Numerička analiza – kolokvij 2

1. Napišite definiciju konvergentnog niza iteracija.

Niz iteracija $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema točki α s redom konvergencije $p, p \geq 1$, ako vrijedi
$$|\alpha - x_n| \leq c|\alpha - x_{n-1}|^p \text{ }, n \in \mathbb{N}$$

za neki $c > 0$. Ako je $p = 1$, onda kažemo da niz konvergira linearno prema α. U tom slučaju je nužno da je $c < 1$ i obično se c naziva faktorom linearne konvergencije.

2. Kako dobijemo metodu bisekcije i koji uvjeti moraju biti ispunjeni?

Osnovna pretpostavka za primjenu algoritma polovljenja je neprekidnost funkcije f na intervalu $[a, b]$ uz dodatni uvjet

$$f(a)\,f(b) < 0.$$

Ovaj uvjet nam osigurava da funkcija f ima na intervalu $[a, b]$ barem jednu nultočku.

Algoritam polovljenja je vrlo jednostavan: označimo s α prvu nultočku funkcije f i definiramo

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Neka je $n \geq 1$. U n-tom koraku algoritma konstruiramo interval $[a_n, b_n]$ komu je duljina polovina duljine prethodnog intervala $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, ali tako da nultočka ostane unutar intervala $[a_n, b_n]$. Konstrukcija intervala $[a_n, b_n]$ sastoji se u raspolavljanju intervala $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ točkom x_{n-1} i to tako da je

$$\begin{aligned} a_n &:= x_{n-1}, \quad b_n := b_{n-1}, \quad f(a_{n-1})\,f(x_{n-1}) > 0, \\ a_n &:= a_{n-1}, \quad b_n := x_{n-1}, \quad f(a_{n-1})\,f(x_{n-1}) < 0. \end{aligned}$$

Postupak zaustavljamo kad je ispunjen uvjet

$$|\alpha - x_n| \leq \varepsilon.$$

Te mora biti postavljen zahtjev:
$$b_n - x_n \leq \varepsilon.$$

3. Opiši kako se konstruira iterativna formula metode regula falsi.

Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$ i da vrijedi:
$$f(a)f(b) < 0.$$

Aproksimiramo funkciju f pravcem p koji prolazi točkama $T_1\big(a, f(a)\big)$ i $T_2\big(b, f(b)\big)$. Njegova je jednadžba:
$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

odnosno:

$$y - f(b) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - b)$$

Nultočku α funkcije f možemo aproksimirati nultočkom tog pravca, nazovimo je x_0. Nakon toga pomaknemo ili točku a ili točku b u x_0, no tako da nultočka α ostane unutar novodobivenog intervala. Postupak ponavljamo sve dok ne dobijemo željenu točnost ε. Točka x_0 se dobije jednostavno iz jednadžbe pravca p kao:
$$x_0 = b - f(b)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} = a - f(a)\frac{a - b}{f(a) - f(b)}$$

4. Kako glasi iteracijska formula metode sekante?

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

5. Iskaži teorem koji daje red konvergencije metode sekante.

***Teorem**:* Neka su f, f' i f'' neprekidne na nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pri čemu I sadrži jednostruku nultočku α. Ako su početne iteracije x_0 i x_1 izabrane dovoljno blizu nultočke α, onda niz iteracije $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergira prema α s redom konvergencije p, gdje je

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

6. Izvedi metodu tangente (Newtonova metoda).

Ako graf funkcije f aproksimiramo tangentom umjesto sekantom, dobili smo metodu tangente ili Newtonovu metodu.
Pretpostavimo da je zadana početna točka x_0. Ideja metode je povući tangentu u točki $T_0(x_0, f(x_0))$ i definirati novu aproksimaciju x_1 u točki gdje tangenta siječe os x. Općenito bi to išlo ovako: u točki x_n napiše je jednadžba tangente

$$y - f(x_n) = f^{'}(x_n)(x - x_n).$$

Nultočka joj je

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

pa stavimo $x_{n+1} \coloneqq x$.

