

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen und Definitionen	2
1.1	Vektorräume	2
1.2	Korrelation deterministischer Signale	2
1.3	Skalarprodukt (Inneres Produkt)	2
1.4	Energiesignale, Leistungssignale	2
1.5	Winkelfunktionen	3
1.6	Additionstheoreme	3
1.7	Elementare Funktionen	3
1.8	Operationen mittels Dirac-Impuls	4
1.9	Elementare Operationen für Funktionen	4
1.10	Faltung	4
1.11	Lineare Systeme	5
1.12	Fourierreihe zur Darstellung periodischer Signale	6
1.13	III-Funktion zur Darstellung periodischer Signale	6
1.14	Rechenregeln für Fouriertransformationen	7
1.15	Eigenschaften der Fouriertransformation	7
1.16	Abtasttheorem & Rekonstruktion	8
1.17	Wahrscheinlichkeitsrechnung	9
1.18	Analysis, Lineare Algebra Regeln	9
2	Modulationen	10
2.1	Amplitudenmodulation	10
2.2	Winkelmodulation	10
2.3	Bandbreite	10
2.4	PAM - Pulsamplitudenmodulation	11
2.5	PSK - Phase-Shift-Keying	11
2.6	QAM - Quadraturamplitudenmodulation	12
2.7	Orthogonale Entwicklung von Signalen & FSK	12
2.8	Kreuzkorrelation	13
2.9	Simplex-Signale	13
2.10	Signale auf Basis binärer Codes	13
3	Empfänger	13
3.1	Envelope Detektor (Hüllkurvendetektor)	13
3.2	AWGN-Kanäle	14
3.3	Signal Demodulator	14
3.4	Signal Detektor	15
4	Diskrete Signale	16
4.1	diskrete Funktionen	16
4.2	z-Transformation	17
4.3	Diskrete Faltung	18
4.4	Diskrete LTI-Systeme	18
4.5	Stabilität	19
4.6	IIR und FIR-Systeme	19

1 Mathematische Grundlagen und Defintionen

1.1 Vektorräume

Ein Vektorraum erfüllt folgende **Eigenschaften**

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \\ \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a} \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{V} \\ \vec{a} + -\vec{a} &= \vec{0} \quad \text{mit } -\vec{a} \in \mathbb{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \cdot \vec{a} &= \vec{a} \\ \lambda(\mu \vec{a}) &= (\lambda\mu)\vec{a} \\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \\ \vec{a}(\lambda + \mu) &= \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}\end{aligned}$$

Unterraumkriterium: $\vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{U}, \quad \lambda \vec{a} \in \mathbb{U} \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{U}, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Linear Unabhängig mit $n \in \mathbb{N}$

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t)$$

Linearkombination mit $n \in \mathbb{N}$

$$\vec{0} = a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \dots + a_n \vec{v_n}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Zudem gibt es noch eine **Basis**, mit der jeder Vektor als Linearkombination von Basisvektotren eindeutig dargestellt werden kann.

1. Beispiel: Zeige das die periodischen Fkt. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Periodenlänge T ein Vektorraum ist.

$$\begin{aligned}f_1, f_2 \in \mathbb{U} &\rightarrow (f_1 + f_2)(t + T) \\ &= \underbrace{f_1(t + T)}_{f_1(t)} + \underbrace{f_2(t + T)}_{f_2(t)} \\ &= f_1(t) + f_2(t) = (f_1 + f_2)(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_1 \in \mathbb{U} \lambda \in \mathbb{K} &\rightarrow (\lambda f)(t + T) \\ &= \underbrace{\lambda f(t + T)}_{\lambda f(t)} \\ &= \lambda f(t) = (\lambda f)(t)\end{aligned}$$

2. Beispiel: Darstellung durch einzelne Basisvektoren
Quadratische Funktion
 $f(t) = at^2 + bt + c$
Vektorraum der Polynome

$$\begin{aligned}Basis : f_1(t) &= t^2 \\ f_2(t) &= t^1 \\ f_3(t) &= t^0\end{aligned}$$

$$Basis : f_n(t) = t^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

Achtung! Solange die Summe endlich ist, ist es ein Polynom. Wenn die Summe unendlich ist, ist es eine Reihe: $1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots = e^t$

Dimension des Vektorraums: 3

1.2 Korrelation deterministischer Signale

Die Korrelation stellt ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Signale dar. Für die Korrelation zwei verschiedener Signale $x(t) \neq y(t)$ spricht man von der **Kreuzkorrelationsfunktion**, bei gleicher Signale spricht man von **Autokorrelationsfunktion**.

$$\rho = \frac{< x_1[k], x_2[k] >}{\|x_1(t)\| \cdot \|x_2(t)\|}$$

1.3 Skalarprodukt (Inneres Produkt)

Das Innere Produkt $<\cdot, \cdot>$ kann mit dem Skalarprodukt verglichen werden. Wenn ein Inneres Produkt Null ergibt, dann stehen die Signale senkrecht aufeinander (orthogonal). Desweiteren kann die Norm $\|\cdot\|$ (Betrag ist eine nicht negative Funktion) eines Energiesignals auch über das innere Produkt mit sich selber bestimmt werden.

mit **kontinuierlichen Energiesignalen**

$$\begin{aligned}< x(t), y(t) > &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t)dt \\ \|x(t)\| &= \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t)dt} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}\end{aligned}$$

mit **diskreten Energiesignalen**

$$\begin{aligned}< x[k], y[k] > &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x^*[k]y[k] \\ \|x[k]\| &= \sqrt{\langle x[k], x[k] \rangle} \\ &= \sqrt{\sum x^*[k]x[k]} \\ &= \sqrt{\sum |x[k]|^2}\end{aligned}$$

In beiden Fällen wird $E_x = \|x(t)\|^2$ bzw. $E_x = \|x[k]\|^2$ als Energie des Signals bezeichnet.

$$\begin{aligned}< \vec{x}, \vec{x} > &= \|\vec{x}\|^2 \\ \|\vec{x}\|^2 &= 0 \quad n > 2 \\ < \lambda \vec{x}, \vec{y} > &= \lambda^* < \vec{y}, \vec{x} > \\ < \vec{x}, \lambda \vec{y} > &= \lambda < \vec{y}, \vec{x} >\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}< \vec{x}, \vec{y} > &= < \vec{y}, \vec{x} > \quad \mathbb{C} \text{ nicht möglich!} \\ < \vec{x_1} + \vec{x_2}, \vec{y} > &= < \vec{x_1}, \vec{y} > + < \vec{x_2}, \vec{y} > \\ < \vec{x}, \vec{y_1} + \vec{y_2} > &= < \vec{x}, \vec{y_1} > + < \vec{x}, \vec{y_2} > \\ \|\vec{x} + \vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\end{aligned}$$

1.4 Energiesignale, Leistungssignale

Alle nicht-periodischen Signale sind Energiesignale. Diese sind wie folgt definiert:

$$< x[k], y[k] > = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t)dt$$

$$E_x = \|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Alle periodischen Signale sind Leistungssignale. Achtung! Die Signalenergie eines Diracs ist unendlich. Diese sind wie folgt definiert:

$$< x[k], y[k] > = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t)y(t)dt$$

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t)x(t)dt = \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Beispiel: $x_n(t) = e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$ periodische Funktion mit $n \in \mathbb{Z}$

$$\|x_n(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |e^{j2\pi n \frac{t}{T}}|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T |1|^2 dt = 1$$

$$\begin{aligned}< x_n[t], x_m[t] > &= \frac{1}{T} \int_0^T x_n^*(t) \cdot x_m(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} \cdot e^{j2\pi m \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j2\pi \frac{t}{T} (-n+m)} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{T}{j2\pi t(-n+m)} \cdot e^{j2\pi \frac{t}{T} (-n+m)} \right]_0^T = \frac{1}{j2\pi t(-n+m)} \left(\underbrace{e^{j2\pi(-n+m)}_{=1}} - 1 \right) = 0 \\ &\Rightarrow \text{Die Funktionen sind orthogonal}\end{aligned}$$

1.5 Winkelfunktionen

$$\begin{aligned}
 e^{j\varphi} &= \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) & \sin(\varphi + j2\pi k) &= \sin(\varphi) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
 \cos(\varphi) &= \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) & \cos(\varphi + j2\pi k) &= \cos(\varphi) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
 \sin(\varphi) &= \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) & \sin(\varphi) &= 0 \Rightarrow \varphi = \pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
 \sin(-\varphi) &= -\sin(\varphi) \text{ ungerade Fkt} & \cos(\varphi) &= 0 \Rightarrow \varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
 \cos(-\varphi) &= \cos(\varphi) \text{ gerade Fkt} & 1 &= \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) \\
 \sin(\varphi + \pi) &= -\sin(\varphi) & \tan(\varphi) &= \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \\
 \cos(\varphi + \pi) &= -\cos(\varphi) & \tan^{-1}(\varphi) &= \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} = \cotan(\varphi) \\
 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \cos(\varphi) & \cos^2(\alpha) &= \frac{1}{2}[\cos(2\alpha) + 1] \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \sin(\varphi) & \sin^2(\alpha) &= \frac{1}{2}[1 - \cos(2\alpha)] \\
 \int \sin(\alpha t) dt &= \frac{1}{\alpha} \cdot -\cos(\alpha t) + c & \sin(2\alpha) &= \sin(\alpha + \alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
 \int \cos(\alpha t) dt &= \frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha t) + c & \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha + \alpha) \\
 \int -\sin(\alpha t) dt &= \frac{1}{\alpha} \cdot \cos(\alpha t) + c & &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\
 \int -\cos(\alpha t) dt &= \frac{1}{\alpha} \cdot -\sin(\alpha t) + c & &= 2 \cdot \cos^2(\alpha) - 1
 \end{aligned}$$

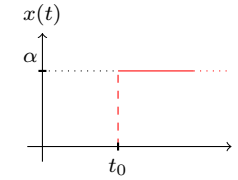
1.6 Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\
 \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
 \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\
 \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \\
 \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\
 \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \\
 \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))
 \end{aligned}$$

1.7 Elementare Funktionen

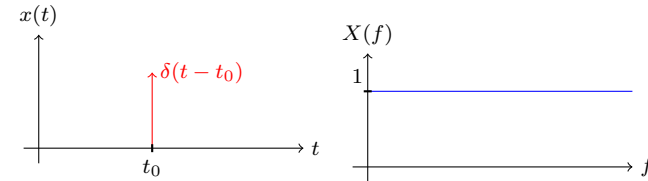
Einheitssprungfunktion

$$x(t) = \alpha \cdot \xi(t - t_0)$$



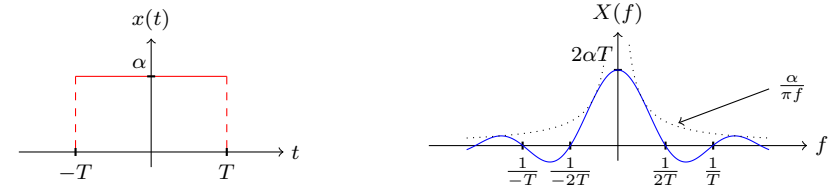
Diracstoß

$$x(t) = \delta(t - t_0) \quad \circ \bullet X(f) = 1$$



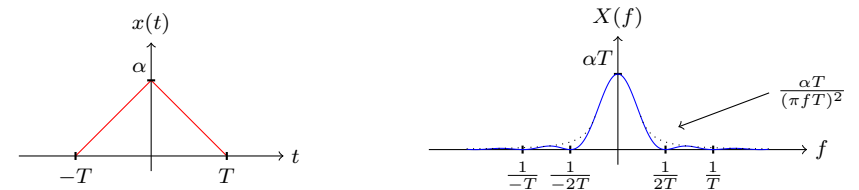
Rechtecksfunktion

$$x(t) = \alpha \cdot \text{rect}_T(t) = \alpha \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \circ \bullet X(f) = 2\alpha \cdot T \cdot \text{si}(2\pi fT)$$



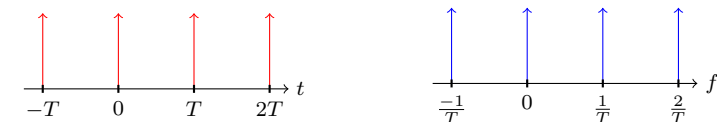
Dreiecksfunktion

$$x(t) = \alpha \cdot \triangle_T(t) = \alpha \cdot \triangle\left(\frac{t}{T}\right) \quad \circ \bullet X(f) = \alpha \cdot T \cdot \text{si}^2(\pi fT)$$



III-Funktion

$$x(t) = \text{III}_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT) \quad \circ \bullet X(f) = \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f - \frac{k}{T})$$



1.8 Operationen mittels Dirac-Impuls

Durch eine Multiplikation im Zeitbereich mit einem Dirac werden alle Funktionswerte, außer an der Stelle des Diracs ausgeblendet. (*Ausblendeigenschaft des Diracs*)

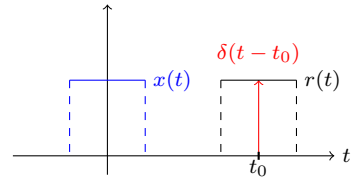
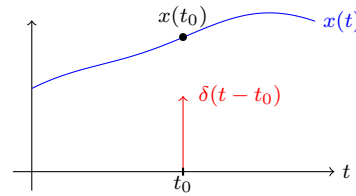
$$r(t) = x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0)$$

$$\delta(t - t_0 - t_1) = \delta(t - t_0) * \delta(t - t_1)$$

Durch eine Faltung im Zeitbereich wird die Funktion auf die entsprechenden Stellen kopiert (Für Periodische Funktionen kann hier die III-Funktion genutzt werden).

$$r(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$\circ \bullet R(f) = X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$



1.9 Elementare Operationen für Funktionen

Elementare Operationen für Funktionen sind folgende:

zeitliche Verschiebung der Funktionen

$$\text{rot} : x_1(t) = \alpha \cdot \xi(t - t_1)$$

$$\text{blau} : x_2(t) = \alpha \cdot \xi(t + t_2)$$

Spiegelung

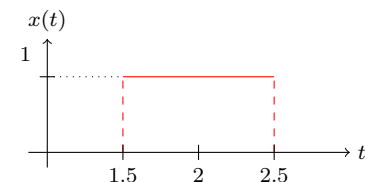
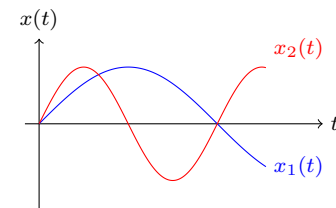
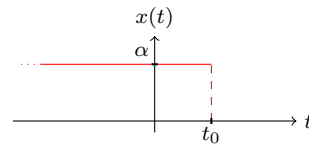
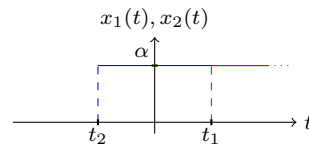
$$x(t) = \alpha \cdot \xi(t_0 - t)$$

Zeitliche Skalierung

$$\text{blau} : x_1(t) = \sin(t)$$

$$\text{rot} : x_2(t) = \sin(2 \cdot t)$$

$$\sin(\alpha \cdot t) = \begin{cases} \alpha < 1 & \text{, Dehnung} \\ \alpha > 1 & \text{, Stauchung} \end{cases}$$



Beispiel einer Rechteckfunktion

$$x(t) = \text{rect}(2t - 4)$$

$$= \text{rect}(2(t - 2))$$

1.10 Faltung

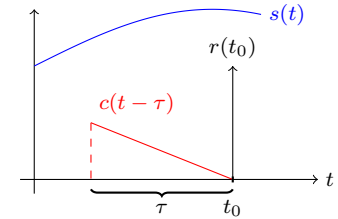
Faltung ist eine rückwärts gerichtete Gewichtung mit einer Gewichtungsfunktion $c(t)$ aller vorherigen Eingangssignale $s(t)$.

$$r(t) = c(t) * s(t)$$

$$= \int_0^t c(t - \tau) s(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t s(t - \tau) c(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t s(-(\tau - t)) c(\tau) d\tau$$



Das Ausgangssignal $r(t_0)$ setzt sich somit aus der zeitlich verschobenen und gespiegelten Gewichtungsfunktion $c(t_0 - \tau)$ und dem Eingangssignal $s(t)$ zusammen.

