VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Katedra aplikované matematiky

Obor: Výpočetní matematika

Nestandardní číselné soustavy

BAKALAŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Christian Krutsche

Vedoucí: RNDr. Pavel Jahoda, Ph.D.

2019

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Veškeré použité podklady, ze kterých jsem čerpal informace, jsou uvedeny v seznamu použité literatury a citovány v textu podle normy ČSN ISO 690.

V Ostravě dne středa 25.5.2020 Podpis studenta

Poděkování

Děkuji xx za odborné vedení práce, věcné připomínky, dobré rady a vstřícnost při konzultacích a vypracovávání bakalářské práce.

Abstrakt

Cílem této práce je prozkoumat různé nestandardní možnosti zápisu či kódování čísel. Kromě všem známých soustav s číselným základem (dvojková, šestnáctková,...), jsou zde i zvláštní soustavy s jiným základem. Práce nám přibližuje spektrum //**pěti?!!** nestandardních soustav. U každé soustavy se zabývá důkazem jednoznačnosti vyjádření čísel v daném tvaru a důkazem schopnosti vyjádřit libovolně zvolené čísla. Práce zkoumá nejen soustavy s celočíselným základem, ale i se základem iracionálním, či dokonce komplexním.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Definice

Připomeňme, že libovolnou podmnožinu φ kartézského součinu $A\times B$ nazýváme binární relací(dále jen relací) mezi prvky z množiny A a prvky z množiny B. Fakt, že $(a,b)\in\varphi$ budeme značit $\varphi(a)=b$ a $\varphi\subseteq A\times B$ budeme značit $\varphi: A\to B$, tak jak je to obvyklé u zobrazení, jež jsou speciálními případy relací.

Následující definici jsme převzali z [1]

Definice 1. *Posloupností na množině M rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$. Posloupnost, která každému $n\in\mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n\in M$ budeme zapisovat některým z následujících způsobů:*

- $a_1, a_2, a_3, \ldots$
- (a_n)
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Definice 2. ***(Číselná soustava na tělese)*** *Nechť $(A,+,\cdot)$ je těleso; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti na množině A; $C\subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C.* ***Číselnou soustavou na tělese*** *$(A,+,\cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi: A\to B\times B$, kde $\varphi(x)=(\{a_i\}_{i=0}^{\infty},\{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ právě když*

$$x=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{\infty}b_i\beta_i$$

*Množinu C označujeme jako **množinu cifer** číselné soustavy φ. Budeme používat značení $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}) = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots) = (\dots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots)$*

Všimněme si, že nevyžadujeme, aby φ bylo zobrazení. Číselná soustava nemusí vyjadřovat každý prvek z A a ty prvky z A, které jsou v relaci φ, nemusí být vyjádřeny jediným způsobem. Uvažujme například obvyklou desítkovou číselnou soustavu na tělese reálných čísel. Jde o číselnou soustavu, kde $C = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ a základem jsou konstantní posloupnosti na : $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\frac{1}{10^n}\}_{n=1}^{\infty}$ na množině C.

I. Vyjadřujeme jen nezáporná čísla, např. číslo $x = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \implies \varphi(x) = (\dots 123, 000 \dots)$, ale $\varphi(-x)$ neexistuje. Pomocí cifer z $C = \{0, \dots, 9\}$ při základu $\{10^i\}_{i=0}^{\infty}$ nelze vyjádřit záporné číslo

II. ($\lfloor x \rfloor$ je celočíselná část reálného čísla x)

$$\varphi(1) = \left(\left\{ \left\lfloor \frac{1}{n+1} \right\rfloor \right\}_{n=0}^{\infty}, \{0\}_{n=0}^{\infty} \right) = (\dots 001, 000 \dots)\,,$$

ale také

$$\varphi(1) = (\{0\}_{n=0}^{\infty}, \{9\}_{n=0}^{\infty}) = (\dots 000, 999 \dots)\,.$$

Analogicky jako na tělese definujeme číselnou soustavu na okruhu.

