VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Nestandardní číselné soustavy

Non-Standard Numeral Systems

2020 Christian Krutsche

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 15. května 2020 ....

Děkuji panu RNDr. Pavlu Jahodovi, Ph.D. za odborné vedení práce, věcné připomínky, dobré rady a vstřícnost při konzultacích a vypracovávání bakalářské práce.

Abstrakt

Cílem této práce je prozkoumat různé nestandardní možnosti reprezentace čísel. Každý zná desítkovou soustavu (ne nutně pod tímto označením). Poměrně známé jsou i soustavy, které se používají v praxi

- v každém technickém oboru - dvojková a šestnáctková
- při práci s časem, úhly - šedesátková

Kromě těchto standardních soustav, kterýchž základ tvoří posloupnost mocnin určitého přirozeného čísla, můžeme jako základ soustavy definovat jinou posloupnost. Cílem této práce je prozkoumání pár takových soustav a zjištění jejich vlastností. U každé soustavy si řekneme, jaký je její definiční obor, jakým způsobem do této soustavy čísla převádíme a případně jestli a jak se dá sčítat a násobit.

Klíčová slova: číselná soustava

Abstract

This is English abstract.

Keywords: numeral system

Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů

ČS	–	Číselná soustava

1 Úvod

1.1 Definice

Připomeňme, že libovolnou podmnožinu φ kartézského součinu $A \times B$ nazýváme binární relací (dále jen relací) mezi prvky z množiny A a prvky z množiny B. Binární dvojici $(a, b) \in \varphi$ budeme značit $\varphi(a) = b$ a $\varphi \subseteq A \times B$ budeme značit $\varphi : A \to B$, tak jak je to obvyklé u zobrazení, jež jsou speciálními případy relací.

Následující definici jsme převzali z [**a**]

Definice 1 *Posloupností na množině M rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$. Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in M$ budeme zapisovat některým z následujících způsobů:*

- $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$
- (a_n)
- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Definice 2 ***(Číselná soustava na tělese)*** *Nechť $(A, +, \cdot)$ je těleso; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti na množině A; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C.* ***Číselnou soustavou na tělese*** *$(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \to B \times B$, kde $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i$$

Množinu C označujeme jako ***množinu cifer*** *číselné soustavy φ. Budeme používat značení $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}) = (\ldots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \ldots)_{\varphi}$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\ldots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \ldots)_{\varphi} = (\ldots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \ldots) = (\ldots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \ldots)$*

Všimněme si, že nevyžadujeme, aby φ bylo zobrazení. Číselná soustava nemusí vyjadřovat každý prvek z A a ty prvky z A, které jsou v relaci φ, nemusí být vyjádřeny jediným způsobem. Uvažujme například obvyklou desítkovou číselnou soustavu na tělese reálných čísel. Jde o číselnou soustavu, kde $C = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ a základem jsou konstantní posloupnosti na : $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\frac{1}{10^n}\}_{n=1}^{\infty}$ na množině C.

I. Vyjadřujeme jen nezáporná čísla, např. číslo $x = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \Rightarrow \varphi(x) = (\ldots 123, 000 \ldots)$, ale $\varphi(-x)$ neexistuje. Pomocí cifer z $C = \{0, \ldots, 9\}$ při základu $\{10^i\}_{i=0}^{\infty}$ nelze vyjádřit záporné číslo

II. ($\lfloor x \rfloor$ je celočíselná část reálného čísla x)

$$\varphi(1) = \left(\left\{ \left\lfloor \frac{1}{n+1} \right\rfloor \right\}_{n=0}^{\infty}, \{0\}_{n=0}^{\infty} \right) = (\dots 001, 000 \dots),$$

ale také

$$\varphi(1) = (\{0\}_{n=0}^{\infty}, \{9\}_{n=0}^{\infty}) = (\dots 000, 999 \dots).$$

Analogicky jako na tělese definujeme číselnou soustavu na okruhu.

Definice 3 ***(Číselná soustava na okruhu)*** *Nechť $(A, +, \cdot)$ je okruh; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost prvků z A; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C.* ***Číselnou soustavou na okruhu*** *$(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \to B$, kde $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$$

Množinu C označujeme jako ***množinu cifer*** *číselné soustavy φ. Budeme používat značení $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (\dots a_2, a_1, a_0)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0) = \dots a_2 a_1 a_0$*

Poznámka 1 V Definici 2 a Definici 3 předpokládáme, že na tělese, respektive okruhu $(A, +, \cdot)$ jsou definovány nekonečné součty

Poznámka 2 Všimněme si, že číselná soustava φ, ať již na tělese, nebo na okruhu, splňuje:

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Proto, je-li φ zobrazení, je injektivní. Dále můžeme tvrdit, že hodnota $\varphi(x)$ (i v případě, že $\varphi(x)$ není zobrazení) jednoznačně určuje svůj vzor x, ale, jak jsme viděli výše, x nemusí jednoznačně určovat svůj obraz $\varphi(x)$.

Definice 4 *Jestliže pro číselnou soustavu φ na tělese $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení, pak tuto soustavu nazveme* ***jednoznačnou číselnou soustavou na tělese*** *$(A, +, \cdot)$. Analogicky, jestliže pro číselnou soustavu φ na okruhu $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení, pak tuto soustavu nazveme* ***jednoznačnou číselnou soustavou na okruhu*** *$(A, +, \cdot)$.*

Jednoznačnou číselnou soustavou na tělese (respektive okruhu), tedy nazveme každou číselnou soustavu v níž dokážeme vyjádřit libovolný prvek tělesa (okruhu) nejvýše jedním způsobem.

Úmluva 1

- Nechť $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti, které jsou základem číselné soustavy na tělese $(A, +, \cdot)$. Jestliže $\exists n \in \mathbb{A}$, pro které platí:

$$(\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i = n^i, \beta_i = n^{-i}) \wedge (\alpha_0 = 1),$$

  pak prvek **n** také nazýváme základem této číselné soutavy (1 označuje neutrální prvek tělesa $(A, +, \cdot)$ vzhledem k násobení).

- Nechť $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ je číselná soustava na tělese o základu **n**.
  Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$, a pokud $(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_2) : b_m = 0$, budeme zapisovat: $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2})_n$

- V případě n=10 píšeme pouze $\varphi(x) = a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2}$

- Nechť $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost, která je základem číselné soustavy na okruhu $(A, +, \cdot)$ s jedničkou. Jestliže $\exists n \in \mathbb{A}$, pro které platí:

$$(\forall i \in \mathbb{N}_0 : \alpha_i = n^i)$$

  pak prvek **n** nazýváme také základem této číselné soutavy ($n^0 = 1$ je jedničkou v okruhu $(A, +, \cdot)$).

- Nechť $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})$ je číselná soustava na okruhu o základu **n**.
  Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$, budeme zapisovat: $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0)_n$

- Pokud zmíníme, že číslo z je v relaci s posloupností a_n pro číselnou soustavu na okruhu o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$, pak dle definice číselné soustavy na okruhu jistě platí $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$

1.2 Názorné příklady

Pro lepší představu definice číselné soustavy si ji předveďme na příkladu

Příklad 1
Uvažujme těleso reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Tj. zvolili jsme $\mathrm{A} = \mathbb{R}$. Obvyklý desetinný zápis reálných čísel je vlastně číselná soustava na tělese $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{10^{-i}\}_{i=1}^{\infty}$ a $\mathrm{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Podle dohody můžeme říci, že jde o číselnou soustavu na tělese o základu 10 a platí:

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

kde $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (5, 2, 3, 0, 0, \dots)$ a $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = (6, 0, 0, \dots)$.
Podle Úmluvy 1 můžeme psát

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^-1) = 325.6$$

Označme $x = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}$
$\varphi(-x) = \varphi(-(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}))$ neexistuje, ale prvek $-x$ ovykle značíme $-x = -\varphi(x) = -325.6$, neboť obvykle nerozlišujeme mezi číslem a jeho ciferným zápisem, tj. mezi $-x$ a $\varphi(-x)$. $\blacksquare$

2 Negabinární číselná soustava

Definice 5 *Negabinární číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *o základu -2 s množinou cifer* $C = \{0, 1\}$.

Negabinární číselná soustava je tedy relace φ mezi celými čísly a posloupnostmi jedniček a nul, kde $z \in \mathbb{Z}$ je v relaci s posloupností $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě thedy, když

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i.$$

Ciferným zápisem celého čísla v negabinární číselné soustavě je posloupnost čísel z množiny $C = \{0, 1\}$. Fakt, že $\varphi(z) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro $i > k$, budeme symbolicky zapisovat $\varphi(z) = (a_k \ldots a_0)_{-2}$. Pokud nebude moci dojít k omylu, tento zápis ještě zjednodušíme na $z = (a_k \ldots a_0)_{-2}$. Například $5 = (101)_{-2}$, neboť $5 = 1 \cdot (-2)^2 + 0 \cdot (-2)^1 + 1 \cdot (-2)^0$. Prozkoumáme základní vlastnosti této číselné soustavy. Nejprve ukážeme, že v negabinární číselné soustavě dokážeme najít ciferný zápis pro libovolné celé číslo.

