RIJEŠENI ZADACI IZ MATEMATIKE

Ovi zadaci namijenjeni su studentima prve godine za pripremu ispitnog gradiva za kolokvije i ispite iz matematike. Pripremljeni su u suradnji i po uputama predmetnog nastavnika dr. Josipa Matejaš.

Zadatke je izabrala, pripremila i riješila Ksenija Pukšec
(demonstratorica iz matematike na EF).

Materijale je pregledala i recenzirala Martina Nakić
(demonstratorica iz matematike na EF).

Tehničku realizaciju materijala u programskom paketu LaTeX napravio je Krešimir Bokulić (demonstrator iz računarstva na PMF-MO).

INTEGRALI

1. Izračunajte $\int \left(x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx &= \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx + \int \sqrt[3]{x} dx = \\
&= \int x^2 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx = \\
&= \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C
\end{aligned}$$

2. Izračunajte $\int (3x^2 - \frac{1}{3\sqrt{x}})dx$.

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
\int (3x^2 - \frac{1}{3\sqrt{x}})dx &= \int 3x^2 dx - \int \frac{1}{3\sqrt{x}} dx = \\
&= 3\int x^2 dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \\
&= 3\int x^2 dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \\
&= 3\int x^2 dx - \frac{1}{3}\int x^{\frac{-1}{2}} dx = \\
&= 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + C = \\
&= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\
&= x^3 - \frac{1}{3} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C = \\
&= x^3 - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + C
\end{aligned}
$$

3. Izračunajte $\int(4x+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
\int(4x+\frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int 4xdx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \\
= 4\int xdx + \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = 4\int xdx + \int x^{\frac{-1}{2}}dx = \\
= 4\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + C = \\
= 4\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\
= 2x^2 + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \\
= 2x^2 + 2\sqrt{x} + C
\end{aligned}
$$

4. Izračunajte $\int(-x^3+\sqrt{x}+x^{\frac{1}{3}})dx$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int(-x^3+\sqrt{x}+x^{\frac{1}{3}})dx &= \int -x^3dx + \int \sqrt{x}dx + \int x^{\frac{1}{3}}dx = \\
&= -\int x^3dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{3}}dx = \\
&= -\frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \\
&= -\frac{x^4}{4} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \\
&= -\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C = \\
&= -\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C
\end{aligned}$$

5. Izračunajte$\int 4xlnxdx$.

Rješenje:

$$\int 4xlnxdx = \begin{bmatrix} u = lnx & dv = 4xdx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \int 4xdx = 2x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= u \cdot v - \int vdu = lnx \cdot 2x^2 - \int 2x^2 \cdot \frac{1}{x}dx =$$

$$= 2x^2lnx - \int 2xdx = 2x^2lnx - 2\int xdx =$$

$$= 2x^2lnx - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = 2x^2lnx - x^2 + C$$

6. Izračunajte $\int xe^x dx$.

Rješenje:

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} =$$
$$= u \cdot v - \int v du = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

7. Izračunajte $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+9}dx$.

Rješenje:

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+9}dx = \begin{bmatrix} t = x^2-2x+9 \\ dt = (2x-2)dx \end{bmatrix} =$$
$$= \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln|x^2-2x+9| + C$$

8. Izračunajte $\int \frac{lnx}{x}dx$.

Rješenje:

$$\int \frac{lnx}{x}dx = \begin{bmatrix} t = lnx \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} =$$
$$= \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{ln^2x}{2} + C$$

9. Izračunajte $\int xe^{x^2}dx$.

Rješenje:

$$\int xe^{x^2}dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx / :2 \\ \frac{dt}{2} = xdx \end{bmatrix} = \int e^t \frac{dt}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

10. Izračunajte $\int 6x^2e^{x^3}dx$.

Rješenje:

$$\int 6x^2e^{x^3}dx = \begin{bmatrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2dx / \cdot 2 \\ 2dt = 6x^2dx \end{bmatrix} =$$
$$= \int 2e^t dt = 2e^t + C = 2e^{x^3} + C$$

11. Izračunajte $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
\int e^{\sqrt{x}} dx &= \begin{bmatrix} t^2 = x \Rightarrow t = \sqrt{x} \\ 2tdt = dx \end{bmatrix} = \\
&= \int e^t 2tdt = 2 \int te^t dt = \\
&= \begin{bmatrix} u = t & dv = e^t dt \\ du = dt & v = e^t \end{bmatrix} = \\
&= 2\left(t \cdot e^t - \int e^t dt\right) = 2(te^t - e^t) + C = \\
&= 2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C = \\
&= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C
\end{aligned}
$$

12. Izračunajte određeni integral $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$.

Rješenje:

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int_1^4 (\frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}) dx =$$
$$= \int_1^4 \left(x^{-2} + x^{\frac{-3}{2}} \right) dx = \int_1^4 x^{-2} dx + \int_1^4 x^{\frac{-3}{2}} dx =$$
$$= \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{\frac{-3}{2}+1}}{\frac{-3}{2}+1} \right) \Big|_1^4 =$$
$$= \left(\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}} \right) \Big|_1^4 =$$
$$= \left(-x^{-1} - 2x^{\frac{-1}{2}} \right) \Big|_1^4 =$$
$$= \left(\frac{-1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) \Big|_1^4 = -\frac{1}{4} - \frac{2}{\sqrt{4}} - \left(-\frac{1}{1} - \frac{2}{\sqrt{1}} \right) =$$
$$= -\frac{1}{4} - 1 + 1 + 2 = \frac{7}{4}$$

13. Izračunajte $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x+2}dx$.

Rješenje:

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{x+2}dx = \begin{bmatrix} t = x+2, & x = t-2 \\ dt = dx & \end{bmatrix} =$$
$$= \int_{-1}^{2} (t-2)t^{\frac{1}{2}}dt = \int_{-1}^{2} (t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}})dt =$$
$$= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}|_{-1}^{2} =$$
$$= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}|_{-1}^{2} =$$

$$= (\frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}}) - (\frac{2}{5} \cdot 1^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{46}{15}$$

14. Odredite parametar $b \in \mathbb{R}, b > -1$, takav da vrijedi $\frac{1}{b+1}\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)dx = 4$.

