
Projet 2
Courbes de Bézier et typographie

Judith AMIGO

Christopher MAZZERBO

Audrey POGGIALE

11 novembre 2022

Table des matières

I	Introduction des courbes de Bézier	3
1	Courbes de Bézier	3
1.1	Définitions	3
1.2	Propriétés	4
1.2.1	Expérimentation	6
1.3	Étude approfondie des courbes de Bézier	8
1.3.1	Lien avec la loi binomiale	8
1.3.2	Démonstration du Théorème de Bernstein	11
2	Interprétation géométrique	13
II	Application à la typographie	15
3	Déplacement et modification d'une courbe donnée	15
4	Division en Bézigons	17
5	Quelques caractères	21

Première partie

Introduction des courbes de Bézier

Les courbes de Bézier ont été décrites dans les années 60 et sont depuis utilisées dans de nombreux domaines, tels que l'automobile ou l'affichage numérique. Nous allons, au cours de ce rapport, étudier les caractéristiques de ces courbes paramétriques.

1 Courbes de Bézier

On commencera par définir formellement les courbes de Bézier pour faciliter notre étude de la typographie moderne. En effet, les polices d'écriture sont très dépendantes des avancées mathématiques et informatiques faites par de nombreux mathématiciens, qui constitueront en partie notre travail de recherche dans ce document.

1.1 Définitions

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On appelle polynômes de Bernstein de paramètres n, k , les fonctions $B_k^n(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Définition

On appelle courbe de Bézier de degré $n \geq 1$, associé aux points de contrôles $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}^2$, la courbe paramétrée $\gamma_c^n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\gamma_c^n(t) = \sum_{k=0}^n B_k^n(t) c_k, \quad \forall t \in [0, 1]$$

où B_k^n est le polynôme de Bernstein associé à k et n tel qu'il est défini au-dessus.

Notons que pour tracer une telle courbe sur un ordinateur, on peut choisir un *vecteur de discrétisation*, c'est-à-dire un $(t_i)_{0 \leq i \leq M-1} \in \mathbb{R}^M$ et représenter sur un graphique une approximation discrète de la courbe $\gamma_c^n(t_i)$ obtenue pour chaque $i \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$.

Voir [Fig. 1.1](#) pour exemple.

1.2 Propriétés

Propriétés :

- a) Une courbe paramétrée de Bézier est de classe C^∞ .
- b) La courbe de Bézier γ_c^n passe par les points c_0 et c_n .
- c) Le segment $[c_0, c_1]$ est tangent à la courbe en c_0 et le segment $[c_{n-1}, c_n]$ est tangent à la courbe en c_n . Plus précisément, les vecteurs vitesse $(\gamma_c^n(t))'$ en 0 et en 1 sont donnés par $(\gamma_c^n)'(0) = n(c_1 - c_0)$ et $(\gamma_c^n)'(1) = n(c_n - c_{n-1})$.

Démonstration.

- a) $\gamma_c^n(t)$ est une somme de polynômes de Bernstein multipliés par un vecteur de \mathbb{R}^2 . Chacun des termes de cette somme est une fonction polynomiale, donc sera C^∞ . Ainsi une courbe paramétrée de Bézier est de classe C^∞ .
- b) Nous allons montrer que la courbe de Bézier $\gamma_c^n(t)$ passe par les points c_0 et c_n .
Par définition de la courbe de Bézier on a :

$$\begin{aligned}\gamma_c^n(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot t^k \cdot (1-t)^{n-k} \cdot c_k \\ &= \binom{n}{0} \cdot t^0 \cdot (1-t)^{n-0} \cdot c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot t^k \cdot (1-t)^{n-1-k} \cdot c_k + \binom{n}{n} \cdot t^n \cdot (1-t)^{n-n} \cdot c_n\end{aligned}$$

On a donc en remplaçant t par 0 puis par 1 :

$$\gamma_c^n(0) = \binom{n}{0} \cdot 0^0 \cdot (1-0)^{n-0} \cdot c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot 0^k \cdot (1-0)^{n-1-k} \cdot c_k + \binom{n}{n} \cdot 0^n \cdot (1-0)^0 \cdot c_n = c_0$$

et

$$\gamma_c^n(1) = \binom{n}{0} \cdot 1^0 \cdot (1-1)^{n-0} \cdot c_0 + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot 1^k \cdot (1-1)^{n-1-k} \cdot c_k + \binom{n}{n} \cdot 1^n \cdot (1-1)^0 \cdot c_n = c_n$$

- c) Nous allons montrer que le segment $[c_0, c_1]$ est tangent à la courbe $\gamma_c^n(t)$ en c_0 et le segment $[c_{n-1}, c_n]$ est tangent à la courbe en c_n . Plus précisément, les vecteurs vitesse $(\gamma_c^n(t))'$ en 0 et en 1 sont donnés par $(\gamma_c^n)'(0) = n(c_1 - c_0)$ et $(\gamma_c^n)'(1) = n(c_n - c_{n-1})$.
Calculons d'abord $(B_k^n)'(t)$. Pour $1 \leq k \leq n-1$ on a :

$$\begin{aligned}(B_k^n)'(t) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k \cdot t^{k-1} \cdot (1-t)^{n-k} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot t^k \cdot (-(1-t)^{n-k-1}) \cdot (n-k) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot t^{k-1} \cdot (1-t)^{n-k} - \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot t^k \cdot (1-t)^{n-k-1} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot t^{k-1} \cdot (1-t)^{n-k} - n \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \cdot t^k \cdot (1-t)^{n-k-1} \\ &= n \cdot (B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t))\end{aligned}$$

De plus, pour $k = n$, on a :

$$(B_n^n)'(t) = n \cdot t^{n-1}$$

Et pour $k = 0$, on a :

$$(B_0^n)'(t) = -n \cdot (1-t)^{n-1}$$

Calculons ensuite $(\gamma_c^n)'(t)$:

$$\begin{aligned} (\gamma_c^n)'(t) &= \sum_{k=0}^n (B_k^n)'(t) c_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} n \cdot (B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t)) c_k + n \cdot t^{n-1} \cdot c_n - n \cdot (1-t)^{n-1} \cdot c_0 \end{aligned}$$

Calculons maintenant $(\gamma_c^n)'(0)$. On a, pour $t = 0$:

$$\begin{aligned} -t^{k-1} &= 1 \text{ si } k = 1, \quad t^{k-1} = 0^{k-1} = 0 \quad \text{si } k > 1 \\ -t^k &= 1 \text{ si } k = 0, \quad t^k = 0 \quad \text{si } k > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} (\gamma_c^n)'(0) &= \overbrace{-n \cdot 1^{n-1} \cdot c_0}^{k=0} + \overbrace{n(1 \cdot 1 \cdot 1 - 0)c_1}^{k=1} + \overbrace{0}^{k=2} + \cdots + \overbrace{0}^{k=n} \\ &= -nc_0 + nc_1 \\ &= n(c_1 - c_0) \end{aligned}$$

Ainsi, le segment $[c_0, c_1]$ est tangent à la courbe γ_c^n en c_0 .

