

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Obor: Výpočetní matematika

Nestandardní číselné soustavy

BAKALAŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Christian Krutsche
Vedoucí: RNDr. Pavel Jahoda, Ph.D.

2019

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Veškeré použité podklady, ze kterých jsem čerpal informace, jsou uvedeny v seznamu použité literatury a citovány v textu podle normy ČSN ISO 690.

V Ostravě dne středa 25.5.2020 Podpis studenta

Poděkování

Děkuji xx za odborné vedení práce, věcné připomínky, dobré rady a vstřícnost při konzultacích a vypracovávání bakalářské práce.

Abstrakt

Cílem této práce je prozkoumat různé nestandardní možnosti zápisu či kódování čísel. Kromě všem známých soustav s číselným základem (dvojková, šestnáctková,...), jsou zde i zvláštní soustavy s jiným základem. Práce nám přiblíží spektrum // **pěti?!!** nestandardních soustav. U každé soustavy se zabývá důkazem jednoznačnosti vyjádření čísel v daném tvaru a důkazem schopnosti vyjádřit libovolně zvolené čísla. Práce zkoumá nejen soustavy s celočíselným základem, ale i se základem iracionálním, či dokonce komplexním.

Obsah

| | | |
|-------|---------------------------------|----|
| 0.1 | Úvod | 6 |
| 0.1.1 | Definice | 6 |
| 0.1.2 | Názorné příklady | 9 |
| 0.2 | Fibonacciho kódování | 11 |
| 0.3 | Zlatý řez | 12 |
| 0.4 | Negabinární | 13 |
| 0.5 | Odmocnina ze dvou?? | 17 |
| 0.6 | Kvaterimaginární (2i) | 18 |
| 0.7 | Complex (i-1) | 19 |
| 0.8 | Factorial base | 20 |
| 0.9 | Eulerovo číslo | 21 |

0.1 Úvod

0.1.1 Definice

Připomeňme, že libovolnou podmnožinu φ kartézského součinu $A \times B$ nazýváme relací mezi prvky z množiny A a prvky z množiny B . Fakt, že $(a, b) \in \varphi$ budeme značit $\varphi(a) = b$ a $\varphi \subseteq A \times B$ budeme značit $\varphi : A \rightarrow B$, tak jak je to obvyklé u zobrazení, jež jsou speciálními případy relací.

V dalším textu budeme pracovat s tělesy a okruhy na nichž je definován součet nekonečné řady.

Definice 1 (Číselná soustava na tělese) Nechť $(A, +, \cdot)$ je těleso; $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ jsou posloupnosti prvků z A ; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C . Číselnou soustavou na tělese $(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \rightarrow B \times B$, kde $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty, \{b_i\}_{i=1}^\infty)$ právě když

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i$$

Množinu C označujeme jako **množinu cifer** číselné soustavy φ . Budeme používat značení $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty, \{b_i\}_{i=1}^\infty) = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots) = (\dots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots)$

Všimněme si, že nevyžadujeme, aby φ bylo zobrazení. Číselná soustava nemusí vyjadřovat každý prvek z A a ty prvky z A , které jsou v relaci φ , nemusí být vyjádřeny jediným způsobem. Uvažujme například obvyklou desítkovou číselnou soustavu na tělese reálných čísel. Jde o číselnou soustavu, kde $C = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ a základem jsou konstantní posloupnosti $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty = \{10\}_{n=0}^\infty$ a $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty = \{\frac{1}{10}\}_{n=1}^\infty$. Potom $[x]$ je dolní celá část reálného čísla x

$$\varphi(1) = \left(\left\{ \left[\frac{1}{n+1} \right] \right\}_{n=0}^\infty, \{0\}_{n=0}^\infty \right) = (\dots 001, 000 \dots),$$

ale také

$$\varphi(1) = (\{0\}_{n=0}^\infty, \{9\}_{n=0}^\infty) = (\dots 000, 999 \dots).$$

Analogicky jako na tělese definujeme číselnou soustavu na okruhu.