Rješenje:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{b+1}\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)dx = \frac{1}{b+1}\left(\int_{-1}^{b}3x^2dx + \int_{-1}^{b}2xdx\right) = \\
= \frac{1}{b+1}\left(3\int_{-1}^{b}x^2dx + 2\int_{-1}^{b}xdx\right) = \frac{1}{b+1}\left((3\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{b}\right) = \\
= \frac{1}{b+1}\left((x^3+x^2)\Big|_{-1}^{b}\right) = \frac{1}{b+1}(b^3+b^2-(-1+1)) = \\
= \frac{b^3+b^2}{b+1} = \frac{b^2(b+1)}{b+1} = b^2 \\
b^2 = 4 \\
b = 2
\end{gathered}
$$

15. Odredite parametar $a \in \mathbb{R}, a > 0$ takav da vrijedi $\int_0^a x\sqrt{3x^2+1}dx = -\frac{1}{9}$.

Rješenje:

$$\int_0^a x\sqrt{3x^2+1}dx = \begin{bmatrix} t = 3x^2+1 \\ dt = 6xdx / : 6 \\ \frac{dt}{6} = xdx \end{bmatrix} = \int_0^a \sqrt{t}\frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int_0^a \sqrt{t}dt =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{9}\Big|_0^a = \frac{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{9}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{1}{9}(3a^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9}(3a^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9}(3a^2+1)^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$3a^2+1 = 0$$

$$3a^2 \neq -1$$

Ne postoji takav $a \in \mathbb{R}$

16. Odredite parametar $a \in \mathbb{R}, a > 0$ takav da je $a \int_0^{\frac{1}{a}} xe^{2x}dx = \frac{1}{2}$.

Rješenje:

$$a \int_0^{\frac{1}{a}} xe^{2x}dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & v = \int e^{2x}dx = ..**.. = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$** \Rightarrow \begin{bmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx / : 2 \\ \frac{dt}{2} = dx \end{bmatrix} = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$a \left(x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx \right) = a \left(x\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} \right) \Big|_0^{\frac{1}{a}} =$$

$$= a \left(\frac{\frac{1}{a}}{2}e^{\frac{2}{a}} - \frac{1}{4}e^{\frac{2}{a}} + \frac{1}{4} \right) = a \left(\frac{1}{2a}e^{\frac{2}{a}} - \frac{1}{4}e^{\frac{2}{a}} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{2}{a}} - \frac{1}{4}ae^{\frac{2}{a}} + \frac{1}{4}a$$

$$\frac{1}{2}e^{\frac{2}{a}} - \frac{1}{4}ae^{\frac{2}{a}} + \frac{1}{4}a = \frac{1}{2}$$

$$e^{\frac{2}{a}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}a \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}a = 0$$

$$e^{\frac{2}{a}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}a \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}a \right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}a \right) \left(e^{\frac{2}{a}} - 1 \right) = 0$$

$$e^{\frac{2}{a}} - 1 = 0 \Rightarrow e^{\frac{2}{a}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{2}{a}} = e^0$$

$$\frac{2}{a} = 0 \Rightarrow 2 = 0 \Rightarrow\Leftarrow$$

Ne postoji a za koji je $e^{\frac{2}{a}} - 1 = 0$.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}a = 0 \Rightarrow a = 2$$

Konačno rješenje: a=2

17. Neka je $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Odredite za koje vrijednosti parametara a vrijedi

$$\int_a^{a^2} (xln^2x)^{-1}dx = \frac{1}{4}$$

Rješenje:

$$\int_a^{a^2} (xln^2x)^{-1}dx = \int_a^{a^2} \frac{1}{xln^2x}dx = \begin{bmatrix} t = lnx \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} =$$
$$= \int_a^{a^2} \frac{dt}{t^2} = \int_a^{a^2} t^{-2}dt = \frac{t^{-1}}{-1}|_a^{a^2} = -\frac{1}{t}|_a^{a^2} = -\frac{1}{lnx}\bigg|_a^{a^2} =$$
$$= -\frac{1}{lna^2} + \frac{1}{lna} = -\frac{1}{2lna} + \frac{1}{lna} = \frac{-1+2}{2lna} = \frac{1}{2lna}$$
$$\frac{1}{2lna} = \frac{1}{4}$$
$$2lna = 4/:2$$
$$lna = 2/e^{-}$$
$$e^{lna} = e^2$$
$$a = e^2$$

18. Izračunajte harmonijsku srednju vrijednost funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu [1, 2]. (Harmonijska se srednja vrijednost funkcije f(x) na intervalu [a, b] definira kao $H = \frac{b-a}{\int_a^b \frac{dx}{f(x)}}$).

Rješenje:

$$H = \frac{2-1}{\int_1^2 \frac{dx}{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\int_1^2 x dx} = \frac{1}{\frac{x^{1+1}}{1+1}\Big|_1^2} =$$
$$\frac{1}{\frac{x^2}{2}\Big|_1^2} = \frac{1}{\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

19. Izračunajte geometrijsku srednju vrijednost funkcije $f(x) = e^x$ na intervalu [0, 1]. (Geometrijska se srednja vrijednost funkcije f(x) na intervalu [a, b] definira kao $G = e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b lnf(x)dx}$).

Rješenje:

$$G = e^{\frac{1}{1-0}\int_0^1 lne^x dx} = e^{\int_0^1 xdx} =$$
$$= e^{\frac{x^{1+1}}{1+1}\Big|_0^1} = e^{\frac{x^2}{2}\Big|_0^1} = e^{\frac{1}{2}^2 - \frac{0}{2}^2} = \sqrt{e}$$

20. Odredite veličinu površine koju omeđuju grafovi funkcija $y = 4 - x^2$ i $y = x^4 - 16$.

Rješenje:

$$y = 4 - x^2$$
$$a = -1 < 0 \Rightarrow \bigcap$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 4$$

Sjecište krivulje s x-osi:

$$4 - x^2 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

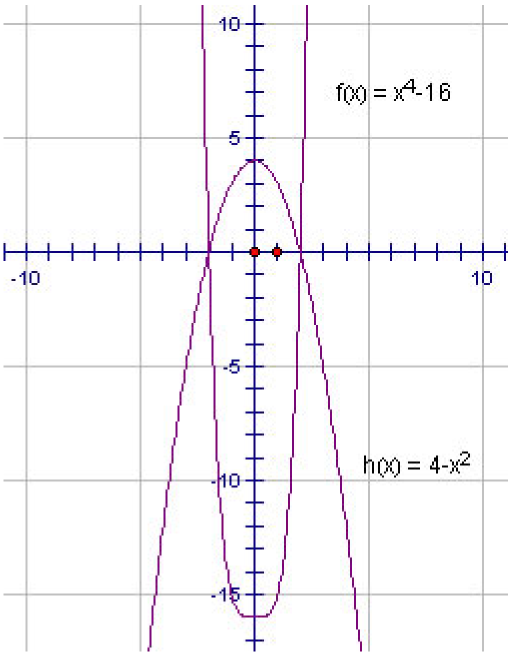
$$y = x^4 - 16$$
$$a = 1 > 0 \Rightarrow \bigcup$$
$$x = 0 \Rightarrow y = -16$$