Es gelten folgende Faltungsregeln:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = h(t) * x_1(t) + h(t) * x_2(t)$$

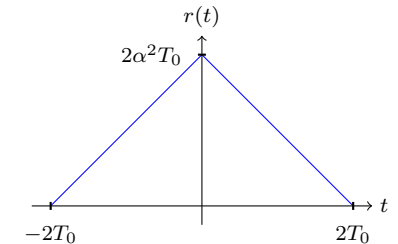
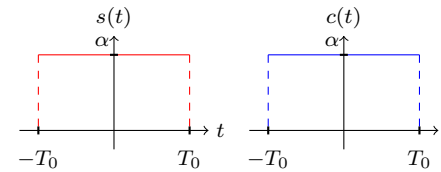
$$(x(t) * h(t)) * g(t) = x(t) * (h(t) * g(t)) \quad x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$\text{rect}(t - t_1) * \text{rect}(t - t_2) = \Delta(t - t_1 - t_2) \quad x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$\alpha \cdot \beta \cdot \delta(t - t_0) * \delta(t - t_1) = \alpha \cdot \delta(t - t_0) * \beta \cdot \delta(t - t_1)$$

Beispiel:

Ein Rechteck mit einem Rechteck gefaltet:



Beide Funktionen sind definiert nach:

$$s(t) = c(t) = \begin{cases} \alpha & -T_0 < t < T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

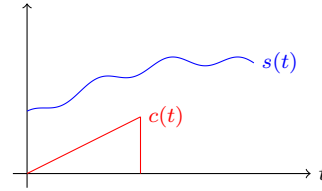
Für die Faltung daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} r(t) = s(t) * c(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) c(t - \tau) d\tau \\ &= \begin{cases} \int_{-T_0}^{t+T_0} \alpha \cdot \alpha d\tau = \alpha^2(t + 2T_0) & -2T_0 < t < 0 \\ \int_{t-T_0}^{T_0} \alpha \cdot \alpha d\tau = \alpha^2(2T_0 - t) & 0 < t < 2T_0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.11 Lineare Systeme

Allgemein wird ein Übertragungskanal auch System bezeichnet. Ein System faltet ein Eingangssignal $s(t)$ mit einer Gewichtsfunktion $c(t)$, dem sogenannten **Kern** des Systems. Diese Faltung wird in Abschnitt 1.10 erläutert. Für Lineare Systeme gelten folgende Eigenschaften die zu beweisen sind:

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} s(u) \cdot k(t; u) \, du$$

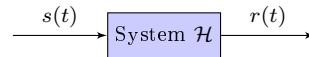


Linearität

Ein Eingangssignal kann aus mehreren gewichteten Signalen bestehen und ein Ausgangssignal erzeugen

$$\mathcal{H}(\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)) = \alpha \mathcal{H}(s_1(t)) + \beta \mathcal{H}(s_2(t))$$

$$r(t) = r_1(t) + r_2(t)$$



1. Beispiel: $r(t) = s(t-1) \cdot \cos(\omega t)$ $\omega = \text{const.}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\alpha r_1(t) + \beta r_2(t)) &= \alpha \cdot \underbrace{s_1(t-1) \cdot \cos(\omega t)}_{r_1(t)} + \beta \cdot \underbrace{s_2(t-1) \cdot \cos(\omega t)}_{r_2(t)} \\ &= \alpha \cdot \mathcal{H}(r_1(t)) + \beta \cdot \mathcal{H}(r_2(t)) \\ &\Rightarrow \text{lineares System} \end{aligned}$$

2. Beispiel: $r(t) = s(t) \cdot \frac{\delta s(t)}{\delta t}$ für z.B. $s(t) = t^2$ und $\alpha = 2$

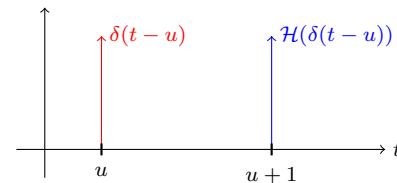
$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\alpha s(t)) = \mathcal{H}(2t^2) &= 2t^2 \cdot 4t = 8t^3 \\ \alpha \mathcal{H}(s(t)) = 2 \cdot \mathcal{H}(t^2) &= 2(t^2 \cdot 2t) = 4t^3 \\ &\Rightarrow \text{nichtlineares System} \end{aligned}$$

Kern

Jede lineare Abbildung hat einen Kern, wenn das System nicht linear ist existiert kein Kern. Bei linear zeitinvarianten Systemen (LTI) ist der Kern nicht zeitabhängig und somit konstant.

$$k(t; u) = \mathcal{H}(\delta(t-u))$$

$$\text{LTI-Systemen: } \Rightarrow k(t, t-\tau) = c(\tau)$$

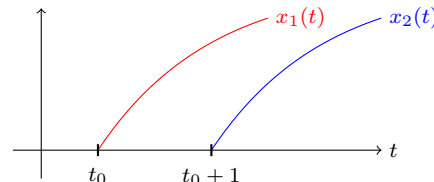


Graph zu Bsp. 3

Zeitvarianz und Zeitinvarianz

Die Zeitvarianz eines Systems kann durch den Kern des Systems bestimmt werden. Ist der Kern des Systems neben dem Dirac-Impuls von einer weiteren Zeitabhängigen Variable abhängig, ist das System zeitvariant.

$$r(t-t_0) = \mathcal{H}(s(t-t_0))$$



Zeitinvariant: Egal welcher Startpunkt, Funktion ist immer gleich

1. Beispiel: $r(t) = s(t-1) \cdot \cos(\omega t)$ $\omega = \text{const.}$

$$k(t; u) = \mathcal{H}(\delta(t-u)) = \underbrace{\delta(t-u-1) \cdot \cos(\omega t)}_{\text{Kern}} \Rightarrow \text{Zeitvariant durch } \cos(\omega t)$$

2. Beispiel: $r(t) = s(t) \cdot t^2$

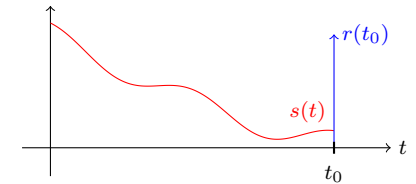
$$k(t; u) = \mathcal{H}(\delta(t-u)) = \underbrace{\delta(t-u) \cdot t^2}_{\text{Kern}} \Rightarrow \text{Zeitvariant durch } t^2$$

3. Beispiel: $r(t) = s(t-1)$

$$k(t; u) = \mathcal{H}(\delta(t-u)) = \underbrace{\delta(t-u-1)}_{\text{Kern}} \Rightarrow \text{Zeitinvariant (LTI-System)}$$

Gedächtnis und Kausalität

Ein System ist nur Kausal, wenn es auf Eingangswerte der Vergangenheit zurückgreift. Das Ausgangssignal eines gedächtnislosen System hängt zu jedem Zeitpunkt t_0 nur von dem Eingangssignal $s(t_0)$ zum selben Zeitpunkt ab.

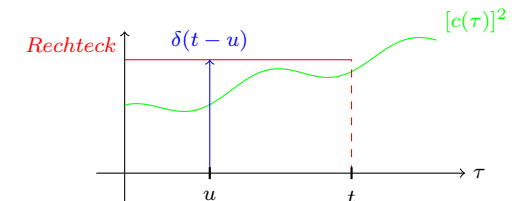


$$r(t_0) = \mathcal{H}(s(t)) \quad \text{für } t \leq t_0$$

Beispiel: $r(t) = \int_0^t s(t-\tau) [c(\tau)]^2 d\tau$

$$\begin{aligned} k(t; u) &= \mathcal{H}(\delta(t-u)) = \int_0^t \delta(t-u-\tau) [c(\tau)]^2 d\tau \\ &= \int_0^\infty \delta(t-u-\tau) [c(\tau)]^2 \cdot \underbrace{[\xi(\tau) - \xi(t-u)]}_{\text{Rechteck}} d\tau \\ &= [c(t-u)]^2 [\xi(t-u) - \xi(t-u)] \\ &= \underbrace{[c(t-u)]^2 [\xi(u) - \xi(u-t)]}_{\text{Kern}} \end{aligned}$$

Die Rechteckfunktion aus den Einheitsprüngen wird genutzt um alles außerhalb $0 < \tau < t$ auszublenzen. Dazu kommt noch die Ausblendeigenschaft des Diracs an der Stelle $(t-u) = \tau$.



\Rightarrow Das System ist zeitvariant, da es zusätzlich von $\xi(u-t)$ abhängt. Zudem benötigt man für:

$$r(-1) = \int_0^{-1} s(-1-\tau) [c(\tau)]^2 d\tau = - \int_{-1}^0 s(-1-\tau) [c(\tau)]^2 d\tau$$

den Wert an der Stelle $s(0)$. Dieser liegt in der Zukunft \Rightarrow Akausal.

Das System ist für $c(\tau) = 0 \, \forall \, \tau < 0$ kausal. Zudem ist es Gedächtnisbehaftet, da es auf Werte in der Vergangenheit zurückgreift, bei $r(2)$ auf alle Werte von $s(0)$ bis $s(2)$.

$$r(2) = \int_0^2 s(2-\tau) [c(\tau)]^2 d\tau$$

1.12 Fourierreihe zur Darstellung periodischer Signale

Allgemein gilt für die Fourierreihe im komplexen Fall mit dem **Fourierkoeffizienten** c_n dieser im allgemeinen Fall auch bestimmt werden kann. Die Bestimmung des Koeffizienten kann auch mittels III-Funktion erfolgen. Die Fourierreihe kann auch in Realteil und Imaginärteil aufgeteilt werden:

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt$$

$$r(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

Für die reellen und imaginären Koeffizienten gelten dann die Eigenschaften:

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

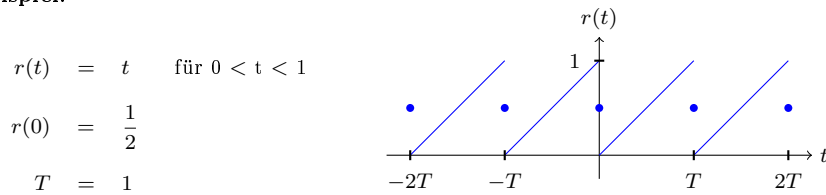
$$b_n = j(c_n - c_{-n}) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_0 = c_0 + c_0 = 2c_0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T r(t) \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T r(t) \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$$

Beispiel:



Finden der komplexen Koeffizienten c_k dieser Fourierreihe mittels der Definition:

$$c_k = \frac{1}{1} \int_0^1 e^{-j2\pi k \frac{t}{1}} \cdot t \, dt = \int_0^1 e^{-j2\pi k t} \cdot t \, dt$$

Substitution mit $u = t \quad u' = 1 \quad v' = e^{-j2\pi k t} \quad v = \frac{1}{-j2\pi k} \cdot e^{-j2\pi k t}$

$$c_k = \left[\underbrace{\frac{-t}{j2\pi k} e^{-j2\pi k t}}_{u \cdot v} \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{-1}{j2\pi k} e^{-j2\pi k t}}_{u' \cdot v} dt = \frac{-1}{j2\pi k} e^{-j2\pi k} + \left(\frac{1}{j2\pi k} \right) \left[\frac{1}{-j2\pi k} e^{-j2\pi k t} \right]_0^1$$

$$= \frac{-1}{j2\pi k} \underbrace{e^{-j2\pi k}}_{=1} + \left(\frac{1}{j2\pi k} \right)^2 \underbrace{e^{-j2\pi k t}}_{=e^{-j2\pi k} - 1} \Big|_0^1 = \frac{-1}{j2\pi k} = \frac{j}{2\pi k}$$

$$\Rightarrow c_1, c_2, \dots = \frac{j}{2\pi k} \quad k \neq 0 \quad \Rightarrow |c_k| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|k|} \quad k \neq 0$$

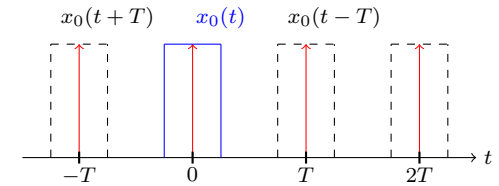
für $k = 0$: $\Rightarrow c_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad k = 0 \quad (\text{Da } e^{j2\pi \cdot 0 \cdot t} = 1 \text{ , bei } t = 0)$

Es gilt dann für die Fourierreihe durch einsetzen der Koeffizienten c_0 und c_k :

$$\Rightarrow r(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k \neq 0} \frac{j}{2\pi k} e^{j2\pi k t}$$

1.13 III-Funktion zur Darstellung periodischer Signale

Durch die Faltung einer nichtperiodischen Funktion (Grundfunktion) $x_0(t)$ mit der Kammfunktion oder III-Funktion im Zeitbereich, kann die nichtperiodische Funktionen eine Periodizität erlangen. Die Grundfunktion wird sozusagen an die Stellen des Diracs kopiert (siehe schwarz). Die entstandene Funktion heißt nun $x(t)$.