Definice 3. ***(Číselná soustava na okruhu)*** *Nechť $(A, +, \cdot)$ je okruh; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost prvků z A; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C. **Číselnou soustavou na okruhu** $(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \to B$, kde $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$$

*Množinu C označujeme jako **množinu cifer** číselné soustavy φ. Budeme používat značení $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (\dots a_2, a_1, a_0)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0) = \dots a_2 a_1 a_0$*

Poznámka 1. *V Definici 2 a Definici 3 předpokládáme, že na tělese, respektive okruhu $(A, +, \cdot)$ jsou definovány nekonečné součty*

Poznámka 2. *Všimněme si, že číselná soustava φ, ať již na tělese, nebo na okruhu, splňuje:*

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Proto, je-li φ zobrazení, je injektivní. Dále můžeme tvrdit, že hodnota $\varphi(x)$ (i v případě, že $\varphi(x)$ není zobrazení) jednoznačně určuje svůj vzor x, ale, jak jsme viděli výše, x nemusí jednoznačně určovat svůj obraz $\varphi(x)$.

Definice 4. *Jestliže pro číselnou soustavu φ na tělese $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení, pak tuto soustavu nazveme **jednoznačnou číselnou soustavou na tělese** $(A, +, \cdot)$. Analogicky, jestliže pro číselnou soustavu φ na okruhu $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení, pak tuto soustavu nazveme **jednoznačnou číselnou soustavou na okruhu** $(A, +, \cdot)$.*

Jednoznačnou číselnou soustavou na tělese (respektive okruhu), tedy nazveme každou číselnou soustavu v níž dokážeme vyjádřit libovolný prvek tělesa (okruhu), přičemž je toto vyjádření jediné možné. V takovém případě platí:

$$(\forall x \in A)(\exists!(\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}) \in \mathbf{B} \times \mathbf{B}) : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i,$$

respektive

$$(\forall x \in A)(\exists! \{a_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathbf{B}) : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i.$$

Úmluva.

- *Nechť $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti, které jsou základem číselné soustavy na tělese $(A, +, \cdot)$. Jestliže $\exists n \in \mathbb{A}$, pro které platí:*

  $$(\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i = n^i, \beta_i = n^{-i}) \wedge (\alpha_0 = 1),$$

  pak prvek $\boldsymbol{n}$ také nazýváme základem této číselné soutavy (1 označuje neutrální prvek tělesa $(A, +, \cdot)$ vzhledem k násobení).

- *Nechť $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ je číselná soustava na tělese o základu $\boldsymbol{n}$.*
  Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$, a pokud $(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_2) : b_m = 0$, budeme zapisovat: $\varphi(x) = (a_{n_1} \ldots a_0, b_1 \ldots b_{n_2})_n$

- *V případě n=10 píšeme pouze $\varphi(x) = a_{n_1} \ldots a_0, b_1 \ldots b_{n_2}$*

- *Nechť* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ *je posloupnost, která je základem číselné soustavy na okruhu* $(A, +, \cdot)$ *s jedničkou. Jestliže* $\exists n \in \mathbb{A}$*, pro které platí:*

$$(\forall i \in \mathbb{N}_0 : \alpha_i = n^i)$$

pak prvek $\boldsymbol{n}$ *nazýváme také základem této číselné soutavy* ($n^0 = 1$ *je jedničkou v okruhu* $(A, +, \cdot)$).

- *Nechť* $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})$ *je číselná soustava na okruhu o základu* $\boldsymbol{n}$*.*
Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$*, budeme zapisovat:* $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0)_n$

- *Pokud zmíníme, že číslo* z *je v relaci s posloupností* a_n *pro číselnou soustavu na okruhu o základu* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$*, pak dle definice číselné soustavy na okruhu jistě platí* $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$

1.2 Názorné příklady

Pro lepší představu definice číselné soustavy si ji předveďme na příkladu

Příklad. *Uvažujme těleso reálných čísel* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. *Tj. zvolili jsme* $A = \mathbb{R}$. *Obvyklý desetinný zápis reálných čísel je vlastně číselná soustava na tělese* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *o základu* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{10^{-i}\}_{i=1}^{\infty}$ *a* $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Podle dohody můžeme říci, že jde o číselnou soustavu na tělese o základu 10 a platí:*

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

kde $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (5, 2, 3, 0, 0, \dots)$ *a* $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = (6, 0, 0, \dots)$.
Podle Úmluvy 1.1 můžeme psát

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-}1) = 325.6$$

Označme $x = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}$
$\varphi(-x) = \varphi(-(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}))$ *neexistuje, ale prvek* $-x$ *ovykle značíme* $-x = -\varphi(x) = -325.6$, *neboť obvykle nerozlišujeme mezi číslem a jeho ciferným zápisem, tj. mezi* $-x$ *a* $\varphi(-x)$.

