Skupovi

1. Pojmovi: skup, element skupa ($\in$)

Skup je svaka množina (nekih) objekata koje nazivamo elementima ili članovima skupa.

Činjenicu da element x pripada skupu A bilježimo sa $x \in A$.

Činjenicu da element x ne pripada skupu A bilježimo sa $x \notin A$;

2. Definicija skupovne inkluzije ($\subseteq$ i $\subset$), jednakosti skupova (=). Što je partitivni skup (P(X), 2^X) skupa X, prazan skup ($\emptyset$), univerzalni skup?

Definicija: Za skup A kažemo da je **podskup** skupa B ako je A sadržan u B, tj. ako $\forall\ x \in X$ vrijedi tvrdnja: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Tada pišemo $A \subseteq B$.
Ako je $A \subseteq B$ onda kažemo da je B nadskup od A i pišemo $B \supseteq A$.

Znak $\subseteq$ zovemo znakom **inkluzije** (**uključivanja**).

Defnicija: Kažemo da je A pravi podskup od B ako vrijedi $A \subseteq B$ i $A \neq B$ i pišemo $A \subset B$.

Definicija: Kažemo da su skupovi A i B jednaki ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ i pišemo $A = B$.

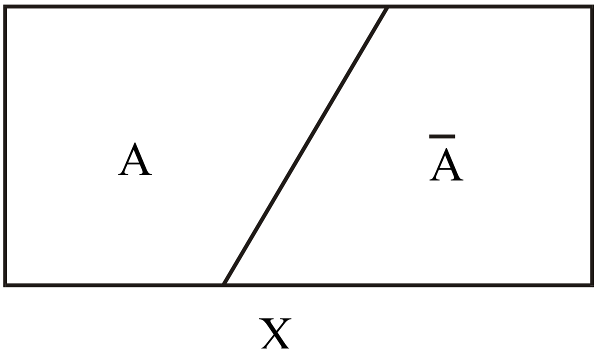
Partitivni skup skupa X je skup koji kao svoje elemente sadrži sve podskupove od X. Označavamo ga kao P(X) ili kao 2^X.
Ako skup X ima n elemenata, onda skup 2^X ima 2^n elemenata.

Prazan skup je skup koji ne sadrži niti jedan element. Oznaka za prazan skup je $\emptyset$.
Skup $\{ \emptyset \}$ sadrži jedan element, odnosno prazan skup. Vrijedi da je $\emptyset \subseteq A$ za svaki skup A.

Univerzalni skup X (ili U) je skup koji je prozivoljan, ali unaprijed zadan i svi skupovi koje promatramo su podskupovi tog skupa.

3. Definicija operacija: komplement ($\overline{\ }$), unija ($\cup$), presjek ($\cap$) i razlika skupova (\ ). Osnovna svojstva ovih operacija (citirati teorem i dokazati pojedina svojstva).

Definicija: Neka je A podskup univerzalnog skupa X. Skup $\overline{A} = \{ x \in X : x \notin A \}$ nazivamo **komplement** skupa A.



Definicija: Neka su skupovi A i B podskupovi univerzalnog skupa X.
Skup $A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ili } x \in B \}$ se zove unija skupova A i B.
Skup $A \cap B = \{ x : x \in A \text{ i } x \in B \}$ se zove presjek skupova A i B.
Skup $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ i } x \notin B \}$ se zove razlika skupova A i B.

Teorem: Neka su A, B, C $\in 2^X$. Tada vrijede ova pravila algebre skupova:

1. Idempotentnost unije i presjeka: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$
2. Asocijativnost: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Komutativnost: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
4. Distributivnost: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. De Morganove formule: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. $A \cup \emptyset = A$; $A \cap X = A$
7. $A \cup X = X$; $A \cap \emptyset = \emptyset$
8. Komplementiranost: $A \cup \overline{A} = X$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$
9. Involutivnost komplementiranja: $\overline{\overline{A}} = A$

4. Defnicija Kartezijevog produkta skupova ($\times$ i oznaka Π)

Defnicija: Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ neprazni skupovi, onda definiramo Kartezijev produkt

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

kao skup svih uređenih n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takvih da je $a_k \in A_k$ za sve $k = 1, 2, \ldots, n$. Taj se skup označava kraće:

$$\prod_{k=1}^{n} A_k$$

5. Defnicija ekvipotentnosti skupova (~). Dokazati da je relacija ekvipotentnosti refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Definicija: Kažemo da je skup A ekvipotentan (jednakobrojan) sa skupom B ako postoji bijekcija $f : A \to B$. Oznaka za ekvipotenciju skupova $A \sim B$:

Teorem: Ekvipotentnost ima ova osnovna svojstva:

a) refleksivnost: $A \sim A$ za svaki skup A ,

b) simetričnost: ako je $A \sim B$; onda je $B \sim A$,

c) tranzitivnost: ako je $A \sim B$ i $B \sim C$; onda je $A \sim C$.

Dokaz: a) Identiteta $id : A \to A$, $id(x) = x$, je bijekcija.

b) Ako je $f : A \to B$ bijekcija, onda je i inverzna funkcija $f^{-1} : B \to A$ također bijekcija.

c) Ako su funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$ bijekcije, onda je i njihova kompozicija $g \circ f : A \to C$ također bijekcija.