7. Iskaži teorem koji daje red konvergencije metode tangente.

Teorem: Neka su f, f' i f'' neprekidne na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pri čemu I sadrži jednostruku nultočku α. Ako je početna iteracija x_0 izabrana dovoljno blizu nultočke α, onda niz iteracije $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergira prema α s redom konvergencije $p = 2$. Štoviše, vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f^{''}(\alpha)}{2f^{'}(\alpha)}$$

8. Iskaži teorem koji daje nužne uvjete globalne kovergencije metode tangente.

Teorem: Neka su f, f' i f'' neprekidne na segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ pri čemu je $f(a)\,f(b) < 0$, i neka f' i f'' nemaju nultočke u $[a, b]$ (tj. imaju stalan predznak na $[a, b]$). Ako polazna iteracija $x_0 \in [a, b]$ zadovoljava uvjet $f(x_0)\,f''(x_0) > 0$, onda niz iteracija dobiven Newtonovom metodom konvergira prema (jedinstvenoj jednostrukoj) nultočki α funkcije f.

9. Metoda jednostavne iteracije i pod kojim uvjetima ima rješenje?

Neka je $g : D \to \mathbb{R}$ neka zadana funkcija. Pretpostavimo da tražimo rješenje jednadžbe

$$x = g(x)$$

koje ćemo označiti s α. Definirajmo **jednostavnu iteracijsku funkciju** (jednostavnu u smislu da "pamti" samo jednu prethodnu iteraciju) s

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

pri čemu je neki $x_0 \in D$ na neki način odabrana prva iteracija (početna aproksimacija za α). Primijetimo da Newtonova metoda pripada klasi jednostavnih iteracija jer je u tom slučaju funkcija g definirana s

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Točke za koje vrijedi $x = g(x)$ nazivaju se **čvrstim** (**fiksnim**) točkama funkcije g. Mis mo najčešće zainteresirani za rješavanje jednadžbe oblika $f(x) = 0$, no lako je uočiti da se iz problema $f(x) = 0$ jednostavno prelazi na problem $x = g(x)$.

TEOREM. Neka je funkcija g neprekidno derivabilna na (a, b), neka je ispunjeno $g([a, b]) \subseteq [a, b]$, te neka je

$$\lambda = \max_{x \in (a,b)} |g'(x)| < 1.$$

Tada vrijedi:

1. Jednadžba $x = g(x)$ ima točno jedno rješenje $\alpha \in [a, b]$.
2. Za proizvoljni $x_0 \in [a, b]$ niz jednostavnih iteracija $x_n = g(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira prema α i vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \lambda^n |\alpha - x_0|, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(\alpha).$$

10. Napiši opću integracijsku formulu i definiraj sve što se javlja u njoj.

Opća integracijska formula ima oblik

$$I(f) = I_m(f) + E_m(f)$$

pri čemu je za $m \in \mathbb{N}_0$ prirodni broj, $m + 1$ broj korištenih točaka, $I_m(f)$ pripadna aproksimacija integrala, a $E_m(f)$ pritom napravljena greška. Ovakve formule za približu integraciju funkcija jedne varijable često se zovu i kvadraturne formule (zbog interpretacije određenog integrala kao površine ispod krivulje).

11. Definiraj red egzaktnosti kvadraturne formule.

Ako koristimo samo funkcijske vrijednosti za aproksimaciju integrala, onda aproksimacija $I_m(f)$ ima oblik

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f\left(x_k^{(m)}\right)$$

pri čemu je broj m unaprijed zadan. Koeficijenti$x_k^{(m)}$ zovu se čvorovi integracije, a realni brojevi $w_k^{(m)}$ težinski koeficijenti. Kažemo da je kvadraturna formula egzaktna za polinome $p(x)$ stupnja $\leq m$ ako je u formuli

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + R(f)$$

ostatak (greška) $R(p) = 0$, tj. ako vrijedi

$$\int_a^b p(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i p(x_i)$$

za sve polinome stupnja $\leq m$. Broj m izražava preciznost te formule.

