VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

# Nestandardní číselné soustavy

# Non-Standard Numeral Systems

2020

Christian Krutsche

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

# Zadání bakalářské práce

Student: **Christian Krutsche**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: Nestandardní číselné soustavy
Non-Standard Numeral Systems

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Bakalářská práce by se tematicky měla věnovat nestandardním zápisům čísel z dané množiny. Autor by se měl věnovat z větší části těm způsobům reprezentace čísel, které využívají pouze cifer 0 a 1, ale je možné se zabývat i jinými. U každého typu zápisu by měly být popsány jeho základní vlastnosti a pokud možno i případné výhody a nevýhody, které ovlivňují jeho využitelnost.

Seznam doporučené odborné literatury:

Donald E. Knuth: Umění programování 2. díl: Seminumerické algoritmy
E. Pelantová, Š. Starosta: nestandardní zápisy čísel, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 56 (2011), No. 4, 276-289

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Pavel Jahoda, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2019

Datum odevzdání: 30.04.2020

prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
*vedoucí katedry*

prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.
*děkan fakulty*

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 1. dubna 2020 ..............................

Děkuji panu RNDr. Pavlu Jahodovi, Ph.D. za odborné vedení práce, věcné připomínky, dobré rady a vstřícnost při konzultacích a vypracovávání bakalářské práce.

**Abstrakt**

Cílem této práce je prozkoumat různé nestandardní možnosti zápisu či kódování čísel. Kromě všem známých soustav s číselným základem (dvojková, šestnáctková,...), jsou zde i zvláštní soustavy s jiným základem. Práce nám přiblíží spektrum nestandardních soustav. U každé soustavy se zabývá důkazem jednoznačnosti vyjádření čísel v daném tvaru a důkazem schopnosti vyjádřit libovolně zvolené čísla. Práce zkoumá nejen soustavy s celočíselným základem, ale i se základem iracionálním, či dokonce komplexním.

**Klíčová slova**: číselná soustava

**Abstract**

This is English abstract.

**Keywords**: numeral system

# Obsah

# Seznam použitých zkratek a symbolů

| | | |
|---|---|---|
| ČS | – | Číselná soustava |

# 1 Úvod

## 1.1 Definice

Připomeňme, že libovolnou podmnožinu $\varphi$ kartézského součinu $A \times B$ nazýváme binární relací (dále jen relací) mezi prvky z množiny $A$ a prvky z množiny $B$. Binární dvojici $(a, b) \in \varphi$ budeme značit $\varphi(a) = b$ a $\varphi \subseteq A \times B$ budeme značit $\varphi : A \to B$, tak jak je to obvyklé u zobrazení, jež jsou speciálními případy relací.

Následující definici jsme převzali z [**a**]

**Definice 1** *Posloupností na množině $M$ rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$. Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in M$ budeme zapisovat některým z následujících způsobů:*

- $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
- $(a_n)$
- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

**Definice 2** ***(Číselná soustava na tělese)*** *Nechť $(A, +, \cdot)$ je těleso; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti na množině $A$; $C \subseteq A$ a $B$ je množina všech posloupností prvků z $C$.* ***Číselnou soustavou na tělese*** *$(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ s ciframi z $C$ nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \to B \times B$, kde $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i$$

*Množinu $C$ označujeme jako* ***množinu cifer*** *číselné soustavy $\varphi$. Budeme používat značení $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}) = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots) = (\dots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots)$*

Všimněme si, že nevyžadujeme, aby $\varphi$ bylo zobrazení. Číselná soustava nemusí vyjadřovat každý prvek z $A$ a ty prvky z $A$, které jsou v relaci $\varphi$, nemusí být vyjádřeny jediným způsobem. Uvažujme například obvyklou desítkovou číselnou soustavu na tělese reálných čísel. Jde o číselnou soustavu, kde $C = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ a základem jsou konstantní posloupnosti na : $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\frac{1}{10^n}\}_{n=1}^{\infty}$ na množině $C$.

I. Vyjadřujeme jen nezáporná čísla, např. číslo $x = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \Rightarrow \varphi(x) = (\dots 123, 000 \dots)$, ale $\varphi(-x)$ neexistuje. Pomocí cifer z $C = \{0, \dots, 9\}$ při základu $\{10^i\}_{i=0}^{\infty}$ nelze vyjádřit záporné číslo

II. ($\lfloor x \rfloor$ je celočíselná část reálného čísla $x$)

$$\varphi(1) = \left( \left\{ \left\lfloor \frac{1}{n+1} \right\rfloor \right\}_{n=0}^{\infty}, \{0\}_{n=0}^{\infty} \right) = (\ldots 001, 000 \ldots),$$

ale také

$$\varphi(1) = (\{0\}_{n=0}^{\infty}, \{9\}_{n=0}^{\infty}) = (\ldots 000, 999 \ldots).$$

Analogicky jako na tělese definujeme číselnou soustavu na okruhu.

**Definice 3** ***(Číselná soustava na okruhu)*** *Nechť $(A, +, \cdot)$ je okruh; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost prvků z $A$; $C \subseteq A$ a $B$ je množina všech posloupností prvků z $C$.* ***Číselnou soustavou na okruhu*** *$(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ s ciframi z $C$ nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \to B$, kde $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$$

*Množinu $C$ označujeme jako* ***množinu cifer*** *číselné soustavy $\varphi$. Budeme používat značení $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (\ldots a_2, a_1, a_0)_{\varphi}$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\ldots a_2, a_1, a_0)_{\varphi} = (\ldots a_2, a_1, a_0) = \ldots a_2 a_1 a_0$*

**Poznámka 1** V Definici 2 a Definici 3 předpokládáme, že na tělese, respektive okruhu $(A, +, \cdot)$ jsou definovány nekonečné součty

**Poznámka 2** Všimněme si, že číselná soustava $\varphi$, ať již na tělese, nebo na okruhu, splňuje:

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Proto, je-li $\varphi$ zobrazení, je injektivní. Dále můžeme tvrdit, že hodnota $\varphi(x)$ (i v případě, že $\varphi(x)$ není zobrazení) jednoznačně určuje svůj vzor $x$, ale, jak jsme viděli výše, $x$ nemusí jednoznačně určovat svůj obraz $\varphi(x)$.

