

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Nestandardní číselné soustavy

Non-Standard Numeral Systems

Zadání bakalářské práce

Student: **Christian Krutsche**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: Nestandardní číselné soustavy
Non-Standard Numeral Systems

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Bakalářská práce by se tematicky měla věnovat nestandardním zápisům čísel z dané množiny. Autor by se měl věnovat z větší části těm způsobům reprezentace čísel, které využívají pouze cifer 0 a 1, ale je možné se zabývat i jinými. U každého typu zápisu by měly být popsány jeho základní vlastnosti a pokud možno i případné výhody a nevýhody, které ovlivňují jeho využitelnost.

Seznam doporučené odborné literatury:

Donald E. Knuth: Umění programování 2. díl: Seminumerické algoritmy
E. Pelantová, Š. Starosta: nestandardní zápisy čísel, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 56 (2011), No. 4, 276-289

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Pavel Jahoda, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2019
Datum odevzdání: 30.04.2020

prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární
prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 1. dubna 2020

.....

Děkuji panu RNDr. Pavlu Jahodovi, Ph.D. za odborné vedení práce, věcné připomínky, dobré rady a vstřícnost při konzultacích a vypracovávání bakalářské práce.

Abstrakt

Cílem této práce je prozkoumat různé nestandardní možnosti zápisu či kódování čísel. Kromě všem známých soustav s číselným základem (dvojková, šestnáctková,...), jsou zde i zvláštní soustavy s jiným základem. Práce nám přiblíží spektrum nestandardních soustav. U každé soustavy se zabývá důkazem jednoznačnosti vyjádření čísel v daném tvaru a důkazem schopnosti vyjádřit libovolně zvolené čísla. Práce zkoumá nejen soustavy s celočíselným základem, ale i se základem iracionálním, či dokonce komplexním.

Klíčová slova: číselná soustava

Abstract

This is English abstract.

Keywords: numeral system

Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů	7
1 Úvod	8
1.1 Definice	8
1.2 Názorné příklady	11
2 Negabinární	12
3 Komplexní	17
4 Fibonacciho	20
5 Faktoriálová	25
6 Závěr	28
Odkazy	29

Seznam použitých zkratk a symbolů

ČS – Číselná soustava

1 Úvod

1.1 Definice

Připomeňme, že libovolnou podmnožinu φ kartézského součinu $A \times B$ nazýváme binární relací (dále jen relací) mezi prvky z množiny A a prvky z množiny B . Binární dvojici $(a, b) \in \varphi$ budeme značit $\varphi(a) = b$ a $\varphi \subseteq A \times B$ budeme značit $\varphi : A \rightarrow B$, tak jak je to obvyklé u zobrazení, jež jsou speciálními případy relací.

Následující definici jsme převzali z [a]

Definice 1 *Posloupností na množině M rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina \mathbb{N} . Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in M$ budeme zapisovat některým z následujících způsobů:*

- $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
- (a_n)
- $\{a_n\}_{n=0}^\infty$

Definice 2 (*Číselná soustava na tělese*) *Nechť $(A, +, \cdot)$ je těleso; $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ jsou posloupnosti na množině A ; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C . Číselnou soustavou na tělese $(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \rightarrow B \times B$, kde $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty, \{b_i\}_{i=1}^\infty)$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i$$

Množinu C označujeme jako množinu cifer číselné soustavy φ . Budeme používat značení $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty, \{b_i\}_{i=1}^\infty) = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots) = (\dots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots)$

Všimněme si, že nevyžadujeme, aby φ bylo zobrazení. Číselná soustava nemusí vyjadřovat každý prvek z A a ty prvky z A , které jsou v relaci φ , nemusí být vyjádřeny jediným způsobem. Uvažujme například obvyklou desítkovou číselnou soustavu na tělese reálných čísel. Jde o číselnou soustavu, kde $C = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ a základem jsou konstantní posloupnosti na : $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty = \{10^n\}_{n=0}^\infty$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty = \{\frac{1}{10^n}\}_{n=1}^\infty$ na množině C .

- I. Vyjadřujeme jen nezáporná čísla, např. číslo $x = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \Rightarrow \varphi(x) = (\dots 123, 000 \dots)_\varphi$, ale $\varphi(-x)$ neexistuje. Pomocí cifer z $C = \{0, \dots, 9\}$ při základu $\{10^i\}_{i=0}^\infty$ nelze vyjádřit záporné číslo

II. ($\lfloor x \rfloor$ je celočíselná část reálného čísla x)

$$\varphi(1) = \left(\left\{ \left\lfloor \frac{1}{n+1} \right\rfloor \right\}_{n=0}^{\infty}, \{0\}_{n=0}^{\infty} \right) = (\dots 001, 000 \dots),$$

ale také

$$\varphi(1) = (\{0\}_{n=0}^{\infty}, \{9\}_{n=0}^{\infty}) = (\dots 000, 999 \dots).$$

Analogicky jako na tělese definujeme číselnou soustavu na okruhu.