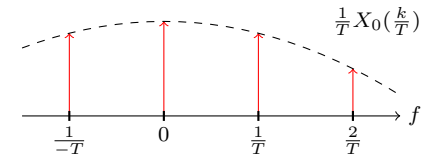


$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_0(t) * \delta(t - kt) = x_0(t) * \text{III}_T(t)$$

$$x(t) \circ \bullet X(f) = X_0(f) \cdot \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(f)$$

$$= X_0(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_k \delta(f - \frac{k}{T})$$

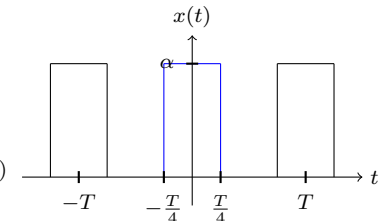
(Ausblendeigenschaft) $= \sum_k \underbrace{\frac{1}{T} \cdot X_0\left(\frac{k}{T}\right)}_{=c_k} \cdot \delta(f - \frac{k}{T})$



Beispiel:

Grundfunktion: $x_0(t) = \alpha \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

periodische Funktion: $x(t) = \alpha \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \text{III}_T(t)$



Durch Umformung im Zeitbereich kann der Fourierkoeffizient ermittelt werden:

$$x(t) \circ \bullet X(f) = \frac{T}{4} \cdot 2\alpha \cdot \text{si}\left(\frac{T}{4} \cdot 2\pi f\right) \cdot \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(f)$$

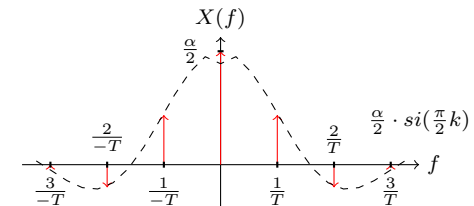
$$= \frac{\alpha}{2} \cdot \text{si}\left(\frac{T}{2} \pi f\right) \cdot \text{III}_{\frac{1}{T}}(f)$$

$$= \frac{\alpha}{2} \cdot \text{si}\left(\frac{T}{2} \pi f\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{si}\left(\frac{T}{2} \pi \frac{k}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$= \sum_k \frac{\alpha}{2} \cdot \text{si}\left(\frac{\pi}{2} k\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{\alpha}{2} \cdot \text{si}\left(\frac{\pi}{2} k\right)$$



1.14 Rechnenregeln für Fouriertransformationen

Allgemein gilt für die Transformation folgender Satz:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \Rightarrow c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi n f_0 t} df \Rightarrow Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Desweiteren gelten noch folgende Rechenregeln und Definitionen:

$\delta(t)$	\longleftrightarrow	1		
$rect(t)$	\longleftrightarrow	$2 \cdot si(2\pi f)$	$2si(2\pi t)$	$\longleftrightarrow rect(-f) = rect(f)$
$\Delta(t)$	\longleftrightarrow	$si^2(\pi f)$	$cos(2\pi f_0 t)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
Signum: $sgn(t)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{j\pi f}$	$\frac{1}{2} cos(4\pi f_0 t)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{8} [\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)]$
$\text{III}_t(t)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{ T } \text{III}_{\frac{1}{T}}(f)$	$sin(2\pi f_0 t)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$\xi(t) \cdot e^{-\alpha t}$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{\alpha + k2\pi f}$	$\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$	$\longleftrightarrow \alpha_1 S_1(f) + \alpha_2 S_2(f)$
$e^{-\pi t^2}$	\longleftrightarrow	$e^{-\pi f^2}$	$s(t - t_0)$	$\longleftrightarrow S(f) e^{-j2\pi t_0 f}$
$e^{-(-t)} \xi(-t) = \xi(-t) e^t$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{1 - j2\pi f}$	$s(t) e^{-j2\pi f_0 t}$	$\longleftrightarrow S(f - f_0)$
$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$	\longleftrightarrow	$\left(\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\right) S(f)$	$s(\alpha t)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{ \alpha } S\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
C: $\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{j2\pi f C} I(f) \quad I(0) = 0$	$\frac{d}{dt} s(t)$	$\longleftrightarrow j2\pi f \cdot S(f)$
$s_1(t) * s_2(t)$	\longleftrightarrow	$S_1(f) \cdot S_2(f)$	$-j2\pi f \cdot s(t)$	$\longleftrightarrow \frac{d}{df} S(f)$
$s_1(t) \cdot s_2(t)$	\longleftrightarrow	$S_1(f) * S_2(f)$	$\int_{-\infty}^t s(t) dt$	$\longleftrightarrow \frac{S(f)}{j2\pi f} + \frac{S(0)}{2} \delta(f)$
$s(jt)$	\longleftrightarrow	$2\pi S(-f)$	$\frac{1}{ \tau } si\left(\pi \cdot \frac{t}{\tau}\right)$	$\longleftrightarrow rect(\tau f)$
$s(-t)$	\longleftrightarrow	$S(-f) = S^*(f)$		
$s^*(t)$	\longleftrightarrow	$S^*(-f)$		

Die **Dualität** oder Abbildbarkeit beschreibt das Verhalten zwischen Zeit- und Frequenzbereich und umgedreht.

$$x(t) \longleftrightarrow Y(f) \Leftrightarrow y(t) \longleftrightarrow X(-f)$$

Parsevaltheorem beschreibt den Zusammenhang zwischen Signalenergien im Zeitbereich und im Frequenzbereich

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot Y^*(f) df$$

Beispiel: Zeitverschiebung und Linearität

$$rect(2t) - \Delta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} 2 si\left(\frac{1}{2} 2\pi f\right) - si^2(\pi f) = si(\pi f) - si^2(\pi f)$$

1.15 Eigenschaften der Fouriertransformation

Grenzwerte von S(f)(Lemma von Riemann-Lebesgue)

Da die Fourier-Transformationen von integrablen Funktionen stetig sind, handelt es sich bei der Fouriertransformatierten um eine stetige Funktion, die im Unendlichen verschwindet. Schnelles integrieren über positive und negative Teile der Fouriertransformierten.

$$S(\infty) = S(-\infty) = 0$$
$$s(\infty) = s(-\infty) = 0$$

Linearität

Die Fouriertransformation stellt einen linearen Operator da

$$\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t) \longleftrightarrow \alpha_1 S_1(f) + \alpha_2 S_2(f)$$

konjugiert komplexe Zeitfunktion

$$S(f) \longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{j2\pi f t} dt$$
$$S_1(f) = \int_{\mathbb{R}} s_1(t) e^{j2\pi f t} dt = \int_{\mathbb{R}} s^*(t) e^{j2\pi f t} dt$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-j2\pi f t} dt\right)^* = [S(-f)]^*$$
$$= S^*(-f)$$

Falls: $s(t) \in \mathbb{R} \forall t \Leftrightarrow Im\{s(t)\} = 0$

$$\Rightarrow s(t) = s^*(t)$$
$$\Rightarrow S(f) = S^*(-f)$$
$$|S(f)| = |S(-f)| \quad (gerade Fkt.)$$
$$s^*(t) \longleftrightarrow S^*(-f)$$

konjugiert komplexe Frequenzfunktion

siehe hierzu Rechenregeln.

$$s^*(-t) \longleftrightarrow S^*(f)$$

Reellwertige und imaginäre Funktionen

$x(t)$ ungerade $\Rightarrow X(f)$ imaginär

$x(t)$ gerade $\Rightarrow X(f)$ reellwertig

Der Beweis, ob eine Funktion die reelwertig oder imaginär ist, kann mittels der konjugiert komplexen der Zeitfunktion oder der Frequenzfunktion ermittelt werden.

$$x(t) = \int e^{j2\pi f t} \cdot X(f) df$$
$$= \left[\int \left(e^{j2\pi f t} \cdot X(f) \right)^* df \right]^*$$
$$= \left[\int e^{-j2\pi f t} \cdot \underbrace{X^*(f)}_{= X(f), \text{ da reellwertig}} df \right]$$
$$[x(-t)]^* = x(-t), \text{ da } x(t) \text{ reellwertig}$$

Reellwertige Funktonen

Graphisch ist $S^*(-f)$ die Spiegelung an der y-Achse, da es keine negativen Frequenzen gibt. (Bei komplexen Fkt. nicht!).

$$s(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow s(t) = s^*(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$S(-f) = S^*(f)$$

Imaginäre Funktionen

Analog zum vorherigen. Bei imaginären Funktionen ist gibt es keine Spiegelung!

$$s(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow s(t) = -s^*(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$S(-f) = -S^*(f)$$

Spiegelung am Ursprung

$$s(t) \longleftrightarrow S(-f)$$

Beweis siehe Seite.

$$\begin{aligned} F\{s(-t)\} &= \int_{\mathbb{R}} s(-t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{mit } -t = \tau \\ F\{s(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} (-d\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(-t) e^{j2\pi ft} dt = S(-f) \end{aligned}$$

Zeitverschiebung

$$s(t - t_0) \longleftrightarrow S(f) \cdot e^{-j2\pi ft_0}$$

Folgt durch Substitution mit zeitlicher Verschiebung um t_0 (Phaseninformation ändert sich).

$$\begin{aligned} F\{s(t - t_0)\} &= \int_{\mathbb{R}} s(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{mit } \tau = t - t_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(\tau) e^{-j2\pi f(\tau + t_0)} d\tau \quad \text{mit } t = \tau \\ &= e^{-j2\pi ft_0} \cdot \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

Frequenzverschiebung

$$s(t) \cdot e^{j2\pi ft_0} \longleftrightarrow S(f - f_0)$$

Verschiebung von z.B. Radiosignalen in den hörbaren Bereich

$$s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} [S(f + f_0) + S(f - f_0)]$$

Bsp: Modulation einer sinusförmigen Welle gemäß der Gleichung. Jede Verschiebung von f_0 hat eine Verschiebung von $-f_0$ zur Folge.

Zeitskalierung

$$s(\alpha t) \cdot \frac{1}{\alpha} S\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad \alpha \neq 0$$

Wenn $\alpha > 1$ wird die Zeit komprimiert, wenn $\alpha < 1$ wird die Zeit gedehnt. Bei $\alpha = 2$ wird so die Frequenz verdoppelt, das Spektrum wird im zwei auseinander gezogen.

$$\begin{aligned} F\{\underbrace{s(\alpha t)}_{=\tilde{s}(t)}\} &\longleftrightarrow \tilde{S}(f) \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(\alpha t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{mit } t = \frac{\tau}{\alpha} \\ &= \begin{cases} a > 0: \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{\alpha}} \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} S\left(\frac{f}{\alpha}\right) \\ a < 0: \int_{\infty}^{-\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{\alpha}} \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{-\alpha} S\left(\frac{f}{\alpha}\right) \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{1}{|\alpha|} S\left(\frac{f}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

1. Beispiel: Darstellung der Dreiecksfunktion im Zeitbereich durch Faltung zweier Rechtecke

$$s(t) = \triangle\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{T} \cdot \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) * \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right)$$

2. Beispiel: Dualitätsbeziehungen zwischen Frequenz- und Zeitbereich

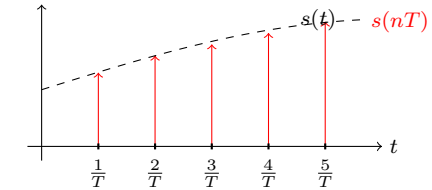
$$\text{si}\left(\frac{t}{2}\right) = \text{si}\left(\frac{2\pi t}{4\pi}\right) \longleftrightarrow \frac{4\pi}{2} \cdot \text{rect}\left(\frac{-4\pi f}{2}\right) = 2\pi \cdot \text{rect}(2\pi f) \Rightarrow \text{idealer Tiefpass}$$

1.16 Abtasttheorem & Rekonstruktion

Durch dieses Theorem beschreibt die eindeutige Wandlung von zeitkontinuierliche Signale in zeitdiskrete Signale.

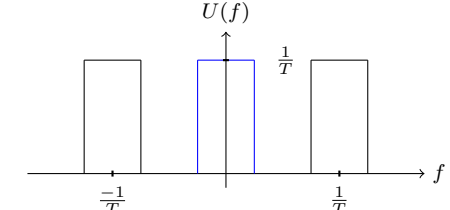
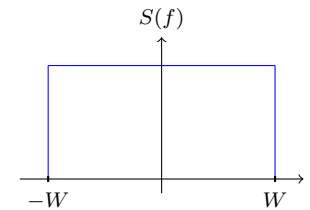
$$s(t) \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow s(nT) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Die Abtastrate zwischen den Abtastwerten beträgt $\frac{1}{T}$. Bei beliebigen Signalen ist man nicht in der Lage diese eindeutig zu bestimmen.

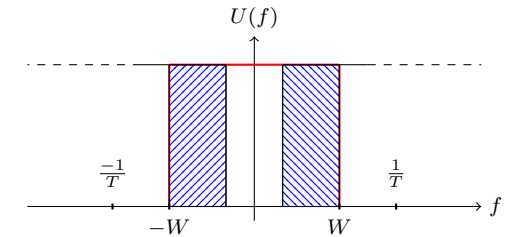


$$u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT) \cdot \delta(t - kT) = s(T) \cdot \text{III}_T(t) \longleftrightarrow U(f) = S(f) \cdot \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(f)$$

In der spektralen Darstellung wird ersichtlich, dass die Funktion aus mehreren kopierten $S(f)$ besteht.



Es ist darauf zu achten, dass die doppelte Bandbreite W des transformierten Signals $U(f)$ kleiner ist, als die Abtastfrequenz $\frac{1}{T}$, da sonst Aliasing Effekte entstehen können. Diese sind im Frequenzbereich durch Überlappungen sichtbar (siehe schraffierte Bereiche)

**Nyquist-Theorem:**

Es muss $\frac{1}{T} > 2W$ gelten, damit $s(t)$ eindeutig reproduzierbar ist. Zudem müssen die kopierten Signale von $S(f)$ durch die III-Funktion (z.B. $S(f - \frac{1}{T})$, $S(f - \frac{2}{T})$, ...) ausgeblendet werden durch einen idealen Tiefpass (si-Funktion im Zeitbereich).

$$s(t) = \sum s(nT) \cdot \underbrace{\text{si}\left(\pi \cdot \frac{t - nT}{T}\right)}_{\text{idealer Tiefpass}}$$

1. Beispiel: Abtastung von $s(t)$ und Rekonstruktion $\tilde{s}(t)$ mit einem Rekonstruktionsfilter $c_1(t)$

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= (s(t) \cdot \text{III}_T(t)) * c_1(t) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT) \delta(t - kT) \right) * c_1(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT) (\delta(t - kT) * c_1(t)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT) \cdot c_1(t - kT) \end{aligned}$$

2. Beispiel: ideale Rekonstruktion $\tilde{s}(t) = s(t)$ mit einem Rekonstruktionsfilter $c_2(t)$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(f) &= S(f) \cdot \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(f) \cdot C_2(f) = S(f) \cdot \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(f) \cdot T \text{rect}\left(\frac{f}{2T}\right) \\ &\Rightarrow T = \frac{1}{2W} \quad \text{Bestimmung von T über W darf nicht fehlen!} \end{aligned}$$

1.17 Warscheinlichkeitsrechnung

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsraum

$$P(\bar{A}) = P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$$
$$P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Normalverteilung

im \mathbb{R} :

im \mathbb{R}^n mit Kovarianzmatrix M :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(M)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T M^{-1}(x-\mu)}$$

$$\mu = E(X) = \int xp(x)dx$$
$$\mu = E(X) = E\left[[X_1, \dots, X_n]^T \right]$$

$$\sigma^2 = E((X - \mu)^2) = \int (x - \mu)^2 p(x) dx$$
$$M = E\left[(X - \mu)(X - \mu)^T \right]$$

Wenn $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ ist, dann spricht man von einer Standartnormalverteilung. Für diese Verteilung kann die Warscheinlichkeit mit der Q-Funktion berechnet werden.