Calculons maintenant $(\gamma_c^n)'(1)$. On a, pour $t = 1$:

$$\begin{aligned} -(1-t)^{k-1} &= 1 \text{ si } k = 1, \quad (1-t)^k = 0 \quad \text{si } k > 1 \\ -(1-t)^k &= 1 \text{ si } k = 0, \quad (1-t)^k = 0 \quad \text{si } k > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a le résultat suivant :

$$\begin{aligned} (\gamma_c^n)'(1) &= \overbrace{0}^{k=0} + \cdots + \overbrace{0}^{k=n-2} - nc_{n-1} + nc_n \\ &= n(c_n - c_{n-1}) \end{aligned}$$

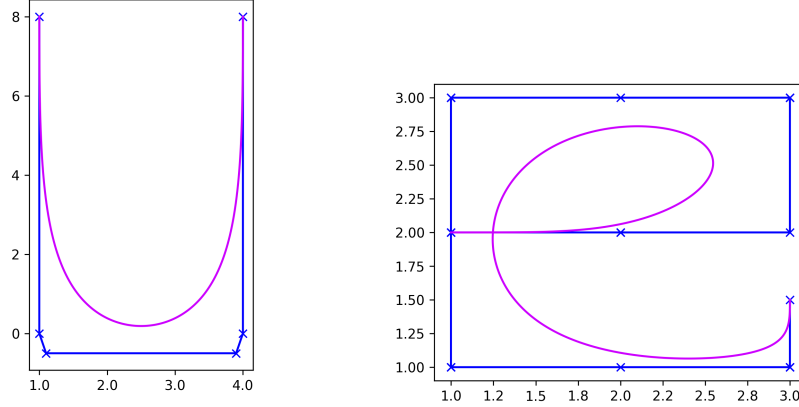
Ainsi, le segment $[c_{n-1}, c_n]$ est tangent à la courbe γ_c^n en c_n .

□

1.2.1 Expérimentation

On peut vérifier ces propriétés sur des exemples concrets qui nous aideront à visualiser les courbes de Bézier. En particulier, on peut s'intéresser à deux exemples dont les points de contrôle nous sont donnés, pour tracer les lettres « U » et « e » respectivement.

FIGURE 1 – Lettres représentées par une courbe de Bézier, U à gauche, e à droite



Points de contrôle pour U :

i	0	1	2	3	4	5
$c_i[0]$	1	1	1.1	3.9	4	4
$c_i[1]$	8	0	-0.5	-0.5	0	8

Points de contrôle pour e :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$c_i[0]$	1	2	2	3	3	3	2	1	1	1	1	1	2	3	3	3
$c_i[1]$	2	2	2	2	3	3	3	3	3	2	1	1	1	1	1	1.5

Notons qu'ici le vecteur de discrétisation choisi est défini par :

$$\forall i \in \llbracket 0, 1000 \rrbracket, \quad t_i := \frac{i}{1000}$$

Le choix de $M = 1000$ a été fait arbitrairement pour donner une courbe lisse.

On peut observer ce qui se passe lorsqu'on échange des points de contrôle consécutifs (points identiques exclus). La courbe est modifiée autour des deux points de contrôle échangés, et on voit des répercussions sur le reste de la courbe.

On note aussi qu'un déplacement d'un point de contrôle déplace aussi la courbe.

Nous avons décidé de modéliser plusieurs étapes d'un déplacement de point pour visualiser explicitement le mouvement de la courbe relatif au point déplacé.

FIGURE 2 – Échange de points de contrôles consécutifs de la courbe de Bézier représentant la lettre e (ajouter figure originale pour comparaison)

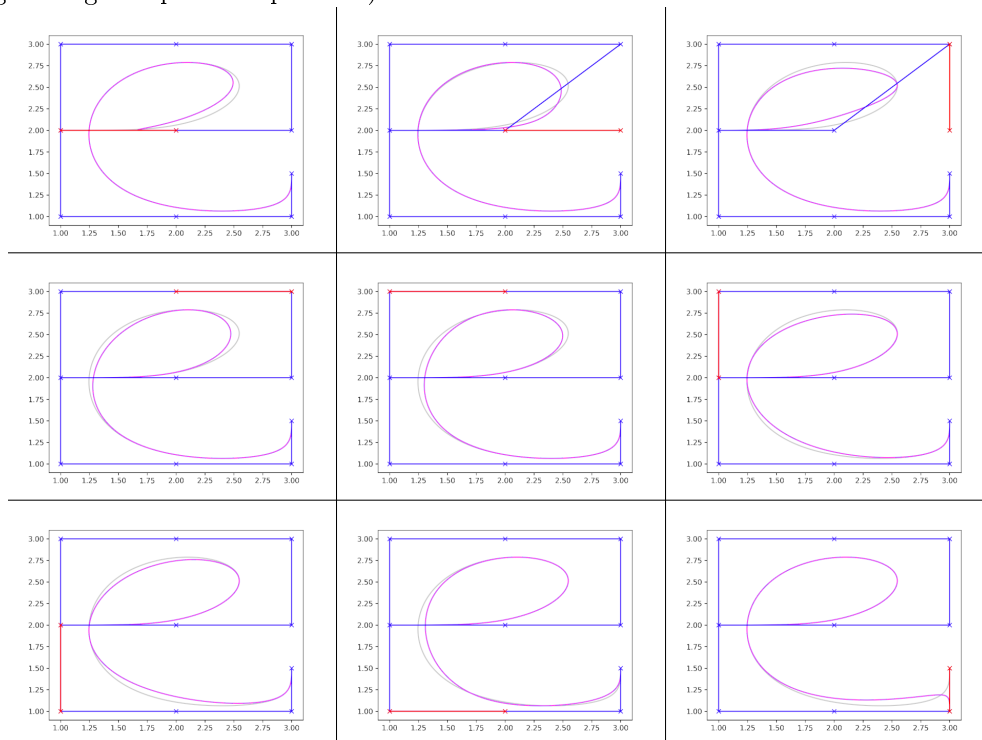
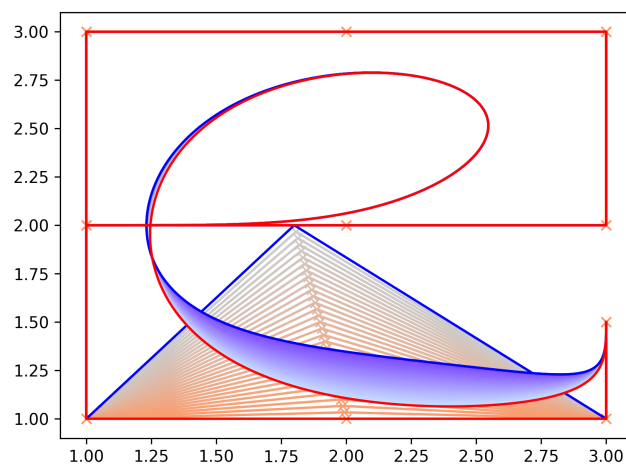