**Definice 4** *Jestliže pro číselnou soustavu $\varphi$ na tělese $(A, +, \cdot)$ platí, že $\varphi$ je zobrazení, pak tuto soustavu nazveme* ***jednoznačnou číselnou soustavou na tělese*** *$(A, +, \cdot)$. Analogicky, jestliže pro číselnou soustavu $\varphi$ na okruhu $(A, +, \cdot)$ platí, že $\varphi$ je zobrazení, pak tuto soustavu nazveme* ***jednoznačnou číselnou soustavou na okruhu*** *$(A, +, \cdot)$.*

Jednoznačnou číselnou soustavou na tělese (respektive okruhu), tedy nazveme každou číselnou soustavu v níž dokážeme vyjádřit libovolný prvek tělesa (okruhu) nejvýše jedním způsobem.

**Úmluva 1**

- Nechť $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti, které jsou základem číselné soustavy na tělese $(A, +, \cdot)$. Jestliže $\exists n \in \mathbb{A}$, pro které platí:

$$(\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i = n^i, \beta_i = n^{-i}) \wedge (\alpha_0 = 1),$$

  pak prvek **n** také nazýváme základem této číselné soutavy (1 označuje neutrální prvek tělesa $(A, +, \cdot)$ vzhledem k násobení).

- Nechť $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ je číselná soustava na tělese o základu **n**.
  Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$, a pokud $(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_2) : b_m = 0$, budeme zapisovat: $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2})_n$

- V případě n=10 píšeme pouze $\varphi(x) = a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2}$

- Nechť $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost, která je základem číselné soustavy na okruhu $(A, +, \cdot)$ s jedničkou. Jestliže $\exists n \in \mathbb{A}$, pro které platí:

$$(\forall i \in \mathbb{N}_0 : \alpha_i = n^i)$$

  pak prvek **n** nazýváme také základem této číselné soutavy ($n^0 = 1$ je jedničkou v okruhu $(A, +, \cdot)$).

- Nechť $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})$ je číselná soustava na okruhu o základu **n**.
  Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$, budeme zapisovat: $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0)_n$

- Pokud zmíníme, že číslo z je v relaci s posloupností $a_n$ pro číselnou soustavu na okruhu o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$, pak dle definice číselné soustavy na okruhu jistě platí $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$

## 1.2 Názorné příklady

Pro lepší představu definice číselné soustavy si ji předveďme na příkladu

**Příklad 1**
Uvažujme těleso reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Tj. zvolili jsme $\mathrm{A} = \mathbb{R}$. Obvyklý desetinný zápis reálných čísel je vlastně číselná soustava na tělese $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{10^{-i}\}_{i=1}^{\infty}$ a $\mathrm{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Podle dohody můžeme říci, že jde o číselnou soustavu na tělese o základu 10 a platí:

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

kde $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (5, 2, 3, 0, 0, \dots)$ a $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = (6, 0, 0, \dots)$.
Podle Úmluvy 1 můžeme psát

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^-1) = 325.6$$

Označme $x = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}$
$\varphi(-x) = \varphi(-(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}))$ neexistuje, ale prvek $-x$ ovykle značíme $-x = -\varphi(x) = -325.6$, neboť obvykle nerozlišujeme mezi číslem a jeho ciferným zápisem, tj. mezi $-x$ a $\varphi(-x)$.

$\blacksquare$

## 2 Negabinární číselná soustava

**Definice 5** *Negabinární číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *o základu -2 s množinou cifer* $C = \{0, 1\}$.

Negabinární číselná soustava je tedy relace $\varphi$ mezi celými čísly a posloupnostmi jedniček a nul, kde $z \in \mathbb{Z}$ je v relaci s posloupností $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě thedy, když

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i.$$

Ciferným zápisem celého čísla v negabinární číselné soustavě je posloupnost čísel z množiny $C = \{0, 1\}$. Fakt, že $\varphi(z) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro $i > k$, budeme symbolicky zapisovat $\varphi(z) = (a_k \ldots a_0)_{-2}$. Pokud nebude moci dojít k omylu, tento zápis ještě zjednodušíme na $z = (a_k \ldots a_0)_{-2}$. Například $5 = (101)_{-2}$, neboť $5 = 1 \cdot (-2)^2 + 0 \cdot (-2)^1 + 1 \cdot (-2)^0$.

Prozkoumáme základní vlastnosti této číselné soustavy. Nejprve ukážeme, že v negabinární číselné soustavě dokážeme najít ciferný zápis pro libovolné celé číslo.

**Věta 1** *Pro každé* $z \in \mathbb{Z}$ *existuje* $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0, 1\}$ *taková, že* $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$. *To jest,* $D(\varphi) = \mathbb{Z}$.

**Důkaz** Protože $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je euklidovský obor integrity, jistě existují čísla $z_i \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1\}$ taková, že:

$$\begin{aligned}
z = z_0 &= z_1 \cdot (-2) + a_0 \\
z_1 &= z_2 \cdot (-2) + a_1 \\
z_2 &= z_3 \cdot (-2) + a_2 \\
&\vdots \\
z_{k-1} &= z_k \cdot (-2) + a_{k-1} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1}$$

V případě, že $z_1 = 0$, je jasné, že $z = a_0 = a_0(-2)^0$, kde $a_0 \in \{0, 1\}$. Dokazované tvrzení tak v tomto případě platí. Co když ale $z_0 \neq 0$?

