



“华为杯”第十六届研究生数模竞赛“数模之星”答辩

答辩队伍编号: F19144300055

答辩队伍成员: 候宗府

孙晓伟

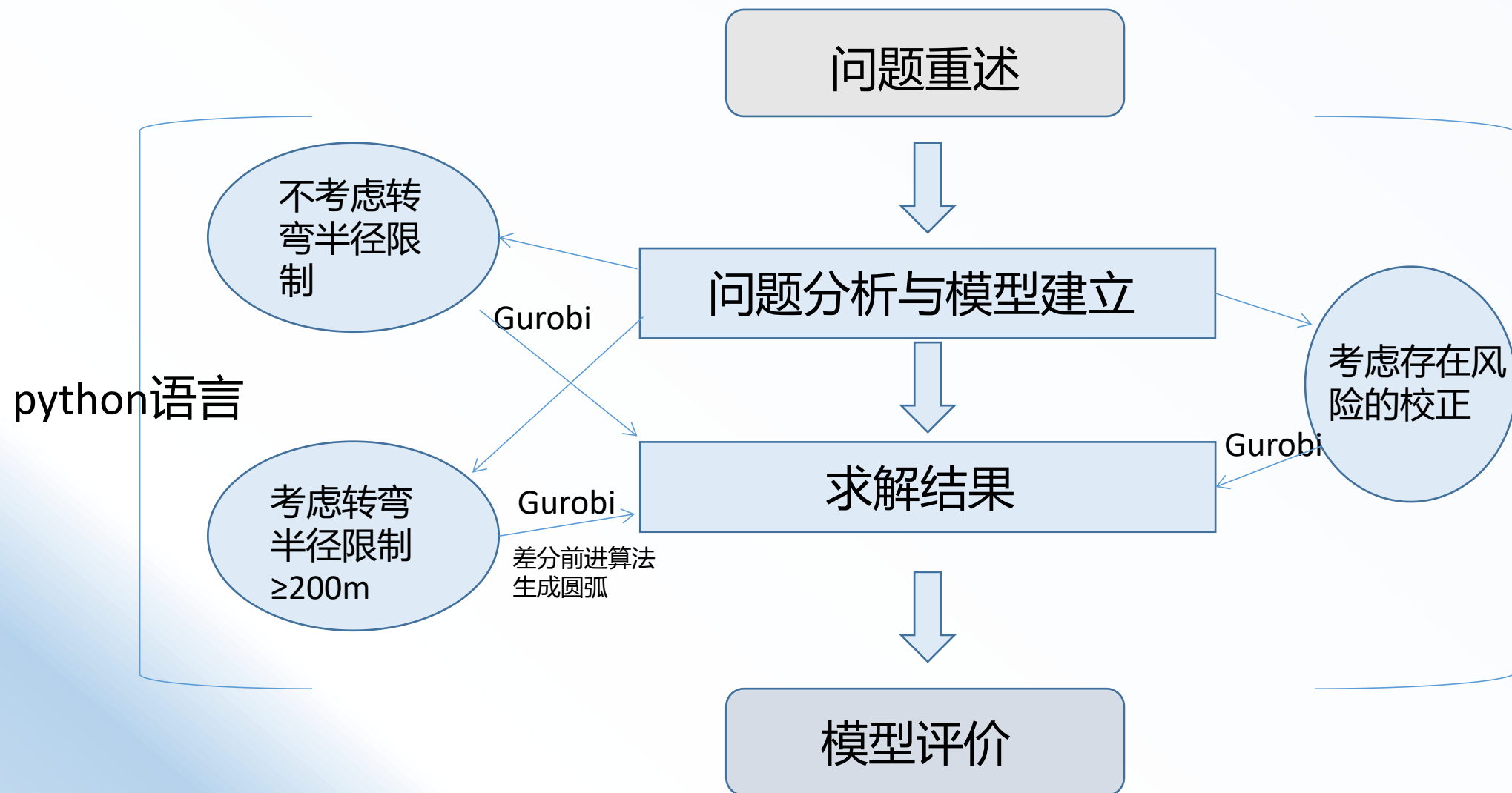
胡潇尹

答辩队伍名称: 科院应用所小队

参赛培养单位: 中国科学院数学与系统科学研究院
中国科学院大学



整体架构



1.问题重述

如图1-1所示，飞行器需要从A点出发到达B点，但是飞行途中需要满足一定的限制条件。

飞行器飞行单位距离会产生一定的水平和垂直误差，必须要经过校正才能顺利到达终点。

飞行器的水平和垂直误差必须控制在一定限度内才能成功校正

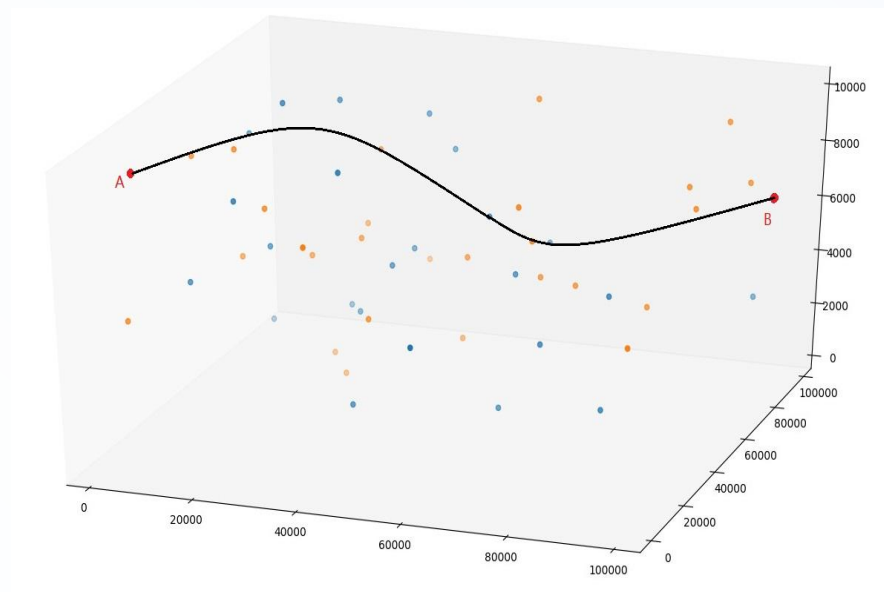


图1-1

表1-2给出了相应限制条件的参数取值（Excel1和Excel2为赛题所提供的2组校正点数据）

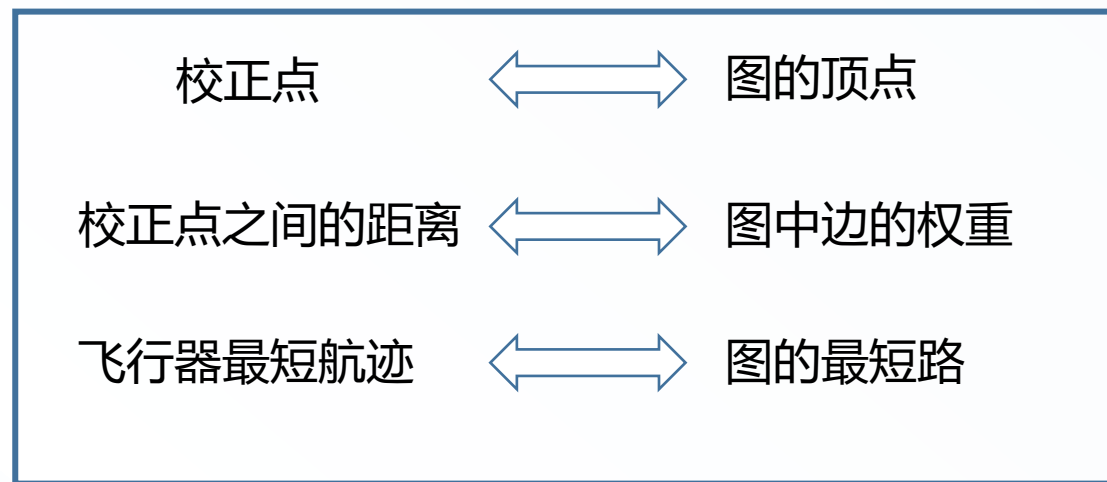
数据\来源	Excel1	Excel2
校正点个数	613	326
水平校正误差限	(25,15)	(20,10)
垂直校正误差限	(20,25)	(15,20)
单位飞行误差	0.001	0.001
终点校正误差限	30	20
转弯半径下限	200	200

表1-2

2.问题分析、模型的建立与求解

问题一：建立混合整数规划模型

问题一要求给出在不考虑飞行器转弯半径的限制条件下，路径最短和经过校正点最少的航迹。



最短路0-1整数规划模型:

符号	说明
w_{ij}	校正点i->j的欧氏距离
x_{ij}	表示航迹路径经过i->j的0-1变量
E	所有的可行边集合

表2-1 最短路径模型引入的符号

$$\min \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} x_{ij}$$

←·····
 目标函数为从A->B的路径长度

$$s.t. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = \sum_{(j,k) \in E} x_{jk}, \forall j \neq A, B \\ \sum_{(A,j) \in E} x_{Aj} = 1, \sum_{(j,A) \in E} x_{jA} = 0 \\ \sum_{(j,B) \in E} x_{jB} = 1, \sum_{(B,j) \in E} x_{Bj} = 0 \\ x_{ij} = 0 \text{ or } 1, \forall i, j \end{array} \right.$$

←·····
 每个校正点的入度等于出度

←·····
 起点A的入度为0，出度为1

←·····
 终点B的出度为0，入度为1

←·····
 0-1变量

引入顶点惩罚项和误差限制条件:

符号	说明
$h_i, v_i; I_i$	飞行器在 <i>i</i> 校正点的水平校正误差, 垂直校正误差; <i>i</i> 点的校正类型
δ	飞行器每单位飞行产生的偏差
θ	飞行器的飞行误差上限
α_1, α_2	飞行器垂直校正时的误差上限
β_1, β_2	飞行器水平校正时的误差上限
H, V	水平校正点集合, 垂直校正点集合
