VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Nestandardní číselné soustavy

Non-Standard Numeral Systems

2020

Christian Krutsche

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Zadání bakalářské práce

Student: **Christian Krutsche**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: Nestandardní číselné soustavy
Non-Standard Numeral Systems

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Bakalářská práce by se tematicky měla věnovat nestandardním zápisům čísel z dané množiny. Autor by se měl věnovat z větší části těm způsobům reprezentace čísel, které využívají pouze cifer 0 a 1, ale je možné se zabývat i jinými. U každého typu zápisu by měly být popsány jeho základní vlastnosti a pokud možno i případné výhody a nevýhody, které ovlivňují jeho využitelnost.

Seznam doporučené odborné literatury:

Donald E. Knuth: Umění programování 2. díl: Seminumerické algoritmy
E. Pelantová, Š. Starosta: nestandardní zápisy čísel, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 56 (2011), No. 4, 276-289

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Pavel Jahoda, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2019

Datum odevzdání: 30.04.2020

prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 1. dubna 2020 ....

Děkuji panu RNDr. Pavlu Jahodovi, Ph.D. za odborné vedení práce, věcné připomínky, dobré rady a vstřícnost při konzultacích a vypracovávání bakalářské práce.

Abstrakt

Cílem této práce je prozkoumat různé nestandardní možnosti zápisu či kódování čísel. Kromě všem známých soustav s číselným základem (dvojková, šestnáctková,...), jsou zde i zvláštní soustavy s jiným základem. Práce nám přiblíží spektrum nestandardních soustav. U každé soustavy se zabývá důkazem jednoznačnosti vyjádření čísel v daném tvaru a důkazem schopnosti vyjádřit libovolně zvolené čísla. Práce zkoumá nejen soustavy s celočíselným základem, ale i se základem iracionálním, či dokonce komplexním.

Klíčová slova: číselná soustava

Abstract

This is English abstract.

Keywords: numeral system

Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů

ČS	–	Číselná soustava

1 Úvod

1.1 Definice

Připomeňme, že libovolnou podmnožinu φ kartézského součinu $A \times B$ nazýváme binární relací (dále jen relací) mezi prvky z množiny A a prvky z množiny B. Binární dvojici $(a,b) \in \varphi$ budeme značit $\varphi(a) = b$ a $\varphi \subseteq A \times B$ budeme značit $\varphi : A \to B$, tak jak je to obvyklé u zobrazení, jež jsou speciálními případy relací.

Následující definici jsme převzali z [**a**]

Definice 1 *Posloupností na množině M rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$. Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in M$ budeme zapisovat některým z následujících způsobů:*

- $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
- (a_n)
- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Definice 2 ***(Číselná soustava na tělese)*** *Nechť $(A,+,\cdot)$ je těleso; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti na množině A; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C.* ***Číselnou soustavou na tělese*** *$(A,+,\cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \to B \times B$, kde $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i$$

Množinu C označujeme jako ***množinu cifer*** *číselné soustavy φ. Budeme používat značení $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}) = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots)_\varphi = (\dots a_2, a_1, a_0; b_1, b_2, b_3, \dots) = (\dots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots)$*

Všimněme si, že nevyžadujeme, aby φ bylo zobrazení. Číselná soustava nemusí vyjadřovat každý prvek z A a ty prvky z A, které jsou v relaci φ, nemusí být vyjádřeny jediným způsobem. Uvažujme například obvyklou desítkovou číselnou soustavu na tělese reálných čísel. Jde o číselnou soustavu, kde $C = \{0,1,2,\dots,9\}$ a základem jsou konstantní posloupnosti na : $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\frac{1}{10^n}\}_{n=1}^{\infty}$ na množině C.

I. Vyjadřujeme jen nezáporná čísla, např. číslo $x = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \Rightarrow \varphi(x) = (\dots 123,000 \dots)$, ale $\varphi(-x)$ neexistuje. Pomocí cifer z $C = \{0,\dots,9\}$ při základu $\{10^i\}_{i=0}^{\infty}$ nelze vyjádřit záporné číslo

II. ($\lfloor x \rfloor$ je celočíselná část reálného čísla x)

$$\varphi(1) = \left(\left\{ \left\lfloor \frac{1}{n+1} \right\rfloor \right\}_{n=0}^{\infty}, \{0\}_{n=0}^{\infty} \right) = (\ldots 001, 000 \ldots),$$

ale také

$$\varphi(1) = (\{0\}_{n=0}^{\infty}, \{9\}_{n=0}^{\infty}) = (\ldots 000, 999 \ldots).$$

Analogicky jako na tělese definujeme číselnou soustavu na okruhu.

Definice 3 ***(Číselná soustava na okruhu)*** *Nechť $(A, +, \cdot)$ je okruh; $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost prvků z A; $C \subseteq A$ a B je množina všech posloupností prvků z C.* ***Číselnou soustavou na okruhu*** *$(A, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ s ciframi z C nazveme libovolnou relaci $\varphi : A \to B$, kde $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě když*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$$

Množinu C označujeme jako ***množinu cifer*** *číselné soustavy φ. Budeme používat značení $\varphi(x) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (\ldots a_2, a_1, a_0)_\varphi$ a pokud nebude možno dojít k omylu, pak také $(\ldots a_2, a_1, a_0)_\varphi = (\ldots a_2, a_1, a_0) = \ldots a_2 a_1 a_0$*

Poznámka 1 V Definici 2 a Definici 3 předpokládáme, že na tělese, respektive okruhu $(A, +, \cdot)$ jsou definovány nekonečné součty

Poznámka 2 Všimněme si, že číselná soustava φ, ať již na tělese, nebo na okruhu, splňuje:

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Proto, je-li φ zobrazení, je injektivní. Dále můžeme tvrdit, že hodnota $\varphi(x)$ (i v případě, že $\varphi(x)$ není zobrazení) jednoznačně určuje svůj vzor x, ale, jak jsme viděli výše, x nemusí jednoznačně určovat svůj obraz $\varphi(x)$.

Definice 4 *Jestliže pro číselnou soustavu φ na tělese $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení, pak tuto soustavu nazveme* ***jednoznačnou číselnou soustavou na tělese*** *$(A, +, \cdot)$. Analogicky, jestliže pro číselnou soustavu φ na okruhu $(A, +, \cdot)$ platí, že φ je zobrazení, pak tuto soustavu nazveme* ***jednoznačnou číselnou soustavou na okruhu*** *$(A, +, \cdot)$.*

Jednoznačnou číselnou soustavou na tělese (respektive okruhu), tedy nazveme každou číselnou soustavu v níž dokážeme vyjádřit libovolný prvek tělesa (okruhu) nejvýše jedním způsobem.

Úmluva 1

- Nechť $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti, které jsou základem číselné soustavy na tělese $(A, +, \cdot)$. Jestliže $\exists n \in \mathbb{A}$, pro které platí:

$$(\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i = n^i, \beta_i = n^{-i}) \wedge (\alpha_0 = 1),$$

pak prvek **n** také nazýváme základem této číselné soutavy (1 označuje neutrální prvek tělesa $(A, +, \cdot)$ vzhledem k násobení).

- Nechť $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty})$ je číselná soustava na tělese o základu **n**.
Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$, a pokud $(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_2) : b_m = 0$, budeme zapisovat: $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2})_n$

- V případě n=10 píšeme pouze $\varphi(x) = a_{n_1} \dots a_0, b_1 \dots b_{n_2}$

- Nechť $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost, která je základem číselné soustavy na okruhu $(A, +, \cdot)$ s jedničkou. Jestliže $\exists n \in \mathbb{A}$, pro které platí:

$$(\forall i \in \mathbb{N}_0 : \alpha_i = n^i)$$

pak prvek **n** nazýváme také základem této číselné soutavy ($n^0 = 1$ je jedničkou v okruhu $(A, +, \cdot)$).

