VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Katedra aplikované matematiky

Obor: Výpočetní matematika

Nestandardní číselné soustavy

BAKALAŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Christian Krutsche

Vedoucí: RNDr. Pavel Jahoda, Ph.D.

2019

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Veškeré použité podklady, ze kterých jsem čerpal informace, jsou uvedeny v seznamu použité literatury a citovány v textu podle normy ČSN ISO 690.

V Ostravě dne středa 25.5.2020 Podpis studenta

Poděkování

Děkuji xx za odborné vedení práce, věcné připomínky, dobré rady a vstřícnost při konzultacích a vypracovávání bakalářské práce.

Abstrakt

Cílem této práce je prozkoumat různé nestandardní možnosti zápisu či kódování čísel. Kromě všem známých soustav s číselným základem (dvojková, šestnáctková,...), jsou zde i zvláštní soustavy s jiným základem. Práce nám přiblíží spektrum //**pěti?!!** nestandardních soustav. U každé soustavy se zabývá důkazem jednoznačnosti vyjádření čísel v daném tvaru a důkazem schopnosti vyjádřit libovolně zvolené čísla. Práce zkoumá nejen soustavy s celočíselným základem, ale i se základem iracionálním, či dokonce komplexním.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Definice

Připomeňme, že libovolnou podmnožinu φ kartézského součinu $A \times B$ nazýváme binární relací(dále jen relací) mezi prvky z množiny A a prvky z množiny B. Fakt, že $(a, b) \in \varphi$ budeme značit $\varphi(a) = b$ a $\varphi \subseteq A \times B$ budeme značit $\varphi : A \to B$, tak jak je to obvyklé u zobrazení, jež jsou speciálními případy relací.

Následující definici jsme převzali z [1]

Definice 1. *Posloupností na množině M rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$. Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in M$ budeme zapisovat některým z následujících způsobů:*

- $a_1, a_2, a_3, \ldots$
- (a_n)
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Definice 2. ***(Číselná soustava na tělese)*** *Nechť $(A, +, \cdot)$ je těleso; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti na množině A; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností na množině C.* ***Číselnou soustavou na tělese*** *$(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \to B \times B$, kde $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i$$

*Množinu C označujeme jako **množinu cifer** číselné soustavy φ. Budeme používat značení $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}) = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots) = (\dots a_2a_1a_0, b_1b_2b_3\dots)$*

Všimněme si, že nevyžadujeme, aby φ bylo zobrazení. Číselná soustava nemusí vyjadřovat každý prvek z A a ty prvky z A, které jsou v relaci φ, nemusí být vyjádřeny jediným způsobem. Uvažujme například obvyklou desítkovou číselnou soustavu na tělese reálných čísel. Jde o číselnou soustavu, kde $C = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ a základem jsou konstantní posloupnosti na : $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\frac{1}{10^n}\}_{n=1}^{\infty}$ na množině C. Potom ($\lfloor x \rfloor$ je celočíselná část reálného čísla x)

$$\varphi(1) = \left(\left\{\left\lfloor \frac{1}{n+1} \right\rfloor\right\}_{n=0}^{\infty}, \{0\}_{n=0}^{\infty}\right) = (\dots 001, 000 \dots),$$

ale také

$$\varphi(1) = (\{0\}_{n=0}^{\infty}, \{9\}_{n=0}^{\infty}) = (\dots 000, 999 \dots).$$

Analogicky jako na tělese definujeme číselnou soustavu na okruhu.

Definice 3. ***(Číselná soustava na okruhu)*** *Nechť $(A, +, \cdot)$ je okruh; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost prvků z A; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C. **Číselnou soustavou na okruhu** $(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \to B$, kde $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$$

*Množinu C označujeme jako **množinu cifer** číselné soustavy φ. Budeme používat značení $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (\dots a_2, a_1, a_0)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0) = \dots a_2a_1a_0$*

Poznámka 1. *Všimněme si, že číselná soustava φ, ať již na tělese, nebo na okruhu, splňuje:*

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Proto, je-li φ zobrazení, je injektivní. Dále můžeme tvrdit, že hodnota $\varphi(x)$ (i v případě, že $\varphi(x)$ není zobrazení) jednoznačně určuje svůj vzor x, ale, jak jsme viděli výše, x nemusí jednoznačně určovat svůj obraz $\varphi(x)$.

