1.) Funkcija $f: A \to \mathbb{R}$ ima prekid u točki $x_0 \in A$ ako barem jedan od slijedeća tri uvjeta nije zadovoljen:

a) $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \;\; i \;\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

b) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Objašnjenje:

a) Postoji lijevi limes (kada se vrijednosti x_0 približavamo s lijeve tj. minus strane na brojevnom pravcu) i u isto vrijeme postoji desni limes (kada se x_0 približavamo s desne tj. plus strane na brojevnom pravcu)

b) Ovi limesi su jednaki i mogu se ujediniti u jedan limes (limes kada varijabla x teži u x_0 s bilo koje strane)

c) Vrijednost limesa jednaka je vrijednosti funkcije u točki u koju varijabla x teži

Funkcija ima:

1) Uklonjivi prekid – ako su zadovoljeni uvjeti pod a) i b), a nije uvjet pod c) (limesi postoje, jednaki su, ali funkcija u toj točki ima vrijednost različitu od vrijednosti limesa.

2) Prekid prve vrste – ako vrijedi samo a) (limesi postoje, ali nisu jednaki, vrijednost funkcije u toj točki je nebitna može biti bilo koja)

3) Prekid druge vrste – ako ne vrijedi ništa od navedenog (makar jedan od limesa ne postoji odnosno nalazi se u $\pm\infty$)

2.) Geometrijska interpretacija derivacije je koeficijent smjera tangente u točki zadane krivulje. Dokaz ovoga zove se „Leibnitzov pristup problemu tangente na krivulju“.
Neka je $x_0, x \in D_f$ (elementi domene funkcije) i neka su međusobno različiti. Ako vrijednostima $x_0 \; i \; x$ pridružimo odgovarajuće vrijednosti funkcija $f(x_0) \; i \; f(x)$ definirali smo dvije točke. Jednu od njih nazovimo D($x_0, f(x_0)$), a drugu T($x, f(x)$). Ako sada kroz ove dvije točke povučemo pravac dobit ćemo pravac koji krivulju siječe u dvije točke tj. sekantu. Koeficijent smjera sekante određen je jednadžbom $k_{sek} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Ako sad točku D zamislimo kao fiksnu, a točku T počnemo duž krivulje približavati točki D u graničnom trenutku $\Delta x = 0$ pravac DT postaje tangenta. U tom trenutku koeficijent smjera tangente određen je jednadžbom $k_{tang} = \lim_{x \to x_0} k_{sek} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Kako je derivacija koeficijent smjera tangente u točki zadane krivulje može se pisati $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

3.) Derivaciju u nekoj točki krivulje definiramo kao $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, dok je njena geometrijska interpretacija koeficijent smjera tangente na krivulju u zadanoj točki. *(Ostalo nije gradivo ovog kolokvija).*

4.) Neka funkcija $f: A \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in (a, b) \subseteq A$ ima najveću ili najmanju vrijednost unutar tog intervala. Ako je derivabilna u toj točki onda je $f(x_0) = 0$.

Objašnjenje:
Neka funkcija na nekom intervalu koji je podskup ili je jednak domeni poprima minimum ili maksimum onda je u točki ekstrema (minimuma ili maksimuma) derivacija jednaka nuli naravno ako ona postoji.

Dokaz:
Za maksimum funkcije, tangente na funkciju s lijeve strane maksimuma imaju pozitivan koeficijent smjera, a one s desne negativan. Kako se s obe strane približavamo maksimumu tako se i koeficijenti smanjuju po apso vrijednosti. S obzirom da je funkcija derivabila ako i samo ako su oba limesa jednaka logično je da će se oba susresti na nultoj vrijednosti:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \geq 0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x -} = L' \leq 0$$

$$f'(x_0) = L = L' = 0$$

5.) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$$|(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)| = |z_1||z_2|$$

$$|x_1x_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) - y_1y_2| = |z_1||z_2|$$

$$\sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} = |z_1||z_2|$$

$$\sqrt{x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1y_2x_2y_1 + y_1^2x_2^2} = |z_1||z_2|$$

$$\sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2} = |z_1||z_2|$$

$$\sqrt{x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(y_2^2 + x_2^2)} = |z_1||z_2|$$

$$\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = |z_1||z_2|$$

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |z_1||z_2|$$

$$|z_1||z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{(x_1 + y_1 \imath)(x_2 + y_2 \imath)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{x_1x_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) - y_1y_2}$$

$$\overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$x_1x_2 - y_1y_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$x_1(x_2 - iy_2) - y_1(y_2 + ix_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$x_1(x_2 - iy_2) - y_1 i(-y_2 i + x_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$(x_2 - iy_2)(x_1 - y_1 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$(x_1 - y_1 i)(x_2 - iy_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

6.) Broj e se definira na slijedeći način:

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left[x=\frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$(e^x)' = e^x$

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

{supstitucija}

$e^{\Delta x}-1=t$

$e^{\Delta x}=t+1\ |ln$

$\Delta x = \ln(t+1)$

$\Delta x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$

$$(e^x)' = e^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} = e^x\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\ln(t+1)\right)^{-1} = e^x\lim_{t\to 0}\left(\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}$$

$$(e^x)' = e^x\left(\lim_{t\to 0}\left(\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}\right)\right)^{\lim\limits_{t\to 0}(-1)} = e^x\left(\ln\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1} = e^x(\ln e)^{-1} = e^x\cdot 1^{-1}$$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = ?$ uz uvjete $a>0, a\in\mathbb{R}$

$(a^x)' = a^x lna$

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

{supstitucija}

$a^{\Delta x}-1=t$

$a^{\Delta x}=t+1\ |ln$

$\Delta x\ln a = \ln(t+1)$

$\Delta x = \dfrac{\ln(t+1)}{\ln a}$

$\Delta x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$

$$(a^x)' = a^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}}$$

$$(a^x)' = a^x\lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{\ln(t+1)} = a^x\ln a\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}$$

$$(a^x)' = a^x\ln a\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\ln(t+1)\right)^{-1} = a^x\ln a\lim_{t\to 0}\left(\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \left(\lim_{t \to 0} \left(\ln (t+1)^{\frac{1}{t}} \right) \right)^{\lim\limits_{t \to 0}(-1)} = a^x \ln a \left(\ln \left(\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right) \right)^{-1}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \, (\ln e)^{-1} = a^x \ln a \cdot 1^{-1}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Ili ovako:
http://lavica.fesb.hr/mat1/predavanja/node106.html

7.) Funkcije se mogu zadavati:

a) **Tablično**

- Ako je domena konačan skup; a ako nije ostale vrijednosti se određuju približno.

b) **Analitičkim izrazom (pravilom) - eksplicitno**

- Ovdje se za domenu uzima područje definicije funkcije dok je kodomena skup svih realnih brojeva.

c) **Grafički**

- Graf funkcije je skup točaka:

$\mathcal{G}_f = \{(x, y) : y = f(x), x \in D_f\} \subseteq$

Čita se: „Graf funkcije $\mathcal{G}_f$ je skup svih elemenata(točaka) koje imaju svojstvo da je ipsilon funkcija od x, a x element iz područja definicije funkcije. Graf tj. skup svih točaka podskup je ili jednak ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.“

8.) Za definiciju derivacije vidi pod 3. Za geometrijsku interpretaciju derivacije vidi pod 2.

9.) Za Fermatov teorem vidi pod 4.