Dokážeme, že pro dost velké $n$ je $z_{n+1} = 0$. Z (1) je zřejmé, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|z_k| = \left| \frac{z_{k-1} - a_{k-1}}{-2} \right| \leq \frac{|z_{k-1}| + 1}{2} = \frac{|z_{k-1}|}{2} + \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Z (2) plyne, že pro $(k-1) \in \mathbb{N}$ také platí

$$|z_{k-1}| = \left| \frac{z_{k-2} - a_{k-2}}{-2} \right| \leq \frac{|z_{k-2}|}{2} + \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Aplikací odhadu (3) v (2) obdržíme

$$|z_k| \leq \frac{|z_{k-1}|}{2} + \frac{1}{2} \leq \frac{|z_{k-2}|}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.$$

Analogicky můžeme pokračovat a zjistíme, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|z_k| \leq \frac{|z_0|}{2^k} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{|z_0|}{2^k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{4}$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{|z_0|}{2^k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \to 1$ při $k \to \infty$, je zřejmé, že existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|z_{k_0}| \leq 1,5$. To ale znamená, že $z_{k_0} \in \{-1, 0, 1\}$. Rozeberme jednotlivé případy.

a) Jestliže $z_{k_0} = 0$, pak také $z_{k_0+1} = 0$. Hledaným $n$ proto může být $n = k_0$.

b) Jestliže $z_{k_0} = 1$, pak $z_{k_0} = 1 = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0}$. Protože $a_{k_0} \in \{0, 1\}$, musí platit $z_{k_0+1} = 0$. Hledaným $n$ proto může být $n = k_0$.

c) Jestliže $z_{k_0} = -1$, pak $z_{k_0} = -1 = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0}$. Protože $a_{k_0} \in \{0, 1\}$, musí platit $z_{k_0+1} = 1$. To ale podle předchozího bodu znamená, že $z_{k_0+2} = 0$. Hledaným $n$ proto může být $n = k_0 + 1$.

Dokázali jsme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $z_{n+1} = 0$. Z toho plyne, že $z_n = a_n$, odtud $z_{n-1} = a_n \cdot (-2)^1 + a_{n-1}, \ldots, z = z_0 = a_n \cdot (-2)^n + a_{n-1} \cdot (-2)^{n-1} + \cdots + a_0$. Pokud zvolíme $a_i = 0$ pro $i > n$, pak $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$.

■

Na základě úvah provedených ve výše uvedeném důkazu můžeme vyslovit následující tvrzení.

**Věta 2** *Pro každé $z \in \mathbb{Z}$ existuje konečná posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^k$, $a_i \in \{0, 1\}$ taková, že*

$$z = \sum_{i=0}^{k} a_i (-2)^i$$

**Důkaz** Z důkazu Věty 1 okamžitě plyne, že prokaždé celé číslo existuje posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ s konečným počtem nenulových prvků splňující $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$.

■

Vzniká otázka, zda může existovat posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ splňující $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$ i s nekonečným počtem nenulových prvků? Jinak řečeno, existuje nějaké celé číslo $z$, které je v relaci $\varphi$ s nějakou nekonečnou posloupností? Odpověď je záporná. V negabinární soustavě můžeme každé celé číslo vyjádřit jen pomocí konečného počtu nenulových cifer.

**Věta 3** *Nechť $z \in \mathbb{Z}$. Jestliže $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$, pak posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ má konečný počet nenulových členů.*

**Důkaz** Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že číslo $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$, kde posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ má nekonečně mnoho nenulových členů. Pak může nastat právě jeden ze tří případů:

*a*) Mezi sudými členy posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (máme na mysli ta $a_n$, kde $n$ je sudé) je nekonečně mnoho těch, které mají hodnotu 1 a existuje jen konečný počet nenulových lichých členů posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Je zřejmé, že $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i = \infty$. To je spor s tím, že $z \in \mathbb{Z}$.

*b*) Mezi lichými členy posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (máme na mysli ta $a_n$, kde $n$ je liché) je nekonečně mnoho těch, které mají hodnotu 1 a existuje jen konečný počet nenulových sudých členů posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Je zřejmé, že $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i = -\infty$. To je spor s tím, že $z \in \mathbb{Z}$.

*c*) Jak mezi lichými, tak mezi sudými členy posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ je nekonečně mnoho těch s nenulovou hodnotou.

Uvažujme $n_k$ sudé, takové, že $a_{n_k} = 1$. Označme částečný součet

$$S_{n_k} = \sum_{i=0}^{n_k} a_i(-2)^i.$$

Můžeme odhadnout hodnotu $S_{n_k}$:

$$\begin{aligned} S_{n_k} &= (-2)^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i = \\ &= 2^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i \geq \\ &\geq 2^{n_k} - \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} 2^i = \\ &= 2^{n_k} - \frac{2^{n_k}-1}{2-1} = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Nyní uvažujme $n_k$ liché, takové, že $a_{n_k} = 1$ a odhadněme hodnotu $S_{n_k}$:

$$\begin{aligned} S_{n_k} &= (-2)^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i = \\ &= -2^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i \leq \\ &\leq -2^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} 2^i = \\ &= -2^{n_k} + \frac{2^{n_k}-1}{2-1} = -1 \end{aligned} \tag{6}$$

Z (5) plyne, že pro $n_k$ sudé, kde $a_{n_k} = 1$ (a takových je podle předpokladu nekonečně mnoho), platí $S_{n_k} \geq 1$. Zároveň z (6) plyne, že pro $n_k$ liché, kde $a_{n_k} = 1$ (a takových je podle předpokladu také nekonečně mnoho), platí $S_{n_k} \leq -1$. To by však znamenalo, že suma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$ nekonverguje. Opět docházíme ke sporu.

