



Τμήμα Φυσικής

Διατριβή MASTER

Μαγνητικές Μελανές Οπές

Χρίστος Σιακάς

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Τούμπας

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	5
2	Μαγνητικό Μονόπολο	7
2.1	Εισαγωγή μαγνητικού μονοπόλου	7
2.1.1	Ηλεκτρομαγνητισμός Maxwell	7
2.1.2	Ηλεκτρομαγνητισμός στην παρουσία μαγνητικού μονοπόλου	7
2.2	Συνθήκη Κβάντωσης Dirac	8
2.2.1	Διανυσματικό δυναμικό με απροσδιοριστίες	8
2.2.2	Χορδή Dirac	9
2.2.3	Χορδή Dirac από μαγνητικά δίπολα	10
2.2.4	Μετασχηματισμοί βαθμίδας και χορδή Dirac	11
2.2.5	Συνθήκη κβάντωσης Dirac	13
3	Τανυστικός λογισμός	14
3.1	Μετασχηματισμοί συντεταγμένων	14
3.2	Πολλαπλότητα Riemann	14
3.3	Βαθμοί ελευθερίας της μετρικής	15
3.4	Τοπικά επίπεδο σύστημα συντεταγμένων	15
3.5	Συναλλοίωτη παράγωγος	18
4	Βαρύτητα	20
4.1	Η Αρχή της Ισοδυναμίας	20
4.2	Δράση	20
4.3	Μεταβολή δράσης	20
4.4	Βαρυτικές Εξισώσεις	21
4.5	Στατικές και σφαιρικά συμμετρικές λύσεις	22
4.6	Ηλεκτρομαγνητικός τανυστής	22
4.7	Λύσεις εξισώσεων Einstein	23
4.8	Μελανές Οπές Reissner-Nordström	24

4.9	Θερμοκρασία Hawking φορτισμένων οπών	24
4.10	Μικρές αποκλίσεις από την ακραία μελανή οπή	25
5	Σφαιρικό πρόβλημα Landau	27
5.1	Σφαιρικές λύσεις στην απουσία μαγνητικού μονοπόλου	27
5.2	Σφαιρικές λύσεις στην παρουσία μαγνητικού μονοπόλου	28
5.3	Χαμηλότερη στάθμη Landau	30
5.4	Πολυώνυμα Haldane	31
5.5	Σφαίρα Haldane	33
5.6	Πολυσωματιδιακές καταστάσεις φερμιονίων	35
5.7	Εξίσωση διασποράς σχετικιστικών σωματιδίων	36
6	Καθιερωμένο Πρότυπο	38
6.1	Αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας	38
6.1.1	Κβαντομηχανικό παράδειγμα	39
6.1.2	Συνεχείς συμμετρίες και μποζόνια Goldstone	40
6.1.3	Κατάσταση κενού στην κβαντική θεωρία πεδίου	40
6.2	Τοπική θεωρία βαθμίδας	42
6.3	Εισαγωγή πεδίου Higgs	43
6.4	Μάζες μποζονίων βαθμίδας	45
6.5	Φερμιόνια στο καθιερωμένο Πρότυπο	47
6.5.1	Χειραλικότητα	48
6.5.2	Η πλήρης θεωρία $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$	49
6.5.3	Φερμιονικοί όροι μάζας	49
7	Επαναφορά EW Συμμετρίας	51
7.1	Κορώνα Ηλεκτρασθενούς συμμετρίας	51
7.2	Μετάβαση στην περιοχή ηλεκτρασθενούς συμμετρίας	52
7.3	Αποκατάσταση συμμετρίας	55
7.4	Καταστολή μηχανισμού Higgs	57
7.5	Υπερφορτίο και εκφυλισμός	57
7.6	Εξίσωση Dirac	58
7.7	Λύσεις Dirac	59
7.8	Εισερχόμενα - Εξερχόμενα φερμιόνια	61
7.9	Ρθμός εκπομπής ενέργειας μελανών οπών	61

8	Επίλογος	63
A'	Ταυτότητες και Υπολογισμοί	64
A.1	Ταυτότητες	64
A.2	Αποδείξεις πράξεων	65
	A'.2.1 Όρος μονοπόλου στη συνάρτηση μαγνητικού πεδίου	65
	A'.2.2 Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο χορδών Dirac	65
	A'.2.3 Δύο χορδές Dirac	66
	A'.2.4 Μεταβολή δράσης Eistein-Hilbert	67
	A'.2.5 Μεταβολή δράσης Maxwell	68
A.3	Λύση διαφορικής εξίσωσης 4.15	68
B'	Τανυστικές εξισώσεις στη Mathematica	69

Η σύζευξη βαρύτητας και ηλεκτρομαγνητισμού προβλέπει την ύπαρξη φορτισμένων μελανών οπών που περιγράφονται από τη γεωμετρία Reissner–Nordström. Οι φορτισμένες μελανές οπές έχουν κοινά χαρακτηριστικά με τις αφόρτιστες μελανές οπές Schwarzschild όπως, ορίζοντα, μη μηδενική θερμοκρασία και εντροπία, και εξαυλώνονται μέσω εκπομπής ακτινοβολίας. Σημαντική διαφορά με τις αφόρτιστες μαύρες τρύπες είναι το γεγονός ότι η εξαύλωση παύει να υφίσταται όταν η μάζα και το φορτίο ικανοποιούν την ισότητα $GM^2 = \frac{\pi Q^2}{e^2}$. Σε αυτή την οριακή περίπτωση, η θερμοκρασία Hawking μηδενίζεται.

Η διατριβή επικεντρώνεται στη μελέτη μαγνητικά φορτισμένων μαύρων οπών [13], λόγω της ευστάθειας τους σε σχέση με τις ηλεκτρικά φορτισμένες. Η μεγάλη μάζα των μαγνητικών μονοπόλων, καταστέλλει τη δημιουργία ζευγών σωματιδίων με θετικό και αρνητικό μαγνητικό φορτίο εντός σχετικά ισχυρών μαγνητικών πεδίων. Σε αντίθεση, η ευστάθεια των ηλεκτρικά φορτισμένων σωμάτων περιορίζεται από το κατώφλι $E \sim 2m_e^2$ ($\sim 10^{18} \text{ V/m}$), που προβλέπεται από τη δίδυμο γένεση Schwinger. Κοντά στον ορίζοντα μιας φορτισμένης μελανής οπής ($r \sim MG$), η τιμή του πεδίου είναι $\frac{Q}{M^2 G^2}$. Ηλεκτρικά φορτισμένες οπές με φορτίο και μάζα που ικανοποιούν την ανισότητα $Q \gtrsim m_e^2 M^2 G^2$ αποφορτίζονται από τα σωματίδια με αντίθετο ηλεκτρικό φορτίο, που δημιουργούνται κατά τη δίδυμο γένεση. Η αποφόρτιση επιτυγχάνεται σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα, καθιστώντας τις μη ευσταθείς.

Η ευστάθεια των μαγνητικών πεδίων όμως, δεν παραμένει χωρίς κατώφλι. Για συγκεκριμένες τιμές του μαγνητικού φορτίου και της μάζας δημιουργούν στην εξωτερική περιοχή του ορίζοντα μαγνητικό πεδίο με ένταση ίση με τη μάζα στο τετράγωνο των μποζονίων W της ασθενούς αλληλεπίδρασης. Στην παρουσία τέτοιων μαγνητικών πεδίων λαμβάνουν χώρα διάφορα κβαντικά φαινόμενα που οδηγούν σε μια νέα ευσταθή κατάσταση με μη μηδενικό μαγνητικό πεδίο. Τα φαινόμενα εκδηλώνονται σε ακτίνα της τάξης $r \sim m_w^{-1}$ και ενισχύονται εντός της "ηλεκτρασθενούς κορώνας", $m_h^{-1} < r < m_w^{-1}$. Σε ακτίνα $r \sim m_h^{-1} < m_w^{-1}$, όπου h το σωματίδιο Higgs, η μη αβελιανή $SU(2)$ συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου θωρακίζεται πλήρως, και μένει μόνο η συνιστώσα του αβελιανού $U(1)_Y$ υπερφορτίου. Αυτό οφείλεται στη συμπύκνωση ηλεκτρικά φορτισμένων μποζονίων W . Οι Ambjorn και Olesen βρίσκουν (προσεγγιστικές) λύσεις που περιγράφουν το συμπύκνωμα των μποζονίων W , ως ένα περιοδικό πλέγμα κβαντικών δινών στο κάθετο στο μαγνητικό πεδίο επίπεδο [2]. Ένα τέτοιο συμπύκνωμα δημιουργείται στην εξωτερική περιοχή του ορίζοντα μιας σφαιρικά συμμετρικής μαγνητικής μελανής οπής. Το συμπύκνωμα αυτό ελαττώνει την ένταση της $SU(2)$ συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου μέχρι την πλήρη θωράκιση του.

Το υπερμαγνητικό πεδίο που παραμένει, συζεύγνυται με το υπερφορτίο του Higgs και συνεισφέρει θετικά στην ενεργό μάζα του βαθμωτού πεδίου. Η θετική αυτή συνεισφορά αναιρεί τη συνεισφορά του αρνητικού όρου μάζας στο δυναμικό του πεδίου Higgs. Η αναίρεση αυτή, καθιστά τη μηδενική τιμή του Higgs ως το μόνο ευσταθές ακρότατο του νέου ενεργού δυναμικού. Στην κατάσταση αυτή, το Higgs έχει μηδενική αναμενόμενη τιμή, η οποία είναι συμμετρική ως προς τους ηλεκτρασθενείς μετασχηματισμούς βαθμίδας $SU(2) \times U(1)_Y$, και έτσι παύει η ρήξη της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας.

Η επαναφορά της συμμετρίας εντός της ηλεκτρασθενούς κορώνας επιφέρει την καταστολή του μηχανισμού Higgs. Τα φερμιονικά πεδία καθιστώνται άμαζα και συνεισφέρουν στην ακτινοβολία Hawking. Οι λύσεις της βαρυτικής εξίσωσης Dirac εκδηλώνουν εκφυλισμό που είναι ανάλογος του μαγνητικού φορτίου Q της μελανής οπής. Ο εκφυλισμός υπολογίζεται με βάση την ανάλυση του Haldane για το ανάλογο πρόβλημα Landau μη σχετικιστικών σωματιδίων σε σφαιρικά συμμετρικό μονοπολικό μαγνητικό πεδίο. Η ισχύς της ακτινοβολίας Hawking είναι ανάλογη του μαγνητικού φορτίου $Q \gg 1$. Επομένως αποτελεί ένα δραματικά αυξημένο ρυθμό εξάτμισης.

2.1 Εισαγωγή μαγνητικού μονοπόλου

2.1.1 Ηλεκτρομαγνητισμός Maxwell

Η κλασική θεωρία Maxwell του ηλεκτρομαγνητισμού περιγράφεται από τις 8 εξισώσεις

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= 4\pi\vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Σύμφωνα με το νόμο του Gauss περί μαγνητικής ροής, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, μπορούμε να ορίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο \vec{A} , το οποίο ικανοποιεί

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.2)$$

Το διανυσματικό δυναμικό δεν περιορίζεται απλά σε ένα μαθηματικό "κόλπο", αλλά μαζί με το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό συνδυάζονται σε ένα τετραδιάνυσμα, A_μ , το οποίο οδηγεί άμεσα στον προσδιορισμό βαθμωτών ποσοτήτων, αναλλοίωτων ως προς μετασχηματισμούς Lorentz. Τέτοιες ποσότητες μπορούν με τη σειρά τους να ενταχθούν στη δράση από την οποία εξάγονται οι εξισώσεις κίνησης.

2.1.2 Ηλεκτρομαγνητισμός στην παρουσία μαγνητικού μονοπόλου

Η ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων είναι θεωρητικά αποδεκτή υπό την προϋπόθεση ότι το μαγνητικό φορτίο είναι κβαντωμένο βάσει της συνθήκης Dirac, της οποίας η απόδειξη παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα. Το πεδίο ενός τέτοιου φορτίου περιμένουμε να συμπεριφέρεται σε συμφωνία με το πεδίο ενός ηλεκτρικού φορτίου, να φθίνει δηλαδή με το τετράγωνο της απόστασης από την πηγή και να είναι ανάλογο του μαγνητικού φορτίου, το οποίο συμβολίζουμε ως q_m .

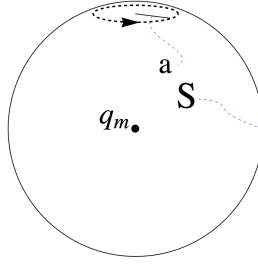
$$\vec{B} = \frac{q_m \vec{r}}{r^3} \quad (2.3)$$

Η πυκνότητα του μαγνητικού φορτίου και το αντίστοιχο ρεύμα πρέπει να εισαχθούν στις εξισώσεις του Maxwell. Η κατάλληλη μετατροπή των εξισώσεων οδηγεί στο ακόλουθο συμμετρικό αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho_e, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 4\pi\rho_m \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -4\pi\vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= 4\pi\vec{J}_e + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Η μορφή αυτή των εξισώσεων (2.4) απαιτεί περαιτέρω διερεύνηση, όπως φαίνεται από την άμεση σύγκρουση του νόμου $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m$ με την ύπαρξη ενός διανυσματικού δυναμικού, \vec{A} , που να ικανοποιεί την εξίσωση (2.2). Η σύγκρουση οφείλεται στο γενικό μηδενισμό της απόκλισης του στροβιλισμού ενός καλά ορισμένου διανύσματος

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$



Σχήμα 2.1: Ανοιχτή επιφάνεια S . Ο διακεκομμένος κύκλος ακτίνας a είναι σύνορο της S

Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, μπορούμε να ορίσουμε δυναμικό - το οποίο όμως δεν είναι πεπερασμένο παντού στο χώρο - που να αποτρέπει την πιο πάνω αντίφαση, και στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι, στο πλαίσιο της θεωρίας μετασχηματισμών βαθμίδας, ο απειρισμός του \vec{A} είναι ασήμαντος. Θα ακολουθήσουμε την ανάλυση του [11].