12. Definiraj Newtonov interpolacijski polinom.

Newtonov interpolacijski polinom koji interpolira funkciju:

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

u $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, točaka $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ je oblika:

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2]$$

$$+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})\, f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

...

$f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ su oznake za simetrične razlike reda n.

13. Definiraj što su to Newton-Cotesove integracijske formule.

Skup formula za numeričku integraciju kod kojih su čvorovi integracije fiksirani, koje imaju ekvidistantne čvorove s tim da su prvi i posljednji uvijek krajevi segmenta $[a, b]$ i one su netežinske. Osnovni oblik ovakvih formula je:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(x_0 + kh_m)$$

14. Izvedi trapeznu formulu i odredi njen stupanj egzaktnosti.

Trapezna formula je najjednostavnija zatvorena Newton-Cotesova koja se dobije kada je $m = 1$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_1\, f(x) = \omega_0^{(1)} f(a) + \omega_1^{(1)} f(b)$$

Za $k = 0$ i $k = 1$ imamo

$$\int_a^b x^0 dx = b - a = \omega_0 \cdot 1 + \omega_1 \cdot 1$$

$$\int_a^b x^1 dx = \frac{b^2 - a^2}{2} = \omega_0 \cdot a + \omega_1 \cdot b$$

Rješavanjem ovog kvadratnog sustava imamo:

$$\omega_0 = \omega_1 = \frac{b - a}{2} = \frac{h}{2}$$

Dakle, integracijska formula dobivena iz egzaktnosti na svim polinomima stupnja najviše 1 glasi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_1(f) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a) = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$$

Stupanj egzaktnosti trapezne formule je 1.

15. Izvedi Simpsonovu formulu i odredi joj stupanj egzaktnosti.

Simpsonova formula je zatvorena Newton-Cotesova koja se dobije kada je $m = 2$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_2(f) = \omega_0^{(2)} f(x_0) + \omega_1^{(2)} f(x_0 + h_2) + \omega_2^{(2)} f(x_0 + 2h_2)$$

pri čemu je:

$$h \coloneqq h_2 = \frac{b-a}{2}$$

Računamo koeficijente ω_k:

$$b - a = \int_a^b x^0 dx = \omega_0 \cdot 1 + \omega_1 \cdot 1 + \omega_2 \cdot 1$$

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x^1 dx = \omega_0 \cdot a + \omega_1 \cdot \frac{a+b}{2} + \omega_2 \cdot b$$

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx = \omega_0 \cdot a^2 + \omega_1 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \omega_2 \cdot b^2$$

Rješavanjem ovog sustava dobijemo:

$$\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6}(b-a) = \frac{1}{3}h, \qquad \omega_1 = \frac{4}{6}(b-a) = \frac{4}{6}h$$

integralna formula glasi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Stupanj egzaktnosti Simpsonove formule je 3.

16. Definiraj produljene formule.

Ako podizanjem reda integracijske formule ne povećavamo točnost, već je u nekim slučajevima i drastično smanjujemo, tada je potrebno da u cilju smanjenja greške umjesto da podižemo red formule, podijelimo područje integracije na više dijelova (recimo, jednake duljine), a zatim na svakom od njih primijenimo odgovarajuću integracijsku formulu niskog reda. Tako dobivene formule zovu se produljene formule.