Sjecište krivulje s x-osi:

$$x^4 - 16 = 0$$
$$x^4 = 16$$
$$x = \pm 2$$

Sjecište krivulja:

$$4 - x^2 = x^4 - 16$$
$$4 - x^2 - x^4 + 16 = 0$$
$$-x^4 - x^2 + 20 = 0$$
$$x^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{t}$$
$$-t^2 - t + 20 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{-2}$$
$$\cancel{t}_1 = -5$$
$$t_2 = 4$$
$$x = \sqrt{4} = \pm 2$$



$$P = \int_{-2}^{2} (4 - x^2 - x^4 + 16) dx = \int_{-2}^{2} (-x^4 - x^2 + 20) dx =$$
$$= \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 20x \right) \Bigg|_{-2}^{2} = 61\frac{13}{15}$$

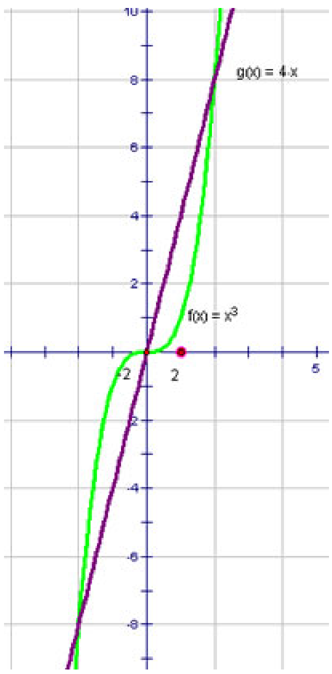
21. Izračunajte površinu lika omeđenog grafovima funkcija $y(x) = x^3$ i $y(x) = 4x$

Rješenje:

Sjecišta krivulja:

$$x^3 = 4x$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x^2 - 4) = 0$$

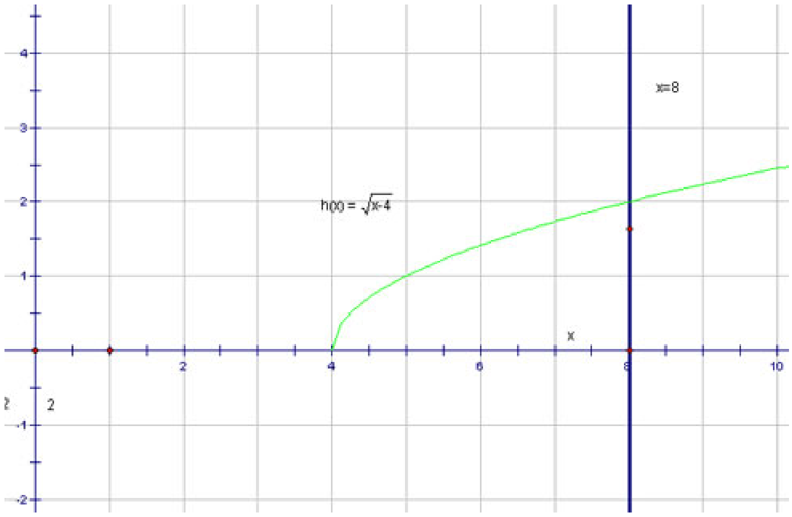
$$x = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$



$$P = P_1 + P_2$$
$$P_1 = P_2$$
$$P = 2P_1$$
$$P_1 = \int_0^2 (4x - x^3)dx = \left(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 4$$
$$P = 2P_1 = 2 \cdot 4 = 8$$

22. Izračunajte mjerni broj površine lika omeđenog grafovima funkcije $f(x) = \sqrt{x-4}$, osi apscisa te pravcem x=8.

Rješenje:



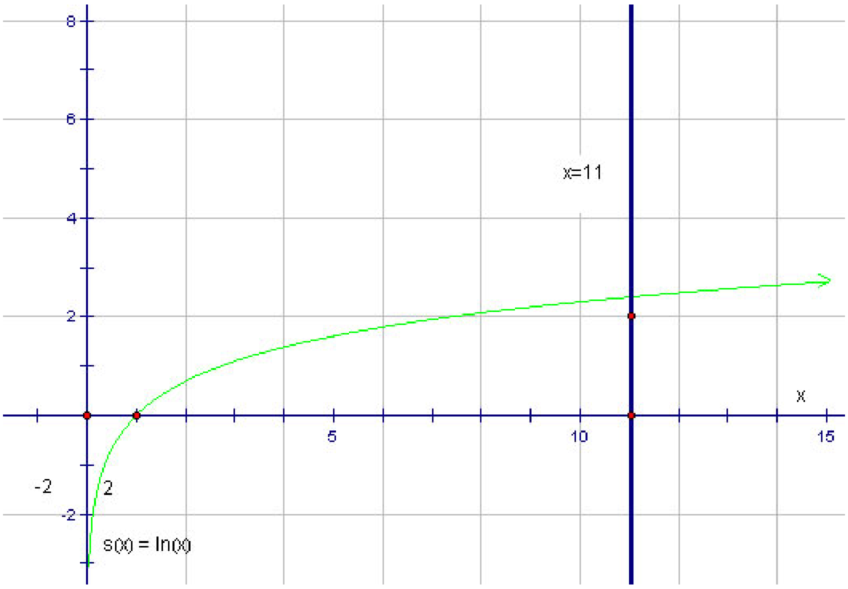
$$p = \left| \int_4^8 \sqrt{x-4}dx \right| = \left| \int_4^8 (x-4)^{\frac{1}{2}} dx \right| = \begin{bmatrix} t = x-4 \\ dt = dx \end{bmatrix} =$$

$$= \left| \int_4^8 t^{\frac{1}{2}} dt \right| = \left| \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right| \Bigg|_4^8 = \left| \frac{2}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}} \right| \Bigg|_4^8 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{16}{3}$$

23. Odredite veličinu površine omeđene sa $y = lnx, y = 0$ i $x = 11$.

Rješenje:



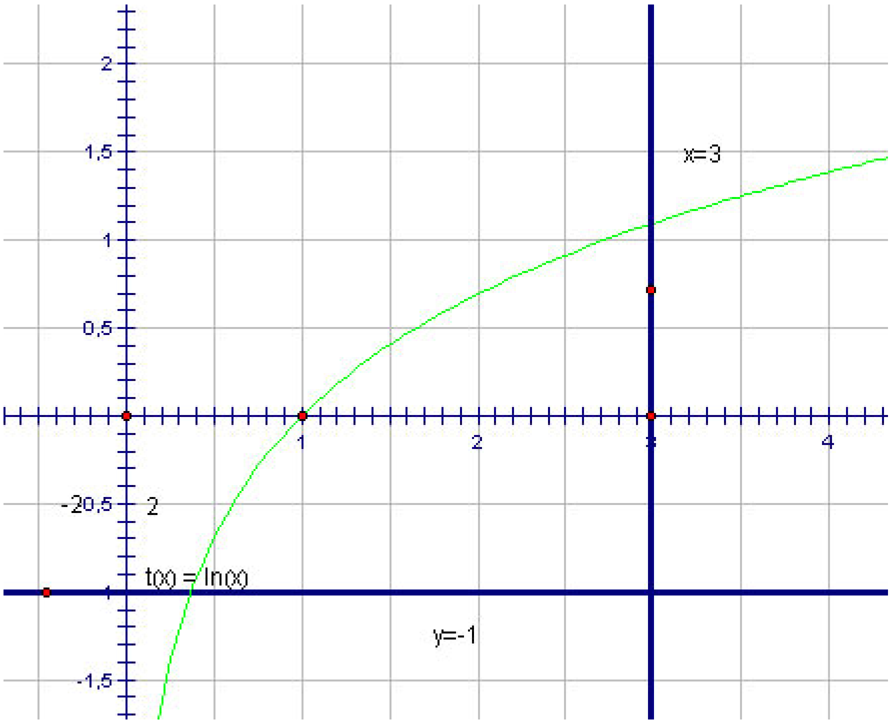
$$P = \Big|\int_1^{11} lnxdx\Big| = \begin{bmatrix} u = lnx & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= \Big|lnx \cdot x - \int_1^{11} x \cdot \frac{1}{x}dx\Big| = \Big|xlnx - x\Big|\Big|_1^{11} =$$

$$= \Big|11 \cdot ln11 - 11 - 1 \cdot ln1 + 1\Big| = \Big|11ln11 - 10\Big| \approx 16,377$$

24. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = lnx$, $y = -1$, $x = 3$.

Rješenje:

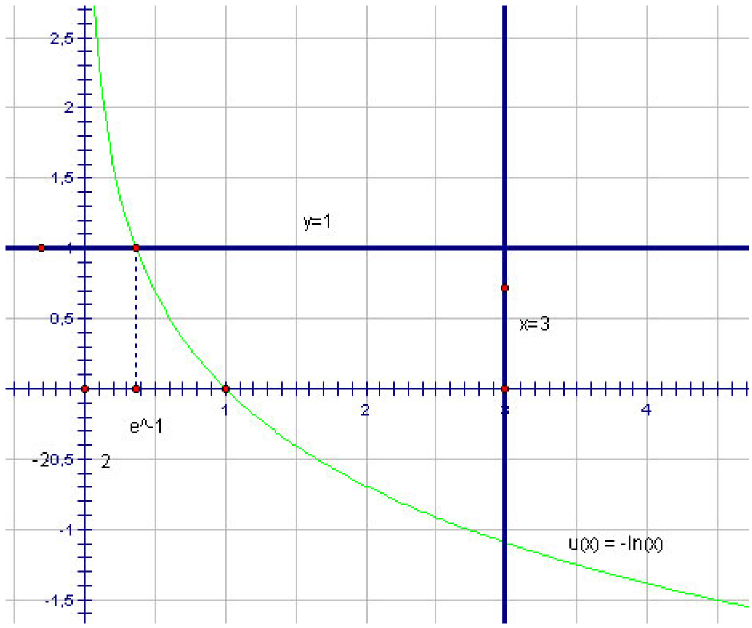


Sjecište:

$$lnx = -1/e^{-}$$
$$x = e^{-1}$$
$$p = \int_{e^{-1}}^{3} (lnx + 1)dx = \int_{e^{-1}}^{3} lnxdx + \int_{e^{-1}}^{3} dx =$$
$$= \begin{bmatrix} u = lnx & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{bmatrix} = (xlnx - x + x)\Big|_{e^{-1}}^{3} =$$
$$= xlnx\Big|_{e^{-1}}^{3} = 3ln3 - e^{-1}lne^{-1} = 3ln3 + e^{-1} =$$
$$= 3.663716307$$

25. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = -lnx$, $y = 1$ i $x = 3$.

Rješenje:



Sjecište:

$$
\begin{gathered}
-lnx = 1 / \cdot (-1) \\
lnx = -1 / e^{-} \\
x = e^{-1} \\
P = \int_{e^{-1}}^{3} (1 + lnx)dx = \int_{e^{-1}}^{3} dx + \int_{e^{-1}}^{3} lnxdx = \\
= \begin{bmatrix} u = lnx & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{bmatrix} = \\
= x + lnx \cdot x - \int_{e^{-1}}^{3} x \cdot \frac{1}{x}dx = (x + xlnx - x)\Big|_{e^{-1}}^{3} = \\
= xlnx\Big|_{e^{-1}}^{3} = 3ln3 - e^{-1}lne^{-1} = 3ln3 + e^{-1} = \\
= 3.663716307
\end{gathered}
$$

26. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y + y' = 0$.

Rješenje:

$$y + \frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -y / \cdot dx$$
$$dy = -ydx / : y$$
$$\frac{dy}{y} = -dx / \int$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -dx$$
$$lnx = -x + lnC / e^{-}$$
$$y = e^{-x+lnC}$$
$$y = e^{-x} \cdot e^{lnC}$$
$$y = Ce^{-x}$$

27. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - 2y = 0$

Rješenje:

$$
\begin{gathered}
y' - 2y = 0 \\
y' = 2y \\
\frac{dy}{dx} = 2y / \cdot dx \\
dy = 2y dx / : y \\
\frac{dy}{y} = 2dx / \int \\
\int \frac{dy}{y} = \int 2dx \\
lny = 2x + C / e^{-} \\
y = e^{2x + lnC} \\
y = e^{2x} \cdot e^{lnC} \\
y = C \cdot e^{2x}
\end{gathered}
$$

28. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = 3x^2y^2$ uz uvijet $y(0) = 1$.

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
y' &= 3x^2y^2 \\
\frac{dy}{dx} &= 3x^2y^2 / \cdot dx \\
dy &= 3x^2y^2dx / : y^2 \\
\frac{dy}{y^2} &= 3x^2dx / \int \\
\int y^{-2}dy &= 3\int x^2dx \\
\frac{y^{-1}}{-1} &= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C \\
-\frac{1}{y} &= x^3 + C / \cdot y \\
y(x^3 + C) &= -1 / : (x^3 + C) \\
y &= \frac{-1}{x^3 + C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(0) &= -\frac{1}{C} \\
-\frac{1}{C} &= 1 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow \\
y &= \frac{-1}{x^3 - 1} = \frac{-1}{-(1 - x^3)} \\
y &= \frac{1}{1 - x^3}
\end{aligned}
$$

29. Promjena količine radne snage zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $\frac{dL}{dt} = 0.018\sqrt[4]{L}$, gdje je L količina radne snage, a t vrijeme. Izračunajte vremensku putanju kretanja količine radne snage ako je njena početna vrijednost $L(0) = 1$.