Věta 1 *Pro každé* $z \in \mathbb{Z}$ *existuje* $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0, 1\}$ *taková, že* $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$. *To jest,* $D(\varphi) = \mathbb{Z}$.

Důkaz Protože $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je euklidovský obor integrity, jistě existují čísla $z_i \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1\}$ taková, že:

$$\begin{aligned} z = z_0 &= z_1 \cdot (-2) + a_0 \\ z_1 &= z_2 \cdot (-2) + a_1 \\ z_2 &= z_3 \cdot (-2) + a_2 \\ &\vdots \\ z_{k-1} &= z_k \cdot (-2) + a_{k-1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1}$$

V případě, že $z_1 = 0$, je jasné, že $z = a_0 = a_0(-2)^0$, kde $a_0 \in \{0, 1\}$. Dokazované tvrzení tak v tomto případě platí. Co když ale $z_0 \neq 0$?

Dokážeme, že pro dost velké n je $z_{n+1} = 0$. Z (1) je zřejmé, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|z_k| = \left| \frac{z_{k-1} - a_{k-1}}{-2} \right| \leq \frac{|z_{k-1}| + 1}{2} = \frac{|z_{k-1}|}{2} + \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Z (2) plyne, že pro $(k - 1) \in \mathbb{N}$ také platí

$$|z_{k-1}| = \left| \frac{z_{k-2} - a_{k-2}}{-2} \right| \leq \frac{|z_{k-2}|}{2} + \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Aplikací odhadu (3) v (2) obdržíme

$$|z_k| \leq \frac{|z_{k-1}|}{2} + \frac{1}{2} \leq \frac{|z_{k-2}|}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.$$

Analogicky můžeme pokračovat a zjistíme, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|z_k| \leq \frac{|z_0|}{2^k} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{|z_0|}{2^k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{4}$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{|z_0|}{2^k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \to 1$ při $k \to \infty$, je zřejmé, že existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|z_{k_0}| \leq 1,5$. To ale znamená, že $z_{k_0} \in \{-1, 0, 1\}$. Rozeberme jednotlivé případy.

a) Jestliže $z_{k_0} = 0$, pak také $z_{k_0+1} = 0$. Hledaným n proto může být $n = k_0$.

b) Jestliže $z_{k_0} = 1$, pak $z_{k_0} = 1 = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0}$. Protože $a_{k_0} \in \{0, 1\}$, musí platit $z_{k_0+1} = 0$. Hledaným n proto může být $n = k_0$.

c) Jestliže $z_{k_0} = -1$, pak $z_{k_0} = -1 = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0}$. Protože $a_{k_0} \in \{0, 1\}$, musí platit $z_{k_0+1} = 1$. To ale podle předchozího bodu znamená, že $z_{k_0+2} = 0$. Hledaným n proto může být $n = k_0 + 1$.

Dokázali jsme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $z_{n+1} = 0$. Z toho plyne, že $z_n = a_n$, odtud $z_{n-1} = a_n \cdot (-2)^1 + a_{n-1}, \ldots, z = z_0 = a_n \cdot (-2)^n + a_{n-1} \cdot (-2)^{n-1} + \cdots + a_0$. Pokud zvolíme $a_i = 0$ pro $i > n$, pak $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$.

■

Na základě úvah provedených ve výše uvedeném důkazu můžeme vyslovit následující tvrzení.

Věta 2 *Pro každé $z \in \mathbb{Z}$ existuje konečná posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{k}$, $a_i \in \{0, 1\}$ taková, že*

$$z = \sum_{i=0}^{k} a_i (-2)^i$$

Důkaz Z důkazu Věty 1 okamžitě plyne, že prokaždé celé číslo existuje posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ s konečným počtem nenulových prvků splňující $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-2)^i$.

■

Vzniká otázka, zda může existovat posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ splňující $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-2)^i$ i s nekonečným počtem nenulových prvků? Jinak řečeno, existuje nějaké celé číslo z, které je v relaci φ s nějakou nekonečnou posloupností? Odpověď je záporná. V negabinární soustavě můžeme každé celé číslo vyjádřit jen pomocí konečného počtu nenulových cifer.

Věta 3 *Nechť $z \in \mathbb{Z}$. Jestliže $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-2)^i$, pak posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ má konečný počet nenulových členů.*

Důkaz Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že číslo $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$, kde posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ má nekonečně mnoho nenulových členů. Pak může nastat právě jeden ze tří případů:

a) Mezi sudými členy posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (máme na mysli ta a_n, kde n je sudé) je nekonečně mnoho těch, které mají hodnotu 1 a existuje jen konečný počet nenulových lichých členů posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Je zřejmé, že $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i = \infty$. To je spor s tím, že $z \in \mathbb{Z}$.

b) Mezi lichými členy posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (máme na mysli ta a_n, kde n je liché) je nekonečně mnoho těch, které mají hodnotu 1 a existuje jen konečný počet nenulových sudých členů posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Je zřejmé, že $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i = -\infty$. To je spor s tím, že $z \in \mathbb{Z}$.

c) Jak mezi lichými, tak mezi sudými členy posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ je nekonečně mnoho těch s nenulovou hodnotou.

Uvažujme n_k sudé, takové, že $a_{n_k} = 1$. Označme částečný součet

$$S_{n_k} = \sum_{i=0}^{n_k} a_i(-2)^i.$$

Můžeme odhadnout hodnotu S_{n_k}:

$$\begin{aligned} S_{n_k} &= (-2)^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i = \\ &= 2^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i \geq \\ &\geq 2^{n_k} - \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} 2^i = \\ &= 2^{n_k} - \frac{2^{n_k}-1}{2-1} = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Nyní uvažujme n_k liché, takové, že $a_{n_k} = 1$ a odhadněme hodnotu S_{n_k}:

$$\begin{aligned} S_{n_k} &= (-2)^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i = \\ &= -2^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i \leq \\ &\leq -2^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} 2^i = \\ &= -2^{n_k} + \frac{2^{n_k}-1}{2-1} = -1 \end{aligned} \tag{6}$$

Z (5) plyne, že pro n_k sudé, kde $a_{n_k} = 1$ (a takových je podle předpokladu nekonečně mnoho), platí $S_{n_k} \geq 1$. Zároveň z (6) plyne, že pro n_k liché, kde $a_{n_k} = 1$ (a takových je podle předpokladu také nekonečně mnoho), platí $S_{n_k} \leq -1$. To by však znamenalo, že suma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$ nekonverguje. Opět docházíme ke sporu.

■

Nakonec dokážeme, že každé celé číslo je možné v negabinární číselné soustavě vyjádřit jen jedním způsobem, to jest, existuje právě jeden jeho ciferný zápis.

Věta 4 *Pro každé* $z \in \mathbb{Z}$ *existuje jediná posloupnost* $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0, 1\}$ *taková, že* $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$.

Důkaz Nejprve dokážeme tvrzení věty pro $z = 0$. Věta 1 říká, že existuje posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0, 1\}$ taková, že $0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$.

Věta 3 navíc tvrdí, že posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ nemůže mít nekonečný počet nenulových členů. Musí proto existovat $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a_i = 0$ pro $i > k$. Odtud

$$0 = \sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i \tag{7}$$

Předpokládejme, že $a_k = 1$. Stejně jako v důkazu Věty 3 využijeme odhad součtu (7). Nejprve pro k liché :

$$\begin{aligned} 0 = \textstyle\sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i &= 1 \cdot (-2)^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i = \\ &= -2^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i \leq \\ &\leq -2^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \\ &= -2^k + \frac{2^k - 1}{2 - 1} = -1 \end{aligned} \tag{8}$$

Dostváme sporné tvrzení $0 \leq -1$. Analogicky pro k sudé :

$$\begin{aligned} 0 = \textstyle\sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i &= 1 \cdot (-2)^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i = \\ &= 2^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i \geq \\ &\geq 2^k - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \\ &= 2^k - \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 1 \end{aligned} \tag{9}$$

Opět dostáváme sporné tvrzení. Proto $a_k = 0$. Vedoucím koeficientem se tak stává a_{k-1}. Opakováním úvahy zjistíme, že všechny koeficienty a_i musí být rovny nule. Znamená to, že pro $z = 0$ existuje jediná posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0, 1\}$ taková, že $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$. Jedná se o posloupnost, kde $\forall\, i \in \mathbb{N} : a_i = 0$.

