색인 Index

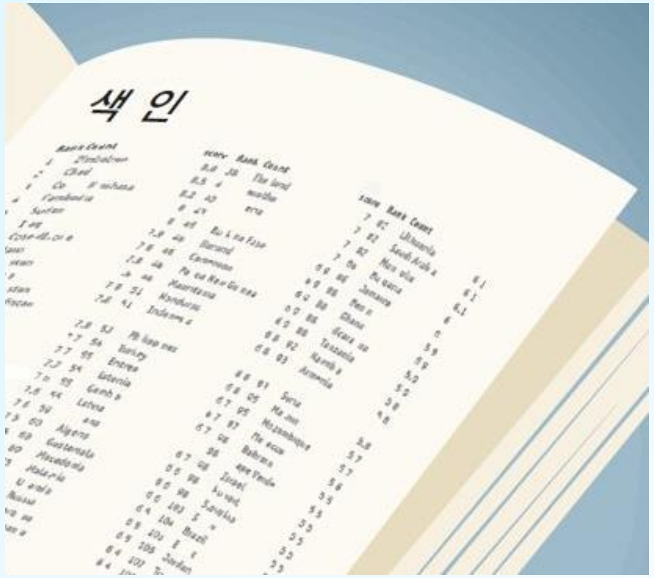
찾아보기

데이터의 홍수 시대

- 매일 250경($2.5*10^{18}$) bytes의 데이터 생성
- 1 Tera byte disk 250만개 분량

찾아보기

- 색인Index: 책의 뒷부분 찾아보기
- 웹 사이트, 파일, 레코드, …



레코드, 키, 검색 트리

레코드Record

- 개체에 대한 모든 정보 포함
- 예: 사람 레코드
    - 주민번호, 이름, 사번, 집주소, 집전화번호, 직장전화번호, 핸드폰번호, 학력사항, 연소득, 부, 모, 형제자매, ...
    - 이들 각각을 필드Field라 한다

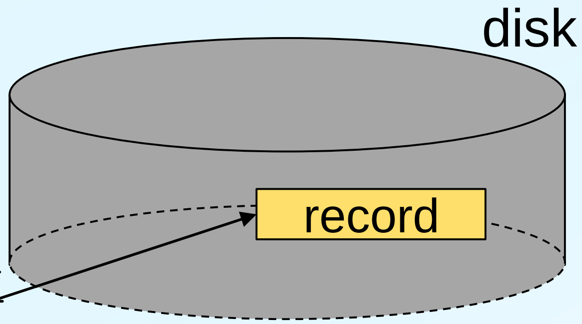
색인의 목적은 개체의 레코드를 검색하는 것

키 Key

주민번호, 이름, **사번**, 집주소, 집전화번호, 직장전화번호,
핸드폰번호, 학력사항, 연소득, 부, 모, 형제자매, ...

색인은 각 레코드를 대표할 수 있는 필드로 만든다

- Field that uniquely identifying a record
- 이런 필드를 키Key라 한다
- 사람의 레코드에서
  - 이름은 key가 될 수 없다
  - key가 될 수 있는 것
    - 학번, 주민번호, 핸드폰번호
    - “생년월일+본적지 주소”(어색하지만 이론상 가능)



색인의 구성

- (key, page#)
- key + 해당 key를 key로 하는 레코드의 page(=block) 번호

ADT Index

키 x를 삽입한다

키 x를 검색한다

키 x를 삭제한다

색인을 위한 자료구조

수업에서 배울 것

Binary search tree

Balanced binary search tree

- AVL tree, Red-Black tree

B-tree

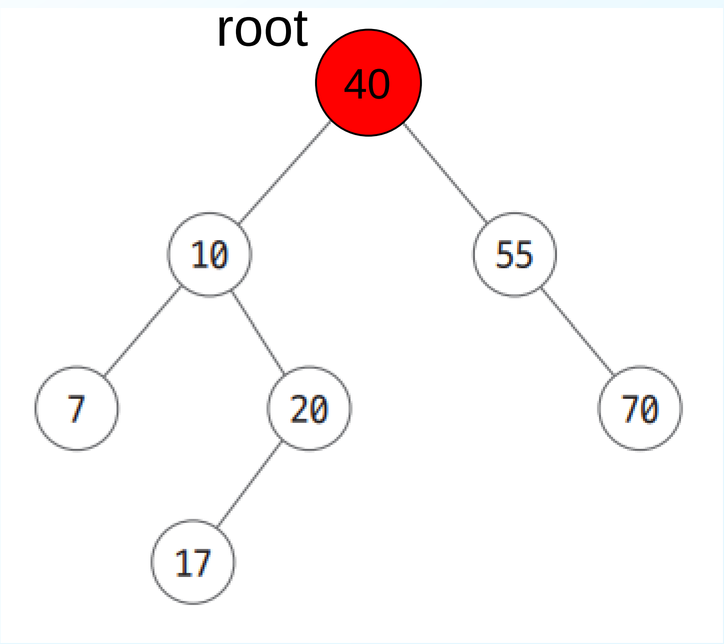
Hash table

✓ 배열도 색인으로 쓸 수는 있으나 매우 비효율적,
실용적 매력 없다

(a, p_1)	(b, p_2)			…					(x, p_n)