Definice 3 (*Číselná soustava na okruhu*) Necht $(A, +, \cdot)$ je okruh; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost prvků z A ; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C . **Číselnou soustavou na okruhu** $(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \rightarrow B$, kde $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě když

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$$

Množinu C označujeme jako **množinu cifer** číselné soustavy φ . Budeme používat značení $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (\dots a_2, a_1, a_0)_{\varphi}$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0)_{\varphi} = (\dots a_2, a_1, a_0) = \dots a_2 a_1 a_0$

Poznámka 1 V Definici 2 a Definici 3 předpokládáme, že na tělese, respektive okruhu $(A, +, \cdot)$ jsou definovány nekonečné součty

Poznámka 2 Všimněme si, že číselná soustava φ , ať již na tělese, nebo na okruhu, splňuje:

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Proto, je-li φ zobrazení, je injektivní. Dále můžeme tvrdit, že hodnota $\varphi(x)$ (i v případě, že $\varphi(x)$ není zobrazení) jednoznačně určuje svůj vzor x , ale, jak jsme viděli výše, x nemusí jednoznačně určovat svůj obraz $\varphi(x)$.

Definice 4 Jestliže pro číselnou soustavu φ na tělese $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení, pak tuto soustavu nazveme **jednoznačnou číselnou soustavou na tělese** $(A, +, \cdot)$. Analogicky, jestliže pro číselnou soustavu φ na okruhu $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení, pak tuto soustavu nazveme **jednoznačnou číselnou soustavou na okruhu** $(A, +, \cdot)$.

Jednoznačnou číselnou soustavou na tělese (respektive okruhu), tedy nazveme každou číselnou soustavu v níž dokážeme vyjádřit libovolný prvek tělesa (okruhu), přičemž je toto vyjádření jediné možné. V takovém případě platí:

$$(\forall x \in A)(\exists! (\{a_i\}_{i=0}^\infty, \{b_i\}_{i=1}^\infty) \in \mathbf{B} \times \mathbf{B}) : x = \sum_{i=0}^\infty a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^\infty b_i \beta_i,$$

respektive

$$(\forall x \in A)(\exists! \{a_i\}_{i=0}^\infty \in \mathbf{B}) : x = \sum_{i=0}^\infty a_i \alpha_i.$$

Úmluva 1

- Necht $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ jsou posloupnosti, které jsou základem číselné soustavy na tělese $(A, +, \cdot)$. Jestliže $\exists n \in \mathbb{A}$, pro které platí:

$$(\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i = n^i, \beta_i = n^{-i}) \wedge (\alpha_0 = 1),$$

pak prvek \mathbf{n} také nazýváme základem této číselné soustavy (1 označuje neutrální prvek tělesa $(A, +, \cdot)$ vzhledem k násobení).

- Necht $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty, \{b_i\}_{i=1}^\infty)$ je číselná soustava na tělese o základu \mathbf{n} .
Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$, a pokud $(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_2) : b_m = 0$, budeme zapisovat: $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2})_n$
- V případě $n=10$ píšeme pouze $\varphi(x) = a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2}$
- Necht $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$ je posloupnost, která je základem číselné soustavy na okruhu $(A, +, \cdot)$ s jedničkou. Jestliže $\exists n \in \mathbb{A}$, pro které platí:

$$(\forall i \in \mathbb{N}_0 : \alpha_i = n^i)$$

pak prvek \mathbf{n} nazýváme také základem této číselné soustavy ($n^0 = 1$ je jedničkou v okruhu $(A, +, \cdot)$).

- Necht $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty)$ je číselná soustava na okruhu o základu \mathbf{n} .
Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$, budeme zapisovat: $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0)_n$
- Pokud zmíníme, že číslo z je v relaci s posloupností a_n pro číselnou soustavu na okruhu o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$, pak dle definice číselné soustavy na okruhu jistě platí $z = \sum_{i=0}^\infty a_i \alpha_i$

1.2 Názorné příklady

Pro lepší představu definice číselné soustavy si ji předvedme na příkladu

Příklad 1

Uvažujme těleso reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Tj. zvolili jsme $A = \mathbb{R}$. Obvyklý desetinný zápis reálných čísel je vlastně číselná soustava na tělese $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty = \{10^i\}_{i=0}^\infty$, $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty = \{10^{-i}\}_{i=1}^\infty$ a $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Podle dohody můžeme říci, že jde o číselnou soustavu na tělese o základu 10 a platí:

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty, \{b_i\}_{i=1}^\infty),$$

kde $\{a_i\}_{i=0}^\infty = (5, 2, 3, 0, 0, \dots)$ a $\{b_i\}_{i=1}^\infty = (6, 0, 0, \dots)$.