2.2 Συνθήκη Κβάντωσης Dirac

Οι συμμετρίες των εξισώσεων (2.4) ωθούν προς την αναζήτηση κάποιου δυναμικού \vec{A} , ικανού να μας δώσει μέσω της (2.2) ένα κεντρικό μαγνητικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο \vec{B} πρέπει - όντας ένα μετρήσιμο φυσικό μέγεθος - να είναι καλά ορισμένο παντού στο χώρο, εκτός από τη θέση του σημειακού μονοπόλου ($r = 0$). Η μαγνητική ροή τότε, δίνεται από τον ολοκληρωτικό νόμο Gauss

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = \oint_{\partial V=S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 4\pi q_m \quad (2.5)$$

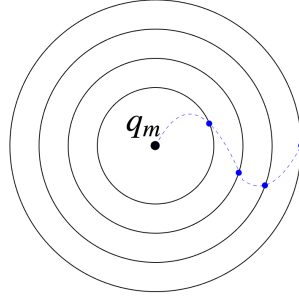
όπου το επιφανειακό ολοκλήρωμα πραγματοποιείται ως προς την κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει το μαγνητικό μονόπολο. Εάν επιχειρήσουμε να αντικαταστήσουμε την (2.2) στην (2.5), καταλήγουμε σε μηδενική μαγνητική ροή διαμέσου της επιφάνειας

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV = 0$$

2.2.1 Διανυσματικό δυναμικό με απροσδιοριστίες

Για να αποφύγουμε τον μηδενισμό, θα αναθεωρήσουμε το κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα (2.5). Το ολοκλήρωμα ως προς μια ανοιχτή επιφάνεια S (σχήμα 2.1), με βάση το θεώρημα του Stokes, ανάγεται σε επικαμπύλιο και εκτελείται κατά μήκος του κλειστού βρόχου που αποτελεί το σύνορο της ανοιχτής επιφάνειας. Πρέπει να επισημάνουμε ότι αρχικά η διανυσματική συνάρτηση \vec{A} θεωρείται καλά ορισμένη στην S :

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.2: Διαδοχικές ομόκεντρες επιφάνειες η κάθε μία από τις οποίες έχει ένα μοναδικό σημείο στο οποίο η συνάρτηση \vec{A} δεν ορίζεται.

Χωρίς βλάβη γενικότητας, επιλέγουμε την S ώστε το σύνορο της να είναι ένας κύκλος με ακτίνα a και άξονα συμμετρίας τον καρτεσιανό άξονα z . Το στοιχειώδες μήκος του επικαμπύλιου ολοκληρώματος (2.6) ισούται με $d\vec{\ell} = a d\phi \hat{\phi}$. Στο όριο όπου η ακτίνα του κύκλου τείνει στο μηδέν, αναμένουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, εάν το διανυσματικό δυναμικό είναι παντού καλά ορισμένο, κάτι όμως που οδηγεί σε ασυμφωνία με τη ροή του μονοπόλου:

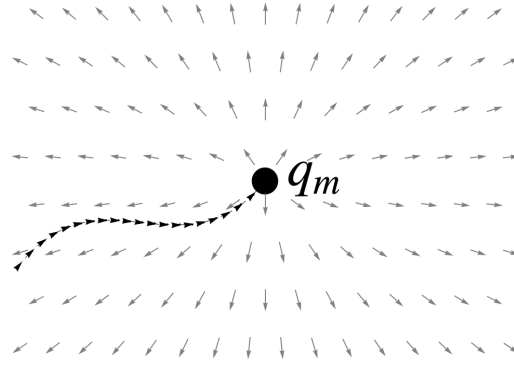
$$\lim_{a \rightarrow 0} \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot (a d\phi \hat{\phi}) = 0 \neq \oint_{\partial V=S} \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.7)$$

2.2.2 Χορδή Dirac

Για να αναιρέσουμε την ασυμφωνία της (2.7), θεωρούμε λοιπόν ότι το διανυσματικό πεδίο \vec{A} είναι καλά ορισμένο παντού στην S , εκτός από ένα σημείο. Έτσι, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (2.7) μπορεί να είναι διάφορο από μηδέν, αλλά πεπερασμένο, ακόμα και στο όριο $a \rightarrow 0$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$$

Το θεώρημα Gauss ισχύει για κάθε επιφάνεια που περιβάλλει το μαγνητικό μονόπολο, ανεξάρτητα από το σχήμα και το μέγεθος της. Στο σχήμα 2.2 παρουσιάζονται τέτοιες ομόκεντρες σφαίρες των οποίων τα σημεία απροσδιοριστίας του \vec{A} έχουν περιληφθεί και τοποθετηθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε για αυθαίρετα μεγάλο αριθμό επιφανειών να σχηματίζουν μια συνεχή καμπύλη. Η καμπύλη αυτή αρχίζει από το σημειακό μονόπολο στο κέντρο και εκτείνεται στο άπειρο. Η καμπύλη ονομάζεται χορδή Dirac. Μια φυσική διάταξη η οποία μπορεί να αναπαραστήσει τη χορδή Dirac, 2.2, αποτελεί μια γραμμική κατανομή απειροστά μικρών μαγνητικών διπόλων κατά μήκος ημιευθείας. Η διάταξη αυτή παράγει ένα διανυσματικό δυναμικό με τις ιδιότητες του \vec{A} . Όπως θα δούμε, μετασχηματισμοί βαθμίδας προκαλούν παραμορφώσεις της χορδής Dirac στο χώρο και παράγουν διαφορές φάσεως σε ένα κβαντικό σύστημα.



Σχήμα 2.3: Μαγνητικά δίπολα (μαύρα βέλη) συνιστούν χορδή Dirac η οποία καταλήγει στο μαγνητικό μονόπολο.

2.2.3 Χορδή Dirac από μαγνητικά δίπολα

Ένα απειροστό μαγνητικό δίπολο το οποίο αποτελείται από δύο αντίθετα σημειακά μονόπολα $q_m, -q_m$, με τη μετατόπιση μεταξύ τους να ισούται με $d\vec{\ell}$, έχει μαγνητική διπολική ροπή

$$d\vec{m} = q_m d\vec{\ell} \quad (2.8)$$

Η συνεισφορά στο διανυσματικό δυναμικό $d\vec{A}$ στη θέση \vec{x} ενός τέτοιου μαγνητικού διπόλου $d\vec{m}$ στη θέση \vec{x}' δίνεται από την έκφραση

$$d\vec{A}(x) = d\vec{m} \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -d\vec{m} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \quad (2.9)$$

όπου στη δεύτερη εξίσωση έγινε χρήση της (Α'.1). Το συνολικό διανυσματικό δυναμικό δίδεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα¹

$$\vec{A}(\vec{x}) = -q_m \int_L d\vec{\ell}' \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = q_m \vec{\nabla} \times \int_L \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.10)$$

¹ $-d\vec{\ell}' \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \times d\vec{\ell}' = \vec{\nabla} \times \left(\frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$

κατά μήκος της χορδής Dirac και ο τελεστής κλίσης δρα στη μεταβλητή \vec{x} . Το μαγνητικό πεδίο δίδεται από τη σχέση (2.2):

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \int_L \frac{q_m d\vec{\ell}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\
 &= q_m \vec{\nabla} \int_L \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - q_m \int_L \vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) d\vec{\ell}' \\
 &= \underbrace{q_m \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}}_{B_{mon}} + \underbrace{4\pi q_m \int_L \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{\ell}'}_B
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Το άκρο της χορδής βρίσκεται στη θέση \vec{x}_0 . Για την εξαγωγή της δεύτερης ισότητας χρησιμοποιούμε την (Α'.3). Ο πρώτος όρος του τελικού αποτελέσματος ισούται με το πεδίο του μαγνητικού μονοπόλου. (Οι πράξεις παρουσιάζονται στην (Α'.9)). Ο δεύτερος όρος, βάσει της ταυτότητας (Α'.4), δίνει το πεδίο της χορδής Dirac, το οποίο δεν προσδιορίζεται. Στο σχήμα 2.3 αναπαρίσταται γραφικά το συνολικό αποτέλεσμα της (2.11). Εχουμε λοιπόν καταλήξει στο ζητούμενο πεδίο του μαγνητικού μονοπόλου, με μια όμως επιπρόσθετη ανεπιθύμητη απροσδιοριστία. Για την εγκυρότητα του πεδίου, επιβάλλεται όπως η απροσδιοριστία αυτή καταστεί μη παρατηρήσιμη.

2.2.4 Μετασχηματισμοί βαθμίδας και χορδή Dirac

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος της (2.11) είναι ανεξάρτητος του σχήματος της χορδής. Μπορούμε δηλαδή, να παραμορφώσουμε τη χορδή Dirac (αλλάζοντας την καμπύλη L), κρατώντας το άκρο της σταθερό, και παίρνουμε το ίδιο πεδίο μαγνητικού μονοπόλου με διαφορετική χορδή.

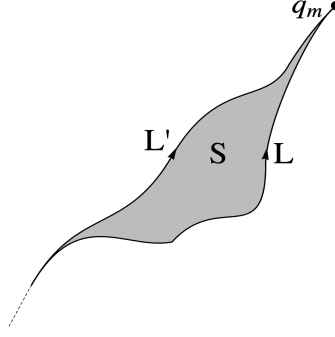
Αντιθέτως, αναμένουμε ότι το διανυσματικό δυναμικό (2.10) θα μεταβληθεί. Στο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας, η μεταβολή μπορεί να αναπαραχθεί με έναν μετασχηματισμό βαθμίδας [16], ο οποίος μετασχηματίζει τις κυματοσυναρτήσεις

$$\Psi(\vec{x}) = \Psi_0(\vec{x}) e^{iq\Lambda(\vec{x})} \tag{2.12}$$

όπου το Λ είναι μια βαθμωτή, μονότιμη και πραγματική συνάρτηση των (x,y,z) και Ψ_0 η αρχική κυματοσυνάρτηση. Η κλίση της συνάρτησης Λ πρέπει να ισούται με τη μεταβολή του διανυσματικού δυναμικού ως εξής

$$\vec{\nabla}\Lambda = \vec{A}_{L'}(\vec{x}) - \vec{A}_L(\vec{x}) \tag{2.13}$$

Στην περίπτωση της χορδής Dirac όμως, η μεταβολή στο δεξιό μέλος της (2.13), αν και μονότιμη συνάρτηση, δεν μπορεί να γραφτεί άμεσα ως η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης Λ εξαιτίας ενός επιπρόσθετου όρου. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αποδείξουμε τη συνθήκη κβάντωσης του Dirac [6], η οποία καθιστά τις μεταβολές που προκύπτουν,



Σχήμα 2.4: Δύο ημιάπειρες χορδές Dirac καταλήγουν στο ίδιο σημείο (μαγνητικό μονόπολο). Μακριά από το σημείο όπου απορρέει το μονοπολικό πεδίο, θεωρούμε ότι οι χορδές αλληλοεπικαλύπτονται.

λόγω των παραμορφώσεων της χορδής, μη παρατηρήσιμες.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν δύο χορδές, τις L και L' , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4. Επειδή το διανυσματικό δυναμικό ενός μαγνητικού διπόλου φθίνει πολύ γρήγορα (με το τετράγωνο της απόστασης από τη θέση του διπόλου) μπορούμε, χωρίς βλάβη γενικότητας, να ενώσουμε τις δύο χορδές στο άπειρο.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, κάθε χορδή παράγει ένα συγκεκριμένο δυναμικό. Έτσι, για τις δύο χορδές L , L' παίρνουμε τα δυναμικά \vec{A}_L και $\vec{A}_{L'}$. Η κλειστή διαδρομή C , που σχηματίζουν οι δύο χορδές, καθορίζει τη διαφορά των δυναμικών ως εξής

$$\vec{A}_{L'}(\vec{x}) - \vec{A}_L(\vec{x}) = q_m \vec{\nabla} \times \left(\int_{L'} \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \int_L \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = q_m \vec{\nabla} \times \oint_C \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.14)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα του Stokes στο κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της (2.14) (παράρτημα Α'.2.2) και παίρνουμε

$$q_m \vec{\nabla} \times \oint_C \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = q_m \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \int_S \frac{d\vec{s}''}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \quad (2.15)$$

Με χρήση της ταυτότητας (Α'.3) καταλήγουμε στους ακόλουθους δύο όρους

$$\vec{A}_{L'}(\vec{x}) - \vec{A}_L(\vec{x}) = \underbrace{\vec{\nabla} \left(q_m \int_S \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \cdot d\vec{s}'' \right)}_{\Omega(\vec{x})} + 4\pi q_m \int_S \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{s}'' \quad (2.16)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι η στερεά γωνία που σχηματίζει η επιφάνεια S ως προς το σημείο \vec{x} . Ο δεύτερος όρος προκύπτει από την ταυτότητα (Α'.4). Η διαφορά δυναμικού (2.16) εξαρτάται από τη στερεά γωνία της επιφάνειας S μεταξύ των χορδών και ενός απροσδιόριστου όρου - ο οποίος θα αποδειχθεί μη παρατηρήσιμος.

2.2.5 Συνθήκη κβάντωσης Dirac

Στο παράδειγμα του παραρτήματος Α'.2.3 γίνεται εφαρμογή των πιο πάνω αποτελεσμάτων και αποδεικνύεται ότι η (2.16) μπορεί να ταυτιστεί με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας. Συνοπτικά γράφουμε

$$L \rightarrow L' \Rightarrow \vec{A}_L(\vec{x}) \rightarrow \vec{A}_{L'}(\vec{x}) \Rightarrow \Psi_0(\vec{x}) \rightarrow \Psi_0(\vec{x}) \exp^{iq\Lambda(\vec{x})}$$

Όταν η χορδή παραμορφώνεται ($L \rightarrow L'$) αλλάζει το δυναμικό $\vec{A}_L(\vec{x})$ και μετασχηματίζονται οι κβαντικές κυματοσυναρτήσεις, βάσει μιας συνάρτησης Λ που πρέπει να ικανοποιεί την (2.13).

