1. Adja meg a normált tér fogálmát!

- Legyen X ≠ ∅ egy lineáris tér R-felett és ‖.‖ : X → R olyan függvény (ún. norma), amelyre minden x, y ∈ X és λ ∈ R esetén igaz, hogy
  - ‖x‖ ≥ 0 és ‖x‖ = 0 ⇐⇒ x = 0,
  - ‖λx‖ = |λ| ‖x‖ (abszolút homogén),
  - ‖x + y‖ ≤ ‖x‖ + ‖y‖ (szubadditív).
- Ekkor az (X, ‖.‖) együttest normált térnek nevezzük. Ugyanakkor azt mondjuk, hogy ‖x‖ az x ∈ X elem normája.

2. Adjon meg három különböző normát az $\mathbb{R}^n$ lineáris téren!

- *Az* $\mathbb{R}^n$* lineáris téren több norma is értelmezhető. A legfontosabbak a következők:
  - Euklideszi norma: $\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
  - $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$
  - $\|x\|_\infty := \max\{|x_k|\,|k = 1, 2, 3, ..., n\} = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$

3. Adja meg a környezet fogalmát az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben!

- Egy a ∈ $\mathbb{R}^n$ pont r (> 0) sugarú környezetén a

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$

  halmazt értjük.
  n = 1 esetén Kr(a) az a pontra szimmetrikus (a − r, a + r) nyílt intervallum. Ha n = 2, akkor Kr(a) az a pont körüli r sugarú nyílt körlap, n = 3 esetén pedig az a pont körüli r sugarú nyílt gömb. A „nyílt gömb” elnevezést használjuk akkor is, ha n > 3.

4. Adja meg a torlódási pont fogalmát az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben!

- Tegyük fel, hogy A az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térnek egy nem üres részhalmaza.
- Ekkor a ∈ $\mathbb{R}^n$ az A halmaz torlódási pontja (jelekkel a ∈ A′), ha ∀K(a): K(a) ∩ A végtelen halmaz, azaz az a pont minden környezete végtelen sok A-beli pontot tartalmaz.

5. Adja meg a belső pont fogalmát az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben!

- Tegyük fel, hogy A az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térnek egy nem üres részhalmaza.
- Ekkor:a ∈ A az A halmaz belső pontja (jelekkel a ∈ int A), ha ∃K(a): K(a) ⊂ A,

6. Mikor mondjuk, hogy egy sorozat konvergens az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben?
   Legyen $1 \leq n \in N$. Azt mondjuk, hogy az R^n euklideszi tér $(x_k) : N \to R^n$ sorozata konvergens, ha

$$\exists A \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k > k_0 : \|x_k - A\| < \epsilon.$$

7. Milyen kapcsolat van egy sorozat konvergenciája és a hátárértéktől való távolsága között?
8. Milyen kapcsolat van egy sorozat konvergenciája és a koordinátasorozatainak konvergenciája között?
   Legyen $n \in N^+$. Egy R^n -beli sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a sorozat minden koordinátasorozata konvergens, és a határértéke a határvektor megfelelő koordinátája, azaz

$$\mathbb{R}^n \ni x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)}) \to A = (A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}), \quad \text{ha } k \to +\infty$$

   pontosan akkor igaz, ha minden i = 1, 2, . . . , n koordinátára

$$x_k^{(i)} \to A^{(i)}, \quad \text{ha } k \to +\infty.$$

9. Mit állít a Cauchy-féle konvergenciakritérium az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térbeli sorozatokra?
   Legyen $n \in N^+$. Az R^n euklideszi tér (x_k) sorozata akkor és csak akkor konvergens, ha (x_k) Cauchy-sorozat, azaz

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k, l > k_0 : \|x_k - x_l\| < \epsilon.$$

10. Mit állít a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térre?
    Az $R^n(n \in N^+)$ euklideszi térben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.