Predavanje 1: Elastičnost materijala, harmoničko titranje

1. **Ukratko objasnite sljedeće pojmove: periodično gibanje, harmoničko titranje, harmonička sila, harmonički oscilator, period, frekvencija, kružna frekvencija, amplituda, faza, početna faza. (obavezno)**

Periodično gibanje – gibanje koje se ponavlja u jednakim vremenskim intervalima.

Harmoničko titranje – titranja koje nastaje pod djelovanjem harmoničke sile koja nastoji tijelo vratiti u ravnotežni položaj.

Harmonička sila – sila koja je proporcionalna iznosu pomaka iz položaja ravnoteže a suprotnog je smjera. Vrijedi da je: $\vec{F} = -k\,\vec{s}$

gdje je: s [m]- pomak iz položaja ravnoteže,

F [N] - sila,

k [N/m] - pozitivna konstanta.

Harmonički oscilator – sustav koji titra pod utjecajem harmonične sile. Jednadžba gibanja harmoničnog oscilatora ima oblik: $m\frac{d^2s}{dt^2} + k\,s = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2\,s = 0$

Period (T [s]) – vremenski interval između dvije uzastopne jednake faze. Period titranja T je vrijeme potrebno da se ostvari jedan titraj, a s frekvencijom (f) period je povezan izrazom $T = \frac{1}{f}$.

Frekvencija (f [Hz]) – broj titranja u jedinici vremena.

Kružna frekvencija ω je veličinana koja je s periodom titranja (T) i frekvencijom (f) povezana izrazom:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad \text{[rad/s]}$$

Harmoničko titranje je opisano jednadžbom:

$$s = A\sin(\omega t + \varphi_o)$$

gdje je: A - amplituda titranja,

$(\omega t + \varphi_o)$ - **faza titranja**,

φ_o - **početna faza**.

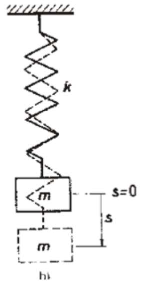
Amlituda A je maksimalni pomak od ravnotežnog položaja. To je pomak u trenutku kad se čestica zaustavi i promijeni smjer gibanja.

OSTALA PITANJA

2. Što je harmonički oscilator? Izvedite jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora, nađite rješenje jednadžbe te izraze za brzinu i akceleraciju. Grafički prikažite i usporedite ovisnost elongacije, brzine i akceleracije o vremenu.

Harmonički oscilator je sustav koji titra pod djelovanjem harmoničke sile. Harmonička sila je proporcionalna iznosu pomaka iz položaja ravnoteže a suprotna njegovu smjeru:

$$\vec{F} = -k\,\vec{s}$$



gdje je: s [m]- pomak iz položaja ravnoteže,

F [N] - sila,

k [N/m] - pozitivna konstanta.

Zbog trenja koje ćemo uzeti da je jako malo, pri takvom pravocrtnom gibanju amplituda s vremenom će sporo smanjivati. Tada titranje možemo smatrati neprigušenim.

Izvod jednadžbe gibanja: $\vec{F} = m\,\vec{a} = \mathrm{m}\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{s}}{d\,\mathrm{t}^2} = -k\,\vec{s} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{m}\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{d\,\mathrm{t}^2} + k\,\mathrm{s} = 0$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{d\,\mathrm{t}^2} + \omega^2\,\mathrm{s} = 0 \qquad \text{gdje je } \omega^2 = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}$$

$$\mathrm{s(t)} = \mathrm{a}\sin(\omega \mathrm{t}) + \mathrm{b}\cos(\omega \mathrm{t}),\ \ \mathrm{a} = \mathrm{A}\cos\varphi_0,,\mathrm{b} = \mathrm{A}\sin\varphi_0$$

$$s(t) = A\cos\varphi_0\sin(\omega t) + A\sin\varphi_0\cos(\omega t)$$

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Rješenje jednadžbe gibanja je: $s = A\sin(\omega \mathrm{t} + \varphi_\mathrm{o})$

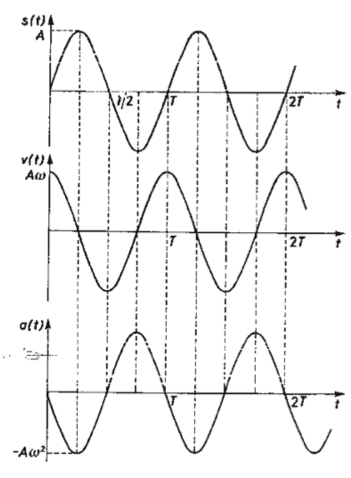
gdje je: A - amplituda titranja,

$(\omega \mathrm{t} + \varphi_\mathrm{o})$ - **faza titranja**,

φ_o - **početna faza**.

