10.

$$a) y(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ (1 - e^{3(3-t)})/3 & 3 \leq t \leq 5 \\ e^{-3t}(e^{15} - e^9)/3 & t > 5 \end{cases}$$

$$b) g(t) = e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5)$$

$$c) g(t) = dy(t)/dt$$

$$3.11. A = (1 - e^{-3})^{-1}$$

$$3.12. A = 1/5$$

$$3.13. a) \text{ stabilan sustav} \quad b) \text{ stabilan sustav}$$

$$3.14. a) \text{ nestabilan sustav} \quad b) \text{ stabilan sustav}$$

$$3.15. a) \text{ točno} \\ b) \text{ netočno} \\ c) \text{ točno}$$

$$3.16. y(t) = \frac{1}{3(1+j)}(e^{(-1+3j)t} - e^{-4t})u(t)$$

$$3.17. y[n] = 4^{1-n}u[n-1]$$

$$3.18. a) a = 1/4; b = 1 \\ b) h[n] = (2^{1-n} - 2^{-2n})u[n]$$

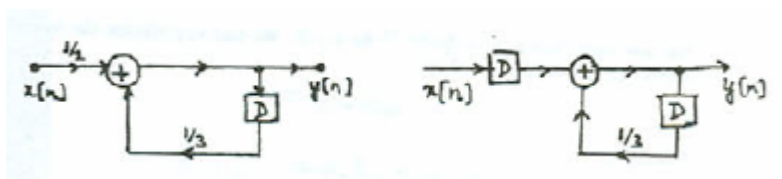
$$3.19. h[n] = (-2)^n u[n]$$

$$3.20. y[n] = 0 \text{ za } n \leq -3; y[-2] = 1; y[-1] = 0; y[0] = 5; \\ y[1] = -4; y[2] = 16; y[3] = -27; y[4] = 58; y[n] = -114*(-2)^{n-5};$$

$$3.21. y[n] = (-2(1/3)^n + 3(1/2)^n)u[n]$$

$$3.22. a) y_1(t) = ((1/5)e^{3t} - (1/5)e^{-2t})u(t) \\ b) y_2(t) = (-(1/4)e^{2t} + (1/4)e^{-2t})u(t)$$

$$3.23.$$



3.24.