Η συνάρτηση $\Omega(\vec{x})$ στην (2.16) εκδηλώνει ασυνέχεια διαμέσου της επιφάνειας S του σχήματος 2.4. Πιο συγκεκριμένα, η ασυνέχεια εκδηλώνεται και στη φάση της νέας κυματοσυναρτήσης, ως ακολούθως

$$\Psi_{L'} = \begin{cases} e^{iqq_m\Omega_1}\Psi_L & \vec{x} \rightarrow \vec{x}^- \\ e^{iqq_m\Omega_2}\Psi_L & \vec{x} \rightarrow \vec{x}^+ \end{cases} \quad (2.17)$$

Τα σημεία \vec{x}^- και \vec{x}^+ αποτελούν πλευρικά όρια σημείου της επιφάνειας S , καθώς το πλησιάζουμε από τις περιοχές κάτω και πάνω από την επιφάνεια S , αντίστοιχα. Οι στερεές γωνίες $\Omega_1 \equiv \Omega(\vec{x}^-)$ και $\Omega_2 \equiv \Omega(\vec{x}^+)$ διαφέρουν κατά μια πλήρη στερεά γωνία, ανεξάρτητα της επιφάνειας, δηλ.

$$\Omega_1 = \Omega_2 + 4\pi$$

Για να είναι λοιπόν η Ψ_L μονότιμη, πρέπει τα δύο πλευρικά όρια (2.17) να ισούνται. Επομένως η ακόλουθη φάση πρέπει να ισούται με τη μονάδα [6]

$$e^{\frac{4\pi i q q_m}{\hbar c}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi q q_m}{\hbar c} = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

όπου, q το ηλεκτρικό φορτίο του σωματιδίου που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση. Εάν αντικαταστήσουμε με το στοιχειώδες κβάντο ηλεκτρικού φορτίου, προκύπτει το στοιχειώδες κβάντο μαγνητικού φορτίου:

$$q_m = \frac{\hbar c}{2e} \quad (e > 0) \quad (2.19)$$

Στο πλαίσιο της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, ένα βαρυτικό πεδίο αντικαθίσταται με ένα καμπυλομένο χωρόχρονο, ή μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Η καμπυλότητα του χωροχρόνου που συνδέεται με τις βαρυτικές δυνάμεις περιγράφεται από τον τανυστή καμπυλότητας του Riemann.

3.1 Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Οι εξισώσεις φυσικών νόμων και φυσικά μεγέθη όπως το μήκος και ο ιδιοχρόνος πρέπει να παραμένουν αναλλοίωτα ως προς γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Με βάση τον κανόνα της αλυσίδας, οι απειροστές μεταβολές των νέων και των αρχικών συντεταγμένων ικανοποιούν τη σχέση

$$dy^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (3.1)$$

όπου οι ελληνικοί δείκτες αναφέρονται στις διαστάσεις του χωροχρόνου, με το δείκτη 0 να αντιστοιχεί στην χρονική διάσταση. Τα διανυσματικά μεγέθη κατατάσσονται σε δύο είδη: τα ανταλλοίωτα διανυσματικά μεγέθη

$$T'^\mu = \frac{dy^\mu}{dx^\nu} T^\nu \quad (3.2)$$

και τα συναλλοίωτα

$$T'_\mu = \frac{dx^\nu}{dy^\mu} T_\nu \quad (3.3)$$

Οι πιο πάνω μετασχηματισμοί γενικεύονται και στην περίπτωση τανυστών ανώτερης τάξης, όπου εμφανίζεται ένας ανταλλοίωτος πίνακας μετασχηματισμού για κάθε πάνω δείκτη και ένας συναλλοίωτος για κάθε κάτω δείκτη.

Επειδή οι πιο πάνω μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί, εάν ένας τανυστής μηδενίζεται σε ένα σύστημα αναφοράς, θα μηδενίζεται σε κάθε σύστημα αναφοράς. Ισχύει επίσης και το αντίστροφο - μια ποσότητα (με πολλές συνιστώσες) που μηδενίζεται σε κάποιο σύστημα αλλά όχι σε κάποιο άλλο δεν είναι τανυστής.

3.2 Πολλαπλότητα Riemann

Προς το παρόν, περιγράφουμε N -διάστατες χωρικές πολλαπλότητες Riemann. Το αναλλοίωτο απειροστό διάστημα μεταξύ γειτονικών σημείων ισούται με

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.4)$$

όπου $g_{\mu\nu}$ η μετρική. Το απειροστό αυτό διάστημα πρέπει να είναι θετικό, επομένως όλες οι ιδιοτιμές της μετρικής είναι θετικές. Στην περίπτωση ενός χωροχρόνου, το απειροστό διάστημα (3.4) μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή ακόμη και μηδενικό. Οπότε μια ιδιοτιμή της μετρικής είναι αρνητική.

Με βάση την αναλλοiotτητα του απειροστού διαστήματος μπορούμε να εξαγάγουμε το μετασχηματισμό της μετρικής $g_{\mu\nu}$, χρησιμοποιώντας την (3.1) και την (3.4)

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}}_{g'_{\alpha\beta}} dy^\alpha dy^\beta \end{aligned} \quad (3.5)$$

Άρα λοιπόν η μετρική στο νέο σύστημα αναφοράς συντεταγμένων y^μ ικανοποιεί

$$g'_{\alpha\beta}(y) = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \quad (3.6)$$

3.3 Βαθμοί ελευθερίας της μετρικής

Γενικά, τα N^2 στοιχεία της μετρικής $g_{\alpha\beta}$ αποτελούν συνεχείς, διαφορίσιμες συναρτήσεις των συντεταγμένων σε κάθε σημείο του χωροχρόνου. Επειδή η μετρική είναι ένας συμμετρικός τανυστής, ο αριθμός των ανεξάρτητων στοιχείων της είναι μικρότερος. Με βάση τον ορισμό του απειροστού διαστήματος (3.4), το αντισυμμετρικό μέρος μπορεί να αμεληθεί. Άρα λοιπόν θεωρούμε μόνο συμμετρικές μετρικές με πλήθος στοιχείων

$$\frac{N}{2}(N+1) \quad (3.7)$$

3.4 Τοπικά επίπεδο σύστημα συντεταγμένων

Θα αποδείξουμε τώρα ότι δεν υπάρχει μετασχηματισμός αλλαγής συντεταγμένων, $x^\mu \rightarrow y^\nu$, που να μετασχηματίζει μια μετρική σε μια γενική, καμπυλομένη πολλαπλότητα στην επίπεδη ευκλείδεια μετρική, δηλαδή

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \rightarrow \delta_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας [3]. Οι $\frac{N}{2}(N+1)$ συνθήκες της (3.8) δεν μπορούν να ικανοποιηθούν με βάση τους μετασχηματισμούς αλλαγής συντεταγμένων: $x^\mu(y^\nu)$. Παρόλα αυτά, είναι δυνατόν να ικανοποιήσουμε ένα άλλο σύνολο συνθηκών, με βάση τις οποίες η μετρική ανάγεται στην ευκλείδεια μετρική σε μια αρκετά μικρή περιοχή γύρω από ένα αυθαίρετο σημείο P της πολλαπλότητας:

$$\lim_{y \rightarrow y_P} ds^2 = \delta_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu \quad (3.9)$$

Η ιδιότητα αυτή των πολλαπλοτήτων Riemann είναι άμεσα συνιφασμένη με την αρχή της ισοδυναμίας του Einstein. Αναφερόμαστε στο ζητούμενο σύστημα y ως το τοπικά αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις μετασχηματισμού κατά Taylor γύρω από το σημείο P , το οποίο, στο αρχικό σύστημα αναφοράς περιγράφεται από τις συντεταγμένες x_P^μ :

$$x^\mu(y) = x_P^\mu + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \right)_P y^a + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^a \partial y^b} \right)_P y^a y^b + \dots \quad (3.10)$$

Σε κάθε όρο στο πιο πάνω αναπτύγμα εμφανίζονται ελεύθερες παραμέτροι, των οποίων ο αριθμός καθορίζεται με βάση τη μεταθετικότητα των μερικών παραγώγων. Παραδείγματος χάριν, οι πρώτες μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \quad (3.11)$$

αντιστοιχούν σε πίνακα με N^2 ανεξάρτητα στοιχεία, τα οποία, προσδιορίζουν τις απαραίτητες συναρτήσεις μετασχηματισμού σε μια αρκετά μικρή περιοχή γύρω από το σημείο P . Σε μεγαλύτερες περιοχές, συνεισφέρουν όροι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης, όπως

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^a \partial y^b} \quad (3.12)$$

Εξαιτίας της αναλλοιώτητας ως προς την εναλλαγή των δύο κάτω δεικτών, οι δεύτερες μερικές παράγωγοι ανάγονται σε $\frac{N^2}{2}(N+1)$ επιπρόσθετους βαθμούς ελευθερίας. Καθορίζοντας τις παραγώγους στο P , βρίσκουμε τις αναγκαίες συναρτήσεις μετασχηματισμού για να ικανοποιήσουμε τις ζητούμενες συνθήκες που πρέπει να πληροί η μετρική στο νέο σύστημα αναφοράς συντεταγμένων.

Με τον ίδιο τρόπο αναπτύσσοντας τη μετρική ως προς y . Για απλοποίηση των εκφράσεων, επιλέγουμε το σημείο P να συμπίπτει με το σημείο αναφοράς και των δύο συστημάτων, $x_P^\mu = y_P^\mu = 0$. Αναπτύσσουμε τα δύο μέλη της (3.6) ως προς y και παίρνουμε

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(P) + \left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial y^a} \right)_P y^a + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g'_{\mu\nu}}{\partial y^a \partial y^b} \right)_P y^a y^b + \dots \\ = \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu} g_{\rho\sigma} \right)_P + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial y} g + \dots \right)_P y^a + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial^3 x}{\partial y \partial y \partial y} g + \dots \right)_P y^a y^b + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

Για λόγους απλότητας, δεν παραθέτουμε τους δείκτες στο δεξιό μέλος της (3.13). Συγκρίνοντας τους όρους μηδενικής τάξεως ως προς y , συμπερένουμε ότι μπορούμε στο σημείο P να μετασχηματίσουμε τη μετρική στη μορφή που θέλουμε. Ο ζητούμενος μετασχηματισμός ροσδιορίζει ένα τοπικά επίπεδο σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή

$$g'_{\mu\nu}(P) = \delta_{\mu\nu} \quad \delta_{\mu\nu} := \text{diag}(+1, +1, \dots) \quad (3.14)$$

και στην περίπτωση του χωροχρόνου ένα τοπικά αδρανειακό σύστημα αναφοράς συντεταγμένων

$$g'_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu} \quad \eta_{\mu\nu} := \text{diag}(-1, +1, \dots)$$

Οι συνθήκες (εξισώσεις) που πρέπει να ικανοποιηθούν για το καθορισμό του μετρικού πίνακα $g'_{\mu\nu}$ στο σημείο P είναι $\frac{N}{2}(N+1)$ ακριβώς όσοι και οι βαθμοί ελευθερίας (3.7). Ο όρος στα δεξιό μέλος

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu} g_{\rho\sigma}$$

μας προμηθεύει με N^2 ελεύθερες παραμέτρους, με τις οποίες μπορούμε να ικανοποιήσουμε τις εξισώσεις (3.14). Περισσεύουν

$$\frac{N}{2}(N-1) \quad (3.15)$$

παραμέτροι οι οποίες αντιστοιχούν στις παραμέτρους των περιστροφών της ομάδας $SO(N)$ που αφήνουν αναλλοίωτη την ευκλείδεια μετρική $\delta_{\mu\nu}$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, συγκρίνουμε τους όρους πρώτης τάξης ως προς y , στο αριστερό και δεξιό μέλος της (3.13). Αυτό μας επιτρέπει να εξετάσουμε μια πολύ μικρή περιοχή γύρω από το σημείο P , έτσι ώστε ο όροι ανώτερης τάξης των αναπτυγμάτων να είναι αμελητέοι. Για να επιτύχουμε την κατασκευή ενός τοπικά επίπεδου ή τοπικά αδρανειακού συστήματος στην περιοχή αυτή, επιβάλλουμε

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial y^a} = 0 \quad (3.16)$$

το οποίο αντιστοιχεί με

$$\frac{N^2}{2}(N+1) \quad (3.17)$$

συνθήκες. Στο δεξιό μέλος της (3.13) ο όρος πρώτης τάξης περιέχει $\frac{N^2}{2}(N+1)$ ελεύθερες παραμέτρους, αρκετές για να ικανοποιήσουμε τις συνθήκες (3.16).

Το επόμενο σύνολο συνθηκών που πρέπει να ικανοποιήσουμε προέρχεται από τον όρο δεύτερης τάξης ως προς y , στο αριστερό μέλος της (3.13)

$$\frac{\partial^2 g'_{\mu\nu}}{\partial y^a \partial y^b} = 0 \quad (3.18)$$

και δίνει

$$\frac{N^2}{4}(N+1)^2$$

ανεξάρτητες εξισώσεις. Στο δεξιό μέλος υπάρχουν επίσης όροι δεύτερης τάξης ως προς y . Στους όρους αυτούς οι πρώτες και δεύτερες μερικές παράγωγοι έχουν ήδη καθοριστεί. Οι τρίτες μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial^3 x^\sigma}{\partial y^a \partial y^b \partial y^c} \quad (3.19)$$

έχουν

$$\frac{N^2}{6}(N+1)(N+2)$$

ελεύθερες παραμέτρους. Αυτές είναι κατά

$$\frac{N^2}{12}(N^2 - 1) \quad (3.20)$$

λιγότερες από τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιηθούν. Επομένως δεν μπορούμε να καθορίσουμε της δεύτερες παραγώγους της μετρικής. Οι επιπρόσθετοι βαθμοί ελευθερίας (3.20) χαρακτηρίζουν την καμπυλότητα της πολλαπλότητας και την απόκλιση της από τον επίπεδο χώρο, και εμφανίζονται ως οι ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας Riemann

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} \quad (3.21)$$

Γενικά, ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορεί να οριστεί μόνο τοπικά, σε μια αρκετά μικρή περιοχή γύρω από το σημείο P .