Podle Úmluvy 1 můžeme psát

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}) = 325.6$$

Označme $x = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}$

$\varphi(-x) = \varphi(-(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}))$ neexistuje, ale prvek $-x$ ovykle značíme $-x = -\varphi(x) = -325.6$, neboť obvykle nerozlišujeme mezi číslem a jeho ciferným zápisem, tj. mezi $-x$ a $\varphi(-x)$.

■

2 Negabinární

Definice 5 Negabinární číselná soustava je číselná soustava na okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ o základu -2 s množinou cifer $C = \{0, 1\}$ a množinou všech posloupností $B = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, a_n \in \{0, 1\}\}$.

Podle Úmluvy 1 v negabinární číselné soustavě zapisujeme: $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_{-2}$

Negabinární číselná soustava je relace: $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow B$

Věta 1 Pro každé $z \in \mathbb{Z}$ $\exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$. To jest $D(\varphi) = \mathbb{Z}$

Důkaz Protože $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je euklidovský obor integrity, jistě existují čísla $z_i \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1\}$ taková, že:

$$\begin{aligned} z &= z_0 = z_1 \cdot (-2) + a_0 & a_0 &\in \{0, 1\} \\ z &= z_0 = z_1 \cdot (-2) + a_0 & a_0 &\in \{0, 1\} \\ z_1 &= z_2 \cdot (-2) + a_1 & a_1 &\in \{0, 1\} \\ z_{k-1} &= z_k \cdot (-2) + a_{k-1} & & \vdots \\ z_{n-2} &= z_{n-1} \cdot (-2) + a_{n-2} \\ z_{n-1} &= z_n \cdot (-2) + a_{n-1} \\ z_n &= z_{n+1} \cdot (-2) + a_n \end{aligned}$$

$$\alpha) \ z_1 = 0 \Rightarrow z = z_0 = a_0 \cdot (-2)^0 = a_0 \in \{0, 1\}$$

$$\beta) \ z_i \neq 0 \Rightarrow \forall k \geq 1 :$$

$$\begin{aligned} |z_k| &= \left| \frac{z_{k-1} - a_{k-1}}{-2} \right| \leq \frac{|z_{k-1}| + 1}{2} \\ |z_{k-1}| &\leq \frac{|z_{k-2}| + 1}{2} \leq \frac{\frac{|z_{k-2}| + 1}{2} + 1}{2} = \frac{|z_{k-2}|}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ |z_k| &\leq \frac{|z_0|}{2^k} + \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{|z_0|}{2^k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ \left[\frac{|z_0|}{2^k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right] &\rightarrow \infty \\ &\text{pro } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(1)

Pro dost velké k_0 $|z_{k_0}| \leq 1, 5 \Rightarrow \exists k_0 : z_{k_0} \in \{1, 0, -1\}$

$$\text{a) } \underline{z_{k_0} = 0}$$

$$\text{b) } z_{k_0} = 1$$

$$\Rightarrow 1 = z_{k_0} = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0} \Rightarrow \underline{z_{k_0+1} = 0}$$

$$\text{c) } z_{k_0} = -1$$

$$\Rightarrow -1 = z_{k_0} = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0} \Rightarrow z_{k_0+1} = 1 \Rightarrow \underline{z_{k_0+2} = 0}$$

$$\Rightarrow \exists z_{n+1} \text{ takové, že } z_{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow z_n = a_n \Rightarrow z_{n-1} = a_n \cdot (-2)^1 + a_{n-1} \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow z = z_0 = a_n \cdot (-2)^n + a_{n-1} \cdot (-2)^{n-1} + \dots + a_0$$

■

Poznámka 3 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v negabinární číselné soustavě

1. Necht z je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $i = 0$ je počáteční hodnota algoritmu
2. Provedeme následující operaci:
 $z_i / (-2) = z_{i+1}$ zb. a_i , kde $a_i \in \{0, 1\}$, $z_i \in \mathbb{Z}$
3. Opakujeme operaci dokud $z_{i+1} \neq 0$, necht n je počet iterací. (n je jistě konečné, viz. 2)
4. $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro každé $i > n$, splňuje požadavek $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$

Pozor! zbytek musí vždy patřit do množiny $\{0, 1\}$, proto musíme volit z_{i+1} tak, aby platilo:

$$z_i = z_{i+1} \cdot (-2) + a_i$$

Příklad 2

$$z = 13$$

$$13 : (-2) = -6 \text{ zb. } 1$$

$$-6 : (-2) = 3 \text{ zb. } 0$$

$$3 : (-2) = -1 \text{ zb. } 1$$

$$-1 : (-2) = 1 \text{ zb. } 1$$

$$1 : (-2) = 0 \text{ zb. } 1$$

$$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1$$

$$13 = 1 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^4$$

$$13 = 1 + 4 - 8 + 16 \quad \checkmark$$

■

Věta 2 Jestliže $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$, pak $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : a_n = 0$