Kapitola 2

Fibonacciho

Definice 5. *Fibonacciho číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ *o základu* $\{F_i\}_{i=0}^{\infty}$*(kde* F_i *je i-tý člen fibonacciho posloupnosti) s množinou cifer* $C = \{0, 1\}$ *a mmnožinou všech posloupností* $B = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, a_n \in \{0, 1\}\}$.
Fibonacciho číselná soustava je relace: $\varphi : \mathbb{N}_0 \to B$

Definice 6. *Fibonacciho posloupnost*
Je nekonečná posloupnost přirozených čísel definována rekurentní formulí:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Příklad.

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$$
$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$
$$\vdots$$
$$\{F_i\}_{i=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$$

Úmluva. *V fibonacciho číselné soustavě zapisujeme:* $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_F$
Pokud bychom chtěli vyjádřit záporné číslo (které logicky nemůže patřit do $D(\varphi)$*), pak budeme podobně jak jsme zvyklí v desítkové soustavě zapisovat* $\varphi(x) = -(\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_F$

Věta 1. *Pro každé* $x \in \mathbb{N}_0 \quad \exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot F_i$ *To jest* $D(\varphi) = \mathbb{N}_0$

Důkaz. *Protože je fibonacciho posloupnost nekonečná a rostoucí posloupnost, je zřejmé, že pro libovolné* $n \in \mathbb{N}_0$ *vždy najdeme právě jedno* $i \in \mathbb{N}_0$ *pro které platí:* $F_i \leq n < F_{i+1}$

Protože $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *je euklidovský obor integrity, jistě existují čísla* $z_i \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1\}$ *taková, že:*

$$z = z_0 = z_1 \cdot (-2) + a_0, \quad a_0 \in \{0, 1\}$$

$$z_1 = z_2 \cdot (-2) + a_1, \quad a_1 \in \{0, 1\}$$
$$z_{k-1} = z_k \cdot (-2) + a_{k-1}$$
$$z_{n-2} = z_{n-1} \cdot (-2) + a_{n-2}$$
$$z_{n-1} = z_n \cdot (-2) + a_{n-1}$$
$$z_n = z_{n+1} \cdot (-2) + a_n$$

$\alpha)$ $z_1 = 0 \implies z = z_0 = a_0(-2)^0 = a_0 \in \{0, 1\}$

$\beta)$ $z_i \neq 0 \implies \forall k \geq 1 :$

$$|z_k| = \left| \frac{z_{k-1} - a_{k-1}}{-2} \right| \leq \frac{|z_{k-1}| + 1}{2}$$

$$|z_{k-1}| \leq \frac{|z_{k-2}| + 1}{2} \leq \frac{\frac{|z_{k-2}|+1}{2} + 1}{2} = \frac{|z_{k-2}|}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$|z_k| \leq \frac{|z_0|}{2^k} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left[\frac{|z_0|}{2^k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right] \to 1$$

$$\textit{pro } k \to \infty$$

Pro dost velké k_0 $\quad |z_{k_0}| \leq 1,5 \implies \exists k_0 : z_{k_0} \in \{1, 0, -1\}$

a) $\underline{z_{k_0} = 0}$

b) $z_{k_0} = 1$

$$\implies 1 = z_{k_0} = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0} \implies \underline{z_{k_0+1} = 0}$$

c) $z_{k_0} = -1$

$$\implies -1 = z_{k_0} = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0} \implies z_{k_0+1} = 1 \implies \underline{z_{k_0+2} = 0}$$

$\implies \exists z_{n+1}$ *takové, že* $z_{n+1} = 0$
$\implies z_n = a_n \implies z_{n-1} = a_n \cdot (-2)^1 + a_{n-1} \implies \ldots$

$$\implies z = z_0 = a_n \cdot (-2)^n + a_{n-1} \cdot (-2)^{n-1} + \cdots + a_0$$