■

Nakonec dokážeme, že každé celé číslo je možné v negabinární číselné soustavě vyjádřit jen jedním způsobem, to jest, existuje právě jeden jeho ciferný zápis.

**Věta 4** *Pro každé $z \in \mathbb{Z}$ existuje jediná posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0,1\}$ taková, že $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$.*

**Důkaz** Nejprve dokážeme tvrzení věty pro $z = 0$. Věta 1 říká, že existuje posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0,1\}$ taková, že $0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$.

Věta 3 navíc tvrdí, že posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ nemůže mít nekonečný počet nenulových členů. Musí proto existovat $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a_i = 0$ pro $i > k$. Odtud

$$0 = \sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i \tag{7}$$

Předpokládejme, že $a_k = 1$. Stejně jako v důkazu Věty 3 využijeme odhad součtu (7). Nejprve pro $k$ liché :

$$\begin{aligned}
0 = \textstyle\sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i &= 1 \cdot (-2)^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i = \\
&= -2^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i \leq \\
&\leq -2^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \\
&= -2^k + \frac{2^k - 1}{2 - 1} = -1
\end{aligned} \tag{8}$$

Dostváme sporné tvrzení $0 \leq -1$. Analogicky pro $k$ sudé :

$$\begin{aligned}
0 = \textstyle\sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i &= 1 \cdot (-2)^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i = \\
&= 2^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i \geq \\
&\geq 2^k - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \\
&= 2^k - \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 1
\end{aligned} \tag{9}$$

Opět dostáváme sporné tvrzení. Proto $a_k = 0$. Vedoucím koeficientem se tak stává $a_{k-1}$. Opakováním úvahy zjistíme, že všechny koeficienty $a_i$ musí být rovny nule. Znamená to, že pro $z = 0$ existuje jediná posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0, 1\}$ taková, že $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$. Jedná se o posloupnost, kde $\forall\, i \in \mathbb{N} : a_i = 0$.

Nyní předpokládejme, že existuje nenulové celé číslo $z \neq 0$, které je v relaci $\varphi$ s posloupností $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ a také s posloupností $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Z Věty 3 plyne, že jak poslosloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, tak posloupnost $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, má jen konečně mnoho nenulových členů. Označme $k_1 = \max\{i \in \mathbb{N} : a_i = 1\}$, $k_2 = \max\{i \in \mathbb{N} : b_i = 1\}$ a $k = \max\{k_1, k_2\}$ (čísla $k_1$ a $k_2$ jistě existují, neboť $z$ je nenulové). Potom jistě platí:

$$z = \sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i = \sum_{i=0}^{k} b_i(-2)^i \tag{10}$$

Z (11) plyne, že

$$0 = \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i)(-2)^i \tag{11}$$

Jak jsme ale výše dokázali, musí pro každé $i \in \{0, \ldots, k\}$ platit $a_i - b_i = 0$. To ovšem znamená, že $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$.

■

**Důsledek 1** Negabinární číselná soustava je jednoznačná číselná soustava na okruhu celých čísel.

**Důkaz** Z Věty 4 okamžitě plyne, že relace $\varphi$ je zobrazení. ■

Výše uvedené poznatky můžeme shrnout. V negabinární číselné soustavě dokážeme vyjádřit libovolné celé číslo pomocí konečného ciferného zápisu a to jediným způsobem.

**Poznámka 3** Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v negabinární číselné soustavě je založen na konstrukci popsané v důkazu Věty 1:

1. Nechť $z$ je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $i = 0$ je počáteční hodnota algoritmu.
2. Pro pro $i > 0$ ze vztahu $z_i = z_{i+1} \cdot (-2) + a_i$ určíme čísla $z_{i+1}$ a $a_i$ tak, aby platilo $a_i \in \{0, 1\}$.
3. Algoritmus končí pro $i = n$, kde $z_{n+1} = 0$.
4. Potom $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro každé $i > n$, splňuje požadavek $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$.

**Příklad 2**
Vyjádříme číslo $z = 13$ v negabinární číselné soustavě.

$$
\begin{array}{rcrcccc}
z_i & = & z_{i+1} & \cdot & (-2) & + & a_i \\
\hline
13 & = & -6 & \cdot & (-2) & + & 1 \\
-6 & = & 3 & \cdot & (-2) & + & 0 \\
3 & = & -1 & \cdot & (-2) & + & 1 \\
-1 & = & 1 & \cdot & (-2) & + & 1 \\
1 & = & 0 & \cdot & (-2) & + & 1
\end{array}
$$

A opravdu, $1 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^4 = 1 + 4 - 8 + 16 = 13$. Můžeme proto psát $\varphi(13) = (11101)_{-2}$. ■

## 2.1 Sčítání celých čísel v negabinární číselné soustavě

Sčítání čísel v negabinární číselné soustavě můžeme provádět podle schématu popsaného v následujících příkladech.

- Zvolme $a = 9$ a $b = 19$. Dle výše uvedeného algoritmu nalezneme ciferný záipis těchto celých čísel $9 = (11001)_{-2}$ a $19 = (10111)_{-2}$. Cifry zapíšeme pod sebe do tabulky a do řádku pod nimi naznačíme pomocí čárek, kolik má součet $a + b$ příslušných mocnin čísla $-2$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | a |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | b |
| \|\| | \| | \| | \| | \|\| | a+b |

(12)

  Třetí řádek Tabulky 12 znázorňuje fakt, že $a + b = (-2)^4 + (-2)^3 + 0(-2)^2 + 0(-2)^1 + 1(-2)^0 + (-2)^4 + 0(-2)^3 + 1(-2)^2 + 1(-2)^1 + 1(-2)^0 = 2(-2)^4 + (-2)^3 + (-2)^2 + (-2)^1 + 2(-2)^0$.