Nyní předpokládejme, že existuje nenulové celé číslo $z \neq 0$, které je v relaci φ s posloupností $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ a také s posloupností $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$. Z Věty 3 plyne, že jak poslosloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, tak posloupnost $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, má jen konečně mnoho nenulových členů. Označme $k_1 = \max\{i \in \mathbb{N} : a_i = 1\}$, $k_2 = \max\{i \in \mathbb{N} : b_i = 1\}$ a $k = \max\{k_1, k_2\}$ (čísla k_1 a k_2 jistě existují, neboť z je nenulové). Potom jistě platí:

$$z = \sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i = \sum_{i=0}^{k} b_i(-2)^i \tag{10}$$

Z (10) plyne, že

$$0 = \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i)(-2)^i \tag{11}$$

Jak jsme ale výše dokázali, musí pro každé $i \in \{0, \ldots, k\}$ platit $a_i - b_i = 0$. To ovšem znamená, že $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$. ■

Důsledek 1 Negabinární číselná soustava je jednoznačná číselná soustava na okruhu celých čísel.

Důkaz Z Věty 4 okamžitě plyne, že relace φ je zobrazení. ■

Výše uvedené poznatky můžeme shrnout. V negabinární číselné soustavě dokážeme vyjádřit libovolné celé číslo pomocí konečného ciferného zápisu a to jediným způsobem.

Poznámka 3 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v negabinární číselné soustavě je založen na konstrukci popsané v důkazu Věty 1:

1. Nechť z je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $i = 0$ je počáteční hodnota algoritmu.
2. Pro pro $i > 0$ ze vztahu $z_i = z_{i+1} \cdot (-2) + a_i$ určíme čísla z_{i+1} a a_i tak, aby platilo $a_i \in \{0, 1\}$.
3. Algoritmus končí pro $i = n$, kde $z_{n+1} = 0$.
4. Potom $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro každé $i > n$, splňuje požadavek $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$.

Příklad 2

Vyjádříme číslo $z = 13$ v negabinární číselné soustavě.

$$\begin{array}{rcrcrcr} z_i & = & z_{i+1} & \cdot & (-2) & + & a_i \\ \hline \\ 13 & = & -6 & \cdot & (-2) & + & 1 \\ \\ -6 & = & 3 & \cdot & (-2) & + & 0 \\ \\ 3 & = & -1 & \cdot & (-2) & + & 1 \\ \\ -1 & = & 1 & \cdot & (-2) & + & 1 \\ \\ 1 & = & 0 & \cdot & (-2) & + & 1 \end{array}$$

A opravdu, $1 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^4 = 1 + 4 - 8 + 16 = 13$. Můžeme proto psát $\varphi(13) = (11101)_{-2}$. ■

2.1 Sčítání celých čísel v negabinární číselné soustavě

Sčítání čísel v negabinární číselné soustavě můžeme provádět podle schématu popsaného v následujících příkladech.

- Zvolme $a = 9$ a $b = 19$. Dle výše uvedeného algoritmu nalezneme ciferný zápis těchto celých čísel $9 = (11001)_{-2}$ a $19 = (10111)_{-2}$. Cifry zapíšeme pod sebe do tabulky a do řádku pod nimi naznačíme pomocí čárek, kolik má součet $a + b$ příslušných mocnin čísla -2:

1	1	0	0	1	a
1	0	1	1	1	b
||	|	|	|	||	a+b

(12)

  Třetí řádek Tabulky 12 znázorňuje fakt, že $a + b = (-2)^4 + (-2)^3 + 0(-2)^2 + 0(-2)^1 + 1(-2)^0 + (-2)^4 + 0(-2)^3 + 1(-2)^2 + 1(-2)^1 + 1(-2)^0 = 2(-2)^4 + (-2)^3 + (-2)^2 + (-2)^1 + 2(-2)^0$. Tento řádek můžeme dále upravovat a to dle následujících pravidel.
  Protože $(-2)^{k+1} + 2 \cdot (-2)^k = 0$, můžeme nahradit:

|	||	a+b
0	0	a+b

(13)

Protože $2 \cdot (-2)^k = -(-2)^{k+1}$, můžeme nahradit:

<table>
<tr><td>0</td><td>||</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>-|</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(14)

Protože $-(-2)^k = (-2+1) \cdot (-2)^k = (-2)^{k+1} + (-2)^k$, můžeme nahradit:

<table>
<tr><td>0</td><td>-|</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>|</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(15)

Vzhledem k (13), (14) a (15) můžeme v úpravách Tabulky (12) pokračovat následujícím způsobem:

<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>b</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td><u>||</u></td><td>|</td><td>|</td><td><u>|</u></td><td><u>||</u></td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>0</td><td><u>-|</u></td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(16)

Z posledního řádku vyčteme, že $a + b = (1101100)_{-2}$.
A opravdu, $(-2)^6 + (-2)^5 + (-2)^3 + (-2)^2 = 64 - 32 - 8 + 4 = \underline{28} = 9 + 19$.

- Sečtěme nyní čísla $a = -3 = (1101)_{-2}$ a $b = -5 = (1111)_{-2}$:

<table>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>b</td></tr>
<tr><td><u>||</u></td><td><u>||</u></td><td><u>|</u></td><td><u>||</u></td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(17)

Proto $a + b = (1000)_{-2}$. A opravdu, $(-2)^3 = \underline{-8} = -3 + (-5)$.

2.2 Nalezení čísla opačného v negabinární číselné soustavě

K danému číslu z hledáme číslo opačné. Je zřejmé, že $-z = (-2+1) \cdot z$. Můžeme proto určit $-z$ jako soucet čísel z a $-2z$. Násobení číslem -2 je lehké, stačí připsat nulu na konec ciferného zápisu. Předvedeme na příkladech:

- Nalezneme číslo opačné k číslu $z = 21 = (10101)_{-2}$.

<table>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>z</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>-2z</td></tr>
<tr><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>-z</td></tr>
</table>

(18)

Proto $-z = (111111)_{-2}$. A opravdu, $-32 + 16 - 8 + 4 - 2 + 1 = -21$.

- Nalezneme číslo opačné k číslu $z = 7 = (11011)_{-2}$.

0	1	1	0	1	1	z
1	1	0	1	1	0	-2z
|	||	|	|	||	|	-z
0	0	|	0	0	|	-z

(19)

Proto $-z = (1001)_{-2}$. A opravdu, $-8 + 1 = -7$.

2.3 Násobení v negabinární číselné soustavě

Násobení v negabinární soustavě je analogické násobení v desítkové soustavě. Násobíme-li číslo $a = (a_n, \dots, a_0)_{-2}$ číslem $(-2)^k = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ nul}})_{-2}$, pak stačí přidat na konec ciferného zápisu k nul:

$$(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ nul}})_{-2} \cdot (a_n, \dots, a_0)_{-2} = (a_n, \dots, a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ nul}})_{-2}.$$

Proto pro součin čísel $a = (a_n, \dots, a_0)_{-2}$ a $b = (b_k, \dots, b_0)_{-2}$ platí

$$a \cdot b = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (b_k, \dots, b_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{i \text{ nul}})_{-2} \tag{20}$$

Demonstrujeme na příkladech

- Vynásobíme čísla $a = 5 = (101)_{-2}$ a $b = 3 = (111)_{-2}$.

$$\begin{array}{ccccccl} & & & 1 & 0 & 1 & (=\mathrm{a}) \\ \cdot & & & 1 & 1 & 1 & (=\mathrm{b}) \\ \hline & & & 1 & 1 & 1 & (=x_1) \\ + & & & & 0 & & (=x_2) \\ + & 1 & 1 & 1 & & & (=x_3) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(101)_{-2} \cdot (111)_{-2} = 1 \cdot (111)_{-2} + 0 \cdot (1110)_{-2} + 1 \cdot (11100)_{-2} = (111)_{-2} + (11100)_{-2}$$

Můžeme sečíst schematicky:

0	0	1	1	1	x_1
1	1	1	0	0	x_3
|	|	||	|	|	$x_1 + x_3$
|	0	0	|	|	$x_1 + x_3$

Proto $a \cdot b = (110011)_{-2} = 16 - 2 + 1 = 15 = 5 \cdot 3$.

- Vynásobíme čísla $a = -9 = (1011)_{-2}$ a $b = 11 = (11111)_{-2}$.

$$(1011)_{-2} \cdot (11111)_{-2} = (11111)_{-2} + (111110)_{-2} + (11111000)_{-2}$$

Můžeme sečíst schematicky:

0	0	0	1	1	1	1	1	x_1
0	0	1	1	1	1	1	0	x_2
1	1	1	1	1	0	0	0	x_4
$\vert$	$\vert$	$\vert\vert$	$\vert\vert\vert$	$\vert\vert\vert$	$\vert\vert$	$\vert\vert$	$\vert$	$x_1 + x_2 + x_4$
$\vert$	0	0	$\vert\vert$	$\vert$	$\vert$	0	$\vert$	$x_1 + x_2 + x_4$
$\vert$	0	-$\vert$	0	$\vert$	$\vert$	0	$\vert$	$x_1 + x_2 + x_4$
$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	$\vert$	$\vert$	0	$\vert$	$x_1 + x_2 + x_4$

Proto $a \cdot b = (11101101)_{-2} = -128 + 64 - 32 - 8 + 4 + 1 = -99 = (-9) \cdot 11$.