Rješenje:

$$\frac{dL}{dt} = 0.018\sqrt[4]{L} / \cdot dt$$
$$dL = 0.018L^{\frac{1}{4}}dt / : L^{\frac{1}{4}}$$
$$L^{\frac{-1}{4}}dL = 0.018dt / \int$$
$$\int L^{\frac{-1}{4}}dL = \int 0.018dt$$
$$\frac{4}{3}L^{\frac{3}{4}} = 0.018t + C / \cdot \frac{3}{4}$$
$$L^{\frac{3}{4}} = 0.0135t + C / ()^{\frac{4}{3}}$$
$$L = (0,0135t + C)^{\frac{4}{3}}$$

$$L(0) = C^{\frac{4}{3}}$$
$$C^{\frac{4}{3}} = 1 \Rightarrow C = 1$$
$$L(t) = (0.0135t + 1)^{\frac{4}{3}}$$

30. Stopa kretanja stanovništva jedne države opisana je relacijom $\frac{dH}{dt} = 0.98t^{-\frac{1}{2}}$. Ako je u početnom trenutku t=0 početno stanovništvo bilo H(0)=14 380, izvedite vremensku putanju kretanja stanovništva H(t).

Rješenje:

$$\frac{dH}{dt} = 0.98t^{\frac{-1}{2}} / \cdot dt$$
$$dH = 0.98t^{\frac{-1}{2}} dt / \int$$
$$\int dH = \int 0.98t^{\frac{-1}{2}} dt$$
$$H = 0.98\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$
$$H(t) = 1.96\sqrt{t} + C$$

$$H(0) = C \Rightarrow C = 14380$$
$$H(t) = 1.96\sqrt{t} + 14380$$

31. Neto investicije I(t) se definiraju kao stopa akumuliranja kapitala $\frac{dK}{dt}$, gdje je t vrijeme, tj. $\frac{dK}{dt} = I(t)$. Ako su neto investicije $I(t) = 4\sqrt{t}$, početni kapital K(0)=1, izračunajte funkciju kapitala.
(Uputa: riješite diferencijalnu jednadžbu $\frac{dK}{dt} = I(t)$).

Rješenje:

$$\frac{dK}{dt} = I(t)$$
$$\frac{dK}{dt} = 4\sqrt{t} / \cdot dt$$
$$dK = 4\sqrt{t}dt / \int$$
$$\int dK = \int 4\sqrt{t}dt$$
$$K = 4\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$K = \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$K(0) = C \Rightarrow C = 1$$
$$K(t) = \frac{8}{3}t\sqrt{t} + 1$$

32. Funkcija potražuje $p(Q) = 42 - 5Q - Q^2$, gdje je Q količina proizvodnje, predstavlja cijenu koju je potrošač voljan platiti za različite količine proizvodnje. Ako je ravnotežna cijena $p_0 = 6$, onda je potrošačev probitak (benefit) jednak $\int_0^{Q_0} p(Q)dQ - Q_0 p_0$, gdje je Q_0 ravnotežna količina. Izračunajte potrošačev probitak za ovaj konkretan slučaj.

Rješenje:

$$42 - 5Q - Q^2 = 6$$
$$Q^2 + 5Q - 36 = 0$$
$$Q_0 = 4$$
$$\int_0^4 (42 - 5Q - Q^2)dQ = (42Q - 5\frac{Q^2}{2} - \frac{Q^3}{3})\Big|_0^4 = \frac{320}{3}$$
$$\int_0^{Q_0} p(Q)dQ - Q_0 p_0 = \int_0^4 (42 - 5Q - Q^2)dQ - 4 \cdot 6 =$$
$$= \frac{320}{3} - 24 = \frac{248}{3} = 82.67$$

33. Odredite sve funkcije y(x) za koje vrijedi $E_{y,x} = 2lnx$.

Rješenje:

$$E_{y,x} = 2lnx.$$
$$\frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2lnx / \cdot \frac{dx}{x}$$
$$\frac{dy}{y} = 2lnx \cdot \frac{dx}{x} / \int$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2lnx}{x} dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{lnx}{x} dx = \begin{bmatrix} t = lnx \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{bmatrix}$$
$$lny = 2 \int tdt$$
$$lny = 2 \cdot \frac{t^2}{2} + lnC$$
$$lny = ln^2 x + lnC / e^-$$
$$y = e^{ln^2 x + lnC}$$
$$y = e^{ln^2 x} \cdot e^{lnC}$$
$$y = \left(e^{lnx}\right)^{lnx} \cdot C$$
$$y = x^{lnx} \cdot C$$
$$y = Cx^{lnx}$$

34. Pronađite funkciju potražnje u ovisnosti o cijeni, q(p), ako joj je koeficijent elastičnosti u odnosu na cijenu $E_{q,p} = -\frac{1}{5}$ i q(1)=3.

Rješenje:

$$
\begin{gathered}
E_{q,p} = -\frac{1}{5} \\
\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = -\frac{1}{5} / \cdot \frac{dp}{p} \\
\frac{dq}{q} = -\frac{1}{5}\frac{dp}{p} / \int \\
\int \frac{dq}{q} = \int -\frac{1}{5}\frac{dp}{p} \\
lnq = -\frac{1}{5} lnp + lnC \\
lnq = lnp^{\frac{-1}{5}} + lnC \\
lnq = ln(p^{-\frac{1}{5}} \cdot C) / e^{-} \\
q = p^{-\frac{1}{5}} \cdot C
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
q(1) = 1^{-\frac{1}{5}} \cdot C = C \Rightarrow C = 3 \\
q(p) = 3p^{-\frac{1}{5}}
\end{gathered}
$$

35. Odredite funkciju potražnje q=q(p) kao funkciju cijene p, ako je uz jediničnu cijenu potražnja q jednaka 10, te vrijedi da je $E_{q,p} = \frac{-p}{2(101-p)}$.