Derivirajući po vremenu iz elogancije dobivamo brzinu: $v = v(t) = \dfrac{d\,s}{d\,t} = A\ \omega\ \cos(\omega \mathrm{t} + \varphi_\mathrm{o})$,

i akceleraciju: $a = a(t) = \dfrac{d\,\mathrm{v}}{d\,t} = \dfrac{d^2 s}{d\,\mathrm{t}^2} = -A\ \omega^2\ \sin(\omega \mathrm{t} + \varphi_\mathrm{o}) = -\omega^2\,s$



Na slici je prikazana grafička ovisnost elongacije, brzine i akceleracije o vremenz za početnu fazu $\varphi_o = 0$.

Uz poznatu kružnu frekvenciju ω, amplitudu i početnu fazu možemo odrediti iz početnih uvjeta i izraza za brzinu i akceleraciju:

$$s(0) = s_o = A\sin\varphi_\mathrm{o} \qquad \text{i} \qquad v(0) = v_o = A\,\omega\cos\varphi_\mathrm{o}$$

$$\Rightarrow \quad tg\ \varphi_\mathrm{o} = \frac{s_o\,\omega}{\mathrm{v_o}} \qquad \Rightarrow \quad \varphi_\mathrm{o} = arc\ \mathrm{tg}\ \frac{s_o\,\omega}{\mathrm{v_o}} \quad , \quad A = \frac{s_o}{\sin\varphi_o}$$

3. **Izvedite ovisnost kinetičke, potencijalne i ukupne energije kod jednostavnog harmoničkog titranja?**

Kinetička energija harmoničkog oscilatora jednaka je kinetičkoj energiji materijalne točke mase *m* brzine *v*:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_o) = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_o) = \frac{kA^2}{2}\left[1 - \sin^2(\omega t + \varphi_o)\right] = \frac{1}{2}k(A^2 - s^2)$$

Kad na materijalnu točku mase m djeluje elastična sila F=-ks, njezina je potencijalna energija jednaka radu te sile pri pomaku točke za eloganciju *s* iz ravnotežnog položaja:

$$E_p = -W = -\int_0^s (-ks)ds = \frac{1}{2}ks^2$$

s obzirom da znamo da je $s = A\sin(\omega t + \varphi_o)$
slijedi:

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_o)$$

Ukupna energija je zbroj potencijalne i kinetičke energije:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2\left[\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)\right] = \frac{1}{2}kA^2$$

dakle ukupna energija je uvijek konstantna.

4. **Kako se iz početnih uvjeta mogu odrediti amplituda i početna faza?**

Iz pocetnih uvjeta:

$$s(0) = s_o = A\sin\varphi_o$$
$$v(0) = v_o = A\,\omega\cos\varphi_o$$

$$tg\,\varphi_o = \frac{s_o\,\omega}{v_o} \Rightarrow \varphi_o = arc\ \mathrm{tg}\ \frac{s_o\,\omega}{v_o}$$

$$s_o^{\,2} = A^2\sin^2\varphi_o$$
$$\frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2\cos^2\varphi_o$$

$$s_o^{\,2} + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2\sin^2\varphi_o + A^2\cos^2\varphi_o = A^2(\sin^2\varphi_o + \cos^2\varphi_o)$$

$$A^2 = s^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2}$$

Ako je npr. s_0 =0, tj. Ako je tijelo u početku u ravnotežnom položaju, onda je $\varphi_o = 0$ i $A = \frac{v(0)}{\omega}$.

Ako je v(0)=0, tj. ako je tijelo u početnom trenutku maksimalno udaljeno od ravnotežnog položaja, onda je A=s_0, a početna je faza $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$.

