VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Katedra aplikované matematiky

Obor: Výpočetní matematika

Nestandardní číselné soustavy

BAKALAŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Christian Krutsche

Vedoucí: RNDr. Pavel Jahoda, Ph.D.

2019

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Veškeré použité podklady, ze kterých jsem čerpal informace, jsou uvedeny v seznamu použité literatury a citovány v textu podle normy ČSN ISO 690.

V Ostravě dne středa 25.5.2020 Podpis studenta

Poděkování

Děkuji xx za odborné vedení práce, věcné připomínky, dobré rady a vstřícnost při konzultacích a vypracovávání bakalářské práce.

Abstrakt

Cílem této práce je prozkoumat různé nestandardní možnosti zápisu či kódování čísel. Kromě všem známých soustav s číselným základem (dvojková, šestnáctková,...), jsou zde i zvláštní soustavy s jiným základem. Práce nám přiblíží spektrum //**pěti?!!** nestandardních soustav. U každé soustavy se zabývá důkazem jednoznačnosti vyjádření čísel v daném tvaru a důkazem schopnosti vyjádřit libovolně zvolené čísla. Práce zkoumá nejen soustavy s celočíselným základem, ale i se základem iracionálním, či dokonce komplexním.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Definice

Připomeňme, že libovolnou podmnožinu φ kartézského součinu $A \times B$ nazýváme binární relací(dále jen relací) mezi prvky z množiny A a prvky z množiny B. Fakt, že $(a, b) \in \varphi$ budeme značit $\varphi(a) = b$ a $\varphi \subseteq A \times B$ budeme značit $\varphi : A \to B$, tak jak je to obvyklé u zobrazení, jež jsou speciálními případy relací.

Následující definici jsme převzali z [1]

Definice 1. *Posloupností na množině M rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$. Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in M$ budeme zapisovat některým z následujících způsobů:*

- $a_1, a_2, a_3, ...$
- (a_n)
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Definice 2. ***(Číselná soustava na tělese)*** *Nechť $(A, +, \cdot)$ je těleso; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti na množině A; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností na množině C.* ***Číselnou soustavou na tělese*** *$(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \to B \times B$, kde $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i$$

*Množinu C označujeme jako **množinu cifer** číselné soustavy φ. Budeme používat značení $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}) = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots) = (\dots a_2a_1a_0, b_1b_2b_3 \dots)$*

Všimněme si, že nevyžadujeme, aby φ bylo zobrazení. Číselná soustava nemusí vyjadřovat každý prvek z A a ty prvky z A, které jsou v relaci φ, nemusí být vyjádřeny jediným způsobem. Uvažujme například obvyklou desítkovou číselnou soustavu na tělese reálných čísel. Jde o číselnou soustavu, kde $C = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ a základem jsou konstantní posloupnosti na : $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\frac{1}{10^n}\}_{n=1}^{\infty}$ na množině C. Potom ($\lfloor x \rfloor$ je celočíselná část reálného čísla x)

$$\varphi(1) = \left(\left\{ \left\lfloor \frac{1}{n+1} \right\rfloor \right\}_{n=0}^{\infty}, \{0\}_{n=0}^{\infty} \right) = (\dots 001, 000 \dots)\,,$$

ale také

$$\varphi(1) = (\{0\}_{n=0}^{\infty}, \{9\}_{n=0}^{\infty}) = (\dots 000, 999 \dots)\,.$$

Analogicky jako na tělese definujeme číselnou soustavu na okruhu.

Definice 3. ***(Číselná soustava na okruhu)*** *Nechť $(A, +, \cdot)$ je okruh; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost prvků z A; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C. **Číselnou soustavou na okruhu** $(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \to B$, kde $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$$

*Množinu C označujeme jako **množinu cifer** číselné soustavy φ. Budeme používat značení $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (\dots a_2, a_1, a_0)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0) = \dots a_2a_1a_0$*

Poznámka 1. *Všimněme si, že číselná soustava φ, ať již na tělese, nebo na okruhu, splňuje:*

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Proto, je-li φ zobrazení, je injektivní. Dále můžeme tvrdit, že hodnota $\varphi(x)$ (i v případě, že $\varphi(x)$ není zobrazení) jednoznačně určuje svůj vzor x, ale, jak jsme viděli výše, x nemusí jednoznačně určovat svůj obraz $\varphi(x)$.