Rješenje:

$$E_{q,p} = \frac{-p}{2(101-p)}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{-p}{2(101-p)} / \cdot \frac{dp}{p}$$

$$\frac{dq}{q} = \frac{-dp}{2(101-p)} / \int$$

$$\int \frac{dq}{q} = \frac{-1}{2} \int \frac{dp}{101-p} = \begin{bmatrix} t = 101-p \\ dt = -dp / \cdot (-1) \\ -dt = dp \end{bmatrix}$$

$$lnq = -\frac{1}{2} \int \frac{-dt}{t}$$

$$lnq = \frac{1}{2} lnt + lnC$$

$$lnq = \frac{1}{2} ln(101-p) + lnC$$

$$lnq = ln(101-p)^{\frac{1}{2}} + lnC$$

$$lnq = ln[\sqrt{101-p} \cdot C] / e^{-}$$

$$q = \sqrt{101-p} \cdot C$$

$$q(1) = 10C$$

$$10C = 10 / : 10$$

$$C = 1$$

$$q(p) = \sqrt{101-p}$$

36. Pronađite funkciju ukupnih troškova T(Q) za koju je $E_{T,Q} = \sqrt{Q}$, a fiksni su troškovi jednaki 1.

Rješenje:

$$E_{T,Q} = \sqrt{Q}$$
$$\frac{Q}{T} \cdot \frac{dT}{dQ} = \sqrt{Q} / \cdot \frac{dQ}{Q}$$
$$\frac{dT}{T} = \frac{\sqrt{Q}}{Q} dQ / \int$$
$$\int \frac{dT}{T} = \int Q^{-\frac{1}{2}} dQ$$
$$lnT = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + lnC$$
$$lnT = 2\sqrt{Q} + lnC / e^{-}$$
$$T = e^{2\sqrt{Q} + lnC}$$
$$T = e^{2\sqrt{Q}} \cdot e^{lnC}$$
$$T = Ce^{2\sqrt{Q}}$$

$$T(0) = 1$$
$$T(0) = C \cdot e^{2\sqrt{0}} = C \cdot e^{0} = C \cdot 1 = C \Rightarrow C = 1$$
$$T(Q) = 1 \cdot e^{2\sqrt{Q}}$$
$$T(Q) = e^{2\sqrt{Q}}$$

37. Pronađite funkciju ukupnih prihoda R(Q) ako joj je koeficijent elastičnosti u odnosu na proizvodnju $E_{R,Q} = \frac{1}{4}$ i R(1)=15.

Rješenje:

$$E_{R,Q} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{Q}{R} \cdot \frac{dR}{dQ} = \frac{1}{4} / \cdot \frac{dQ}{Q}$$
$$\frac{dR}{R} = \frac{1}{4}\frac{dQ}{Q} / \int$$
$$\int \frac{dR}{R} = \frac{1}{4}\int \frac{dQ}{Q}$$
$$lnR = \frac{1}{4}lnQ + lnC$$
$$lnR = lnQ^{\frac{1}{4}} + lnC$$
$$lnR = ln(Q^{\frac{1}{4}} \cdot C)/e^{-}$$
$$R = Q^{\frac{1}{4}} \cdot C$$

$$R(1) = 1^{\frac{1}{4}} \cdot C = C \Rightarrow C = 15$$
$$R(Q) = 15Q^{\frac{1}{4}}$$

38. Odredite funkciju ukupnih prihoda R=R(Q) kao funkciju proizvodnje Q ako je $E_{\pi,Q} = -Q$, gdje je $\pi(Q)$ granični prihod, a $\pi(0) = 2$.

(Uputa: R(0)=0).

Rješenje:

$$E_{\pi,Q} = -Q$$
$$\frac{Q}{\pi} \cdot \frac{d\pi}{dQ} = -Q / \cdot \frac{dQ}{Q}$$
$$\frac{d\pi}{\pi} = -dQ / \int$$
$$\int \frac{d\pi}{\pi} = \int -dQ$$
$$ln\pi = -Q + lnC / e^{-}$$
$$\pi = e^{-Q+lnC}$$
$$\pi = e^{-Q} \cdot e^{lnC}$$
$$\pi = e^{-Q} \cdot C$$

$$\pi(0) = C \Rightarrow C = 2$$
$$\pi(Q) = 2e^{-Q}$$
$$R(Q) = \int \pi(Q) dQ = \int 2e^{-Q} dQ = 2 \int e^{-Q} dQ = \begin{bmatrix} t = -Q \\ dt = -dQ \\ -dt = dQ \end{bmatrix} =$$
$$= 2 \int e^{t} \cdot (-dt) = -2 \int e^{t} dt = -2e^{t} + C = -2e^{-Q} + C$$
$$R(0) = -2 + C$$
$$-2 + C = 0$$
$$C = 2$$
$$R(Q) = -2e^{-Q} + 2$$

39. Odredite funkciju ukupnih prihoda R=R(Q) kao funkciju proizvodnje Q ako je $E_{\pi,Q} = \frac{4Q}{2Q-3}$, gdje je $\pi(Q)$ granični prihod, a $\pi(0) = 9$.

(Uputa: R(0)=0).

Rješenje:

$$E_{\pi,Q} = \frac{4Q}{2Q-3}$$
$$\frac{Q}{\pi} \cdot \frac{d\pi}{dQ} = \frac{4Q}{2Q-3} / \cdot \frac{dQ}{Q}$$
$$\frac{d\pi}{\pi} = \frac{4}{2Q-3} dQ / \int$$
$$\int \frac{d\pi}{\pi} = 4 \int \frac{dQ}{2Q-3} = \begin{bmatrix} t = 2Q-3 \\ dt = 2dQ / : 2 \\ \frac{dt}{2} = dQ \end{bmatrix}$$
$$ln\pi = 4 \int \frac{\frac{dt}{2}}{t}$$
$$ln\pi = 4 \int \frac{dt}{2t}$$
$$ln\pi = 4 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t}$$
$$ln\pi = 2lnt + lnC$$
$$ln\pi = 2ln(2Q-3) + lnC$$
$$ln\pi = ln(2Q-3)^2 + lnC$$
$$ln\pi = ln\bigg((2Q-3)^2 \cdot C \bigg) \Big/ e^{-}$$
$$\pi = C(2Q-3)^2$$

$$\pi(0) = 9C$$
$$9C = 9 / : 9$$
$$C = 1$$

$$\pi(Q) = (2Q-3)^2$$
$$R(Q) = \int \pi(Q) dQ = \int (2Q-3)^2 dQ = \begin{bmatrix} t = 2Q-3 \\ dt = 2dQ / : 2 \\ \frac{dt}{2} = dQ \end{bmatrix} =$$
$$= \int t^2 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^2 dt = \frac{1}{2} \frac{t^3}{3} + C = \frac{t^3}{6} + C =$$
$$= \frac{(2Q-3)^3}{6} + C$$
$$R(0) = \frac{-27}{6} + C$$
$$-\frac{27}{6} + C = 0$$
$$C = \frac{27}{6}$$
$$R(Q) = \frac{(2Q-3)^3}{6} + \frac{27}{6}$$

40. Elastičnost potražnje q prema promjeni cijene p dana je sa $E_{q,p} = a$, pri čemu je a pozitivna konstanta. Odredite parametar a takav da je q(1)=1.