17. Izvedi mid-point (srednja točka) formulu i odredi joj stupanj egzaktnosti.

Mid-point formula ili formula srednje točke je najpoznatija i najkorištenija otvorena Newton-Cotesova formula koja se dobije za $m = 0$.
Stavimo li:

$$x_{-1} \coloneqq a, \;\; x_{m+1} \coloneqq b, \;\; h_m = \frac{b-a}{m+2}$$

onda otvorene Newton-Cotesove formule imaju oblik:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_m f(x) = \sum_{k=0}^{m} \omega_k^{(m)} f(x_0 + kh_m)$$

Tražimo $\omega_0 \coloneqq \omega_0^{(0)}$ takav da je formula

$$\int_a^b f(x)dx = \omega_0 f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

egzaktna na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja, u ovom slučaju stupnja jedan. Dobijemo:

$$b - a = \int_a^b 1dx = \omega_0 \qquad\qquad \int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

18. Iskaži osnovni teorem za konstrukciju težinskih integracijskih formula.

TEOREM. Ako je

$$I_w(f) = \int_a^b w(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

Riemannov integral na konačnoj domeni $[a, b]$ i ako je $\hat{f}$ bilo koja druga funkcija za koju postoji $I_w\left(\hat{f}\right)$, onda vrijedi ocjena

$$\left|I_w(f) - I_w\left(\hat{f}\right)\right| \leq \|w\|_1 \left\|f - \hat{f}\right\|_\infty .$$

19. Definiraj Gaussove integracijske formule i navedi neke poznate posebne slučajeve.

Gaussove integracijske formule su oblika

$$I(f) = \int_a^b w(x)\, f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

pri čemu točke integracije x_1 … x_n nisu unaprijed zadane, nego se izračunaju tako da greška takve formule bude što manja.

$$w_i = \int_a^b w(x)\, l_i(x)\, \mathrm{d}x, \quad i = 1, \ldots, n,$$

20. Definiraj ortogonalne funkcije.

Kažemo da su funkcije $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ortogonalne na intervalu $(a, b) \subset I$ s obzirom na težinsku funkciju $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ako vrijedi

$$\int_a^b w(x)\, f(x)\, g(x) dx = 0$$

Pogledati (koristit će se za zadatke):

LEMA. Ako je polinom ω zadan s

$$\omega(x) := (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

ortogonalan s težinom w na sve polinome nižeg stupnja, tj. ako vrijedi

$$\int_a^b w(x)\, \omega(x)\, x^i \mathrm{d}x = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

onda su svi koeficijenti B_i jednaki nula.

21. Definiraj Obične Dif. Jed. (ODJ) i kakve razlikujemo s obzirom na uvjete.

Obične diferencijalne jednadžbe (ODJ) su jednadžbe oblika

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \qquad x \in (a, b)$$

uz dodatni početni ili rubni uvjet. Ako je uz jednadžbu zadan **početni uvjet** $y(a) = y_0$, onda govorimo o inicijalnom (**početnom) problemu.** Ako je umjesto početnog uvjeta uz jednadžbu zadan rubni uvjet $r\big(y(a), y(b)\big) = 0$, pri čemu je r neka zadana funkcija, onda govorimo o **rubnom problemu.**

22. Izvedi Eulerovu metodu i kaži kojeg je reda.

Eulerova metoda je metoda za rješavanje inicijalnog problema oblika

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big),\ \ y(a) = y_0,\ \ x \in [a, b].$$

Metoda se zasniva na ideji da se y', u gornjoj jednadžbi, zamijeni podijeljenom razlikom

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

Dobijemo:

$$y(x+h) \approx y(x) + hf\big(x, y(x)\big) \qquad (*)$$

Eulerova metoda kraće se zapisuje rekurzijom:

$$y_{i+1} \approx y_1 + hf(x_i, y_i) \qquad i = 0, \dots, n-1$$

Eulerova metoda je reda 2.

23. Definiraj općenito što su to jednokoračne metode za rješavanje ODJ sa zadanim početnim uvjetima.

Metode oblika:

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i, h; f), \quad i = 0,1,2, \dots n-1$$

Nazivamo **jednokoračnim metodama** jer za aproksimaciju y_{i+1} koriste samo vrijednosti y_i , tj. u jednom koraku dobijemo iz y_i slijedeću aproksimaciju y_{i+1}. Funkcija Φ zove se **funkcija prirasta**, a različiti izbori te funkcije definiraju različite metode.