Definice 4. *Jestliže pro číselnou soustavu φ na tělese $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení s definičním oborem A, pak tuto soustavu nazveme **Jednoznačnou číselnou soustavou na tělese** $(A, +, \cdot)$. Analogicky, jestliže pro číselnou soustavu φ na okruhu $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení s definičním oborem A, pak tuto soustavu nazveme **Jednoznačnou číselnou soustavou na okruhu** $(A, +, \cdot)$.*

Jednoznačnou číselnou soustavou na tělese (respektive okruhu), tedy nazveme každou číselnou soustavu v níž dokážeme vyjádřit libovolný prvek tělesa (okruhu), přičemž je toto vyjádření jediné možné. Proto platí:

$$(\forall x \in A)(\exists!(\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}) \in \mathbf{B} \times \mathbf{B}) : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i\beta_i,$$

respektive

$$(\forall x \in A)(\exists!\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathbf{B}) : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\alpha_i.$$

Úmluva.

- *Nechť* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ *a* $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti, které jsou základem číselné soustavy na tělese* $(A, +, \cdot)$*. Jestliže* $\exists n \in \mathbb{A}$*, pro které platí:*

  $$(\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i = n^i, \beta_i = n^{-i}) \wedge (\alpha_0 = 1)$$

  pak prvek $\boldsymbol{n}$ *nazýváme také základem této číselné soutavy (1 označuje neutrální prvek tělesa* $(A, +, \cdot)$ *vzhledem k násobení).*

- *Nechť* $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ *je číselná soustava na tělese o základu* $\boldsymbol{n}$*.*
  Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$*, a pokud* $(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_2) : b_m = 0$*, budeme zapisovat:* $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2})_n$

- *V případě n=10 píšeme pouze* $\varphi(x) = a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2}$

- *Nechť* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ *je posloupnost, která je základem číselné soustavy na okruhu* $(A, +, \cdot)$ *s jedničkou. Jestliže* $\exists n \in \mathbb{A}$*, pro které platí:*

  $$(\forall i \in \mathbb{N}_0 : \alpha_i = n^i)$$

  pak prvek $\boldsymbol{n}$ *nazýváme také základem této číselné soutavy (1 je jedničkou v okruhu* $(A, +, \cdot)$*).*

- *Nechť* $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})$ *je číselná soustava na okruhu o základu* $\boldsymbol{n}$*.*
  Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$*, budeme zapisovat:* $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0)_n$

- *Pokud zmíníme, že číslo z je v relaci s posloupností* a_n *pro číselnou soustavu na okruhu o základu* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$*, pak dle definice číselné soustavy na okruhu jistě platí* $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\alpha_i$

1.2 Názorné příklady

Pro lepší představu definice číselné soustavy si ji předveďme na příkladu

Příklad. *Uvažujme těleso reálných čísel* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. *Tj. zvolili jsme* $A = \mathbb{R}$. *Obvyklý desetinný zápis reálných čísel je vlastně číselná soustava na tělese* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *o základu* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{10^{-i}\}_{i=1}^{\infty}$ *a* $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Podle dohody můžeme říci, že jde o číselnou soustavu na tělese o základu 10 a platí:*

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^-1) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

kde $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (5, 2, 3, 0, 0, \dots)$ *a* $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = (6, 0, 0, \dots)$.
Podle Úmluvy 1.1 můžeme psát

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^-1) = 325,6$$

Pozorování:
Je li základem soustavy racionální číslo či posloupnost čísel

$$\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i \in \mathbb{Q} \wedge \beta_i \in \mathbb{Q}$$

pak:

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i \in \mathbb{N}, i > k) : b_i = 0$$

(tj. zlomková část lze vyjádřit konečným počtem prvků **b**)

Pro každou soustavu platí

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i \in \mathbb{N}, i > k) : a_i = 0$$