- Nechť $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})$ je číselná soustava na okruhu o základu **n**.
Pokud $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1) : a_m = 0$, budeme zapisovat: $\varphi(x) = (a_{n_1} \dots a_0)_n$

- Pokud zmíníme, že číslo z je v relaci s posloupností a_n pro číselnou soustavu na okruhu o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$, pak dle definice číselné soustavy na okruhu jistě platí $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i$

1.2 Názorné příklady

Pro lepší představu definice číselné soustavy si ji předveďme na příkladu

Příklad 1
Uvažujme těleso reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Tj. zvolili jsme $\mathrm{A} = \mathbb{R}$. Obvyklý desetinný zápis reálných čísel je vlastně číselná soustava na tělese $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o základu $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty} = \{10^i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} = \{10^{-i}\}_{i=1}^{\infty}$ a $\mathrm{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Podle dohody můžeme říci, že jde o číselnou soustavu na tělese o základu 10 a platí:

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

kde $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = (5, 2, 3, 0, 0, \dots)$ a $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = (6, 0, 0, \dots)$.
Podle Úmluvy 1 můžeme psát

$$\varphi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^-1) = 325.6$$

Označme $x = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}$
$\varphi(-x) = \varphi(-(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}))$ neexistuje, ale prvek $-x$ ovykle značíme $-x = -\varphi(x) = -325.6$, neboť obvykle nerozlišujeme mezi číslem a jeho ciferným zápisem, tj. mezi $-x$ a $\varphi(-x)$.

■

2 Negabinární číselná soustava

Definice 5 *Negabinární číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *o základu -2 s množinou cifer* $C = \{0, 1\}$.

Negabinární číselná soustava je tedy relace φ mezi celými čísly a posloupnostmi jedniček a nul, kde $z \in \mathbb{Z}$ je v relaci s posloupností $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě thedy, když

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i.$$

Ciferným zápisem celého čísla v negabinární číselné soustavě je posloupnost čísel z množiny $C = \{0, 1\}$. Fakt, že $\varphi(z) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro $i > k$, budeme symbolicky zapisovat $\varphi(z) = (a_k \ldots a_0)_{-2}$. Pokud nebude moci dojít k omylu, tento zápis ještě zjednodušíme na $z = (a_k \ldots a_0)_{-2}$. Například $5 = (101)_{-2}$, neboť $5 = 1 \cdot (-2)^2 + 0 \cdot (-2)^1 + 1 \cdot (-2)^0$.

Prozkoumáme základní vlastnosti této číselné soustavy. Nejprve ukážeme, že v negabinární číselné soustavě dokážeme najít ciferný zápis pro libovolné celé číslo.

Věta 1 *Pro každé* $z \in \mathbb{Z}$ *existuje* $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0, 1\}$ *taková, že* $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$. *To jest,* $D(\varphi) = \mathbb{Z}$.

Důkaz Protože $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je euklidovský obor integrity, jistě existují čísla $z_i \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1\}$ taková, že:

$$\begin{aligned} z = z_0 &= z_1 \cdot (-2) + a_0 \\ z_1 &= z_2 \cdot (-2) + a_1 \\ z_2 &= z_3 \cdot (-2) + a_2 \\ &\vdots \\ z_{k-1} &= z_k \cdot (-2) + a_{k-1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1}$$

V případě, že $z_1 = 0$, je jasné, že $z = a_0 = a_0(-2)^0$, kde $a_0 \in \{0, 1\}$. Dokazované tvrzení tak v tomto případě platí. Co když ale $z_0 \neq 0$?

Dokážeme, že pro dost velké n je $z_{n+1} = 0$. Z (1) je zřejmé, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|z_k| = \left| \frac{z_{k-1} - a_{k-1}}{-2} \right| \leq \frac{|z_{k-1}| + 1}{2} = \frac{|z_{k-1}|}{2} + \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Z (2) plyne, že pro $(k - 1) \in \mathbb{N}$ také platí

$$|z_{k-1}| = \left| \frac{z_{k-2} - a_{k-2}}{-2} \right| \leq \frac{|z_{k-2}|}{2} + \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Aplikací odhadu (3) v (2) obdržíme

$$|z_k| \leq \frac{|z_{k-1}|}{2} + \frac{1}{2} \leq \frac{|z_{k-2}|}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.$$

Analogicky můžeme pokračovat a zjistíme, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|z_k| \leq \frac{|z_0|}{2^k} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{|z_0|}{2^k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{4}$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{|z_0|}{2^k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \to 1$ při $k \to \infty$, je zřejmé, že existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|z_{k_0}| \leq 1,5$. To ale znamená, že $z_{k_0} \in \{-1, 0, 1\}$. Rozeberme jednotlivé případy.

a) Jestliže $z_{k_0} = 0$, pak také $z_{k_0+1} = 0$. Hledaným n proto může být $n = k_0$.

b) Jestliže $z_{k_0} = 1$, pak $z_{k_0} = 1 = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0}$. Protože $a_{k_0} \in \{0, 1\}$, musí platit $z_{k_0+1} = 0$. Hledaným n proto může být $n = k_0$.

c) Jestliže $z_{k_0} = -1$, pak $z_{k_0} = -1 = z_{k_0+1} \cdot (-2) + a_{k_0}$. Protože $a_{k_0} \in \{0, 1\}$, musí platit $z_{k_0+1} = 1$. To ale podle předchozího bodu znamená, že $z_{k_0+2} = 0$. Hledaným n proto může být $n = k_0 + 1$.

Dokázali jsme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $z_{n+1} = 0$. Z toho plyne, že $z_n = a_n$, odtud $z_{n-1} = a_n \cdot (-2)^1 + a_{n-1}, \ldots, z = z_0 = a_n \cdot (-2)^n + a_{n-1} \cdot (-2)^{n-1} + \cdots + a_0$. Pokud zvolíme $a_i = 0$ pro $i > n$, pak $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$.

■

Na základě úvah provedených ve výše uvedeném důkazu můžeme vyslovit následující tvrzení.

Věta 2 *Pro každé $z \in \mathbb{Z}$ existuje konečná posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{k}$, $a_i \in \{0, 1\}$ taková, že*

$$z = \sum_{i=0}^{k} a_i (-2)^i$$

Důkaz Z důkazu Věty 1 okamžitě plyne, že prokaždé celé číslo existuje posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ s konečným počtem nenulových prvků splňující $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-2)^i$.

■

Vzniká otázka, zda může existovat posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ splňující $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-2)^i$ i s nekonečným počtem nenulových prvků? Jinak řečeno, existuje nějaké celé číslo z, které je v relaci φ s nějakou nekonečnou posloupností? Odpověď je záporná. V negabinární soustavě můžeme každé celé číslo vyjádřit jen pomocí konečného počtu nenulových cifer.

Věta 3 *Nechť $z \in \mathbb{Z}$. Jestliže $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-2)^i$, pak posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ má konečný počet nenulových členů.*

Důkaz Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že číslo $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$, kde posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ má nekonečně mnoho nenulových členů. Pak může nastat právě jeden ze tří případů:

a) Mezi sudými členy posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (máme na mysli ta a_n, kde n je sudé) je nekonečně mnoho těch, které mají hodnotu 1 a existuje jen konečný počet nenulových lichých členů posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Je zřejmé, že $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i = \infty$. To je spor s tím, že $z \in \mathbb{Z}$.

b) Mezi lichými členy posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (máme na mysli ta a_n, kde n je liché) je nekonečně mnoho těch, které mají hodnotu 1 a existuje jen konečný počet nenulových sudých členů posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Je zřejmé, že $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i = -\infty$. To je spor s tím, že $z \in \mathbb{Z}$.

c) Jak mezi lichými, tak mezi sudými členy posloupnosti $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ je nekonečně mnoho těch s nenulovou hodnotou.

Uvažujme n_k sudé, takové, že $a_{n_k} = 1$. Označme částečný součet

$$S_{n_k} = \sum_{i=0}^{n_k} a_i(-2)^i.$$

Můžeme odhadnout hodnotu S_{n_k}:

$$\begin{aligned} S_{n_k} &= (-2)^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i = \\ &= 2^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i \geq \\ &\geq 2^{n_k} - \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} 2^i = \\ &= 2^{n_k} - \frac{2^{n_k}-1}{2-1} = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Nyní uvažujme n_k liché, takové, že $a_{n_k} = 1$ a odhadněme hodnotu S_{n_k}:

$$\begin{aligned} S_{n_k} &= (-2)^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i = \\ &= -2^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} a_i(-2)^i \leq \\ &\leq -2^{n_k} + \textstyle\sum_{i=0}^{n_k-1} 2^i = \\ &= -2^{n_k} + \frac{2^{n_k}-1}{2-1} = -1 \end{aligned} \tag{6}$$

Z (5) plyne, že pro n_k sudé, kde $a_{n_k} = 1$ (a takových je podle předpokladu nekonečně mnoho), platí $S_{n_k} \geq 1$. Zároveň z (6) plyne, že pro n_k liché, kde $a_{n_k} = 1$ (a takových je podle předpokladu také nekonečně mnoho), platí $S_{n_k} \leq -1$. To by však znamenalo, že suma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$ nekonverguje. Opět docházíme ke sporu.

