1. Hogyan értelmezzük egy kétváltozós valós érték függvény grakonját?

   Az ilyen függvényeket a

   $\mathrm{Gr}_f := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f\}$

   térbeli halmazzal, az ún. függvény grafikonjával tudjuk ábrázolni, ami egy térbeli felületet határoz meg.

2. Mikor mondjuk, hogy egy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény folytonos egy adott pontban?

   Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}^+$)függvény **folytonos az a ∈ D_f pontban**,(jelben **f ∈ C{a}**), ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad \|x - a\| < \delta : \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

3. Igazolja, hogy az $\mathbb{R}^n$ térben értelmezett norma egy folytonos függvény!

   Nem nehéz igazolni, hogy a **norma folytonos függvény**. Ez azért igaz, mert ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|$, akkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta := \varepsilon > 0$ úgy, hogy $\forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén, ha $\|x - a\| < \delta$, akkor

   $\|f(x) - f(a)\| = |\ \|x\| - \|a\|\ | \le \|x - a\| < \delta = \varepsilon$

4. Mit mond a folytonosságra vonatkozó átviteli elv $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények esetére?

   Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}^+$) és $a \in D_f$. Ekkor

   $f \in C(a) \Leftrightarrow \forall (x_k) : \mathbb{N} \to D_f, \quad \lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = f(a).$

5. Mondja ki az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt többváltozós függvények esetére!

   Ha $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}^+$), $g \in C\{a\}$ és $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ ($m, p \in \mathbb{N}^+$), $f \in C\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in C\{a\}$.

6. Milyen kapcsolat van egy függvény folytonossága és a koordinátafüggvényei folytonossága között?

   Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}^+$) és $a \in D_f$. Ekkor

   $f \in C(a) \Leftrightarrow f_i \in C(a) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

   ahol f_i: $D_f \to \mathbb{R}$ az f függvény koordinátafüggvényei.

7. Fogalmazza a Weierstrass tételét többváltozós függvények esetére!

   Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tegyük fel, hogy

- $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
- Df korlátos és zárt halmaz az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben,
- $f \in C$.

  Ekkor az f függvénynek vannak abszolút szélsőértékhelyei, azaz

  $\exists x_1 \in Df, \forall x \in Df : f(x) \le f(x_1)$ (ahol x_1 abszolút maximumhely),

  $\exists x_2 \in Df, \forall x \in Df : f(x_2) \le f(x)$ (a x_2 abszolút minimumhely).

8. Mikor mondjuk, hogy egy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvénynek van pontbeli határértéke?

   Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ függvénynek az $a \in D'_f$ pontban van határértéke, ha $\exists A \in \mathbb{R}^m$, hogy

   $$\forall \varepsilon > 0 - hoz \quad \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, 0 < \|x - a\| < \delta : \|f(x) - A\| < \varepsilon.$$

   Ekkor A-t a **függvény a pontbeli határértékének nevezzük**, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

   $$\lim_a f = A, \quad \lim_{x\to a} f(x) = A, \quad f(x) \to A, \quad \text{ha } x \to a.$$

9. Mit mond a határértékre vonatkozó átviteli elv $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények esetére?

   Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in D'_f$. Ekkor

   $$\lim_a f = A \in \mathbb{R}^m \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_k) : \mathbb{N} \to D_f \setminus \{a\}, \quad \lim_{k\to+\infty} (x_k) = a \quad \text{esetén} \quad \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = A.$$

10. Adjon példát olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre, amelynek nincs határértéke egy megadott pontban!

    $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha } (x, y) \ne (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

    függvénynek nincs határértéke a (0, 0) pontban.