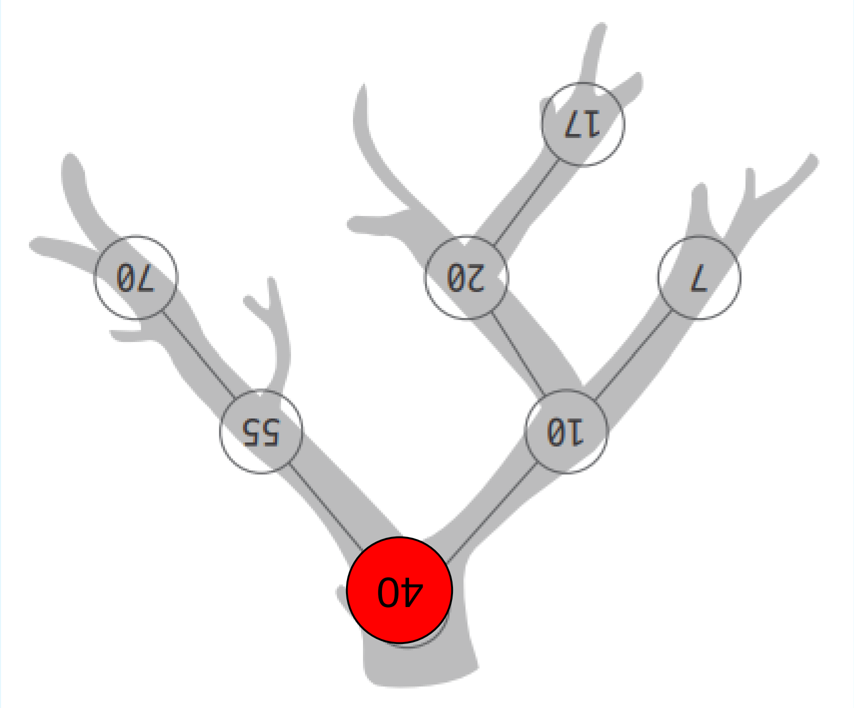
이진검색트리Binary Search Tre

트리 Tree



트리의 예

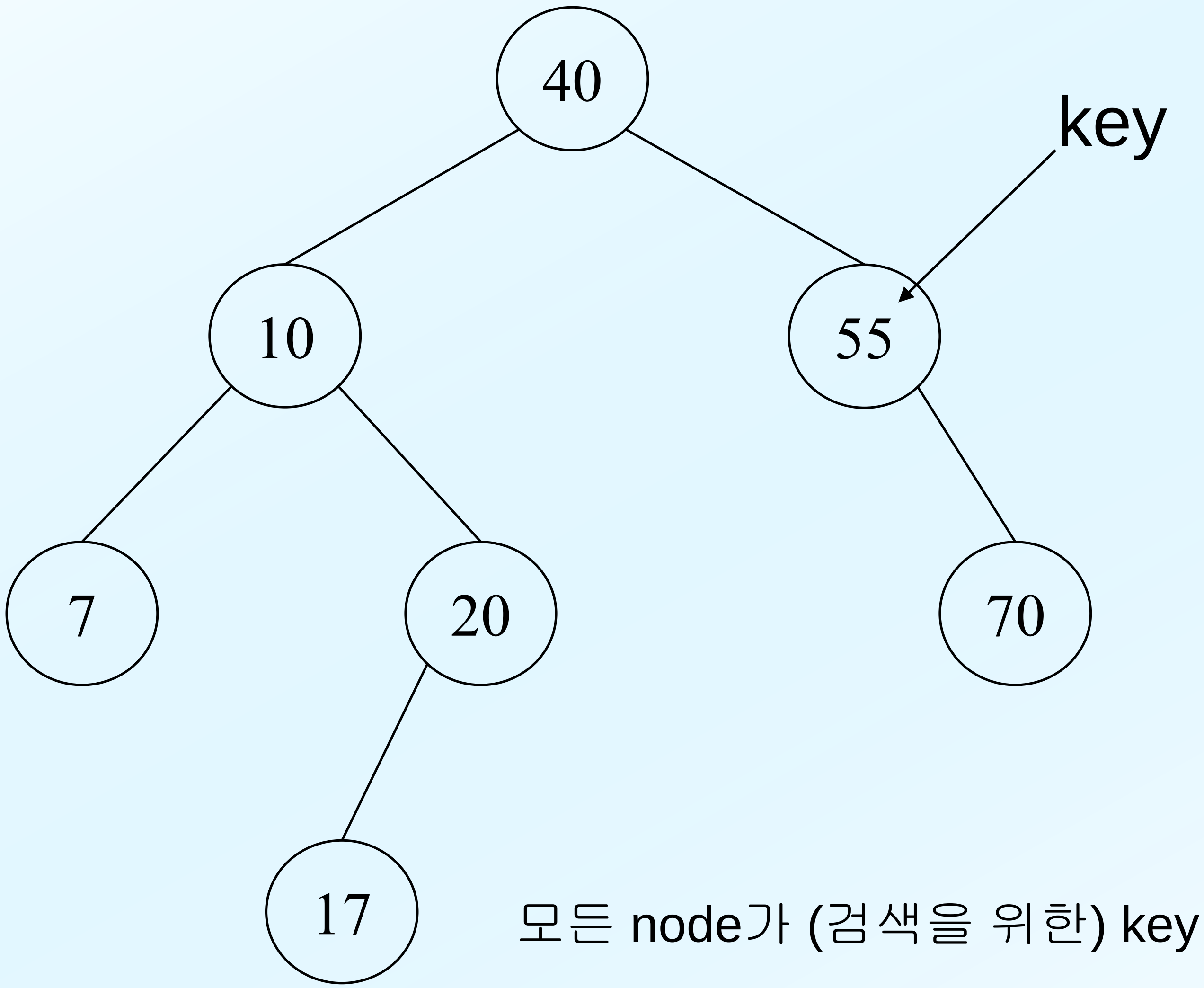
뒤집어 보면



나무처럼 보인다

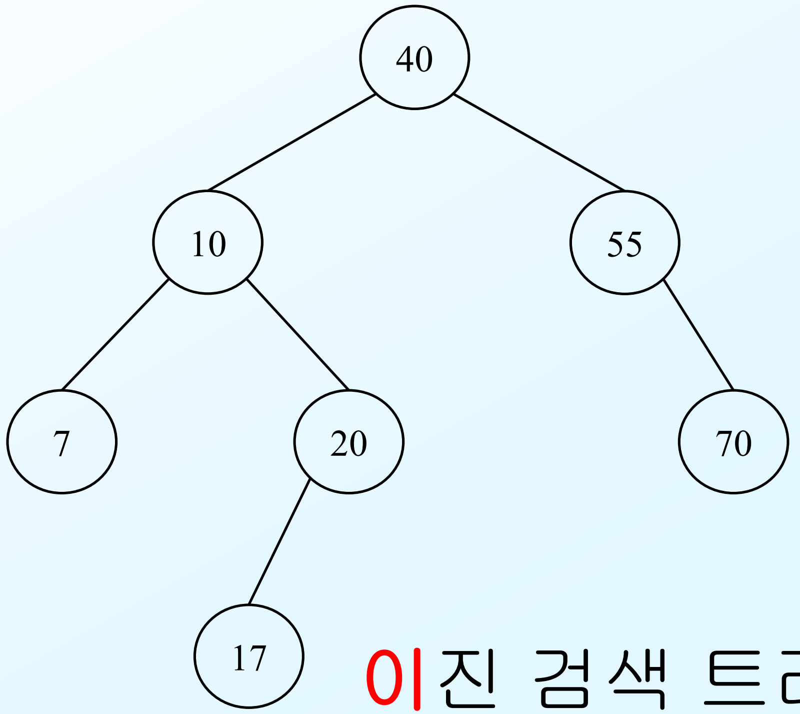
뿌리 root

검색 트리 Search Tree



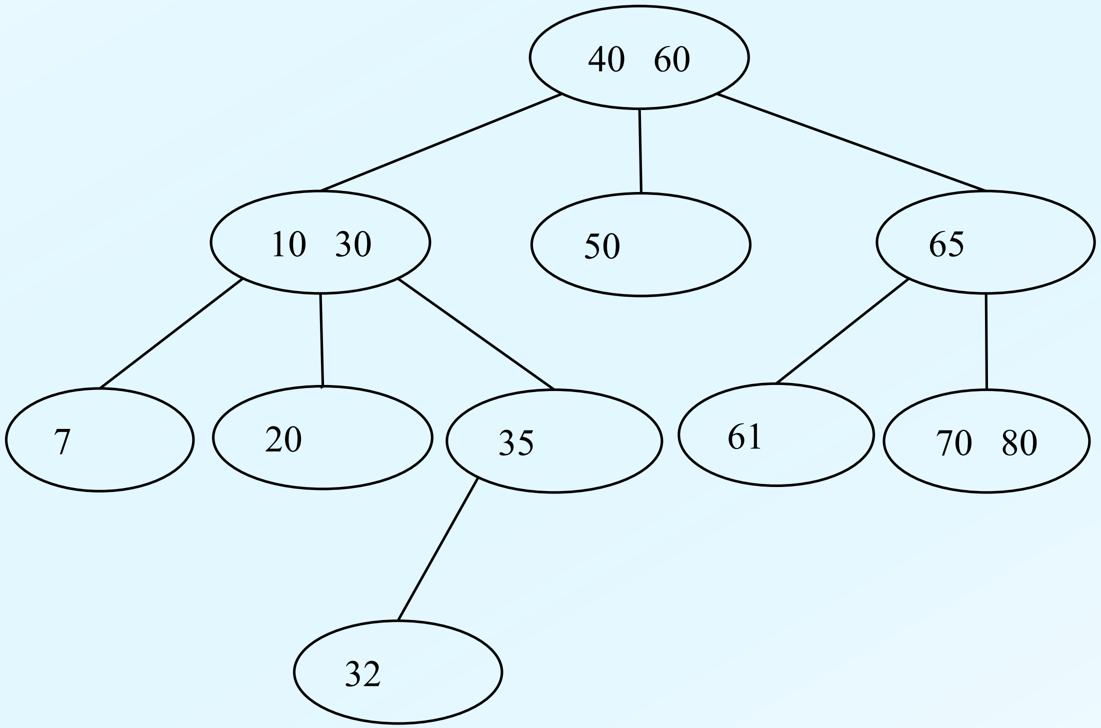
모든 node가 (검색을 위한) key 값을 가진다

K-진 검색 트리



이진 검색 트리

K=2, 최대 2개 분기



삼진 검색 트리

K=3, 최대 3개 분기

이진 검색 트리binary Search Tree

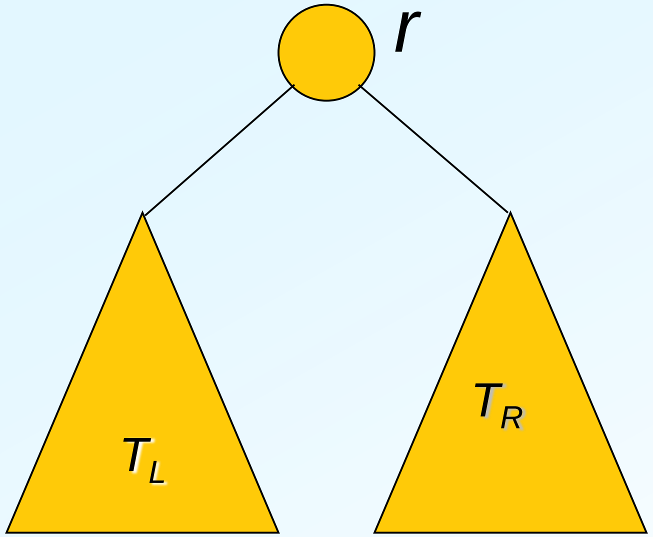
① 노드는 모두 서로 다른 키key를 갖는다

② 각 노드는 최대 2개의 자식child을 갖는다(최대 두 분기)

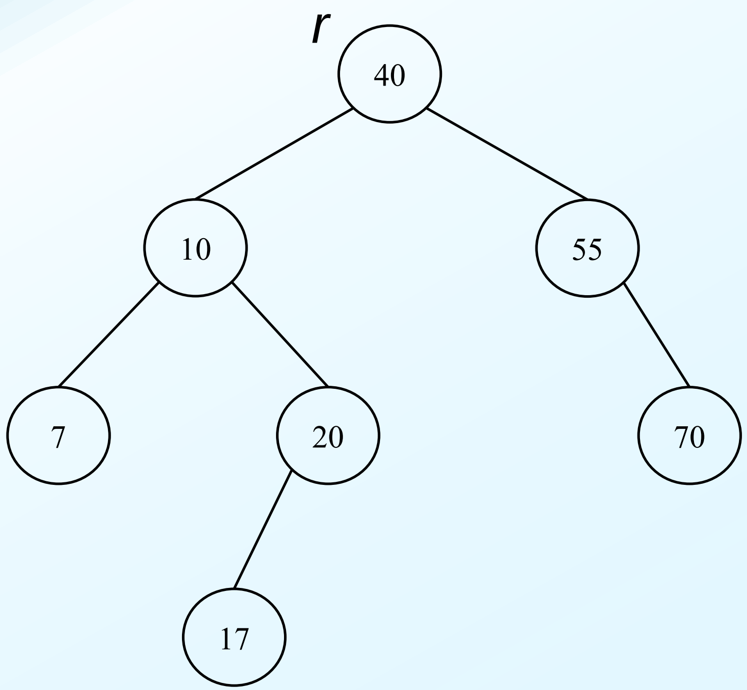
③ 임의의 노드의 key는

자신의 좌서브트리left subtree에 있는 모든 노드의 key보다 크고,

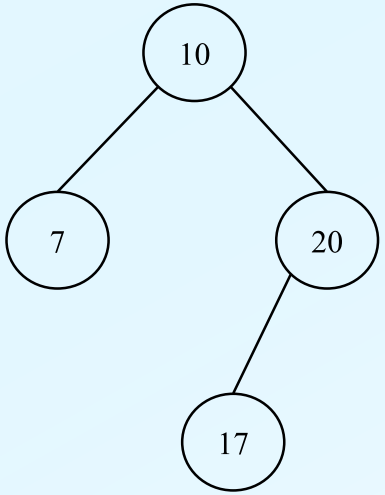
자신의 우서브트리right subtree에 있는 모든 노드의 key보다 작다



