Projet 2
Courbes de Bézier et typographie

Judith AMIGO Christopher MAZZERBO Audrey POGGIALE

16 octobre 2022

Page de garde.

Table des matières

Première partie
Introduction des courbes de Bézier

Introduction introduction les courbes de Bézier c'est trop cool moi j'adore les courbes de Bézier parce qu'elles sont jolies et on peut dessiner des lettres j'adore vraiment les lettres c'est un peu comme les nombres mais sans les chiffres bref les courbes de Bézier c'est cool lisez notre rapport merci

1 Courbes de Bézier

On commencera par définir formellement les courbes de Bézier pour faciliter notre étude de la typographie moderne. En effet, les polices d'écriture sont très dépendantes des avancées mathématiques et informatiques faites par de nombreux mathématiciens, qui constitueront en partie notre travail de recherche dans ce document.

1.1 Définitions

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. On appelle polynôme de Bernstein les fonctions $B_k^n(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Définition

On appelle courbe de Bézier de degré $n \geq 1$, associé aux points de contrôles $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^2$, la courbe paramétrée $\gamma_c^n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\gamma_c^n(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) c_k, \qquad \forall t \in [0,1]$$

où B_k^n est le polynôme de Bernstein associé à k et n tel qu'il est défini au-dessus.

Notons que pour tracer une telle courbe sur un ordinateur, on peut choisir un *vecteur de discrétisation*, c'est-à-dire un $(t_i)_{0 \leq i \leq M-1} \in \mathbb{R}^M$ et représenter sur un graphique chaque $\gamma_c^n(t)$ obtenu pour chaque t_i, $i \in [\![0, M-1]\!]$.
Voir Fig. 1.1 pour exemple.

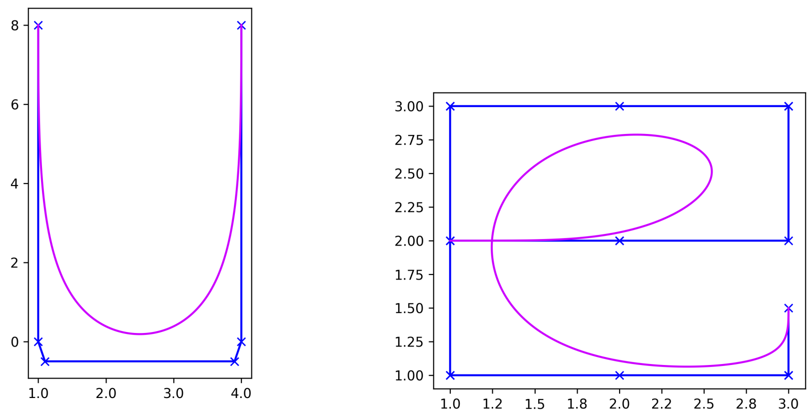
1.2 Propriétés

Insérez vos propriétés défoncées

je suis une propriété bonjour

On peut vérifier ces propriétés sur des exemples concrets qui nous aideront à visualiser les courbes de Bézier. En particulier, on peut s'intéresser à deux exemples dont les points de contrôles nous sont donnés, pour tracer les lettres U et e respectivement.

Figure 1 – Lettres représentées par une courbe de Bézier, U à gauche, e à droite



Points de contrôle pour U :

i	0	1	2	3	4	5
$c_i[0]$	1	1	1.1	3.9	4	4
$c_i[1]$	8	0	-0.5	-0.5	0	8

Points de contrôle pour e :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$c_i[0]$	1	2	2	3	3	3	2	1	1	1	1	1	2	3	3	3
$c_i[1]$	2	2	2	2	3	3	3	3	3	2	1	1	1	1	1	1.5

Notons qu'ici le vecteur de discrétisation choisi est défini par :

$$\forall i \in [\![0, 1000]\!], \quad t_i := \frac{i}{1000}$$

Le choix de $M = 1000$ a été fait arbitrairement pour donner une courbe lisse.

On peut observer ce qui se passe lorsqu'on échange des points de contrôle consécutifs (points identiques exclus). La courbe est modifiée autour des deux points de contrôle échangés, et on voit des répercussions sur le reste de la courbe.
On note aussi qu'un déplacement d'un point de contrôle déplace aussi la courbe.
Nous avons décidé de modéliser plusieurs étapes d'un déplacement de point pour visualiser explicitement le mouvement de la courbe relatif au point déplacé.

FIGURE 2 – Échange de points de contrôles consécutifs de la courbe de Bézier représentant la lettre e

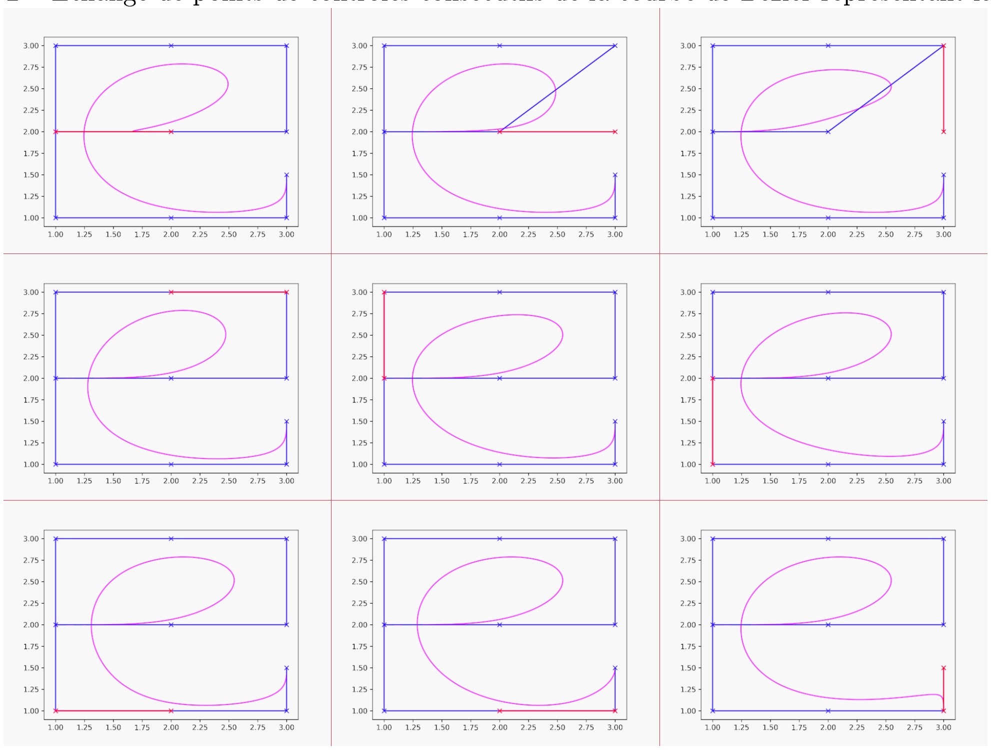


FIGURE 3 – Déplacement d'un point de contrôle de la courbe de Bézier représentant la lettre e

En rouge : *courbe de Bézier originale et polygone de contrôle associé*
En bleu : *courbe de Bézier obtenue et polygone de contrôle associé*

Des courbes intermédiaires ont été tracées pour représenter le mouvement de la courbe et du polygone.