Definice 4. *Jestliže pro číselnou soustavu φ na tělese $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení s definičním oborem A, pak tuto soustavu nazveme **Jednoznačnou číselnou soustavou na tělese** $(A, +, \cdot)$. Analogicky, jestliže pro číselnou soustavu φ na okruhu $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení s definičním oborem A, pak tuto soustavu nazveme **Jednoznačnou číselnou soustavou na okruhu** $(A, +, \cdot)$.*

Jednoznačnou číselnou soustavou na tělese (respektive okruhu), tedy nazveme každou číselnou soustavu v níž dokážeme vyjádřit libovolný prvek tělesa (okruhu), přičemž je toto vyjádření jediné možné. Proto platí:

$$(\forall x \in A)(\exists!(\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}) \in \mathbf{B} \times \mathbf{B}) : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i,$$

respektive

$$(\forall x \in A)(\exists! \{a_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathbf{B}) : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i.$$

Úmluva 1.

- *Nechť* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ *a* $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti, které jsou základem číselné soustavy na tělese* $(A, +, \cdot)$*. Jestliže* $\exists n \in \mathbb{A}$*, pro které platí:*

  $$(\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i = n^i, \beta_i = n^{-i}) \wedge (\alpha_0 = 1)$$

  pak prvek $\boldsymbol{n}$ *nazýváme také základem této číselné soutavy (1 označuje neutrální prvek tělesa* $(A, +, \cdot)$ *vzhledem k násobení).*

- *Nechť* $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ *je číselná soustava na tělese o základu* $\boldsymbol{n}$*.*
  Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0,$ *a pokud* $(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_2) : b_m = 0,$ *budeme zapisovat:* $\varphi(x) = (a_{n_1} ... a_0, b_1 ... b_{n_2})_n$

- *V případě n=10 píšeme pouze* $\varphi(x) = a_{n_1} ... a_0, b_1 ... b_{n_2}$

- *Nechť* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ *je posloupnost, která je základem číselné soustavy na okruhu* $(A, +, \cdot)$ *s jedničkou. Jestliže* $\exists n \in \mathbb{A}$*, pro které platí:*

  $$(\forall i \in \mathbb{N}_0 : \alpha_i = n^i)$$

  pak prvek $\boldsymbol{n}$ *nazýváme také základem této číselné soutavy (1 je jedničkou v okruhu* $(A, +, \cdot)$*).*

- *Nechť* $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})$ *je číselná soustava na okruhu o základu* $\boldsymbol{n}$*.*
  Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0,$ *budeme zapisovat:* $\varphi(x) = (a_{n_1} ... a_0)_n$

1.2 Názorné příklady

Pro lepší představu definice číselné soustavy si ji předveďme na příkladu

Příklad 1. *Uvažujme těleso reálných čísel* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*. Tj. zvolili jsme* $A = \mathbb{R}$*. Obvyklý desetinný zápis reálných čísel je vlastně číselná soustava na tělese* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *o základu* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{10^{-i}\}_{i=1}^{\infty}$ *a* $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$*. Podle dohody můžeme říci, že jde o číselnou soustavu na tělese o základu 10 a platí:*

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^-1) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

kde $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (5, 2, 3, 0, 0, ...)$ *a* $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = (6, 0, 0, ...)$.
Podle Úmluvy 1 můžeme psát

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^-1) = 325,6$$

Pozorování:
Je li základem soustavy racionální číslo či posloupnost čísel

$$\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i \in \mathbb{Q} \wedge \beta_i \in \mathbb{Q}$$

pak:

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i \in \mathbb{N}, i > k) : b_i = 0$$

(tj. zlomková část lze vyjádřit konečným počtem prvků $\mathbf{b}$)

Pro každou soustavu platí

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i \in \mathbb{N}, i > k) : a_i = 0$$

(tj. celočíselná část musí být z konečného počtu prvků $\mathbf{a}$)