  Tento řádek můžeme dále upravovat a to dle následujících pravidel. Protože $(-2)^{k+1} + 2(-2)^k = 0$, můžeme nahradit:

| | | |
|---|---|---|
| \| | \|\| | a+b |
| 0 | 0 | a+b |

(13)

Protože $2(-2)^k = -(-2)^{k+1}$, můžeme nahradit:

| | | |
|---|---|---|
| 0 | \|\| | a+b |
| -\| | 0 | a+b |

(14)

Protože $-(-2)^k = (-2+1)(-2)^k = (-2)^{k+1} + (-2)^k$, můžeme nahradit:

| | | |
|---|---|---|
| 0 | -\| | a+b |
| \| | \| | a+b |

(15)

Vzhledem k (13), (14) a (15) můžeme v úpravách Tabulky (12) pokračovat následujícím způsobem:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | a |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | b |
| 0 | 0 | \|\| | \| | \| | \| | \|\| | a+b |
| 0 | -\| | 0 | \| | \| | 0 | 0 | a+b |
| \| | \| | 0 | \| | \| | 0 | 0 | a+b |

(16)

Z posledního řádku vyčteme, že $a+b = (1101100)_{-2}$. A opravdu, $(-2)^6 + (-2)^5 + (-2)^3 + (-2)^2 = 64 - 32 - 8 + 4 = 28 = 9 + 19$.

- Sečtěme nyní čísla $a = -3 = (1101)_{-2}$ a $b = -5 = (1111)_{-2}$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | a |
| 1 | 1 | 1 | 1 | b |
| \|\| | \|\| | \| | \|\| | a+b |
| \| | 0 | 0 | 0 | a+b |

(17)

Proto $a+b = (1000)_{-2}$. A opravdu, $(-2)^3 = -8 = -3 + (-5)$.

### 2.2 Nalezení čísla opačného v negabinární číselné soustavě

K danému číslu $z$ hledáme číslo opačné. Je zřejmé, že $-z = (-2+1)z$. Můžeme proto určit $-z$ jako soucet čísel $z$ a $-2z$. Násobení číslem $-2$ je lehké, stačí připsat nulu na konec ciferného zápisu. Předvedeme na příkladech:

- Nalezneme číslo opačné k číslu $z = 21 = (10101)_{-2}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | z |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | -2z |
| \| | \| | \| | \| | \| | \| | -z |

(18)

Proto $-z = (111111)_{-2}$. A opravdu, $-32 + 16 - 8 + 4 - 2 + 1 = -21$.

- Nalezneme číslo opačné k číslu $z = 7 = (11011)_{-2}$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \text{z} \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \text{-2z} \\
\hline
\hline
| & || & | & | & || & | & \text{-z} \\
\hline
0 & 0 & | & 0 & 0 & | & \text{-z} \\
\hline
\end{array} \tag{19}$$

Proto $-z = (1001)_{-2}$. A opravdu, $-8 + 1 = -7$.

## 2.3 Násobení v negabinární číselné soustavě

Násobení v negabinární soustavě je analogické násobení v desítkové soustavě. Násobíme-li číslo $a = (a_n, \ldots, a_0)_{-2}$ číslem $(-2)^k = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{-2}$, pak stačí přidat na konec ciferného zápisu $k$ nul:

$$(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{-2} \cdot (a_n, \ldots, a_0)_{-2} = (a_n, \ldots, a_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{-2}.$$

Proto pro součin čísel $a = (a_n, \ldots, a_0)_{-2}$ a $b = (b_k, \ldots, b_0)_{-2}$ platí

$$a \cdot b = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (b_k, \ldots, b_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{i \text{ nul}})_{-2} \tag{20}$$

Demonstrujeme na příkladech

- Vynásobíme čísla $a = 5 = (101)_{-2}$ a $b = 3 = (111)_{-2}$.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & (=a) \\
\cdot & & & & 1 & 1 & 1 & (=b) \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 1 & (=x_1) \\
+ & & & & & 0 & & (=x_2) \\
+ & 1 & 1 & 1 & & & & (=x_3)
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(101)_{-2} \cdot (111)_{-2} = 1 \cdot (111)_{-2} + 0 \cdot (1110)_{-2} + 1 \cdot (11100)_{-2} = (111)_{-2} + (11100)_{-2}$$

Můžeme sečíst schematicky:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | $x_1$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | $x_3$ |
| $\vert$ | $\vert$ | $\vert\vert$ | $\vert$ | $\vert$ | $x_1 + x_3$ |
| $\vert$ | 0 | 0 | $\vert$ | $\vert$ | $x_1 + x_3$ |

Proto $a \cdot b = (110011)_{-2} = 16 - 2 + 1 = 15 = 5 \cdot 3$.

- Vynásobíme čísla $a = -9 = (1011)_{-2}$ a $b = 11 = (11111)_{-2}$.

$$(1011)_{-2} \cdot (11111)_{-2} = (11111)_{-2} + (111110)_{-2} + (11111000)_{-2}$$

Můžeme sečíst schematicky:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $x_1$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | $x_2$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $x_4$ |
| $\vert$ | $\vert$ | $\vert\vert$ | $\vert\vert\vert$ | $\vert\vert\vert$ | $\vert\vert$ | $\vert\vert$ | $\vert$ | $x_1 + x_2 + x_4$ |
| $\vert$ | 0 | 0 | $\vert\vert$ | $\vert$ | $\vert$ | 0 | $\vert$ | $x_1 + x_2 + x_4$ |
| $\vert$ | 0 | -$\vert$ | 0 | $\vert$ | $\vert$ | 0 | $\vert$ | $x_1 + x_2 + x_4$ |
| $\vert$ | $\vert$ | $\vert$ | 0 | $\vert$ | $\vert$ | 0 | $\vert$ | $x_1 + x_2 + x_4$ |

Proto $a \cdot b = (11101101)_{-2} = -128 + 64 - 32 - 8 + 4 + 1 = -99 = (-9) \cdot 11$.