■

Nakonec dokážeme, že každé celé číslo je možné v negabinární číselné soustavě vyjádřit jen jedním způsobem, to jest, existuje právě jeden jeho ciferný zápis.

Věta 4 *Pro každé $z \in \mathbb{Z}$ existuje jediná posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0,1\}$ taková, že $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$.*

Důkaz Nejprve dokážeme tvrzení věty pro $z = 0$. Věta 1 říká, že existuje posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0,1\}$ taková, že $0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$.

Věta 3 navíc tvrdí, že posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ nemůže mít nekonečný počet nenulových členů. Musí proto existovat $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a_i = 0$ pro $i > k$. Odtud

$$0 = \sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i \tag{7}$$

Předpokládejme, že $a_k = 1$. Stejně jako v důkazu Věty 3 využijeme odhad součtu (7). Nejprve pro k liché :

$$\begin{aligned} 0 = \textstyle\sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i &= 1 \cdot (-2)^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i = \\ &= -2^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i \leq \\ &\leq -2^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \\ &= -2^k + \frac{2^k - 1}{2 - 1} = -1 \end{aligned} \tag{8}$$

Dostváme sporné tvrzení $0 \leq -1$. Analogicky pro k sudé :

$$\begin{aligned} 0 = \textstyle\sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i &= 1 \cdot (-2)^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i = \\ &= 2^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i(-2)^i \geq \\ &\geq 2^k - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \\ &= 2^k - \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 1 \end{aligned} \tag{9}$$

Opět dostáváme sporné tvrzení. Proto $a_k = 0$. Vedoucím koeficientem se tak stává a_{k-1}. Opakováním úvahy zjistíme, že všechny koeficienty a_i musí být rovny nule. Znamená to, že pro $z = 0$ existuje jediná posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \{0, 1\}$ taková, že $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(-2)^i$. Jedná se o posloupnost, kde $\forall\, i \in \mathbb{N} : a_i = 0$.

Nyní předpokládejme, že existuje nenulové celé číslo $z \neq 0$, které je v relaci φ s posloupností $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ a také s posloupností $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Z Věty 3 plyne, že jak poslosloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, tak posloupnost $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, má jen konečně mnoho nenulových členů. Označme $k_1 = \max\{i \in \mathbb{N} : a_i = 1\}$, $k_2 = \max\{i \in \mathbb{N} : b_i = 1\}$ a $k = \max\{k_1, k_2\}$ (čísla k_1 a k_2 jistě existují, neboť z je nenulové). Potom jistě platí:

$$z = \sum_{i=0}^{k} a_i(-2)^i = \sum_{i=0}^{k} b_i(-2)^i \tag{10}$$

Z (11) plyne, že

$$0 = \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i)(-2)^i \tag{11}$$

Jak jsme ale výše dokázali, musí pro každé $i \in \{0, \dots, k\}$ platit $a_i - b_i = 0$. To ovšem znamená, že $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$.

■

Důsledek 1 Negabinární číselná soustava je jednoznačná číselná soustava na okruhu celých čísel.

Důkaz Z Věty 4 okamžitě plyne, že relace φ je zobrazení. ■

Výše uvedené poznatky můžeme shrnout. V negabinární číselné soustavě dokážeme vyjádřit libovolné celé číslo pomocí konečného ciferného zápisu a to jediným způsobem.

Poznámka 3 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v negabinární číselné soustavě je založen na konstrukci popsané v důkazu Věty 1:

1. Nechť z je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $i = 0$ je počáteční hodnota algoritmu.
2. Pro pro $i > 0$ ze vztahu $z_i = z_{i+1} \cdot (-2) + a_i$ určíme čísla z_{i+1} a a_i tak, aby platilo $a_i \in \{0, 1\}$.
3. Algoritmus končí pro $i = n$, kde $z_{n+1} = 0$.
4. Potom $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro každé $i > n$, splňuje požadavek $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$.

Příklad 2
Vyjádříme číslo $z = 13$ v negabinární číselné soustavě.

$$\begin{array}{rcrcrcl} z_i & = & z_{i+1} & \cdot & (-2) & + & a_i \\ \hline \\ 13 & = & -6 & \cdot & (-2) & + & 1 \\ \\ -6 & = & 3 & \cdot & (-2) & + & 0 \\ \\ 3 & = & -1 & \cdot & (-2) & + & 1 \\ \\ -1 & = & 1 & \cdot & (-2) & + & 1 \\ \\ 1 & = & 0 & \cdot & (-2) & + & 1 \end{array}$$

A opravdu, $1 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^4 = 1 + 4 - 8 + 16 = 13$. Můžeme proto psát $\varphi(13) = (11101)_{-2}$. ■

2.1 Sčítání celých čísel v negabinární číselné soustavě

Sčítání čísel v negabinární číselné soustavě můžeme provádět podle schématu popsaného v následujících příkladech.

- Zvolme $a = 9$ a $b = 19$. Dle výše uvedeného algoritmu nalezneme ciferný zápis těchto celých čísel $9 = (11001)_{-2}$ a $19 = (10111)_{-2}$. Cifry zapíšeme pod sebe do tabulky a do řádku pod nimi naznačíme pomocí čárek, kolik má součet $a + b$ příslušných mocnin čísla -2:

1	1	0	0	1	a
1	0	1	1	1	b
||	|	|	|	||	a+b

(12)

Třetí řádek Tabulky 12 znázorňuje fakt, že $a + b = (-2)^4 + (-2)^3 + 0(-2)^2 + 0(-2)^1 + 1(-2)^0 + (-2)^4 + 0(-2)^3 + 1(-2)^2 + 1(-2)^1 + 1(-2)^0 = 2(-2)^4 + (-2)^3 + (-2)^2 + (-2)^1 + 2(-2)^0$.

Tento řádek můžeme dále upravovat a to dle následujících pravidel.
Protože $(-2)^{k+1} + 2 \cdot (-2)^k = 0$, můžeme nahradit:

|	||	a+b
0	0	a+b

(13)

Protože $2 \cdot (-2)^k = -(-2)^{k+1}$, můžeme nahradit:

<table>
<tr><td>0</td><td>||</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>-|</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(14)

Protože $-(-2)^k = (-2+1) \cdot (-2)^k = (-2)^{k+1} + (-2)^k$, můžeme nahradit:

<table>
<tr><td>0</td><td>-|</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>|</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(15)

Vzhledem k (13), (14) a (15) můžeme v úpravách Tabulky (12) pokračovat následujícím způsobem:

<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>b</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>||</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>||</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(16)

Z posledního řádku vyčteme, že $a + b = (1101100)_{-2}$.
A opravdu, $(-2)^6 + (-2)^5 + (-2)^3 + (-2)^2 = 64 - 32 - 8 + 4 = \underline{28} = 9 + 19$.

- Sečtěme nyní čísla $a = -3 = (1101)_{-2}$ a $b = -5 = (1111)_{-2}$:

<table>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>b</td></tr>
<tr><td>||</td><td>||</td><td>|</td><td>||</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(17)

Proto $a + b = (1000)_{-2}$. A opravdu, $(-2)^3 = \underline{-8} = -3 + (-5)$.

2.2 Nalezení čísla opačného v negabinární číselné soustavě

K danému číslu z hledáme číslo opačné. Je zřejmé, že $-z = (-2+1) \cdot z$. Můžeme proto určit $-z$ jako soucet čísel z a $-2z$. Násobení číslem -2 je lehké, stačí připsat nulu na konec ciferného zápisu. Předvedeme na příkladech:

- Nalezneme číslo opačné k číslu $z = 21 = (10101)_{-2}$.

<table>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>z</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>-2z</td></tr>
<tr><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>-z</td></tr>
</table>

(18)

Proto $-z = (111111)_{-2}$. A opravdu, $-32 + 16 - 8 + 4 - 2 + 1 = -21$.

- Nalezneme číslo opačné k číslu $z = 7 = (11011)_{-2}$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \text{z} \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \text{-2z} \\
\hline\hline
\vert & \vert\vert & \vert & \vert & \vert\vert & \vert & \text{-z} \\
\hline
0 & 0 & \vert & 0 & 0 & \vert & \text{-z} \\
\hline
\end{array} \tag{19}$$

Proto $-z = (1001)_{-2}$. A opravdu, $-8 + 1 = -7$.