3.5 Συναλλοίωτη παράγωγος

Οι φυσικές εξισώσεις συνδέουν βαθμωτά, διανυσματικά και τανυστικά μεγέθη τα οποία μπορεί να μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο στον χωρόχρονο (ή στον χώρο). Επομένως, με στόχο την κατασκευή αναλλοίωτων εξισώσεων ως προς γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, είναι απαραίτητο να εκφράσουμε τις μεταβολές των τανυστικών ποσοτήτων συναρτήσει συναλλοίωτων παραγώγων οι οποίες με τη σειρά τους να μετασχηματίζονται ως τανυστές με βάση γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Οι συνήθεις μερικές παράγωγοι δεν μετασχηματίζονται ως τανυστές. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός διανυσματικού πεδίου παίρνουμε

$$\partial_\mu V^\nu \rightarrow \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} V^\beta \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \partial_\beta V^\alpha + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta \neq \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \partial_\alpha V^\beta \quad (3.22)$$

Επειδή η μερική παράγωγος μπορεί να είναι μηδενική σε κάποιο σύστημα αναφοράς συντεταγμένων και μη μηδενική σε κάποιο άλλο, δεν μπορεί να είναι τανυστής. Μπορούμε όμως να ορίσουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους ανταλλοίωτων και συναλλοίωτων διανυσμάτων, οι οποίες μετασχηματίζονται ως τανυστές:

$$\nabla_\mu V_\nu = \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V_\alpha \quad (3.23)$$

ενώ για ανταλλοίωτο τανυστή πρώτης τάξης

$$\nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu V^\alpha \quad (3.24)$$

Τα στοιχεία $\Gamma_{\sigma\lambda}^\rho$ ορίζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι συναλλοίωτες παράγωγοι (3.23) και (3.24) να μετασχηματίζονται ως τανυστές. Για παράδειγμα,

$$\nabla_\mu V^\nu \rightarrow \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \nabla_\alpha V^\beta$$

Τα στοιχεία $\Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho}$ είναι γνωστά και ως σύμβολα Christoffel. Δεν αποτελούν τις συνιστώσες κάποιου τανυστή, αφού δεν μετασχηματίζονται ανάλογα. Η γενίκευση των (3.23) και (3.24) για τανυστές μεγαλύτερης τάξης επιτυγχένεται άμεσα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση τανυστή τέταρτης τάξης, παίρνουμε

$$\nabla_{\lambda} T^{\mu \nu}_{\rho \sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T^{\mu \nu}_{\rho \sigma} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} T^{\alpha \nu}_{\rho \sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\rho} T^{\mu \nu}_{\alpha \sigma} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha} T^{\mu \alpha}_{\rho \sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma} T^{\mu \nu}_{\rho \alpha}$$

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τη βαρυτική δράση του Einstein και τη σύζευξη της βαρύτητας με τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Όλες οι μορφές ύλης και ακτινοβολίας υπόκεινται στην επίρροια της βαρύτητας. Εξάλλου, το βαρυτικό πεδίο ταυτίζεται με τον καμπυλωμένο χωρόχρονο.

4.1 Η Αρχή της Ισοδυναμίας

Στο κεφάλαιο 3, αναφερθήκαμε στην αρχή της ισοδυναμίας του Einstein και αποδείξαμε ότι μια αρκετά μικρή χωροχρονική περιοχή, ανεξάρτητα από την παρουσία βαρυτικού πεδίου, μπορεί να περιγραφεί ως τμήμα του χωροχρόνου Minkowski και να επικαλυφθεί με ένα (τοπικά) αδρανειακό σύστημα αναφοράς συντεταγμένων. Ταυτόχρονα, σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας, σε μια μικρή περιοχή του χωροχρόνου, στο σύστημα αναφοράς παρατηρήτη που πέφτει ελεύθερα, οι βαρυτικές δυνάμεις εξουδετερώνονται από αδρανειακές και οι νόμοι της φυσικής περιγράφονται με βάση τις αρχές της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Στο τοπικά αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η μετρική είναι η μετρική Minkowski. Σε μεγαλύτερες περιοχές, η καμπυλότητα του χωροχρόνου και τα βαρυτικά φαινόμενα δεν μπορούν να αμεληθούν και έτσι, γίνονται παρατηρήσιμα τα παλιρροιακά φαινόμενα.

4.2 Δράση

Οι εξισώσεις του Einstein στην παρουσία ηλεκτρομαγνητικών πεδίων απορρέουν από την δράση Einstein-Hilbert, S_H , και τη δράση Maxwell S_M (στην απουσία φορτισμένης ύλης):

$$S = S_H + S_M = \int \left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right) \sqrt{-g} d^4x \quad (4.1)$$

Η μετρική $g_{\mu\nu}$, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Ο ηλεκτρομαγνητικός ταυνοστής $F_{\mu\nu}$ ορίζεται ως η στροφή του ηλεκτρικού τετραδυναμικού

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

ώστε να ικανοποιούνται οι ομογενείς εξισώσεις του Maxwell.

4.3 Μεταβολή δράσης

Μια απειροστά μικρή μεταβολή της μετρικής

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

μεταβάλλει τη δράση κατά

$$\delta_g S = \delta_g S_H + \delta_g S_M \quad (4.2)$$

Ο πρώτος όρος της (4.2) ισούται με

$$\delta S_H = \int \left(\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} \right) d^4x \quad (4.3)$$

Στο παράρτημα Α'.2.4 δείχνουμε ότι

$$\delta S_H = \int \left(\frac{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}{16\pi G} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

Μεταβάλλοντας τη δράση Maxwell, ακολουθώντας τα σχετικά βήματα του παραρτήματος Α'.2.5, παίρνουμε

$$\delta S_M = \int \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} g^{\alpha\beta} + \frac{1}{8} F^2 g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

Απαιτώντας η δράση να είναι οριακή,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

καταλήγουμε στις εξισώσεις Euler-Lagrange, ή στις εξισώσεις Einstein, για τη μετρική

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} F^2 g_{\mu\nu} \right) \quad (4.4)$$

4.4 Βαρυτικές Εξισώσεις

Στο δεξιό μέλος της (4.4) εμφανίζεται ο ταυυστής ενέργειας-ορμής, $T_{\mu\nu}$, των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων

$$T_{\mu\nu} := F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} F^2 g_{\mu\nu} \quad (4.5)$$

ο οποίος έχει μηδενική συναλλοιώτη απόκλιση

$$g^{\rho\mu} \nabla_\rho T_{\mu\nu} = 0$$

Στη συνέχεια, βρίσκουμε το ίχνος των δύο μελών της εξίσωσης Einstein, πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο της μετρικής $g^{\mu\nu}$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$. Με βάση το αποτέλεσμα $R = -8\pi G T$, οι βαρυτικές εξισώσεις του Einstein ανάγονται στην ακόλουθη βοηθητική μορφή

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (4.6)$$

Στην απουσία φορτισμένης ύλης το ίχνος του ταυυστή της ενέργειας-ορμής των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων μηδενίζεται και έτσι

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

Οι λύσεις των βαρυτικών εξισώσεων στην παρουσία ηλεκτρομαγνητικών πεδίων προσδιορίζουν τις 10 ανεξάρτητες συνιστώσες του μετρικού ταυυστή $g_{\mu\nu}$.

4.5 Στατικές και σφαιρικά συμμετρικές λύσεις

θα βρούμε στατικές και σφαιρικά συμμετρικές λύσεις. Έτσι, κάθε στοιχείο της μετρικής πρέπει να είναι ανεξάρτητο της χρονικής συντεταγμένης, και θέτουμε

$$g_{01}, g_{02}, \dots = 0$$

Η χρονική συνιστώσα της μετρικής, g_{00} , είναι διάφορη από μηδέν. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες για το χώρο, μπορεί να αποδειχθεί ότι η πιο γενική, σφαιρικά συμμετρική μετρική παίρνει την ακόλουθη μορφή [18]:

$$ds^2 = -e^{2a(r)} dt^2 + e^{2b(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.8)$$

Οι υπολογισμοί γίνονται με τη βοήθεια του λογισμικού Wolfram Mathematica και παρουσιάζονται στο παράρτημα Β'. Στον κώδικα 1 ορίζουμε τη μετρικής σύμφωνα με την (4.8), στις συντεταγμένες $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$. Στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τα σύμβολα Christoffel (κώδικας 2)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (4.9)$$

Έχοντας βρει τα στοιχεία της σύνδεσης, προσδιορίζουμε τον τανυστή καμπυλότητας Riemann με βάση τη σχέση

$$R_{\mu\lambda\nu}^\rho = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \quad (4.10)$$

τρέχοντας τον κώδικα 3. Στις εξισώσεις Einstein εμπλέκεται ο τανυστής Ricci, ο οποίος αποτελεί ίχνος του τανυστή Riemann, κώδικας 4

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu\lambda\nu}^\lambda \quad (4.11)$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τον ηλεκτρομαγνητικού τανυστή και τον τανυστή ενέργειας-ορμής (4.5).

4.6 Ηλεκτρομαγνητικός τανυστής

Στη διατριβή αυτή θα μελετήσουμε μαγνητικά φορτισμένες μελανές οπές και διάφορα φυσικά φαινόμενα που συνδέονται με αυτές [13]. Ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής πρέπει να περιγράφει το ακτινικό μαγνητικό πεδίο μαγνητικού μονοπόλου. Το μαγνητικό φορτίο είναι κβαντωμένο με βάση τη συνθήκη κβάντωσης Dirac (2.19). Στην εξωτερική περιοχή του ορίζοντα, έχει την ακόλουθη διανυσματική μορφή

$$\vec{B} = \frac{q_m \vec{r}}{r^3}$$

Αντικαθιστούμε το φορτίο q_m με ακέραιο πολλαπλάσιο του στοιχειώδους μαγνητικού κβάντου¹, (2.19), και έχουμε

$$\vec{B} = \frac{Q \vec{r}}{2er^3}$$

¹Στις μονάδες Planck θέτουμε $\hbar = c = 1$

Η συνολική μαγνητική ροή ισούται με

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{2\pi}{e} Q$$

Με χρήση της σχέσης [3]

$$B^r = \varepsilon^{tr\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon^{rjk}}{\sqrt{-g}} F_{jk} \quad (4.12)$$

βρίσκουμε τα μη μηδενικά στοιχεία του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή $F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} F_{0i} &= 0 \\ F_{jk} &= -F_{kj} = \begin{cases} \frac{Q}{2e} \sin \theta, & j = \theta, k = \phi \\ 0, & \text{υπόλοιπα} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Έχοντας λοιπόν, τον τανυστή (4.13), προσδιορίζουμε τον τανυστή της ενέργειας - ορμής (4.5), κώδικας 6.

4.7 Λύσεις εξισώσεων Einstein

Έχουμε στην κατοχή μας όλα τα τανυστικά μεγέθη για να καταστρώσουμε τις εξισώσεις του Einstein (4.6). Καταλήγουμε σε ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων, που παρουσιάζονται τρέχοντας τον κώδικα 9. Υπάρχει μία εξίσωση δηλαδή για κάθε διαγώνιο στοιχείο του τανυστή Ricci

$$\begin{aligned} \{tt\} : & -e^{2b} A + r^3 (a'(2 + ra' - rb') + ra'') = 0 \\ \{rr\} : & e^{2b} A + r^3 (2b' + a'(-ra' + rb') - ra'') = 0 \\ \{\phi\phi\} : & 1 - \frac{A}{r^2} - e^{-2b} (1 + ra' - rb') = 0 \\ \{\theta\theta\} : & \{\phi\phi\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

όπου $A = \frac{G\pi Q^2}{e^2}$. Προσθέτουμε τις tt και rr εξισώσεις, και παίρνουμε τη σχέση $a' = -b'$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην εξίσωση $\theta\theta$ και καταλήγουμε στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$2r \frac{db}{dr} + e^{2b} \left(1 - \frac{A}{r^2}\right) - 1 = 0 \quad (4.15)$$

Η λύση της (4.15) παρουσιάζεται στο παράρτημα Α'3. Το αποτέλεσμα είναι

$$b(r) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2G\pi Q^2}{e^2 r} c + \frac{G\pi Q^2}{e^2 r^2} \right) \quad (4.16)$$

όπου c σταθερά, ανεξάρτητη της ακτινικής συντεταγμένης r . Για να βρούμε τη σταθερά αυτή, απαιτούμε να αναπαράγεται η μετρική Schwarzschild για μηδενικό αγνητικό φορτίο:

$$Q \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{2G\pi Q^2}{e^2 r} c + \frac{G\pi Q^2}{e^2 r^2} \right) \rightarrow \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{Me^2}{\pi Q^2}$$

$GM^2 < \pi Q^2/e^2$	$GM^2 > \pi Q^2/e^2$	$GM^2 = \pi Q^2/e^2$
Γυμνή ανωμαλία	Ορίζοντες στα r_{\pm}	Ορίζοντας στο $r = r_e \equiv GM$
r πάντα χωροειδής	$r_- < r < r_+ \rightarrow r$ χρονοειδής	r πάντα χωροειδής
Χρονοειδείς τροχιές μπορούν να αποφύγουν την ανωμαλία	$r < r_- \rightarrow r$ χωροειδής	

Πίνακας 4.1: Χαρακτηριστικά φορτισμένων μελανών οπών με βάση το πηλίκο της μάζας προς το φορτίο.