FIGURE 3 – Déplacement d'un point de contrôle de la courbe de Bézier représentant la lettre e

En rouge : courbe de Bézier originale et polygone de contrôle associé
 En bleu : courbe de Bézier obtenue et polygone de contrôle associé

Des courbes intermédiaires ont été tracées pour représenter le mouvement de la courbe et du polygone.



1.3 Étude approfondie des courbes de Bézier

Dans cette section, nous utiliserons les résultats du théorème suivant, que l'on démontrera dans la sous-section 1.3.2 :

Théorème de Bernstein :

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . La suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \forall t \in [0, 1], \quad B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^n B_k^n(t) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

converge uniformément vers f quand $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que :

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - B_n(f)(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

1.3.1 Lien avec la loi binomiale

On remarque que la formule du Binôme de Newton nous donne :

$$\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = (1-t+t)^n = 1$$

Cela permet, pour tout t , de dire que la suite de fonctions $B_n(f)(t)$ est une moyenne pondérée des points de contrôle, puisqu'on a :

$$B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^n B_k^n(t) f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=0}^n B_k^n(t) f\left(\frac{k}{n}\right)}{\sum_{k=0}^n B_k^n(t)}$$

Comme on a $t \in [0, 1]$, on remarque $B_k^n(t) = \mathbb{P}(X = k)$ où $X \sim \mathcal{Bin}(n, t)$ où une définition possible de la loi binomiale est :

$X = X_1 + \dots + X_n$ et où, $\forall i, X_i \sim \mathcal{Ber}(t)$ est une v.a.i.i.d avec $\mathbb{P}(X_i = 1) = t$ et $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - t$.

On a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} B_k^n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} E(X) = \frac{nt}{n} = t$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - t\right)^2 B_k^n(t) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - t\right)^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{2k}{n}t + t^2\right) \mathbb{P}(X = k) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 \mathbb{P}(X = k) - \underbrace{\sum_{k=0}^n \left(\frac{2k}{n}t + t^2\right) \mathbb{P}(X = k)}_{\alpha} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - t\right)^2 B_k^n(t) = \frac{E(X^2)}{n^2} - \alpha$$

Or

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left[\frac{2t}{n} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) - t^2 \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \right] \\
&= \left[\frac{2t}{n} \times nt - t^2 \right] \\
&= \frac{n^2 t^2}{n^2} \\
&= \frac{E(X)^2}{n^2}
\end{aligned}$$

Enfin, comme la variance d'une loi binomiale de paramètres n, t est $nt(t-1)$:

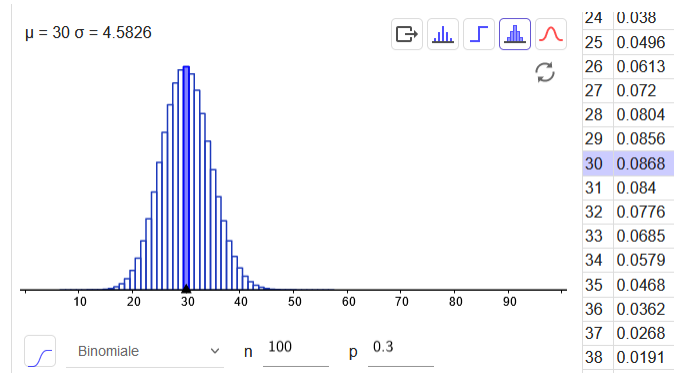
$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - t \right)^2 B_k^n(t) = \frac{E(X^2) - E(X)^2}{n^2} = \frac{V(X)}{n^2} = \frac{t(t-1)}{n} \quad (1)$$

Tests sur une simulation de loi binomiale

Dans la partie suivante, nous allons fixer $t = 0.3$ et étudier des simulations de lois binomiales pour des paramètres n différents.

Nous fixons donc $t = 0,3$ et $n = 100$.

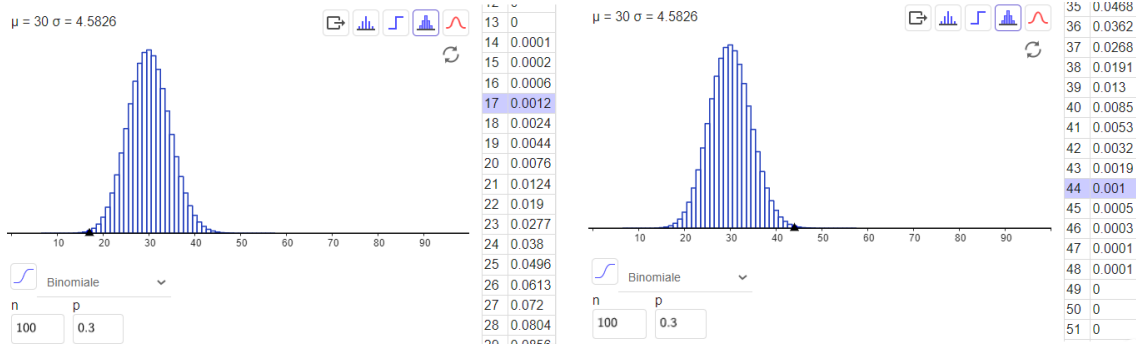
Grâce à un [lien GeoGebra](#), on trouve un coefficient maximal de $B_k^n(t)$ pour une valeur de $k = 30$, on a alors $B_{30}^{100}(t) \approx 0,0868$.