5. **Napišite jednadžbu gibanje prigušenog harmoničkog oscilatora?**

Prigušeno titranje se javlja kad uz harmoničku silu na tijelo djeluje i sila otpora sredstva, razmjerna iznosu brzine a suprotnog smjera od brzine. Tijelo obješeno na oprugu koja titra u tekućini je primjer prigušenog titranja. Na tijelo izmaknuto iz ravnotežnog položaja uz harmoničku silu djeluje i sila trenja.

$$\vec{F}_{tr} = -b\vec{v} = -b\frac{d\vec{s}}{dt} = -b\dot{x}$$

Dakle jednadžba gibanja za prigušeno titranje glasi:

$m\vec{a} = \vec{F}_{opr} + \vec{F}_{tr} \quad \rightarrow \quad m\dfrac{d^2 s}{dt^2} = -ks - b\dfrac{ds}{dt}$, drukcije zapisano: $m\ddot{x} = -kx - bv$

podijelimo li sve s m i prebacimo na jednu stranu:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = 0$$

$k/m = \omega_0^2$, gdje je ω_0 vlastita frekvencija i ovisi samo o građi oscilatora, a ne o okolini u kojoj se nalazi oscilator

$b/m = 2\delta$, gdje je δ faktor prigušenja **(***u prezentacijama ga oznacavaju s γ)**

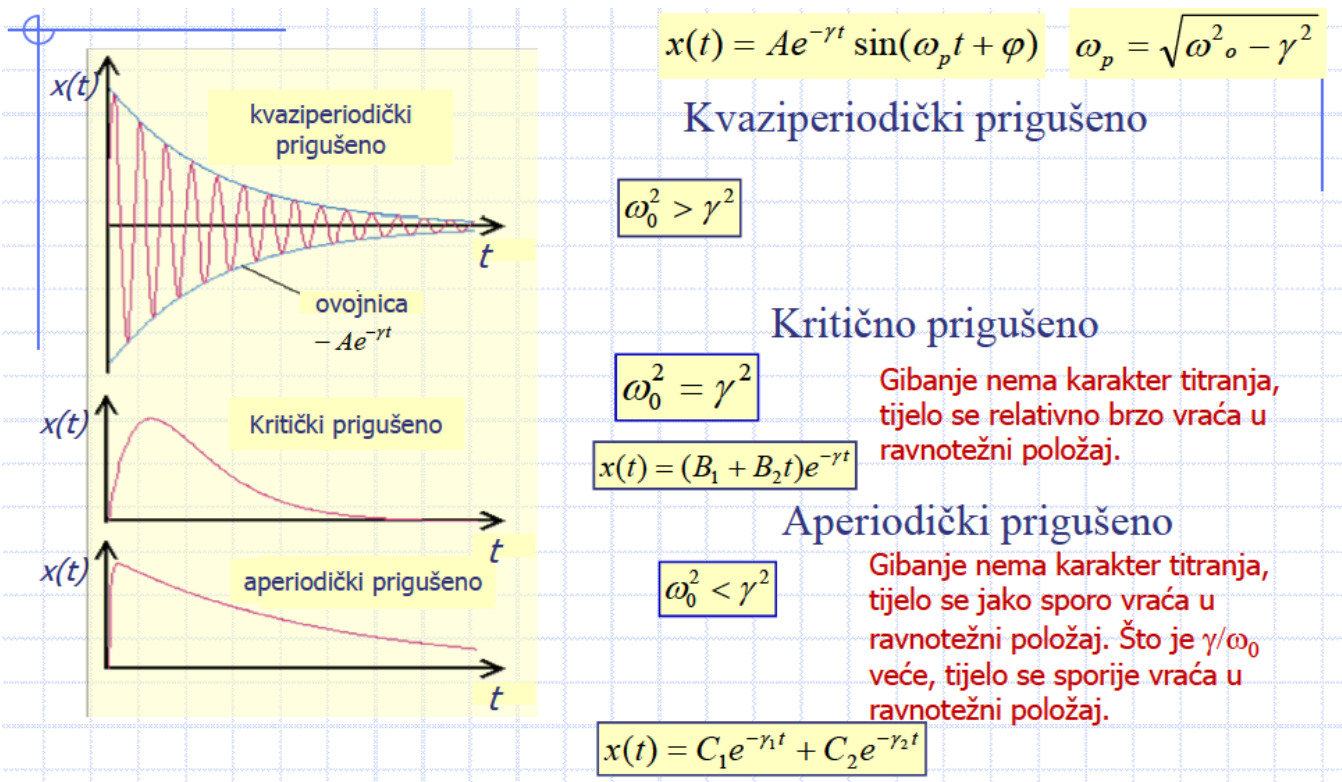
Dakle konačan zapis:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + 2\delta\dot{x} = 0$$

$$s(t) = a(t)\sin(\omega_p t + \varphi_0) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_p t + \varphi_0)$$

nakon sređivanja: $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - frekvencija prigušenih titraja

6. **Skicirajte ovisnot pomaka tijela o vremenu za različite razine prigušenja i uvjete za pojavu pojedinog tipa prigušenja?**



7. **Što je logaritamski dekrement a što faktor dobrote?**

Logaritam omjera amplitude nakon jednog perioda je logaritamski decrement.

$$\lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T$$

Period T i λ se lako dadu izmjeriti pa se tako može odrediti i faktor prigušenja: $\delta = \frac{\lambda}{T}$.