2.3 Násobení v negabinární číselné soustavě

Násobení v negabinární soustavě je analogické násobení v desítkové soustavě. Násobíme-li číslo $a = (a_n, \ldots, a_0)_{-2}$ číslem $(-2)^k = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{-2}$, pak stačí přidat na konec ciferného zápisu k nul:

$$(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{-2} \cdot (a_n, \ldots, a_0)_{-2} = (a_n, \ldots, a_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{-2}.$$

Proto pro součin čísel $a = (a_n, \ldots, a_0)_{-2}$ a $b = (b_k, \ldots, b_0)_{-2}$ platí

$$a \cdot b = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (b_k, \ldots, b_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{i \text{ nul}})_{-2} \tag{20}$$

Demonstrujeme na příkladech

- Vynásobíme čísla $a = 5 = (101)_{-2}$ a $b = 3 = (111)_{-2}$.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & 0 & 1 & & (=a) \\
\cdot & & & 1 & 1 & 1 & & (=b) \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & & (=x_1) \\
+ & & & & 0 & & & (=x_2) \\
+ & 1 & 1 & 1 & & & & (=x_3)
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(101)_{-2} \cdot (111)_{-2} = 1 \cdot (111)_{-2} + 0 \cdot (1110)_{-2} + 1 \cdot (11100)_{-2} = (111)_{-2} + (11100)_{-2}$$

Můžeme sečíst schematicky:

0	0	1	1	1	x_1
1	1	1	0	0	x_3
|	|	||	|	|	$x_1 + x_3$
|	0	0	|	|	$x_1 + x_3$

Proto $a \cdot b = (110011)_{-2} = 16 - 2 + 1 = 15 = 5 \cdot 3$.

- Vynásobíme čísla $a = -9 = (1011)_{-2}$ a $b = 11 = (11111)_{-2}$.

$$(1011)_{-2} \cdot (11111)_{-2} = (11111)_{-2} + (111110)_{-2} + (11111000)_{-2}$$

Můžeme sečíst schematicky:

0	0	0	1	1	1	1	1	x_1
0	0	1	1	1	1	1	0	x_2
1	1	1	1	1	0	0	0	x_4
|	|	||	|||	|||	||	||	|	$x_1 + x_2 + x_4$
|	0	0	||	|	|	0	|	$x_1 + x_2 + x_4$
|	0	-|	0	|	|	0	|	$x_1 + x_2 + x_4$
|	|	|	0	|	|	0	|	$x_1 + x_2 + x_4$

Proto $a \cdot b = (11101101)_{-2} = -128 + 64 - 32 - 8 + 4 + 1 = -99 = (-9) \cdot 11$.

3 Komplexní číselná soustava

Úmluva 2 Pozor! Na rozdíl od jiných kapitol, v kterých se i objevuje jako index posloupnosti, budeme v této kapitole symbolem i značit imaginární část komplexního čísla.
Protože a již používame pro značení posloupnosti budeme komplexní číslo místo obvyklého značení $z = a + bi$ značit ve většině případů $z = u + vi$, kde u je celočíselná část a v je imaginární část komplexního čísla.

Definice 6 *Množinu $\mathbb{Z}[i]$ nazýváme množinou Gauusovských celých čísel. Je definována následovně:*

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

*[***b***]*

Definice 7 *Komplexní číselná soustava je číselná soustava na okruhu $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ o základu $\{(-1+i)^j\}_{j=0}^{\infty}$ s množinou cifer $C = \{0, 1\}$.*

Komplexní číselná soustava je tedy relace φ mezi gaussovskými celými čísly a posloupnostmi jedniček a nul, kde $z \in \mathbb{Z}[i]$ je v relaci s posloupností $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ právě tehdy, když

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} a_i \cdot (-1+i)^j.$$

Ciferným zápisem Gaussova celého čísla v komplexní číselné soustavě je posloupnost čísel z množiny $C = \{0, 1\}$. Fakt, že $\varphi(z) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $a_i = 0$ pro $i > k$, budeme symbolicky zapisovat $\varphi(z) = (a_k \dots a_0)_{(-1+i)}$. Pokud nebude moci dojít k omylu, tento zápis ještě zjednodušíme na $z = (a_k \dots a_0)_{(-1+i)}$. Například $7 - 2i = (101001)_{(-1+i)}$, neboť $7 - 2i = 1 \cdot (-1+i)^5 + 0 \cdot (-1+i)^5 + 0 \cdot (-1+i)^4 + 1 \cdot (-1+i)^3 + 0 \cdot -1+i)^2 + 0 \cdot (-1+i)^1 + 1 \cdot (-1+i)^0 = (4-4i) + (2+2i) + 1 = 7-2i$.

Prozkoumáme základní vlastnosti této číselné soustavy. Nejprve ukážeme, že v komplexní číselné soustavě dokážeme najít ciferný zápis pro libovolné gaussovské celé číslo.

Poznámka 4 Dělení v $\mathbb{Z}[i]$ základem soustavy provádíme následovně:

$$\forall z \in \mathbb{Z}[i] : \quad \frac{z}{-1+i} = \frac{(v-u) - (u+v)i}{2}$$

Protože:

$$\frac{z}{-1+i} = \frac{u+vi}{-1+i} = \frac{u+vi}{-1+i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(u+vi) \cdot (1+i)}{(-1+i) \cdot (1+i)} = \frac{(u-v) + (u+v)i}{-2} = \frac{(v-u) - (u+v)i}{2}$$

Protože jsme zatím gaussovská celá čísla neprozkoumali, definujme jako zbytek libovolné číslo z gaussovských celých čísel bez omezení, na rozdíl od dělení se zbytkem u celých čísel, kde zbytek musí být menší než dělitel. U gaussovských celých čísel jsme totiž nedefinovali relaci měnší/větší.

Všimněme si, že pro libovolné $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ a $c+di \in \mathbb{Z}[i]$ existují $e+fi \in \mathbb{Z}[i]$ a $g \in \mathbb{Z}[i]$ takové, že

$$a + bi = (c + di)(e + fi) + g.$$

Číslo $e + fi$ můžeme zvolit libovolně a $g \in \mathbb{Z}[i]$ je pak dáno jednoznačně rovností $g = (a + bi) - (c + di)(e + fi)$

Definice 8 *(Zbytek po dělení číslem v $\mathbb{Z}[i]$)*
Jestliže podíl dvou gaussovských celých čísel nepatří do množiny gaussovských celých čísel, pak si můžeme vypomoci zbytkem po dělení, který v této kapitole označujeme $g \in \mathbb{Z}[i]$. Nechť $a+bi$ a $c+di$ jsou gaussovská celá čísla. Nechť $a+bi$, $c+di$ a $e+fi$ jsou gaussovská celá čísla. Zbytkem po dělení čísla $a+bi$ číslem $c+di$ nazveme číslo $g \in \mathbb{Z}[i]$ splňující

$$\frac{a+bi}{c+di} = e + fi \quad zb.\ g$$

$$a + bi = (c + di)(e + fi) + g.$$

Můžeme si rozmyslet, existuje nekonečně mnoho zbytků po dělení čísla $a + bi$ číslem $c + di$, neboť máme nekonečně mnoho možností jak zvolit číslo $e + fi$. Proto zavedeme horní celou část komplexního čísla.

Definice 9 *(Horní celá část v $\mathbb{C}$) Nechť $\lceil x \rceil$ je horní celá část reálného čísla x. Horní ceou částí komplexního čísla $x + yi$ nazveme gaussovské celé číslo, které budeme značit $\lceil x + yi \rceil$, splňující*

$$\lceil x + yi \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil\, i$$

Věta 5 *Nechť $a+bi$, $e+fi$ a g jsou gaussovská celá čísla splňující $a+bi = (-1+i)(e+fi)+g$. Jestliže*

$$e + fi = \left\lceil \frac{a+bi}{-1+i} \right\rceil \qquad ((e + fi) \in \mathbb{Z}[i]),$$

pak zbytek $g \in \{0, 1\}$.