Důkaz Předpokládejme, že takové číslo z existuje, pak uvažujme tři případy:

- a) Každý sudý člen posloupnosti a_n má hodnotu 1 a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, pro který platí že všechny liché členy posloupnosti dále od tohoto n_0 mají hodnotu 0. Je zřejmé, že suma diverguje a $z = \infty$, a proto $z \notin \mathbb{Z}$
- b) Každý lichý člen posloupnosti a_n má hodnotu 1 a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, pro který platí že všechny sudé členy posloupnosti dále od tohoto n_0 mají hodnotu 0. Je zřejmé, že suma diverguje a $z = -\infty$, a proto $z \notin \mathbb{Z}$
- c) Posloupnost je nekonečná a pro libovolné liché n_1 vždy najdeme sudé n_2 , kde $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$n_2 \text{ sudé} \Rightarrow (-2)^{n_2} = 2^{n_2}$$

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \\ -\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) + 2^{n_2} &\leq z \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) + 2^{n_2} \\ 1 &\leq z \leq 2 \cdot 2^{n_2} - 1 \\ z &\geq 1 \end{aligned}$$

Analogicky pro libovolné sudé n_1 vždy najdeme liché n_2 větší, kde $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$n_2 \text{ liché} \Rightarrow (-2)^{n_2} = -2^{n_2}$$

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \\ -\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) - 2^{n_2} &\leq z \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) - 2^{n_2} \\ -2 \cdot 2^{n_2} + 1 &\leq z \leq -1 \\ z &\leq -1 \end{aligned}$$

Je zřejmé, že ani v posledním případě suma nekonverguje, protože vždy najdeme případ, kdy suma je menší než -1 a zároveň případ, kdy suma je větší než 1 \Rightarrow **spor!**

■

Věta 3 Pro každé $z \in \mathbb{Z}$ $\exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$

Důkaz Dokazujeme sporem, a proto předpokládejme že existuje celé číslo z , které je v relaci s posloupností \mathbf{a}_n a zároveň v relaci s jinou posloupností \mathbf{b}_n . Pokud takové číslo existuje, tak $\varphi(z)$ jistě není zobrazení.

$$\begin{aligned} \{a_n\}_{n=0}^{\infty} &\neq \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \\ z &= \sum_{n=0}^k a_n(-2)^n = \sum_{n=0}^k b_n(-2)^n \end{aligned}$$

definujme posloupnost C_n splňující:

$$\begin{aligned} C_n &= a_n - b_n \\ \sum_{n=0}^k C_n(-2)^n &= 0, C_n \in \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

Abychom došli ke sporu, předpokládejme, že $\exists n_0 \in \{0, \dots, k\} : C_{n_0} \neq 0$

$\alpha)$ $C_{n_0} = 1$

I.) n_0 je liché

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \\ 1 &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq 2^{n_0+1} - 1 \end{aligned}$$

Takové číslo je jistě kladné $\Rightarrow \mathbf{z}$ nemůže být v relaci s posloupností \mathbf{a}_n a zároveň v relaci s posloupností \mathbf{b}_n

II.) n_0 je sudé

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \\ -2^{n_0+1} + 1 &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq -1 \end{aligned}$$

Takové číslo je jistě záporné $\Rightarrow \mathbf{z}$ nemůže být v relaci s posloupností \mathbf{a}_n a zároveň v relaci s posloupností \mathbf{b}_n

$\beta)$ $C_{n_0} = -1$

Důkaz je úplně stejný, ať je C_{n_0} liché nebo sudé, nikdy se suma rovnat 0 jistě nebude. ■

Věta 4 Negabinární číselná soustava je jednoznačná číselná soustava na okruhu celých čísel

Příklad 3

Pro negabinární číselnou soustavu platí:

$$\varphi(1 \cdot -2^6 + 1 \cdot -2^4 + 1 \cdot -2^1) = (\{a_i\}) = (64 + 16 + (-2))$$

$$a = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, \dots)$$

$$78 = (1010010)_{-2}$$

■

3 Komplexní

Úmluva 2 Pozor! Narozdíl od jiných kapitol, v kterých se i objevuje jako index posloupnosti, budeme v této kapitole symbolem i značit imaginární část komplexního čísla.

Protože a již používáme pro značení posloupnosti budeme komplexní číslo místo obvyklého značení $z = a + bi$ značit $z = u + vi$, kde u je celočíselná část a v je imaginární část komplexního čísla.