Definice 2 (*Číselná soustava na okruhu*) Necht' $(A, +, \cdot)$ je okruh; $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$ je posloupnost prvků z A ; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C . **Číselnou soustavou na okruhu** $(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \rightarrow B$, kde $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^\infty$ právě když

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$$

Množinu C označujeme jako **množinu cifer** číselné soustavy φ . Budeme používat značení $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^\infty = (\dots a_2, a_1, a_0)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0) = \dots a_2 a_1 a_0$

Poznámka 1 Všimněme si, že číselná soustava φ , ať již na tělese, nebo na okruhu, splňuje:

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Proto, je-li φ zobrazení, je injektivní. Dále můžeme tvrdit, že hodnota $\varphi(x)$ (i v případě, že $\varphi(x)$ není zobrazení) jednoznačně určuje svůj vzor x , ale, jak jsme viděli výše, x nemusí jednoznačně určovat svůj obraz $\varphi(x)$.

Definice 3 Jestliže pro číselnou soustavu φ na tělese $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení s definičním oborem A , pak tuto soustavu nazveme **Jednoznačnou číselnou soustavou na tělese** $(A, +, \cdot)$. Analogicky, jestliže pro číselnou soustavu φ na okruhu $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení s definičním oborem A , pak tuto soustavu nazveme **Jednoznačnou číselnou soustavou na okruhu** $(A, +, \cdot)$.

Jednoznačnou číselnou soustavou na tělese (respektive okruhu), tedy nazveme každou číselnou soustavu v níž dokážeme vyjádřit libovolný prvek tělesa (okruhu), přičemž je toto vyjádření jediné možné. To jest platí:

$$(\forall x \in A)(\exists! (\{a_i\}_{i=0}^\infty, \{b_i\}_{i=1}^\infty) \in \mathbf{B} \times \mathbf{B}) : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i,$$

respektive

$$(\forall x \in A)(\exists! \{a_i\}_{i=0}^\infty \in \mathbf{B}) : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i.$$

Úmluva 1

- Necht' $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ jsou posloupnosti, které jsou základem číselné soustavy na tělese $(A, +, \cdot)$. Jestliže $\exists n \in \mathbb{A}$, pro které platí:

$$(\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i = n^i, \beta_i = n^{-i}) \wedge (\alpha_0 = 1)$$

pak prvek \mathbf{n} nazýváme také základem této číselné soustavy (1 označuje neutrální prvek tělesa $(A, +, \cdot)$ vzhledem k násobení).

- Necht' $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty, \{b_i\}_{i=1}^\infty)$ je číselná soustava na tělese o základu \mathbf{n} .
Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$, a pokud $(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_2) : b_m = 0$, budeme zapisovat: $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2})_n$
- V případě $n=10$ píšeme pouze $\varphi(x) = a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2}$
- Necht' $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$ je posloupnost, která je základem číselné soustavy na okruhu $(A, +, \cdot)$ s jedničkou. Jestliže $\exists n \in \mathbb{A}$, pro které platí:

$$(\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i = n^i) \wedge (\alpha_0 = 1)$$

pak prvek \mathbf{n} nazýváme také základem této číselné soustavy (1 je jedničkou v okruhu $(A, +, \cdot)$).

- Necht' $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty)$ je číselná soustava na okruhu o základu \mathbf{n} .
Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$, budeme zapisovat: $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0)_n$

0.1.2 Názorné příklady

Pro lepší představu definice číselné soustavy si ji předvedme na příkladu

Příklad 1 *Uvažujme těleso reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Tj. zvolili jsme $A = \mathbb{R}$. Obvyklý desetinný zápis reálných čísel je vlastně číselná soustava na tělese $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty = \{10^i\}_{i=0}^\infty$, $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty = \{10^{-i}\}_{i=1}^\infty$ a $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Podle dohody můžeme říci, že jde o číselnou soustavu na tělese o základu 10 a platí:*

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty, \{b_i\}_{i=1}^\infty),$$

kde $\{a_i\}_{i=0}^\infty = (5, 2, 3, 0, 0, \dots)$ a $\{b_i\}_{i=1}^\infty = (6, 0, 0, \dots)$.