όπου M η μάζα της μαύρης τρύπας. Με βάση τα πιο πάνω, καταλήγουμε στην μετρική Reissner-Nordström, με μη μηδενικό μαγνητικό φορτίο Q

$$ds^2 = -B dt^2 + B^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G\pi Q^2}{e^2 r^2} \quad (4.17)$$

4.8 Μελανές Οπές Reissner-Nordström

Στη μετρική (4.17), τα αντίθετα πρόσημα των δύο τελευταίων όρων οδηγούν σε ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά. Πρώτον, υπάρχουν γενικά δύο ορίζοντες στις ακτίνες

$$r_{\pm} = GM \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\pi Q^2}{Ge^2 M^2}} \right] \quad (4.18)$$

Δεύτερον, ο όρος της μάζας επιδρά διαφορετικά στη γεωμετρία της περιοχής του ορίζοντα σε σχέση με τον όρο του φορτίου εξαιτίας του αντίθετου προσήμου. Στον πίνακα 4.1 συνοψίζονται τα χαρακτηριστικά των ακόλουθων τριών ειδών φορτισμένων μελανής οπών. Στη πρώτη περίπτωση, $GM^2 < \pi Q^2/e^2$, εκδηλώνεται γυμνή ανωμαλία και περιοχές με μεγάλη καμπυλότητα, οι οποίες δεν μπορούν να περιγραφούν με βάση την κλασική θεωρία του Einstein για τη βαρύτητα. Στη δεύτερη περίπτωση, $GM^2 > \pi Q^2/e^2$, υπάρχουν δύο ορίζοντες σε ακτίνες r_+ και $r_- < r_+$. Οι λύσεις αυτές εξετάζονται στη συνέχεια, και διερευνούμε την εξωτερική περιοχή κοντά στον ορίζοντα r_+ . Η τρίτη περίπτωση, αφορά τις ακραίες μαύρες τρύπες οι οποίες ικανοποιούν την ισότητα $GM^2 = \pi Q^2/e^2$. Στην περίπτωση αυτή οι δύο ορίζοντες ταυτίζονται $r_+ = r_-$.

4.9 Θερμοκρασία Hawking φορτισμένων οπών

Τα θερμοδυναμικά χαρακτηριστικά των φορτισμένων μελανών οπών εξάγονται με βάση τις αρχές της γενικής σχετικότητας και της κβαντομηχανικής [17]. Κοντά στον ορίζοντα r_+ , η ακτινική απόσταση ρ σημείου r της εξωτερικής περιοχής από τον ορίζοντα δίδεται

από τη σχέση

$$\rho = \int_{r_+}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{(r-r_+)(r-r_-)}} \approx 2r_+ \sqrt{\frac{r-r_+}{r_+-r_-}} \quad (4.19)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.17), βρίσκουμε ότι η μετρική κοντά στον ορίζοντα r_+ προσεγγίζεται από τη μετρική Rindler

$$ds^2 \approx -\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2 + r_+^2 d\Omega^2 \quad \omega \equiv \frac{r_+-r_-}{2r_+^2} t \quad (4.20)$$

Με τον ακόλουθο μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$T = \rho \sinh \omega \quad Z = \rho \cosh \omega \quad X = r_+ \theta \cos \phi \quad Y = r_+ \theta \sin \phi \quad (4.21)$$

κοντά στο σημείο $\theta = 0$, επιτυγχάνουμε τη μετάβαση στο τοπικά ορισμένο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων (T, Z, X, Y) , κατάλληλο για να περιγράψει τις παρατηρήσεις ενός παρατηρητή που πέφτει ελεύθερα κοντά στον ορίζοντα r_+ . Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας, ο μετασχηματισμός (4.21) αποτελεί το βαρυτικό ισοδύναμο της σχέσης μεταξύ ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς (στην απουσία βαρυτικού πεδίου) και ενός επιταχυνόμενου συστήματος αναφοράς, με σταθερή ομοιόμορφη επιτάχυνση. Ο παρατηρητής Schwarzschild διαγράφει υπερβολοειδή τροχιά από τη σκοπιά του παρατηρητή που πέφτει ελεύθερα.

Σύμφωνα με το φαινόμενο Unruh, ο παρατηρητής Schwarzschild ανιχνεύει μια θερμική ατμόσφαιρα, με θερμοκρασία

$$T(r \gtrsim r_+) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho(r)} \quad (4.22)$$

Αρκετά μακριά από την μελανή οπή, η θερμοκρασία έχει σταθερή τιμή και ισούται με τη θερμοκρασία Hawking:

$$T(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{2\pi} \frac{r_+-r_-}{2r_+^2} \quad (4.23)$$

Ένας στάσιμος παρατηρητής στο άπειρο αντιλαμβάνεται τη μελανή οπή ως ένα μέλαν σώμα, με θερμοκρασία (4.23). Στο όριο μιας ακραίας φορτισμένης οπής, οι δύο ορίζοντες r_+ και r_- ταυτίζονται και η θερμοκρασία Hawking μηδενίζεται.

4.10 Μικρές αποκλίσεις από την ακραία μελανή οπή

Στο όριο $M \rightarrow \frac{\pi Q^2}{Ge^2}$, η θερμοκρασία τείνει στο μηδέν και η ακτινοβολία Hawking καταστέλλεται. Για μικρές αποκλίσεις της μάζας, αναμένεται αύξηση της θερμοκρασίας, και η οπή αρχίζει να ακτινοβολεί μέχρι που η μάζα να ελαττωθεί στην οριακή της τιμή. Για μικρές μεταβολές της μάζας, διατηρώντας το φορτίο σταθερό,

$$M_e \rightarrow M = M_e + \delta M, \quad \delta M \ll M_e^2 = \pi Q^2 / Ge^2 \quad (4.24)$$

παίρνουμε για την ακτίνα του εξωτερικού ορίζοντα r_+ (4.18)

$$r_+ = GM \left[1 + \sqrt{1 - \frac{M_e^2}{M^2}} \right] \approx GM \left[1 + \sqrt{2 \frac{\delta M}{M_e}} \right] \quad (4.25)$$

και τη θερμοκρασία Hawking

$$T = \frac{1}{2\pi GM_e} \sqrt{\frac{\delta M}{M_e}} + \mathcal{O}\left(\frac{\delta M}{M_e}\right) \quad (4.26)$$

Η μεταβολή της μάζας δίδεται συναρτήσει της θερμοκρασίας της μελανής οπής από τη σχέση

$$\delta M \sim \frac{2\pi^{\frac{7}{2}} G^{\frac{1}{2}} Q^3}{e^3} T^2 \quad (4.27)$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η εξαύλωση της μελανής οπής ενισχύεται όταν η ένταση του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή του ορίζοντα υπερβεί μια οριακή τιμή που καθορίζεται από τη μάζα του μποζονίου Higgs.

Στην παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου, πέραν της ακτινοβολίας Hawking, αναμένεται να εκδηλωθούν φαινόμενα όπως η διδυμος γένεση φερμιονίων-αντιφερμιονίων. Επομένως, χρειάζεται να μελετήσουμε φερμιονικά πεδία στην παρουσία πεδίου μαγνητικού μονοπόλου. Θα μελετήσουμε πρώτα το μη σχετικιστικό πρόβλημα, ενός φορτισμένου σωματιδίου στην παρουσία ενός τέτοιου μαγνητικού πεδίου, ακολουθώντας την εργασία του Haldane [9].

5.1 Σφαιρικές λύσεις στην απουσία μαγνητικού μονοπόλου

Η χαμιλτονιανή ελεύθερου, μη σχετικιστικού σωματιδίου είναι

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (5.1)$$

με τον τελεστή της ορμής να δίδεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \vec{p} &\equiv -i\hbar\vec{\nabla} \\ [H, \vec{p}] &= 0 \end{aligned}$$

Οι στάσιμες, χωριζόμενες λύσεις της εξίσωσης Schrödinger είναι

$$\psi(r, t) \sim e^{\frac{i}{\hbar}(p \cdot r - Et)} \quad (5.2)$$

όπου p το μέτρο της ορμής και $E = \frac{p^2}{2m}$ η τιμή της ενέργειας (ή η αντίστοιχη ιδιοτιμή της χαμιλτονιανής).

Θα επιβάλουμε τώρα, το σωματίδιο να κινείται στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Η χαμιλτονιανή μπορεί να γραφεί συναρτήσει της στροφορμής, η οποία διατηρείται σταθερή

$$\Lambda^i = \varepsilon^{ijk} r^j p^k \quad (5.3)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{mnk} = \delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm}$ και τον μεταθέτη $[r^i, p^j] = i\hbar\delta^{ij}$ βρίσκουμε τη στροφορμή στο τετράγωνο

$$\vec{\Lambda}^2 = r^2 p^2 + i\hbar \vec{r} \cdot \vec{p} - (\vec{r} \cdot \vec{p})^2$$

Σημειώνουμε ότι το διάνυσμα θέσης είναι πάντα κάθετο στην ορμή (κίνηση κατά μήκος σφαιρικής επιφάνειας) και έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow p^2 = \frac{\Lambda^2}{r^2} \quad (5.4)$$

Συνεπώς, η χαμιλτονιανή γράφεται

$$H = \frac{|\Lambda|^2}{2mr^2} \quad (5.5)$$

Επειδή ο μεταθέτης

$$[H, \vec{\Lambda}] = 0$$

μηδενίζεται, η στροφορμή $\vec{\Lambda}$ διατηρείται. Οι συνιστώσες της στροφορμής (5.3) ικανοποιούν την $SU(2)$ άλγεβρα των περιστροφών

$$[\Lambda^i, \Lambda^j] = i\epsilon^{ijk} \Lambda^k \quad (5.6)$$

Η στροφορμή στο τετράγωνο είναι κβαντισμένη με ιδιοτιμές

$$|\vec{\Lambda}|^2 = \hbar^2 \ell(\ell + 1) \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι σφαιρικές αρμονικές

$$\begin{aligned} \Lambda^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) &= \hbar \ell(\ell + 1) Y_\ell^m & \ell = 0, 1, 2, \dots \\ \Lambda_z Y_\ell^m(\theta, \phi) &= \hbar m Y_\ell^m & -\ell \leq m \leq \ell \end{aligned} \quad (5.8)$$

οι οποίες απαρτίζουν μια πλήρη ορθοκανονική βάση. Με βάση τις σφαιρικές αρμονικές βρίσκουμε τις στάσιμες, χωριζόμενες λύσεις της εξίσωσης Schrodinger. Η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας είναι η σφαιρικά συμμετρική αρμονική $Y_0^0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

5.2 Σφαιρικές λύσεις στην παρουσία μαγνητικού μονοπόλου

Το πεδίο του μαγνητικού μονοπόλου δίδεται από τη σχέση

$$\vec{B} = \frac{\hbar s_0}{er^2} \hat{\Omega} \quad \hat{\Omega} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.9)$$

όπου $2s_0$ ο λόγος της συνολικής μαγνητικής ροής προς τη στοιχειώδη μαγνητική ροή Φ_0

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = 2s_0 \quad s_0 = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

Η στοιχειώδης μαγνητική ροή ισούται με

$$\Phi_0 = 4\pi R^2 B_0 = \frac{2\pi\hbar}{e} \quad (5.11)$$

Η χαμιλτονιανή ενός μη σχετικιστικού ηλεκτρονίου, με αρνητικό φορτίο $-e$, το οποίο αλληλεπιδρά με διανυσματικό δυναμικό \vec{A} , η στροφή του οποίου παράγει το μαγνητικό πεδίο

$$\epsilon^{ijk} \nabla^j A^k = |\vec{B}| \Omega^i \quad i, j, k = \{x, y, z\}$$

ισούται με

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} + e\vec{A})^2$$

Ο τελεστής $\vec{\Pi} \equiv \vec{p} + e\vec{A}$ είναι η μηχανική ορμή του ηλεκτρονίου [16]. Γενικά για ένα σωματίδιο με αρνητικό φορτίο $-q$, οι συνιστώσες του τελεστή της μηχανικής ορμής ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης

$$\begin{aligned} [\Pi^i, \Pi^j] &= [p^i, qA^j] + [qA^i, p^j] = -qi\hbar \nabla^i A^j + qi\hbar \nabla^j A^i = \\ &= i\hbar q (-\delta^{im} \delta^{jn} + \delta^{jm} \delta^{in}) \nabla^m A^n = -i\hbar q \epsilon^{ijk} \epsilon^{mnk} \nabla^m A^n = \\ &= -i\hbar q \epsilon^{ijk} B^k \end{aligned} \quad (5.12)$$

Η στροφορμή στην (5.3) δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Έτσι, ορίζουμε τη μηχανική στροφορμή

$$\Lambda^i = \varepsilon^{ijk} r^j (-i\hbar \nabla^k + qA^k) \quad (5.13)$$

που είναι αναλλοίωτη ως προς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Για σωματίδιο που κινείται στην επιφάνεια σφαίρας, στην παρουσία του μαγνητικού μονοπόλου, η χαμιλτονιανή παύρνει τη μορφή

$$H = \frac{|\Lambda|^2}{2m} \frac{eB}{\hbar s_o} \quad (5.14)$$

Με βάση τους κανόνες μετάθεσης πιο κάτω (5.16), η μηχανική στροφορμή δεν διατηρείται: $[H, \vec{\Lambda}] \neq 0$.