3 Komplexní číselná soustava

Úmluva 2 Pozor! Na rozdíl od jiných kapitol, v kterých se i objevuje jako index posloupnosti, budeme v této kapitole symbolem i značit imaginární část komplexního čísla.
Protože a již používáme pro značení posloupnosti budeme komplexní číslo místo obvyklého značení $z = a + bi$ značit ve většině případů $z = u + vi$, kde u je celočíselná část a v je imaginární část komplexního čísla.

Definice 6 *Množinu $\mathbb{Z}[i]$ nazýváme množinou Gauusovských celých čísel. Je definována následovně:*

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

*[***b***]*

Definice 7 *Komplexní číselná soustava je číselná soustava na okruhu $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ o základu $\{(-1+i)^j\}_{j=0}^{\infty}$ s množinou cifer $C = \{0, 1\}$.*

Komplexní číselná soustava je tedy relace φ mezi gaussovskými celými čísly a posloupnostmi jedniček a nul, kde $z \in \mathbb{Z}[i]$ je v relaci s posloupností $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě tehdy, když

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} a_i \cdot (-1+i)^j.$$

Ciferným zápisem Gaussova celého čísla v komplexní číselné soustavě je posloupnost čísel z množiny $C = \{0, 1\}$. Fakt, že $\varphi(z) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro $i > k$, budeme symbolicky zapisovat $\varphi(z) = (a_k \ldots a_0)_{(-1+i)}$. Pokud nebude moci dojít k omylu, tento zápis ještě zjednodušíme na $z = (a_k \ldots a_0)_{(-1+i)}$. Například $7 - 2i = (101001)_{(-1+i)}$, neboť $7 - 2i = 1 \cdot (-1+i)^5 + 0 \cdot (-1+i)^5 + 0 \cdot (-1+i)^4 + 1 \cdot (-1+i)^3 + 0 \cdot -1+i)^2 + 0 \cdot (-1+i)^1 + 1 \cdot (-1+i)^0 = (4-4i) + (2+2i) + 1 = 7-2i$.
Prozkoumáme základní vlastnosti této číselné soustavy. Nejprve ukážeme, že v komplexní číselné soustavě dokážeme najít ciferný zápis pro libovolné gaussovské celé číslo.

Poznámka 4 Dělení v $\mathbb{Z}[i]$ základem soustavy provádíme následovně:

$$\forall z \in \mathbb{Z}[i]: \quad \frac{z}{-1+i} = \frac{(v-u) - (u+v)i}{2}$$

Protože:

$$\frac{z}{-1+i} = \frac{u+vi}{-1+i} = \frac{u+vi}{-1+i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(u+vi) \cdot (1+i)}{(-1+i) \cdot (1+i)} = \frac{(u-v) + (u+v)i}{-2} = \frac{(v-u) - (u+v)i}{2}$$

Protože jsme zatím gaussovská celá čísla neprozkoumali, definujme jako zbytek libovolné číslo z gaussovských celých čísel bez omezení, na rozdíl od dělení se zbytkem u celých čísel, kde zbytek musí být menší než dělitel. U gaussovských celých čísel jsme totiž nedefinovali relaci měnší/větší.

Všimněme si, že pro libovolné $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ a $c+di \in \mathbb{Z}[i]$ existují $e+fi \in \mathbb{Z}[i]$ a $g \in \mathbb{Z}[i]$ takové, že

$$a + bi = (c + di)(e + fi) + g.$$

Číslo $e + fi$ můžeme zvolit libovolně a $g \in \mathbb{Z}[i]$ je pak dáno jednoznačně rovností $g = (a + bi) - (c + di)(e + fi)$

Definice 8 *(Zbytek po dělení číslem v $\mathbb{Z}[i]$)*
Jestliže podíl dvou gaussovských celých čísel nepatří do množiny gaussovských celých čísel, pak si můžeme vypomoci zbytkem po dělení, který v této kapitole označujeme $g \in \mathbb{Z}[i]$. Nechť $a+bi$ a $c+di$ jsou gaussovská celá čísla. Nechť $a+bi$, $c+di$ a $e+fi$ jsou gaussovská celá čísla. Zbytkem po dělení čísla $a + bi$ číslem $c + di$ nazveme číslo $g \in \mathbb{Z}[i]$ splňující

$$\frac{a + bi}{c + di} = e + fi \quad zb.\ g$$

$$a + bi = (c + di)(e + fi) + g.$$

Můžeme si rozmyslet, existuje nekonečně mnoho zbytků po dělení čísla $a + bi$ číslem $c + di$, neboť máme nekonečně mnoho možností jak zvolit číslo $e + fi$. Proto zavedeme horní celou část komplexního čísla.

Definice 9 *(Horní celá část v $\mathbb{C}$) Nechť $\lceil x \rceil$ je horní celá část reálného čísla x. Horní ceou částí komplexního čísla $x + yi$ nazveme gaussovské celé číslo, které budeme značit $\lceil x + yi \rceil$, splňující*

$$\lceil x + yi \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil\, i$$

Věta 5 *Nechť $a+bi$, $e+fi$ a g jsou gaussovská celá čísla splňující $a+bi = (-1+i)(e+fi)+g$. Jestliže*

$$e + fi = \left\lceil \frac{a + bi}{-1 + i} \right\rceil$$

pak zbytek $g \in \{0, 1\}$.

Důkaz Pro takto definovaný zbytek g platí:

$$a + bi = (-e - f) + (e - f)i + g$$

Odtud

$$g = (a + f + e) + (f + b - e)i \tag{21}$$

Vyjádříme e a f:

$$e + fi = \left\lceil \frac{a + bi}{-1 + i} \right\rceil = \left\lceil \frac{(b - a) - (a + b)i}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{b - a}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{-a - b}{2} \right\rceil i$$

Proto

$$e = \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil \quad \wedge \quad f = \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil$$

Po dosazení f a e do rovnice (21) dostáváme:

$$g = \left(a + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil\right) + \left(b - \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil\right) i$$

jelikož $b \in \mathbb{Z}$, můžeme si dovolit zapsat:

$$b - \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil = - \left\lceil \frac{b-a}{2} - b \right\rceil = - \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil$$

a proto:

$$g = \left(a + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil\right) + \left(- \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil\right) i$$

$$g = \left(a + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil\right)$$

$$g = \left(\left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{b+a}{2} \right\rceil\right)$$

A protože pro libovolné reálné x platí $\lceil -x \rceil = - \lfloor x \rfloor$,

$$g = \left(- \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{b+a}{2} \right\rceil\right)$$

nemusíme dlouho přemýšlet a všimneme si, že se jedná o rozdíl horní celé části a dolní celé části racionálního čísla $\frac{a+b}{2}$ a tudíž pro zbytek jistě platí:

$$g = \begin{cases} 0 & \text{pro } \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{pro } \frac{a+b}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

■

Definice 10 *Norma gaussovského celého čísla*
$N(z) = N(u + vi) = \sqrt{u^2 + v^2}$
Normu si můžeme představit jako vzdálenost v komplexní rovině od $0 + 0i$. Absolutní hodnota je ekvivalent normy pro jednu dimenzi. Zapisujeme-li gaussovské celé číslo do absolutní hodnoty, hledáme její normu.

Poznámka 5 Stejně jako při umocnění nenulového celého čísla roste jeho norma (vzdálenost od 0), tak i při umocnění nenulového gaussovského čísla roste jeho norma. Plyne to okamžitě ze vztahu pro umocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru a toho, že norma nenulového gaussovského celého čísla je rovna nejméně odmocnině ze dvou

Ukažme si to na příkladu

Příklad 3
$z = (-1+i)$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mathrm{j} & z^j & z^j & N(z^j) \\ \hline 0 & (-1+i)^0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & (-1+i)^1 & -1+i & \sqrt{2} \\ \hline 2 & (-1+i)^2 & -2i & 2 \\ \hline 3 & (-1+i)^3 & 2+2i & 2\sqrt{2} \\ \hline 4 & (-1+i)^4 & -4 & 4 \\ \hline \end{array} \tag{22}$$

■

Poznámka 6 Uvědomme si, že stejně jako u dělení celých čísel, tak i při dělení gaussovských celých čísel platí následující: Jestliže je norma dělitele větší než 1, pak výsledný podíl bude mít jistě menší normu než dělenec. Norma podílu je podíl norem dělence a dělitele.

Proveďme příklad pro znázornění.