6. Definicija beskonačnih i konačnih skupova. Pojam kardinalnog broja skupa. Prebrojivi i neprebrojivi beskonačni skupovi. Alef nula, kontinuum.

Definicija: Za skup kažemo da je beskonačan ako je ekvipotentan sa svojim pravim podskupom. Za skup kažemo da je konačan ako nije beskonačan.

Za beskonačni skup A kažemo da je **prebrojiv** ako se skup njegovih elemenata može poredati u beskonačni niz A=$\{a_1, a_2, a_3, ...\}$. Primjer: skup prirodnih brojeva N.

Za beskonačni skup A kažemo da je **neprebrojiv** ako se skup njegovih elemenata ne može poredati u beskonačni niz. Primjer: skup realnih brojeva R.

Definicija: Za skupove A i B kažemo da imaju isti **kardinalni broj** ako su ekvipotentni. Pišemo $|A| = |B|$ (ili card A = card B).

Kardinalni broj konačnog skupa $\{1, 2, ..., n\}$ označavamo sa **n** i pišemo card $\{1, 2, ..., n\}$ = n.

Kardinalni broj prebrojivog beskonačnog skupa A označavamo sa $\aleph_0$ (**alef nula**) i pišemo card A = $\aleph_0$. Primjer: card N = $\aleph_0$. Dakle, svi prebrojivi bekonačni skupovi su ekvipotentni sa skupom prirodnih brojeva N.

Kardinalni broj skupa realnih brojeva R označavamo sa **c** i zovemo ga **kontinuum** i pišemo card R = | R | = c.

7. Prebrojivost skupova Z i Q

Teorem:
Skupovi cijelih brojeva Z i racionalnih brojeva Q su **prebrojivo beskonačni.**

To znači da se članovi tih skupova se mogu poredati u beskonačni niz. Svi prebrojivo beskonačni skupovi su ekvipotentni sa skupom prirodnih brojeva:

$$\text{card } Z = \text{card } Q = \aleph_0$$

Dokaz:

a) Ako su skupovi Z i N ekvipotentni, to znači da mora postojati funkcije $f : Z \to N$ koja je bijekcija.

Skup cijelih brojeva Z se može preslikati u skup prirodnih brojeva N pomoću funkcije $f : Z \to N$ definirane izrazom:

$$f(k) = \begin{cases} 2k & \text{za} \quad k > 0 \\ 2|k| + 1 & \text{za} \quad k \leq 0 \end{cases}$$

koja je bijekcija.

b) Za dokaz da je skup Q prebrojiv, dovoljno je pronaći injektivnu funkciju $f : Q \to N$. Takva funkcija se može lako konstruirati kodiranjem i ona glasi:

$$f(p\frac{m}{n}) = 2^{p+1}\, 3^m\, 5^n$$

gdje je $p = +1$ ili $p = -1$ predznak racionalnog broja,

$m \in N_0$ - brojnik, $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

$n \in N$ - nazivnik.

Pri tom su brojnik i nazivnik skraćeni do kraja, tj. nemaju zajedničkog djelitelja.

Iz osnovnog teorema aritmetike slijedi da je:

$$f(p_1 \frac{m_1}{n_1}) = f(p_2 \frac{m_2}{n_2}) \quad \Rightarrow \quad 2^{p_1+1}\, 3^{m_1}\, 5^{n_1} = 2^{p_2+1}\, 3^{m_2}\, 5^{n_2}$$

samo onda kad je:

$$p_1 = p_2 \,,\; m_1 = m_2 \,,\; n_1 = n_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 \frac{m_1}{n_1} = p_2 \frac{m_2}{n_2}$$

što znači da je funkcija f injektivna.

8. Neprebrojivost skupa R. Cantorov dijagonalni postupak.

Teorem (Cantor): Skup relnih brojeva R je neprebrojiv, tj. nije ekvipotentan sa skupom N. Dakle, vrijedi da je $\aleph_o$ < card R = c.

Dokaz (Cantorov dijagonalni postupak): Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup R prebrojiv. Prebrojivi skup se može poredati u beskonačni niz. Budući da je R ekvipotentan s intervalom (0, 1] , onda se i skup (0, 1] može poredati u beskonačni niz (0, 1] = { x_1, x_2, ... }. Prikažimo ove brojeve u decimalnom zapisu koji nije jednoznačan:

$$x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}...$$
$$x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}...$$
$$x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}...$$

gdje su a_{ij} znamenke između 0 i 9.

Odaberemo broj $b = 0.b_1b_2b_3...$ tako da je znamenka $b_n \in \{1, 2, ..., 9\}$ odabrana tako da je $b_n \neq a_{nn}$. Tada je:

$b \neq x_1$ jer se ne podudaraju u prvoj decimali,

$b \neq x_2$ jer se ne podudaraju u drugoj decimali, itd.

Dakle, $b \notin$ { x_1, x_2, ... }. To je kontradikcija jer decimalni prikaz od b pokazuje da je $b \in$ { x_1, x_2, ... }. Time je teorem dokazan.

9. Defnicija algebarskog broja i defnicija transcedentnog broja

Defnicija: Za realan broj a kažemo da je algebarski broj ako postoji polinom P(x) s cjelobrojnim koefcijentima takav ada je $P(a) = 0$.

Propozicija: Skup svih algebarskih brojeva je prebrojiv.

Defnicija: Realni brojevi koji nisu algebarski nazivaju se transcedentni.