Rješenje:

$$
\begin{gathered}
E_{q,p} = a, \qquad a > 0 \\
a =?, \qquad q(1) = 1 \\
\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = a / \cdot \frac{dp}{p} \\
\frac{dq}{q} = a \cdot \frac{dp}{p} / \int \\
\int \frac{dq}{q} = \int a \frac{dp}{p} \\
lnq = alnp + lnC \\
lnq = ln(C \cdot p^a) \\
q = C \cdot p^a
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
q(1) = C \cdot 1^a = C \cdot 1 = C \Rightarrow C = 1 \\
q(p) = p^a \cdot 1 = p^a \\
q(1) = 1^a = 1 \\
q(1) = 1, \forall a > 0
\end{gathered}
$$

41. Zadana je funkcija graničnih troškova $t(Q) = 6Q^2 - Q + 1$, gdje je Q količina proizvodnje. Ako su fiksni troškovi 10, izračunajte funkciju ukupnih troškova T(Q).

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
T(Q) &= \int t(Q)dQ = \int (6Q^2 - Q + 1)dQ = \\
&= 6\frac{Q^3}{3} - \frac{Q^2}{2} + Q + C = 2Q^3 - \frac{Q^2}{2} + Q + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
T(0) = 10 \\
T(0) = C \\
\Rightarrow C = 10 \\
T(Q) = 2Q^3 - \frac{Q^2}{2} + Q + 10
\end{gathered}
$$

42. Zadana je funkcija graničnih troškova $t(Q) = \sqrt{Q}$. Izvedite funkciju ukupnih troškova ako su ukupni troškovi na nivou proizvodnje Q=9 jednaki 10.

Rješenje:

$$T(Q) = \int t(Q)dQ = \int \sqrt{Q}dQ = \frac{2}{3}Q^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}Q\sqrt{Q} + C$$

$$\begin{gathered} T(9) = 10 \\ T(9) = 18 + C = 10 \\ \Rightarrow C = -8 \end{gathered}$$

$$T(Q) = \frac{2}{3}Q\sqrt{Q} - 8$$

43. Dana je funkcija graničnih troškova t=t(Q) formulom $t(Q) = (Q+1)lnQ$, gdje je Q proizvodnja. Odredite funkciju ukupnih troškova ako na nivou proizvodnje Q=1, ukupni troškovi iznose $\frac{3}{4}$.

Rješenje:

$$T(Q) = \int t(Q)dQ = \int (Q+1)lnQdQ = \begin{bmatrix} u = lnQ & dv = (Q+1)dQ \\ du = \frac{1}{Q}dQ & v = \int (Q+1)dQ = \frac{Q^2}{2} + Q \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{Q^2}{2} + Q\right) lnQ - \int \left(\frac{Q^2}{2} + Q\right) \frac{1}{Q} dQ =$$

$$= \left(\frac{Q^2}{2} + Q\right) lnQ - \int \frac{Q^2 + 2Q}{2} \cdot \frac{1}{Q} dQ =$$

$$= \left(\frac{Q^2}{2} + Q\right) lnQ - \int \frac{Q+2}{2} dQ$$

$$= \left(\frac{Q^2}{2} + Q\right) lnQ - \frac{1}{2} \int (Q+2)dQ =$$

$$= \left(\frac{Q^2}{2} + Q\right) lnQ - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2Q + C =$$

$$= \left(\frac{1}{2}Q^2 + Q\right) lnQ - \frac{1}{4}Q^2 - Q + C$$

$$T(1) = \frac{3}{4}$$

$$T(1) = \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1\right) ln1 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 - 1 + C = -\frac{5}{4} + C$$

$$-\frac{5}{4} + C = \frac{3}{4} \Rightarrow C = 2$$

$$T(Q) = \left(\frac{1}{2}Q^2 + Q\right) lnQ - \frac{1}{4}Q^2 - Q + 2$$

44. Zadana je funkcija graničnih troškova $t(Q) = (1+Q)e^{-Q}$ gdje je Q količina proizvodnje. Odredite funkciju prosječnih troškova ako fiksni troškovi iznose 100.

Rješenje:

$$T(Q) = \int t(Q)dQ = \int (1+Q)e^{-Q}dQ = \begin{bmatrix} u = 1+Q & dv = e^{-Q}dQ \\ du = dQ & v = \int e^{-Q}dQ = -e^{-Q} \end{bmatrix} =$$
$$= (1+Q)\cdot(-e^{-Q}) - \int -e^{-Q}dQ = (1+Q)\cdot(-e^{-Q}) + \int e^{-Q}dQ =$$
$$= (1+Q)\cdot(-e^{-Q}) - e^{-Q} + C = e^{-Q}(-1-Q-1) + C =$$
$$= (-2-Q)\cdot e^{-Q} + C$$

$$T(0) = 100$$
$$T(0) = (-2-0)\cdot e^{-0} + C = -2\cdot 1 + C = -2 + C$$
$$-2 + C = 100$$
$$C = 102$$
$$T(Q) = (-2-Q)\cdot e^{-Q} + 102$$

$$A(Q) = \frac{T(Q)}{Q}$$
$$A(Q) = \frac{(-2-Q)\cdot e^{-Q} + 102}{Q}$$

45. Zadana je funkcija graničnih prihoda $r(Q) = \sqrt{Q+1}$. Izračunajte funkciju ukupnih prihoda.

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
R(Q) = \int r(Q)dQ = \int \sqrt{Q+1}dQ = \begin{bmatrix} t = Q+1 \\ dt = dQ \end{bmatrix} = \\
= \int \sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \\
= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(Q+1)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
R(0) = 0 \\
R(0) = \frac{2}{3} \cdot (0+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} + C \\
\frac{2}{3} + C = 0 \\
C = -\frac{2}{3} \\
R(Q) = \frac{2}{3}(Q+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \\
R(Q) = \frac{2}{3}(Q+1)\sqrt{Q+1} - \frac{2}{3}
\end{gathered}
$$

46. Dana je funkcija graničnih troškova $t(Q) = Q^{\frac{1}{4}}$ i cijena u ovisnosti o količini proizvodnje, p(Q)=2-Q. Ako su fiksni troškovi nula, izračunajte funkciju dobiti.

Rješenje:

$$D(Q) = R(Q) - T(Q)$$

$$R(Q) = p(Q) \cdot Q$$
$$R(Q) = (2 - Q) \cdot Q$$

$$T(Q) = \int t(Q)dQ = \int Q^{\frac{1}{4}}dQ = \frac{4}{5}Q^{\frac{5}{4}} + C$$
$$T(0) = 0$$
$$T(0) = C$$
$$\Rightarrow C = 0$$
$$T(Q) = \frac{4}{5}Q^{\frac{5}{4}}$$
$$D(Q) = Q(2 - Q) - \frac{4}{5}Q^{\frac{5}{4}}$$

47. Zadana je funkcija graničnih troškova $t(Q) = 2Q^2 - Q + (Q+1)^{-1}$ i cijena p(Q)=5-Q u ovisnosti o količini proizvodnje Q. Ako su fiksni troškovi 3, odredite funkciju dobiti.