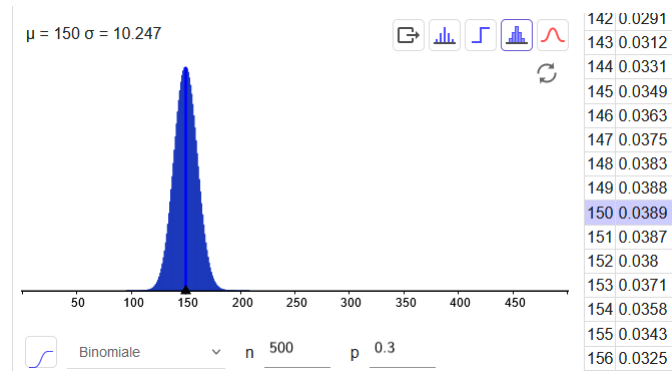
D'après (1) on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{k}{100} B_k^n(t) &= 0,3 \\
\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n k B_k^n(t) &= 30, \text{ ce qui est donc égal au } k \text{ pour lequel } B_k^n \text{ est maximal.}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant déterminer les valeurs de $\frac{k}{n}$ pour lesquelles on obtient des coefficients $B_k^n(t)$ supérieurs à un centième du coefficient maximal. À l'aide du lien ci-dessus, nous remarquons (image : geogebra3) que pour $17 \leq k \leq 44$ on a bien $B_k^n(t) \geq \frac{0,0868}{100}$:



Fixons maintenant $n = 500$. Toujours grâce au lien ci-dessus, nous trouvons que le coefficient est maximal quand $k = 150$.



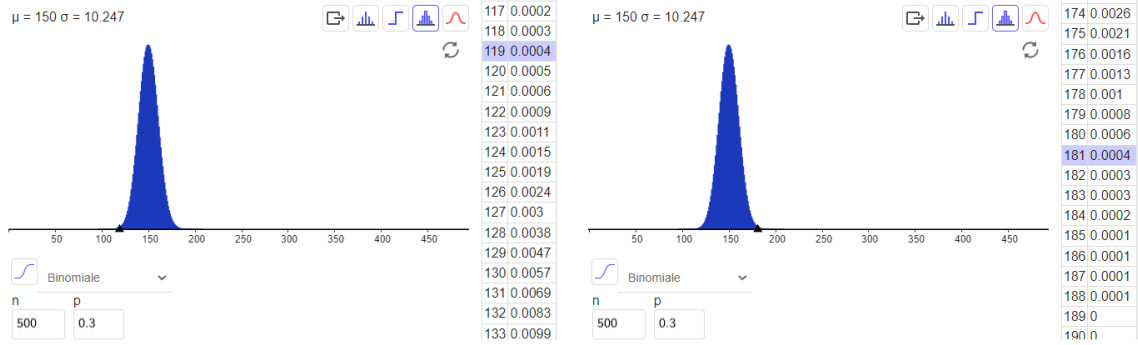
On a alors $B_{30}^{500}(t) \approx 0,0389$.

D'après (1) on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{500} B_k^n(t) = 0,3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n k B_k^n(t) = 150, \text{ ce qui est donc égal au } k \text{ pour lequel } B_k^n \text{ est maximal.}$$

Nous allons maintenant déterminer les valeurs de $\frac{k}{n}$ pour lesquelles on obtient des coefficients $B_k^n(t)$ supérieurs à un centième du coefficient maximal. À l'aide du lien, nous remarquons (image : geogebra4) que pour $119 \leq k \leq 181$ on a bien $B_k^n(t) \geq \frac{0,0389}{100}$:



1.3.2 Démonstration du Théorème de Bernstein

On va montrer que $f(t) - B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^n \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_k^n(t)$.

On a :

$$f(t) - B_n(f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n B_k^n(t) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Comme $\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1$ on a $f(t) = f(t) \times \sum_{k=0}^n B_k^n(t)$.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} f(t) - B_n(f)(t) &= f(t) \times \sum_{k=0}^n B_k^n(t) - \sum_{k=0}^n B_k^n(t) f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n B_k^n(t) f(t) - \sum_{k=0}^n B_k^n(t) f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left[B_k^n(t) f(t) - B_k^n(t) f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[B_k^n(t) \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right] \end{aligned}$$

A l'aide des calculs précédents, on va montrer que $|f(t) - B_n(f)(t)| \leq M \sum_{k=0}^n \left| t - \frac{k}{n} \right| B_k^n(t)$

avec $M = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$ On a :

$$\begin{aligned} |f(t) - B_n(f)(t)| &= \left| \sum_{k=0}^n B_k^n(t) \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| B_k^n(t) \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| = \sum_{k=0}^n \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_k^n(t), \text{ car } B_k^n(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Rappelons l'inégalité des accroissements finis :

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On suppose qu'il existe $c \geq 0$ tel que, pour tout $t \in [0, 1]$, $|f'(t)| \leq c$. Alors, pour tous $t_1 \in [0, 1]$ et $t_2 \in [0, 1]$, on a : $|f(t_2) - f(t_1)| \leq c|t_2 - t_1|$.

Posons $M := \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$, $t_1 = \frac{k}{n}$ et $t_2 = t$, alors on a :

$$\begin{aligned} |f(t) - B_n(f)(t)| &\leq \sum_{k=0}^n M \left| t - \frac{k}{n} \right| B_n^k(t) \\ &\leq M \sum_{k=0}^n \left| t - \frac{k}{n} \right| B_n^k(t) \end{aligned}$$

A l'aide des calculs précédents, on va montrer que $|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \frac{M}{\sqrt{n}} \sqrt{t(1-t)} \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}$. On a :

$$\begin{aligned} |f(t) - B_n(f)(t)| &\leq M \sum_{k=0}^n \left| t - \frac{k}{n} \right| B_n^k(t) \\ &\leq M \sum_{k=0}^n \left| t - \frac{k}{n} \right| \sqrt{B_n^k(t)} \sqrt{B_n^k(t)}, \text{ car } B_n^k(t) \geq 0 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\begin{aligned} |f(t) - B_n(f)(t)| &\leq M \left(\sum_{k=0}^n \left(\left| t - \frac{k}{n} \right| \sqrt{B_n^k(t)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^n \left(\sqrt{B_n^k(t)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M \left(\sum_{k=0}^n \left(\left| t - \frac{k}{n} \right| \sqrt{B_n^k(t)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^n B_n^k(t)}_{=1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M \left(\sum_{k=0}^n \left(t - \frac{k}{n} \right)^2 B_n^k(t) \right)^{\frac{1}{2}} \times 1^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M \left(\frac{1(1-t)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M \frac{\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Pour $t \in [0, 1]$, posons :

$$g : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto t - t^2 \end{cases}$$

Calculons $g'(t)$, on a : $g'(t) = 1 - 2t$.