Kapitola 2

Fibonacciho kódování

Kapitola 3

Zlatý řez

Kapitola 4

Negabinární

Definice 5. *Negabinární číselná soustava je číselná soustava na okruhu $\mathbb{Z}$ o základu -2 s množinou cifer $C = \{0, 1\}$.*

Dokážeme, že negabinární číselná soustava je jednoznačná číselná soustava $\varphi : \mathbb{Z} \to B$, kde

$$B = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, a_n \in \{0, 1\}\}$$

Musíme ukázat, že φ je zobrazení na $\mathbb{Z}$. To jest, že $D(\varphi) = \mathbb{Z}$ a že každé celé číslo z je možné vyjádřit jediným způsobem ve tvaru $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$.
Nejprve ale dokážeme, že v negabinární číselné soustavě má každé celé číslo ciferný zápis s konečným počtem nenulových cifer.

Věta 1.

$$(\forall z \in \mathbb{Z})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : a_n = 0$$

Důkaz. *Předpokládejme, že takové číslo z existuje, pak uvažujme tři případy:*

a) *Každý sudý člen posloupnosti a_n má hodnotu 1 a každý lichý člen hodnotu 0. Je zřejmé, že hodnota takového číslo by byla: $z = -\infty \implies z \notin \mathbb{Z}$*

b) *Každý lichý člen posloupnosti a_n má hodnotu 1 a každý sudý člen hodnotu 0. Je zřejmé, že hodnota takového číslo by byla: $z = \infty \implies z \notin \mathbb{Z}$*

c) *Pro každé sudé n_1 najdeme liché n_2, kde $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$*

$$n_2 \mod 2 = 0 \implies (-2)^{n_2} = 2^{n_2}$$
$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2}$$

$$-\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right)+2^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right)+(-2)^{n_2} \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right)+2^{n_2}$$

$$1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right)+(-2)^{n_2} \leq 2 \cdot 2^{n_2}-1$$

d) Analogicky pro každé liché n_1 *najdeme sudé* n_2 *větší, kde* $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right)+(-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right)+(-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right)+(-2)^{n_2}$$

$$-\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right)-2^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right)-2^{n_2} \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right)-2^{n_2}$$

$$-2 \cdot 2^{n_2}+1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right)-2^{n_2} \leq -1$$

Je zřejmé, že v případě c) a d) suma nekonverguje, protože vždy najdeme případ, kdy suma je menší než -1 a zároveň případ, kdy suma je větší než 1 $\implies$ ***spor!***

$$z=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-2)^n \implies (\exists n \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) : a_n = 0$$

Důkaz. *Je třeba dokázat korektnost, tj. že $\varphi(z)$ je zobrazení. Dokazujeme sporem, a proto předpokládejme že existuje celé číslo $\boldsymbol{z}$, které je v relaci s posloupností $\mathbf{a_n}$ a zároveň v relaci s jinou posloupností $\mathbf{b_n}$. Pokud takové číslo existuje, tak $\varphi(z)$ jistě není zobrazení.*

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \neq \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$z = \sum_{n=0}^{k} a_n(-2)^n = \sum_{n=0}^{k} b_n(-2)^n$$

definujme posloupnost C_n splňující:

$$C_n = a_n - b_n$$

$$\sum_{n=0}^{k} C_n(-2)^n = 0, C_n \in \{-1, 0, 1\}$$

Abychom došli ke sporu, předpokládejme, že $\exists n_0 \in \{0, ..., k\} : C_n \neq 0$

α) $C_{n_0} = 1$

I.) $\mathbf{n_0}$ *je liché*

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0}$$

$$1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq 2^{n_0+1} - 1$$

Takové číslo je jistě kladné $\implies$ $\boldsymbol{z}$ *nemůže být v relaci s posloupností* $\mathbf{a_n}$ *a zároveň v relaci s posloupností* $\mathbf{b_n}$

II.) $\mathbf{n_0}$ *je sudé*

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0}$$

$$-2^{n_0+1} + 1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq -1$$

Takové číslo je jistě záporné $\implies$ $\boldsymbol{z}$ *nemůže být v relaci s posloupností* $\mathbf{a_n}$ *a zároveň v relaci s posloupností* $\mathbf{b_n}$

β) $C_{n_0} = -1$
Důkaz je úplně stejný, ať je C_{n_0} liché nebo sudé, nikdy se suma rovnat 0 jistě nebude.