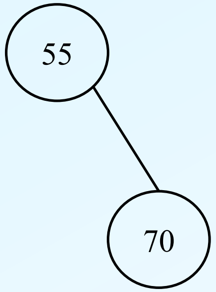
서브트리 Subtree



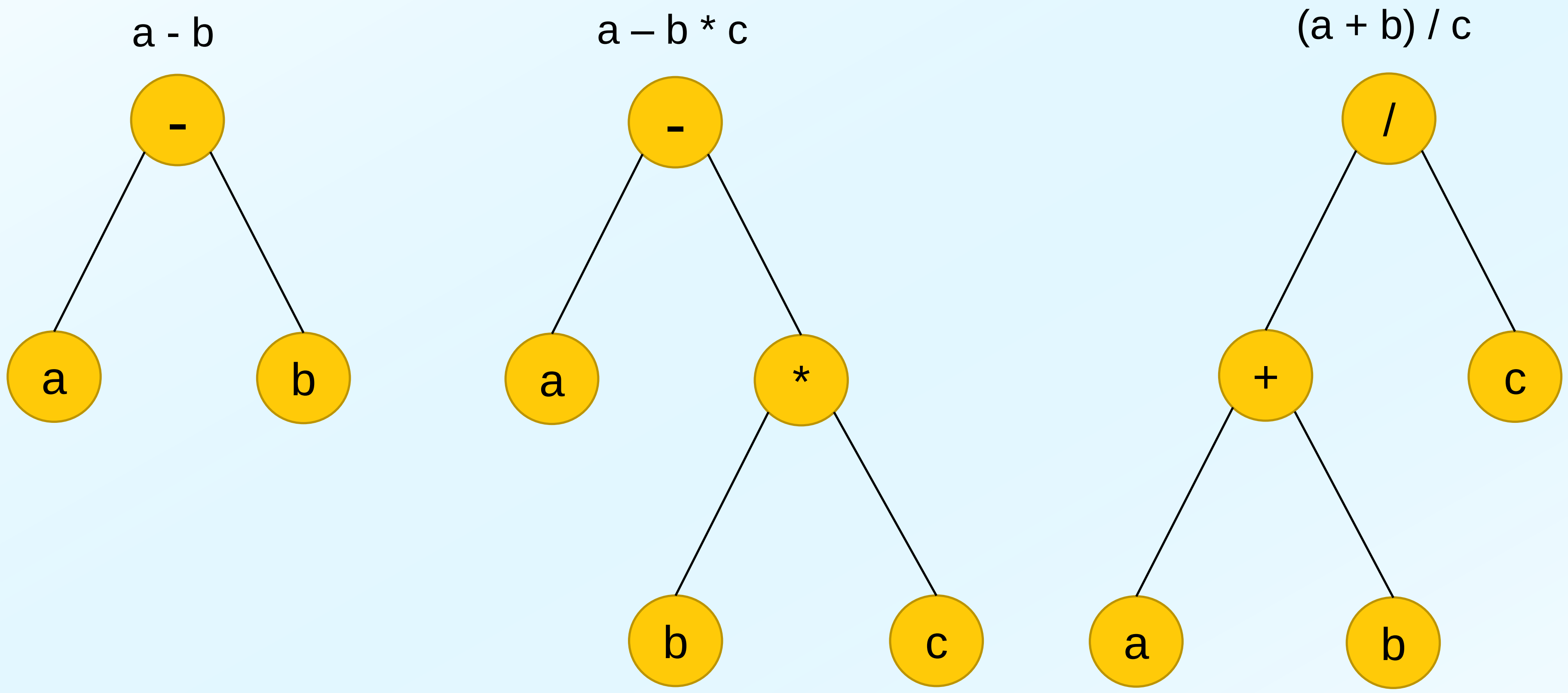
노드 *r*의 좌서브트리



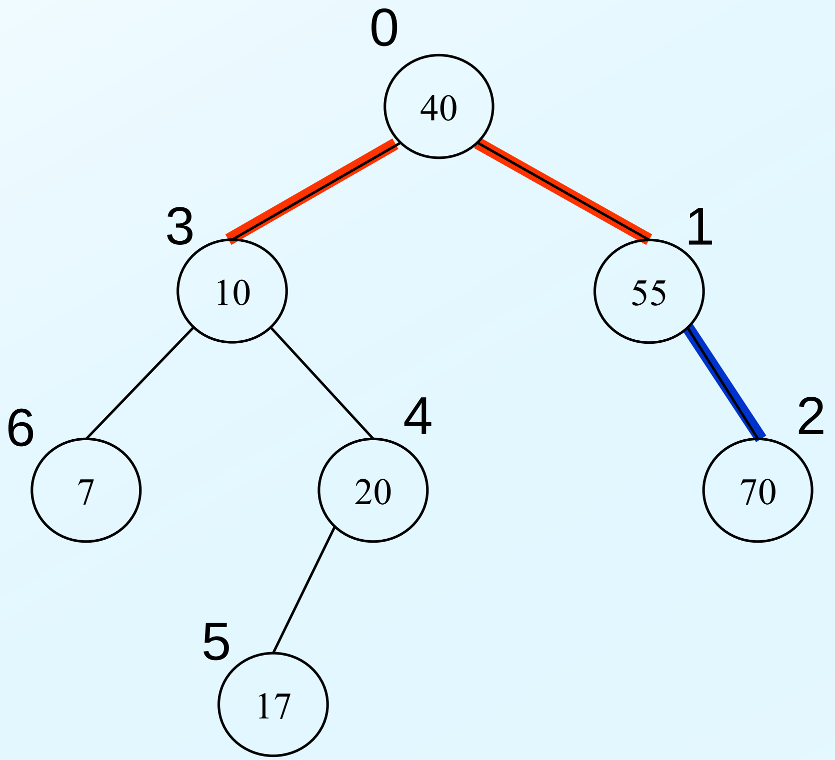
노드 *r*의 우서브트리



이진 트리로 수식을 표현할 수 있다

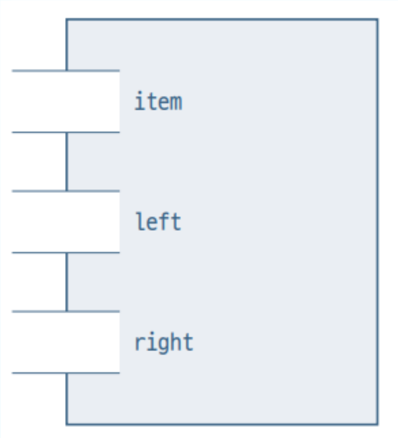


배열 기반의 이진 검색 트리 표현

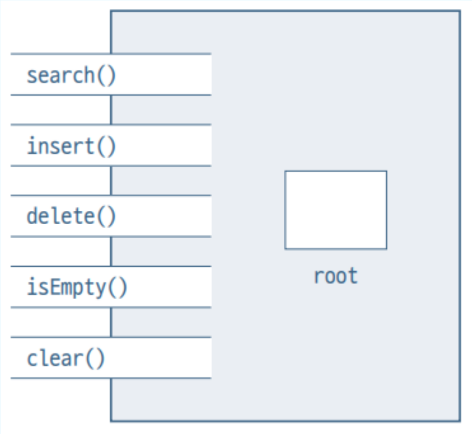


		leftChild	rightChild
0	40	3	1
1	55	-1	2
2	70	-1	-1
3	10	6	4
4	20	5	-1
5	17	-1	-1
6	7	-1	-1
7	?		
8	?		
…	…	…	…