24. Definirajte lokalnu pogrešku diskretizacije koja nastaje prilikom rješavanja ODJ.

Pogrešku aproksimacije

$$y(x+h) \approx y(x) + h\Phi(x, y(x), h; f),$$

danu s

$$\gamma(x; h) = \vartriangle(x; h) - \Phi(x, y(x), h)$$

pri čemu je y točno rješenje jednadžbe i

$$\vartriangle(x; h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

nazivamo **lokalnom pogreškom diskretizacije**.

25. Definirajte red konzistencije jednokoračne metode za rješavanje ODJ.

Za jednokoračnu metodu kažemo da je reda (konzistencije) p ako je :

$$\gamma(x; h) = \mathcal{O}(h^p)$$

Što je veći p metoda je točnija, a to postižemo odgovarajućim odabirom funkcije Φ.

26. Definirajte Runge – Kuttine metode za rješavanje ODJ.

Najpoznatije jednokoračne metode su Runge – Kuttine metode kod kojih je funkcija prirasta Φ:

$$\Phi(x,y,h) = \sum_{j=1}^{r} \omega_j k_j(x,y,h)$$

gdje su funkcije k_j zadane s :

$$k_j(x,y,h) = f\left(x + c_j h, y + h\sum_{l=1}^{r} \alpha_{jl} k_l(x,y,h)\right), \quad j = 1, \dots, r$$

Broj r nazivamo brojem stadija RK metode, i on označava koliko puta moramo izvrednjavati funkciju f u svakom koraku metode. Različiti izbor koeficijenata ω_j, c_j i α_{jl} definira različite RK metode.Kako se funkcije k_j javljaju s obje strane gornje jednadžbe, onda kažemo da se radi implicitnim RK metodama. Koeficijenti ω_j, c_j i α_{jl} se biraju tako da red metode bude što je moguće veći. U slučaju $\alpha_{jl} = 0, l \geq j$ imamo eksplicitne RK metode.

27. Zašto su Runge – Kuttine metode za rješavanje ODJ najpopularnije?

Dakle, vidimo da (nakon sređivanja) imamo 8 jednadžbi i 10 nepoznatih koeficijenata. Naglasimo sljedeće: ako želimo metodu reda 1, onda treba biti ispunjen samo uvjet $(R1)$, ako želimo metodu reda 2, onda treba biti ispunjen i uvjet $(R2)$, ako želimo metodu reda 3, onda trebaju biti ispunjeni i uvjeti $(R3a)$ i $(R3b)$ i tako dalje. U najboljem slučaju imat ćemo osam jednadžbi, što u konačnici znači najmanje dva slobodna parametra u rješenju.
Napomenimo da metoda s četiri stadija (RK-4 metoda) može biti **najviše reda 4**: dva stupnja slobode iz sustava jednadžbi ne mogu se iskoristiti tako da se red metode podigne na 5. Općenito, za metode s jednim, dva, tri ili četiri stadija red metode u najboljem slučaju odgovara broju stadija. Za metode s 5,6 i 7 stadija najveći mogući red je redom 4, 5 ili 6, dok je za metode s 8 ili više stadija najveći mogući red barem za dva manji od broja stadija. **Upravo to je razlog što su metode s četiri stadija najpopularnije**. Naime, da bismo povećali red za jedan (s 4 na 5) moramo povećati broj stadija za dva (s 4 na 6), a to znatno uvećava složenost metode.

28. Kada je RK metoda sa s stadija reda konzistencije barem 1?

Runge-Kuttina metoda sa s stadija ima red konzistencije barem 1 ako i samo ako vrijedi:

$$\sum_{j=1}^{s} \omega_j = 1$$

29. Koji izbor koeficijenata eksplicitne RK metode daje najbolji red konzistencije?

Najbolji red konzistencije daje uobičajeni izbor koeficijenata:

$\alpha_{jl} = 0$, za $l \geq k$

k_j možemo izračunati preko $k_1, \dots, k_{j-1}$

$$c_j = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{jl}$$