Definice 6 Množina $\mathbb{Z}[i]$ je definována následovně:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

[b]

Definice 7 Komplexní číselná soustava je číselná soustava na okruhu $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ o základu $\{(1 - i)^j\}_{j=0}^{\infty}$ s množinou cifer $C = \{0, 1\}$

Komplexní číselná soustava je relace: $\varphi : \mathbb{Z}[i] \rightarrow B$

Definice 8 Dělení v $\mathbb{Z}[i]$ základem soustavy provádíme následovně:

$$\forall z \in \mathbb{Z}[i] : \quad \frac{z}{1 - i} = \frac{(u - v) + (u + v)i}{2}$$

Důkaz

$$\frac{z}{1 - i} = \frac{u + vi}{1 - i} = \frac{u + vi}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{(u + vi) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \frac{(u - v) + (u + v)i}{2}$$

■

Definice 9 Zbytek po dělení číslem $z \in \mathbb{Z}[i]$.

Nechť $x, y \in \mathbb{Z}[i] : \frac{x}{y} \notin \mathbb{Z}[i]$, pak můžeme hovořit o zbytku po dělení, který zapisujeme takto:

$$\forall (a + bi), (c + di) \in \mathbb{Z}[i], \forall g \in \mathbb{Z} : \frac{a + bi}{c + di} = e + fi \quad \text{zb. } g$$

$$e + fi = \left\lfloor \frac{a + bi}{c + di} \right\rfloor \Rightarrow (e + fi) \in \mathbb{Z}[i]$$

$$g = a - ec + fd + (b - ed - fc)i$$

Důkaz Stejně jak jsme zvyklí u dělení čísel z \mathbb{Z} , pro zbytek po dělení platí:

$$\begin{aligned} (e + fi) \cdot (c + di) + g &= a + bi \\ ec - fed + (ed + fc)i + g &= a + bi \end{aligned} \tag{2}$$

■

Poznámka 4 Protože se zajímáme pouze o dělení číslem $(1 - i)$ bude $(c + di) = (1 - i)$ a tudíž $g = a - e - f + (b + e - f)i$

Věta 5 Jestliže $c + di = 1 - i \wedge e + fi = \left\lfloor \frac{a+bi}{c+di} \right\rfloor$, pak zbytek $g \in \{0, 1\}$

Důkaz Nejprve vyjádříme $e + fi$:

$$\begin{aligned} e + fi &= \left\lfloor \frac{a + bi}{1 - i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(a - b) + (a + b)i}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a - b}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor i \\ &\Rightarrow e = \left\lfloor \frac{a - b}{2} \right\rfloor \wedge f = \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

Následně dosadíme do formule pro výpočet zbytku po dělení číslem $(1 - i)$:

$$g = a - \left\lfloor \frac{a - b}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor + \left(b + \left\lfloor \frac{a - b}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor \right) i$$

jelikož $b \in \mathbb{Z}$, můžeme si dovolit zapsat:

$$b + \left\lfloor \frac{a - b}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a - b}{2} + b \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor$$

a proto:

$$\begin{aligned} g &= a - \left\lfloor \frac{a - b}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor \right) i \\ g &= a - \left\lfloor \frac{a - b}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

rozmysleme si, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$- \lfloor x \rfloor = \lceil -x \rceil$$

a analogicky jako u funkce pro dolní celou část platí za předpokladu $a \in \mathbb{Z}$:

$$a + \left\lceil \frac{b - a}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{b - a}{2} + a \right\rceil = \left\lceil \frac{b + a}{2} \right\rceil$$

proto zbytek můžeme zapsat již takto:

$$g = a + \left\lceil \frac{b - a}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{b + a}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor$$

znovu nemusíme dlouho přemýšlet a všimneme si, že se jedná o rozdíl horní celé části a dolní celé části racionálního čísla $\frac{a+b}{2}$ a tudíž pro zbytek jistě platí:

$$g = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{if } \frac{a+b}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

■

Věta 6 Pro každé $z \in \mathbb{Z}[i]$ existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} : z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (1-i)^j$.

To jest $D(\varphi) = \mathbb{Z}[i]$

Důkaz ...

■

Poznámka 5 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v komplexní číselné soustavě

1. Nechť z je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $j = 0$ je počáteční hodnota algoritmu
2. Provedeme následující operaci:

$$x = \frac{(u_j - v_j) + (u_j + v_j)i}{2}$$

Jestliže $x \in \mathbb{Z}[i]$, pak $z_{j+1} = x$ $a_{j+1} = 0$
V opačném případě $z_{j+1} = \frac{(u_j - v_j - 1) + (u_j + v_j - 1)i}{2}$ $a_{j+1} = 1$
3. Opakujeme operaci dokud $z_{j+1} \neq 0$, nechť n je počet iterací. (n je jistě konečné, viz. 3)
4. $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, kde $a_j = 0$ pro každé $j > n$, splňuje požadavek $z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (1-i)^j$

4 Fibonacciho

Definice 10 *Fibonacciho číselná soustava je číselná soustava na okruhu $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ o základu $\{F_i\}_{i=0}^\infty$ (kde F_i je i -tý člen fibonacciho posloupnosti) s množinou cifer $C = \{0, 1\}$ a množinou všech posloupností $B = \{\{a_n\}_{n=0}^\infty, a_n \in \{0, 1\}\}$.*