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	Q(x)	x	Q(x)	x	Q(x)	x	Q(x)
0.0	0.50000	1.0	0.15866	2.0	0.02275	3.0	0.00135
0.1	0.46017	1.1	0.13567	2.1	0.01786	3.1	0.00097
0.2	0.42074	1.2	0.11507	2.2	0.01390	3.2	0.00069
0.3	0.38209	1.3	0.09680	2.3	0.01072	3.3	0.00048
0.4	0.34458	1.4	0.08076	2.4	0.00820	3.4	0.00034
0.5	0.30854	1.5	0.06681	2.5	0.00621	3.5	0.00023
0.6	0.27425	1.6	0.05480	2.6	0.00466	3.6	0.00016
0.7	0.24196	1.7	0.04457	2.7	0.00347	3.7	0.00011
0.8	0.21186	1.8	0.03593	2.8	0.00256	3.8	0.00007
0.9	0.18406	1.9	0.02872	2.9	0.00187	3.9	0.00005

Standartnormalverteilung:
 $P(X \geq a) = Q(a) \quad a \geq 0$
Für $a < 0$:
 $P(X \geq a) = 1 - Q(|a|)$

1. Beispiel: Wahrscheinlichkeiten $P(0 \leq X \leq 1)$, $P(X \leq 2)$, $P(-1 \leq X \leq 2)$ mit Standartnormalverteilung

$$P(0 \leq X \leq 1) = Q(0) - Q(1) \approx 0.5 - 0.15866 \approx 0.34134$$
$$P(X \leq 2) = 1 - Q(2) \approx 1 - 0.022725 \approx 0.97725$$
$$P(-1 \leq X \leq 2) = 1 - Q(1) - Q(2) \approx 0.97725 - 0.15866 \approx 0.81859$$

Für Normalverteilungen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 gilt für $x > \mu$:

$$P(X \geq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^\infty e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \stackrel{t'=(t-\mu)/\sigma}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{(a-\mu)/\sigma}^\infty e^{-\frac{t'^2}{2}} dt' = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

2. Beispiel: Wahrscheinlichkeiten $P(0 \leq X \leq 1)$, $P(X \leq 0)$ mit $\mu = -1, \sigma^2 = 4$

$$P(0 \leq X \leq 1) = Q\left(\frac{0-(-1)}{2}\right) - Q\left(\frac{1-(-1)}{2}\right) = Q(0.5) - Q(1) \quad \text{Symmetrie der Glockenkurve}$$
$$P(X \leq 0) = 1 - Q\left(\frac{0-(-1)}{2}\right) = 1 - Q(0.5)$$

Zufallsvektoren

Mehrere Zufallsvariablen können in einem Zufallsvektor gebündelt werden. Die Wahrscheinlichkeit das der Zufallsvektor in einem Gebiet Ω liegt, kann berechnet werden mit $P(\vec{X} \in \Omega)$. Im AWGN-Kanal sind die Rauschvektoren voneinander unabhängig. Wenn das Signal $\vec{r} = \vec{s}_m + \vec{n}$ empfangen wird, dann ist die Dichtefunktion $p(\vec{r}|\vec{s}_m)$, die Dichtefunktion von Normalverteilungen. Die letzte Formel ist für n verschiedene Zufallsvariablen.

$$P(\vec{X} \in \Omega) = \int_{\Omega} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$
$$p(\vec{r}|\vec{s}_m) = p_1(r_1|\vec{s}_{m1}) \cdot \dots \cdot p_n(r_n|\vec{s}_{mn})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega^2}} e^{-\frac{(r_k - s_{mk})^2}{2\sigma^2}}$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\omega^2})^n} e^{-\frac{(r_k - s_{mk})^2}{2\sigma^2}}$$

3. Beispiel: Wahrscheinlichkeiten das $\vec{s} = (\sqrt{E_g}, \sqrt{E_g})$ ein Signal welches für alle $\vec{r} \geq 0$ richtig

detektiert wird. Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit für $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ und $\frac{E_g}{N_0} = 2$?

$$p(\vec{r}|\vec{s}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\|\vec{r}-\vec{s}\|^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\vec{r}_1-\vec{s}_1)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\vec{r}_2-\vec{s}_2)^2}{2\sigma^2}}$$
$$P(\vec{r}_{\text{detektiert}}|\vec{s}_{\text{gesendet}}) = \int_0^\infty \int_0^\infty p(\vec{r}|\vec{s}) dr_1 dr_2$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\vec{r}_1-\vec{s}_1)^2}{2\sigma^2}} dr_1 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\vec{r}_2-\vec{s}_2)^2}{2\sigma^2}} dr_2$$
$$= \left(1 - Q\left(\frac{s_1}{\sigma}\right)\right) \cdot \left(1 - Q\left(\frac{s_2}{\sigma}\right)\right) = \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0/2}}\right)\right) \cdot \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0/2}}\right)\right)$$
$$= (1 - Q(2))^2$$
$$P(\vec{r}_{\text{falsch}}|\vec{s}_{\text{gesendet}}) = 1 - (1 - Q(2))^2 \approx 0.045$$

1.18 Analysis, Lineare Algebra Regeln

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha \cdot t} dt = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha \cdot t}$$
$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$
$$\text{Lin. Unabhängigkeit: } 0 = \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t) \quad \text{unab. nur bei } \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

2 Modulationen

2.1 Amplitudenmodulation

Bei der Amplitudenmodulation wird die Amplitude eines Trägers mit der Frequenz f_0 um das Informationssignal $s(t)$ variiert.

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ &= A[1 + m \cdot s_1(t)] \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Der Koeffizient m dient zur Normierung, so dass gilt, dass die Amplitude niemals negativ wird und maximal den Wert 2 annehmen kann.

$$0 < m < 1 \Rightarrow \max|s_1(t)| = 1$$

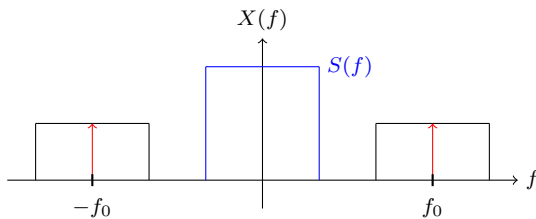
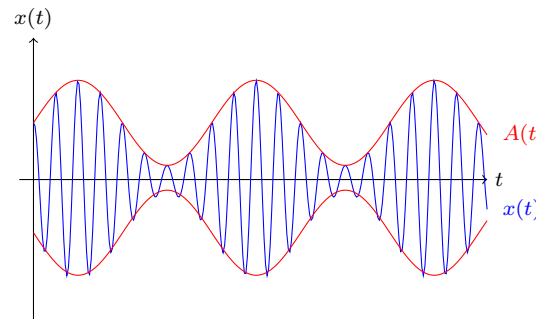
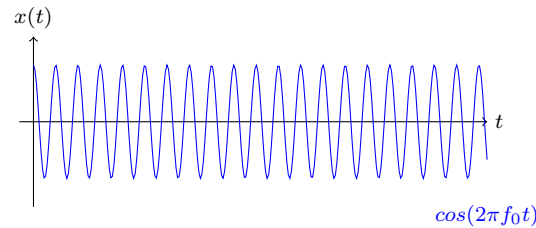
Die Normierung muss stattfinden, damit es keine negative Amplitude und somit keinen Phasensprung gibt.

Im Frequenzbereich wird die Fouriertransformierte des Signals $s(t)$ um die Diracs der Kosinusfunktion gefaltet bzw. verschoben. Wichtig ist hierbei das die Höhe des Signals halbiert wird. Die Fouriertransformierte des Signals kann durch zwei Seitenbänder dargestellt werden, diese sind auf der komplexen Ebene sehr gut zu sehen.

$$x(t) \circ \bullet A(f) * \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$x(t) \circ \bullet S(f) * \frac{Am}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$x(t) \circ \bullet \underbrace{\frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{Am}{2}s(f - f_0)}_{\text{unteres Seitenband}} + \underbrace{\frac{A}{2}\delta(f + f_0) + \frac{Am}{2}s(f + f_0)}_{\text{oberes Seitenband}}$$

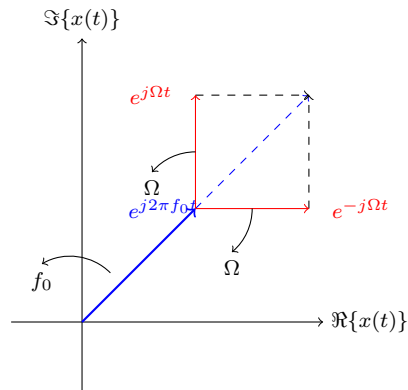


Im komplexen besteht die Modulation aus zwei Seitenbändern die sich gegeneinander mit der Frequenz Ω drehen.

$$s(t) = \cos(\Omega t) = \frac{1}{2} [e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}]$$

Zudem ist es möglich zwei Signale $A(t)$ und $B(t)$ bei der gleichen Frequenz zu übertragen. Das eine Signal wird mittels $\cos(\omega_0 t)$ und das andere Signal mittels $\sin(\omega_0 t)$ moduliert. Da die beiden Träger orthogonal zueinander sind (in Quadratur) ist das die sogenannte **orthogonale Modulation**. Das Frequenzspektrum ist das gleiche, aber die einzelnen Signale mit Träger stören sich nicht gegenseitig.

$$x(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t) + B(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$$



2.2 Winkelmodulation

Als Winkelmodulation wird die Phasen- und Frequenzmodulation bezeichnet. Dieses Signal wird wie folgt definiert:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

$$\text{PM: } \varphi(t) = m \cdot s_1(t)$$

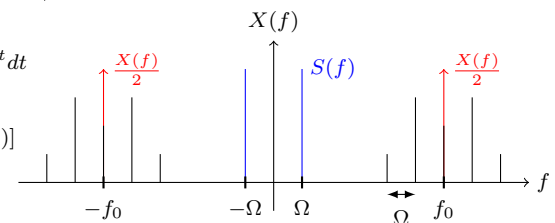
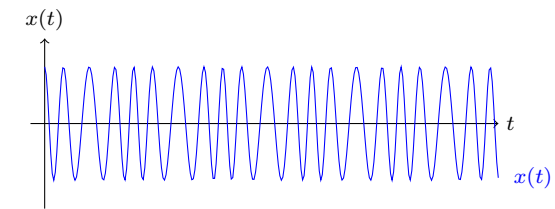
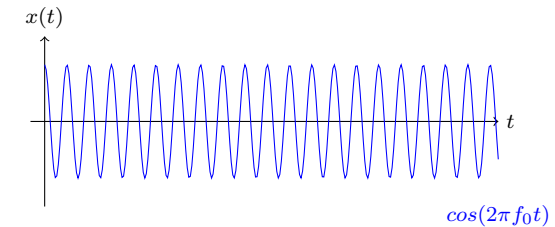
$$\text{FM: } \frac{d\varphi(t)}{dt} = \Delta\omega_0 \cdot s_1(t)$$

Der Koeffizient m dient zum bestimmen des Phasenhubs und der Koeffizient ω_0 dient zur Bestimmung des Frequenzhubs. Bei der Phasenmodulation wird die Frequenz geändert. Bei der Frequenzmodulation wird das gleiche gemacht, aber technisch gesehen wird nicht die Phase sondern die Ableitung der Phase variiert. Die Fouriertransformation einer Winkelmodulation hat folgende Gestalt:

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

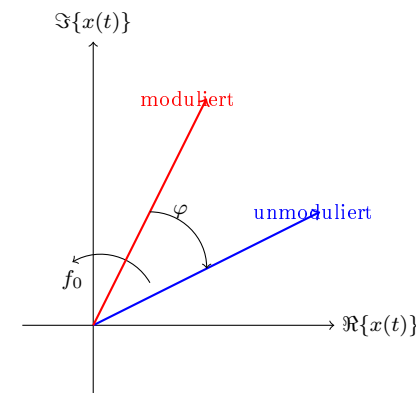
$$X(f) = \frac{A}{2} [\psi(m, f - f_0) + \psi(-m, f + f_0)]$$

$$\psi(m, f) = \int_{\mathbb{R}} e^{j m s_1(t)} e^{-j2\pi f t} dt$$



Weitere Eigenschaften der Winkelmodulation ist, dass wenn man eine PM-Modulation integriert eine FM-Modulation erhält. Andersrum eine FM-Modulation differenziert eine PM-Modulation erhält. Den Unterschied zwischen PM und FM erkennt man bei der Variation der Informationsfrequenz Ω . Verdoppelt man Ω , so verdoppelt sich die Bandbreite des PM-Signals entsprechend, da der Abstand der Spektrallinien gerade Ω beträgt. Da bei der FM-Modulation der Frequenzhub konstant gehalten wird, verdoppelt sich die Bandbreite nicht.