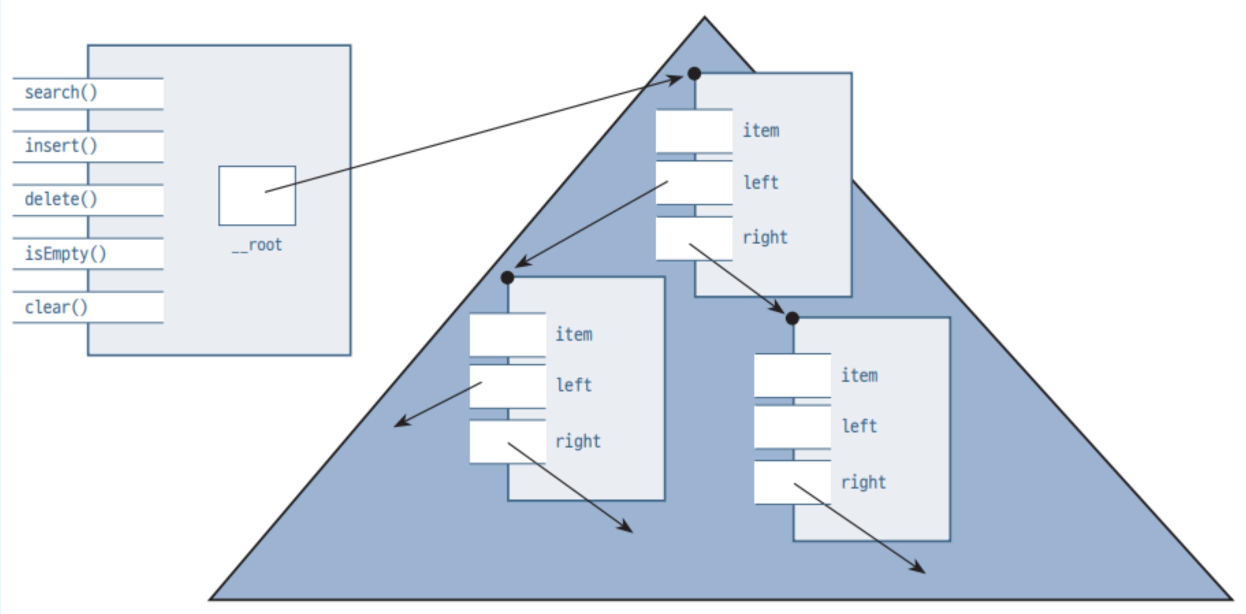
링크 기반의 이진 검색 트리 표현



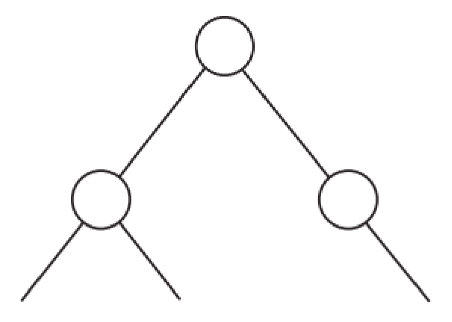
노드 구조



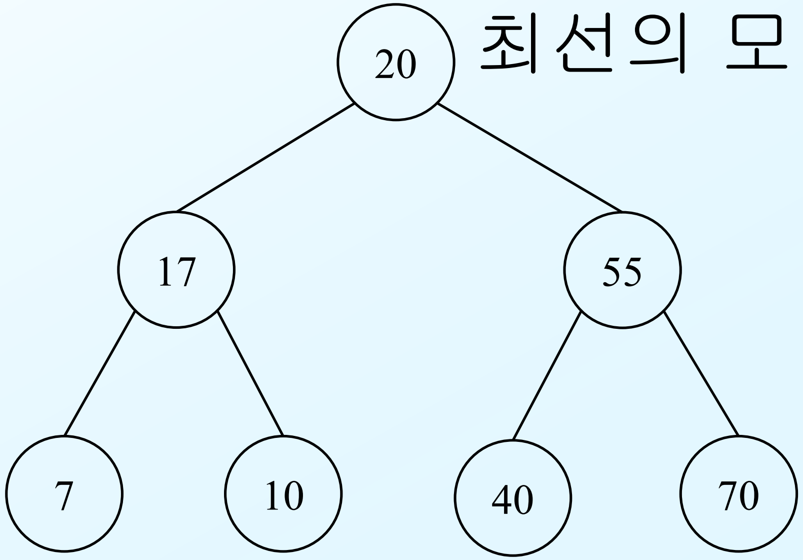
이진 검색 트리 객체 구조



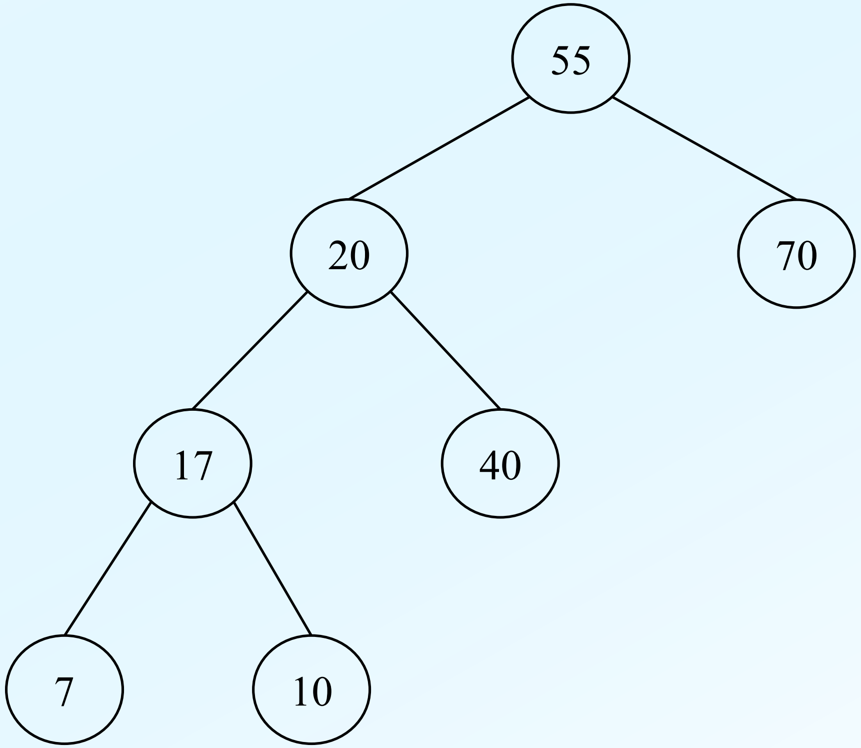
보통 이렇게 그린다



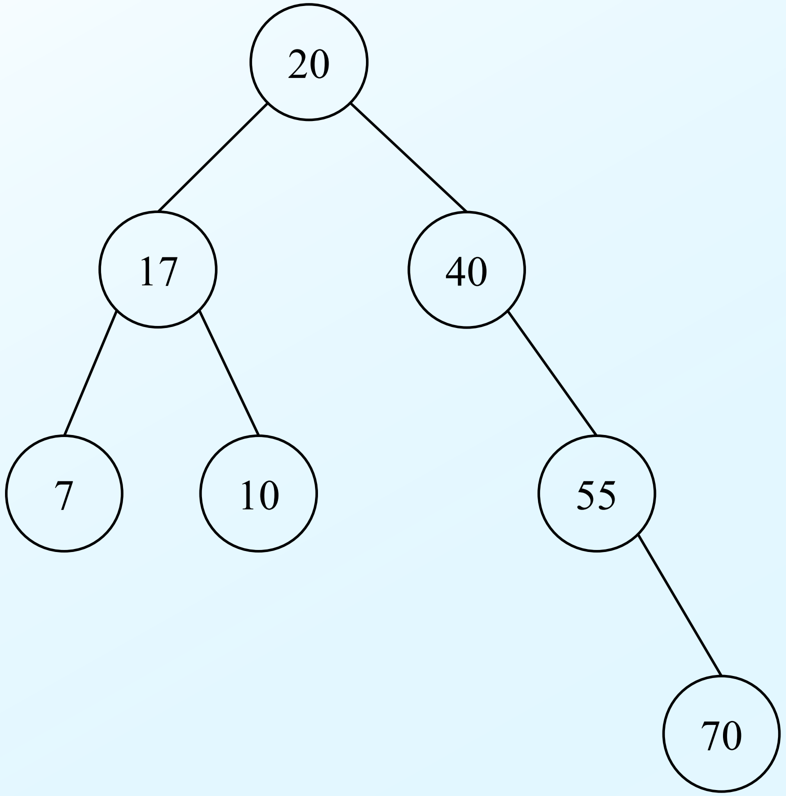
같은 데이터, 다른 이진 검색 트리

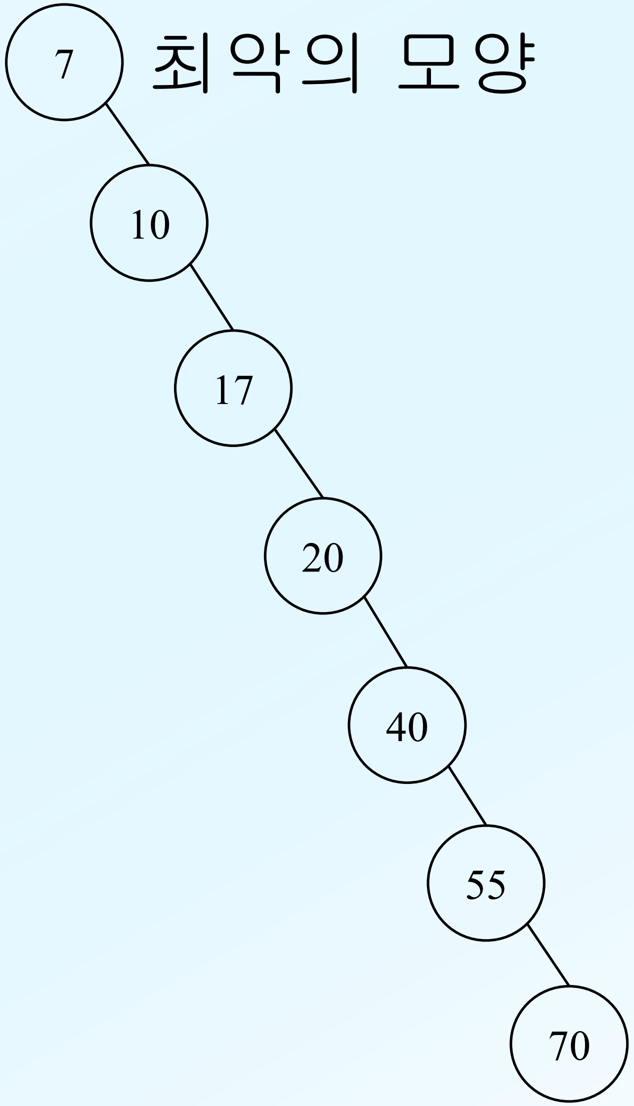


최선의 모양



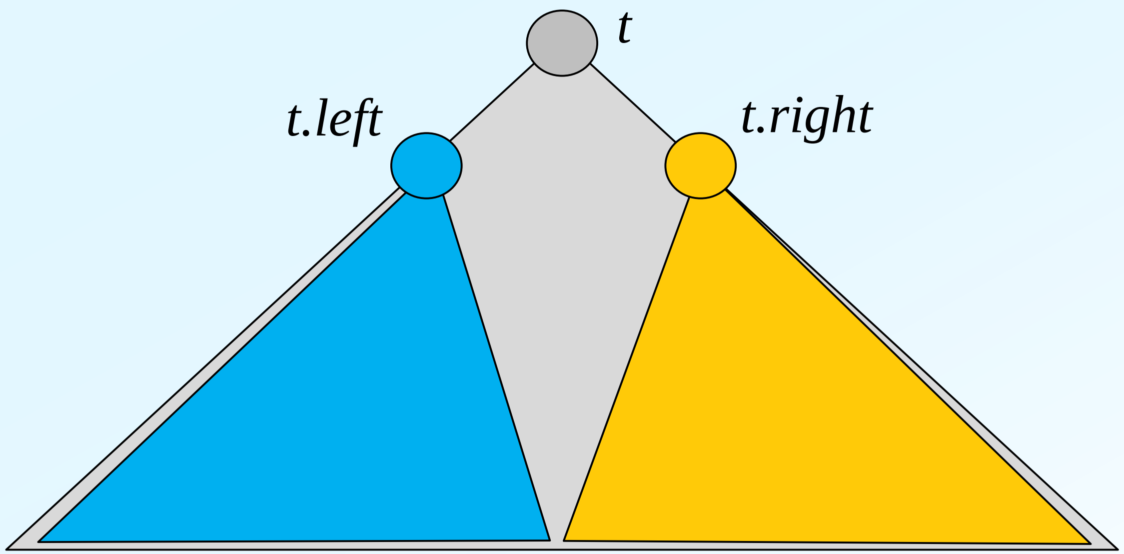
이런 모양이 될 수도..



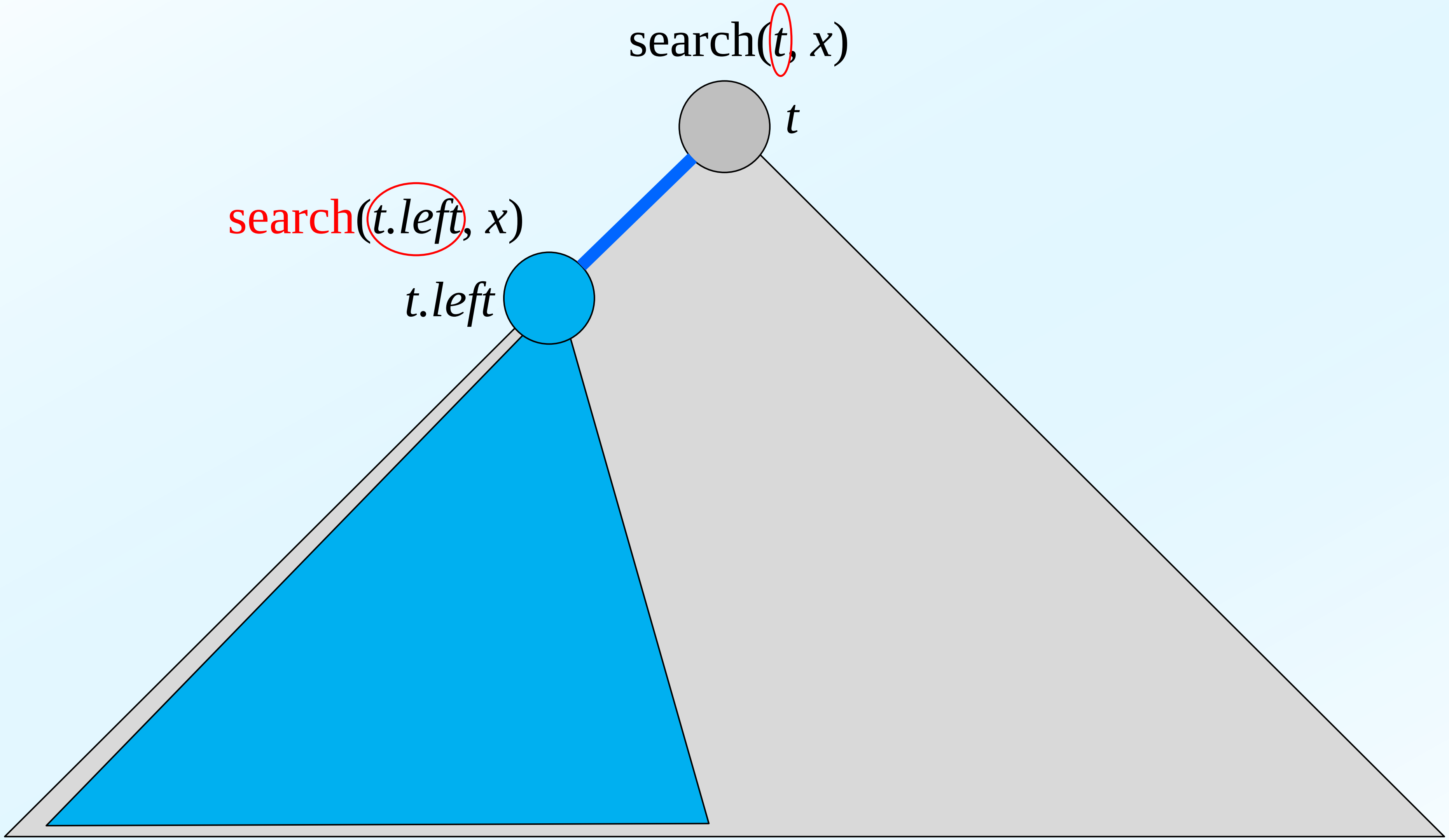


검색Search

```
search(t, x):
◀ t: (서브) 트리의 루트 노드의 레퍼런스
◀ x: 검색하고자 하는 키
        if (t = null || t.item = x)
                return t
        else if (x < t.item)
                return search(t.left, x)    ◀ t.left: t's left child
        else
                return search(t.right, x)   ◀ t.right: t's right child
```