Poznámka 3. *Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v negabinární číselné soustavě*

1. *Nechť z je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $i = 0$ je počáteční hodnota algoritmu*

2. *Provedeme následující operaci:*
   $z_i/(-2) = z_{i+1}$ *zb.* a_i, *kde* $a_i \in \{0,1\}, z_i \in \mathbb{Z}$

3. *Opakujeme operaci dokud $z_{i+1} \neq 0$, nechť n je počet iterací. (n je jistě konečné, viz. 3)*

4. *$\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro každé $i > n$, splňuje požadavek $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$*

Pozor! zbytek musí vždy patřit do množiny $\{0,1\}$, proto musíme volit z_{i+1} tak, aby platilo:

$$z_i = z_{i+1} \cdot (-2) + a_i$$

Příklad.

$$z = 13$$
$$13 : (-2) = -6\, zb.\, 1$$
$$-6 : (-2) = 3\, zb.\, 0$$
$$3 : (-2) = -1\, zb.\, 1$$
$$-1 : (-2) = 1\, zb.\, 1$$
$$1 : (-2) = 0\, zb.\, 1$$
$$\implies a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1$$
$$13 = 1 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^4$$
$$13 = 1 + 4 - 8 + 16 \quad \checkmark$$

Věta 2. *Jestliže $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$, pak $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : a_n = 0$*

Důkaz. *Předpokládejme, že takové číslo z existuje, pak uvažujme tři případy:*

a) *Každý sudý člen posloupnosti a_n má hodnotu 1 a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, pro který platí že všechny liché členy posloupnosti dále od tohoto n_0 mají hodnotu 0. Je zřejmé, že suma diverguje a $z = \infty$, a proto $z \notin \mathbb{Z}$*

b) *Každý lichý člen posloupnosti a_n má hodnotu 1 a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, pro který platí že všechny sudé členy posloupnosti dále od tohoto n_0 mají hodnotu 0. Je zřejmé, že suma diverguje a $z = -\infty$, a proto $z \notin \mathbb{Z}$*

c) *Posloupnost je nekonečná a pro libovolné liché n_1 vždy najdeme sudé n_2, kde $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$*

$$n_2 \text{ sudé} \implies (-2)^{n_2} = 2^{n_2}$$

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2}$$

$$-\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) + 2^{n_2} \leq z \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) + 2^{n_2}$$

$$1 \leq z \leq 2 \cdot 2^{n_2} - 1$$

$$z \geq 1$$

Analogicky pro libovolné sudé n_1 *vždy najdeme liché* n_2 *větší, kde* $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$n_2 \text{ liché} \implies (-2)^{n_2} = -2^{n_2}$$

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2}$$

$$-\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) - 2^{n_2} \leq z \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) - 2^{n_2}$$

$$-2 \cdot 2^{n_2} + 1 \leq z \leq -1$$

$$z \leq -1$$

Je zřejmé, že ani v posledním případě suma nekonverguje, protože vždy najdeme případ, kdy suma je menší než -1 a zároveň případ, kdy suma je větší než 1 $\implies$ ***spor!***

Věta 3. *Pro každé* $z \in \mathbb{Z} \quad \exists! \{a_n\}_{i=0}^{\infty} : z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$

Důkaz. *Dokazujeme sporem, a proto předpokládejme že existuje celé číslo z, které je v relaci s posloupností* $\mathbf{a_n}$ *a zároveň v relaci s jinou posloupností* $\mathbf{b_n}$. *Pokud takové číslo existuje, tak* $\varphi(z)$ *jistě není zobrazení.*

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \neq \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$z = \sum_{n=0}^{k} a_n(-2)^n = \sum_{n=0}^{k} b_n(-2)^n$$

definujme posloupnost C_n *splňující:*

$$C_n = a_n - b_n$$

$$\sum_{n=0}^{k} C_n(-2)^n = 0, C_n \in \{-1, 0, 1\}$$

Abychom došli ke sporu, předpokládejme, že $\exists n_0 \in \{0, \ldots, k\} : C_n \neq 0$