FM:	$B_x = 2(\Delta f_0 + F)$	$\Delta\omega = 2\pi\Delta f_0$
	$F \ll \Delta f_0$	$B_x \approx 2\Delta f_0$
PM:	$B_x = 2(m + 1)F$	$\Omega = 2\pi F$
	$m \gg 1$	$B_x \approx 2mF$



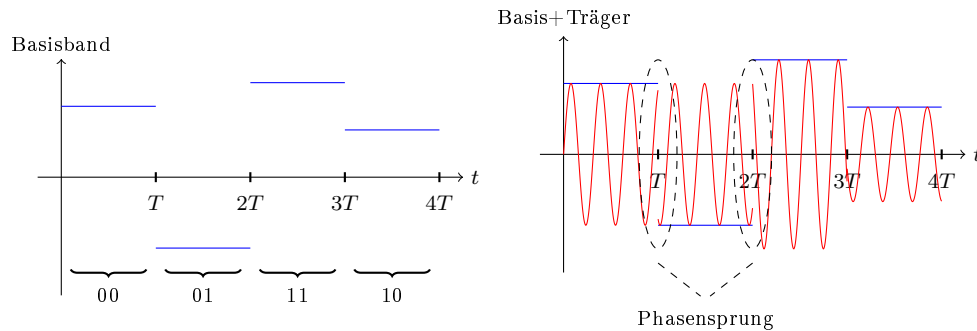
2.3 Bandbreite

Die Bandbreite B_x des modulierten Signalträgers und die Bandbreite B_s des modulierten Primärsignals oder Informationssignals bestimmen ob es eine schmalbandige oder breitbandige Modulationsart ist. Je Breiter das Band ist, desto störungsempfindlicher und desto mehr Daten können übertragen werden.

$$\begin{aligned} \frac{B_x}{B_s} &\lesssim 2 && \text{schmalbandig z.B. AM} \\ \frac{B_x}{B_s} &\gg 2 && \text{breitbandig z.B. FM, PM} \end{aligned}$$

2.4 PAM - Pulsamplitudenmodulation

Es gibt diskrete Pegel die definiert sind durch A_m , die Adresse des Datums definiert. Die Pulse werden mit einer Bitrate von $R_b = \frac{1}{T_b}$, wobei T_b das Bitintervall ist. Es können pro Übertragungszeitintervall k -Bits (Symbole) übertragen werden. M stellt die Menge der möglichen Amplitudenwerte dar, die durch $M = 2^k$ mit k -bit langen Symbolblöcken zugeordnet sind. Die festgesetzten Bitrate bei einem Symbolintervall $T = \frac{k}{R_b} = kT_b$. Wobei $2d$ die Distanz der benachbarten Nachrichten ist. Alle Signale besitzen verschiedene Energie, die im wesentlichen von E_g , der Energie des Pulses $g(t)$ abhängt.



Jedes der Symbole (00, 01, 11, 10) wird in einem Symbolintervall kT_b gesendet. Je geringer die Distanz zwischen den Signalen ist, desto schwerer ist es diese zu detektieren. Die minimale Euklidische Distanz zwischen zwei benachbarten Signalpunkten ist:

$$d_{mn}^{(e)} = \sqrt{(s_m - s_n)^2} = \sqrt{\frac{E_g}{2}} |A_m - A_n| = d\sqrt{2E_g} |m - n|$$

Somit ist das PAM-Signal ein Zweiseitenband-AM-Signal und benötigt wie im Fall der analogen Modulation die doppelte Bandbreite (schmalbandiges Verfahren). Im wesentlichen sind PAM-Signale eindimensional, sie können dennoch auch zweidimensional sein, diese werden durch orthogonale Signale mit identischer Energie A^2T und somit die euklidische Distanz $d_{12} = \sqrt{2E_g}$.

Beispiel: M-äre Modulation mit 5-Bit Symbolblöcken. Welche Art?

01001 01101 11101 10100 Unterteilung von k -Bits (hier 5) in Symbole. Jedes Symbol ist einzigartig für jede mögliche Bitkombination. Es werden 2^k Symbole benötigt.

Wenn eine Übertragung mit 10kbaud $\frac{R}{K}$ (Symbole pro Sekunde) stattfindet, wäre die Bitübertragungsrate $R = \frac{R}{K} \cdot K$ 50kbit.

2.5 PSK - Phase-Shift-Keying

Es gibt diskrete Phasen des Signals die einem Symbol zugeordnet werden. Eine PSK mit $M = 2$ ist eine PAM. Eine PSK-Modulation mit $M = 2$ wird auch als Binary-Phase-Shift Keying (**BPSK**), $M = 4$ QPSK und $M = 8$ als Octal PSK bezeichnet. Bei zu vielen PSK ist es schwer das Signal zu detektieren. Für alle PSK-Signale gilt die gleiche Energie.

Offensichtlich kann diese Modulationsart durch zwei ortonormale Basen dargestellt werden:

$$s_m(t) = \Re\{g(t)e^{j2\pi\frac{(m-1)}{M}}e^{j2\pi f_c t}\}$$

$$= g(t) \cdot \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi(m-1)}{M}\right)$$

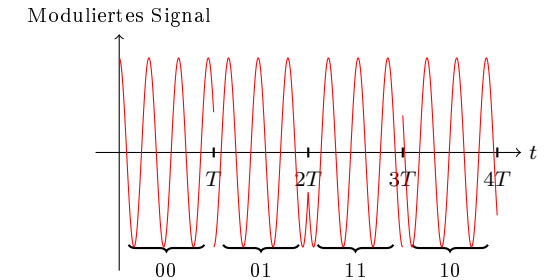
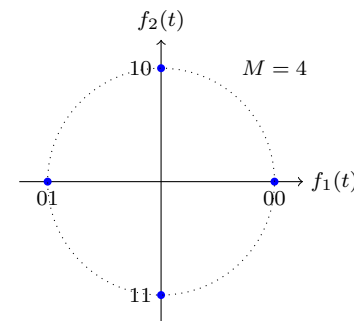
$$= g(t) \cos\left(\frac{2\pi(m-1)}{M}\right) \cos(2\pi f_c t) - g(t) \sin\left(\frac{2\pi(m-1)}{M}\right) \sin(2\pi f_c t)$$

$$E_m = \int_0^T |s_m(t)|^2 dt = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\int \cos(\cdot)} \int g^2(t) dt = \frac{E_g}{2}$$

$$s_m(t) = s_{m1} \cdot f_1(t) + s_{m2} \cdot f_2(t)$$

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t)$$



Diese Signalform kann in einen sogenannten **Quadraturanteil** ($Q = \sin(\Omega)$) und in einen **Inphasenanteil** ($I = \cos(\Omega)$) aufgeteilt werden. Für die Amplitude des Signals gilt $A^2 = I^2 + Q^2$. Die euklidische Distanz zwischen zwei PSK-Signalen $s_m(t)$ und $s_n(t)$ kann ausgedrückt werden durch:

$$I^2 = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{M}(m-1)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{M}(n-1)\right) \right]^2 \quad Q^2 = \left[\sin\left(\frac{2\pi}{M}(m-1)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{M}(n-1)\right) \right]^2$$

$$(d_{mn}^e)^2 = \|s_m - s_n\|^2 = \frac{E_g}{2} (I^2 + Q^2) \quad \Rightarrow (d_{mn}^e)^2 = \sqrt{E_g \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}(m-n)\right) \right]}$$

$$\text{min. euklidische Distanz:} \quad d_{min}^e = \|s_m - s_n\| = \sqrt{E_g \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right) \right]}$$

Beispiel: M-äre Modulation mit 5-Bit Symbolblöcken. Welche Art?

01001 01101 11101 10100

Unterteilung von k -Bits (hier 5) in Symbole. Jedes Symbol ist einzigartig für jede mögliche Bitkombination. Es werden 2^k Symbole benötigt.

2.6 QAM - Quadraturamplitudenmodulation

Eine QAM kann als M_1 -stufige PAM und als M_2 -stufige PSK dargestellt werden. Sogenannte zweidimensionale Bandpasssignale. Wobei A_{mc} und A_{ms} die Informationstragenden Signalamplituden der Quadraturträger und $g(t)$ eine Pulsform darstellen. Es werden wieder k -Bit-Symbole der Informationssequenz a_n auf zwei in Quadratur befindliche Trägersignale $\cos(2\pi f_c t)$ und $\sin(2\pi f_c t)$ moduliert.

$$s_m(t) = \Re\{[A_{mc} + jA_{ms}]e^{j2\pi f_c t}g(t)\} \quad m = 1, 2, \dots, M$$

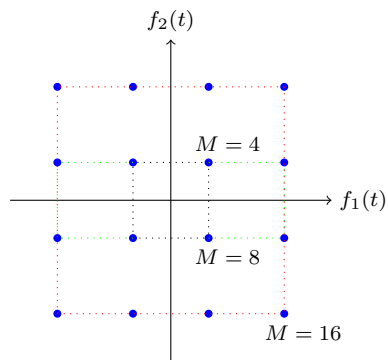
$$= A_{mc}g(t)\cos(2\pi f_c t) - A_{ms}g(t)\sin(2\pi f_c t)$$

Offensichtlich kann diese Modulationsart durch zwei ortonormale Basen dargestellt werden:

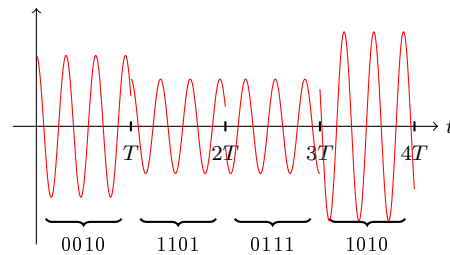
$$s_m(t) = s_{m1} \cdot f_1(t) + s_{m2} \cdot f_2(t)$$

$$s_{m1}(t) = \langle s_m(t), f_1(t) \rangle = \int_0^T s_m(t)f_1^*(t)dt$$

$$s_m(t) = \begin{bmatrix} A_{mc}\sqrt{\frac{E_g}{2}} & A_{ms}\sqrt{\frac{E_g}{2}} \end{bmatrix}$$



Moduliertes Signal (M=16)



Diese Signalform kann in einen sogenannten **Quadraturanteil** ($Q = \sin(\Omega)$) und in einen **Inphasenanteil** ($I = \cos(\Omega)$) aufgeteilt werden. Weiteres siehe PSK. Bei der Betrachtung einer rechtwinkligen Raumkonstellation (siehe Diagramm oben links) müssen die Punkte aller 2-er Potenzen darstellen, um die Bits zu Interpretieren. Eine Quadratur der Konstellationspunkte hat eine Verdopplung der Signalmenge zur Folge. Der Abstand zweier benachbarter Signalpunkte ist immer identisch!

min. euklidische Distanz: $d_{min}^e = \|s_m - s_n\| = \sqrt{\frac{E_g}{2} [(A_{mc} + A_{nc})^2 + (A_{ms} - A_{ns})^2]}$

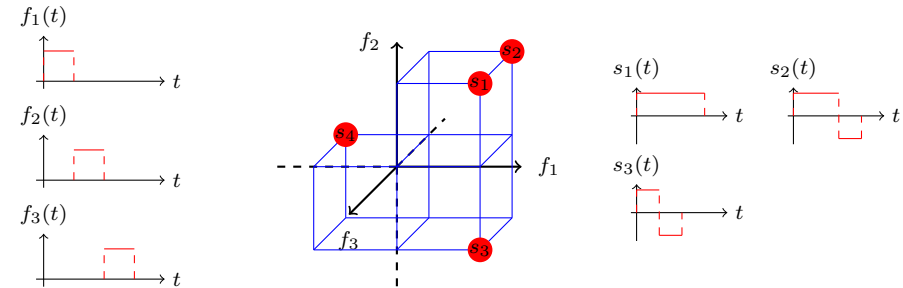
Beispiel: M-äre Modulation mit 5-Bit Symbolblöcken. Welche Art?

01001 01101 11101 10100

Unterteilung von k -Bits (hier 5) in Symbole. Jedes Symbol ist einzigartig für jede mögliche Bitkombination. Es werden $2^5 = 32$ Symbole benötigt. Es kann somit eine 32-QAM verwendet werden. Es sind größere QAMs möglich. Es wird nur jedes zweite Signal verwendet, somit ist der Signal-Rauschabstand (SNR) geringer.

2.7 Orthogonale Entwicklung von Signalen & FSK

Bei der orthogonalen Entwicklung von Signalen wird durch Projektion der Signale auf geeignete Basen ein Signalraum der Dimension M geschaffen. Jedes der Signale kann eine Information enthalten. Eine Information entspricht einem Symbol.



Wenn das Skalarprodukt zweier Signale null ergibt, dann sind diese Signale zueinander orthogonal. Wenn sie zudem noch die Norm 1 besitzen, sind sie ortonormal. Es wird immer die Energie des Signals normiert! Um Signale entsprechend zu entwickeln muss eine ortonormale Basis (siehe Plot f_1, f_2, f_3) gebildet werden.

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int x_1(t) \cdot x_2^*(t) dt$$

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle} = \sqrt{\int |x(t)|^2 dt}$$

$$E_k(t) = \|s_{kn}\|^2$$

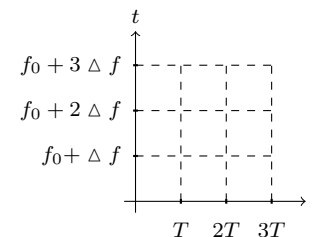
(Orthogonal bedeutet das die Vektoren lin. unabh. sind, aber nicht andersrum!)

$$s(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} s_i f_i(t)$$

$$g_1(t) = \frac{s_1(t)}{\|s_1(t)\|}$$

$$g_2(t) = \frac{s_2(t) - \langle s_2(t), f_1(t) \rangle \cdot f_1(t)}{\|s_2(t) - \langle s_2(t), f_1(t) \rangle \cdot f_1(t)\|}$$

$$f_k(t) = \frac{s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle s_k(t), f_i(t) \rangle \cdot f_i(t)}{\sqrt{\int |s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle s_k(t), f_i(t) \rangle \cdot f_i(t)|^2 dt}}$$



Eine **mehrdimensionale Signalisierung** erlaubt das Übertragen mehrerer Signale auf einmal (z.B. bei PAM-Signalen). Es werden pro Zeiteinheit T N -Signale gleichzeitig übertragen (**Frequency-Shift-Keying**). Es kann eine Unterteilung in Zeit und Frequenzbereich vorgenommen werden. Hierdurch werden sogenannte Kurzzeitspektren erzeugt, sprich zu einer gewissen Zeit gibt es ein Signal (ähnlich Notenblatt). Dieses Vorgehen wird bei z.B. 12 Zeit und Frequenzschlitten um einen 24-dimensionalen Signalvektor zu übertragen, 4-QAM genannt (2bit).

2.8 Kreuzkorrelation

Die Kreuzkorrelation beschreibt die Ähnlichkeit zweier Signale. Durch die Normierung wird das Ähnlichkeitsmaß $|\delta_{km}| \in [0, 1]$ begrenzt. Das Innere Produkt erzeugt die Projektion auf den Vektor. Der Kreuzkorrelationskoeffizient ist eine komplexe Zahl im Einheitskreis. Wenn $\delta_{km} = 1$, dann sind die Signale vielfache voneinander. Wenn die Signale reellwertig sind, dann beschreibt δ_{km} den Kosinus des eingeschlossenen Winkels (nur Reelle Achse). Ist das Signal komplexwertig, liegt das Signal im gesamten Einheitskreis. Bei $\delta_{km} = 0$ sind die Signale orthogonal zueinander. Bei $\delta_{km} = 1$, ist die Phasenverschiebung 180° .