Faktor dobrote (Q faktor) se definira kao:

$$Q = 2\pi \frac{\text{srednja energija titrajnog sistema unutar jednog perioda}}{\text{gubitak energije unutar jednog perioda}}$$

$$2\pi \frac{\frac{1}{4}(a(t)^2 + a(t+T)^2)}{\frac{1}{2}(a(t)^2 - a(t+T)^2)} \approx \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_o}{2\gamma}$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\delta \mathrm{T}} = \frac{\omega_o}{2\,\delta}$$

Što je faktor dobrote veći to je prigušenje manje, za neprigušeni harmonički oscilator Q→∞.

Vremenska promjena ukupne mehaničke energije kod prigušenog titranja je: $\frac{dE}{dt} = -2m\gamma v^2$

8. **Kada nastaje prisilno titranje i kako glasi jednadžba gibanja prisilnog titranja?**

Prisilno titranje nastaje kada vanjska sila djeluje na sustav koji titra te se pomoću nje nadoknađuje energija izgubljena zbog trenja. (djeluju tri sile, vanjska, harmonička i sila otpora sredstva.)

Ako na prigušeni oscilator djeluje vanjska periodična sila oblika $F_v = F_o \sin\omega t$, drugi Newtonov zakon daje jednadžbu gibanja prisilnog harmoničkog oscilatora:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_o^2\, s = A_o \sin\omega t$$

gdje: $2\delta = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{m}}$, $\omega_o^2 = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}$, $\mathrm{A_o} = \frac{\mathrm{F_o}}{\mathrm{m}}$.

Razumno je pretpostaviti da čestica neće titrati ni vlastitom frekvencijom ni frekvencijom slobodnih titranja već frekvencijom vanjske pogonske sile.

Pri prisilnom titranju sustav počne titrati vlastitom frekvencijom ($\omega_p=\omega_o$) i potom nastoji slijediti titranje vanjskog oscilatora. Rezultanto je titranje superpozicija tih dvaju titranja.

Stacionarno rješenje jednadžbe prisilnog harmoničkog titranja:

$x(t) = A\sin(\omega t - \varphi)$; φ – fazni pomak između sila i elongacije

$$tg\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \qquad A = \frac{F_o}{m\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

Početna faza kod prisilnog titranja nije više proizvoljna konstanta već ovisi o frekvenciji vanjske sile, faktoru prigušenja i vlastitoj frekvenciji.

9. **Što je amplitudna, a što energijska rezonancija i pri kojim uvjetima se javlja amplitudna odnosno**

energijska rezonancija?

Amplituda je maksimalna kad je frekvencija vanjske sile jednaka $\omega_A = \sqrt{\omega_o^2 - 2\gamma^2}$ te se kaže da je nastupila amplitudna rezonancija.

Kod prisilnog titranja vanjska sila vrši rad i tako nadoknađuje izgubljenu mehaničku energiju zbog trenja. Vanjska sila će predavati maksimalnu snagu $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ titrajnom sustavu kad su vanjska sila i brzina u fazi, tj. kad sila i brzina u istom trenutku imaju maksimalne vrijednosti.

$$F = F_o \sin \omega t$$

$$v = \underbrace{A\omega}_{v_{max}} \cos(\omega t - \varphi)$$

Kad je $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ brzina i sila su u fazi

$$tg(-\frac{\pi}{2}) = \infty = \frac{2\gamma\omega}{\omega - \omega_o} \rightarrow \omega = \omega_o$$

$$v_{max} = \omega A = \frac{\omega F_o}{m\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

gornji izraz se moze napisati i u drugacijem obliku uz pomoc

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{i} \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

$$v_{max} = \frac{F_o}{\sqrt{(\frac{k}{\omega} - m\omega)^2 + b^2}}$$

- Kad je frekvencija pogonske sile jednaka vlastitoj frekvenciji $\omega_E = \omega_o$ nastupa energijska rezonancija, tada tijelo za vrijeme od jednog perioda primi maksimalnu energiju jednaku $E = \pi A(\omega_o) F_o$