K	顶点项的惩罚系数

表2-2 新加入限制条件的符号说明

增加优化目标: 经过的校正点最少



目标函数中引入顶点惩罚项:

$$K \sum_{(i,j) \in E} x_{ij}$$

水平与垂直校正点误差不超过上限 α_i 、 β_i 与 θ

$$\begin{aligned}v_i &\leq \alpha_1, h_i \leq \alpha_2, i \in V \\v_i &\leq \beta_1, h_i \leq \beta_2, i \in H \\v_B &\leq \theta, h_B \leq \theta\end{aligned}$$

相邻校正点误差之间的关系

$$\begin{aligned}(I_i h_i + \delta w_{ij} - h_j) x_{ij} &= 0, (i, j) \in E \\((1 - I_i) v_i + \delta w_{ij} - v_j) x_{ij} &= 0, (i, j) \in E\end{aligned}$$

引入一个大数M ↓ **将限制条件线性化**

$$\begin{aligned}I_i h_i + \delta w_{ij} - h_j &\leq (1 - x_{ij}) M, (i, j) \in E \\(1 - I_i) v_i + \delta w_{ij} - v_j &\leq (1 - x_{ij}) M, (i, j) \in E\end{aligned}$$

问题一的最终模型 (混合整数规划) :

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} x_{ij} + K \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \\
 s.t. \leq & \begin{cases}
 \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = \sum_{(j,k) \in E} x_{jk}, \forall j \neq A, B \\
 \sum_{(A,j) \in E} x_{Aj} = 1, \sum_{(j,A) \in E} x_{jA} = 0 \\
 \sum_{(j,B) \in E} x_{jB} = 1, \sum_{(B,j) \in E} x_{Bj} = 0 \\
 x_{ij} = 0 \text{ or } 1, \forall i, j \\
 I_i h_i + \delta w_{ij} - h_j \leq (1 - x_{ij}) M, (i, j) \in E \\
 (1 - I_i) v_i + \delta w_{ij} - v_j \leq (1 - x_{ij}) M, (i, j) \in E \\
 v_i \leq \alpha_1, h_i \leq \alpha_2, i \in V \\
 v_j \leq \beta_1, h_j \leq \beta_2, j \in H \\
 v_B \leq \theta \\
 h_B \leq \theta
 \end{cases}
 \end{aligned}$$