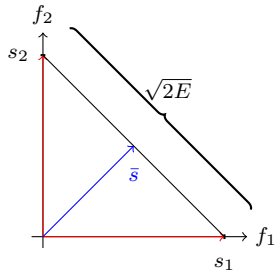
$$\delta_{km} = \frac{\langle s_{lk}(t), s_{lm}(t) \rangle}{\|s_{lk}(t)\| \cdot \|s_{lm}(t)\|}$$

für FSK:

$$\delta_{km} = \frac{\frac{2E}{T} \int_0^T e^{j2\pi(k-m)\Delta f t} dt}{\frac{2E}{T} \int_0^T e^{j2\pi(k-m)\Delta f t} dt} = \frac{\sin(nT(k-m)\Delta f)}{nT(k-m)\Delta f} e^{j2\pi(k-m)\Delta f t}$$

2.9 Simplex-Signale

Um die Energie der Signale geringer zu bekommen, muss der Nullpunkt der Signale verschoben werden und zwar genau in den Mittelwert der orthogonalen Signale. Die Orthogonalität geht durch das Verschieben des Nullpunkts verloren, aber die Energie wird geringer und die Distanz zwischen den Signalen bleibt gleich. Durch diese Operation schrumpft die Dimension des Signalraums um 1 (z.B. von 3 auf 2, usw...).



$$\dot{E}_s = \int_0^T |\dot{s}_m(t)|^2 dt \left(1 - \frac{1}{M}\right) E_s$$

$$\dot{s}'_m(t) = s_m - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M s_k$$

Die Energie jedes der orthogonalen Signale ist im Simplexsignalsatz geringer als im orthogonalen Signalsatz. Simplexsignale haben eine negative Korrelation, die für alle Signalpaare gleich ist. Die Distanz zwischen zwei Signalpunkten beträgt $\sqrt{2E}$. Die geometrische Darstellung eines Satzes von M Simplexsignalen erhält man, indem der Durchschnittssignalvektor \bar{s} von dem Satz orthogonaler Signale subtrahiert.

$$\bar{s} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{m=1}^M s_m$$

2.10 Signale auf Basis binärer Codes

Die Signale bestehen aus M-Signalen ($m = 1, 2, 3, \dots, M$) die binär codiert worden sind, wobei $c_{mj} = 0$ oder $c_{mj} = 1$ für alle m, j . Jede Komponente kann mittels BPSK-Signal dargestellt werden. Es existieren somit 2^k mögliche Signale, diese können in einem N-Dimensionalen Raum dargestellt werden. Jedes Signal hat die gleiche Energie E und die Kreuzkorrelation der Signale hängt von der Selektion der Signalmenge M ab.

$$c_m = [c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \dots, c_{mN}]$$

$$c_{mj} = 0 \Rightarrow s_{mj}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T_e}} \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

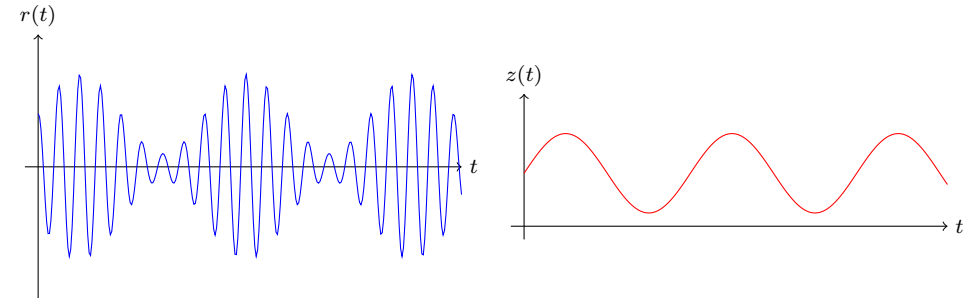
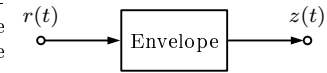
$$c_{mj} = 1 \Rightarrow s_{mj}(t) = -\sqrt{\frac{2E}{T_e}} \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$d = 2\sqrt{\frac{E_s}{N}}$$

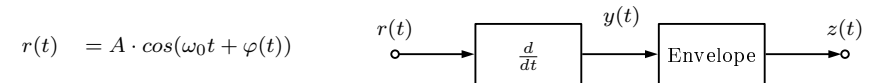
3 Empfänger

3.1 Envelope Detektor (Hüllkurvendetektor)

Der Envelopen Demodulator kann nur bei amplitudenmodulierten Signalen verwendet werden. Um z.B. ein Amplitudenmoduliertes Signal zu demodulieren wird nur die positive Hälfte eines zwei Seitenband AM Signals genommen und eine Hüllkurve über die Ausgangsfunktion gebildet. Das Ausgangssignal ist dann proportional zum modulierten Signal.



1. Beispiel: Man zeige, dass ein Großhub-FM-Signal mit Hilfe einer Kaskade aus Differentiation und einem Enveloppendemodulator detektiert werden kann.



$$r(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} r(t) = A \cdot \left(\omega_0 t + \underbrace{\frac{d\varphi(t)}{dt}}_{=\Delta\omega s_1(t)} \right) (-\sin(\omega_0 t + \varphi(t))) = -A \cdot \omega_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega s_1(t)}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t + \varphi(t))$$

Envelopen Demodulator $\Rightarrow z(t) \sim 1 + m s_1(t) \triangleq A(t)$

$$\underbrace{\left| \frac{\Delta\omega}{\omega_0} s_1(t) \right|}_{=m} < 1$$

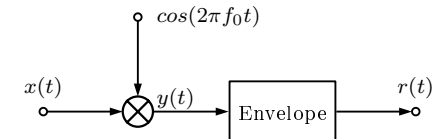
2. Beispiel: Gegeben sei ein allgemeines PM-Signal $x(t)$ mit dem Informationstragenden Signal $s(t)$. Dann kann das Signal demoduliert werden mit Hilfe eines Produktdemodulator und einem Enveloppendetektor.

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + m s_1(t))$$

$$y(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + m s_1(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \cos(4\pi f_0 t + m s_1(t)) + \frac{A}{2} \cos(2\pi f_0 t)$$

$$TPF \Rightarrow \frac{A}{2} \cdot \cos(m s(t)) \Rightarrow r(t) = \frac{A}{2} |\cos(m s(t))| \neq \beta + \alpha s(t)$$

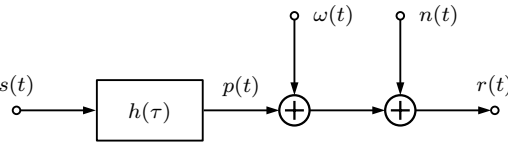
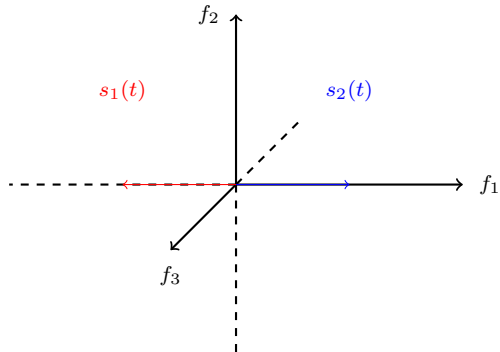


Die Aussage, dass das Signal $r(t)$ auf einer linearen mit $s(t)$ zusammenhängt, ist falsch.

3.2 AWGN-Kanäle

Im Fall der LTI-Systeme wird das Signal am Empfänger als Faltung des gesendeten Informationssignals mit der Eigenschaft des Übertragungskanals dargestellt. Im Fall der realen Systeme wird das gesendete Informationssignal noch mit einem Rauschen überlagert. Dieses Rauschen wird als AWGN (additive white gaussian noise) bezeichnet und ist durch die Normalverteilung (Gausverteilung) geprägt. Es gibt Störungen durch Interferenzen mit anderen Signalen ($\omega(t)$) und thermisches Rauschen des Verstärkers ($n(t)$).

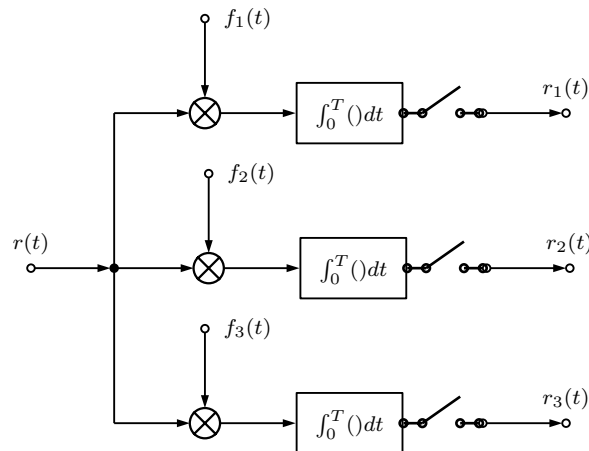
Das Rauschen kann im Signalraum \mathbb{S} , der von der Menge N orthogonalen Basen $f_n(t)$ aufgespannt wird. Graphisch dargestellt mit der Dimension $N = 3$ und $s_m(t)$ aus $1 \leq m \leq M = 2$, welche antipodal aufgespannt sind:



In einem idealen Kanal ist $h(t) = \delta(t)$ und die Interferenz ist nicht vorhanden. Somit ist $p(t) = s(t)$, $\omega(t) = 0$ und daraus resultiert $r(t) = s_m(t) + n(t)$ mit $n(t)$ als stochastischer Prozess der unabhängig von $s(t)$ ist.

Deutlich zu sehen ist, dass der Rauschprozess nicht nur in der Signalebene, sondern in allen Basen verteilt ist. Die Rauschanteile sind zudem in jeder Dimension unabhängig, daher sollten für die Signaldetektion nicht mehr Dimensionen als nötig betrachtet werden. Die maximale Fehlerwahrscheinlichkeit bei AWGN Kanälen ist 50%, da bei 100% alles falsch wäre und somit das richtige Signal die Invertierung des erkannten Signals ist.

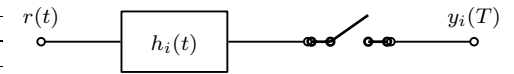
3.3 Signal Demodulator



Der abgebildete **Korrelations Demodulator** versucht die empfangenen Signale auf die Basen zu projizieren. Hierzu hat der Detektor die einzelnen Basen $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots$ zur Verfügung. Das Empfangssignal ist wie folgt definiert: $r(t) = s_m + n$ für $m = 1, 2, 3, \dots, M$. Das Empfangssignal $r(t)$ ist ein Zufallsvektor, da dieser von dem Rauschvektor n abhängt. Allgemein kann für jeden der k Ausgänge gesagt werden:

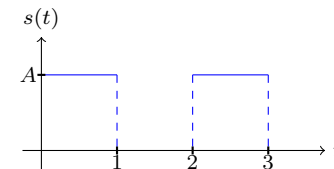
$$\begin{aligned} r_k &= \int_0^T r(t) \cdot f_k(t) dt \\ &= \int_0^T s(t) \cdot f_k(t) dt + \int_0^T n(t) \cdot f_k(t) dt \\ &= s_{mk} + n_k \end{aligned}$$

Eine weitere Detektionsart ist der sogenannte **Matched Filter** oder **signalangepasster Filter**, dieser basiert auf dem gleichen Prinzip des Korrelationsdemodulators, aber der Aufbau wird vereinfacht. Bei der Verwendung dieser Filter wird als Impulsantwort das spiegelverkehrte Signal geliefert. Durch diese Vereinfachung ist der Signal-Rausch-Abstand (SNR) geringer. Durch die Verwendung des angepassten Filters h_i und **Abtastung** bei kT wird eine Korrelation des Eingangssignals mit dem Basissignal f_i erzeugt.



$$\begin{aligned} h_i(t) &= f_i(T-t) \quad \text{Signalangepasster Filter auf } r(t) \\ y_i(t) &= r(t) * h_i(t) = \int_{\mathbb{R}} r(\tau) h_i(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} r(\tau) f_i(T-t-\tau) d\tau \\ y(T) &= \int_{\mathbb{R}} r(\tau) f_i(\tau) d\tau = \langle r(t), f_i(t) \rangle = r_i \end{aligned}$$

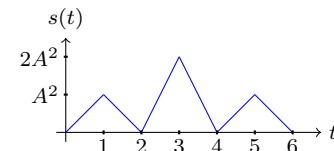
Beispiel: Es sei $r(t) = s(t) + n(t)$ ein empfangenes Signal mit Rauschsignal $n(t)$ eines AWGN mit Leistungsspektraldichte $\frac{N_0}{2}$ und $s(t) = A \cdot (p(t) + p(t-2))$ mit $p(t) = \text{rect}(2t-1)$.



Signalangepasster Filter mit:

$$\begin{aligned} \text{Varianz: } \sigma_i^2 &= \frac{N_0}{2} \\ \text{Erwartungswert: } \mu &= \bar{s} \\ s(t) &= A \cdot [\text{rect}(2t-1) + \text{rect}(2t-3)] \end{aligned}$$

Das Ausgangssignal des Filters, wenn der Filter an das Signal angepasst ist $h(t) = s(t)$



$$\begin{aligned} y(t) &= A[p(t) + p(t-2)] * A[p(t) + p(t-2)] \\ &= A^2 \left[\underbrace{p(t) * p(t)}_{\Delta(t)} + 2 \underbrace{p(t) * p(t-2)}_{\Delta(t-3)} + \underbrace{p(t-2) * p(t-2)}_{\Delta(t-5)} \right] \\ &= A^2 [\Delta(t) + 2\Delta(t-3) + \Delta(t-5)] \end{aligned}$$

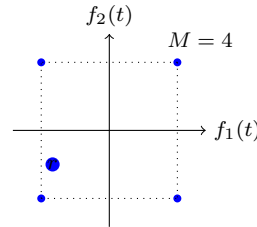
Der Erwartungswert der Zufallsvariablen $r(t)$ bei $T = 3$ und somit ist der Erwartungswert von $s = 2A^2$. Das Rauschen ist mittelwertlos und normalverteilt mit der Varianz $\frac{N_0}{2}$. Zudem gilt

$$r(t) = s(t) - n(t) \Leftrightarrow n(t) = r(t) - s(t).$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E((r-s)^2) = E(n^2) = E\left(\int_{\mathbb{R}} n(t) \cdot s(t) dt \cdot \int_{\mathbb{R}} n(\tau) \cdot s(\tau) d\tau\right) \\ &= E\left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} n(t)n(\tau)s(t)s(\tau) dt d\tau\right) = \int \int E(\underbrace{n(t)n(\tau)}_{\frac{N_0}{2} \delta(t-\tau)}) s(\tau)s(t) dt d\tau \\ &= \int \int \frac{N_0}{2} \delta(t-\tau) s(\tau)s(t) dt d\tau = \frac{N_0}{2} \underbrace{\int s(t)s(t) dt}_{\text{Energie}} = \frac{N_0}{2} \cdot 2A^2 = N_0 A^2\end{aligned}$$

3.4 Signal Detektor

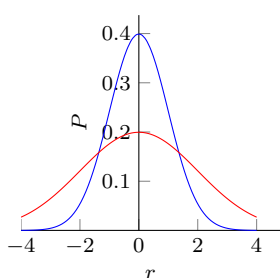
Nachdem das Empfangssignal $r(t)$ in seine einzelnen Komponenten $r_1(t), r_2(t), \dots$ aufgeteilt wurde, kann nun entschieden werden, welches Signal $s_1(t), s_2(t), \dots$ gesendet wurde. Hierfür wird der Vektorraum \mathbb{R}^N portioniert in Teilmengen $R(s_k)$, welche als Entscheidungsräume bezeichnet werden. Es wird sich genau dann für ein s_k entschieden, wenn das Empfangssignal r in einem Entscheidungsraum $R(s_k)$ liegt.