(tj. celočíselná část musí být z konečného počtu prvků **a**)

Kapitola 2

Negabinární

Definice 5. *Negabinární číselná soustava je číselná soustava na okruhu $\mathbb{Z}$ o základu -2 s množinou cifer $C = \{0, 1\}$.*

Věta 1. *Pro každé $z \in \mathbb{Z} \quad \exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$. To jest $D(\varphi) = \mathbb{Z}$*

Důkaz.

$$z = a_0(-2)^0 + a_1(-2)^1 + a_2(-2)^2 + \cdots + a_n(-2)^n$$

$$(z - a_0) = a_1(-2) + a_2(-2)^2 + \cdots + a_n(-2)^n \quad / : (-2)$$

$$\left(\frac{z - a_0 + 2a_1}{-2}\right) = a_2(-2) + \cdots + a_n(-2)^{n-1} \quad / : (-2)$$

$$\left(\frac{z - a_0 + 2a_1 - 4a_2}{4}\right) = \cdots + a_n(-2)^{n-2} \quad / : (-2)$$

$$\cdots$$

$$\left(\frac{z - a_0 + 2a_1 - 4a_2 + \ldots - a_n(-2)^n}{(-2)^n}\right) = 0$$

Nutně platí, že pro každé $z \in \mathbb{Z}$ existuje posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{n}$, která je v relaci s číslem z v negabinární číselné soustavě na okruhu $\mathbb{Z}$

Příklad.

$$z = 13$$
$$13 : (-2) = -6\, zb.\, 1$$
$$-6 : (-2) = 3\, zb.\, 0$$
$$3 : (-2) = -1\, zb.\, 1$$
$$-1 : (-2) = 1\, zb.\, 1$$
$$1 : (-2) = 0\, zb.\, 1$$
$$\implies a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1$$
$$0 = \frac{z - a_0 + 2a_1 - 4a_2 + 8a_3 - 16a_4}{(-2)^4}$$
$$0 = \frac{13 - 1 - 4 + 8 - 16}{16}$$

Věta 2. *Jestliže* $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$, *pak* $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : a_n = 0$

Důkaz. *Předpokládejme, že takové číslo z existuje, pak uvažujme tři případy:*

a) *Každý sudý člen posloupnosti* a_n *má hodnotu 1 a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *pro který platí že všechny liché členy posloupnosti dále od tohoto* n_0 *mají hodnotu 0. Je zřejmé, že suma diverguje a* $z = \infty$, *a proto* $z \notin \mathbb{Z}$

b) *Každý lichý člen posloupnosti* a_n *má hodnotu 1 a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *pro který platí že všechny sudé členy posloupnosti dále od tohoto* n_0 *mají hodnotu 0. Je zřejmé, že suma diverguje a* $z = -\infty$, *a proto* $z \notin \mathbb{Z}$

c) *Posloupnost je nekonečná a pro libovolné liché* n_1 *vždy najdeme sudé* n_2, *kde* $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$n_2 \textit{ sudé} \implies (-2)^{n_2} = 2^{n_2}$$
$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \le \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \le \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2}$$
$$-\left(\frac{2^{n_2} - 1}{2 - 1}\right) + 2^{n_2} \le z \le \left(\frac{2^{n_2} - 1}{2 - 1}\right) + 2^{n_2}$$
$$1 \le z \le 2 \cdot 2^{n_2} - 1$$
$$z \ge 1$$

Analogicky pro libovolné sudé n_1 *vždy najdeme liché* n_2 *větší, kde* $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$n_2 \text{ liché} \implies (-2)^{n_2} = -2^{n_2}$$

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2}$$
$$-\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) - 2^{n_2} \leq z \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right) - 2^{n_2}$$
$$-2 \cdot 2^{n_2} + 1 \leq z \leq -1$$
$$z \leq -1$$

Je zřejmé, že ani v posledním případě suma nekonverguje, protože vždy najdeme případ, kdy suma je menší než -1 a zároveň případ, kdy suma je větší než 1 $\implies$ ***spor!***