Fibonacciho číselná soustava je relace: $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow B$

Definice 11 *Fibonacciho posloupnost*

Je nekonečná posloupnost přirozených čísel definována rekurentní formulí:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Příklad 4

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$\vdots$$

$$\{F_i\}_{i=0}^\infty = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$$

■

Úmluva 3 V fibonacciho číselné soustavě zapisujeme: $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty)_F$

Pokud bychom chtěli vyjádřit záporné číslo (které logicky nemůže patřit do $D(\varphi)$), pak budeme podobně jak jsme zvyklí v desítkové soustavě zapisovat $\varphi(x) = -(\{a_i\}_{i=0}^\infty)_F$

Věta 7 *Pro každé $x \in \mathbb{N}_0$ $\exists \{a_n\}_{n=0}^\infty : x = \sum_{i=0}^\infty a_i \cdot F_i$ To jest $D(\varphi) = \mathbb{N}_0$*

Důkaz Protože je fibonacciho posloupnost nekonečná a rostoucí posloupnost, je zřejmé, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ vždy najdeme právě jedno $i \in \mathbb{N}_0$ pro které platí: $F_i \leq n < F_{i+1}$

Protože $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je euklidovský obor integrity, jistě existují čísla $z_i \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1\}$ taková, že:

$$z = z_0 = z_1 \cdot (-2) + a_0, \quad a_0 \in \{0, 1\}$$

$$z_1 = z_2 \cdot (-2) + a_1, \quad a_1 \in \{0, 1\}$$

$$z_{k-1} = z_k \cdot (-2) + a_{k-1}$$

$$z_{n-2} = z_{n-1} \cdot (-2) + a_{n-2}$$

$$z_{n-1} = z_n \cdot (-2) + a_{n-1}$$

$$z_n = z_{n+1} \cdot (-2) + a_n$$

$$\alpha) \quad z_1 = 0 \Rightarrow z = z_0 = a_0(-2)^0 = a_0 \in \{0, 1\}$$

$\beta) z_i \neq 0 \Rightarrow \forall k \geq 1 :$

$$\begin{aligned}
 |z_k| &= \left| \frac{z_{k-1} - a_{k-1}}{-2} \right| \leq \frac{|z_{k-1}| + 1}{2} \\
 |z_{k-1}| &\leq \frac{|z_{k-2}| + 1}{2} \leq \frac{\frac{|z_{k-2}| + 1}{2} + 1}{2} = \frac{|z_{k-2}|}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
 &\vdots \\
 |z_k| &\leq \frac{|z_0|}{2^k} + \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left[\frac{|z_0|}{2^k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right] \rightarrow 1 \\
 &\text{pro } k \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Pro dost velké k_0 $|z_{k_0}| \leq 1,5 \Rightarrow \exists k_0 : z_{k_0} \in \{1, 0, -1\}$

a) $\underline{z_{k_0} = 0}$

b) $z_{k_0} = 1$

$$\Rightarrow 1 = z_{k_0} = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0} \Rightarrow \underline{z_{k_0+1} = 0}$$

c) $z_{k_0} = -1$

$$\Rightarrow -1 = z_{k_0} = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0} \Rightarrow z_{k_0+1} = 1 \Rightarrow \underline{z_{k_0+2} = 0}$$

$\Rightarrow \exists z_{n+1}$ takové, že $z_{n+1} = 0$

$$\Rightarrow z_n = a_n \Rightarrow z_{n-1} = a_n \cdot (-2)^1 + a_{n-1} \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow z = z_0 = a_n \cdot (-2)^n + a_{n-1} \cdot (-2)^{n-1} + \dots + a_0$$

■

Poznámka 6 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v negabinární číselné soustavě

1. Nechť z je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $i = 0$ je počáteční hodnota algoritmu
2. Provedeme následující operaci:
 $z_i / (-2) = z_{i+1}$ zb. a_i , kde $a_i \in \{0, 1\}$, $z_i \in \mathbb{Z}$
3. Opakujeme operaci dokud $z_{i+1} \neq 0$, nechť n je počet iterací. (n je jistě konečné, viz. 2)
4. $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro každé $i > n$, splňuje požadavek $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$

Pozor! zbytek musí vždy patřit do množiny $\{0, 1\}$, proto musíme volit z_{i+1} tak, aby platilo:

$$z_i = z_{i+1} \cdot (-2) + a_i$$

Příklad 5

$$z = 13$$

$$13 : (-2) = -6 \text{ zb. } 1$$

$$-6 : (-2) = 3 \text{ zb. } 0$$

$$3 : (-2) = -1 \text{ zb. } 1$$

$$-1 : (-2) = 1 \text{ zb. } 1$$

$$1 : (-2) = 0 \text{ zb. } 1$$

$$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1$$

$$13 = 1 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^4$$

$$13 = 1 + 4 - 8 + 16 \quad \checkmark$$

■

Věta 8 Jestliže $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-2)^i$, pak $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : a_n = 0$