Rješenje:

$$D(Q) = R(Q) - T(Q)$$
$$R(Q) = p(Q) \cdot Q$$
$$R(Q) = (5 - Q) \cdot Q$$

$$\begin{aligned} T(Q) &= \int t(Q)dQ = \int (2Q^2 - Q + (Q+1)^{-1})dQ = \\ &= \int 2Q^2 dQ - \int QdQ + \int (Q+1)^{-1}dQ = \\ &= 2 \cdot \frac{Q^3}{3} - \frac{Q^2}{2} + \int \frac{1}{Q+1}dQ = \begin{bmatrix} t = Q+1 \\ dt = dQ \end{bmatrix} = \\ &= \frac{2}{3}Q^3 - \frac{1}{2}Q^2 + \int \frac{dt}{t} = \frac{2}{3}Q^3 - \frac{1}{2}Q^2 + ln(Q+1) + C \end{aligned}$$

$$T(0) = 3$$
$$T(0) = C$$
$$\Rightarrow C = 3$$
$$T(Q) = \frac{2}{3}Q^3 - \frac{1}{2}Q^2 + ln(Q+1) + 3$$

$$D(Q) = (5 - Q) \cdot Q - \frac{2}{3}Q^3 + \frac{1}{2}Q^2 - ln(Q+1) - 3$$
$$D(Q) = 5Q - Q^2 - \frac{2}{3}Q^3 + \frac{1}{2}Q^2 - ln(Q+1) - 3$$
$$D(Q) = -\frac{2}{3}Q^3 - \frac{1}{2}Q^2 + 5Q - ln(Q+1) - 3$$

48. Zadana je funkcija graničnih troškova $t(Q) = 3Q^2 - 2Q - 4lnQ$ i cijena $p(Q) = \sqrt{20-Q}$ u ovisnosti o količini proizvodnje Q. Ako su ukupni troškovi za jediničnu proizvodnju jednaki 5, odredite funkciju dobiti.

Rješenje:

$$D(Q) = R(Q) - T(Q)$$
$$R(Q) = p(Q) \cdot Q$$
$$R(Q) = \sqrt{20-Q} \cdot Q$$

$$T(Q) = \int t(Q)dQ = \int (3Q^2 - 2Q - 4lnQ)dQ =$$
$$= 3\int Q^2 dQ - 2\int QdQ - 4\int lnQdQ$$

$$\int lnQdQ = \begin{bmatrix} u = lnQ & dv = dQ \\ du = \frac{1}{Q}dQ & v = Q \end{bmatrix} = lnQ \cdot Q - \int Q \cdot \frac{1}{Q} dQ =$$
$$= QlnQ - Q + C$$

$$T(Q) = 3 \cdot \frac{Q^3}{3} - 2 \cdot \frac{Q^2}{2} - 4(QlnQ - Q) + C$$
$$T(Q) = Q^3 - Q^2 - 4Q(lnQ - 1) + C$$
$$T(1) = 5$$
$$T(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1(ln1 - 1) + C = -4ln1 + 4 + C = 4 + C$$
$$4 + C = 5$$
$$C = 1$$
$$T(Q) = Q^3 - Q^2 - 4Q(lnQ - 1) + 1$$

$$D(Q) = Q\sqrt{20-Q} - Q^3 + Q^2 + 4Q(lnQ - 1) - 1$$

49. Zadana je funkcija graničnih troškova $t(Q) = Qe^{2Q}$. Ako su fiksni troškovi $\frac{3}{4}$, a cijena po jedinici proizvoda 3.56, odredite funkciju dobiti.
(Uputa: dobit=prihod-troškovi.)

Rješenje:

$$D(Q) = R(Q) - T(Q)$$
$$R(Q) = p \cdot Q$$
$$R(Q) = 3.56Q$$

$$T(Q) = \int t(Q)dQ = \int Qe^{2Q}dQ = \begin{bmatrix} u = Q & dv = e^{2Q}dQ \\ du = dQ & v = \int e^{2Q}dQ = ... * ... = \frac{1}{2}e^{2Q} \end{bmatrix}$$

$$* \Rightarrow v = \int e^{2Q}dQ = \begin{bmatrix} t = 2Q \\ dt = 2dQ / : 2 \\ \frac{dt}{2} = dQ \end{bmatrix} = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^{2Q}$$

$$T(Q) = Q \cdot \frac{1}{2}e^{2Q} - \int \frac{1}{2}e^{2Q}dQ = \frac{1}{2}Qe^{2Q} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2Q} + C =$$
$$= \frac{1}{2}Qe^{2Q} - \frac{1}{4}e^{2Q} + C$$
$$T(0) = \frac{3}{4}$$
$$T(0) = \frac{-1}{4} + C$$
$$-\frac{1}{4} + C = \frac{3}{4}$$
$$C = 1$$
$$T(Q) = \frac{1}{2}Qe^{2Q} - \frac{1}{4}e^{2Q} + 1$$
$$D(Q) = 3.56Q - \frac{1}{2}Qe^{2Q} + \frac{1}{4}e^{2Q} - 1$$

50. Zadana je funkcija graničnih prihoda $\pi(Q) = (1-2Q)e^{-2Q}$. Ako su troškovi po jedinici proizvoda 10, a fiksni troškovi 2.2, odredite funkciju dobiti. (Uputa: dobit=prihod-troškovi).

Rješenje:

$$D(Q) = R(Q) - T(Q)$$
$$T(Q) = 10Q + 2.2$$

$$R(Q) = \int \pi(Q)dQ = \int (1-2Q)e^{-2Q}dQ = \begin{bmatrix} u = 1-2Q & dv = e^{-2Q}dQ \\ du = -2dQ & v = \int e^{-2Q}dQ \end{bmatrix}$$
$$\int e^{-2Q}dQ = \begin{bmatrix} t = -2Q \\ dt = -2dQ / : 2 \\ -\frac{dt}{2} = dQ \end{bmatrix} = \int e^t \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-2Q} \Rightarrow v = -\frac{1}{2}e^{-2Q}$$

$$\begin{aligned} R(Q) &= (1-2Q)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2Q}\right) - \int \left(\frac{-1}{2}e^{-2Q}(-2dQ)\right) = \\ &= (1-2Q)\cdot\left(\frac{-1}{2}e^{-2Q}\right) - \int e^{-2Q}dQ = \\ &= (1-2Q)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2Q}\right) + \frac{1}{2}e^{-2Q} + C = \\ &= \frac{1}{2}e^{-2Q}(-1+2Q+1) + C = Qe^{-2Q} + C \end{aligned}$$
$$R(0) = 0$$
$$R(0) = C$$
$$\Rightarrow C = 0$$
$$R(Q) = Qe^{-2Q}$$

$$D(Q) = Qe^{-2Q} - 10Q - 2.2$$