$\alpha)$ $C_{n_0} = 1$

I.) $\mathbf{n_0}$ *je liché*

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0}$$

$$1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq 2^{n_0+1} - 1$$

Takové číslo je jistě kladné $\implies$ ***z*** *nemůže být v relaci s posloupností* $\mathbf{a_n}$ *a zároveň v relaci s posloupností* $\mathbf{b_n}$

II.) $\mathbf{n_0}$ *je sudé*

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0}$$

$$-2^{n_0+1} + 1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq -1$$

Takové číslo je jistě záporné $\implies$ ***z*** *nemůže být v relaci s posloupností* $\mathbf{a_n}$ *a zároveň v relaci s posloupností* $\mathbf{b_n}$

$\beta)$ $C_{n_0} = -1$
Důkaz je úplně stejný, ať je C_{n_0} *liché nebo sudé, nikdy se suma rovnat 0 jistě nebude.*

Věta 4. *Negabinární číselná soustava je jednoznačná číselná soustava na okruhu celých čísel*

Příklad. *Pro negabinární číselnou soustavu platí:*

$$\varphi(1 \cdot -2^6 + 1 \cdot -2^4 + 1 \cdot -2^1) = (\{a_i\}) = (64 + 16 + (-2))$$

$$a_i = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, \dots)$$
$$78 = (1010010)_{-2}$$

Kapitola 3

Negabinární

Definice 7. *Negabinární číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *o základu -2 s množinou cifer* $C = \{0, 1\}$ *a mmnožinou všech posloupností* $B = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, a_n \in \{0, 1\}\}$.
Podle Úmluvy 1.1 v negabinární číselné soustavě zapisujeme: $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_{-2}$
Negabinární číselná soustava je relace: $\varphi : \mathbb{Z} \to B$

Věta 5. *Pro každé* $z \in \mathbb{Z} \quad \exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$. *To jest* $D(\varphi) = \mathbb{Z}$

Důkaz. *Protože* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *je euklidovský obor integrity, jistě existují čísla* $z_i \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1\}$ *taková, že:*

$$z = z_0 = z_1 \cdot (-2) + a_0, \quad a_0 \in \{0, 1\}$$

$$z_1 = z_2 \cdot (-2) + a_1, \quad a_1 \in \{0, 1\}$$

$$z_{k-1} = z_k \cdot (-2) + a_{k-1}$$

$$z_{n-2} = z_{n-1} \cdot (-2) + a_{n-2}$$

$$z_{n-1} = z_n \cdot (-2) + a_{n-1}$$

$$z_n = z_{n+1} \cdot (-2) + a_n$$

$\alpha)$ $z_1 = 0 \implies z = z_0 = a_0(-2)^0 = a_0 \in \{0, 1\}$

$\beta)$ $z_i \neq 0 \implies \forall k \geq 1 :$

$$|z_k| = \left| \frac{z_{k-1} - a_{k-1}}{-2} \right| \leq \frac{|z_{k-1}| + 1}{2}$$

$$|z_{k-1}| \leq \frac{|z_{k-2}| + 1}{2} \leq \frac{\frac{|z_{k-2}|+1}{2} + 1}{2} = \frac{|z_{k-2}|}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$|z_k| \leq \frac{|z_0|}{2^k} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left[\frac{|z_0|}{2^k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \to 1$$
$$pro\ k \to \infty$$

Pro dost velké k_0 $\quad |z_{k_0}| \leq 1,5 \implies \exists k_0 : z_{k_0} \in \{1, 0, -1\}$

a) $\underline{z_{k_0} = 0}$

b) $z_{k_0} = 1$

$$\implies 1 = z_{k_0} = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0} \implies \underline{z_{k_0+1} = 0}$$

c) $z_{k_0} = -1$

$$\implies -1 = z_{k_0} = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0} \implies z_{k_0+1} = 1 \implies \underline{z_{k_0+2} = 0}$$

$\implies \exists z_{n+1}$ *takové, že* $z_{n+1} = 0$
$\implies z_n = a_n \implies z_{n-1} = a_n \cdot (-2)^1 + a_{n-1} \implies \ldots$

$$\implies z = z_0 = a_n \cdot (-2)^n + a_{n-1} \cdot (-2)^{n-1} + \cdots + a_0$$