Wenn $p(r, s_k)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte von r , wenn s_k gesendet wurde, so ist $P(r \in R(s_k) | s_k \text{ gesendet})$ und somit ist die bedingte Fehlerwahrscheinlichkeit $P(\text{Fehler} | s_k \text{ gesendet})$. Die Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit ist $P(\text{Fehler})$. Die Entscheidungsräume sind wichtig um die Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit minimal zu halten. Sind die Signalwahrscheinlichkeiten $P(s_k) = \frac{1}{M}$ gleich, so kann man hierfür das Maximum-Likelihood Kriterium verwenden

$$\begin{aligned}P(r \in R(s_k) | s_k \text{ gesendet}) &= \int_{R(s_k)} p(r | s_k) dr \\ P(\text{Fehler} | s_k \text{ gesendet}) &= 1 - \int_{R(s_k)} p(r | s_k) dr \\ P(\text{Fehler}) &= \sum_{k=1}^M P(s_k) \cdot P(\text{Fehler} | s_k \text{ gesendet}) \\ \text{ML: } p(r | s_k) &= \max_{i=1, \dots, M} p(r | s_i)\end{aligned}$$

1. Beispiel: Von einer mittelwertlosen, normalverteilten Wahrscheinlichkeitsgröße sei bekannt, dass die Varianz den Wert $\sigma_1^2 = 1$ und $\sigma_2^2 = 4$ mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annehmen kann.



Die Wahrscheinlichkeitsdichten sind mit $i = 1, 2$

$$p(r | \sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_i^2}}$$

Die blaue Kurve ist mit Varianz σ_1^2 und die rote Kurve ist mit σ_2^2 . Mit dem Maximum Likelihood Kriterium werden die Schnittpunkte so festgelegt, dass im äußeren Bereich die rote Kurve und im inneren Bereich die blaue Kurve als Entscheidungsraum festgelegt wird.

Die Entscheidungsräume sind somit bei $R(\sigma_1) = [-r_0; r_0]$ und bei $R(\sigma_2) = (-\infty; -r_0] \cup [r_0; \infty)$ mit $r_0 = \sqrt{\frac{8 \ln(2)}{3}}$. Die Fehler können mit der Q Funktion ermittelt werden. Die Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit liegt dann bei $\approx 0,336$.

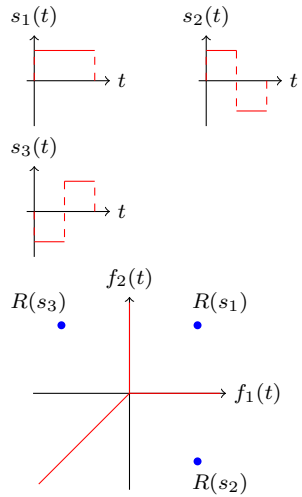
2. Beispiel:

$$\begin{aligned}P(r | \sigma_1^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_1^2}} \geq p(r | \sigma_2^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_2^2}} \\ \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\right) - \frac{r^2}{2\sigma_1^2} &\geq \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\right) - \frac{r^2}{2\sigma_2^2} \\ r^2 \left(\frac{1}{2\sigma_2^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right) &\geq \ln\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \\ r^2 \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_2^2}\right) &\leq \ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \\ r^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) &\leq \ln(2) \\ |r| &= \sqrt{\frac{8 \ln(2)}{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{Fehler} | \sigma_1^2) &= 2Q\left(\frac{r_0}{\sigma_1}\right) \approx 2Q(1,4) \approx 0,16152 \\ P(\text{Fehler} | \sigma_2^2) &= 1 - 2Q\left(\frac{r_0}{\sigma_2}\right) \approx 1 - 2Q(0,7) \approx 0,51061 \\ P(\text{Fehler}) &= \frac{1}{2} P(\text{Fehler} | \sigma_1^2) + \frac{1}{2} P(\text{Fehler} | \sigma_2^2)\end{aligned}$$

3. Beispiel: Die Nachrichtensignale $s_1(t)$, $s_2(t)$ und $s_3(t)$ werden über einen AWGN-Kanal mit Leistungsspektraldichte $\frac{N_0}{2}$ übertragen. Dabei ist: $s_1(t) = \text{rect}(\frac{2t}{T} - 1)$ und $s_2(t) = -s_3(t) = \text{rect}(\frac{4t}{T} - 1) - \text{rect}(\frac{4t}{T} - 3)$

Als orthonormale Basis könnten nun zwei Basen erstellt werden:



$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \text{rect}\left(\frac{4t}{T} - 1\right) \\ f_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \text{rect}\left(\frac{4t}{T} - 3\right) \end{aligned}$$

Aus diesen Basen können nun die Signale vollständig dargestellt werden:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sqrt{\frac{T}{2}} \cdot f_1(t) + \sqrt{\frac{T}{2}} \cdot f_2(t) \\ s_2(t) &= \sqrt{\frac{T}{2}} \cdot f_1(t) - \sqrt{\frac{T}{2}} \cdot f_2(t) \\ s_3(t) &= -\sqrt{\frac{T}{2}} \cdot f_1(t) + \sqrt{\frac{T}{2}} \cdot f_2(t) \end{aligned}$$

Die Entscheidungsräume können nun grafisch dargestellt werden. Man sieht: $P(\text{Fehler}|s_1 \text{ gesendet}) < P(\text{Fehler}|s_2 \text{ gesendet}) = P(\text{Fehler}|s_3 \text{ gesendet})$. Somit ist s_1 am fehleranfälligsten.

Für die bedingten Fehlerwahrscheinlichkeiten gilt für die drei Signale mit $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$:

$$\begin{aligned} p(r|s_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\|r - s_1\|^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\|r - \sqrt{\frac{T}{2}}\|^2}{2\sigma^2}\right) dr_1 \cdot \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\|r - \sqrt{\frac{T}{2}}\|^2}{2\sigma^2}\right) dr_2 \\ &= (1 - Q(\frac{\sqrt{T/2}}{\sigma}))^2 = (1 - Q(\sqrt{T/N_0}))^2 \end{aligned}$$

$$P(\text{Fehler}|s_1 \text{ gesendet}) = 1 - (1 - Q(\sqrt{T/N_0}))^2 = (2 - Q(\sqrt{T/N_0}))Q(\sqrt{T/N_0})$$

Die Integration über die Ereignismenge $R(s_2)$ kann über die Betrachtung mit zwei Hilfsmengen $R_2 = \{r \in \mathbb{R}^2 : r_1 \geq 0, r_2 \leq 0\}$ und $R'_2 = \{r \in \mathbb{R}^2 : r_2 \leq r_1\}$ Wegen der Symmetrie der Dichtefunktion und der Mengen gilt $P(r \in R(s_2)|s_2)$, dies kann Analog zu der Betrachtung von $P(r \in R(s_1)|s_1) = (1 - Q(\sqrt{T/N_0}))^2$ gemacht werden. Bei der Berechnung von $P(r \in R''(s_2)|s_2)$ wird R'' als Halbebene angesehen (Siehe Betrachtung Halbebene Stochastik). Die Gerade $r_1 = r_2$ hat den Abstand $d = \sqrt{T}$, somit gilt $P(r \in R''(s_2)|s_2) = 1 - Q(\sqrt{2T/N_0})$.

$$P(\text{Fehler}|s_2 \text{ gesendet}) = \frac{1}{2}((2 - Q(\sqrt{T/N_0})Q(\sqrt{T/N_0}) + Q(\sqrt{2T/N_0}))$$

Durch die Symmetrie von s_2 und s_3 ergibt sich als Lösung:

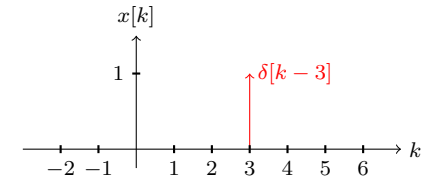
$$\begin{aligned} P(\text{Fehler}|s_1 \text{ gesendet}) &\approx 0.155 \\ P(\text{Fehler}|s_2 \text{ gesendet}) &\approx 0.089 \\ P(\text{Fehler}|s_3 \text{ gesendet}) &\approx 0.089 \\ P(\text{Fehler}) &\approx 0.111 \end{aligned}$$

4 Diskrete Signale

4.1 diskrete Funktionen

Diracstoß

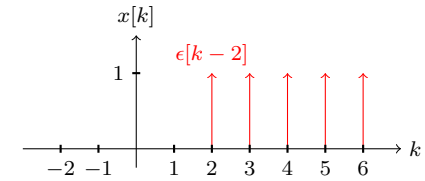
$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Sprungfolge

$$\epsilon[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

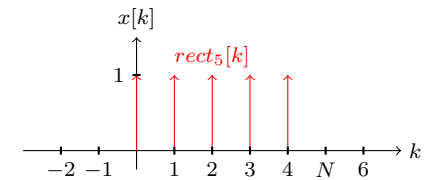
$$\epsilon[k] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k-i]$$



Rechteckimpuls

$$\text{rect}_n[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

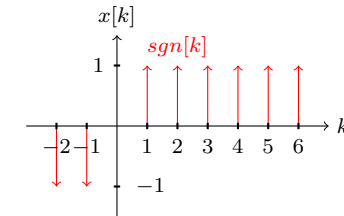
$$\text{rect}_n[k] = \epsilon[k] - \epsilon[k-N] = \sum_{i=0}^{N-1} \delta[k-i]$$



Signumfolge

$$\text{sgn}[k] = \begin{cases} 1 & k > 0 \\ 0 & k = 0 \\ -1 & k < 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}[k] = \epsilon[k] - \epsilon[-k] = 2\epsilon[k] - 1 - \delta[k]$$



Energie

Für periodische Signale reicht die Betrachtung der Periode N_p bei beliebigen Startpunkt k_0 . Ein Energiesignal ist kein Leistungssignal und umgekehrt, da die Leistung eines Energiesignals null ist.

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x[k]]^2 \quad \text{Energiesignal } E_x < \infty$$

$$P_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n [x[k]]^2 \quad \text{mittlere Leistung}$$

$$P_x = \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_0}^{k_0+N_p-1} [x[k]]^2 \quad \text{period. Leistungssignal}$$

Skalarprodukt und Kreuzkorrelation

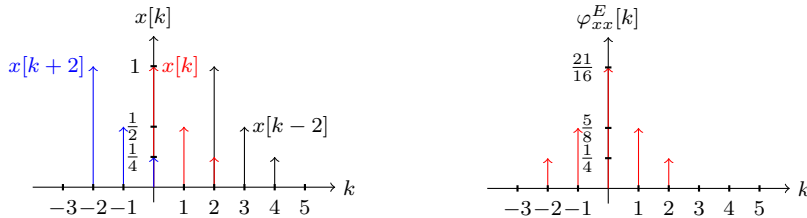
Das innere Produkt mit sich selber ist die Energie des Signals. Die Signale sind orthogonal aufeinander, wenn das Innere Produkt null ergibt. Die Kreuzkorrelation wird mit einem um K verschobenen bzw. Zeitlich verzögerten Anteil durchgeführt.

Bei periodischen Signalen mit gemeinsamer Periode N_p (gemeinsames Vielfache der einzelnen Perioden N_x und N_y) mit beliebigem Startpunkt k_0 :

$$\begin{aligned}\varphi_{xy}^L[k] &= \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_0}^{k_0+N_p-1} x^*[k]y[k+K] \\ \varphi_{xy}[k] &= \varphi_{xy}^*[k] \\ \varphi_{xx}[k] &= \varphi_{xx}^*[-k]\end{aligned}$$

Zudem gelten die unteren Bedingungen, da die relative Verschiebung von k wichtig ist.

Beispiel:



Man sieht, dass das Signal ein Energiesignal ist. $x[k]$ ist nicht periodisch.

$$E_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [x[k]]^2 = 1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{21}{16} < \infty$$

Die mittlere Leistung von $x[k]$ ist gleich Null.

$$\begin{aligned}\varphi_{xx}^E[k] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]x[k+2] = 1 \cdot \frac{1}{4} \\ \varphi_{xx}^E[2] &= \varphi_{xx}^E[-2]\end{aligned}$$

Die Korrelationsspitze bzw. das Maximum liegt bei $k = 0$. Beispiel für solche Anwendungen ist bei der zeitlichen Synchronisation von WLAN. Hardware technisch kann dies über einen Differentiation (Vorzeichenänderung = Nulldurchgang) umgesetzt werden.