Důkaz Předpokládejme, že takové číslo z existuje, pak uvažujme tři případy:

- a) Každý sudý člen posloupnosti a_n má hodnotu 1 a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, pro který platí že všechny liché členy posloupnosti dále od tohoto n_0 mají hodnotu 0. Je zřejmé, že suma diverguje a $z = \infty$, a proto $z \notin \mathbb{Z}$
- b) Každý lichý člen posloupnosti a_n má hodnotu 1 a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, pro který platí že všechny sudé členy posloupnosti dále od tohoto n_0 mají hodnotu 0. Je zřejmé, že suma diverguje a $z = -\infty$, a proto $z \notin \mathbb{Z}$
- c) Posloupnost je nekonečná a pro libovolné liché n_1 vždy najdeme sudé n_2 , kde $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$n_2 \text{ sudé} \Rightarrow (-2)^{n_2} = 2^{n_2}$$

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n (-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2}$$

$$-\left(\frac{2^{n_2} - 1}{2 - 1}\right) + 2^{n_2} \leq z \leq \left(\frac{2^{n_2} - 1}{2 - 1}\right) + 2^{n_2}$$

$$1 \leq z \leq 2 \cdot 2^{n_2} - 1$$

$$z \geq 1$$

Analogicky pro libovolné sudé n_1 vždy najdeme liché n_2 větší, kde $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$n_2 \text{ liché} \Rightarrow (-2)^{n_2} = -2^{n_2}$$

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \\ -\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) - 2^{n_2} &\leq z \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) - 2^{n_2} \\ -2 \cdot 2^{n_2} + 1 &\leq z \leq -1 \\ z &\leq -1 \end{aligned}$$

Je zřejmé, že ani v posledním případě suma nekonverguje, protože vždy najdeme případ, kdy suma je menší než -1 a zároveň případ, kdy suma je větší než 1 \Rightarrow **spor!**

■

Věta 9 Pro každé $z \in \mathbb{Z}$ $\exists! \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$

Důkaz Dokazujeme sporem, a proto předpokládejme že existuje celé číslo z , které je v relaci s posloupností \mathbf{a}_n a zároveň v relaci s jinou posloupností \mathbf{b}_n . Pokud takové číslo existuje, tak $\varphi(z)$ jistě není zobrazení.

$$\begin{aligned} \{a_n\}_{n=0}^{\infty} &\neq \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \\ z &= \sum_{n=0}^k a_n(-2)^n = \sum_{n=0}^k b_n(-2)^n \end{aligned}$$

definujme posloupnost C_n splňující:

$$\begin{aligned} C_n &= a_n - b_n \\ \sum_{n=0}^k C_n(-2)^n &= 0, C_n \in \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

Abychom došli ke sporu, předpokládejme, že $\exists n_0 \in \{0, \dots, k\} : C_n \neq 0$

$$\alpha) C_{n_0} = 1$$

I.) n_0 je liché

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \\ 1 &\leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq 2^{n_0+1} - 1 \end{aligned}$$

Takové číslo je jistě kladné $\Rightarrow z$ nemůže být v relaci s posloupností \mathbf{a}_n a zároveň v relaci s posloupností \mathbf{b}_n

II.) \mathbf{n}_0 je sudé

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0}$$

$$-2^{n_0+1} + 1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq -1$$

Takové číslo je jistě záporné $\Rightarrow \mathbf{z}$ nemůže být v relaci s posloupností \mathbf{a}_n a zároveň v relaci s posloupností \mathbf{b}_n

$\beta)$ $C_{n_0} = -1$

Důkaz je úplně stejný, ať je C_{n_0} liché nebo sudé, nikdy se suma rovnat 0 jistě nebude. ■

Věta 10 *Negabinární číselná soustava je jednoznačná číselná soustava na okruhu celých čísel*

Příklad 6

Pro negabinární číselnou soustavu platí:

$$\varphi(1 \cdot -2^6 + 1 \cdot -2^4 + 1 \cdot -2^1) = (\{a_i\}) = (64 + 16 + (-2))$$

$$a_i = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, \dots)$$

$$78 = (1010010)_{-2}$$

■

5 Faktoriálová

Definice 12 Faktoriálová číselná soustava je číselná soustava na okruhu $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ o základu $\{(i+1)!\}_{i=0}^\infty$ s množinou cifer $C = \mathbb{N}_0$

Faktoriálová číselná soustava je relace: $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow B$

Věta 11 Pro každé $x \in \mathbb{N}_0$ $\exists \{a_n\}_{n=0}^\infty : x = \sum_{i=0}^\infty a_i \cdot (i+1)!$ To jest $D(\varphi) = \mathbb{N}_0$