Poznámka 4. *Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v negabinární číselné soustavě*

1. *Nechť* z *je číslo, které chceme reprezentovat,* $z_0 = z$ *a* $i = 0$ *je počáteční hodnota algoritmu*
2. *Provedeme následující operaci:*
   $z_i/(-2) = z_{i+1}$ *zb.* a_i*, kde* $a_i \in \{0, 1\}, z_i \in \mathbb{Z}$
3. *Opakujeme operaci dokud* $z_{i+1} \neq 0$*, nechť* n *je počet iterací. (n je jistě konečné, viz. 3)*
4. $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$*, kde* $a_i = 0$ *pro každé* $i > n$*, splňuje požadavek* $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$

Pozor! zbytek musí vždy patřit do množiny $\{0, 1\}$*, proto musíme volit* z_{i+1} *tak, aby platilo:*

$$z_i = z_{i+1} \cdot (-2) + a_i$$

Příklad.

$$z = 13$$
$$13 : (-2) = -6\, zb.\, 1$$
$$-6 : (-2) = 3\, zb.\, 0$$
$$3 : (-2) = -1\, zb.\, 1$$

$$-1 : (-2) = 1\, zb.\, 1$$
$$1 : (-2) = 0\, zb.\, 1$$
$$\Longrightarrow \; a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1$$
$$13 = 1 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^4$$
$$13 = 1 + 4 - 8 + 16 \quad \checkmark$$

Věta 6. *Jestliže* $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$, *pak* $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : a_n = 0$

Důkaz. *Předpokládejme, že takové číslo z existuje, pak uvažujme tři případy:*

a) *Každý sudý člen posloupnosti* a_n *má hodnotu 1 a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, pro který platí že všechny liché členy posloupnosti dále od tohoto* n_0 *mají hodnotu 0. Je zřejmé, že suma diverguje a* $z = \infty$*, a proto* $z \notin \mathbb{Z}$

b) *Každý lichý člen posloupnosti* a_n *má hodnotu 1 a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, pro který platí že všechny sudé členy posloupnosti dále od tohoto* n_0 *mají hodnotu 0. Je zřejmé, že suma diverguje a* $z = -\infty$*, a proto* $z \notin \mathbb{Z}$

c) *Posloupnost je nekonečná a pro libovolné liché* n_1 *vždy najdeme sudé* n_2*, kde* $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$n_2 \textit{ sudé} \implies (-2)^{n_2} = 2^{n_2}$$
$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2}$$
$$-\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) + 2^{n_2} \leq z \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) + 2^{n_2}$$
$$1 \leq z \leq 2 \cdot 2^{n_2} - 1$$
$$z \geq 1$$

Analogicky pro libovolné sudé n_1 *vždy najdeme liché* n_2 *větší, kde* $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$n_2 \textit{ liché} \implies (-2)^{n_2} = -2^{n_2}$$
$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2}$$
$$-\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) - 2^{n_2} \leq z \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) - 2^{n_2}$$
$$-2 \cdot 2^{n_2} + 1 \leq z \leq -1$$
$$z \leq -1$$

Je zřejmé, že ani v posledním případě suma nekonverguje, protože vždy najdeme případ, kdy suma je menší než -1 a zároveň případ, kdy suma je větší než 1 $\Longrightarrow$ ***spor!***

Věta 7. *Pro každé* $z \in \mathbb{Z} \quad \exists! \{a_n\}_{i=0}^{\infty} : z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$

Důkaz. *Dokazujeme sporem, a proto předpokládejme že existuje celé číslo z, které je v relaci s posloupností* $\mathbf{a_n}$ *a zároveň v relaci s jinou posloupností* $\mathbf{b_n}$*. Pokud takové číslo existuje, tak* $\varphi(z)$ *jistě není zobrazení.*

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \neq \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$z = \sum_{n=0}^{k} a_n(-2)^n = \sum_{n=0}^{k} b_n(-2)^n$$

definujme posloupnost C_n *splňující:*

$$C_n = a_n - b_n$$

$$\sum_{n=0}^{k} C_n(-2)^n = 0, C_n \in \{-1, 0, 1\}$$

Abychom došli ke sporu, předpokládejme, že $\exists n_0 \in \{0, \ldots, k\} : C_n \neq 0$