问题一的求解

通过剪枝减少0-1变量数目

$$\delta w_{ij} \leq \min(\alpha_1, \alpha_2), j \in V$$

$$\delta w_{ij} \leq \min(\beta_1, \beta_2), j \in H$$

据此对可行边集合 E 进行剪枝。

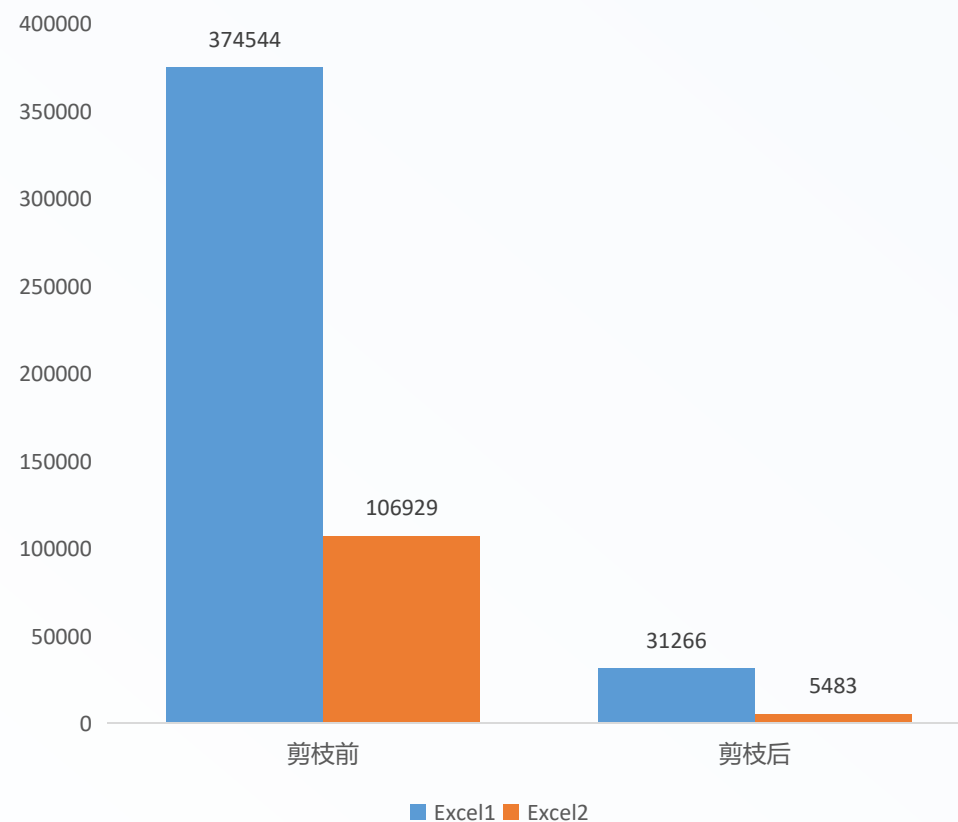


表2-3 剪枝前后变量数对比 (问题一)

调用Gurobi可以求得规划航迹路线如下:

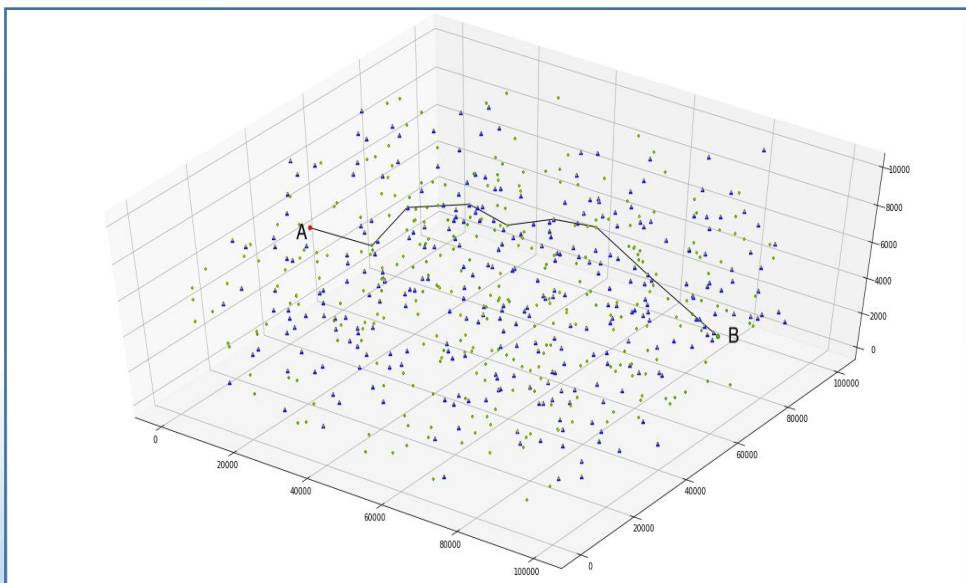


图2-4(a) excel1路径最短结果
(0->503->294->91->607->540->250->340->277->612)

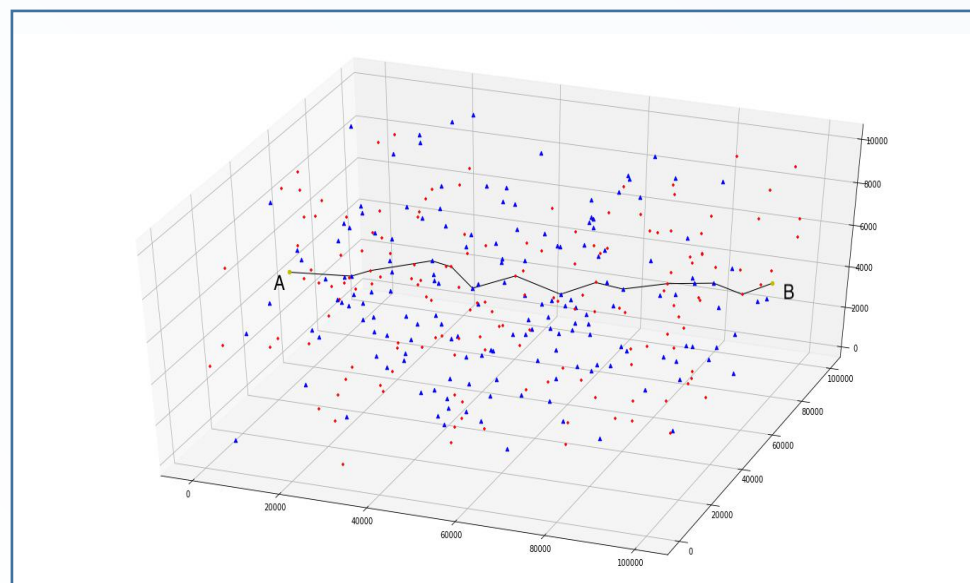


图2-4(b) excel2路径最短结果
(0->163->114->8->309->305->123->45->160->92->93->61
->292->326)

我们取K=10000分别计算了偏重校正次数最少和偏重航迹最短目标的最优路径长度，如右表2-5：

来源\属性	K	校正次数	航迹长度
Excel1	10000	8	104861
	0	9	103517
Excel2	10000	12	109342
	0	12	109342