## 3 Komplexní číselná soustava

**Úmluva 2** Pozor! Narozdíl od jiných kapitol, v kterých se $i$ objevuje jako index posloupnosti, budeme v této kapitole symbolem $i$ značit imaginární část komplexního čísla.
Protože $a$ již používáme pro značení posloupnosti budeme komplexní číslo místo obvyklého značení $z = a + bi$ značit ve většině případů $z = u + vi$, kde u je celočíselná část a v je imaginární část komplexního čísla.

**Definice 6** *Množinu $\mathbb{Z}[i]$ nazýváme množinou Gauusovských celý čísel. Je definována následovně:*

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

*[***b***]*

**Definice 7** *Komplexní číselná soustava je číselná soustava na okruhu $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ o základu $\{(-1+i)^j\}_{j=0}^{\infty}$ s množinou cifer $C = \{0, 1\}$.*

Komplexní číselná soustava je tedy relace $\varphi$ mezi gaussovskými celými čísly a posloupnostmi jedniček a nul, kde $z \in \mathbb{Z}[i]$ je v relaci s posloupností $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě thedy, když

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} a_i \cdot (-1+i)^j.$$

Ciferným zápisem Gaussova celého čísla v komplexní číselné soustavě je posloupnost čísel z množiny $C = \{0, 1\}$. Fakt, že $\varphi(z) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro $i > k$, budeme symbolicky zapisovat $\varphi(z) = (a_k \ldots a_0)_{(1-i)}$. Pokud nebude moci dojít k omylu, tento zápis ještě zjednodušíme na $z = (a_k \ldots a_0)_{(1-i)}$. Například $7 - 2i = (1001001)_{(-1+i)}$, neboť $7 - 2i = 1 \cdot (1-i)^6 + 0 \cdot (1-i)^5 + 0 \cdot (1-i)^4 + 1 \cdot (1-i)^3 + 0 \cdot (1-i)^2 + 0 \cdot (1-i)^1 + 1 \cdot (1-i)^0 = 8i + (-2-2i) + 1 = -1$.

Prozkoumáme základní vlastnosti této číselné soustavy. Nejprve ukážeme, že v komplexní číselné soustavě dokážeme najít ciferný zápis pro libovolné gaussovské celé číslo.

**Definice 8** *Dělení v $\mathbb{Z}[i]$ základem soustavy provádíme následovně:*

$$\forall z \in \mathbb{Z}[i]: \quad \frac{z}{-1+i} = \frac{(v-u) - (u+v)i}{2}$$

*Protože:*

$$\frac{z}{-1+i} = \frac{u+vi}{-1+i} = \frac{u+vi}{-1+i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(u+vi)\cdot(1+i)}{(-1+i)\cdot(1+i)} = \frac{(u-v)+(u+v)i}{-2} = \frac{(v-u)-(u+v)i}{2}$$

Protože jsme zatím gaussovská celá čísla neprozkoumali, definujme jako zbytek libovolné číslo z gaussovských celých čísel bez omezení. Narozdíl od dělení se zbytkem u celých čísel, kde zbytek musí být menší než dělitel. U gaussovských celých čísel jsme totiž nedefinovali relaci měnší/větší.

**Definice 9** *Zbytek po dělení číslem* $z \in \mathbb{Z}[i]$.
*Jestliže podíl dvou gaussovských celých čísel nepatří do množiny gaussovských celých čísel, pak si můžeme vypomoci zbytkem po dělení, který v této kapitole označujeme* $g \in \mathbb{Z}[i]$. *Nechť* $a + bi$ *a* $c + di$ *jsou gaussovská celá čísla.*

$$\frac{a+bi}{c+di} = e + fi \quad zb.\ g$$

*Můžeme si rozmyslet, že vždy najdeme nekonečně mnoho* $g \in \mathbb{Z}[i]$, *tak aby platilo následující:*

$$(e + fi) \in \mathbb{Z}[i] \quad \wedge \quad (a + bi) = (c + di) \cdot (e + fi) + g$$

**Věta 5** *Jestliže dělitelem je* $(-1 + i)$ *a výsledný podíl spočítáme takto:*

$$e + fi = \left\lceil \frac{a+bi}{-1+i} \right\rceil \qquad ((e + fi) \in \mathbb{Z}[i])$$

*Pak zbytek z Definice 9 je z množiny* $\{0, 1\}$

**Důkaz** Pro takto definovaný zbytek platí:

$$(ec - fd) + (ed + fc)i + g = a + bi$$

$$g = (a + fd - ce) - (cf + de - b)i$$

Protože dělitel$(c + di) = (-1 + i)$, můžeme přepsat

$$g = (a + f + e) - (-f + e - b)i = (a + f + e) + (f + b - e)i$$

Vyjádříme $e$ a $f$:

$$e + fi = \left\lceil \frac{a+bi}{-1+i} \right\rceil = \left\lceil \frac{(b-a)-(a+b)i}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil i$$

$$\Rightarrow \quad e = \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil \quad \wedge \quad f = \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil$$