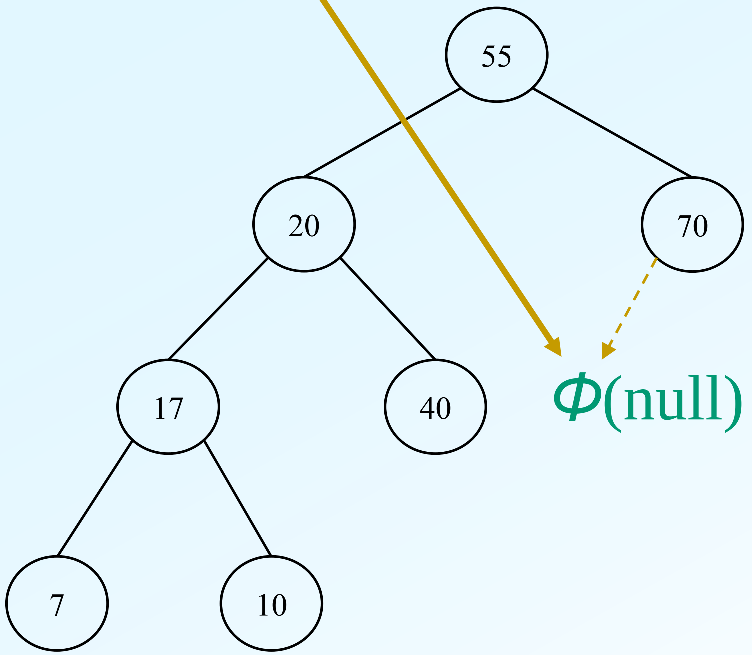


재귀적 관점으로 본 검색



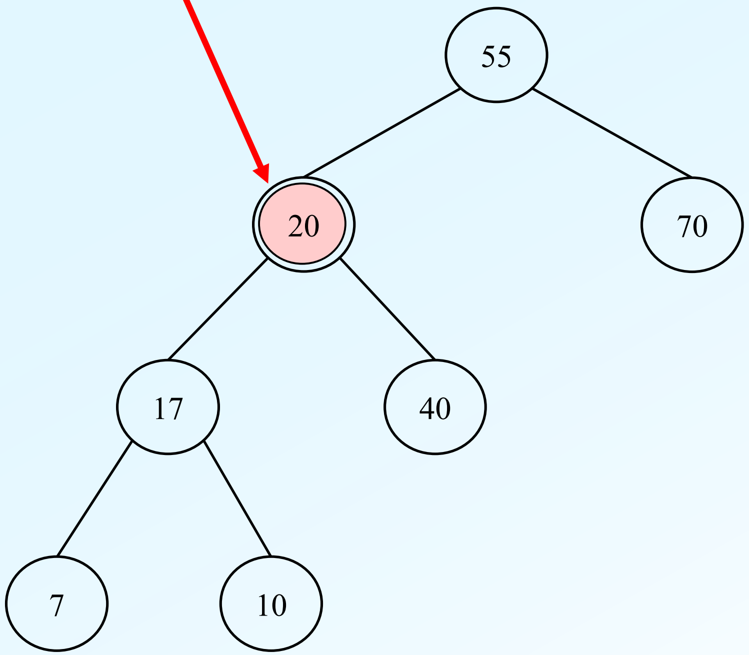
search(t, x):
    if (t = **null** || $t.item = x$)
            return t
    else if ($x < t.item$)
        return search($t.left$, x)
    else
        return search($t.right$, x)

실패하는 검색



```
search(t, x):
        if ( t = null || t.item = x )
                return t
        else if (x < t.item)
                return search(t.left, x)
        else
                return search(t.right, x)
```

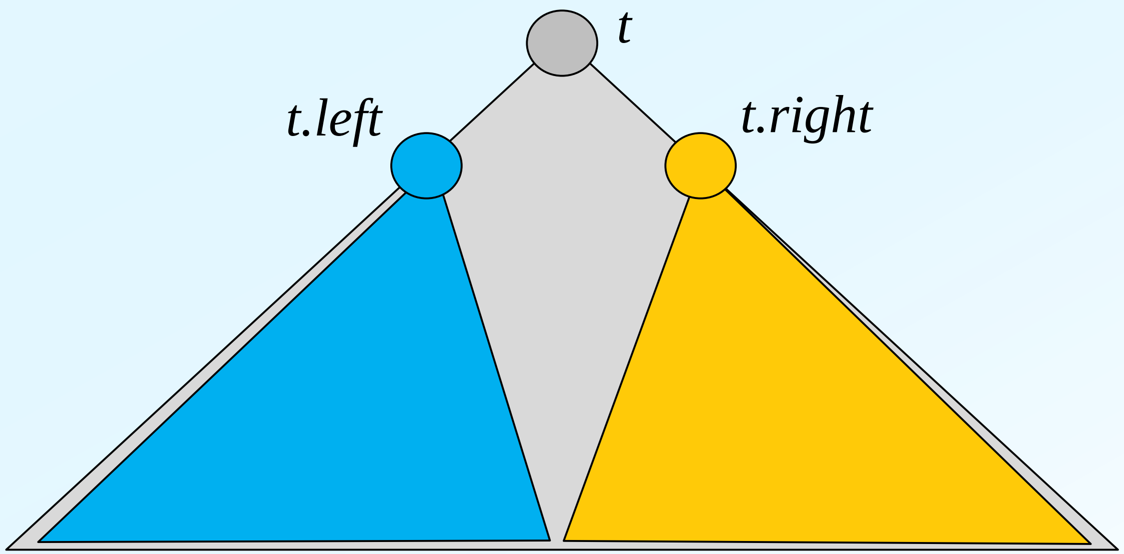
성공하는 검색



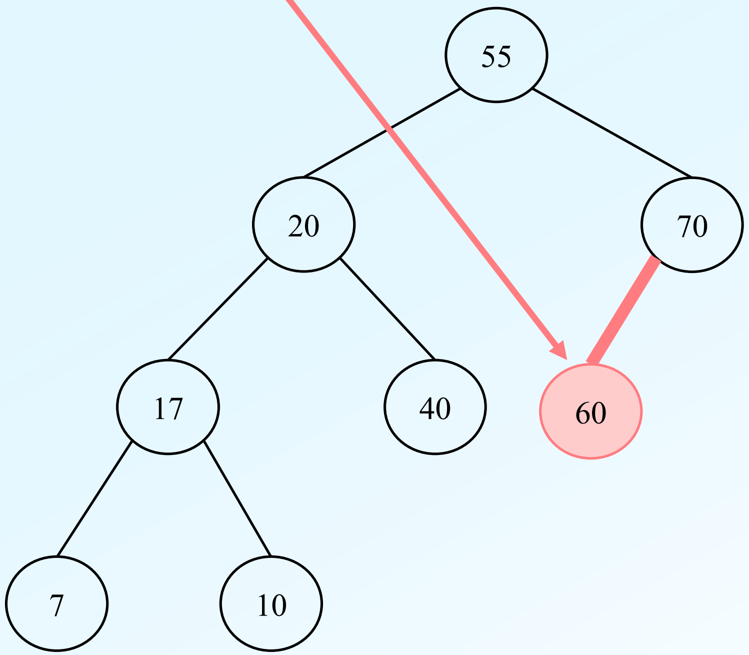
삽입 Insertion

가정: 삽입 키 *x*는 검색트리에 없다

```
insertSketch(t, x):
◀ t: (서브) 트리의 루트 노드
◀ x: 삽입하고자 하는 키
    if (t = null)
        x를 키로 하는 노드를 t의 부모 밑에 매달고 끝낸다
    else if (x < t.item)
        insertSketch(t.left, x)
    else
        insertSketch(t.right, x)
```



```
insertSketch(t, x):
◀ t: (서브) 트리의 루트 노드
◀ x: 삽입하고자 하는 키
    if (t = null)
        x를 키로 하는 노드를 t의 부모 밑에 매달고 끝낸다
    else if (x < t.item)
        insertSketch(t.left, x)
    else
        insertSketch(t.right, x)
```



알고리즘 insert()

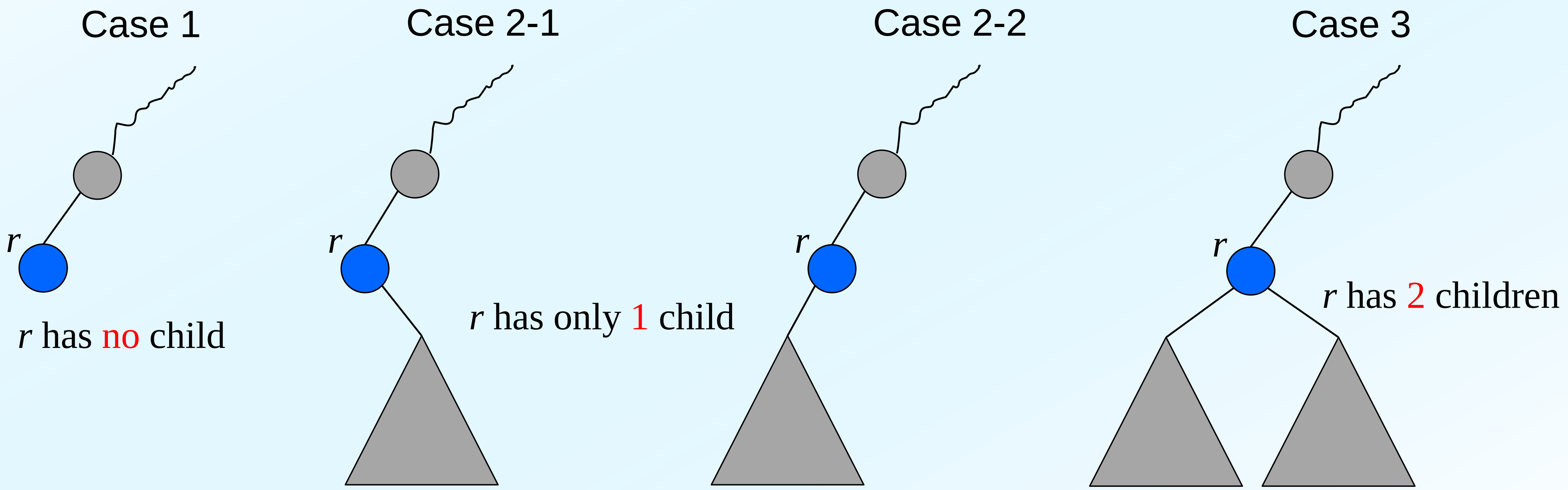
```
insert(x): ◀ root: 트리의 루트 노드 레퍼런스
    root ← insertItem(root, x)

insertItem(t, x):
◀ t: (서브) 트리의 루트 노드
◀ x: 삽입하고자 하는 키
◀ 작업 완료 후 루트 노드의 레퍼런스를 리턴한다
    if (t = null)
        r.item ← x; r.left ← null; r.right ← null ◀ r: 새 노드
        return r
    else if (x < t.item)
        t.left ← insertItem(t.left, x)
        return t
    else
        t.right ← insertItem(t.right, x)
        return t
```