Příklad 4
$a = 3+2i \quad b = 1+2i$
$N(a) = \sqrt{13} \quad N(b) = \sqrt{5}$
$\frac{a}{b} = \frac{3+2i}{1+2i} = \frac{(3+2i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \frac{7-4i}{5}$
$N\left(\frac{3+2i}{1+2i}\right) = \sqrt{\frac{65}{25}} = \sqrt{\frac{13}{5}} = \frac{N(a)}{N(b)} < \sqrt{13}$ ■

Věta 6 *Pro každé $z \in \mathbb{Z}[i]$ existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} : z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (-1+i)^j$.*
To jest $D(\varphi) = \mathbb{Z}[i]$

Důkaz Z důkazu 3 již víme, že při správném postupu při děleni jsme schopni zajistit, aby byl zbytek po dělení číslem $(-1+i)$ vždy $\in \{0,1\}$.
Podle Věty 5 jistě existují čísla $z_i = \left[\frac{z_{i-1}}{-1+i}\right] \in \mathbb{Z}[i], \quad a_i \in \{0,1\}$ taková, že:

$$\begin{aligned} z = z_0 &= z_1 \cdot (-1+i) + a_0 \\ z_1 &= z_2 \cdot (-1+i) + a_1 \\ z_2 &= z_3 \cdot (-1+i) + a_2 \\ &\vdots \\ z_{k-1} &= z_k \cdot (-1+i) + a_{k-1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{23}$$

V případě, že $z_1 = 0$, je jasné, že $z = a_0 = a_0(-2)^0$, kde $a_0 \in \{0,1\}$. Dokazované tvrzení tak v tomto případě platí. Co když ale $z_0 \neq 0$?

Dokážeme, že pro dost velké n je $z_{n+1} = 0$. Uvažme, že pro $z = a + bi \in \mathbb{C}$ platí:

$$|\lceil z \rceil| = |\lceil a + bi \rceil| = |(a + \varepsilon_a) + (b + \varepsilon_b)i|,$$

kde $\varepsilon_a, \varepsilon_b \in \langle 0, 1)$. Proto

$$|\lceil z \rceil| = |(a + \varepsilon_a) + (b + \varepsilon_b)i| \leq |a + bi| + |\varepsilon_a + \varepsilon_b i| \leq |z| + \sqrt{2}.$$

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|z_k| = \left| \left\lceil \frac{z_{k-1}}{-1+i} \right\rceil \right| \leq \left| \frac{z_{k-1}}{-1+i} \right| + \sqrt{2} = \frac{|z_{k-1}|}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}. \tag{24}$$

Z (24) plyne, že pro $(k-1) \in \mathbb{N}$ také platí

$$|z_{k-1}| = \left| \left\lceil \frac{z_{k-2}}{-1+i} \right\rceil \right| \leq \left| \frac{z_{k-2}}{-1+i} \right| + \sqrt{2} = \frac{|z_{k-2}|}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}. \tag{25}$$

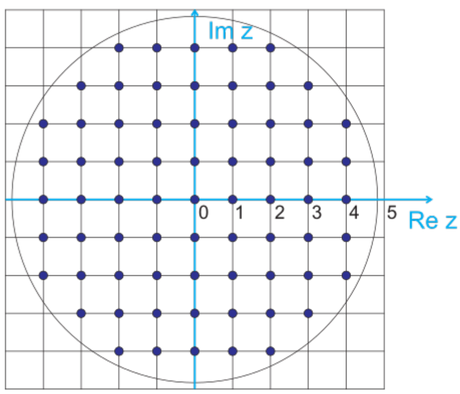
Aplikací odhadu (25) v (24) obdržíme

$$|z_k| \leq \frac{|z_{k-1}|}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \leq \frac{|z_{k-2}|}{\sqrt{2}^2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}.$$

Analogicky můžeme pokračovat a zjistíme, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|z_k| \leq \frac{|z_0|}{2^k} + \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^j = \frac{|z_0|}{2^k} + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \tag{26}$$

Vzhledem k tomu, že $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4.824$ je zřejmé, že existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $|z_k| < 4.83$. Co se stane v případě, že $|z_k| < 4.83$? Takových případů je 69.



	z_k	z_{k+1}	a_{k+1}	$n : z_n = 0$	viz.		z_k	z_{k+1}	a_{k+1}	$n : z_n = 0$	viz.
1.	0			0		36.	-3+2i	3+i	1	9	30.
2.	1	0	1	1	1.	37.	-3+i	2+i	0	4	14.
3.	i	1	1	2	2.	38.	-3-i	1+2i	0	7	15.
4.	-1+i	1	0	2	2.	39.	-3-2i	1+3i	1	5	33.
5.	-i	i	1	2	3.	40.	-2-3i	3i	1	7	27.
6.	-1-i	i	0	3	3.	41.	-1-3i	-1+2i	0	6	16.
7.	1+i	-i	0	3	5.	42.	1-3i	-2+i	0	5	17.
8.	-1	1+i	1	4	7.	43.	2-3i	-2+i	1	5	17.
9.	1-i	-1	0	5	8.	44.	3-2i	-2	1	5	12.
10.	2	-1-i	0	4	6.	45.	3-i	-2-i	0	8	18.
11.	2i	1-i	0	6	9.	46.	3+3i	-3i	0	7	29.
12.	-2	1+i	0	4	7.	47.	-3+3i	3	0	5	26.
13.	-2i	-1+i	0	3	4.	48.	-3-3i	3i	0	7	27.
14.	2+i	-i	1	3	5.	49.	3-3i	-3	0	6	28.
15.	1+2i	1-i	1	6	9.	50.	4	-2-2i	0	8	24.
16.	-1+2i	2	1	5	10.	51.	4i	2-2i	0	6	25.
17.	-2+i	2+i	1	4	14.	52.	-4	2+2i	0	5	22.
18.	-2-i	1+2i	1	7	15.	53.	-4i	-2+2i	0	6	23.
19.	-1-2i	2i	1	7	11.	54.	4+i	-1-2i	1	8	19.
20.	1-2i	-1+i	1	3	4.	55.	4+2i	-1-3i	0	7	41.
21.	2-i	-1	1	5	8.	56.	2+4i	1-3i	0	6	42.
22.	2+2i	-2i	0	4	13.	57.	1+4i	2-2i	1	6	25.
23.	-2+2i	2	0	5	10.	58.	-1+4i	3-i	1	9	45.
24.	-2-2i	2i	0	7	11.	59.	-2+4i	3-i	0	9	45.
25.	2-2i	-2	0	5	12.	60.	-4+2i	3+i	0	9	30.
26.	3	-1-i	1	4	6.	61.	-4+i	3+2i	1	5	31.
27.	3i	2-i	1	6	21.	62.	-4-i	2+3i	1	5	32.
28.	-3	2+2i	1	5	22.	63.	-4-2i	1+3i	0	5	33.
29.	-3i	-1+2i	1	6	16.	64.	-2-4i	-1+3i	0	7	34.
30.	3+i	-1-2i	0	8	19.	65.	-1-4i	-1+3i	1	7	34.
31.	3+2i	-2i	1	4	13.	66.	1-4i	-2+2i	1	6	23.
32.	2+3i	1-2i	1	4	20.	67.	2-4i	-3+i	0	5	37.
33.	1+3i	1-2i	0	4	20.	68.	4-2i	-3-i	0	8	38.
34.	-1+3i	2-i	0	6	21.	69.	4-i	-2-i	1	8	18.
35.	-2+3i	3	1	5	26.						

Dokázali jsme, že existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $z_{k+1} = 0$. Z toho plyne, že $z_k = a_k$, odtud $z_{k-1} = a_k \cdot (-2)^1 + a_{k-1}, \ldots, z = z_0 = a_k \cdot (-2)^k + a_{k-1} \cdot (-2)^{k-1} + \cdots + a_0$. Pokud zvolíme $a_j = 0$ pro $j > k$, pak $z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (-2)^j$. ∎

Poznámka 7 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v komplexní číselné soustavě

1. Nechť z je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $j = 0$ je počáteční hodnota algoritmu
2. Provedeme následující operaci:
   $x = \frac{(v_j - u_j) - (u_j + v_j)i}{2}$
   Jestliže $x \in \mathbb{Z}[i]$, pak $z_{j+1} = x \quad a_{j+1} = 0$
   V opačném případě $z_{j+1} = \left\lceil \frac{(v_j - u_j) - (u_j + v_j)i}{2} \right\rceil \quad a_{j+1} = 1$
3. Opakujeme operaci dokud $z_{j+1} \neq 0$, nechť n je počet iterací. (n je jistě konečné, viz. 3)
4. $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, kde $a_j = 0$ pro každé $j > n$, splňuje požadavek $z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (-1 + i)^j$

3.1 Sčítání gaussovských celých čísel v komplexní číselné soustavě

Sčítání čísel v komplexní číselné soustavě můžeme provádět podle schématu popsaného v následujícím příkladu.

Poznámka 8 Budeme postupovat obdobně jak u negabinární číselné soustavy. Určíme si pravidla, která platí pro komplexní číselnou soustavu a následně nám ulehčí sčítání.
Pro lehčí orientaci v rovnostech si ukažme tabulku pár mocnin čísla $(-1 + i)$ a zároveň se pro přehlednost domluvme, že toto číslo budeme v některých případech po zbytek kapitoly značit β.