α) $C_{n_0} = 1$

I.) $\mathbf{n_0}$ *je liché*

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0}$$

$$1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq 2^{n_0+1} - 1$$

Takové číslo je jistě kladné $\Longrightarrow$ ***z*** *nemůže být v relaci s posloupností* $\mathbf{a_n}$ *a zároveň v relaci s posloupností* $\mathbf{b_n}$

II.) $\mathbf{n_0}$ *je sudé*

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0}$$

$$-2^{n_0+1} + 1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq -1$$

Takové číslo je jistě záporné $\Longrightarrow$ ***z*** *nemůže být v relaci s posloupností* $\mathbf{a_n}$ *a zároveň v relaci s posloupností* $\mathbf{b_n}$

$\beta)$ $C_{n_0} = -1$

Důkaz je úplně stejný, ať je C_{n_0} liché nebo sudé, nikdy se suma rovnat 0 jistě nebude.

Věta 8. *Negabinární číselná soustava je jednoznačná číselná soustava na okruhu celých čísel*

Příklad. *Pro negabinární číselnou soustavu platí:*

$$\varphi(1 \cdot -2^6 + 1 \cdot -2^4 + 1 \cdot -2^1) = (\{a_i\}) = (64 + 16 + (-2))$$

$$a_i = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, \dots)$$
$$78 = (1010010)_{-2}$$

Kapitola 4

Komplexní

Úmluva. *Pozor! V této kapitole symbolem i značíme imaginární část komplexního čísla Protože a již používame pro značení posloupnosti budeme komplexní číslo* $z = a + bi$ *značit* $z = u + vi$*, kde* u *je celočíselná část a* v *je imaginární část komplexního čísla.*

Definice 8. *Komplexní číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ *o základu* $\{(1-i)^j\}_{j=0}^{\infty}$ *s množinou cifer* $C = \{0, 1\}$

Komplexní číselná soustava je relace: $\varphi : \mathbb{Z}[i] \to B$

Věta 9. *Pro každé* $z \in \mathbb{Z}[i] \quad \exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (1-i)^j$ *To jest* $D(\varphi) = \mathbb{Z}[i]$

Důkaz. ...

$$\frac{u+vi}{1-i} = \frac{u+vi}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(u+vi)\cdot(1+i)}{(1+i)\cdot(1-2)} = \frac{(u-v)+(u+v)i}{2}$$

Poznámka 5. *Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v komplexní číselné soustavě*

1. *Nechť* z *je číslo, které chceme reprezentovat,* $z_0 = z$ *a* $j = 0$ *je počáteční hodnota algoritmu*
2. *Provedeme následující operaci:*
   $x = \frac{(u_j - v_j) + (u_j + v_j)i}{2}$
   Jestliže $x \in \mathbb{Z}[i]$*, pak* $z_{j+1} = x \quad a_{j+1} = 0$
   V opačném případě $z_{j+1} = \frac{(u_j - v_j - 1) + (u_j + v_j - 1)i}{2} \quad a_{j+1} = 1$
3. *Opakujeme operaci dokud* $z_{j+1} \neq 0$*, nechť* n *je počet iterací. (*n *je jistě konečné, viz. 4)*
4. $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$*, kde* $a_j = 0$ *pro každé* $j > n$*, splňuje požadavek* $z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (1-i)^j$

Kapitola 5

Faktoriálová

Definice 9. *Faktoriálová číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ *o základu* $\{(i+1)!\}_{i=0}^{\infty}$ *s množinou cifer* $C = \mathbb{N}_0$

Faktoriálová číselná soustava je relace: $\varphi : \mathbb{N}_0 \to B$

Věta 10. *Pro každé* $x \in \mathbb{N}_0 \quad \exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)!$ *To jest* $D(\varphi) = \mathbb{N}_0$