4.2 z-Transformation

Allgemein gilt für die Transformation und Rücktransformation folgender Satz:

$$\begin{aligned}x[k] &\longleftrightarrow X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} \quad z \in \mathbb{C} \\ \delta[k+k_0] &\longleftrightarrow z^{k_0}\end{aligned}$$

Desweiteren gelten noch folgende Rechenregeln und Definitionen:

$$\begin{aligned}\delta[k] &\longleftrightarrow 1 & \frac{a}{z^m} &\longleftrightarrow a\delta[k-m] \\ \epsilon[k] &\longleftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1 & \frac{z}{z-a} &\longleftrightarrow a^k \epsilon[k] \\ \alpha^k \epsilon[k] &\longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| > \alpha & \frac{1}{z-a} &\longleftrightarrow a^{k-1} \epsilon[k-1] \\ \alpha_1 x_1[k] + \alpha_2 x_2[k] &\longleftrightarrow \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) & \frac{z}{(z-a)^{m+1}} &\longleftrightarrow \binom{k}{m} a^{k-m} \epsilon[k] \\ x[k] * y[k] &\longleftrightarrow X(z) \cdot Y(z) & \text{Ableitung: } x[k] - x[k-1] &\longleftrightarrow X(z) \cdot \frac{z-1}{z} \\ \delta[k] + 3\delta[k-2] &\longleftrightarrow 1 + \frac{3}{z^2} & \text{Integral: } \sum_{i=-\infty}^k x[i] &\longleftrightarrow X(z) \cdot \frac{z}{z-1} \\ x[-k] &\longleftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) & \text{peri. Fortsetzung: } \sum_{i=0}^k x[k-iN] &\longleftrightarrow X(z) \cdot \frac{1}{1-z^{-N}} \\ x^*[k] &\longleftrightarrow X^*(z^*) & \varphi_{xy}^E = x^*[k] * y[k] &\longleftrightarrow X^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \cdot Y(z) \\ x[k-k_0] &\longleftrightarrow X(z) \cdot z^{-k_0}\end{aligned}$$

Rechenregeln für Reihen und Folgen zur z-Transformation

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n a^i &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad a \neq 1 \\ \sum_{i=0}^{\infty} a^i &= \frac{1}{1-a} \quad 0 < a < 1\end{aligned}$$

1.Beispiel z-Transformation mit der geometrischen Reihe (Bedingung: $|\frac{1}{2z}| < 1$ bzw. $\frac{1}{2} < |z|$)

(Konvergenzbereich $r_0 < |z|$)

$$x[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \epsilon[k] = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \delta[k-i] \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i z^{-i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^i}_{\text{Bedingung geom. Reihe:}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

2.Beispiel z-Transformation mit der geometrischen Reihe. Der Konvergenzbereich ist notwendig, da 2 Folgen die gleiche z-Transformierte haben können

$$\begin{aligned}x[k] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k-4i] &\longleftrightarrow 1 + z^{-4} + z^{-8} + z^{-12} + \dots = 1 + z^{-4} + (z^{-4})^2 + (z^{-4})^3 + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (z^{-4})^i = \frac{1}{1-z^{-4}} \quad \text{Konvergenzbereich: } |z^{-4}| < 1\end{aligned}$$

3. Beispiel Taylorreihe der e-Funktion

$$x[k] = \frac{1}{k!} \epsilon[k] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \delta[k] \quad \circ \longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} z^{-i} = 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z}\right)^2 = e^{\frac{1}{z}}$$

4. Beispiel Rücktransformation mit der geometrischen Reihe

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{\underbrace{1-\frac{a}{z}}_{|\frac{a}{z}|<1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a^i z^{-i} \quad \circ \longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} a^i \delta[k-i] = a^k \epsilon[k]^i$$

4.3 Diskrete Faltung

Die Diskrete Faltung verläuft analog zur kontinuierlichen Faltung. Im Z-Bereich wird sie durch eine Multiplikation und um Diskreten Bereich durch eine rückwärts gewichtete Summe dargestellt. Das Neutralelement der Faltung ist der Dirac.

Korrelation und Faltung kann man in Beziehung setzen, siehe letzte Formel

$$y[k] = h[k] * x[k] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h[i] x[k-i]$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$x^*[-k] * y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x^*[-i] y[k-i]$$

$$\stackrel{l=-i}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x^*[l] y[k+l] = \varphi_{xy}^E[k]$$

1. Beispiel Diskrete Faltung händisch berechnen

$$\begin{aligned} y[k] &= x[k] = 2\delta[k] + 4\delta[k-1] + \delta[k-2] * h[k] = 3\delta[k] + 2\delta[k-1] + \delta[k-2] \\ &= 6\delta[k] + 16\delta[k-1] + 13\delta[k-2] + 6\delta[k-3] + \delta[k-4] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 2 & 1 & \cdot & 3 & 2 & 1 \\ & & 6 & 12 & 3 & & \\ & & & 4 & 8 & 2 & \\ \hline & & 6 & 16 & 13 & 6 & 1 \end{array}$$

2. Beispiel $x[k] = \epsilon[k] \quad h[k] = \frac{1}{4}(3^{k+1} + (-1)^k)$

$$\begin{aligned} y[k] &= x[k] * h[k] = \epsilon[k] * h[k] = \sum_{i=0}^k h[i] \quad \text{Da für } k > 0 = y[k] = 0 \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{4}(3^{i+1} + (-1)^i) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{4} \cdot 3^i \cdot 3 + \sum_{i=0}^k \frac{1}{4}(-1)^i \\ &= \frac{3}{4} \frac{3^{k+1} - 1}{3 - 1} + \frac{1}{4} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{-1 - 1} = \frac{3}{8}(3^{k+1} - 1) + \frac{1}{8}(1 - (-1)^{k+1}) \\ \Rightarrow y[k] &= (3^{k+2} - 3 + 1 - (-1)^{k+1}) \cdot \epsilon[k] = (3^{k+2} - (-1)^{k+1} - 2) \cdot \epsilon[k] \end{aligned}$$

4.4 Diskrete LTI-Systeme

Die Systemeigenschaft der Zeitinvarianz zeigt sich in den Koeffizienten \tilde{a}_i und \tilde{b}_i . Das System ist Kausal, wenn der Laufindex l keine negativen Werte umfasst und damit keine zukünftigen Eingangswerte auftauchen. Der Wert n entspricht der Ordnung der Differenzengleichung (Ordnung des Systems $N = \max(n, m)$). Die Systemfunktion $H(z)$ sieht wie folgt aus.

$$y[k] = -\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i y[k-i] + \sum_{l=0}^m \tilde{b}_l x[k-l]$$

$$y[k] = x[k] * h[k] = \sum_i x[i] \cdot h[k-i]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m \tilde{b}_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n \tilde{a}_i z^{-i}}$$

$$\mathcal{L} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(\delta[k-i] \cdot x[i]) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c(k; i) x[i]$$

1. Beispiel Bestimmung des Kerns des Systems mit $y[n] = x[n-2] - 2x[n-3]$

$$\mathcal{L}(ax_1[n] + ax_2[n]) = ax_1[n-2] - bx_2[n-2] - 2(ax_1[n-3] + bx_2[n-3]) = a\mathcal{L}(x_1[n]) + b\mathcal{L}(x_2[n])$$

$$\Rightarrow \text{Der Kern ist: } c(k; i) = \mathcal{L}(\delta[k-i]) = \delta[k-i-2] - 2\delta[k-i-3]$$

$$\Rightarrow \text{Das System ist zeitvariant und kausal}$$

2. Beispiel Bestimmung des Kerns des Systems mit $y[n] = x[n] \cdot x[n-1]$

$$\mathcal{L}(2 \cdot \epsilon[n]) = 4\epsilon[k-1] \neq 2\epsilon[k-1]$$

$$\Rightarrow \text{Das System ist zeitvariant und kausal, aber nicht Linear}$$

3. Beispiel Bestimmung der Differenzengleichung und Impulsantwort

$$H(z) = \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^3 - z^2} = \frac{(z^2 + 1)(z - 1)}{z^2(z - 1)} = \frac{z^2 + 1}{z^2} = 1 + z^{-2}$$

$$\Rightarrow \text{Impulsantwort: } h[k] = \delta[k] + \delta[k-2] \quad \text{Differenzengleichung: } y[k] = x[k] + x[k-2]$$

4. Beispiel Bestimmung der Differenzengleichung und Systemantwort

$$h[k] = ((-1)^k + 2^k) \cdot \epsilon[k] \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z+1} \frac{z}{z-2} = \frac{z(z-2) + z(z+1)}{(z+1)(z-2)} = \frac{2z^2 - z}{z^2 - z - 2}$$

$$\Rightarrow \text{Für } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z)(1 - z^{-1} - 2z^{-2}) = X(z)(2 - z^{-1})$$

$$\Rightarrow H(z) \bullet \circ y[k] - y[k-1] - 2y[k-2] = 2x[k] - x[k-1]$$

5. Beispiel Bestimmung der Impulsantwort und Systemantwort

$$y[k] = x[k-1] + 2x[k-2] + y[k-2] \circ \bullet Y(z) = X(z)z^{-1} + 2X(z)z^{-2} + Y(z)z^{-2}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - z^{-2}} = \frac{z+2}{z^2-1} \Rightarrow \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1}$$

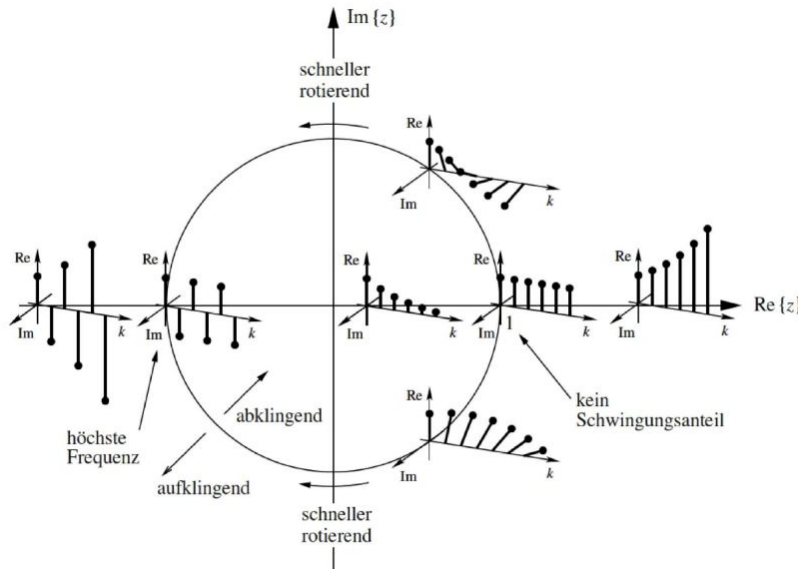
$$\Rightarrow A = \frac{z+2}{z+1} \Big|_{z=1} = \frac{3}{2} \quad B = \frac{z+2}{z-1} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{3}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} \bullet \circ h[k] = \frac{3}{2} \epsilon[k-1] \frac{1}{2} (-1)^{k-1} \epsilon[k-1]$$

4.5 Stabilität

Reagiert ein System auf ein beschränktes Eingangssignal mit einem beschränkten Ausgangssignal, so bezeichnet man es als Stabil. LTI-Systeme sind genau dann stabil, wenn die Systemfunktion $h(t)$ bzw. $h[k]$ kleiner gleich als eine Schranke M und $\sum_k |h[k]| \leq M < \infty$ ist. Die Systemfunktion kann dargestellt werden, indem alle Nullstellen (mit Kreise \circ durch oberen Teil des Bruchs $H[z]$) und alle Polstellen (mit Kreuze \times durch unteren Teil des Bruchs $H[z]$) in die Gaussche Zahlenebene eingetragen werden. An diesem Pol-Nullstellen-Diagramm kann man die Stabilität des Systems ablesen. Es gilt:

- stabil, wenn alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen
- quasistabil, wenn bis auf einfache Pole alle anderen Pole innerhalb des Einheitskreises liegen
- instabil, wenn ein Pol außerhalb oder ein mehrfacher Pol auf dem Einheitskreis liegt.



Betrachtung der Polstellen und das Verhalten der Ausgangssignale in der Gaussebene

1. Beispiel Systemstabilität von $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - x[n-2]$

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - x[n-2] \quad \circ \bullet \quad Y(z) - \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} = X(z) - X(z)z^{-2}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z^2 - 1}{z^2 - z/2}$$

$$\Rightarrow \text{Polstellen: } z_1 = 0 \text{ und } z_2 = 1/2 \text{ Das System ist stabil.}$$

2. Beispiel Systemstabilität von $y[n] = x[n] - 2y[n-1] - y[n-2] - 2y[n-3]$

$$y[n] = x[n] - 2y[n-1] - y[n-2] - 2y[n-3]$$

$$y[n] \quad \circ \bullet \quad Y(z) = X(z) - 2Y(z)z^{-1} - Y(z)z^{-2} - 2Y(z)z^{-3}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-3}} = \frac{z^3}{(z^2 + 1)(z + 2)}$$

$$\Rightarrow \text{Polstellen: } z_1 = i, z_2 = -i \text{ und } z_3 = -2$$

Das System ist instabil, da -2 außerhalb des Einheitskreises ist

4.6 IIR und FIR-Systeme

Es gibt zwei Darstellungsformen von diskreten LTI-Systemen.

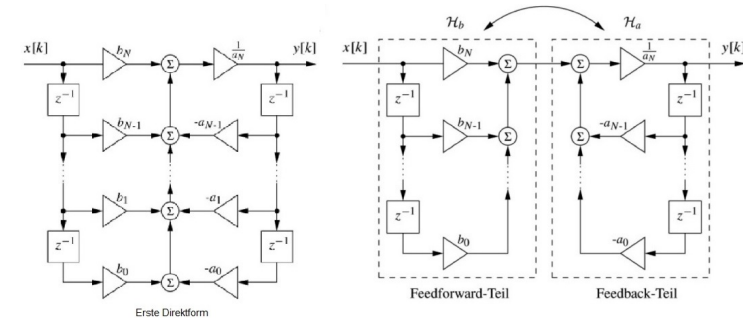
- **IIR-Systeme** haben einen rekursiven Charakter und die Impulsantwort ist zeitlich unbegrenzt.
- **FIR-Systeme** haben einen nicht rekursiven Charakter und die Impulsantwort ist zeitbegrenzt.

IIR-Systeme haben stets eine Differenzengleichung mit Ordnung $n > 0$ wobei $N = \max(n, m)$ (siehe diskrete LTI-Systeme). Wie man sieht, wird die Summe bei rekursiven Systemen der Ausgang gewichtet rückgekoppelt. Hierbei muss für die Koeffizienten gelten $a_i = \tilde{a}_{N-i}$, $a_n = \tilde{a}_0 \neq 0$ und $b_i = \tilde{b}_{N-i}$. Die Systemfunktion solcher IIR-Systeme ist dann nebenstehend zu entnehmen.

$$y[k] = \frac{1}{\tilde{a}_0} \left[-\sum_{i=1}^N \tilde{a}_i y[k-i] + \sum_{i=0}^N \tilde{b}_i x[k-i] \right]$$

$$= \frac{1}{a_N} \left[-\sum_{i=1}^N a_{N-i} y[k-i] + \sum_{i=0}^N b_{N-i} x[k-i] \right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N \tilde{b}_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N \tilde{a}_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^i}{\sum_{i=0}^N a_i z^i}$$



Die erste Direktform (oben links) kann direkt aus der Differenzengleichung erstellt werden. Diese Form weist $2N$ Speicherelemente z^{-1} auf. Die zweite Direktform (unten links) kann hieraus überführt werden. Diese kommt mit der Hälfte der Speicherelementen aus. Das Teilsystem \mathcal{H}_b wird durch das Zählerpolynom (Nullstellen) und das Teilsystem \mathcal{H}_a wird durch das Nennerpolynom (Polstellen) gebildet. Durch die Kommutativität der Faltung darf die Reihenfolge der Teilsysteme vertauscht werden.