Důkaz Pro takto definovaný zbytek g platí:

$$a + bi = (-e - f) + (e - f)i + g$$

Odtud

$$g = (a + f + e) + (f + b - e)i \tag{21}$$

Vyjádříme e a f:

$$e + fi = \left\lceil \frac{a+bi}{-1+i} \right\rceil = \left\lceil \frac{(b-a) - (a+b)i}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil i$$

Proto

$$e = \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil \quad \wedge \quad f = \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil$$

Po dosazení f a e do rovnice (21) dostáváme:

$$g = \left(a + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil \right) + \left(b - \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil \right) i$$

jelikož $b \in \mathbb{Z}$, můžeme si dovolit zapsat:

$$b - \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil = - \left\lceil \frac{b-a}{2} - b \right\rceil = - \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil$$

a proto:

$$g = \left(a + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil \right) + \left(- \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil \right) i$$

$$g = \left(a + \left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil \right)$$

$$g = \left(\left\lceil \frac{-a-b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{b+a}{2} \right\rceil \right)$$

A protože pro libovolné reálné x platí $\lceil -x \rceil = - \lfloor x \rfloor$,

$$g = \left(- \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{b+a}{2} \right\rceil \right)$$

nemusíme dlouho přemýšlet a všimneme si, že se jedná o rozdíl horní celé části a dolní celé části racionálního čísla $\frac{a+b}{2}$ a tudíž pro zbytek jistě platí:

$$g = \begin{cases} 0 & \text{pro } \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{pro } \frac{a+b}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

■

Definice 10 *Norma gaussovského celého čísla*
$N(z) = N(u + vi) = \sqrt{u^2 + v^2}$
Normu si můžeme představit jako vzdálenost v komplexní rovině od $0 + 0i$. Absolutní hodnota je ekvivalent normy pro jednu dimenzi. Zapisujeme-li gaussovské celé číslo do absolutní hodnoty, hledáme její normu.

Poznámka 5 Stejně jako při umocnění nenulového celého čísla roste jeho norma (vzdálenost od 0), tak i při umocnění nenulového gaussovského čísla roste jeho norma. Plyne to okamžitě ze vztahu pro umocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru a toho, že norma nenulového gaussovského celého čísla je rovna nejméně odmocnině ze dvou

Ukažme si to na příkladu

Příklad 3
$z = (-1 + i)$

j	z^j	z^j	$N(z^j)$
0	$(-1+i)^0$	1	1
1	$(-1+i)^1$	$-1+i$	$\sqrt{2}$
2	$(-1+i)^2$	$-2i$	2
3	$(-1+i)^3$	$2+2i$	$2\sqrt{2}$
4	$(-1+i)^4$	-4	4

(22)

■

Poznámka 6 Uvědomme si, že stejně jako u dělení celých čísel, tak i při dělení gaussovských celých čísel platí následující: Jestliže je norma dělitele větší než 1, pak výsledný podíl bude mít jistě menší normu než dělenec. Norma podílu je podíl norem dělence a dělitele.

Proveďme příklad pro znázornění.

Příklad 4
$a = 3 + 2i \quad b = 1 + 2i$
$N(a) = \sqrt{13} \quad N(b) = \sqrt{5}$
$\frac{a}{b} = \frac{3+2i}{1+2i} = \frac{(3+2i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \frac{7-4i}{5}$
$N\left(\frac{3+2i}{1+2i}\right) = \sqrt{\frac{65}{25}} = \sqrt{\frac{13}{5}} = \frac{N(a)}{N(b)} < \sqrt{13}$ ■

Věta 6 *Pro každé $z \in \mathbb{Z}[i]$ existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} : z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (-1+i)^j$.*
To jest $D(\varphi) = \mathbb{Z}[i]$

Důkaz Z důkazu 3 již víme, že při správném postupu při děleni jsme schopni zajistit, aby byl zbytek po dělení číslem $(-1 + i)$ vždy $\in \{0, 1\}$.
Protože $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ je euklidovský obor integrity, jistě existují čísla $z_i \in \mathbb{Z}[i], a_i \in \{0, 1\}$ taková, že:

$$\begin{aligned} z = z_0 &= z_1 \cdot (-1+i) + a_0 \\ z_1 &= z_2 \cdot (-1+i) + a_1 \\ z_2 &= z_3 \cdot (-1+i) + a_2 \\ &\vdots \\ z_{k-1} &= z_k \cdot (-1+i) + a_{k-1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{23}$$

V případě, že $z_1 = 0$, je jasné, že $z = a_0 = a_0(-2)^0$, kde $a_0 \in \{0, 1\}$. Dokazované tvrzení tak v tomto případě platí. Co když ale $z_0 \neq 0$?

Dokážeme, že pro dost velké n je $z_{n+1} = 0$. Z (23) je zřejmé, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|z_k| = \left| \frac{z_{k-1} - a_{k-1}}{-1 + i} \right| \tag{24}$$

Z poznámky 6 vyplývá následující:

Dokud $|z_{k-1} - a_{k-1}| > |-1+i|$, pak se pro každé k bude norma $|z_k|$ zmenšovat. Co se stane v případě, že $|z_{k-1} - a_{k-1}| \leq |-1+i|$? Takových případů je 9.

(a) $z_k = 0$

(b) $z_k = 1$, pak $z_{k+1} = 0 \quad a_{k+1} = 1$, viz. (a)

(c) $z_k = i$, pak $z_{k+1} = 1 \quad a_{k+1} = 1$, viz. (b)

(d) $z_k = -1 + i$, pak $z_{k+1} = 1 \quad a_{k+1} = 0$, viz. (b)

(e) $z_k = -i$, pak $z_{k+1} = i \quad a_{k+1} = 1$, viz. (c)

(f) $z_k = -1 - i$, pak $z_{k+1} = i \quad a_{k+1} = 0$, viz. (c)

(g) $z_k = 1 + i$, pak $z_{k+1} = -i \quad a_{k+1} = 0$, viz. (e)

(h) $z_k = -1$, pak $z_{k+1} = 1 + i \quad a_{k+1} = 1$, viz. (g)

(i) $z_k = 1 - i$, pak $z_{k+1} = -1 \quad a_{k+1} = 0$, viz. (h)

Dokázali jsme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $z_{n+1} = 0$. Z toho plyne, že $z_n = a_n$, odtud $z_{n-1} = a_n \cdot (-2)^1 + a_{n-1}, \ldots, z = z_0 = a_n \cdot (-2)^n + a_{n-1} \cdot (-2)^{n-1} + \cdots + a_0$. Pokud zvolíme $a_i = 0$ pro $i > n$, pak $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (-2)^i$.

■

Poznámka 7 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v komplexní číselné soustavě

1. Nechť z je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $j = 0$ je počáteční hodnota algoritmu

2. Provedeme následující operaci:
   $x = \frac{(v_j - u_j) - (u_j + v_j)i}{2}$
   Jestliže $x \in \mathbb{Z}[i]$, pak $z_{j+1} = x \quad a_{j+1} = 0$
   V opačném případě $z_{j+1} = \left\lceil \frac{(v_j - u_j) - (u_j + v_j)i}{2} \right\rceil \quad a_{j+1} = 1$

3. Opakujeme operaci dokud $z_{j+1} \neq 0$, nechť n je počet iterací. (n je jistě konečné, viz. 3)

4. $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, kde $a_j = 0$ pro každé $j > n$, splňuje požadavek $z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (-1 + i)^j$

3.1 Sčítání gaussovských celých čísel v komplexní číselné soustavě

Sčítání čísel v komplexní číselné soustavě můžeme provádět podle schématu popsaného v následujícím příkladu.

Poznámka 8 Budeme postupovat obdobně jak u negabinární číselné soustavy. Určíme si pravidla, která platí pro komplexní číselnou soustavu a následně nám ulehčí sčítání.
Pro lehčí orientaci v rovnostech si ukažme tabulku pár mocnin čísla $(-1+i)$ a zároveň se pro přehlednost domluvme, že toto číslo budeme v některých případech po zbytek kapitoly značit β.