Οι συνιστώσες του τελεστή της μηχανικής στροφορμής (5.13) δεν ικανοποιούν την αλγεβρα των γεννητόρων των περιστροφών, αφού δεν έχουν τις απαραίτητες μεταθετικές ιδιότητες. Πράγματι, με βάση τον μεταθέτη (5.12) και την (5.9), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} [\Lambda^i, \Lambda^m] &= \frac{1}{i\hbar} [\varepsilon^{ijk} r^j \Pi^k, \varepsilon^{mnl} r^n \Pi^l] \\ &= \frac{1}{i\hbar} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{mnl} (r^j [\Pi^k, r^n] \Pi^l + r^n r^j [\Pi^k, \Pi^l] + r^n [r^j, \Pi^l] \Pi^k) \\ &= \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{mnl} (-r^j \delta^{kn} \Pi^l + r^n r^j (-q \varepsilon^{kls} B^s) + r^n \delta^{jl} \Pi^k) \\ &= (\delta^{im} \delta^{jl} - \delta^{il} \delta^{jm}) r^j \Pi^l + q r^n r^j (\delta^{mk} \delta^{ns} - \delta^{ms} \delta^{nk}) \varepsilon^{ijk} B^s + (-\delta^{im} \delta^{kn} + \delta^{in} \delta^{km}) r^n \Pi^k \\ &\stackrel{1}{=} (\delta^{in} \delta^{km} - \delta^{ik} \delta^{nm}) r^n \Pi^k + q r^n r^j (\delta^{mk} \delta^{ns} - \delta^{ms} \delta^{nk}) \varepsilon^{ijk} B^s \\ &\stackrel{2}{=} \varepsilon^{imj} \varepsilon^{nkl} r^n \Pi^k + q \varepsilon^{ijm} r^j r^s B^s \\ &= \varepsilon^{imj} (\Lambda^j - q \frac{\hbar s_o}{e} \Omega^j) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Για $q = e$, ο μεταθέτης ισούται με

$$[\Lambda^i, \Lambda^j] = i\hbar \varepsilon^{ijk} (\Lambda^k - \hbar s_o \Omega^k) \quad (5.16)$$

Για να βρούμε τους γεννήτορες των περιστροφών, χρησιμοποιούμε τον μεταθέτη

$$[\Lambda^i, \Omega^j] = i\hbar \varepsilon^{ijk} \Omega^k \quad (5.17)$$

Οι γεννήτορες είναι οι ακόλουθοι

$$L^i = \Lambda^i + \hbar s_o \Omega^i \quad (5.18)$$

¹ Στον πρώτο όρο, αλλάξαμε τους δείκτες j,l → n,k και ακολούθως αναιρέσαμε με τον αντίστοιχο θετικό όρο.

² $r^k r^j \varepsilon^{ijk} = r^j r^k \varepsilon^{ikj} = -r^k r^j \varepsilon^{ijk} = 0$.

Είναι αναλλοίωτοι ως προς μετασχητισμούς βαθμίδας και ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης της $SU(2)$ άλγεβρας:

$$[L^i, L^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}L^k \quad (5.19)$$

Οι μεταθέτες

$$[L^i, \Lambda^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}\Lambda^k$$

καθιστούν τον τελεστή \vec{L} διατηρήσιμο: $[H, \vec{L}] = 0$. Με βάση την άλγεβρα, οι ιδιοτιμές του τελεστή $|\vec{L}|^2$ είναι

$$|\vec{L}|^2 = \hbar^2(n + s_0)(n + s_0 + 1) \equiv \hbar^2\ell(\ell + 1) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.20)$$

όπου n ακέραιος αριθμός που καθορίζει τις στάθμες Landau. Εξαιτίας της σχέσης μετάθεσης $[\vec{L}^2, L^i] = 0$, υπάρχουν $2\ell + 1$ εκφυλισμένες κοινές ιδιοκαταστάσεις. Τις συμβολίζουμε ως $\psi_{\ell, m}$. Αυτές ικανοποιούν

$$\begin{aligned} L^2 \psi_{\ell, m} &= \hbar^2\ell(\ell + 1) \psi_{\ell, m} \\ L_z \psi_{\ell, m} &= \hbar m \psi_{\ell, m} \quad -\ell \leq m \leq \ell \end{aligned} \quad (5.21)$$

Εξαιτίας της σχέσης $\vec{\Lambda} \cdot \vec{\Omega}_r = 0$, βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του τελεστή Λ^2 :

$$|\Lambda|^2 = |L|^2 - \hbar^2 s_0^2 = \hbar^2(n^2 + 2ns_0 + n + s_0) \quad (5.22)$$

Οπότε οι ιδιοτιμές της χαμιλτονιανής (5.14) είναι

$$E_n = \frac{\hbar}{2m} \frac{eB}{s_0} (n^2 + 2ns_0 + n + s_0)$$

5.3 Χαμηλότερη στάθμη Landau

Με βάση τις επιτρεπόμενες ιδιοτιμές της μηχανικής στροφορμής, συμπεραίνουμε ότι, στην παρουσία μαγνητικού μονοπόλου, η μηχανική στροφορμή $\vec{\Lambda}$ δεν μπορεί να μηδενιστεί. Συγκεκριμένα, στη χαμηλότερη στάθμη Landau, LLL (Lowest Landau Level, LLL), ο ακέραιος αριθμός n μηδενίζεται, $n = 0$, και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} |L|^2 &= \hbar^2 s_0(s_0 + 1) \\ |\Lambda|^2 &= \hbar^2 s_0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

με $2s_0 + 1$ εκφυλισμένες ιδιοκαταστάσεις. Οι $2s_0 + 1$ ιδιοκαταστάσεις έχουν ενέργεια $\frac{e\hbar|B|}{2m}$, και περιγράφονται από ομογενή πολυώνυμα σπινορικών μεταβλητών, τάξης $2s_0$ [9]. Θα μελετήσουμε τις καταστάσεις αυτές στην επόμενη ενότητα.

5.4 Πολυώνυμα Haldane

Σε κάθε σημείο (θ, ϕ) σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας θα αντιστοιχίσουμε ένα σπίνορα με συνιστώσες $(a(\theta, \phi), b(\theta, \phi))$. Όταν το διανυσματικό δυναμικό έχει τη μορφή

$$\vec{A} = \frac{\hbar s_o}{er} \cot \theta \hat{\phi} \quad (5.24)$$

ο σπίνορας $|r\rangle$ είναι ο εξής μοναδιαίος

$$|r\rangle \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \quad \langle r| \equiv (a^*, b^*) \quad (5.25)$$

Για άλλα ισοδύναμα δυναμικά που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία, οι αντίστοιχες μορφές του σπίνορα είναι

$$\begin{aligned} \vec{A} = \frac{\hbar s_o}{er} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\phi} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \end{pmatrix} \\ \vec{A} = -\frac{\hbar s_o}{er} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\phi} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Το διάνυσμα θέσης του ηλεκτρονίου συνδέεται με τον σπίνορα μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\vec{\Omega}_r(\theta, \phi) \equiv (a, b) \vec{\sigma} \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (5.27)$$

Ο σπίνορας αποτελεί ιδιοκατάσταση της συνιστώσας του τελεστή του σπιν με προσανατολισμό

$$(\vec{\Omega}_r \cdot \vec{\sigma}) |r\rangle = -|r\rangle$$

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι μια περιστροφή κατά γωνία ω , ως προς άξονα παράλληλο με μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\Omega}_n$, δρα στους σπίνορες (5.25) ως

$$|r\rangle \rightarrow e^{i \frac{\sigma \cdot \vec{\Omega}_n}{2} \omega} |r\rangle$$

Εάν ο άξονας είναι παράλληλος με το διάνυσμα $\vec{\Omega}_r$ παίρνουμε

$$|r\rangle \rightarrow e^{-i\omega/2} |r\rangle \quad (5.28)$$

Εκτός από μια φάση, η οποία δεν είναι παρατηρήσιμη, ο τελικός σπίνορας είναι ισοδύναμος με τον αρχικό. Το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης δεν μεταβάλλεται αφού ο άξονας περιστροφής είναι παράλληλος με αυτό.

Στο χώρο των σπινόρων, οι γεννήτορες των περιστροφών L_i αναπαρίστανται ως εξής

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{\hbar}{2} \left(v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ L_y &= \frac{i\hbar}{2} \left(v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ L_z &= \frac{\hbar}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v} \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Συνοπτικά μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{2}(u, v) \vec{\sigma} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{array} \right) \quad (5.30)$$

Επιλέγουμε να εργαστούμε με τους τελεστές αναβίβασης $L_+ \equiv L_x + iL_y$ και καταβίβασης $L_- \equiv L_x - iL_y$

$$\begin{aligned} L_+ &= \hbar u \frac{\partial}{\partial v} \\ L_- &= \hbar v \frac{\partial}{\partial u} \\ L_z &= \frac{\hbar}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v} \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

με μεταθέτες

$$\begin{aligned} [L_z, L_{\pm}] &= \pm L_{\pm} \\ [L_+, L_-] &= 2L_z \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ο τελεστής της στροφορμής στο τετράγωνο δίδεται από τη σχέση

$$L^2 = \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_z^2 \quad (5.33)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις του L_z ικανοποιούν την εξίσωση (5.21). Εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, θέτουμε $U(u)V(v) \equiv \psi_{s_0, m}$ και παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\underbrace{\frac{u}{U} \frac{\partial U}{\partial u}}_k - \underbrace{\frac{v}{V} \frac{\partial V}{\partial v}}_c = 2m$$

Επειδή $2m$ ακέραιος αριθμός, ο πρώτος και δεύτερος όρος στο αριστερό μέλος πρέπει να ισούνται με τους ακέραιους k και c . Λύνουμε τις δύο διαφορικές εξισώσεις που απορρέουν και παίρνουμε

$$\begin{aligned} U(u) &\sim u^{c+2m} \\ V(v) &\sim v^c \end{aligned}$$

Δρώντας με τον τελεστή L^2 , και απαιτώντας να αναπαράγεται η ιδιοτιμή στη LLL, (5.23), βρίσκουμε την τιμή του ακέραιου αριθμού $c = s_0 - m$. Βρίσκουμε τελικά τις μη-κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις των τελεστών L^2 και L_z

$$\psi_{s_0, m} = u^{s_0+m} v^{s_0-m} = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{s_0+m} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{s_0-m} e^{im\phi} \quad (5.34)$$

Αυτές αποτελούν ταυτόχρονα ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Λ^2 και της χαμιλτονιανής:

$$\Lambda^2 \psi_{s_0, m} = \hbar^2 s_0 \psi_{s_0, m} \quad (5.35)$$

Οι συναρτήσεις της (5.34) απαρτίζουν μια πλήρη ορθοκανονική βάση σε χώρο διαστατικότητας $2s_0 + 1$. Η βάση λοιπόν απαρτίζεται από τα γινόμενα

$$u^{2s_0}, u^{2s_0-1}v, \dots, u^{s_0+m}v^{s_0-m}, \dots, v^{2s_0} \quad -s_0 \leq m \leq s_0 \quad (5.36)$$

Η σχέση ορθοκανονικότητας είναι

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \bar{\psi}_{s_0, m} \psi_{s_0, n} \sin \theta d\theta d\phi = \frac{(s_0 + m)!(s_0 - m)!}{(2s_0 + 1)!} \delta_{mn} \quad (5.37)$$

Οι κανονικοποιημένες καταστάσεις είναι

$$|s_0, m\rangle = \sqrt{\frac{(2s_0 + 1)!}{4\pi(s_0 + m)!(s_0 - m)!}} u^{s_0+m} v^{s_0-m} \quad (5.38)$$

Μπορούμε να βρούμε κυματοσυναρτήσεις που να ικανοποιούν την εξίσωση [9]

$$\{\vec{\Omega}_r \cdot \vec{L}\} \Psi_{(u, v)} = \hbar s_0 \Psi_{(u, v)} \quad (5.39)$$

Αυτές δίδονται από την έκφραση

$$\Psi_r^{s_0}(u, v) = (a^* u + b^* v)^{2s_0} \equiv \langle r | s \rangle^{2s_0} \quad (5.40)$$

Περιγράφουν σωματίδιο στη LLL και αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις της συνιστώσας του τελεστή L κατά μήκος του άξονα $\vec{\Omega}_r(a, b)$, με ιδιοτιμή $\hbar s_0$. Τα πολύωνυμα αναπτύσσονται συναρτήσει των διονυμικών συντελεστών

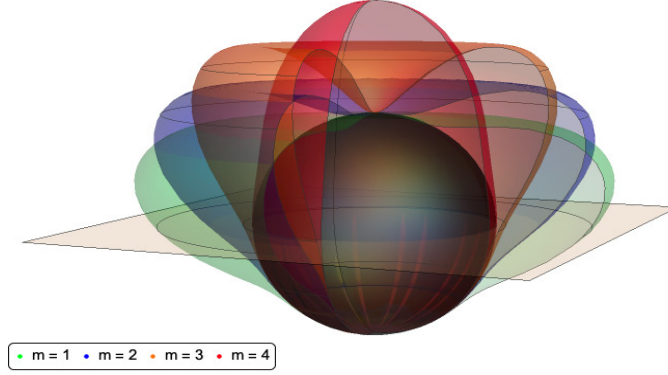
$$\Psi_r^{s_0} = \sum_{m=-s_0}^{s_0} \binom{2s_0}{s_0+m} (a^* u)^{s_0+m} (b^* v)^{s_0-m} \quad (5.41)$$

Το ολοκλήρωμα της πυκνότητας πιθανότητας στη σφαίρα είναι

$$\int_{S^2} d\Omega \bar{\Psi}_r^{s_0} \Psi_r^{s_0} = \frac{4\pi}{2s_0 + 1} \quad (5.42)$$

5.5 Σφαίρα Haldane

Οι ιδιοκαταστάσεις του L_z απεικονίζονται γραφικά, για την περίπτωση μαγνητικού μονοπόλου με φορτίο $s_0 = 4$, στην εικόνα 5.1. Συγκεκριμένα απεικονίζουμε την πυκνότητα



Σχήμα 5.1: Γραφική αναπαράσταση των ιδιοσυναρτήσεων για $s_0 = 4$. Παρουσιάζονται τέσσερις από τις $2s_0 + 1$ ιδιοκαταστάσεις του τελεστή L_z με ιδιοτιμές $m\hbar$. (Πράσινο) $u^5 v^3$ με $m = 1$. (Μπλε) $u^6 v^2$ με $m = 2$. (Πορτοκαλί) $u^7 v$ με $m = 3$. (Κόκκινο) u^8 με $m = 4$.