La fonction g est donc croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Elle atteint son maximum en $t = \frac{1}{2}$ et on a donc :

$$|f(t) - B_n(f)(t)| \leq M \frac{\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{n}} \leq M \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}}{\sqrt{n}} = \frac{M}{2\sqrt{n}}$$

2 Interprétation géométrique

On s'intéressera dans cette partie à la méthode de De Casteljau :

On prend $t \in [0, 1]$, et on définit par récurrence :

$$c_0^1 = (1-t)c_0 + tc_1, \dots, c_{n-1}^1(t) = (1-t)c_{n-1} + tc_n$$

puis

$$c_0^2 = (1-t)c_0^1(t) + tc_1^1(t), \dots, c_{n-1}^2(t) = (1-t)c_{n-1}^1(t) + tc_n^1(t)$$

et ainsi de suite $c_i^{m+1}(t) = (1-t)c_i^m(t) + tc_{i+1}^m(t)$ pour $m = 0, \dots, n-1$ et $i = 0, \dots, n-m$, jusqu'à ce qu'on arrive à un point unique :

$$\delta_c^n(t) = c_0^n(t) = (1-t)c_0^{n-1}(t) + tc_1^{n-1}(t)$$

Proposition :

Les courbes de Bézier γ_c^n et de De Casteljau δ_c^n sont confondues pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Nous allons d'abord démontrer cette proposition pour un cas particulier $n = 3$, puis nous le montrerons dans le cas général.

- a) Nous allons montrer que si $n = 3$, les courbes de Bézier γ_c^3 et de De Casteljau δ_c^3 sont confondues.

Calculons d'abord γ_c^3 , on a :

$$\begin{aligned} \gamma_c^3 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} t^k (1-t)^{3-k} c_k \\ &= \binom{3}{0} t^0 (1-t)^3 c_0 + \binom{3}{1} t^1 (1-t)^2 c_1 + \binom{3}{2} t^2 (1-t) c_2 + \binom{3}{3} t^3 (1-t)^0 c_3 \\ &= (1-t)^3 c_0 + 3t(1-t)^2 c_1 + 3t^2(1-t) c_2 + t^3 c_3 \end{aligned}$$

Calculons maintenant δ_c^3 , on a :

$$\begin{aligned} \delta_c^3 &= (1-t)c_0^2(t) + tc_1^2(t) \\ &= (1-t)^2 c_0^1(t) + (1-t)tc_1^1(t) + t(1-t)c_1^1(t) + t^2 c_2^1(t) \\ &= (1-t)^3 c_0 + t(1-t)^2 c_1 + (1-t)^2 tc_1 + (1-t)t^2 c_2 + (1-t)^2 tc_1 + t^2(1-t)c_2 + t^2(1-t)c_2 + t^3 c_3 \\ &= (1-t)^3 c_0 + 3t(1-t)^2 c_1 + 3t^2(1-t) c_2 + t^3 c_3 \\ &= \gamma_c^3 \end{aligned}$$

- b) Grâce aux formules suivantes définies par récurrence :

$$c_0^1(t) = (1-t)c_0 + t \cdot c_1, \dots, c_{n-1}^1(t) = (1-t) \cdot c_{n-1} + t \cdot c_n$$

On généralise $\forall t \in [0, 1], \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$c_i^1(t) = (1-t)c_i + t \cdot c_{i+1}$$

et, de façon similaire, en utilisant :

$$c_0^2(t) = (1-t)c_0^1(t) + t \cdot c_1^1(t), \quad \dots, \quad c_{n-2}^2(t) = (1-t)c_{n-2}^1(t) + t \cdot c_{n-1}^1(t)$$

On généralise : $\forall t \in [0, 1], \forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$:

$$c_i^2(t) = (1-t)c_i^1(t) + tc_{i+1}^1(t) = (1-t)((1-t)c_i + tc_{i+1}) + t((1-t)c_{i+1} + tc_{i+2}) = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} (1-t)^{2-k} t^k c_{i+k}$$

Pour généraliser encore plus, $\forall t \in [0, 1], \forall m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall i \in \llbracket 0, n-m \rrbracket$, on suppose la formule suivante vraie pour un m donné, et on va montrer qu'elle est vraie pour $m+1$:

$$c_i^m(t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (1-t)^{m-k} t^k c_{i+k}$$

Calculons donc

$$\begin{aligned} c_i^{m+1}(t) &= (1-t)c_i^m(t) + tc_{i+1}^m(t) \\ &= (1-t) \sum_{k=0}^m \left(\binom{m}{k} (1-t)^{m-k} t^k c_{i+k} \right) + t \sum_{k=0}^m \left(\binom{m}{k} (1-t)^{m-k} t^k c_{i+1+k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^m \left(\binom{m}{k} (1-t)^{m+1-k} t^k c_{i+k} \right) + \sum_{k=0}^m \left(\binom{m}{k} (1-t)^{m-k} t^{k+1} c_{i+1+k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^m \left(\binom{m}{k} (1-t)^{m+1-k} t^k c_{i+k} \right) + \sum_{k=1}^{m+1} \left(\frac{m!}{(m+1-k)!(k-1)!} (1-t)^{m+1-k} t^k c_{i+k} \right) \\ &= \binom{m}{0} (1-t)^{m+1} \cdot t^0 c_i + \frac{m!}{(m+1-m-1)!(m+1-1)!} (1-t)^{m+1-(m+1)} t^{m+1} c_{i+m+1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left(\left(\binom{m}{k} + \frac{m!}{(m+1-k)!(k-1)!} \right) (1-t)^{m+1-k} t^k c_{i+k} \right) \\ &= (1-t)^{m+1} c_i + t^{m+1} c_{i+m+1} + \sum_{k=1}^m \frac{m!(m+1-k) + m!k}{(m+1-k)!k!} (1-t)^{m+1-k} t^k c_{i+k} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (1-t)^{m+1-k} t^k \cdot c_{i+k} \\ &= c_i^{m+1}(t) \end{aligned}$$

On a donc maintenant la généralisation du cas $c_i^m(t)$, $\forall t \in [0, 1], \forall m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall i \in \llbracket 0, n-m \rrbracket$:

$$c_i^m(t) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!k!} \cdot (1-t)^{m-k} \cdot t^k \cdot c_{i+k}$$

Ainsi en prenant dans la formule précédente $m = n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $i = 0$, on obtient :

$$c_0^n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot (1-t)^{n-k} \cdot t^k \cdot c_k$$

Ce qui correspond au polynôme de Bernstein, $\sum_{k=0}^n B_k^n(t) \cdot c_k$, ainsi on a les égalités suivante :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma_c^n(t) = \sum_{k=0}^n B_k^n(t) \cdot c_k = c_0^n(t) = \delta_c^n(t)$$

On en conclut donc que les courbes de Bézier et de De Casteljaou sont confondues.

□

Deuxième partie

Application à la typographie

3 Déplacement et modification d'une courbe donnée

Nous allons expliciter les opérations nécessaires à effectuer sur un polygone de contrôle pour déplacer une courbe, l'agrandir, ou la tourner.