Podle Úmluvy 1 můžeme psát

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}) = 325,6$$

Pozorování:

Je-li základem soustavy racionální číslo či posloupnost čísel

$$\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i \in \mathbb{Q} \wedge \beta_i \in \mathbb{Q}$$

pak:

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i \in \mathbb{N}, i > k) : b_i = 0$$

(tj. zlomková část lze vyjádřit konečným počtem prvků **b**)

Pro každou soustavu platí

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i \in \mathbb{N}, i > k) : a_i = 0$$

(tj. celočíselná část musí být z konečného počtu prvků **a**)

0.2 Fibonacciho kódování

0.3 Zlatý řez

0.4 Negabinární

Definice 4 *Negabinární číselná soustava je číselná soustava o základu -2 s množinou cifer $C = \{0, 1\}$*

Negabinární číselná soustava je zobrazení: $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow B$

$$B = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, a_n \in \{0, 1\}\}$$

Musíme ověřit korektnost 5. Musíme ukázat, že φ je opravdu zobrazení na \mathbb{Z} . To jest, že $D(\varphi) = \mathbb{Z}$ a že každé celé číslo z je možné vyjádřit ve tvaru $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$ jednoznačně

Věta 1

$$(\forall z \in \mathbb{Z})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : a_n = 0$$

tj. neexistuje žádné celé číslo, které by se zobrazilo na nekonečnou posloupnost a_n

Důkaz 1 *Předpokládejme, že takové číslo z existuje, pak uvažujme tři případy:*

$$a) (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : (n \bmod 2 = 0 \wedge a_n = 0) \vee (n \bmod 2 = 1 \wedge a_n = 1)$$

Je zřejmé, že takové číslo by v součtu bylo $-\infty \implies \notin \mathbb{Z}$

$$b) (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : (n \bmod 2 = 0 \wedge a_n = 1) \vee (n \bmod 2 = 1 \wedge a_n = 0)$$

Je zřejmé, že takové číslo by v součtu bylo $\infty \implies \notin \mathbb{Z}$

c) *Pro každé sudé n_1 najdeme n_2 větší, kde $a_{n_2} = 1$ a analogicky pro každé liché n_1 najdeme n_2 větší, kde $a_{n_2} = 1$*

$$I. (\forall n_1 \in \mathbb{N}, a_{n_1} = 1 \wedge n_1 \bmod 2 = 1)(\exists n_2 \in \mathbb{N}, a_{n_2} = 1 \wedge n_2 \bmod 2 = 0) : n_2 > n_1$$

$$n_2 \bmod 2 = 0 \implies (-2)^{n_2} = 2^{n_2}$$

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2}$$

$$-\left(\frac{2^{n_2} - 1}{2 - 1}\right) + 2^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\frac{2^{n_2} - 1}{2 - 1}\right) + 2^{n_2}$$

$$1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq 2 \cdot 2^{n_2} - 1$$

II. $(\forall n_1 \in \mathbb{N}, a_{n_1} = 1 \wedge n_1 \bmod 2 = 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N}, a_{n_2} = 1 \wedge n_2 \bmod 2 = 1) : n_2 > n_1$

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n (-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2}$$

$$-\left(\frac{2^{n_2} - 1}{2 - 1}\right) - 2^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n (-2)^n\right) - 2^{n_2} \leq \left(\frac{2^{n_2} - 1}{2 - 1}\right) - 2^{n_2}$$

$$-2 \cdot 2^{n_2} + 1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n (-2)^n\right) - 2^{n_2} \leq -1$$

*Je zřejmé, že taková suma nekonverguje, protože vždy najdeme případ, kdy suma je menší než -1 a zároveň případ, kdy suma je větší než 1 \implies **spor!***

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-2)^n \implies (\exists n \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) : a_n = 0$$

Důkaz 2 Je třeba dokázat korektnost, tj. že $\varphi(z)$ je zobrazení. Předpokládejme

$$\begin{aligned}\{a_n\}_{n=0}^{\infty} &\neq \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \wedge \\ z &= \sum_{n=0}^k a_n (-2)^n = \sum_{n=0}^k b_n (-2)^n \\ C_n &= a_n - b_n \\ \left(\sum_{n=0}^k (a_n - b_n) (-2)^n \right) &= 0, C_n \in \{-1, 0, 1\}\end{aligned}$$