表2-5

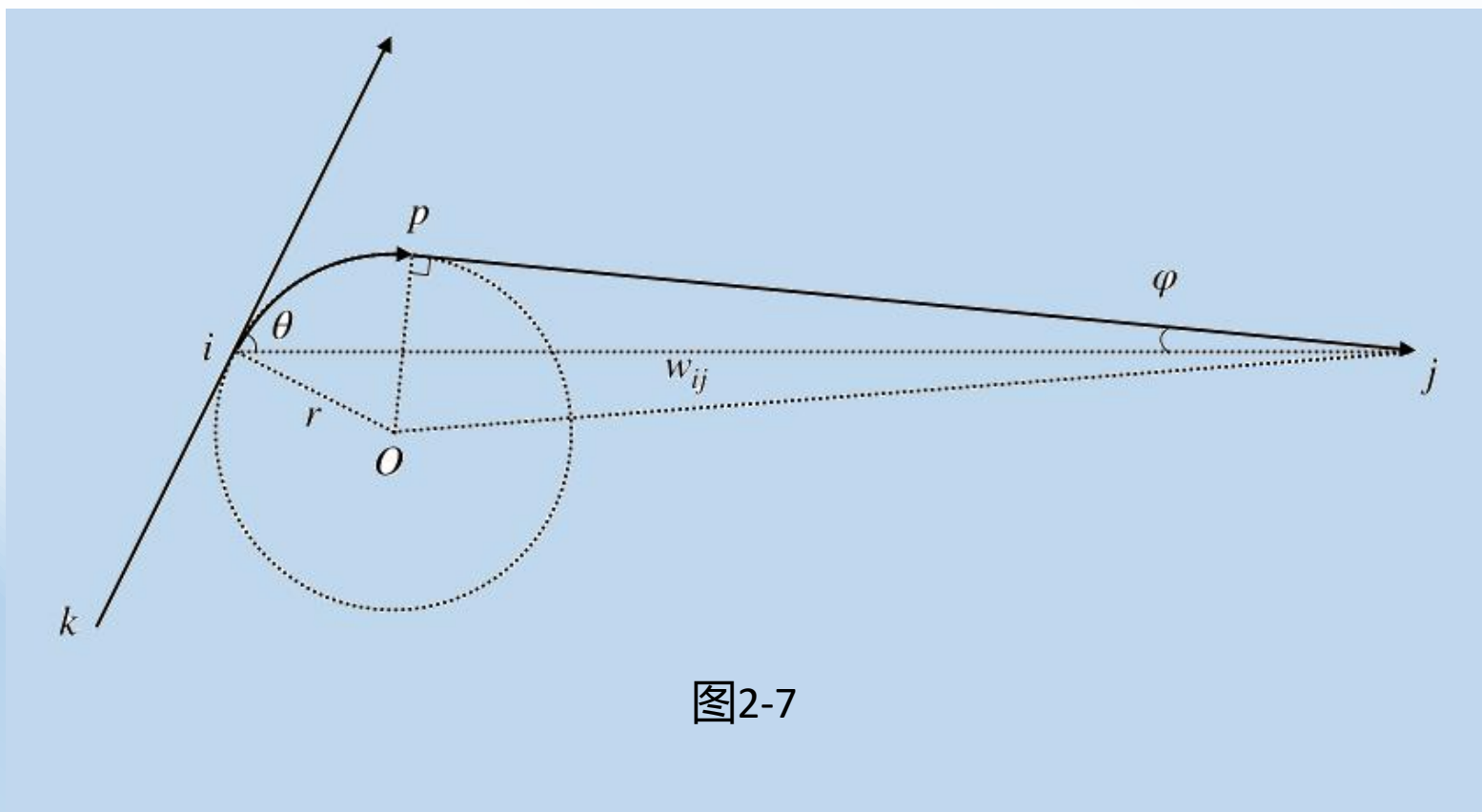
由于经过了剪枝优化，模型的求解时间得到了很大的优化，如右表2-6：

数据来源	求解时间
Excel1	15.11秒
Excel2	0.63秒

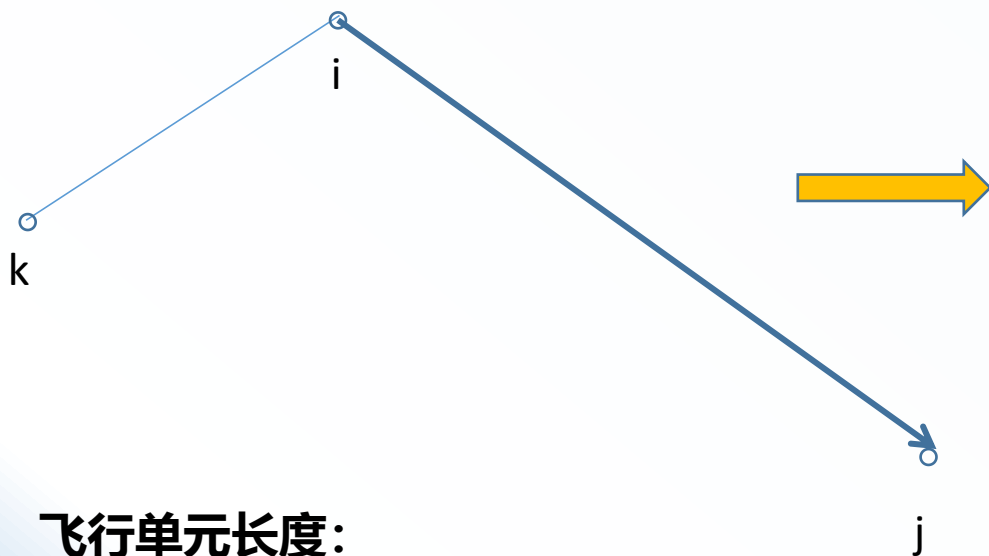
表2-6

问题二：引入圆弧+线段的航迹

问题二引入了飞行器的转弯半径要大于或等于200单位的限制，所以考虑航迹路径最短的原则，我们建立了如图2-7的航迹模式。



飞行模式：圆弧+线段



飞行单元长度:

对于 $r \ll w_{ij}$ 的情况，
近似认为 \vec{ki} 与 \vec{ij} 的
夹角等于圆弧的弧度。

$$dis(i, j) = r \arccos \frac{\langle \vec{ki}, \vec{ij} \rangle}{|\vec{ki}| |\vec{ij}|} + (w_{ij}^2 - 2rw_{ij} \sin \arccos \frac{\langle \vec{ki}, \vec{ij} \rangle}{|\vec{ki}| |\vec{ij}|})^{1/2}$$

新变量、目标函数的变化:

飞行器从k经由i飞往j的距离
 u_{kij} (新引入变量 $x_{ki} \wedge x_{ij}$)