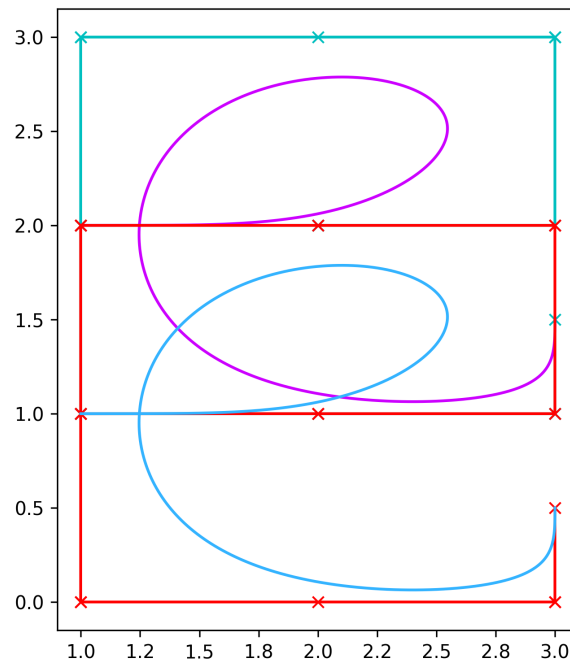
a) On choisit une lettre, « e » dans le graphe d'exemple.

Pour dessiner la même lettre 1cm plus bas dans le document il suffit de prendre les nouveaux points de contrôle $(c'_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ définis par :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, c'_i = c_i + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ceci donne :

FIGURE 4 – Lettre « e » déplacée 1cm vers le bas (lettre originale en violet)

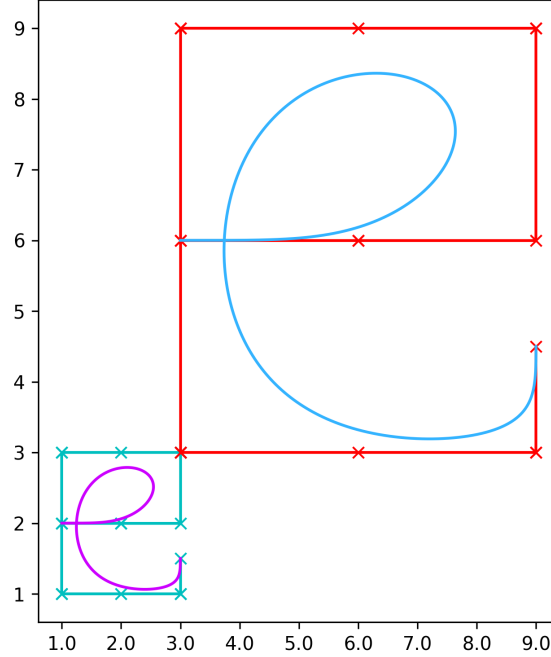


- b) Pour la dessiner trois fois plus grande il faut prendre les nouveaux points de contrôle $(c'_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ définis par :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, c'_i = 3 \cdot c_i$$

Ceci donne :

FIGURE 5 – Lettre « e » trois fois plus grande (lettre originale en violet)



- c) On choisit maintenant la lettre « U », pour changer d'exemple.
Pour la dessiner tournée à 90° , il faut prendre les nouveaux points de contrôle $(c'_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ définis par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad c'_i = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\Phi + \frac{\pi}{2}) \\ r \cdot \sin(\Phi + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

avec, en coordonnées polaires :

$$\forall i \in [0, n], c_i = \begin{pmatrix} c_i[0] \\ c_i[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\Phi) \\ r \cdot \sin(\Phi) \end{pmatrix}$$

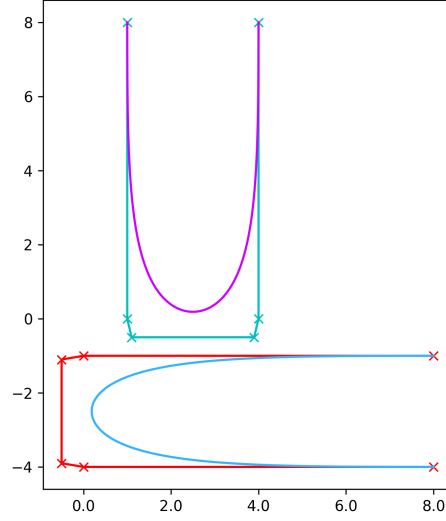
où on a :

$$r = \sqrt{c_i[0]^2 + c_i[1]^2}$$

$$\Phi = \arctan\left(\frac{c_i[1]}{c_i[0]}\right)$$

Ceci donne :

FIGURE 6 – Lettre « U » tournée 90° vers la droite (lettre originale en violet)



Remarque par rapport aux points b) et c) : Une rotation ou dilatation d'une figure dans un plan, en plus de changer son allure et sa taille, modifie sa position par rapport à l'origine comme vu dans les figures 5 et 6.

4 Division en Bézigons

Définition :

Étant donne la famille de points de contrôle :

$$c_0, \dots, c_p, c_{p+1}, \dots, c_{2p}, \dots, c_{(m-1)p}, \dots, c_{mp}$$

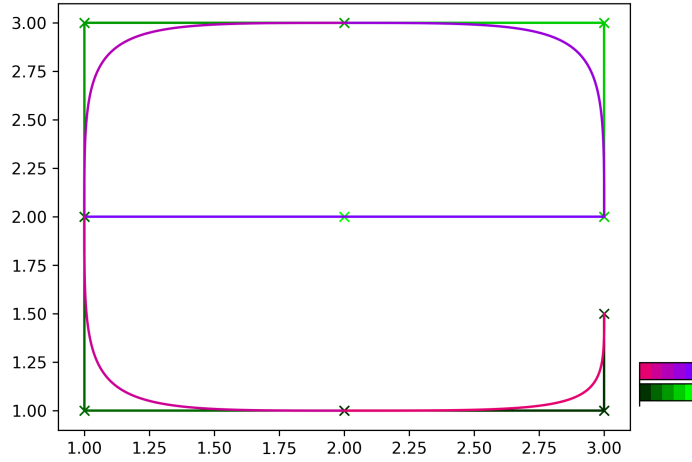
On appelle **Bézigon** la courbe obtenue par recollement des m courbes de Bézier de degré p associées aux points de contrôle $c_{ip}, \dots, c_{(i+1)p}$, pour $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$.

La prochaine partie se réfèrera principalement à la figure 7.

En particulier :

- i) On déterminera les valeurs de m et p d'après les notations de la définition ci-dessus.
- ii) On montrera qu'un Bézigon d'ordre p passe par les points $(c_{ip})_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$.
- iii) On montrera que la figure 7 ne peut pas être une courbe de Bézier.
- iv) On proposera une paramétrisation précise d'un Bézigon $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dont l'image est bien la courbe recherchée, qui sera continue et admettra des dérivées à gauche et à droite de tout point.