β^0	β^1	β^2	β^3	β^4
1	-1+i	-2i	2+2i	-4

(27)

Protože $4 \cdot \beta^k + \beta^{k+4} = 4 \cdot \beta^k + (-4) \cdot \beta^k = 0$, platí následující:

<table>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>||||</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(28)

Protože $2 \cdot \beta^k + 2 \cdot \beta^{k+1} + \beta^{k+2} = 2 \cdot \beta^k + (-2 + 2i) \cdot \beta^k + (-2i)\beta^k = 0$, platí následující:

<table>
<tr><td>|</td><td>||</td><td>||</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(29)

Protože $2 \cdot \beta^k - \beta^{k+2} - \beta^{k+3} = 2 \cdot \beta^k - (-2i) \cdot \beta^k - (2 + 2i) \cdot \beta^k = 0$, platí následující:

<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>||</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(30)

- Zvolme $a = 4 + 3i$ a $b = 3 - 4i$. Dle výše uvedeného algoritmu nalezneme ciferný zápis těchto gaussovských celých čísel $4 + 3i = (1100111)_{(-1+i)}$ a $3 - 4i = (111101)_{(-1+i)}$. Cifry zapíšeme pod sebe do tabulky a do řádku pod nimi naznačíme pomocí čárek, kolik má součet $a + b$ příslušných mocnin čísla $(-1 + i)$:

1	1	0	0	1	1	1	a
0	1	1	1	1	0	1	b
$\vert$	$\vert\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert\vert$	$\vert$	$\vert\vert$	a+b

(31)

Vzhledem k (28), (29) a (30) můžeme v úpravách Tabulky (31) pokračovat následujícím způsobem:

0	0	1	1	0	0	1	1	1	a	
0	0	0	1	1	1	1	0	1	b	
0	0	$\vert$	$\vert\vert$	$\vert$	$\underline{\vert}$	$\underline{\vert\vert}$	$\vert$	$\underline{\vert\vert}$	a+b	(30)
0	0	$\vert$	$\vert\vert$	$\underline{\vert}$	$\underline{\vert\vert}$	$\underline{\vert\vert\vert}$	$\vert$	0	a+b	(29)
$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\vert$	$\underline{\vert\vert}$	0	0	$\vert$	$\vert$	0	a+b	(29)
$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	0	0	$\vert$	$\vert$	0	a+b	

(32)

Z posledního řádku vyčteme, že $a + b = (111000110)_{(-1+i)}$.
A opravdu, $\beta^8 + \beta^7 + \beta^6 + \beta^2 + \beta^1 = 16 - 8 - 8i + 8i - 2i - 1 + i = \underline{7 - i} = 4 + 3i + 3 - 4i$

3.2 Nalezení opačného čísla v komplexní číselné soustavě

K danému číslu z hledáme číslo opačné. Když se zamyslíme jak součtem různých mocnin čísla $(-1 + i)$ dojít k výsledku -1, po chvíli dojedme k následujícímu: $\beta^0 + \beta^1 + \beta + 1 + \beta 2 = 1 + (-1 + i) + (-1 + i) + (-2i) = -1$ Uvědomme si, že násobení mocninou čísla $(-1 + i)^k, k \in \mathbb{N}_0$ znamená posunutí všech cifer o k míst (doleva) a připsání k nul na konec ciferného zápisu. Umíme-li už gaussovské celé čísla sčítat, pak nalezení čísla opačného už nebude takový problém. Uvedeme příklad.

- Nalezneme číslo opačné k číslu $z = -1 + 2i = (11001)_{(-1+i)}$.

0	0	1	1	0	0	1	z
0	1	1	0	0	1	0	$\beta \cdot z$
0	1	1	0	0	1	0	$\beta \cdot z$
1	1	0	0	1	0	0	$\beta^2 \cdot z$
$\underline{\vert}$	$\underline{\vert\vert\vert}$	$\underline{\vert\vert\vert}$	$\underline{\vert}$	$\underline{\vert}$	$\underline{\vert\vert}$	$\vert$	$-z$
0	$\underline{\vert}$	$\underline{\vert}$	0	$\underline{-\vert}$	0	$\vert$	$-z$
0	0	0	0	$\vert$	0	$\vert$	$-z$

(33)

Proto $-z = (101)_{(-1+i)}$. A opravdu, $\beta^0 + \beta^2 = \underline{1-2i} = -(z) = -(-1+2i)$.

Poznámka 9 Jistě některé z čtenářů napadne otázka, zda-li by nějak jednoduše šlo najít k gaussovskému číslu jeho číslo komplexně sdružené v reprezentaci komplexní číselné soustavy. Bez převádění do desítkové soustavy a zpět bychom se však při takovém pokusu bohužel neobešli. Uvědomíme-li si, že na rozdíl od hledání opačného čísla, kde stačí číslo vynásobit číslem -1, u hledání komplexně sdruženého čísla je proces těžší. Číslo, kterým bychom naše gaussovské číslo museli přenásobit je závisle právě na tomto čísle. Nelze najít obecnou formuli jako v případě hledání opačného čísla (vynásob číslo číslem -1).

3.3 Násobení v komplexní číselné soustavě

Násobení v komplexní soustavě je analogické násobení v desítkové soustavě. Násobíme-li číslo $a = (a_n, \ldots, a_0)_{(-1+i)}$ číslem $(-1+i)^k = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{(-1+i)}$, pak stačí přidat na konec ciferného zápisu k nul:

$$(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{(-1+i)} \cdot (a_n, \ldots, a_0)_{(-1+i)} = (a_n, \ldots, a_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{(-1+i)}$$

Proto pro součin čísel $a = (a_n, \ldots, a_0)_{(-1+i)}$ a $b = (b_k, \ldots, b_0)_{(-1+i)}$ platí

$$a \cdot b = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (b_k, \ldots, b_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{i \text{ nul}})_{-2} \tag{34}$$

Demonstrujeme na příkladech

- Vynásobíme čísla $a = (4-i) = (111010111)_{(-1+i)}$ a $b = (1-2i) = (101)_{(-1+i)}$.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & (=\text{a}) \\
\cdot & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & (=\text{b}) \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & (=x_1) \\
+ & & & & & & & & & & 0 & & (=x_2) \\
+ & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & & & (=x_3)
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(111010111)_{(-1+i)} \cdot (101)_{(-1+i)}$$

$$=$$

$$1 \cdot (111010111)_{(-1+i)} + 0 \cdot (1110101110)_{(-1+i)} + 1 \cdot (11101011100)_{(-1+i)}$$

$$=$$

$$(111010111)_{(-1+i)} + (11101011100)_{(-1+i)}$$

Můžeme sečíst schematicky:

<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>x_1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>x_3</td></tr>
<tr><td>|</td><td>$\underline{|}$</td><td>$\underline{||}$</td><td>|</td><td>$\underline{||}$</td><td>$\underline{0}$</td><td>$\underline{||}$</td><td>|</td><td>$\underline{||}$</td><td>|</td><td>|</td><td>$x_1 + x_3$</td></tr>
<tr><td>|</td><td>||</td><td>$\underline{|||}$</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>$\underline{|||}$</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>$x_1 + x_3$</td></tr>
<tr><td>$\underline{|}$</td><td>$\underline{||}$</td><td>$\underline{||}$</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>-|</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>$x_1 + x_3$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>$\underline{|}$</td><td>$\underline{0}$</td><td>|</td><td>$\underline{-|}$</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>$x_1 + x_3$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\underline{0}$</td><td>$\underline{0}$</td><td>0</td><td>$\underline{-|}$</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>$x_1 + x_3$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\underline{-|}$</td><td>$\underline{-|}$</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>$x_1 + x_3$</td></tr>
<tr><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>$x_1 + x_3$</td></tr>
</table>

Výpočtem ověřme.

$(11101111011)_{(-1+i)} = (-32i) + (-16 + 16i) + (16) + (8i) + (4 - 4i) + (-4) + (2 + 2i) + (-1 + i) + (1) = \underline{2 - 9i} = 4 - 2 - i - 8i = (4 - i) \cdot (1 - 2i) = a \cdot b$

Výsledek je správně.

4 Negafibonacciho číselná soustava

Definice 11 *Negafibonacciho číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *o základu* $\{F_{-(i+1)}\}_{i=0}^{\infty}$ *(kde* F_{-i} *je i-tý člen negafibonacciho posloupnosti) s množinou cifer* $C = \{0, 1\}$*.*

Poznámka 10 Nenechme se zmást symbolem **'**$-$**'** u indexu členu negafibonacciho posloupnosti. Používá se pro odlišení od členů fibonacciho posloupnosti. Nejde však o záporný index! Proto píšeme indexy (např. $(i+1)$) do závorky.

Definice 12 *Negafibonacciho posloupnost*
Je nekonečná posloupnost přirozených čísel definována rekurentní formulí:

$$F_{-0} = 0, \quad F_{-1} = 1, \quad F_{-n} = F_{-(n-2)} - F_{-(n-1)}$$

Z definice 12 si lehce rozmyslíme, že každý další člen bude střídavě záporný kladný a jeho absolutní hodnota bude větší než u předchozích členů.
Negafibonacciho posloupnost je velice podobná Fibonacciho posloupnosti.