β^0	β^1	β^2	β^3	β^4
1	-1+i	-2i	2+2i	-4

(25)

Protože $4 \cdot \beta^k + \beta^{k+4} = 4 \cdot \beta^k + (-4) \cdot \beta^k = 0$, platí následující:

|	0	0	0	||||	a+b
0	0	0	0	0	a+b

(26)

Protože $2 \cdot \beta^k + 2 \cdot \beta^{k+1} + \beta^{k+2} = 2 \cdot \beta^k + (-2+2i) \cdot \beta^k + (-2i)\beta^k = 0$, platí následující:

|	||	||	a+b
0	0	0	a+b

(27)

Protože $2 \cdot \beta^k - \beta^{k+2} - \beta^{k+3} = 2 \cdot \beta^k - (-2i) \cdot \beta^k - (2+2i) \cdot \beta^k = 0$, platí následující:

0	0	0	||	a+b
|	|	0	0	a+b

(28)

- Zvolme $a = 4+3i$ a $b = 3-4i$. Dle výše uvedeného algoritmu nalezneme ciferný zápis těchto gaussovských celých čísel $4+3i = (1100111)_{(-1+i)}$ a $3-4i = (111101)_{(-1+i)}$. Cifry zapíšeme pod sebe do tabulky a do řádku pod nimi naznačíme pomocí čárek, kolik má součet $a+b$ příslušných mocnin čísla $(-1+i)$:

1	1	0	0	1	1	1	a
0	1	1	1	1	0	1	b
|	||	|	|	||	|	||	a+b

(29)

Vzhledem k (26), (27) a (28) můžeme v úpravách Tabulky (29) pokračovat následujícím způsobem:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \text{a} & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \text{b} & \\
\hline
\hline
0 & 0 & \vert & \vert\vert & \vert & \underline{\vert} & \underline{\vert\vert} & \vert & \underline{\vert\vert} & \text{a+b} & (28) \\
0 & 0 & \vert & \vert\vert & \underline{\vert} & \underline{\vert\vert} & \underline{\vert\vert\vert} & \vert & 0 & \text{a+b} & (27) \\
\underline{0} & \underline{0} & \vert & \underline{\vert\vert} & 0 & 0 & \vert & \vert & 0 & \text{a+b} & (27) \\
\vert & \vert & \vert & 0 & 0 & 0 & \vert & \vert & 0 & \text{a+b} & \\
\hline
\end{array} \qquad (30)$$

Z posledního řádku vyčteme, že $a + b = (111000110)_{(-1+i)}$.
A opravdu, $\beta^8 + \beta^7 + \beta^6 + \beta^2 + \beta^1 = 16 - 8 - 8i + 8i - 2i - 1 + i = \underline{7 - i} = 4 + 3i + 3 - 4i$

3.2 Nalezení opačného čísla v komplexní číselné soustavě

K danému číslu z hledáme číslo opačné. Když se zamyslíme jak součtem různých mocnin čísla $(-1 + i)$ dojít k výsledku -1, po chvíli dojedme k následujícímu: $\beta^0 + \beta^1 + \beta + 1 + \beta 2 = 1 + (-1 + i) + (-1 + i) + (-2i) = -1$ Uvědomme si, že násobení mocninou čísla $(-1+i)^k, k \in \mathbb{N}_0$ znamená posunutí všech cifer o k míst (doleva) a připsání k nul na konec ciferného zápisu. Umíme-li už gaussovské celé čísla sčítat, pak nalezení čísla opačného už nebude takový problém. Uvedeme příklad.

- Nalezneme číslo opačné k číslu $z = -1 + 2i = (11001)_{(-1+i)}$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & z \\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta \cdot z \\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta \cdot z \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \beta^2 \cdot z \\
\hline
\hline
\underline{\vert} & \underline{\vert\vert\vert} & \underline{\vert\vert\vert} & \underline{\vert} & \underline{\vert} & \underline{\vert\vert} & \vert & -z \\
\hline
0 & \underline{\vert} & \underline{\vert} & 0 & \underline{\text{-}\vert} & 0 & \vert & -z \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \vert & 0 & \vert & -z \\
\hline
\end{array} \qquad (31)$$

Proto $-z = (101)_{(-1+i)}$. A opravdu, $\beta^0 + \beta^2 = \underline{1 - 2i} = -(z) = -(-1 + 2i)$.

Poznámka 9 Jistě některé z čtenářů napadne otázka, zda-li by nějak jednoduše šlo najít k gaussovskému číslu jeho číslo komplexně sdružené v reprezentaci komplexní číselné soustavy. Bez převádění do desítkové soustavy a zpět bychom se však při takovém pokusu bohužel neobešli. Uvědomíme-li si, že na rozdíl od hledání opačného čísla, kde stačí číslo vynásobit číslem -1, u hledání komplexně sdruženého čísla je proces těžší. Číslo, kterým bychom naše gaussovské číslo museli přenásobit je závisle právě na tomto čísle. Nelze najít obecnou formuli jako v případě hledání opačného čísla (vynásob číslo číslem -1).

3.3 Násobení v komplexní číselné soustavě

Násobení v komplexní soustavě je analogické násobení v desítkové soustavě. Násobíme-li číslo $a = (a_n, \ldots, a_0)_{(-1+i)}$ číslem $(-1+i)^k = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{(-1+i)}$, pak stačí přidat na konec ciferného zápisu k nul:

$$(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{(-1+i)} \cdot (a_n, \ldots, a_0)_{(-1+i)} = (a_n, \ldots, a_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ nul}})_{(-1+i)}$$

Proto pro součin čísel $a = (a_n, \ldots, a_0)_{(-1+i)}$ a $b = (b_k, \ldots, b_0)_{(-1+i)}$ platí

$$a \cdot b = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (b_k, \ldots, b_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{i \text{ nul}})_{-2} \tag{32}$$

Demonstrujeme na příkladech

- Vynásobíme čísla $a = (4 - i) = (111010111)_{(-1+i)}$ a $b = (1 - 2i) = (101)_{(-1+i)}$.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & (=\mathrm{a}) \\
\cdot & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & (=\mathrm{b}) \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & (=x_1) \\
+ & & & & & & & & & & 0 & & (=x_2) \\
+ & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & & & (=x_3)
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(111010111)_{(-1+i)} \cdot (101)_{(-1+i)}$$

$$=$$

$$1 \cdot (111010111)_{(-1+i)} + 0 \cdot (1110101110)_{(-1+i)} + 1 \cdot (11101011100)_{(-1+i)}$$

$$=$$

$$(111010111)_{(-1+i)} + (11101011100)_{(-1+i)}$$

Můžeme sečíst schematicky:

0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	x_1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	x_3
$\vert$	$\underline{\vert}$	$\underline{\vert\vert}$	$\vert$	$\underline{\vert\vert}$	$\underline{0}$	$\underline{\vert\vert}$	$\vert$	$\underline{\vert\vert}$	$\vert$	$\vert$	$x_1 + x_3$
$\vert$	$\vert\vert$	$\underline{\vert\vert\vert}$	$\vert$	0	$\vert$	$\underline{\vert\vert\vert}$	$\vert$	0	$\vert$	$\vert$	$x_1 + x_3$
$\underline{\vert}$	$\underline{\vert\vert}$	$\underline{\vert\vert}$	$\vert$	0	$\vert$	$-\vert$	$\vert$	0	$\vert$	$\vert$	$x_1 + x_3$
0	0	0	$\underline{\vert}$	$\underline{0}$	$\vert$	$\underline{-\vert}$	$\vert$	0	$\vert$	$\vert$	$x_1 + x_3$
0	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0	$\underline{-\vert}$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	$\vert$	$\vert$	$x_1 + x_3$
0	$\underline{-\vert}$	$\underline{-\vert}$	0	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	$\vert$	$\vert$	$x_1 + x_3$
$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	$\vert$	$\vert$	$x_1 + x_3$

Výpočtem ověřme.

$(11101111011)_{(-1+i)} = (-32i) + (-16+16i) + (16) + (8i) + (4-4i) + (-4) + (2+2i) + (-1+i) + (1) = \underline{2-9i} = 4 - 2 - i - 8i = (4-i)\cdot(1-2i) = a \cdot b$

Výsledek je správně.

4 Negafibonacciho číselná soustava

Definice 11 *Negafibonacciho číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *o základu* $\{F_{-(i+1)}\}_{i=0}^{\infty}$ *(kde F_{-i} je i-tý člen negafibonacciho posloupnosti) s množinou cifer* $C = \{0, 1\}$.

Poznámka 10 Nenechme se zmást symbolem '−' u indexu členu negafibonacciho posloupnosti. Používá se pro odlišení od členů fibonacciho posloupnosti. Nejde však o záporný index! Proto píšeme relativní indexy (např. $(i+1)$) do závorky.

Definice 12 *NegaFibonacciho posloupnost*
Je nekonečná posloupnost přirozených čísel definována rekurentní formulí:

$$F_{-0} = 0, \quad F_{-1} = 1, \quad F_{-n} = F_{-(n-2)} - F_{-(n-1)}$$

Z definice 12 si lehce rozmyslíme, že každý další člen bude střídavě záporný kladný a jeho absolutní hodnota bude větší než u předchozích členů.
NegaFibonacciho posloupnost je velice podobná Fibonacciho posloupnosti.