Věta 3. *Pro každé* $z \in \mathbb{Z} \quad \exists! \{a_n\}_{i=0}^{\infty} : z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$

Důkaz. *Dokazujeme sporem, a proto předpokládejme že existuje celé číslo z, které je v relaci s posloupností* $\mathbf{a_n}$ *a zároveň v relaci s jinou posloupností* $\mathbf{b_n}$. *Pokud takové číslo existuje, tak* $\varphi(z)$ *jistě není zobrazení.*

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \neq \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$$
$$z = \sum_{n=0}^{k} a_n(-2)^n = \sum_{n=0}^{k} b_n(-2)^n$$

definujme posloupnost C_n *splňující:*

$$C_n = a_n - b_n$$
$$\sum_{n=0}^{k} C_n(-2)^n = 0, C_n \in \{-1, 0, 1\}$$

Abychom došli ke sporu, předpokládejme, že $\exists n_0 \in \{0, \ldots, k\} : C_n \neq 0$

α) $C_{n_0} = 1$

I.) $\mathbf{n_0}$ *je liché*

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0}$$
$$1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq 2^{n_0+1} - 1$$

Takové číslo je jistě kladné $\implies$ ***z*** *nemůže být v relaci s posloupností* $\mathbf{a_n}$ *a zároveň v relaci s posloupností* $\mathbf{b_n}$

II.) $\mathbf{n_0}$ *je sudé*

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0}$$

$$-2^{n_0+1} + 1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq -1$$

Takové číslo je jistě záporné $\implies$ ***z*** *nemůže být v relaci s posloupností* $\mathbf{a_n}$ *a zároveň v relaci s posloupností* $\mathbf{b_n}$

β) $C_{n_0} = -1$
Důkaz je úplně stejný, ať je C_{n_0} *liché nebo sudé, nikdy se suma rovnat 0 jistě nebude.*

Věta 4. *Negabinární číselná soustava je jednoznačná číselná soustava na okruhu celých čísel*

Dokážeme, že negabinární číselná soustava je jednoznačná číselná soustava $\varphi : \mathbb{Z} \to B$, kde

$$B = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, a_n \in \{0, 1\}\}$$

Musíme ukázat, že φ je zobrazení na $\mathbb{Z}$. To jest, že $D(\varphi) = \mathbb{Z}$ a že každé celé číslo z je možné vyjádřit jediným způsobem ve tvaru $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$.
Nejprve ale dokážeme, že v negabinární číselné soustavě má každé celé číslo ciferný zápis s konečným počtem nenulových cifer.

Podle Úmluvy 1.1 v negabinární číselné soustavě zapisujeme:

$$\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})_{-2}$$

Příklad. *Jestliže φ je negabinární číselná soustava, pak platí:*

$$\varphi(1 \cdot -2^6 + 1 \cdot -2^4 + 1 \cdot -2^1) = (\{a_i\}) = (64 + 16 + (-2))$$

$$a_i = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, \dots)$$

Kapitola 3

Faktoriálová

Definice 6. *Faktoriálová číselná soustava je číselná soustava na okruhu o základu* $\{(i-1)!\}_{i=0}^{\infty}$ *s množinou cifer* $C = \mathbb{N}_0$
Faktoriálová číselná soustava je relace: $\varphi : \mathbb{Z} \to B$

$$B = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, a_n \in \{0, 1\}\}$$

Definice 7. *Omezená množina velikosti* i

$$C_i = \{k, k \leq i\} = \{0, \ldots, i\}$$

Věta 5. *Pro vyjádření libovolného* $z \in \mathbb{Z}$ *nám postačí omezená množina* $C_i \subseteq \mathbb{N}_0$*. Pro každé* $i \in \mathbb{N}_0$ *pro faktoriálovou číselnou soustavu platí* $C = C_i$*. To jest, každé číslo* $z \in \mathbb{Z}$ *lze vyjádřit následovně:*

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (i-1)!, \quad a_i \in C_i$$

Literatura

[1] Jiří Bouchala, Matematická analýza ve Vesmíru, strana 3