Po dosazení $f$ a $e$ do rovnice se zbytkem dostáváme:

$$g = \left(a + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil\right) + \left(b - \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil\right) i$$

jelikož $b \in \mathbb{Z}$, můžeme si dovolit zapsat:

$$b - \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil = -\left\lceil \frac{b-a}{2} - b \right\rceil = -\left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil$$

a proto:

$$g = \left(a + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil\right) + \left(- \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil\right) i$$

$$g = \left(a + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil\right)$$

$$g = \left(- \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{b+a}{2} \right\rceil\right)$$

nemusíme dlouho přemýšlet a všimneme si, že se jedná o rozdíl horní celé části a dolní celé části racionálního čísla $\frac{a+b}{2}$ a tudíž pro zbytek jistě platí:

$$g = \begin{cases} 0 & \text{pro } \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{pro } \frac{a+b}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

■

**Definice 10** *Norma gaussovského celého čísla*
$N(z) = N(u + vi) = \sqrt{u^2 + v^2}$
*Normu si můžeme představit jako vzdálenost v komplexní rovině od* $0 + 0i$.

**Poznámka 4** Stejně jako při umocnění celého čísla ($\neq 0$) roste jeho norma (vzdálenost od 0), tak i při umocnění gaussovského čísla ($\neq 0 + 0i$) roste jeho norma.

Ukažme si to na příkladu

**Příklad 3**
$z = (-1 + i)$

| j | $z^j$ | $z^j$ | $N(z^j)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $(-1+i)^0$ | $1$ | $1$ |
| 1 | $(-1+i)^1$ | $-1+i$ | $\sqrt{2}$ |
| 2 | $(-1+i)^2$ | $-2i$ | $2$ |
| 3 | $(-1+i)^3$ | $2+2i$ | $2\sqrt{2}$ |
| 4 | $(-1+i)^4$ | $-4$ | $4$ |

(21)

■

**Poznámka 5** Uvědomme si, že stejně jako u dělení celých čísel, tak i při dělení gaussovských celých čísel platí následující: Jestliže je norma dělitele větší než 1, pak výsledný podíl bude mít jistě menší normu než dělenec.

Proveďme příklad pro znázornění.

**Příklad 4**
$a = 3 + 2i \quad b = 1 + 2i$
$N(a) = \sqrt{13} \quad N(b) = \sqrt{5}$

$\frac{a}{b} = \frac{3+2i}{1+2i} = \frac{(3+2i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \frac{7-4i}{5}$
$N\left(\frac{3+2i}{1+2i}\right) = \sqrt{\frac{65}{25}} < \sqrt{13}$ ■

**Věta 6** *Pro každé* $z \in \mathbb{Z}[i]$ *existuje posloupnost* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} : z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (1-i)^j$.
*To jest* $D(\varphi) = \mathbb{Z}[i]$

**Důkaz** Buď $z \in \mathbb{Z}[i]$ dáno.

- $z = 0 + 0i \Rightarrow N(z) = 0$
  $z$ je v relaci například s $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kdy pro každé $i \in \mathbb{N} : a_i = 0$
  jistě tedy platí $z = \sum_{j=0}^{\infty} 0 \cdot (-1+i)^j$
- $z \neq 0 + 0i \Rightarrow N(z) > 0$

$$\text{z=z=} \quad \vdots \tag{22}$$

■

**Poznámka 6** Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v komplexní číselné soustavě

1. Nechť $z$ je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $j = 0$ je počáteční hodnota algoritmu
2. Provedeme následující operaci:
   $x = \frac{(u_j - v_j) + (u_j + v_j)i}{2}$
   Jestliže $x \in \mathbb{Z}[i]$, pak $z_{j+1} = x \quad a_{j+1} = 0$
   V opačném případě $z_{j+1} = \frac{(u_j - v_j - 1) + (u_j + v_j - 1)i}{2} \quad a_{j+1} = 1$
3. Opakujeme operaci dokud $z_{j+1} \neq 0$, nechť $n$ je počet iterací. ($n$ je jistě konečné, viz. 3)
4. $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, kde $a_j = 0$ pro každé $j > n$, splňuje požadavek $z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (1-i)^j$

# 4 Fibonacciho číselná soustava

**Definice 11** *Fibonacciho číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *o základu* $\{F_i\}_{i=0}^{\infty}$ *(kde* $F_i$ *je i-tý člen fibonacciho posloupnosti) s množinou cifer* $C = \{0, 1\}$.

**Definice 12** *Fibonacciho posloupnost*
*Je nekonečná posloupnost přirozených čísel definována rekurentní formulí:*

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

**Příklad 5**

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$\vdots$$

$$\{F_i\}_{i=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$$

■

**Úmluva 3** V fibonacciho číselné soustavě zapisujeme: $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_F$
Hledáme-li relaci k zápornému číslu, pak podobně jak jsme zvyklí v desítkové číselné soustavě, najdeme reprezentaci čísla opačného a zapíšeme znaménko $-$ před reprezentaci: $\varphi(x) = -(\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_F$

**Věta 7** *Pro každé* $x \in \mathbb{Z} \quad \exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : x = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot F_i & \text{pro } x \geq 0 \\ -\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot F_i & \text{pro } x < 0 \end{cases}$ *To jest* $D(\varphi) = \mathbb{Z}$

**Důkaz**

■

## 5 Faktoriálová číselná soustava

**Definice 13** *Faktoriálová číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *o základu* $\{(i+1)!\}_{i=0}^{\infty}$ *s množinou cifer* $C = \mathbb{N}_0$.