πιθανότητας $|u^{s_0+m} v^{s_0-m}|^2$, η οποία χαρακτηρίζεται από αξιμουθιακή συμμετρία. Από τις $2s_0 + 1$ ιδιοσυναρτήσεις

$$u^8, u^7 v, u^6 v^2, u^5 v^3, u^4 v^4, u^3 v^5, u^2 v^6, u v^7, v^8 \quad (5.43)$$

δείχνουμε τις τέσσερις πρώτες. Στην εικόνα 5.1, φαίνεται το επίπεδο xy και η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων. Σε κάθε συνάρτηση αντιστοιχεί μια επιφάνεια. Η απόσταση μεταξύ ενός σημείου της επιφάνειας με συντεταγμένες (θ, ϕ) και του αντίστοιχου σημείου της μοναδιαίας σφαίρας είναι ανάλογη με την πυκνότητα πιθανότητας. Π.χ. για την ιδιοκατάσταση με $m = 4$ (κόκκινο χρώμα) η μέγιστη πυκνότητα πιθανότητας αντιστοιχεί σε πολική γωνία $\theta = 0$, ενώ για $m = 3$ (πορτοκαλί χρώμα) σε πολική γωνία $\theta \approx 0.2\pi$. Γενικά η μέγιστη πυκνότητα πιθανότητας αντιστοιχεί σε γωνία

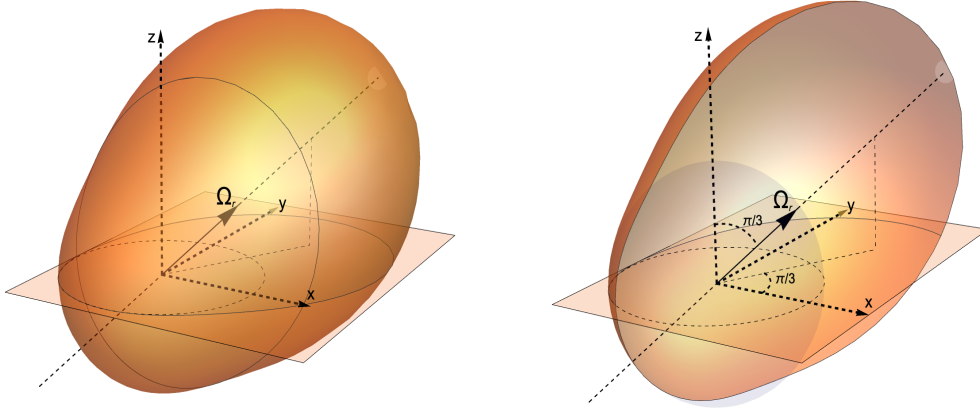
$$\theta_{max} = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{s_0 - m}{s_0 + m}} \right) \quad -s_0 < m \leq s_0 \quad (5.44)$$

Για $m = -s_0$ παίρνουμε $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \tan^{-1} x) = \pi$.

Προχωρούμε τώρα στη γραφική αναπαράσταση των πολωνύμων Haldane (5.40). Καθορίζουμε αρχικά τις συνιστώσες (a, b) του σπίνορα $|r\rangle$ και τις εισάγουμε στην (5.40). Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη περίπτωση $s_0 = 1$ και $|r\rangle = (\cos \frac{\pi}{6} e^{i\frac{\pi}{6}}, \sin \frac{\pi}{6} e^{-i\frac{\pi}{6}})$. Εφαρμόζοντας την (5.41), η κυματοσυνάρτηση είναι

$$\Psi_r^1 = \sum_{m=-1}^1 \binom{2}{1+m} \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{6})} \right)^{1+m} \left(\sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{6})} \right)^{1-m} \quad (5.45)$$

Η αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας φαίνεται στην εικόνα 5.2. Είναι εμφανής η απουσία αξιμουθιακής συμμετρίας. Στη δεξιά εικόνα της 5.2, απεικονίζεται μια τομή της γραφικής παράστασης, ώστε να διακρίνονται τα ακρότατα σημεία. Τα σημεία αυτά βρίσκονται αντιδιαμετρικά του $\vec{\Omega}_r$. Στο σχήμα περιλαμβάνεται επίσης η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 5.2: Γραφική αναπαράσταση της πυκνότητας πιθανότητας $|\Psi_{(a,b)}^1|^2$ για $s_0 = 1$ και $|r\rangle = (\cos \frac{\pi}{6} e^{i\frac{\pi}{6}}, \sin \frac{\pi}{6} e^{-i\frac{\pi}{6}})$. Στο δεξιό σχήμα φαίνεται μια τομή της κυματοσυνάρτησης με το επίπεδο $\phi = \pi/3$, με μέγιστο στη θέση $\theta = \frac{\pi}{3}, \phi = \frac{\pi}{3}$.

5.6 Πολυσωματιδιακές καταστάσεις φερμιονίων

Εάν αμελήσουμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των φορτισμένων σωματιδίων στις στάθμες Landau, η χαμιλτονιανή δίνεται από την έκφραση

$$H \approx \sum_{i=1}^N H_i$$

όπου

$$H_i = \frac{|\Lambda_i|^2}{2m} \frac{eB}{\hbar s_0}$$

η μονοσωματιδιακή χαμιλτονιανή. (Ο δείκτης i δηλώνει τα διάφορα σωματίδια). Οι διάφορες μονοσωματιδιακές καταστάσεις καταλαμβάνονται σύμφωνα με την απαγορευτική αρχή του Pauli. Η ολική κυματοσυνάρτηση πρέπει να είναι αντισυμμετρική ως προς την εναλλαγή δύο οποιωνδήποτε φερμιονίων. Όταν $N = 2s_0 + 1$, η χαμηλότερη στάθμη Landau είναι πλήρως κατειλημμένη. Το κάθε φερμιόνιο καταλαμβάνει μια ανεξάρτητη ορθογώνια μονοσωματιδιακή κατάσταση στη LLL, δεξ (5.36). Προσδιορίζουμε την ολική κυματοσυνάρτηση Ψ_N με χρήση της ορίζουσας Slater

$$\Psi_N = \begin{vmatrix} u_1^{2s_0} & u_1^{2s_0-1} v_1 & \dots & v_1^{2s_0} \\ u_2^{2s_0} & \dots & \dots & v_2^{2s_0} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ u_N^{2s_0} & u_N^{2s_0-1} v_N & \dots & v_N^{2s_0} \end{vmatrix} \quad (5.46)$$

Η κυματοσυνάρτηση (5.46) γράφεται και στην ακόλουθη πιο απλή μορφή [9]

$$\Psi_N = \prod_{i < j}^N (u_i v_j - u_j v_i) \quad (5.47)$$

όπου ο εκφυλισμός της βασικής LLL (ή ο αριθμός των φερμιονίων)

$$N = 2s_0 + 1 \quad (5.48)$$

Για συνοχή με τα προηγούμενα κεφάλαια στα οποία η συνολική μαγνητική ροή συμβολίζεται με Q , θέτουμε $Q = 2s_0$. Για μεγάλα Q , παίρνουμε λοιπόν

$$N \approx Q \equiv 2s_0 \quad (5.49)$$

5.7 Εξίσωση διασποράς σχετικιστικών σωματιδίων

Για σχετικιστικά φερμιόνια με σπιν 1/2 και φορτίο $-e$, προσδιορίζουμε την εξίσωση διασποράς με βάση την εξίσωση Dirac. Σε επίπεδο χωροχρόνου, αυτή έχει τη μορφή

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0 \quad (5.50)$$

όπου ψ ο σπίνορας Dirac, D_μ η συναλλοίωτη παράγωγος

$$\begin{aligned} D_\mu &\equiv \partial_\mu - ieA_\mu \\ [D_\mu, D_\nu] &= -ieF_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.51)$$

και $F_{\mu\nu}$ ο ηλεκτρομαγνητικός ταυυστής του Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.52)$$

Δρούμε στα δύο μέλη της (5.50) με τον μιγαδικό συζυγή του τελεστή Dirac και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu + m^2)\psi = 0 \quad (5.53)$$

Με χρήση του μεταθέτη (Α'.7) και του αντιμεταθέτη (Α'.8) των πινάκων Dirac, η (5.53) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2}(-4iS^{\mu\nu}D_\mu D_\nu + 2D^\mu D_\mu)\psi + m^2\psi = 0 \quad (5.54)$$

Ο μεταθέτης (5.51) εισάγει στην εξίσωση τον ηλεκτρομαγνητικό ταυυστή

$$[D^2 - iS^{\mu\nu}(-ieF_{\mu\nu}) + m^2]\psi = 0 \quad (5.55)$$

Στην περίπτωση μη μηδενικού μαγνητικού πεδίου (δες (4.13))

$$\begin{aligned} F_{0i} &= F_{i0} = 0 \\ F_{ij} &= \epsilon_{ijk} B_k \end{aligned} \quad (5.56)$$

όπου B_k οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου, και χρησιμοποιώντας την εκφραση του $S^{\mu\nu}$ [15], η σχετικιστική εξίσωση ανάγεται στην

$$\left[D_0^2 + (-iD_i)^2 - 2e\vec{B} \cdot \vec{S} + m^2 \right] \psi = 0 \quad (5.57)$$

Μετασχηματίζοντας στο χώρο των ορμών, ο πρώτος όρος δείνει το αρνητικό τετράγωνο της ενέργειας $-E^2$ ενώ ο δεύτερος περιλαμβάνει τον τελεστή της μηχανικής ορμής, ο οποίος συνδέεται με την στροφορμή (5.13) ως εξής

$$\vec{\Pi}^2 = \frac{1}{r^2} \left[\vec{\Lambda}^2 - i\vec{r} \cdot \vec{\Pi} + (\vec{r} \cdot \vec{\Pi})^2 \right] = \frac{\Lambda^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \quad (5.58)$$

Συμβολίζουμε την ακτινική ορμή με p_3

$$\vec{\Pi}^2 = \frac{\Lambda^2}{r^2} + p_3^2 \quad (5.59)$$

Αντικαθιστούμε την ιδιοτιμή του τελεστή Λ^2 , δεξ (5.23), και βρίσκουμε

$$\frac{\Lambda^2}{r^2} = \frac{s_0}{r^2} = eB \equiv |F| \quad (5.60)$$

Ο τρίτος όρος περιγράφει την αλληλεπίδραση του μαγνητικού πεδίου με το σπιν \vec{S}

$$2e\vec{B} \cdot \vec{S} = 2eBs \equiv 2|F|s \quad (5.61)$$

Για ένα φερμιόνιο οι ιδιοτιμές του σπιν είναι $\pm \frac{1}{2}$ (θέτουμε $\hbar = 1$) από τις οποίες επιλέγεται η θετική για ισχυρά μαγνητικά πεδία. Ως αποτέλεσμα, να αλληλοαναιρούνται η ενεργειακή συνεισφορά εξαιτίας της αλληλεπίδρασης της τροχιακής στροφορμής με το μαγνητικό πεδίο και η συνεισφορά εξαιτίας της σύζευξης του σπιν με το μαγνητικό πεδίο. Τέλος, με βάση τα πιο πάνω, η σχετικιστική εξίσωση διασποράς ανάγεται στην ακόλουθη

$$E^2(\text{spinor}) - p_3^2 = m^2 + |F|(1 - 2s) = m^2 + 0, \quad s = 1/2 \quad (5.62)$$

Για βαθμωτά πεδία (με σπιν 0) και φορτίο $-e$, η αντίστοιχη εξίσωση είναι

$$E^2(\text{scalar}) - p_3^2 = m^2 + |F|, \quad s = 0 \quad (5.63)$$

Για φορτισμένα διανυσματικά πεδία με σπιν 1 παίρνουμε [5]

$$E^2(\text{vector}) - p_3^2 = m^2 + |F|(1 - 2s) = m^2 - |F|, \quad s = 1 \quad (5.64)$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, στη βασική στάθμη Landau $n = 0$, οι εξισώσεις διασποράς για φορτισμένα βαθμωτά, φερμιονικά και διανυσματικά πεδία είναι

$$E^2 - p_3^2 = \begin{cases} m^2 + |F|, & s = 0 \\ m^2 + 0, & s = 1/2 \\ m^2 - |F|, & s = 1 \end{cases} \quad (5.65)$$

Το καθιερωμένο πρότυπο βασίζεται στη θεωρία των Glashow, Weinberg και Salam, η οποία ενοποιεί τις ηλεκτρομαγνητικές και τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις σε μια συμμετρική, μη-αβελιανή θεωρία βαθμίδας $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Η ηλεκτρασθεής συμμετρία αυτή σπάζει αυθόρμητα (μηχανισμός Higgs) με σημαντικές φυσικές συνέπειες [15]. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε μερικές από τις συνέπειες αυτές, και τις επανεξετάζουμε στην περίπτωση ισχυρών μαγνητικών πεδίων υποβάθρου. Μία τέτοια κατάσταση εμφανίζεται στην εξωτερική περιοχή του ορίζοντα μιας μαγνητικά φορτισμένης μελανής οπής.