Podle Úmluvy 1 v negabinární číselné soustavě zapisujeme:

$$\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})_{-2}$$

Příklad 2. *Jestliže φ je negabinární číselná soustava, pak platí:*

$$\varphi(1 \cdot -2^6 + 1 \cdot -2^4 + 1 \cdot -2^1) = (\{a_i\}) = (64 + 16 + (-2))$$

$$a_i = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, ...)$$

Kapitola 5

Odmocnina ze dvou??

Kapitola 6

Kvaterimaginární (2i)

Definice 6. *Kvaterimaginární(2i) číselná soustava je číselná soustava (neinjektivní) na tělese* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *o základu* $2i$*, kde množina cifer* $C = \{0, 1, 2, 3\}$

Podle Úmluvy 1 v kvaterimaginární(2i) číselné soustavě zapisujeme:

$$\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})_{2i}$$

Příklad 3. *Jestliže* φ *je kvaterimaginární číselná soustava, pak platí:*

$$\varphi(1 \cdot (2i)^5 + 1 \cdot (2i)^4 + 3 \cdot (2i)^3 + 2 \cdot (2i)^2 + 3 \cdot (2i)^1 + 1 \cdot (2i)^{-1} + 3 \cdot (2i)^{-2}) =$$

$$= \varphi(1 \cdot (32i) + 1 \cdot (16) + 3 \cdot (-8i) + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot (2i)^1 + 1 \cdot (\frac{-i}{2}) + 3 \cdot (\frac{-1}{4})) =$$

$$= (\{a_i\}, \{b_i\}) = (7.25 + 13.5i)$$

$$a_i = (0, 3, 2, 3, 1, 1...), b_i = (1, 3, ...)$$

Důkaz neinjektivity

$$1.03_{2i} = 0.0003_{2i} = \left(\frac{1}{5}\right)_{10}$$

Kapitola 7

Complex (i-1)

Definice 7. *Complex(i-1) číselná soustava je injektivní číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}_{[i]}, +, \cdot)$ *o základu* $1 - i$*, kde množina cifer* $C = \{0, 1\}$

Podle Úmluvy 1 v negabinární číselné soustavě zapisujeme:

$$\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})_{1-i}$$

Příklad 4. *Jestliže* φ *je negabinární číselná soustava, pak platí:*

$$\varphi(1 \cdot (1-i)^7 + 1 \cdot (1-i)^6 + 1 \cdot (1-i)^3 + 1 \cdot (1-i)^1) =$$

$$= \varphi(1 \cdot (8+i) + 1 \cdot (8i) + 1 \cdot (-2-2i) + 1 \cdot (1-i)) =$$

$$= (\{a_i\}) = (7 + 13i)$$

$$a_i = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, ...)$$

Kapitola 8

Faktoriálová

Definice 8. *Faktoriálová číselná soustava je číselná soustava o základu* $\{(i-1)!\}_{i=0}^{\infty}$ *s množinou cifer* $C = \mathbb{Z}$
Faktoriálová číselná soustava je relace: $\varphi : \mathbb{Z} \to B$

$$B = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, a_n \in \{0,1\}\}$$

Musíme ověřit korektnost definice. Musíme ukázat, že φ je opravdu zobrazení na $\mathbb{Z}$. To jest, že $D(\varphi) = \mathbb{Z}$ a že každé celé číslo z je možné vyjádřit ve tvaru $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$ jednoznačně

Věta 2.