Důkaz. $\alpha)$ $x = 0 \implies \forall i \in \mathbb{N} : a_i = 0$

$\beta)$ *Je zřejmé, že pro libovolné* $x \in \mathbb{N}$ *existuje právě jedno* $n \in \mathbb{N} : n! \leq x < (n+1)!$
Protože $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ *??je?? euklidovský obor integrity, jistě existují čísla* $x_i \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{N}_0$ *taková, že:*

$$x = x_0 = a_0 \cdot n! + x_1, \quad a_0 \in \mathbb{N}$$

$$x_1 = a_1 \cdot (n-1)! + x_2, \quad a_1 \in \mathbb{N}_0$$

$$x_2 = a_2 \cdot (n-2)! + x_3, \quad a_2 \in \mathbb{N}_0$$

$$x_{k-1} = a_k \cdot (n-k+1)! + x_k$$

$$x_{n-1} = a_{n-1} \cdot 1! + x_n$$

$$x_n = a_n \cdot 0!$$

$\forall k \geq 1 :$

$$x_k = x_{k-1} - a_n \cdot (n-k+1)!$$

$a_n \in \mathbb{N}_0 \implies$ *buď* $a_n = x_{k-1}$*, pak jistě*

$$x_k \leq x_{k-1} - a_n(n-k+1)! \leq 0,$$

protože $(n-k+1)! \leq 1$
Pro dost velké $k_0 : x_{k_0} = 0$

$$\implies x = x_0 = a_n \cdot (0)! + a_{n-1} \cdot (1)! + \cdots + a_0$$

Poznámka 6. *Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v faktoriálové číselné soustavě*

1. *Nechť* x *je číslo, které chceme reprezentovat,* $x_0 = x$ *a* $i = 0$ *je počáteční hodnota algoritmu*
2. *Najdeme nejvyšší* n*, pro které platí:* $n! < x$
3. *Provedeme následující operaci:*
   $x_i/(n-i)! = a_{n-i-1}$ *zb.* x_{i+1}*, kde* $a_i, x_i \in \mathbb{N}_0$
4. *Opakujeme operaci dokud* $x_{i+1} \neq 0$*, nechť* n *je počet iterací. (*n *je jistě konečné, viz. 5)*
5. $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$*, kde* $a_i = 0$ *pro každé* $i > n$*, splňuje požadavek* $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)!$

Věta 11. *Jestliže* $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)!$*, pak* $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : a_n = 0$

Důkaz. *Sporem:*
Nechť existuje taková posloupnost, že pro libovolné n *najdeme vždy* n_0 *větší:* $a_{n_0} \neq 0$
Pak $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)! \notin \mathbb{N}_0$*, protože suma řady diverguje k* $+\infty$

Definice 10. *Omezená množina velikosti* i

$$C_i = \{k, k \in \mathbb{N}_0, k \leq i\} = \{0, \ldots, i\}$$

Např. $C_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Věta 12. *Pro vyjádření libovolného* $x \in \mathbb{N}_0$ *nám postačí omezená množina* $C_i \subseteq \mathbb{N}_0$*. Pro každé* $i \in \mathbb{N}_0$ *pro faktoriálovou číselnou soustavu platí* $C = C_i$*. To jest, každé číslo* $x \in \mathbb{N}_0$ *lze vyjádřit následovně:*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (i+1)!, \quad a_i \in C_i$$

Důkaz. *...*

Věta 13. *Jestliže* $a_i \in C_{i+1}$*, pak je faktoriálová číselná soustava jednoznačná*

Důkaz. *...*

Úmluva. *V faktoriálové číselné soustavě zapisujeme:* $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_!$
Pokud bychom chtěli vyjádřit záporné číslo (které logicky nemůže patřit do $D(\varphi)$*), pak budeme podobně jak jsme zvyklí v desítkové soustavě zapisovat* $\varphi(x) = -(\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_!$

Příklad.

$$z = 77$$
$$77 : 4! = 3\, zb.\, 5$$
$$5 : 3! = 0\, zb.\, 5$$
$$5 : 2! = 2\, zb.\, 1$$
$$1 : 1! = 1\, zb.\, 0$$
$$\Longrightarrow\ a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 3$$
$$77 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 4!$$
$$77 = 1 + 4 + 72 \quad \checkmark$$

Literatura

[1] Jiří Bouchala, Matematická analýza ve Vesmíru, strana 3