航迹路径长度:

$$\sum_{(i,j) \in E} w_{ij} x_{ij}$$



$$\sum_{(k,i),(i,j) \in E} u_{kij} (x_{ki} \wedge x_{ij}) + \sum_{(A,i) \in E} w_{Ai} x_{Ai}$$

问题二模型:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{\substack{(k,i) \in E \\ (i,j) \in E}} u_{kij} (x_{ki} \wedge x_{ij}) + \sum_{(A,i) \in E} w_{Ai} x_{Ai} + K \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \\
 s.t. \quad & \begin{cases}
 \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = \sum_{(j,k) \in E} x_{jk}, \forall j \neq A, B \\
 \sum_{(A,j) \in E} x_{Aj} = 1, \sum_{(j,A) \in E} x_{jA} = 0 \\
 \sum_{(j,B) \in E} x_{jB} = 1, \sum_{(B,j) \in E} x_{Bj} = 0 \\
 x_{ij} = 0 \quad or \quad 1, \forall i, j \\
 I_i h_i + \delta u_{kij} - h_j \leq (2 - x_{ki} - x_{ij}) M \\
 (1 - I_i) v_i + \delta u_{kij} - v_j \leq (2 - x_{ki} - x_{ij}) M \\
 \delta w_{Aj} - h_j \leq (1 - x_{Aj}) M \\
 \delta w_{Aj} - v_j \leq (1 - x_{Aj}) M \\
 v_i \leq \alpha_1, h_i \leq \alpha_2, i \in V, \quad v_j \leq \beta_1, h_j \leq \beta_1, j \in H \\
 v_B, h_B \leq \theta
 \end{cases}
 \end{aligned}$$