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot F_n$$

Příklad 5

$$F_{-2} = F_{-0} - F_{-1} = 0 - 1 = -1$$

$$F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 1 - (-1) = 2$$

$$F_{-4} = F_{-2} - F_{-3} = -1 - 2 = -3$$

$$\vdots$$

$$\{F_{-(i+1)}\}_{i=0}^{\infty} = \{1, -1, 2, -3, 5, -8, 13, -21, 34, -55, 89, \dots\}$$

■

Úmluva 3 V negafibonacciho číselné soustavě zapisujeme: $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_F$

Poznámka 11 Podle definice se jedná o nejednoznačnou číselnou soustavu, což si ukážeme v následujícím příkladu. Pokud však správně zavedeme podmínku pro reprezentaci čísla v této číselné soustavě, dostaneme jednoznačnou číšelnou soustavu. Viz. důkaz.

Příklad 6
Každé číslo, vezměme si například 27, můžeme zapsat více způsoby (nekonečně mnoha).

$$
\begin{aligned}
27 &= 34-8+1 &&= (100100001)_F \\
&= 34-21+13+1 &&= (111000001)_F \\
&= 89-55-8+1 &&= (11000100001)_F \\
&= 233-144-55-8+1 &&= (1101000100001)_F
\end{aligned}
$$

■

Věta 7 *Obměna Zeckendorfovy věty pro fibonacciho kód.* [**d**]
Pro každé celé číslo existuje právě jedna posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *kdy*

- $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot F_{-(i+1)}$, *tj.* $D(\varphi) = \mathbb{Z}$
- $a_k \cdot a_{k+1} = 0$ *(tj. v posloupnosti nejsou nikdy dvě jedničky vedle sebe)*

Důkaz Buď libovolné $z \in \mathbb{Z}$ dáno. Rozdělme si jej na případy.

- $z = 0$ V tomhle případě klademe každý člen posloupnosti $a_i = 0$
- $z < 0$ Označme $n \in \mathbb{N}$ nejmenší index, pro který platí $z > -F_{-n}$ a položme $a_{n-2} = 1$ (poznámka : $(n-2)$ namísto $(n-1)$, protože základ je posunut $\{F_{-(i+1)}\}_{i=0}^{\infty}$). Takový index jistě najdeme, protože z negafibonacciho posloupnosti lze vybrat posloupnost vybranou, která je nekonečná a klesající. Nyní uvažujme o čísle $z_1 = -F_{-(n-1)} + z$. Uvědomme si, že $F_{-(n-1)}$ je záporné, protože F_{-n} je kladné ($z > -F_{-n}$). Zároveň víme, že $-F_{-(n-1)}$ je menší než $-2z$. Jak toto víme? Dokážeme sporem. Předpokládejme, že

$$-F_{-(n-1)} \geq -2z$$

$$F_{-(n-1)} \leq 2z$$

$$-F_{-(n-2)} \leq \frac{F_{-(n-1)}}{2} \leq z$$

  Zde vidíme, že by existovalo $(n-2)$, pro které platí $z > -F_{-(n-2)}$, což je v rozporu s podmínkou, že n musí být nejmenší. Když víme, že $-F_{-(n-1)}$ je menší než $-2z$, pak jistě bude platit $|z_1| < |z|$. S číslem z_1 provedeme znova stejnou úvahu, kde dvojice z_1, z_2 vystřídá dvojici z, z_1. Posloupnost čísel z_k se v konečném počtu kroků předchozích úvah dostane k nule. V případě, že nějaké $z_i > 0$, se pomocí vysvětlivek v $z > 0$ taky v následujícím kroku přiblížíme nule.

- $z > 0$ Označme $n \in \mathbb{N}$ nejmenší index, pro který platí $z \leq -F_{-n}$ a položme $a_{n-2} = 1$. Takový index jistě najdeme, protože z negafibonacciho posloupnosti lze vybrat posloupnost vybranou, která je nekonečná a roustoucí. Nyní uvažujme o čísle $z_1 = -F_{-(n-1)} + z$. Uvědomme si, že $F_{-(n-1)}$ je kladné, protože F_{-n} je záporné ($z \leq -F_{-n}$). Zároveň víme, že $-F_{-(n-1)}$ je větší než $-2z$. Jak toto víme? Dokážeme sporem. Předpokládejme, že

$$-F_{-(n-1)} \leq -2z$$

$$F_{-(n-1)} \geq 2z$$
$$-F_{-(n-2)} \geq \frac{F_{-(n-1)}}{2} \geq z$$

Zde vidíme, že by existovalo $(n-2)$, pro které platí $z \leq -F_{-(n-2)}$, což je v rozporu s podmínkou, že n musí být nejmenší. Když víme, že $-F_{-(n-1)}$ je větší než $-2z$, pak jistě bude platit $|z_1| < |z|$.

Takto zkonstruována posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ nebude mít nikdy dvě jedničky vedle sebe. V případě kdyby byly, pak jsme volili špatně nejmenší n.
Protože $F_{-n}+F_{-(n-1)} = F_{-(n-2)}-F_{-(n-1)}+F_{-(n-1)} = F_{-(n-2)}$, tj. $(\ldots 011 \ldots)_F = (\ldots 100 \ldots)$
Snadno si rozmyslíme, že nejmenší n lze zvolit v každém kroce jednoznačně, a proto je tato reprezentace jednoznačná. ■

Poznámka 12 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v negafibonacciho číselné soustavě

1. Nechť z je číslo, které chceme reprezentovat, $z_0 = z$ a $k = 0$ je počáteční hodnota algoritmu
2. Jestliže je $z_0 = 0$, končíme a zapíšeme 0
3. V případě, že z_k je kladné, pak najdeme nejmenší n pro které platí $z_k \leq -F_{-n}$, v případě, že je záporné hledáme nejmenší n, pro které platí $z_k > -F_{-n}$.
4. Zapíšeme si na pozici $a_{n-2} = 1$.
5. Spočítáme si $z_{k+1} = -F_{-(n-1)}+z_k$. Jestliže je $z_{k+1} = 0$, pak pro ostatní pozice posloupnosti zapíšeme $a_i = 0$, kde $i > 0$ a $i < (n-2)$.
6. V případě, že $z_{k+1} \neq 0$, algoritmus opakujeme.

4.1 Sčítání celých čísel v negafibonacciho číselné soustavě

Sčítání čísel v negafibonacciho číselné soustavě můžeme provádět podle schématu popsaného v následujícím příkladu.

Poznámka 13 Následující rovnosti nám pomůžou v sčítání čísel v negafibonacciho číselné soustavě.

Protože $F_{-k} - F_{-(k+1)} - F_{-(k+2)} = 0$ (z definice), platí následující:

|	|	0	a+b
0	0	|	a+b

(33)

Protože $\underline{F_{-(k+3)} - 2 \cdot F_{-(k+1)} + F_{-k}} = -F_{-(k+2)} + F_{-(k+1)} - 2 \cdot F_{-(k+1)} + F_{-k} = -F_{-(k+2)} - F_{-(k+1)} + F_{-k} = 0$, platí následující:

<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>||</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(34)

Protože

$$\underline{-F_{-(k+4)} + 3 \cdot F_{-(k+2)} - F_{-k}} = F_{-(k+3)} - F_{-(k+2)} + 3 \cdot F_{-(k+2)} - F_{-k} =$$

$$= \underline{F_{-(k+3)} + 2 \cdot F_{-(k+2)} - F_{-k}} = 2 \cdot F_{-(k+2)} - F_{-(k+2)} + F_{-(k+1)} - F_{-k} = F_{-(k+2)} + F_{-(k+1)} - F_{-k} = 0$$

platí následující:

<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>|||</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>a+b</td></tr>
</table>

a

<table>
<tr><td>|</td><td>||</td><td>0</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(35)

- Zvolme například $a = 17$ a $b = 23$. Dle výše uvedeného algoritmu nalezneme ciferný zápis těchto celých čísel $17 = (1010010)_F$ a $23 = (100101000)_F$.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>a</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>b</td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>0</td><td>a+b</td></tr>
</table>

(36)

Vzhledem k (39), (40) a (41) můžeme v úpravách Tabulky (42) pokračovat následujícím způsobem:

<table>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>a</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>b</td><td></td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>$\underline{|}$</td><td>$\underline{|}$</td><td>0</td><td>|</td><td>0</td><td>a+b</td><td>(39)</td></tr>
<tr><td>$\underline{|}$</td><td>0</td><td>$\underline{|}$</td><td>$\underline{|}$</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>|</td><td>0</td><td>a+b</td><td>(40)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>|||</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>$\underline{|}$</td><td>$\underline{|}$</td><td>0</td><td>a+b</td><td>(39)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>$\underline{|||}$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>a+b</td><td>(41)</td></tr>
<tr><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>|</td><td>a+b</td><td>(41)</td></tr>
</table>

(37)

Z posledního řádku vyčteme, že $a + b = (100010001)_F$.
A skutečně, $F_{-9} + F_{-5} + F_{-1} = 34 + 5 + 1 = \underline{40} = 17 + 23$

Poznámka 14 Kvůli charakteru této soustavy nemůžeme hovořit o hledání opačného čísla ani o násobení čísel. V některých případech bychom se k opačnému číslu dobrali, ale postup nelze generalizovat a najít číslo vždy.