**Úmluva 4** V faktoriálové číselné soustavě zapisujeme: $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_!$
Hledáme-li relaci k zápornému číslu, pak podobně jak jsme zvyklí v desítkové číselné soustavě, najdeme reprezentaci čísla opačného a zapíšeme znaménko $-$ před reprezentaci: $\varphi(x) = -(\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_!$

**Věta 8** *Pro každé* $x \in \mathbb{Z} \quad \exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : x = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)! & \textit{pro } x \geq 0 \\ -\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)! & \textit{pro } x < 0 \end{cases}$ *To jest* $D(\varphi) = \mathbb{Z}$

**Důkaz** Nechť $x \in \mathbb{Z}$ je dáno. Jelikož fibonacciho posloupnost je od $F_2$ rostoucí nekonečná posloupnost a její první člen $F_0 = 0$,pak $\lim_\infty F_n = \infty$. Je tedy zřejmé, že pro námi zvolené x najdeme právě jedno $i \in \mathbb{N}_0$, pro které platí $F_i \leq x < F_{i+1}$. Označme naše $x$ jako $x_0$ a celočíselným dělením proveďme operaci $x/F_i$. Výsledek bude 1 zb. $x_1$, $x_1 \in \mathbb{N}$. Pokud by výsledek byl $\geq 2$, pak $x \geq 2 \cdot F_i$, $F_i + F_i \geq F_i + F_{i-1} = F_{i+1}$ což je spor! protože bychom na začátku nevybrali ono počáteční $F_i$, ale $F_{i+1}$.

$\vdots$

$\alpha)$ $x = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} : a_i = 0$

$\beta)$ Je zřejmé, že pro libovolné $x \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno $n \in \mathbb{N} : n! \leq x < (n+1)!$
Protože $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ ??je?? euklidovský obor integrity, jistě existují čísla $x_i \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{N}_0$ taková, že:

$$x = x_0 = a_0 \cdot n! + x_1, \quad a_0 \in \mathbb{N}$$

$$x_1 = a_1 \cdot (n-1)! + x_2, \quad a_1 \in \mathbb{N}_0$$

$$x_2 = a_2 \cdot (n-2)! + x_3, \quad a_2 \in \mathbb{N}_0$$

$$x_{k-1} = a_k \cdot (n-k+1)! + x_k$$

$$x_{n-1} = a_{n-1} \cdot 1! + x_n$$

$$x_n = a_n \cdot 0!$$

$\forall k \geq 1 :$

$$x_k = x_{k-1} - a_n \cdot (n-k+1)!$$

$a_n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$ buď $a_n = x_{k-1}$, pak jistě

$$x_k \leq x_{k-1} - a_n(n-k+1)! \leq 0,$$

protože $(n-k+1)! \leq 1$
Pro dost velké $k_0 : x_{k_0} = 0$

$$\Rightarrow x = x_0 = a_n \cdot (0)! + a_{n-1} \cdot (1)! + \cdots + a_0$$

$\blacksquare$

**Poznámka 7** Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v faktoriálové číselné soustavě

1. Nechť $x$ je číslo, které chceme reprezentovat, $x_0 = x$ a $i = 0$ je počáteční hodnota algoritmu
2. Najdeme nejvyšší n, pro které platí: $n! < x$
3. Provedeme následující operaci:
   $x_i/(n-i)! = a_{n-i-1}$ *zb.* $x_{i+1}$, kde $a_i, x_i \in \mathbb{N}_0$
4. Opakujeme operaci dokud $x_{i+1} \neq 0$, nechť $n$ je počet iterací. ($n$ je jistě konečné, viz. 5)
5. $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro každé $i > n$, splňuje požadavek $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)!$

**Věta 9** *Jestliže* $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)!$, *pak* $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : a_n = 0$

**Důkaz** Sporem:
Nechť existuje taková posloupnost, že pro libovolné $n$ najdeme vždy $n_0$ větší: $a_{n_0} \neq 0$
Pak $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)! \notin \mathbb{N}_0$, protože suma řady diverguje k $+\infty$ $\blacksquare$

**Definice 14** *Omezená množina velikosti i*

$$C_i = \{k, k \in \mathbb{N}_0, k \leq i\} = \{0, \ldots, i\}$$

*Např.* $C_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

**Věta 10** *Pro vyjádření libovolného* $x \in \mathbb{N}_0$ *nám postačí omezená množina* $C_i \subseteq \mathbb{N}_0$. *Pro každé* $i \in \mathbb{N}_0$ *pro faktoriálovou číselnou soustavu platí* $C = C_i$. *To jest, každé číslo* $x \in \mathbb{N}_0$ *lze vyjádřit následovně:*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(i+1)!, \quad a_i \in C_i$$

**Důkaz** ... $\blacksquare$

**Věta 11** *Jestliže* $a_i \in C_{i+1}$, *pak je faktoriálová číselná soustava jednoznačná*

**Důkaz** ... $\blacksquare$

**Příklad 6**

$$z = 77$$

$$77 : 4! = 3\, zb.\, 5$$

$$5 : 3! = 0\, zb.\, 5$$

$$5 : 2! = 2\, zb.\, 1$$

$$1 : 1! = 1\, zb.\, 0$$

$$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 3$$

$$77 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 4!$$

$$77 = 1 + 4 + 72 \quad \checkmark$$

■

# 6 Závěr

Závěrečná kapitola obsahuje zhodnocení dosažených výsledků se zvlášť vyznačeným vlastním přínosem studenta. Povinně se zde objeví i zhodnocení z pohledu dalšího vývoje tématu práce, student uvede náměty vycházející ze zkušeností s řešeným tématem a uvede rovněž návaznosti na právě dokončené související práce (řešené v rámci ostatních bakalářských/diplomových prací v daném roce nebo na práce řešené na externích pracovištích).

## Odkazy


[1] Bouchala J., *Matematická analýza ve Vesmíru*, strana 3

[2] Keith C., *The Gaussian integers*

[3] Pelantová E. Starosta Š., *Nestandardní zápisy čísel*