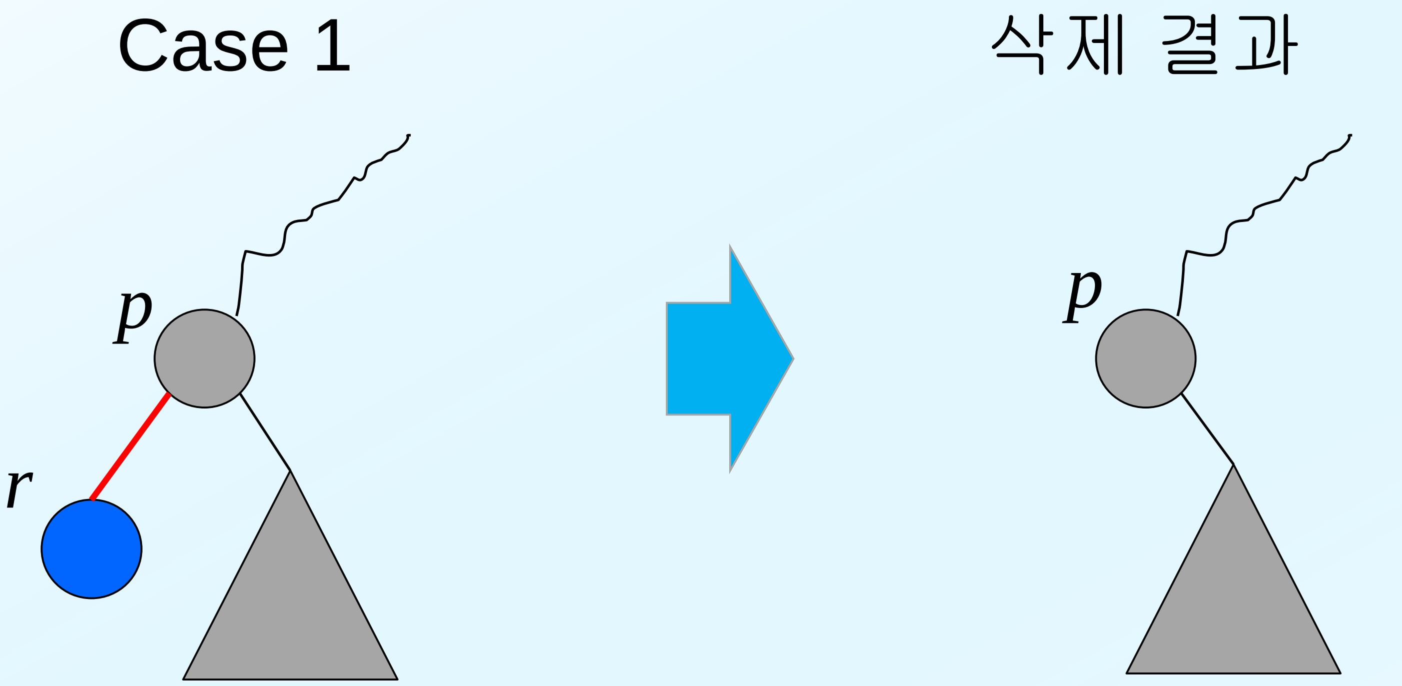
삭제 Deletion

```
deleteSketch(r):  ◀ r: 삭제하고자 하는 노드
        if (r이 리프 노드)                          ◀ Case 1
                그냥 r을 버린다
        else if (r의 자식이 하나만 있음)            ◀ Case 2
                r의 부모가 r의 자식을 직접 가리키도록 한다
        else                                        ◀ Case 3
                r의 right subtree 의 minimum 원소 노드 s를 찾는다
                s를 r자리로 복사하고 s를 삭제한다
```

```
deleteSketch(r): ◀ r: 삭제하고자 하는 노드
    if (r이 리프 노드)                              ◀ Case 1
        그냥 r을 버린다
    else if (r의 자식이 하나만 있음)                  ◀ Case 2
        r의 부모가 r의 자식을 직접 가리키도록 한다
    else                                            ◀ Case 3
        r의 right subtree 의 minimum 원소 노드 s를 찾는다
        s를 r자리로 복사하고 s를 삭제한다
```