问题二的求解

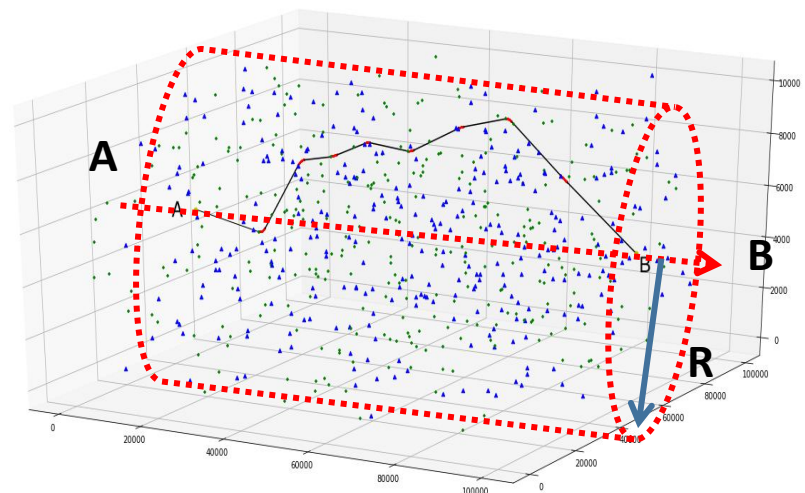
剪枝1（去掉边）

$$\delta w_{ij} \leq \min(\alpha_1, \alpha_2), j \in V$$

$$\delta w_{ij} \leq \min(\beta_1, \beta_2), j \in H$$

据此对可行边集合 E 进行
剪枝。

剪枝2（去掉顶点）



剪枝前后变量数变化：

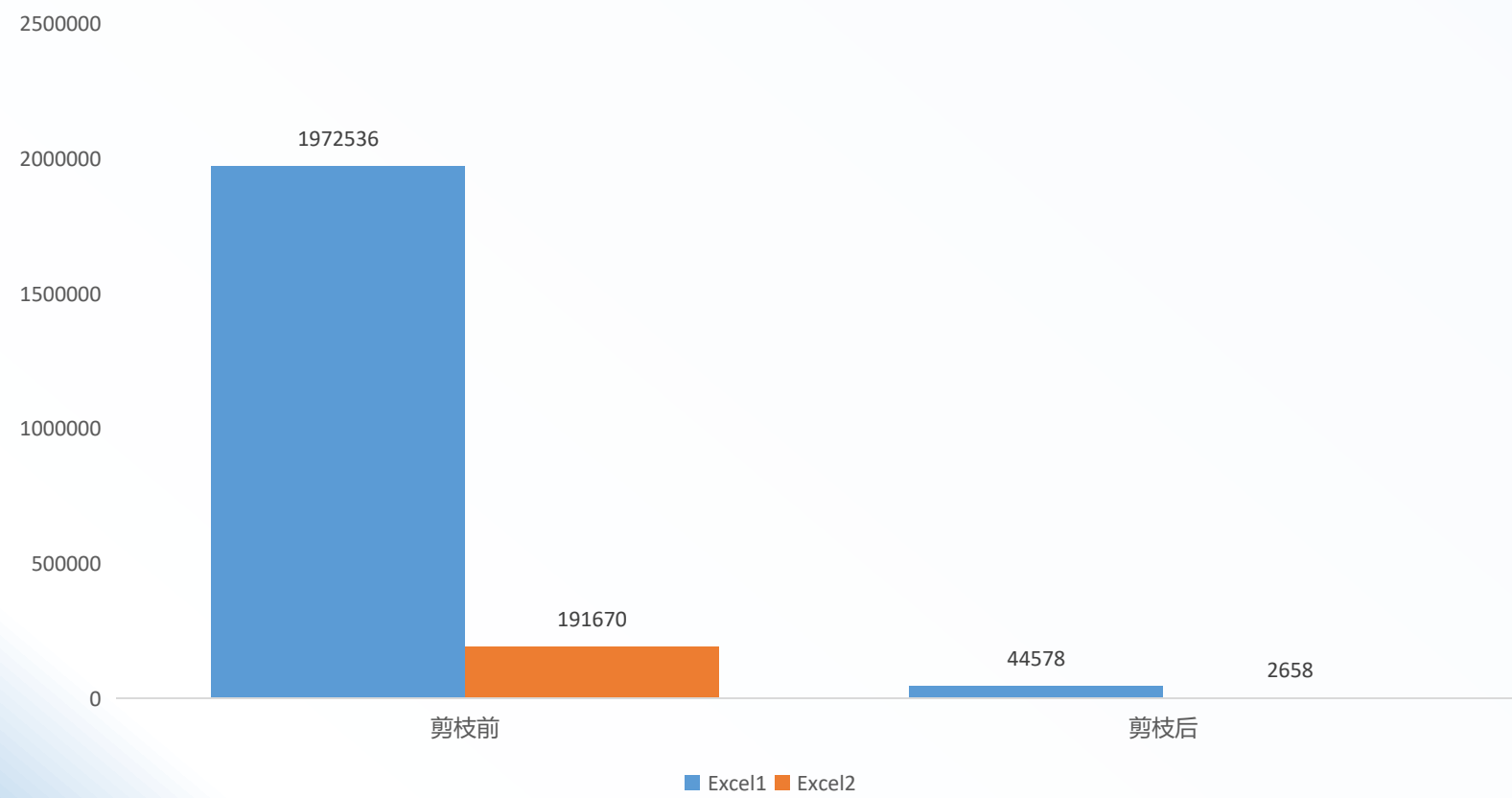


表2-9 剪枝前后变量数变化（问题二）

绘图算法：差分前进生成圆弧

假设已知初始位置为 y_0 ，初始方向 v_0 ；末位置为 y_N ，末位置方向为 v_1

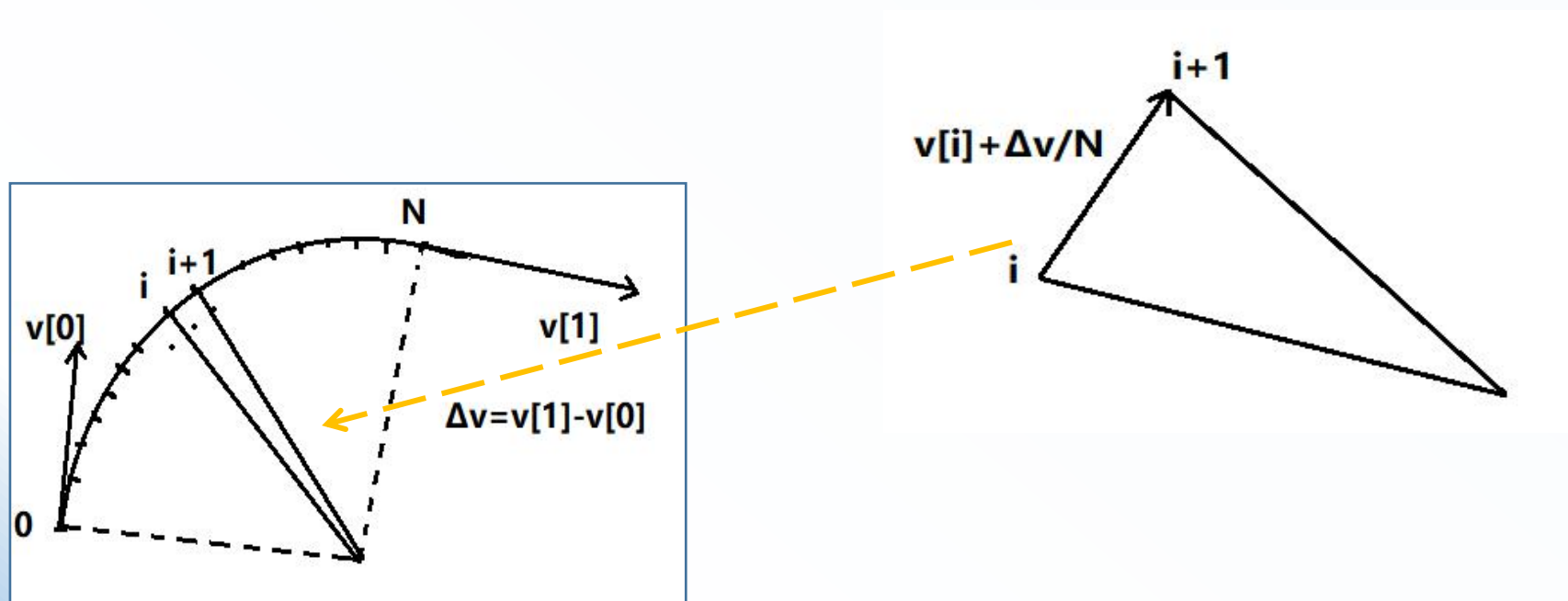


图2-10 圆弧生成算法图示

我们可以得到以下的递推表达式：

$$y_{i+1} = y_i + arc \cdot (v_0 + i \frac{v_1 - v_0}{N})$$

其中，arc表示小段圆弧的长度，它的估计公式为：

$$arc = \frac{\angle v_1, v_0 \cdot r}{N}$$

通过不断地用线段推进小圆弧，我们便生成了整段圆弧。

调用Gurobi可以求得规划航迹路线如下：

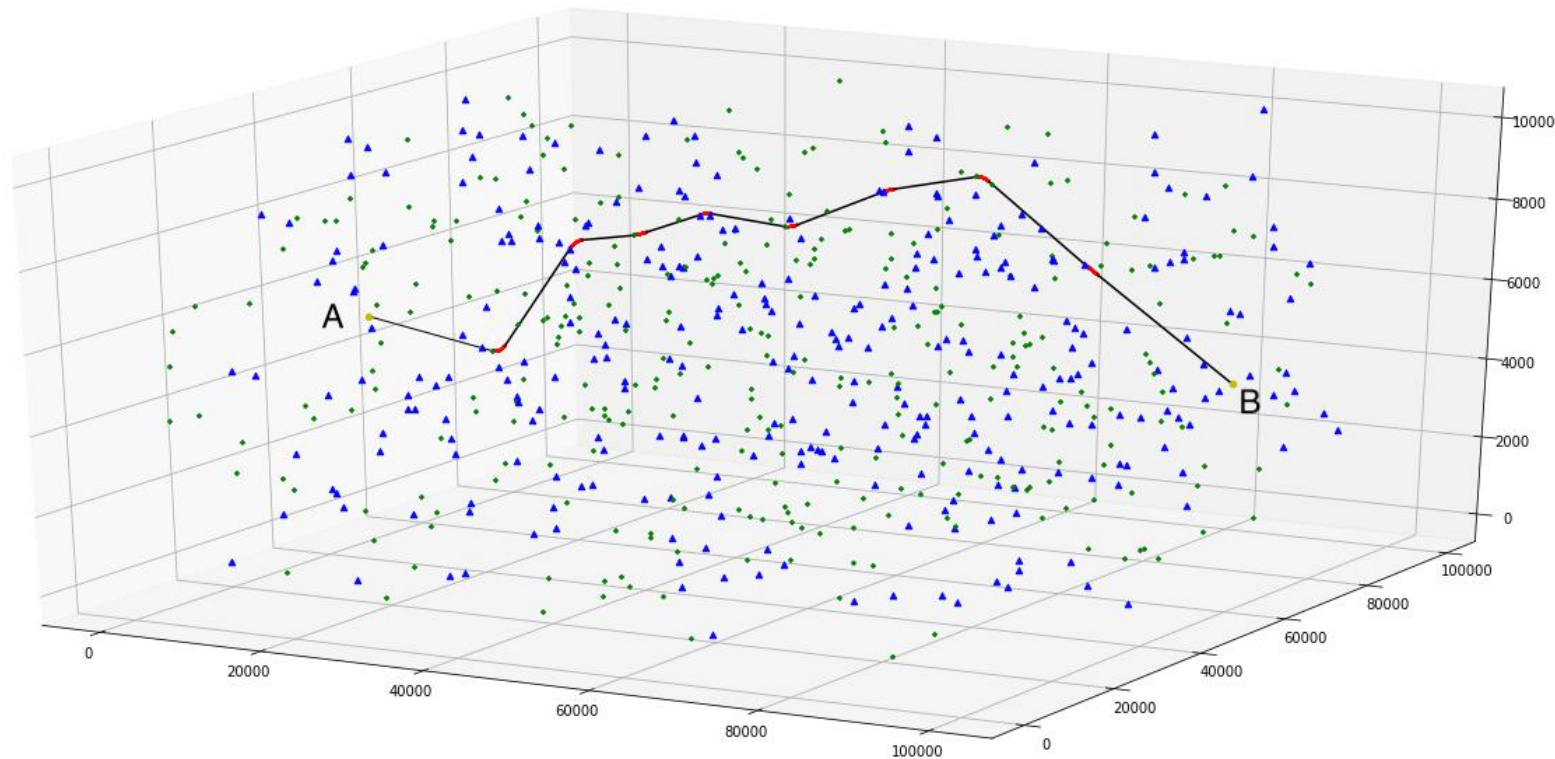


图2-11(a) excel1路径最短结果
(0->503->294->91->607->540->250->340->277->612)

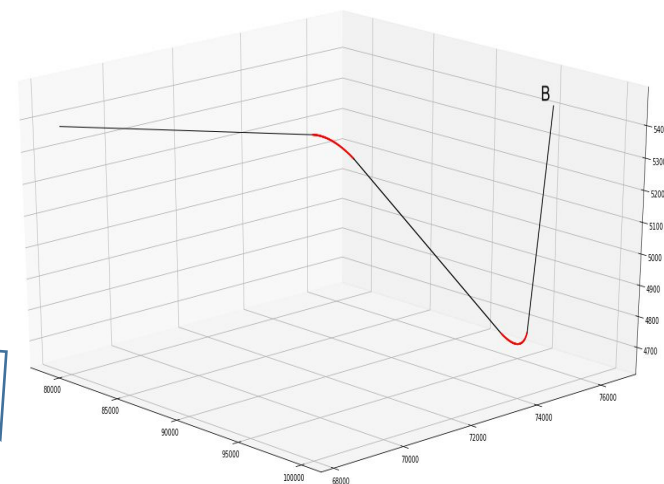
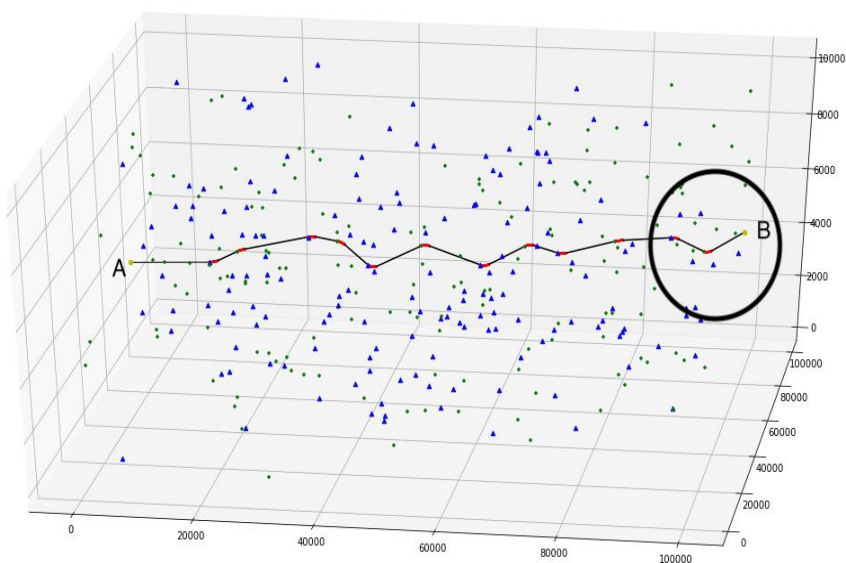


图2-11(b) excel2路径最短结果
(0->163->114->8->309->305->123
->45->160->92->93->61->292->326)