$$(\forall z \in \mathbb{Z})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) : a_n = 0$$

tj. celé číslo se vždy zobrazí na konečnou posloupnost cifer

Důkaz. *Předpokládejme, že takové číslo z existuje, pak uvažujme tři případy:*

a) *Každý sudý člen posloupnosti* a_n *má hodnotu 1 a každý lichý člen hodnotu 0. Je zřejmé, že hodnota takového číslo by byla:* $z = -\infty \implies z \notin \mathbb{Z}$

b) *Každý lichý člen posloupnosti* a_n *má hodnotu 1 a každý sudý člen hodnotu 0. Je zřejmé, že hodnota takového číslo by byla:* $z = \infty \implies z \notin \mathbb{Z}$

c) *Pro každé sudé* n_1 *najdeme liché* n_2*, kde* $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$n_2 \mod 2 = 0 \implies (-2)^{n_2} = 2^{n_2}$$

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right) + (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right) + (-2)^{n_2}$$

$$-\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right)+2^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right)+(-2)^{n_2} \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right)+2^{n_2}$$

$$1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right)+(-2)^{n_2} \leq 2\cdot 2^{n_2}-1$$

d) Analogicky pro každé liché n_1 *najdeme sudé* n_2 *větší, kde* $n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} = 1$

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right)+(-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right)+(-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} 2^n\right)+(-2)^{n_2}$$

$$-\left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right)-2^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right)-2^{n_2} \leq \left(\frac{2^{n_2}-1}{2-1}\right)-2^{n_2}$$

$$-2\cdot 2^{n_2}+1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_2-1} a_n(-2)^n\right)-2^{n_2} \leq -1$$

Je zřejmé, že v případě c) a d) suma nekonverguje, protože vždy najdeme případ, kdy suma je menší než -1 a zároveň případ, kdy suma je větší než 1 $\Longrightarrow$ ***spor!***

$$z=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-2)^n \implies (\exists n \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) : a_n = 0$$

Důkaz. *Je třeba dokázat korektnost, tj. že $\varphi(z)$ je zobrazení. Dokazujeme sporem, a proto předpokládejme že existuje celé číslo $\boldsymbol{z}$, které je v relaci s posloupností $\mathbf{a_n}$ a zároveň v relaci s jinou posloupností $\mathbf{b_n}$. Pokud takové číslo existuje, tak $\varphi(z)$ jistě není zobrazení.*

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \neq \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$z = \sum_{n=0}^{k} a_n(-2)^n = \sum_{n=0}^{k} b_n(-2)^n$$

definujme posloupnost C_n splňující:

$$C_n = a_n - b_n$$

$$\sum_{n=0}^{k} C_n(-2)^n = 0, C_n \in \{-1, 0, 1\}$$

Abychom došli ke sporu, předpokládejme, že $\exists n_0 \in \{0, ..., k\} : C_n \neq 0$

α) $C_{n_0} = 1$

I.) $\mathbf{n_0}$ *je liché*

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0}$$

$$1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq 2^{n_0+1} - 1$$

Takové číslo je jistě kladné $\implies$ $\boldsymbol{z}$ nemůže být v relaci s posloupností $\mathbf{a_n}$ a zároveň v relaci s posloupností $\mathbf{b_n}$

II.) $\mathbf{n_0}$ *je sudé*

$$-\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n\right) + (-2)^{n_0}$$

$$-2^{n_0+1} + 1 \leq \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} C_n(-2)^n\right) + C_{n_0} \cdot (-2)^{n_2} \leq -1$$

Takové číslo je jistě záporné $\implies$ $\boldsymbol{z}$ nemůže být v relaci s posloupností $\mathbf{a_n}$ a zároveň v relaci s posloupností $\mathbf{b_n}$

β) $C_{n_0} = -1$

Důkaz je úplně stejný, ať je C_{n_0} liché nebo sudé, nikdy se suma rovnat 0 jistě nebude.

Podle Úmluvy 1 v negabinární číselné soustavě zapisujeme:

$$\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})_{-2}$$

Příklad 5. *Jestliže φ je negabinární číselná soustava, pak platí:*

$$\varphi(1 \cdot -2^6 + 1 \cdot -2^4 + 1 \cdot -2^1) = (\{a_i\}) = (64 + 16 + (-2))$$

$$a_i = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, ...)$$

Kapitola 9

Eulerovo cislo

Literatura

[1] Jiří Bouchala, Matematická analýza ve Vesmíru, strana 3