Například si ukážeme jak najít číslo opačné pro číslo $6 = (10001)_F$

	1	0	0	0	1	a	
	$-\vert$	0	0	0	$\underline{-\vert}$	-a	(40)
	$\underline{-\vert}$	$\underline{\vert}$	0	$-\vert\vert$	0	-a	(39)
$\vert$	0	0	0	$\underline{-\vert\vert}$	0	-a	$-2 \cdot F_{-2} = -2 \cdot -1 = 2 = F_{-3}$
$\vert$	0	0	$\vert$	0	0	-a	$-2 \cdot F_{-2} = -2 \cdot -1 = 2 = F_{-3}$

(38)

a opravdu $F_{-6} + F_{-3} = -8 + 2 = -6 = (100100)_F$

5 Faktoriálová číselná soustava

Definice 13 *Faktoriálová číselná soustava je číselná soustava na okruhu* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *o základu* $\{(i+1)!\}_{i=0}^{\infty}$ *s množinou cifer* $C = \mathbb{N}_0$*.*

Poznámka 15 Možná Vás jako čtenáře zarazila množina cifer C, a skutečně se nejedná o žert. Cílem této práce však není najít nejefektivnější řešení, ale prozkoumat teoretické možnosti. Je jasné, že neexistuje dostatek unikátních znaků pro pokrytí celé množiny $\mathbb{N}_0$, proto je tato soustava více teoretická a neuveditelná do praxe. Pro účely této práce nám bude stačit si postačíme s její podmnožinou.

Úmluva 4 Nechť v následující kapitole symboly $A = 10, B = 11, C = 12, ...Z = 35$ označují příslušnou cifru.

Úmluva 5 V faktoriálové číselné soustavě zapisujeme: $\varphi(x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_!$
Hledáme-li relaci k zápornému číslu, pak podobně jak jsme zvyklí v desítkové číselné soustavě, najdeme reprezentaci čísla opačného a zapíšeme znaménko '$-$' před reprezentaci:

$$x < 0$$

$$\varphi(-x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_!$$

$$\varphi(x) = -(\{a_i\}_{i=0}^{\infty})_!$$

Poznámka 16 Je dobré si uvědomit, že bez jistých omezení se nejedná o jednoznačnou číselnou soustavu. Předveďme si pár způsobů jak reprezentovat číslo 10.

$$\begin{array}{rcccl} 10 & = & 10 \cdot 1 & = & (A)_! \\ & & 5 \cdot 2 & = & (50)_! \\ & & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 & = & (120)_! \\ & & \vdots & & \end{array}$$

Věta 8 *Pro každé* $x \in \mathbb{Z} \quad \exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : x = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)! & \textit{pro } x \geq 0 \\ -\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)! & \textit{pro } x < 0 \end{cases}$ *To jest* $D(\varphi) = \mathbb{Z}$

Důkaz Nechť $x \in \mathbb{Z}$ je dáno. Jestliže je $x = 0$, pak je v relaci s $(0)_!$. Jestliže $x < 0$, pak najdeme reprezentaci pro $-x$ a zapíšeme před reprezentaci symbol '$-$'. Nyní dokažme, že pro každé $x > 0$ lze najít reprezentaci v faktoriálové číselné soustavě. Hledejme největší $n \in \mathbb{N}$, pro které platí: $n! \leq x$. Takové jistě najdeme, protože posloupnost $\{(i+1)!\}_{i=0}^{\infty}$ je rostoucí a nekonečná. Následně si zapíšeme $a_{n-1} = \lfloor \frac{x}{n!} \rfloor$ (protože základ soustavy je posunut o index). Jelikož je $x \geq n!$, bude a_{n-1} jistě rovno alespoň 1. Následně uvažujme $x_1 = x - a_{n-1} \cdot n!$ (což je v podstatě zbytek po celočíselném dělení). Protože se jedná o zbytek po dělení, je jasné, že $x_1 < x$, a proto po opakování konečného počtu kroků se dostaneme k $x_k = 0$. ∎

Poznámka 17 Algoritmus pro hledání reprezentace čísla v faktoriálové číselné soustavě

1. Nechť x je číslo, které chceme reprezentovat, $x_0 = x$ a $i = 0$ je počáteční hodnota algoritmu
2. Najdeme nejvyšší n, pro které platí: $n! < x$
3. Provedeme následující operaci:
   $x_i/(n-i)! = a_{n-i-1}\ zb.\ x_{i+1}$, kde $a_i, x_i \in \mathbb{N}_0$
4. Opakujeme operaci dokud $x_{i+1} \neq 0$, nechť n je počet iterací. (n je jistě konečné, viz. důkaz 5)

Definice 14 *Omezená množina velikosti i*

$$C_i = \{k, k \in \mathbb{N}_0, k \leq i\} = \{0, \ldots, i\}$$

Např. $C_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Věta 9 *Jestliže omezíme množinu C (z které vybíráme a_i) následovně: $C = C_{i+1}$ pro a_i, pak bude vyjádření jednoznačné. To jest, každé číslo $x \in \mathbb{N}_0$ lze vyjádřit následovně:*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(i+1)!, \quad a_i \in C_{i+1}$$

Důkaz Pokusme se obecně vyjádřit následující číslo $x = n! - 1$, takovým příkladem může být třeba $x = 5! - 1 = 120 - 1 = 119$. Po zvolení $a_i = max(C_{i+1})$ pro $i < n-1$ a $a_i = 0$ pro $i \geq n-1$ dosáhneme výsledku. Z definice pak $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (i+1)! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-2) \cdot (n-2)!$ Dokažme tuto skutečnost indukcí. V prvních případech ($n \in \{0, 1, 2\}$) je to triviální, ukažme si to na $n = 3$.

$$x = 3! - 1 = 5 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 1 + 4 = 5$$

Jako indukční krok předpokládejme, že tvrzení platí pro n, tj. číslo je $x = n! - 1$. Sumu omezme na $x = \sum_{i=0}^{n-2} a_i \cdot (i+1)!$
Nedodělané Myšlenka je ta, že ukážu na největší číslo vyjádřené určitým počtem cifer a volbou jejich maxima, a "přehoupnutí"na jeden řád výše. Nevím jak validní by to byl důkaz, spíš jde o to aby si to čtenář rozmyslel a uvědomil ... tak možná by to měla být poznámka a ne věta. ∎

Příklad 7

$$z = 77$$

$$77 : 4! = 3\, zb.\, 5$$

$$5 : 3! = 0\, zb.\, 5$$

$$5 : 2! = 2\, zb.\, 1$$

$$1 : 1! = 1\, zb.\, 0$$

$$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 3$$

$$77 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 4!$$

$$77 = 1 + 4 + 72 \quad \checkmark$$

$\blacksquare$

6 Závěr

Závěrečná kapitola obsahuje zhodnocení dosažených výsledků se zvlášť vyznačeným vlastním přínosem studenta. Povinně se zde objeví i zhodnocení z pohledu dalšího vývoje tématu práce, student uvede náměty vycházející ze zkušeností s řešeným tématem a uvede rovněž návaznosti na právě dokončené související práce (řešené v rámci ostatních bakalářských/diplomových prací v daném roce nebo na práce řešené na externích pracovištích).

Odkazy

[1] Bouchala J., *Matematická analýza ve Vesmíru*, strana 3

[2] Keith C., *The Gaussian integers*

[3] Pelantová E. Starosta Š., *Nestandardní zápisy čísel*

[4] Zeckendorfova věta ....