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot F_n$$

Příklad 5

$$F_{-2} = F_{-0} - F_{-1} = 0 - 1 = -1$$
$$F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 1 - (-1) = 2$$
$$F_{-4} = F_{-2} - F_{-3} = -1 - 2 = -3$$
$$\vdots$$
$$\{F_{-(i+1)}\}_{i=0}^{\infty} = \{1, -1, 2, -3, 5, -8, 13, -21, 34, -55, 89, \dots\}$$

■

Úmluva 3 V negafibonacciho číselné soustavě zapisujeme: $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_F$

Poznámka 11 Podle definice se jedná o nejednoznačnou číselnou soustavu, což si ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 6
Každé číslo, vezměme si například 27, můžeme zapsat více způsoby (nekonečně mnoha).

$$
\begin{aligned}
27 &= 34 - 8 + 1 &&= (100100001)_F \\
&= 34 - 21 + 13 + 1 &&= (111000001)_F \\
&= 89 - 55 - 8 + 1 &&= (11000100001)_F \\
&= 233 - 144 - 55 - 8 + 1 &&= (1101000100001)_F
\end{aligned}
$$

■

Věta 7 *Analogie Zeckendorfovy věty pro fibonacciho kód.* [**d**]
Pro každé celé číslo existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňující podmínky:

- $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot F_{-(i+1)}$, *(důsledkem je, že $D(\varphi) = \mathbb{Z}$).*
- $a_k \cdot a_{k+1} = 0$ *(tj. v posloupnosti nejsou nikdy dvě jedničky vedle sebe)*

Důkaz Buď libovolné $z \in \mathbb{Z}$ dáno. Rozdělme si jej na případy.

- $z = 0$ V tomhle případě klademe každý člen posloupnosti $a_i = 0$
- $z < 0$ Označme $n \in \mathbb{N}$ nejmenší index, pro který platí $z > -F_{-n}$ a položme $a_{n-2} = 1$ (poznámka : $(n-2)$ namísto $(n-1)$, protože základ je posunut $\{F_{-(i+1)}\}_{i=0}^{\infty}$, zároveň díky podmínce $z < 0$ nebude index nikdy záporný). Takový index jistě najdeme, protože z negafibonacciho posloupnosti lze vybrat posloupnost vybranou, která je nekonečná a klesající. Nyní uvažujme o čísle $z_1 = -F_{-(n-1)} + z$. Uvědomme si, že $F_{-(n-1)}$ je záporné, protože F_{-n} je kladné ($z > -F_{-n}$). Zároveň víme, že $-F_{-(n-1)}$ je menší než $-2z$. Jak toto víme? Dokážeme sporem. Předpokládejme, že

  $$-F_{-(n-1)} \geq -2z$$

  $$F_{-(n-1)} \leq 2z < z$$

  Poslední nerovnost platí díky tomu, že $z < 0$.

  $$-F_{-(n-2)} \leq \frac{F_{-(n-1)}}{2} \leq z$$

  Zde vidíme, že by existovalo $(n-2)$, pro které platí $z > -F_{-(n-2)}$, což je v rozporu s minimalitou n. Když víme, že $-F_{-(n-1)}$ je menší než $-2z$, pak jistě bude platit $|z_1| < |z|$. S číslem z_1 provedeme znova stejnou úvahu, kde dvojice z_1, z_2 vystřídá dvojici z, z_1. Posloupnost čísel z_k se v konečném počtu kroků předchozích úvah dostane k nule. V případě, že nějaké $z_i > 0$, se pomocí vysvětlivek v $z > 0$ taky v následujícím kroku přiblížíme nule.
- $z > 0$ Označme $n \in \mathbb{N}$ nejmenší index, pro který platí $z \leq -F_{-n}$ a položme $a_{n-2} = 1$ ($(n-2)$ můžeme použít jako index, protože díky podmínce $z > 0$ nebude nikdy záporný). Takový index jistě najdeme, protože z negafibonacciho posloupnosti lze vybrat posloupnost

vybranou, která je nekonečná a roustoucí. Nyní uvažujme o čísle $z_1 = -F_{-(n-1)} + z$. Uvědomme si, že $F_{-(n-1)}$ je kladné, protože F_{-n} je záporné ($z \leq -F_{-n}$). Zároveň víme, že $-F_{-(n-1)}$ je větší než $-2z$. Jak toto víme? Dokážeme sporem. Předpokládejme, že

$$-F_{-(n-1)} \leq -2z$$

$$F_{-(n-1)} \geq 2z$$

$$-F_{-(n-2)} \geq \frac{F_{-(n-1)}}{2} \geq z$$

Zde vidíme, že by existovalo $(n-2)$, pro které platí $z \leq -F_{-(n-2)}$, což je v rozporu s minimalitou n. Když víme, že $-F_{-(n-1)}$ je větší než $-2z$, pak jistě bude platit $|z_1| < |z|$.

Jestliže je číslo nenulové, pak klademe $a_i = 0$ pro $i > n-2$, kde n je zprvu zvolený nejmenší index.
$\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost s konečným počtem nenulových členu, proto platí $z = \sum_{i=0}^{k_0} a_i \cdot F_{-(i+1)}$, kde $z_{k_0} = 0$.
Takto zkonstruována posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ nebude mít nikdy dvě jedničky vedle sebe. V případě kdyby vedle sebe byly, pak jsme volili špatně nejmenší n. ∎

Poznámka 12 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v negafibonacciho číselné soustavě

1. Nechť z je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $k = 0$ je počáteční hodnota algoritmu
2. Jestliže je $z_0 = 0$, končíme a zapíšeme 0
3. V případě, že z_k je kladné, pak najdeme nejmenší n pro které platí $z_k \leq -F_{-n}$, v případě, že je záporné hledáme nejmenší n, pro které platí $z_k > -F_{-n}$.
4. Zapíšeme si na pozici $a_{n-2} = 1$.
5. Spočítáme si $z_{k+1} = -F_{-(n-1)} + z_k$. Jestliže je $z_{k+1} = 0$, pak pro ostatní pozice posloupnosti zapíšeme $a_i = 0$, kde $i > 0$ a $i < (n-2)$.
6. V případě, že $z_{k+1} \neq 0$, algoritmus opakujeme.

4.1 Sčítání celých čísel v negafibonacciho číselné soustavě

Sčítání čísel v negafibonacciho číselné soustavě můžeme provádět podle schématu popsaného v následujícím příkladu.

Poznámka 13 Následující rovnosti nám pomůžou v sčítání čísel v negafibonacciho číselné soustavě.

Protože $F_{-k} - F_{-(k+1)} - F_{-(k+2)} = 0$ (z definice), platí následující:

<table>
<tr><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(35)

Protože $\underline{F_{-(k+3)} - 2 \cdot F_{-(k+1)} + F_{-k}} = -F_{-(k+2)} + F_{-(k+1)} - 2 \cdot F_{-(k+1)} + F_{-k} = -F_{-(k+2)} - F_{-(k+1)} + F_{-k} = 0$, platí následující:

<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>||</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(36)

Protože

$$\underline{-F_{-(k+4)} + 3 \cdot F_{-(k+2)} - F_{-k}} = F_{-(k+3)} - F_{-(k+2)} + 3 \cdot F_{-(k+2)} - F_{-k} =$$

$$= \underline{F_{-(k+3)} + 2 \cdot F_{-(k+2)} - F_{-k}} = 2 \cdot F_{-(k+2)} - F_{-(k+2)} + F_{-(k+1)} - F_{-k} = F_{-(k+2)} + F_{-(k+1)} - F_{-k} = 0$$

platí následující:

<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>|||</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>a+b</td></tr>
</table>

a

<table>
<tr><td>|</td><td>||</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(37)

- Zvolme například $a = 17$ a $b = 23$. Dle výše uvedeného algoritmu nalezneme ciferný zápis těchto celých čísel $17 = (1010010)_F$ a $23 = (100101000)_F$.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>a</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(38)

Vzhledem k (35), (36) a (37) můžeme v úpravách Tabulky (38) pokračovat následujícím způsobem:

<table>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>a</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>b</td><td></td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>$\underline{|}$</td><td>$\underline{|}$</td><td>0</td><td>|</td><td>0</td><td>a+b</td><td>(35)</td></tr>
<tr><td>$\underline{|}$</td><td>0</td><td>$\underline{|}$</td><td>$\underline{|}$</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>a+b</td><td>(36)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>|||</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>$\underline{|}$</td><td>$\underline{|}$</td><td>0</td><td>a+b</td><td>(35)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>$\underline{|||}$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>a+b</td><td>(37)</td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>a+b</td><td>(37)</td></tr>
</table>

(39)

Z posledního řádku vyčteme, že $a + b = (100010001)_F$.
A skutečně, $F_{-9} + F_{-5} + F_{-1} = 34 + 5 + 1 = \underline{40} = 17 + 23$