对于Excel1，我们取K=10000分别计算了偏重校正次数最少和偏重航迹最短目标的最优路径长度，如右表2-12：

来源\属性	K	校正次数	航迹长度
Excel1	10000	8	104874
	0	9	103536
Excel2	10000	12	109455
	0	12	109455

表2-12

由于经过了剪枝优化，模型的求解时间得到了优化，如右表2-13：

数据来源	求解时间
Excel1	40 分钟
Excel2	0.43秒

表2-13

问题三：考虑三种校正点的类型

考虑到存在一些校正点有20%的概率校正失败，我们将飞行器飞行路径上的校正点分为三种：

(1) 正常的校正点 ($\Lambda_i = 0$)

(2) 校正可能出现失败，但是即使校正失败依然能保证飞行器能顺利到达终点的校正点 ($\Lambda_i = 1, \Psi_i = 0$)

(3) 一旦校正失败，飞行器便无法到达终点的校正点 ($\Lambda_i = 1, \Psi_i = 1$)

限制条件与目标函数的变化

第一、二类顶点的误差限制条件

$$\Lambda_i(1-I_i)\min(h_i,5)+I_i h_i+\delta w_{ij}-h_j\leq(1-x_{ij})M$$

$$\Lambda_i I_i \min(v_i,5)+(1-I_i)v_i+\delta w_{ij}-v_j\leq(1-x_{ij})M$$

第三类顶点

要求飞行器以尽可能大的概率到达终点（第三类顶点最少）

考虑第三类顶点校正成功或失败对应的的误差限制

$$(1-\Psi_i)\Lambda_i(1-I_i)\min(h_i,5)+I_i h_i+\delta w_{ij}-h_j\leq(1-x_{ij})M$$

$$(1-\Psi_i)\Lambda_i I_i \min(v_i,5)+(1-I_i)v_i+\delta w_{ij}-v_j\leq(1-x_{ij})M$$