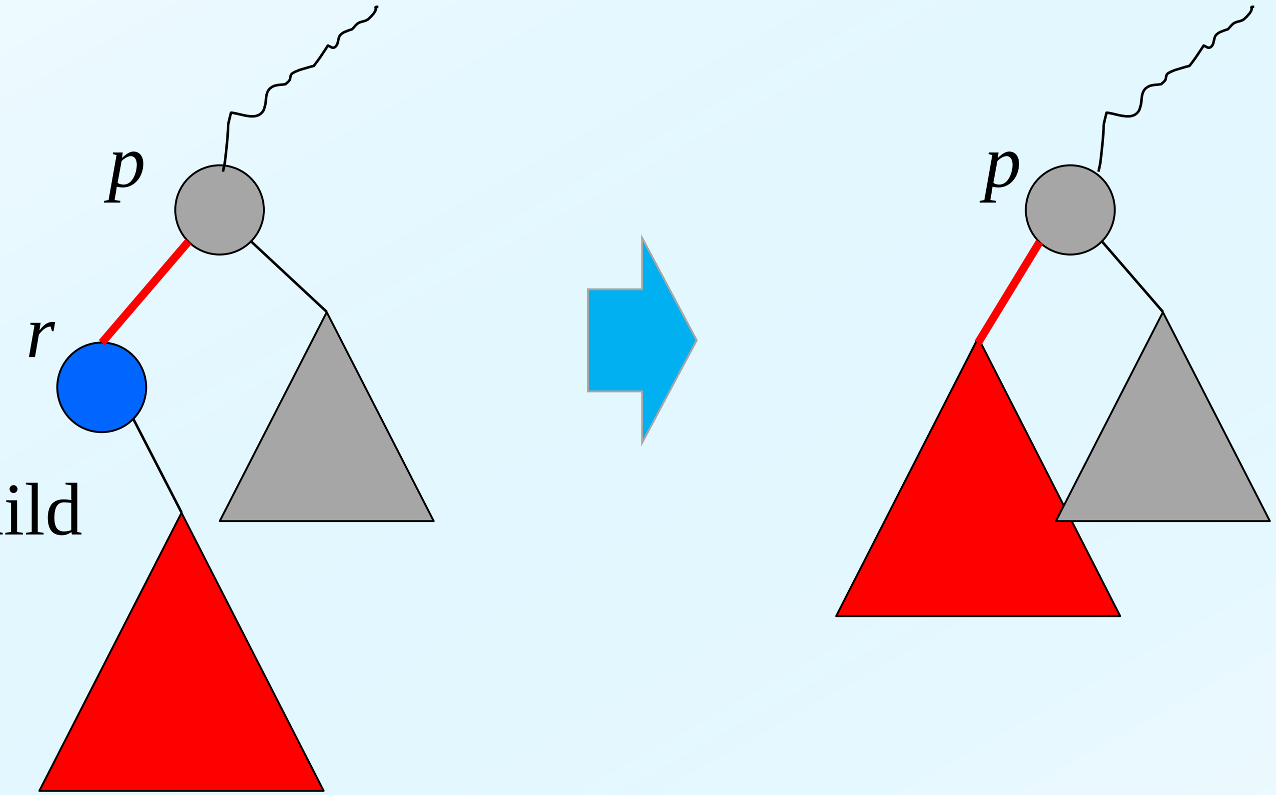
Case 1



r has no child

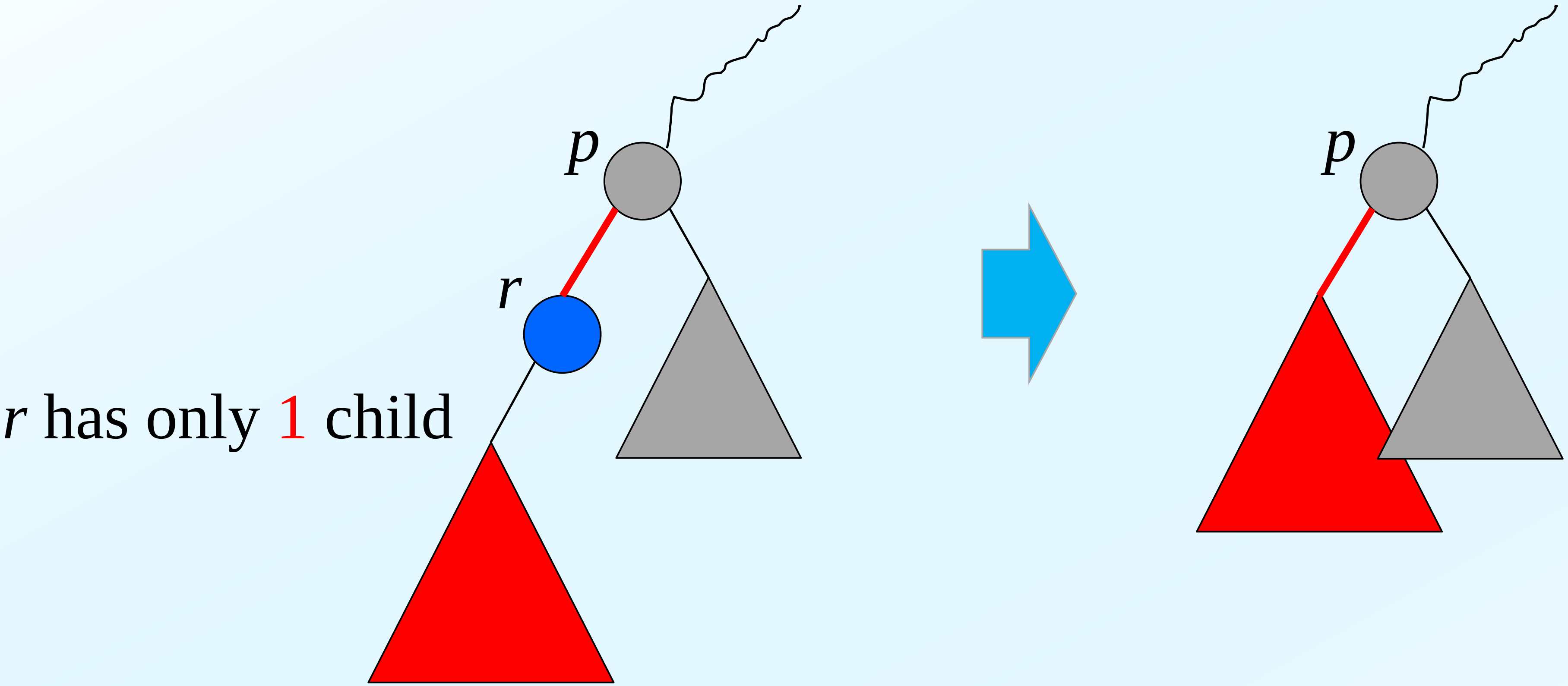
Case 2

Case 2-1 삭제 결과

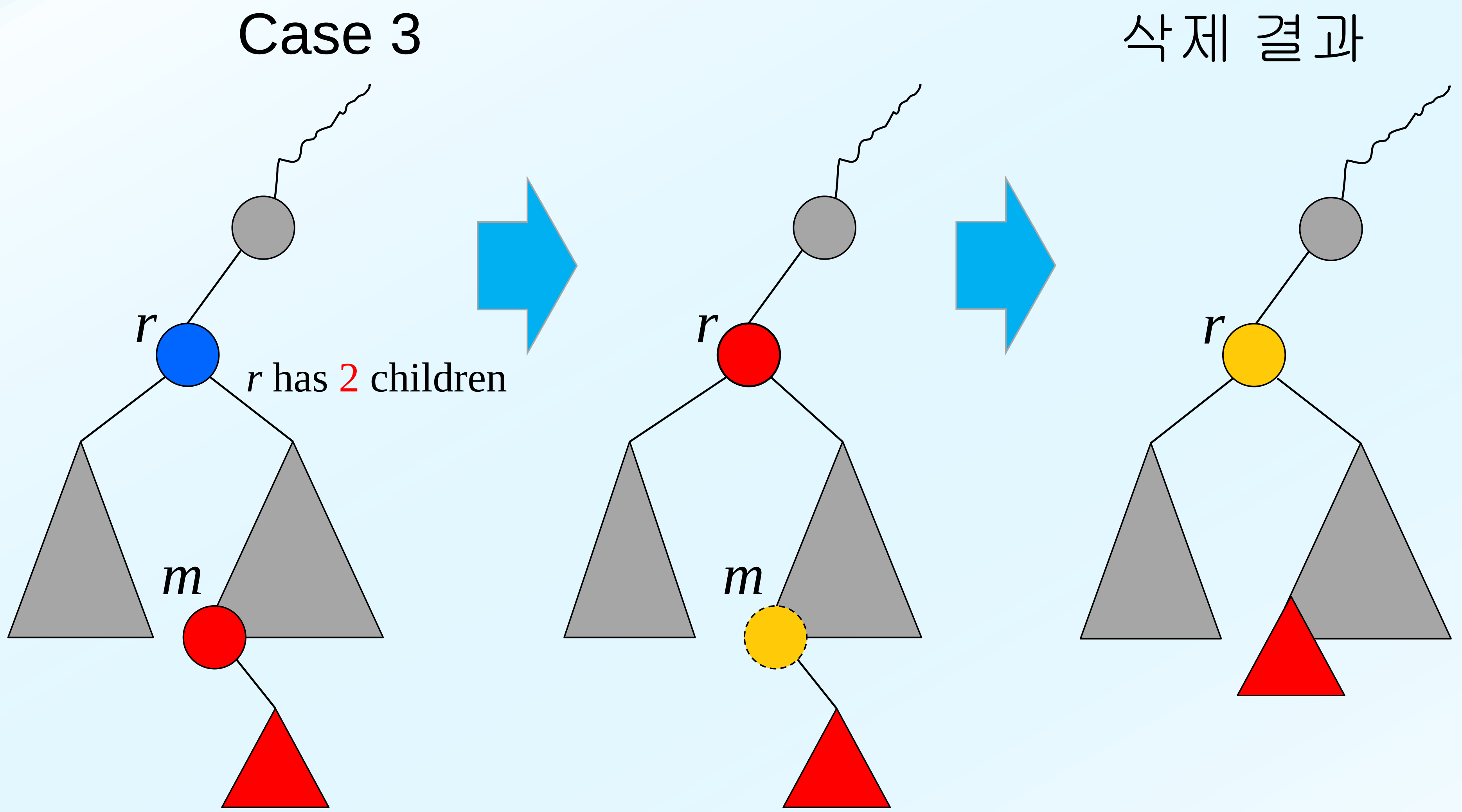


r has only 1 child

Case 2-2 삭제 결과



Case 3



알고리즘 delete()

```
delete(root, x):
        root ← findAndDelete(root, x)

findAndDelete(t, x):   ◀ t: (서브) 트리의 루트
        if (t = null)
                에러("item not found!")
        else if (x = t.item)
                t ← deleteNode(t);                ◀ item found at t
                return t
        else if (x < t.item)
                t.left ← findAndDelete(t.left, x)
                return t
        else
                t.right ← findAndDelete(t.right, x)
                return t
```

```
deleteNode(t):  ◀ t: node to delete
        if (t.left = null && t.right = null)          ◀ case 1 (no child)
                return null
        else if (t.left = null)               ◀ case 2-1 (only right child)
                return t.right
        else if (t.right = null)              ◀ case 2-2 (only left child)
                return t.left
        else                                  ◀ case 3 (2 children)
                (minItem, node) = deleteMinItem(t.right)
                t.item ← minItem
                t.right ← node
                return t    ◀ t를 직접 지우지 않음

deleteMinItem(t):
        if (t.left = null)                    ◀ found minimum at t
                return (t.item, t.right)
        else                                  ◀ branch left, then backtrack
                (minItem, node) ← deleteMinItem(t.left)
                t.left ← node
                return (minItem, t)
```

검색 시간

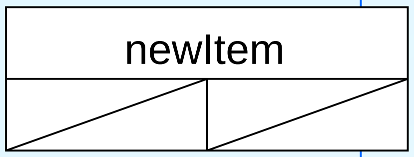
Fact:

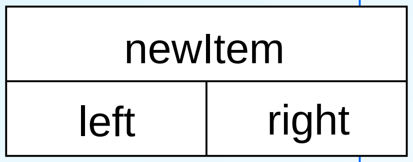
총 n개의 노드를 가진 binary search tree의
점근적 평균 검색 시간은 $\Theta(\log n)$이다.

자바 코드

```
public interface IndexInterface<T> {
        public void insert(Comparable x);
        public T search(Comparable x);
        public void delete(Comparable x);
```

```
public class TreeNode {
    public Comparable item;
    public TreeNode left;
    public TreeNode right;
    public TreeNode(Comparable newItem) {
        item = newItem;
        left = right = null;
    }
    public TreeNode(Comparable newItem,
            TreeNode leftChild, TreeNode rightChild) {
        item = newItem;
        left = leftChild;
        right = rightChild;
    }
```





```java
public class BinarySearchTree implements IndexInterface<TreeNode> {
	private TreeNode root;
	public BinarySearchTree() {  // 생성자
		root = null;
	}
	////// 검색 ///////////////////////////////////////////////////////////
	public TreeNode search(Comparable x) {
		return searchItem(root, x);
	}
	private TreeNode searchItem(TreeNode t, Comparable x) {
		if (t == null) return null;
		else if (x.compareTo(t.item) == 0) return t;
		else if (x.compareTo(t.item)) < 0)
				return searchItem(t.left, x);
		else
				return searchItem(t.right, x);
	}
	////// 삽입 ///////////////////////////////////////////////////////////
	public void insert(Comparable x) {
		root = insertItem(root, x);
	}
	private TreeNode insertItem(TreeNode t, Comparable x) {
		if (t == null) { // insert after a leaf  (or into an empty tree)
				t = new TreeNode(x);
		else if (x.compareTo(t.item) < 0)
				t.left = insertItem(t.left, x);		// branch left
		else
				t.right = insertItem(t.right, x);	// branch right
		return t;
	}
	…
```

1/3 of class BinarySearchTree

```
////// 삭제 /////////////////////////////////////////////////////////////
public void delete(Comparable x) {
        root = findAndDelete(root, x);
}
private TreeNode findAndDelete(TreeNode t, Comparable x) {
        if (t == null) return null;                    // item not found!
        else {
                if (x.compareTo(t.item) == 0)
                        t = deleteNode(t);             // item found at t
                else if (x.compareTo(t.item) < 0)
                        t.left = findAndDelete(t.left, x);
                else
                        t.right = findAndDelete(t.right, x);
                return t;
        }
}
private TreeNode deleteNode(TreeNode t) {
        if ( t.left == null && t.right == null )
                        return null;                   // case 1 (no child)
        else if (t.left == null)
                        return t.right;                // case 2-1 (only right child)
        else if (t.right == null)
                        return t.left;                 // case 2-2 (only left child)
        else {  // case 3 (two children)
                        returnPair rPair = deleteMinItem(t.right);
                        t.item = rPair.minItem;
                        t.right = rPair.node;
                        return t   // t survived
        }
}
…
```

2/3 of class BinarySearchTree

```
private returnPair deleteMinItem(TreeNode t) {
        if (t.left == null) { // found minimum at t
                return new returnPair(t.item, t.right);
        } else { // branch left, then backtrack
                returnPair rPair = deleteMinItem(t.left);
                t.left = rPair.node;
                rPair.node = t;
                return rPair;
        }
}
private class returnPair {
        Comparable minItem;
        TreeNode node;
        private returnPair(Comparable x, TreeNode t) {
                minItem = x;
                node = t;
        }
}
} // end BinarySearchTree
```

3/3 of class BinarySearchTree

이진 검색 트리의 성질

팩트 1 정수 $h \geq 1$에 대해, 높이 h인 포화 이진 트리의 리프 노드의 총 수 $l(h)$는 2^{h-1}이다.

<증명>

i) (베이스 케이스) $h=1$이면 리프 노드가 1개이므로 $l(1)=2^{1-1}=2^0=1$이 만족된다.

ii) (귀납적 가정) $h=k$인 포화 이진 트리의 리프 노드 수 $l(k)=2^{k-1}$이라 가정하자.

iii) (귀납적 전개) 이제 $l(k+1)=2^k$임을 증명하면 된다. 높이 $k+1$인 포화 이진 트리는 루트의 두 서브 트리가 각각 높이 k인 포화 이진 트리다. 총 리프 노드 수는 $l(k+1)=2 \cdot l(k)=2 \cdot 2^{k-1}=2^k$이 되어 증명이 완료된다.

$l(k+1) = l(k) \cdot 2$ 이고

$l(1)=1, \therefore l(n)=2^{n-1}$

이진 검색 트리의 성질

팩트 2 정수 $h \geq 0$에 대해, 높이 h인 포화 이진 트리의 총 노드 수 $n(h)$는 $2^h - 1$이다.

<증명>

i) (베이스 케이스) $h=0$이면 비어 있는 이진 트리다. 포화 이진 트리에 속한다. 노드 수는 0이다. $n(0)=2^0-1=0$이 성립한다.

ii) (귀납적 가정) 모든 $0 \leq k < h$에 대해 노드 수 $n(k) = 2^k-1$이라 가정하자.

iii) (귀납적 전개) 이제 $n(h)=2^h-1$임을 증명하면 된다. 앞의 귀납적 가정에 의해 높이 $h-1$인 포화 이진 트리의 노드 수 $n(h-1)=2^{h-1}-1$이다. 높이 h인 포화 이진 트리는 루트의 두 서브 트리가 높이 $h-1$인 포화 이진 트리이므로 총 노드 수는 $n(h)=1+2 \cdot n(h-1) =1+2(2^{h-1}-1)=2^h-1$이 되어 증명이 완료된다. (여기서 1을 더하는 것은 루트 노드를 더한 것)

이진 검색 트리의 성질

팩트 3 정수 h≥0에 대해, 높이 h인 이진 트리는 2^h-1개 이하의 노드를 갖는다.