Důkaz

$\alpha)$ $x = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} : a_i = 0$

$\beta)$ Je zřejmé, že pro libovolné $x \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno $n \in \mathbb{N} : n! \leq x < (n+1)!$

Protože $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ je euklidovský obor integrity, jistě existují čísla $x_i \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{N}_0$ taková, že:

$$x = x_0 = a_0 \cdot n! + x_1, \quad a_0 \in \mathbb{N}$$

$$x_1 = a_1 \cdot (n-1)! + x_2, \quad a_1 \in \mathbb{N}_0$$

$$x_2 = a_2 \cdot (n-2)! + x_3, \quad a_2 \in \mathbb{N}_0$$

$$x_{k-1} = a_k \cdot (n-k+1)! + x_k$$

$$x_{n-1} = a_{n-1} \cdot 1! + x_n$$

$$x_n = a_n \cdot 0!$$

$\forall k \geq 1 :$

$$x_k = x_{k-1} - a_n \cdot (n-k+1)!$$

$a_n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$ buď $a_n = x_{k-1}$, pak jistě

$$x_k \leq x_{k-1} - a_n(n-k+1)! \leq 0,$$

protože $(n-k+1)! \leq 1$

Pro dost velké $k_0 : x_{k_0} = 0$

$$\Rightarrow x = x_0 = a_n \cdot (0)! + a_{n-1} \cdot (1)! + \dots + a_0$$

■

Poznámka 7 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v faktoriálové číselné soustavě

1. Nechť x je číslo, které chceme reprezentovat, $x_0 = x$ a $i = 0$ je počáteční hodnota algoritmu

2. Najdeme nejvyšší n , pro které platí: $n! < x$

3. Provedeme následující operaci:

$$x_i / (n - i)! = a_{n-i-1} \text{ z b. } x_{i+1}, \text{ kde } a_i, x_i \in \mathbb{N}_0$$

4. Opakujeme operaci dokud $x_{i+1} \neq 0$, nechť n je počet iterací. (n je jistě konečné, viz. 5)

5. $\{a_i\}_{i=0}^\infty$, kde $a_i = 0$ pro každé $i > n$, splňuje požadavek $x = \sum_{i=0}^\infty a_i \cdot (i+1)!$

Věta 12 Jestliže $x = \sum_{i=0}^\infty a_i \cdot (i+1)!$, pak $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : a_n = 0$

Důkaz Sporem:

Nechť existuje taková posloupnost, že pro libovolné n najdeme vždy n_0 větší: $a_{n_0} \neq 0$

Pak $x = \sum_{i=0}^\infty a_i \cdot (i+1)! \notin \mathbb{N}_0$, protože suma řady diverguje k $+\infty$ ■

Definice 13 Omezená množina velikosti i

$$C_i = \{k, k \in \mathbb{N}_0, k \leq i\} = \{0, \dots, i\}$$

Např. $C_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Věta 13 Pro vyjádření libovolného $x \in \mathbb{N}_0$ nám stačí omezená množina $C_i \subseteq \mathbb{N}_0$. Pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ pro faktoriálovou číselnou soustavu platí $C = C_i$. To jest, každé číslo $x \in \mathbb{N}_0$ lze vyjádřit následovně:

$$x = \sum_{i=0}^\infty a_i (i+1)!, \quad a_i \in C_i$$

Důkaz ... ■

Věta 14 Jestliže $a_i \in C_{i+1}$, pak je faktoriálová číselná soustava jednoznačná

Důkaz ... ■

Úmluva 4 V faktoriálové číselné soustavě zapisujeme: $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^\infty)!$

Pokud bychom chtěli vyjádřit záporné číslo (které logicky nemůže patřit do $D(\varphi)$), pak budeme podobně jak jsme zvyklí v desítkové soustavě zapisovat $\varphi(x) = -(\{a_i\}_{i=0}^\infty)!$

Příklad 7

$$z = 77$$

$$77 : 4! = 3 \text{ z b. } 5$$

$$5 : 3! = 0 \text{ z b. } 5$$

$$5 : 2! = 2 \text{ z b. } 1$$

$$1 : 1! = 1 \text{ z } b.0$$

$$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 3$$

$$77 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 4!$$

$$77 = 1 + 4 + 72 \quad \checkmark$$

■

6 Závěr

Závěrečná kapitola obsahuje zhodnocení dosažených výsledků se zvlášť vyznačeným vlastním přínosem studenta. Povinně se zde objeví i zhodnocení z pohledu dalšího vývoje tématu práce, student uvede náměty vycházející ze zkušeností s řešeným tématem a uvede rovněž návaznosti na právě dokončené související práce (řešené v rámci ostatních bakalářských/diplomových prací v daném roce nebo na práce řešené na externích pracovištích).

Odkazy

- [1] Bouchala J., *Matematická analýza ve Vesmíru*, strana 3
- [2] Keith C., *The Gaussian integers*