FIGURE 7 – Exemple de Bézigon



La légende a été ajoutée pour pouvoir visuellement associer chaque courbe du Bézigon à son polygone de contrôle.

- i) La courbe de la figure 7 est sectionnée en 5 courbes de Bézier, d'où on en déduit $m = 5$, et donc qu'il y a cinq points d'interpolation.

On sait d'ailleurs que les points de contrôle qui définissent les extrémités de chaque polygone de contrôle sont les c_{ip} et $c_{(i+1)p}$ pour $0 \leq i < m$. On peut donc compter qu'il y a 4 points de contrôle sur une courbe en incluant les deux points d'extrémité. Or la première courbe passe par les points de contrôle allant de c_0 à c_p . Ainsi on en déduit que $p = 3$.

- ii) Un Bézigon d'ordre p est, par définition, la courbe obtenue par recollement des m courbes de Bézier de degré p , associées aux points de contrôle $c_{ip}, \dots, c_{(i+1)p}$ pour $i \in \llbracket 0, \dots, m-1 \rrbracket$. Les m courbes de Bézier sont de la forme suivante :

$$\forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \gamma_{c_i}^p(t) = \sum_{k=0}^p B_k^p(t) c_{ip+k}$$

Ainsi pour la première courbe de Bézier, on a :

$$i = 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \gamma_{c_0}^p(t) = \sum_{k=0}^p B_k^p(t) c_k$$

Par les propriétés de la courbe de Bézier, la courbe de Bézier passe par c_0 et c_p . Ainsi la courbe de la figure 7 passe aussi par ces points.

On répète le même raisonnement jusqu'à la m -ième courbe de Bézier, où l'on a :

$$i = m-1, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \gamma_{c_{(m-1)p}}^p(t) = \sum_{k=0}^p B_k^p(t) c_{(m-1)p+k}$$

La courbe de Bézier passe par $c_{(m-1)p}$ et c_{mp} .

Ainsi la courbe de la figure 7 passe aussi par ces points.

iii) La courbe de la figure 7 ne peut pas être une courbe de Bézier. En effet, les courbes de Bézier ont la propriété d'être C^∞ (voir la question 3) a)). Or dans la figure 7, des parties de la courbe forment des angles droits. La courbe n'est alors pas dérivable en ces points, ce qui contredit la propriété vue précédemment.

iv) Soit $f_i(t) : [\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}] \rightarrow [0, 1]$ une fonction affine qui vérifie, $\forall i \in \llbracket 0, \dots, m-1 \rrbracket$, $f_i(\frac{i}{m}) = 0$ et $f_i(\frac{i+1}{m}) = 1$.

Par définition d'un Bézigon, la courbe recherchée, obtenue par le recollement de cinq courbes de Bézier $\gamma_{c_i}^p$ où $i \in \llbracket 0, \dots, m-1 \rrbracket$ (donc ici $m = 5$) qui sont continues, est explicitée ci-dessous :

$$\gamma_c^p(f_i(t)), \forall t \in \left[0, \frac{1}{5}\right], i = 0,$$

recolée à

$$\gamma_c^{2p}(f_i(t)), \forall t \in \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right], i = 1,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\gamma_c^{5p}(f_i(t)), \forall t \in \left[\frac{4}{5}, \frac{5}{5}\right], i = 4,$$

où $p = 3$ pour notre figure 7.

De manière générale ces $\gamma_c^p(f_i(t))$ vérifient, $\forall i \in \llbracket 0, \dots, m-2 \rrbracket$:

$$\gamma_{c_i}^p(1) = \gamma_{c_{i+1}}^p(0),$$

Ainsi

$$\forall i \in \llbracket 0, \dots, m-1 \rrbracket, \forall t \in \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right], \quad \gamma_c(t) = \gamma_{c_i}^p(mt - i)$$

De ce fait, on a γ_c continue.

Cette paramétrisation admet des dérivées à droite et à gauche en tout point (sauf à gauche en c_0 et à droite en c_{15}) car elle est composée de courbes de Bézier qui sont dérivables en tout point à gauche et à droite, sauf pour la gauche du premier point c_0 et la droite du dernier point c_{mp} . Or pour tout les points $(c_{ip})_{i \in \llbracket 0, \dots, m-1 \rrbracket}$ on récupère la dérivée à gauche en $c_{(i+1)p}$ de la courbe $\gamma_{c_i}^p$ par la dérivée à droite en $c_{(i+1)p}$ de la courbe $\gamma_{c_{i+1}}^p$.

On a ainsi la dérivée à gauche et à droite en tout point (sauf à gauche en c_0 et à droite en c_{15}).

On a donc la formule de dérivée de $\gamma_c(t) = \gamma_{c_i}^p(mt - i)$ suivante : $(\gamma_c)'(t) = (\gamma_{c_i}^p)'(mt - i) \cdot m$

On peut maintenant calculer les dérivées à droite et à gauche aux points $(c_{ip})_{0, \dots, m}$ en utilisant les formules données par les propriétés des courbes de Bézier, et que l'on a étudié à la question 3), qui sont :

$$(\gamma_c^n)'(0) = n \cdot (c_1 - c_0)$$

et

$$(\gamma_c^n)'(1) = n \cdot (c_n - c_{n-1})$$

Et en utilisant la nouvelle courbe paramétrée qui donne :

$$(\gamma_c)' \left(\frac{i}{m} \right) = (\gamma_{c_i}^p)'(0)m$$

$$(\gamma_c)' \left(\frac{i+1}{m} \right) = (\gamma_{c_i}^p)'(1)m$$

avec

$$(\gamma_{c_i}^p)'(0) = p(c_{ip+1} - c_{ip})$$

et

$$(\gamma_{c_i}^p)'(1) = p(c_{(i+1)p} - c_{(i+1)p-1})$$

On a donc les dérivées données par les formules générales suivantes, $\forall i \in \llbracket 0, \dots, m-1 \rrbracket$:

$$(\gamma_c)' \left(\frac{i}{m} \right) = pm(c_{ip+1} - c_{ip})$$

$$(\gamma_c)' \left(\frac{i+1}{m} \right) = pm(c_{(i+1)p} - c_{(i+1)p-1})$$

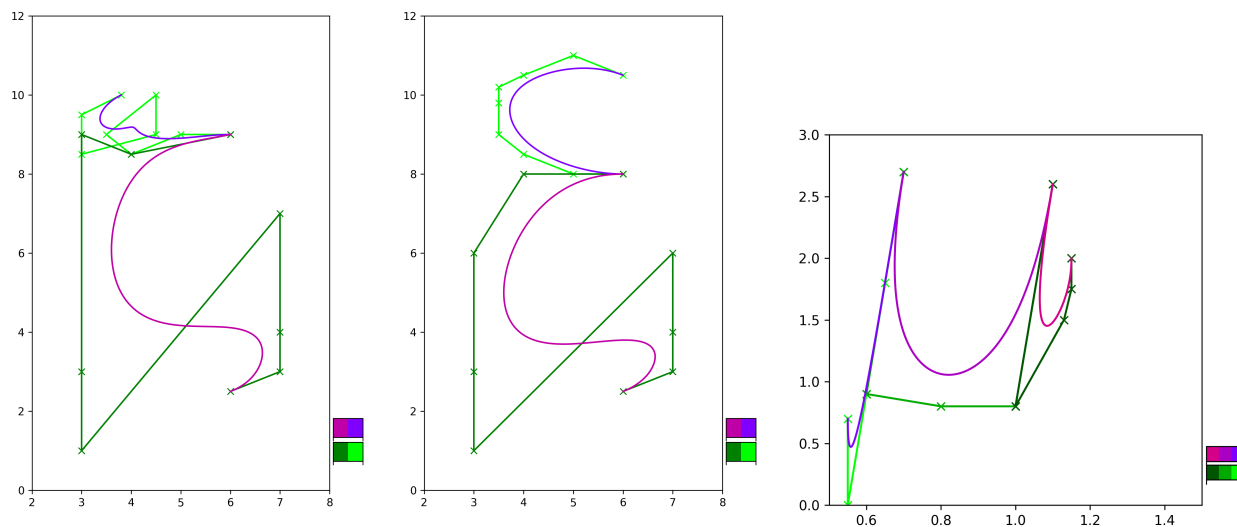
qui nous donnent bien les dérivées à droite et à gauche pour les points $(c_{ip})_{i=0, \dots, m}$

En utilisant cette égalité, on a le calcul suivant :

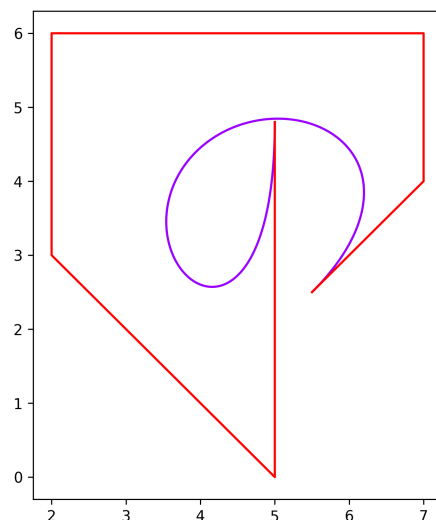
$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot t^k \cdot (1-t)^{n-k} = t \\ \iff & \sum_{k=0}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot t^{k-1} \cdot t \cdot (1-t)^{n-k} = t \\ \iff & t \cdot \sum_{k=0}^n B_{k-1}^{n-1}(t) = t \\ \iff & \sum_{k=0}^n B_{k-1}^{n-1}(t) = 1 \end{aligned}$$

5 Quelques caractères

On peut représenter quelques caractères à l'aide de Bézigons.
Voici les lettres ζ , ξ et μ :

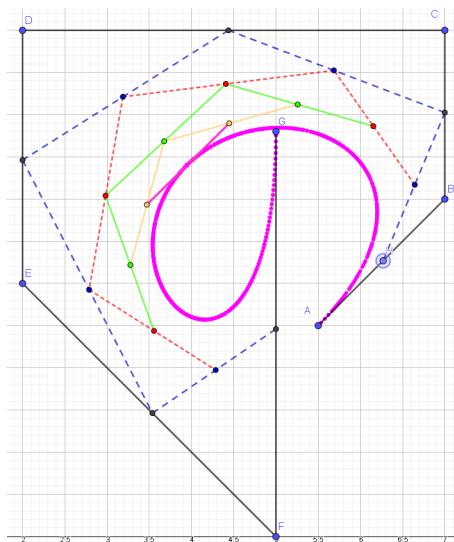


Mais on peut aussi représenter plusieurs caractères avec juste des courbes de Bézier, comme par exemple le caractère japonais \mathcal{O} .



Nous avons implémenté la méthode de Casteljau dans quelques fichiers GeoGebra pour dessiner trois de ces lettres.

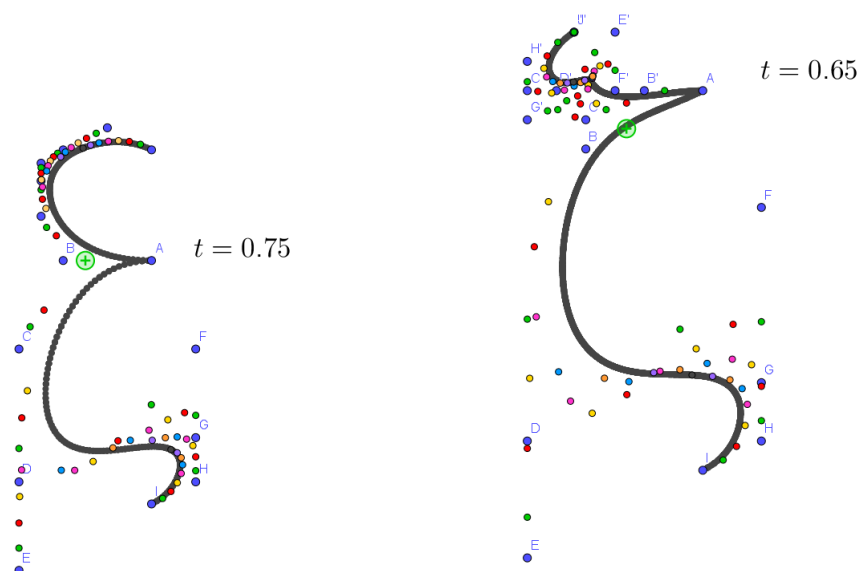
\mathcal{O} avec les segments $[c_i^m, c_{i+1}^m]$ pour $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $i \in \llbracket 0, n-m \rrbracket$:



Déplacer le point H sur le segment $[AB]$ fait varier t entre 0 (quand A et H sont confondus) et 1 (quand B et H sont confondus).

[Un lien vers ce modèle.](#)

ζ et ξ sans les segments pour éviter d'encombrer le graphique) :



Déplacer le point sur le segment $[AB]$ fait varier t de la même façon que pour \mathcal{O} .

[Un lien vers le modèle pour \$\xi\$.](#)

[Un lien vers le modèle pour \$\zeta\$.](#)

Annexe

Voici un lien vers une page GitHub contenant tout le code qui a été écrit pour le projet.