Abychom došli ke sporu, předpokládejme, že $\exists n_0 \in \{0, \dots, k\} : C_{n_0} \neq 0$

$\alpha)$ $C_{n_0} = 1$

I.) $n_0 \bmod 2 = 0$

$$\begin{aligned}- \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n \right) + (-2)^{n_0} &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n (-2)^n \right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n \right) + (-2)^{n_0} \\ 1 &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n (-2)^n \right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq 2^{n_0+1} - 1\end{aligned}$$

Takové číslo bude jistě kladné, což je **spor**

II.) $n_0 \bmod 2 = 1$

$$\begin{aligned}- \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n \right) + (-2)^{n_0} &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n (-2)^n \right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n \right) + (-2)^{n_0} \\ -2^{n_0+1} + 1 &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n (-2)^n \right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq -1\end{aligned}$$

Takové číslo bude jistě záporné, což je **spor**

$\beta)$ $C_{n_0} = -1$

Důkaz je úplně stejný, ať je C_{n_0} liché nebo sudé, nikdy se suma rovnat 0 jistě nebude.

Podle Úmluvy 1 v negabinární číselné soustavě zapisujeme:

$$\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})_{-2}$$

Příklad 2 *Jestliže φ je negabinární číselná soustava, pak platí:*

$$\varphi(1 \cdot -2^6 + 1 \cdot -2^4 + 1 \cdot -2^1) = (\{a_i\}) = (64 + 16 + (-2))$$

$$a_i = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, \dots)$$

0.5 Odmocnina ze dvou??

0.6 Kvaterimaginární (2i)

Definice 5 *Kvaterimaginární(2i) číselná soustava je číselná soustava (neinjektivní) na tělese $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ o základu 2i, kde množina cifer $C = \{0, 1, 2, 3\}$*

Podle Úmluvy 1 v kvaterimaginární(2i) číselné soustavě zapisujeme:

$$\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})_{2i}$$

Příklad 3 *Jestliže φ je kvaterimaginární číselná soustava, pak platí:*

$$\begin{aligned} & \varphi(1 \cdot (2i)^5 + 1 \cdot (2i)^4 + 3 \cdot (2i)^3 + 2 \cdot (2i)^2 + 3 \cdot (2i)^1 + 1 \cdot (2i)^{-1} + 3 \cdot (2i)^{-2}) = \\ & = \varphi(1 \cdot (32i) + 1 \cdot (16) + 3 \cdot (-8i) + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot (2i)^1 + 1 \cdot (\frac{-i}{2}) + 3 \cdot (\frac{-1}{4})) = \\ & = (\{a_i\}, \{b_i\}) = (7.25 + 13.5i) \\ & a_i = (0, 3, 2, 3, 1, 1\ldots), b_i = (1, 3, \ldots) \end{aligned}$$

Důkaz neinjektivity

$$1.03_{2i} = 0.0003_{2i} = \left(\frac{1}{5}\right)_{10}$$

0.7 Complex (i-1)

Definice 6 *Complex(i-1) číselná soustava je injektivní číselná soustava na okruhu $(\mathbb{Z}_{[i]}, +, \cdot)$ o základu $1 - i$, kde množina cifer $C = \{0, 1\}$*

Podle Úmluvy 1 v negabinární číselné soustavě zapisujeme:

$$\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})_{1-i}$$

Příklad 4 *Jestliže φ je negabinární číselná soustava, pak platí:*

$$\begin{aligned} \varphi(1 \cdot (1 - i)^7 + 1 \cdot (1 - i)^6 + 1 \cdot (1 - i)^3 + 1 \cdot (1 - i)^1) &= \\ = \varphi(1 \cdot (8 + i) + 1 \cdot (8i) + 1 \cdot (-2 - 2i) + 1 \cdot (1 - i)) &= \\ = (\{a_i\}) &= (7 + 13i) \\ a_i &= (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, \dots) \end{aligned}$$

0.8 Factorial base

0.9 Eulerovo cislo