Poznámka 14 Kvůli charakteru této soustavy nemůžeme hovořit o hledání opačného čísla ani o násobení čísel. V některých případech bychom se k opačnému číslu dobrali, ale postup nelze generalizovat a najít číslo vždy.
Například si ukážeme jak najít číslo opačné pro číslo $6 = (10001)_F$

	1	0	0	0	1	a	
	$-\vert$	0	0	0	$\underline{-\vert}$	-a	(36)
	$\underline{-\vert}$	$\underline{\vert}$	0	$-\vert\vert$	0	-a	(35)
$\vert$	0	0	0	$\underline{-\vert\vert}$	0	-a	$-2 \cdot F_{-2} = -2 \cdot -1 = 2 = F_{-3}$
$\vert$	0	0	$\vert$	0	0	-a	$-2 \cdot F_{-2} = -2 \cdot -1 = 2 = F_{-3}$

(40)

a opravdu $F_{-6} + F_{-3} = -8 + 2 = -6 = (100100)_F$

4.2 Výhody a nevýhody negafibonacciho číselné soustavy

Tato číselná soustava je vlastně rozšířením definičního oboru Fibonacciho kódování [**d**] na obor celých čísel. Proto má stejnou výhodu. Když se správně číslo reprezentuje, pak nemá nikdy dvě jedničky vedle sebe. Toho se dá využít při předávání dat, kdy se obě strany dohodnou, že každou n-tici znaků oddělí dvěmi jedničkami. S tímhle přístupem je pak mnohem jednodušší odhalit chybu při přenosu. Jakmile mezi oddělovači(dvě jedničky) neprojde n-tice znaků, ale jen (n-1)-tice. Samozřejme znaky je myšlen binární signál, a proto by tento přístup byl vhodný pro přenášení digitálních dat. Kromě toho je výhodou definiční obor, není třeba definovat jakým způsobem se při přenosu označí záporné číslo.

5 Faktoriálová číselná soustava

Definice 13 *Faktoriálová číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *o základu* $\{(i+1)!\}_{i=0}^{\infty}$ *s množinou cifer* $C = \mathbb{N}_0$.

Poznámka 15 Možná Vás jako čtenáře zarazila množina cifer C, a skutečně se nejedná o žert. Cílem této práce však není najít nejefektivnější řešení, ale prozkoumat teoretické možnosti. Je jasné, že neexistuje dostatek unikátních znaků pro pokrytí celé množiny $\mathbb{N}_0$, proto je tato soustava více teoretická a neuveditelná do praxe. Pro účely této práce nám bude stačit si postačíme s její podmnožinou.

Úmluva 4 Nechť v následující kapitole symboly $A = 10, B = 11, C = 12, ...Z = 35$ označují příslušnou cifru.

Úmluva 5 V faktoriálové číselné soustavě zapisujeme: $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_!$
Hledáme-li relaci k zápornému číslu, pak podobně jak jsme zvyklí v desítkové číselné soustavě, najdeme reprezentaci čísla opačného a zapíšeme znaménko **'**$-$**'** před reprezentaci

Poznámka 16 Je dobré si uvědomit, že bez jistých omezení se nejedná o jednoznačnou číselnou soustavu. Předveďme si pár způsobů jak reprezentovat číslo 10.

$$\begin{aligned} 10 \quad = \quad 10 \cdot 1 &= (A)_! \\ 5 \cdot 2 &= (50)_! \\ 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 &= (120)_! \\ &\vdots \end{aligned}$$

Věta 8 *Pro každé* $x \in \mathbb{N}_0 \quad \exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)!$. *To jest* $D(\varphi) = \mathbb{N}_0$

Důkaz Nechť $x \in \mathbb{Z}$ je dáno. Jestliže je $x = 0$, pak je v relaci s $(0)_!$. V případě, že $x \neq 0$ hledejme největší $n \in \mathbb{N}$, pro které platí: $n! \leq x$. Takové jistě najdeme, protože posloupnost $\{(i+1)!\}_{i=0}^{\infty}$ je rostoucí a nekonečná. Následně si zapíšeme $a_{n-1} = \lfloor \frac{x}{n!} \rfloor$ (protože základ soustavy je posunut). Jelikož je $x \geq n!$, bude a_{n-1} jistě rovno alespoň 1. Následně uvažujme $x_1 = x - a_{n-1} \cdot n!$ (což je v podstatě zbytek po celočíselném dělení). x_1 je zbytek po dělení čísla x číslem $n!$, proto platí $x_1 < n! \leq x$. Stejnou úvahu provádíme dokud nedostaneme $x_k = 0$. Místo původního čísla x dosazujeme x_k. Obdržíme další cifru a_i a celé číslo$x_{k+1} < x_k$. Po konečném kroku se dostaneme k $x_k = 0$. Všechny členy posloupnosti, které nebyly určeny položíme $a_i = 0$ včetně těch, kde $i \geq n$ a n volíme zprvu zvolené. Pro takto vytvořenou posloupnost platí: $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)!$ ∎

Poznámka 17 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v faktoriálové číselné soustavě

1. Nechť x je číslo, které chceme reprezentovat, $x_0 = x$ a $i = 0$ je počáteční hodnota algoritmu
2. Najdeme nejvyšší n, pro které platí: $n! < x$

3. Provedeme následující operaci:
   $x_i/(n-i)! = a_{n-i-1}\ zb.\ x_{i+1}$, kde $a_i, x_i \in \mathbb{N}_0$

4. Opakujeme operaci dokud $x_{i+1} \neq 0$, nechť n je počet iterací. (n je jistě konečné, viz. důkaz 5)

Příklad 7

$$z = 77$$

$$77 : 4! = 3\, zb.\, 5$$

$$5 : 3! = 0\, zb.\, 5$$

$$5 : 2! = 2\, zb.\, 1$$

$$1 : 1! = 1\, zb.\, 0$$

$$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 3$$

$$77 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 4!$$

$$77 = 1 + 4 + 72 \quad \checkmark$$

■

5.1 Sčítání celých čísel v faktoriálové číselné soustavě

Sčítání čísel v faktoriálové číselné soustavě můžeme provádět podle schématu popsaného v následujícím příkladu.

Poznámka 18 Sčítání čísel provádíme velice podobně jak jsme zvyklí v desítkové soustavě, tj. sepíšeme si čísla po sebe a sčítáme po řádech. Jediný rozdíl je pravidlo pro přenesení přebytku na vyšší řád. U desítkové soustavy máme 10 cifer a jsme zvyklí při součtu větším než 9 přenést 1 na vyšší řád a zapsat zbytek po odečtení 10 od součtu. U této soustavy bude tato hranice pro přenesení záviset na indexu s kterým právě počítame. Např. u indexu 3, kde $a_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$ budeme přenášet při překročení čísla 3, tj. 4 a více. Toto pravidlo je zřejmé z definice faktoriálu, $3! \cdot 4 = 4!$.

- Zvolme například $a = 63$ a $b = 91$. Dle výše uvedeného algoritmu nalezneme ciferný zápis těchto celých čísel $63 = (2211)_!$ a $91 = (3301)_!$

	2	2	1	1	a
	3	3	0	1	b
	≥ 5	≥ 4	≥ 3	≥ 2	hranice pro přenesení
	5	5	1	$\underline{2}$	a+b
	5	$\underline{5}$	2	0	a+b
	$\underline{6}$	1	2	0	a+b
1	1	1	2	0	a+b

(41)

Z posledního řádku vyčteme, že $a + b = (11120)_!$
A skutečně, $1 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 2 \cdot 2! = 120 + 24 + 6 + 4 = \underline{154} = 63 + 91$

5.2 Výhody a nevýhody faktoriálové číselné soustavy

Tato číselná soustava nemá žádné výhody co se týče použitelnosti. Hlavním problémem je, jak jsme zmínili v úvodu, rostoucí potřeba pro cifry při převodu větších čísel. Postrádá oproti předchozím soustavám výhodu reprezentace záporných čísel bez pomocných symbolů. Co ale této soustavě nemůžeme upřít je její jednoduchost, hezké využití faktoriálu, příjemné sčítání. V praxi se tedy dá použít jedině pro výuku.

6 Závěr

Závěrečná kapitola obsahuje zhodnocení dosažených výsledků se zvlášť vyznačeným vlastním přínosem studenta. Povinně se zde objeví i zhodnocení z pohledu dalšího vývoje tématu práce, student uvede náměty vycházející ze zkušeností s řešeným tématem a uvede rovněž návaznosti na právě dokončené související práce (řešené v rámci ostatních bakalářských/diplomových prací v daném roce nebo na práce řešené na externích pracovištích).

Odkazy

[1] Bouchala J., *Matematická analýza ve Vesmíru*, strana 3

[2] Keith C., *The Gaussian integers*

[3] Pelantová E. Starosta Š., *Nestandardní zápisy čísel*

[4] Snášel V. Bouchala J. Vodstřcil P., *Kouzlo Fibonacciho kódování*