加入第三类顶点的惩罚项

$$C\sum_i \Psi_i$$

问题三模型:

$$\min \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} x_{ij} + K \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} + \boxed{C \sum_i \Psi_i}$$

$$s.t. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = \sum_{(j,k) \in E} x_{jk}, \forall j \neq A, B \\ \sum_{(A,j) \in E} x_{Aj} = 1, \sum_{(j,A) \in E} x_{jA} = 0 \\ \sum_{(j,B) \in E} x_{jB} = 1, \sum_{(B,j) \in E} x_{Bj} = 0 \\ x_{ij} = 0 \text{ or } 1, \forall i, j \\ \boxed{(1 - \Psi_i) \Lambda_i (1 - I_i) \min(h_i, 5) + I_i h_i + \delta w_{ij} - h_j \leq (1 - x_{ij}) M, (i, j) \in E} \\ \boxed{(1 - \Psi_i) \Lambda_i I_i \min(v_i, 5) + (1 - I_i) v_i + \delta w_{ij} - v_j \leq (1 - x_{ij}) M, (i, j) \in E} \\ v_i \leq \alpha_1, h_i \leq \alpha_2, i \in V, v_j \leq \beta_1, h_j \leq \beta_1, j \in H \\ v_B, h_B \leq \theta \end{array} \right.$$

问题三的求解结果

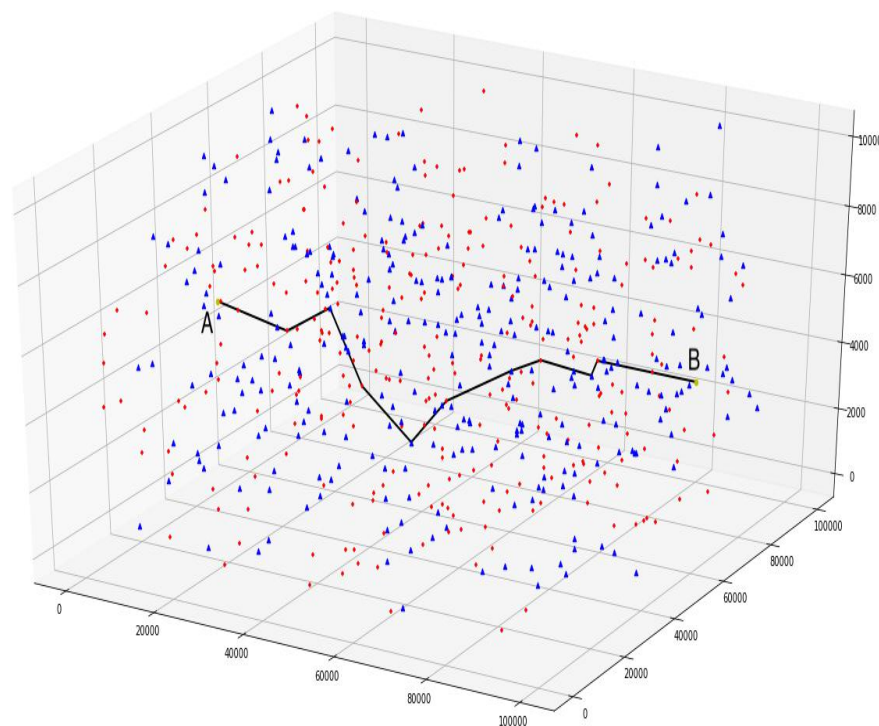


图2-15(a) excel1路径最短结果
(0->503->69->506->371->183
->194->450->286->485->612)

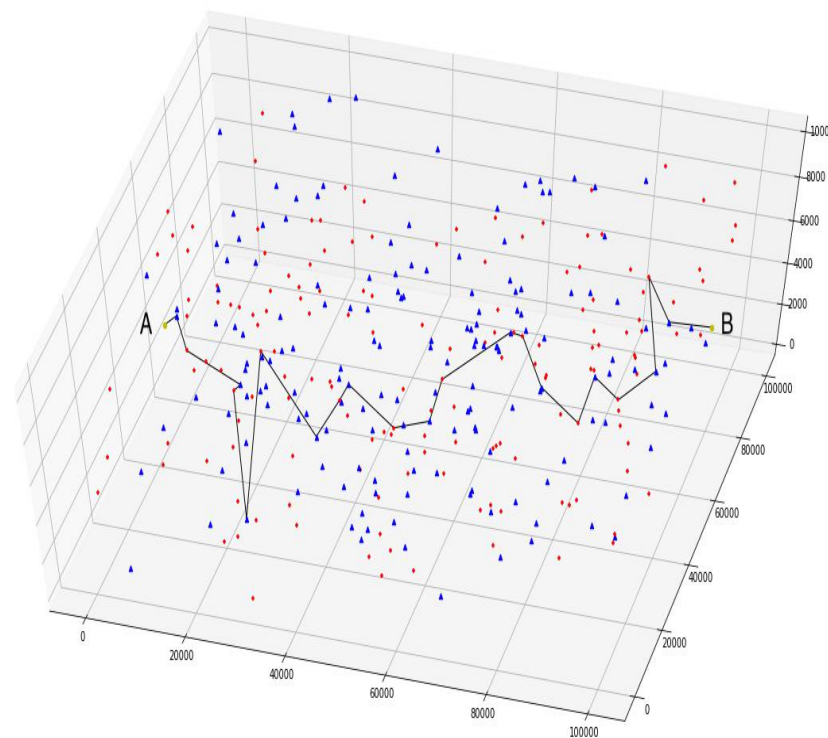


图2-15(b) excel2路径最短结果
(0->169->322->270->89->236
->132->53->112->268->250->243
->73->249->274->12->216->282
->141->291->161->326)

对于Excel1，我们取K=10000分别计算了偏重校正次数最少和偏重航迹最短目标的最优路径长度，如右表2-16：

来源\属性	K	校正次数	航迹长度
Excel1	10000	9	104864
	0	10	104827
Excel2	10000	21	161650
	0	21	161650

表2-16

经过和问题一相同的剪枝过程，模型的求解时间得到了优化，如右表2-17：

此外，沿着我们所计算出的路径飞行器从A->B的概率对于两组校正点数据都是100%。

数据来源	求解时间
Excel1	11.13秒
Excel2	0.99秒

表2-17

3.模型评价与分析

优点

- 1.建立了合理的规划模型，能够地快速求得精确解。
- 2.通过合理的剪枝，降低了问题的规模。
- 3.通过引入了惩罚系数，使得规划模型可以完成多目标的优化的任务。
- 4.模型具有良好的鲁棒性，在各种不同的数据集下，依然可以迅速给出最优的路径规划。

局限

问题二引入的圆弧+线段飞行模式中对圆弧的弧度大小做了一定的近似，这是在满足飞行器转弯半径远小于校正点距离的条件下才能做的假设，这对模型的精确性有一定的影响。

Thanks!