<증명>

높이 h인 이진 트리 중 가장 많은 노드 수를 갖는 것은 포화 이진 트리다. 높이 h인 포화 이진 트리는 2^h-1개의 노드를 가지므로([팩트 2]), 높이 h인 모든 이진 트리는 기껏해야 2^h-1개의 노드를 가진다.

이진 검색 트리의 성질

팩트 4 총 n개의 노드를 가진 이진 트리의 높이는 적어도 $h \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$이다.

<증명>

이진 트리의 높이가 h라면 해당 이진 트리의 노드 수는 [팩트 3]으로부터 $n \leq 2^h - 1$이 된다. 변환하면 $h \geq \log_2(n+1)$이다. 높이 h는 정수이므로 $h \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$가 된다. 즉, 총 n개의 노드를 가진 이진 트리의 높이는 $\Omega(\log n)$로 표현할 수 있다.

$n+1 \leq 2^h$,

팩트 5 총 n개의 노드를 가진 이진 트리의 최대 높이는 n이다.

팩트 6 이진 검색 트리의 삽입에 드는 점근적 시간은 검색에 드는 시간과 동일하다.

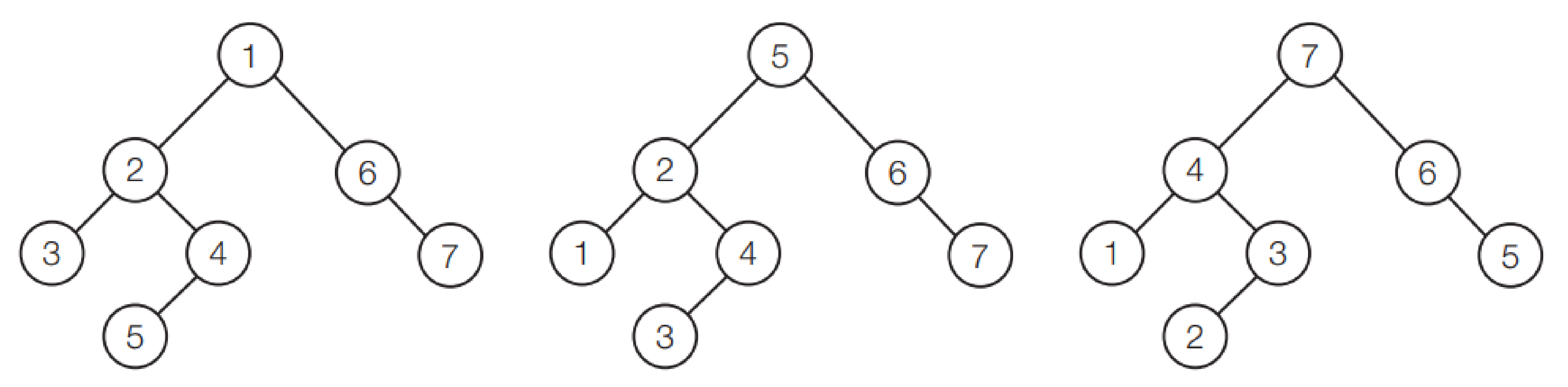
팩트 7 n개의 노드를 가진 이진 검색 트리의 점근적 평균 검색 시간은 $\Theta(\log n)$이다.

이진 트리에서의 순회Traversal

순회Traversal: 이진 트리에서 모든 노드를 방문하기

전위 순회Preorder Traversal
중위 순회Inorder Traversal
후위 순회Postorder Traversal

노드에 적은 번호는 방문 순서



전위 순회
- 루트를 맨 먼저

중위 순회
- 루트를 중간에

후위 순회
- 루트를 맨 뒤에

알고리즘 preOrder()

```
preOrder(root):
    if (root is not empty)
        Mark root
        preOrder(Left child of root)
        preOrder(Right child of root)
```

알고리즘 inOrder()

```
inOrder(root):
    if (root is not empty)
        inOrder(Left child of root)
        Mark root
        inOrder(Right child of root)
```

알고리즘 postOrder()

```
postOrder(root):
        if (root is not empty)
                postOrder(Left child of root)
                postOrder(Right child of root)
                Mark root
```

중위 순회는 이진 검색 트리를 정렬 순서로 방문한다

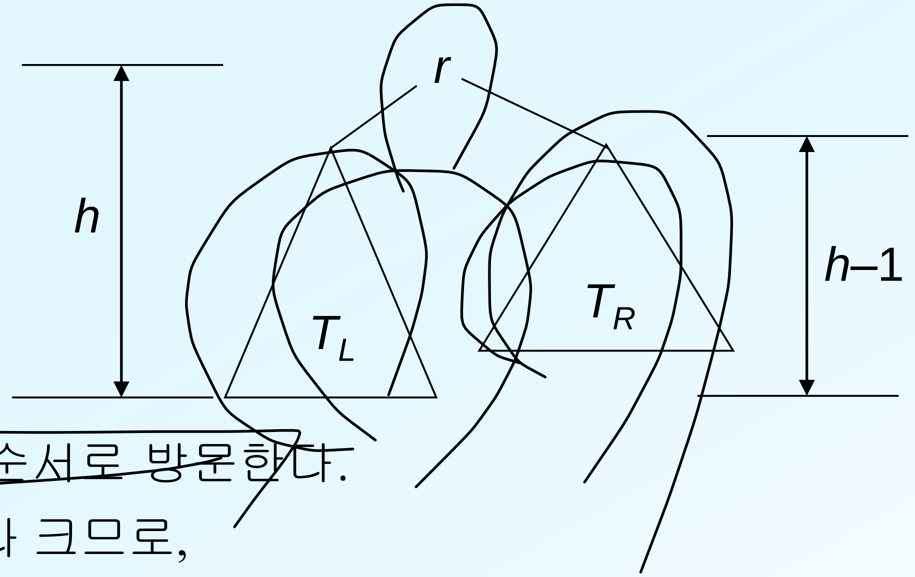
Theorem: 이진 검색 트리 T의 중위 순회는 노드들을 정렬된 순서로 방문한다

<증명>

베이스 케이스: h = 1. (h: height)

T는 단 한 개의 노드(루트)를 갖는다.

유일한 노드를 방문하는 것은 당연히 정렬된 순서다.



귀납적 가정: $k < h$인 모든 k에 대해 성립한다 가정하자.

귀납적 전개: (정리가 $k = h$에 대해 성립함을 보인다)

이진 검색 트리 T는 오른쪽과 같이 그릴 수 있다.

귀납적 가정에 의해 중위 순회는 T_L과 T_R을 각각 정렬된 순서로 방문한다.

T_L의 모든 키는 r의 키보다 작고, T_R의 모든 키는 r의 키보다 크므로,

중위 순회 $T_L \rightarrow r \rightarrow T_R$는 정렬된 순서다.

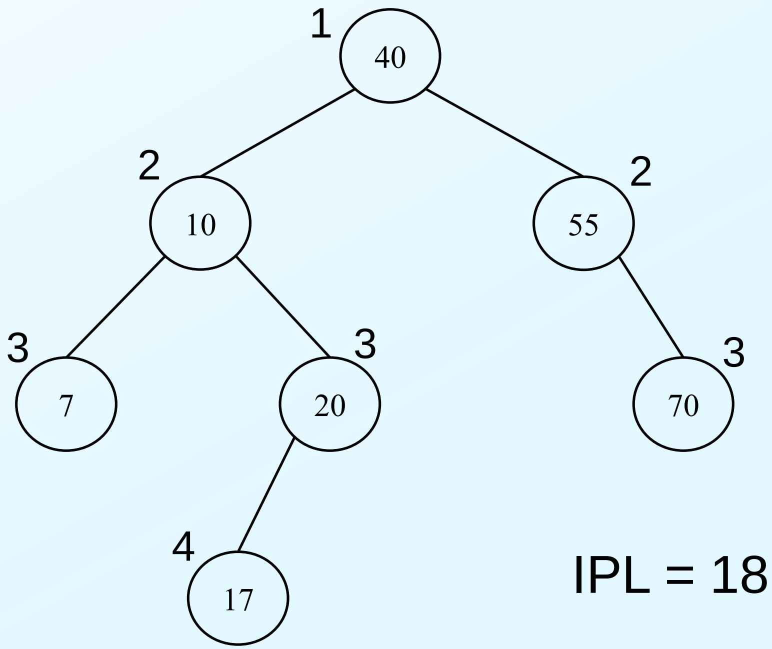
이진 검색 트리 작업의 효율

작업	평균적인 경우	최악의 경우
검색	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$
삽입	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$
삭제	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$
순회	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$

부연

Internal Path Length (IPL)

- 각 노드의 깊이를 모두 더한 것



IPL = 18

Fact:

n개의 원소가 차례로 입력으로 들어와서 이진 검색 트리를 만들 때, 입력 원소의 모든 순서가 이루는 모든 순열이 같은 확률을 가진다면, 만들어진 이진 검색 트리의 기대 IPL은 $O(n\log n)$이다

$\frac{IPL}{n}$ = 평균 검색 시간,

의미하는 것: 평균 검색 시간은 $O(\log n)$

트리 사이즈 구하기

```
size(t):
	if (t is null) return 0
	else return (1 + size(t.left) + size(t.right))
```

Tree Sort

이진 검색 트리를 이용해서 정렬한다

treeSort(A[], n):
    A[0…n-1]을 차례로 읽어 이진 검색 트리 T를 만든다
    T를 중위 순회하면서 A[0…n-1]에 저장한다

시간 복잡도: 평균 $\Theta(n \log n)$
- 이진 검색 트리 만들기 – 평균 $\Theta(n \log n)$
- 중위 순회 – $\Theta(n)$

이론적인 성능은 좋으나 $\Theta(n \log n)$에 포함된 상수 인자가 크다

정렬용으로 사용해도 되나, 말리고 싶다

이진 검색 트리를 파일에 저장하기

이진 검색 트리를 파일에 저장했다가 필요할 때 다시 메모리로 로딩하려 한다
전위 순회 순으로 저장할 수도 있고, 중위 순회 순으로 저장할 수도 있다

- 원래 모양 그대로 복원하려면 – 전위 순회
- 완벽하게 균형잡힌 모양으로 복원하려면 – 중위 순회

중위 순회로 저장된 리스트를 이진 검색 트리로 복원하기

```
recursiveRestore (L):  ◀ L: 원소 리스트
    if (L is null)
        return null
    else
        L의 중앙값 원소 r을 찾아 가져와 루트로 삼는다
        r.left = recursiveRestore(r 앞에 있는 원소들의 리스트)
        r.right = recursiveRestore(r 뒤에 있는 원소들의 리스트)
        return r
```