6.1 Αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας

Οι συμμετρίες ενός φυσικού μοντέλου είναι μετασχηματισμοί που αφήνουν αμετάβλητες παρατηρήσιμες φυσικές ποσότητες, όπως η ενέργεια. Οι μετασχηματισμοί αναπαρίστανται ως εκθετικοί μοναδιακοί τελεστές $U = e^{iT^i\theta^i}$ που δρουν στο χώρο Hilbert, \mathcal{H} , των κβαντικών καταστάσεων

$$U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (6.1)$$

όπου T^i οι ερμιτιανοί γεννήτορες των μετασχηματισμών (με τις απαραίτητες μεταθετικές ιδιότητες). Οι μοναδιακοί τελεστές δρουν γραμμικά στις κβαντικές καταστάσεις, οι οποίες στη γενικότερη περίπτωση μεταβάλλονται

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle \equiv U|\psi\rangle = e^{iT^i\theta^i}|\psi\rangle \quad |\psi\rangle \neq |\psi'\rangle \quad (6.2)$$

Αντίθετα, εάν μια κατάσταση $|\psi\rangle$ παραμένει αναλλοίωτη, τότε είναι συμμετρική ως προς τους μετασχηματισμούς. Σε αυτή τη περίπτωση η $|\psi\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή U και καταστρέφεται από τους αντίστοιχους γεννήτορες

$$|\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle = |\psi\rangle, \quad T^i|\psi\rangle = 0 \quad (6.3)$$

Οι μετασχηματισμοί λοιπόν που αφήνουν τη χαμιλτονιανή αναλλοίωτη αποτελούν συμμετρίες της θεωρίας. Οι αντίστοιχοι μοναδιακοί τελεστές και οι γεννήτορες τους μετατίθενται με τη χαμιλτονιανή

$$[H, U] = [H, T^a] = 0 \quad (6.4)$$

Εκδηλώνονται σημαντικά φαινόμενα όταν η δράση των μετασχηματισμών συμμετρίας μεταβάλλουν τη βασική κατάσταση του συστήματος, ή την κατάσταση κενού σε ένα σύστημα κβαντικού πεδίου $|\Omega\rangle \mapsto H|\Omega_i\rangle$ μετασχηματίζεται σε μια ορθογώνια κατάσταση $|\Omega_j\rangle$, σύμφωνα με την (6.2)

$$|\Omega_i\rangle \mapsto |\Omega_j\rangle \equiv U|\Omega_i\rangle \neq |\Omega_i\rangle \quad \langle\Omega_i|\Omega_j\rangle = \delta_{ij} \quad (6.5)$$

Με χρήση του μεταθέτη (6.4) είναι φανερό ότι η νέα κατάσταση $|\Omega'\rangle$ είναι επίσης ιδιοκατάσταση της χαμιλτονιανής με την ίδια ιδιοτιμή

$$[H, U]|\Omega\rangle = 0 \Rightarrow H(U|\Omega\rangle) = UH|\Omega\rangle = E_\Omega U|\Omega\rangle \quad (6.6)$$

Οι εκφυλισμένες καταστάσεις έχουν την ίδια ενέργεια E_Ω αλλά διαφορετικές αναμενόμενες τιμές για διάφορους άλλους τελεστές. Μια υπέρθεση όλων αυτών των καταστάσεων, όπως προβλέπεται στη μη σχετικιστική κβαντική μηχανική, σέβεται την συμμετρία και αίρει τον εκφυλισμό. Όπως δείχνουμε στη συνέχεια, η πραγματική βασική κατάσταση στην περίπτωση ενός κβαντομηχανικού μοντέλου δεν είναι κάποια από τις καταστάσεις που ελαχιστοποιούν τη δυναμική ενέργεια, αλλά μια συμμετρική υπέρθεση τους. Αντίθετα, στην κβαντική θεωρία πεδίων, οι βασικές καταστάσεις μπορεί να σπάζουν τη συμμετρία σύμφωνα με την (6.5). Όταν συμβαίνει αυτό θα λέμε ότι η συμμετρία σπάζει αυθόρμητα.

6.1.1 Κβαντομηχανικό παράδειγμα

Ως πρώτο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα μη σχετικιστικό κβαντικό σωματίδιο μάζας m το οποίο κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση δύναμης που απορρέει από το δυναμικό $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(x^2 - 1)$. Η χαμιλτονιανή του συστήματος παραμένει αναλλοίωτη ως προς τη συμμετρία ομοτιμίας $x \rightarrow -x$, που είναι μια διακριτή \mathbb{Z}_2 συμμετρία. Το δυναμικό έχει δύο ελάχιστα για $x = a, -a$. Εκδηλώνει μέγιστο στη θέση $x = 0$. Ένα κλασικό σωματίδιο με συνολική ενέργεια $E < V(0)$ είναι εξαναγκασμένο να εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από ένα ελάχιστο, χωρίς να μπορεί να διέλθει του φράγματος δυναμικού. Αυτό όμως, δεν συμβαίνει στο κβαντικό επίπεδο εξαιτίας του φαινομένου της σήραγγας. Στο χώρο Hilbert, οι δύο εκφυλισμένες καταστάσεις είναι οι $|a\rangle$ και $|-a\rangle$ με την κάθε μια να επικεντρώνεται γύρω από την αντίστοιχη κλασική θέση ισορροπίας

$$\langle -a | \hat{x} | -a \rangle = -a \quad \langle a | \hat{x} | a \rangle = a \quad (6.7)$$

Οι δύο αυτές καταστάσεις δεν περιγράφουν τη βασική κατάσταση του συστήματος, αφού το κβαντικό σωματίδιο μπορεί να διέλθει του φράγματος με μη μηδενική πιθανότητα, η οποία υπολογίζεται στην προσέγγιση WKB (π.χ. [8])

$$T = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{-a}^a dx [2m(V - E)]^{1/2} \right] \quad (6.8)$$

Η χαμιλτονιανή έχει τα εξής πινακοστοιχεία μεταξύ των δύο εκφυλισμένων καταστάσεων $|a\rangle$ και $|-a\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle -a | \hat{H} | -a \rangle &= \langle a | \hat{H} | a \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega \\ \langle -a | \hat{H} | a \rangle &= \langle a | \hat{H} | -a \rangle = \frac{\hbar\omega}{2\pi} e^{-m\omega a^2/\hbar} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Η βασική κατάσταση αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των $|a\rangle$ και $|-a\rangle$. Πράγματι, ο εκφυλισμός αίρεται και η κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας είναι ο συμμετρικός συνδυασμός $|S\rangle$, με ενέργεια E_S που δίδεται από την έκφραση

$$|S\rangle = \frac{|a\rangle + |-a\rangle}{\sqrt{2}} \quad E_S = \frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{\hbar\omega}{2\pi} e^{-m\omega a^2/\hbar} \quad (6.10)$$

Η αναμενόμενη τιμή του τελεστή θέσης \hat{x} στη βασική κατάσταση είναι επομένως αμετάβλητη ως κατοπτρικούς μετασχηματισμούς ομοτιμίας, εξαιτίας της αναλλοιότητας της βασικής κατάστασης

$$\langle S | \hat{x} | S \rangle = 0 \quad (6.11)$$

6.1.2 Συνεχείς συμμετρίες και μποζόνια Goldstone

Στη κβαντική θεωρία πεδίων, όταν σπάσουν αυθόρμητα συνεχείς καθολικές συμμετρίες εμφανίζονται άμαξα σωματίδια στο φάσμα, τα σωματίδια Goldstone, σύμφωνα με το θεώρημα Goldstone. Στην περίπτωση τοπικών συμμετριών, οι καταστάσεις Goldstone συνδυάζονται με τα μποζόνια βαθμίδας για να δώσουν ένα σωματίδιο με σπιν 1 και μη μηδενική μάζα [15]. Το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας δεν εκδηλώνεται σε χωροχρόνους με δύο ή λιγότερες διαστάσεις λόγω των ισχυρών κβαντικών διακυμάνσεων των μποζονίων Goldstone.

6.1.3 Κατάσταση κενού στην κβαντική θεωρία πεδίου

Σε μια κβαντική θεωρία πεδίου, ενδέχεται οι καταστάσεις που ελαχιστοποιούν την ενέργεια να είναι εκφυλισμένες. Οι καταστάσεις αυτές μετασχηματίζονται η μια στην άλλη μέσω συμμετριών, όπως αναφέραμε προηγουμένως, και χαρακτηρίζονται από μη μηδενικές τιμές κάποιου πεδιακού τελεστή. Στις τέσσερις διαστάσεις, είναι δυνατό το σύστημα να βρεθεί σε μία από τις εκφυλισμένες καταστάσεις αυτές, η οποία όμως δεν είναι αμετάβλητη, οδηγώντας σε αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας. Αυτό μπορεί να δειχθεί εφαρμόζοντας την αρχή της ανάλυσης κατά κλάστες [19]. Με βάση την αρχή αυτή τα αποτελέσματα πειραμάτων σε περιοχές του χώρου που απέχουν κατά πολύ μεγάλη απόσταση, δηλαδή για $\mathbf{x} \equiv \vec{x}$, $\mathbf{y} \equiv \vec{y}$, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty$, είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Συνεπώς, στην πραγματική κατάσταση κενού, $|\text{VAC}\rangle$, η αναμενόμενη τιμή γινομένου δύο πεδιακών τελεστών, σε δύο σημεία των περιοχών αυτών αντίστοιχα, παραγοντοποιείται σε γινόμενο των αναμενόμενων τιμών του κάθε τελεστή ξεχωριστά [19]

$$\lim_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty} \langle \text{VAC} | A(\mathbf{x})B(\mathbf{y}) | \text{VAC} \rangle = \langle \text{VAC} | A(\mathbf{x}) | \text{VAC} \rangle \langle \text{VAC} | B(\mathbf{y}) | \text{VAC} \rangle \quad (6.12)$$

Η αρχή δεν μπορεί να ικανοποιηθεί εάν η κατάσταση κενού $|\text{VAC}\rangle$ αποτελεί υπέρθεση των εκφυλισμένων καταστάσεων που ελαχιστοποιούν την ενέργεια. Αρχικά, μια κατάσταση κενού έχει μηδενική συνολική ορμή και είναι επομένως αναλλοίωτη ως προς χωρικές μετατοπίσεις ή αλλιώς στη δράση του τελεστή μετατοπίσεων

$$\hat{T}(\mathbf{x})|\Omega\rangle = |\Omega\rangle \quad \hat{T}(x) \equiv e^{-ix \cdot \mathbf{P}} \quad (6.13)$$

Ένας πεδιακός τελεστής A στη θέση \mathbf{x} μπορεί να γραφτεί συναρτήσει του τελεστή στην αρχή των αξόνων $\mathbf{0}$ και του τελεστή μεταφοράς ως εξής

$$A(\mathbf{x}) = \hat{T}(\mathbf{x})A(0)\hat{T}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (6.14)$$

Επομένως τα πινακοστοιχεία του μεταξύ των εκφυλισμένων καταστάσεων κενού είναι ανεξάρτητα της θέσης

$$\langle \Omega_i | A(\mathbf{x}) | \Omega_k \rangle = \langle \Omega_i | A(0) | \Omega_k \rangle \quad (6.15)$$

Ας θεωρήσουμε ότι το φάσμα των εκφυλισμένων καταστάσεων κενού είναι διακριτό [19]. Τότε ο μοναδιαίος πίνακας (στον χώρο των μονοσωματιδιακών καταστάσεων) δίδεται από την εξής σχέση πληρότητας (ο δείκτης m συμβολίζει άλλος βαθμούς ελευθερίας)

$$\mathbf{1} = \sum_{\Omega} |\Omega\rangle \langle \Omega| + \int \sum_m d^3 \mathbf{p} |\mathbf{p}, m\rangle \langle \mathbf{p}, m| \quad (6.16)$$

Παρεμβάλλοντας τη σχέση πληρότητας στη συνάρτηση συσχέτισης δύο ερμιτιανών τελεστών παίρνουμε

$$\langle \Omega_i | A(\mathbf{x}) \mathbf{1} B(\mathbf{y}) | \Omega_k \rangle = \sum_{\Omega} \langle \Omega_i | A(\mathbf{x}) | \Omega \rangle \langle \Omega | B(\mathbf{y}) | \Omega_k \rangle + \int d^3 \mathbf{p} \langle \Omega_i | A(\mathbf{x}) | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | B(\mathbf{y}) | \Omega_k \rangle \quad (6.17)$$

Με χρήση των (6.14) και (6.13) η προηγούμενη εξίσωση ανάγεται στην ακόλουθη

$$\sum_{\Omega} \langle \Omega_i | A(0) | \Omega \rangle \langle \Omega | B(0) | \Omega_k \rangle + \int d^3 \mathbf{p} \langle \Omega_i | A(0) | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | B(0) | \Omega_k \rangle e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \quad (6.18)$$

Το ολοκλήρωμα στον χώρο των ορμών μηδενίζεται στο όριο $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty$, εξαιτίας της έντονα διακυμενόμενης φάσης, με βάση το θεώρημα Riemann-Lebesgue. Το αποτέλεσμα ισχύει και εάν μεταθέσουμε τους δύο τελεστές. Επομένως παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty} \langle \Omega_i | A(\mathbf{x}) B(\mathbf{y}) | \Omega_k \rangle &= \sum_n \langle \Omega_i | A(0) | \Omega_n \rangle \langle \Omega_n | B(0) | \Omega_k \rangle \\ \lim_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty} \langle \Omega_i | B(\mathbf{y}) A(\mathbf{x}) | \Omega_k \rangle &= \sum_n \langle \Omega_i | B(0) | \Omega_n \rangle \langle \Omega_n | A(0) | \Omega_k \rangle \end{aligned} \quad (6.19)$$

Επιπρόσθετα, με βάση την αρχή της αιτιότητας, ο μεταθέτης δύο χωροειδώς διαχωρισμένων τοπικών τελεστών μηδενίζεται. Επομένως, για ισόχρονα σημεία $[A(\mathbf{x}), B(\mathbf{y})] = 0$. Εφόσον οι τελεστές είναι ερμιτιανοί και μετατίθενται, πρέπει να διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα στη βάση $|\Omega\rangle$. Επομένως τα πινακοστοιχεία στα δεξιά μέλη της (6.19) ικανοποιούν τη σχέση

$$\langle \Omega_i | \mathcal{O}(0) | \Omega_k \rangle = \delta_{ik} a_k \quad (6.20)$$

με αποτέλεσμα να ισχύει η ανάλυση κατά κλάστες, (6.12), σε μια από τις εκφυλισμένες καταστάσεις $|\Omega\rangle$. Αντίθετα, εάν η πραγματική κατάσταση του κενού αποτελεί υπέρθεση των εκφυλισμένων καταστάσεων $|\Omega\rangle$, παίρνουμε

$$\langle \text{VAC} | A(\mathbf{x}) B(\mathbf{y}) | \text{VAC} \rangle = \sum_n \langle \text{VAC} | A(0) | \Omega_n \rangle \langle \Omega_n | B(0) | \text{VAC} \rangle \quad (6.21)$$

Το μη τετριμμένο άθροισμα φανερώνει ότι είναι αδύνατον να ικανοποιηθεί η αρχή της ανάλυσης σε κλάστες. Έτσι, σε ένα χώρο με άπειρη διαστατικότητα, το σύστημα μπορεί να βρίσκεται σε μια από τις εκφυλισμένες καταστάσεις $|\Omega\rangle$, και συνεπώς σπάζει αυθόρμητα η συμμετρία.

6.2 Τοπική θεωρία βαθμίδας

Οι ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις περιγράφονται από μια θεωρία Yang-Mills με συμμετρία βαθμίδας $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Ο δείκτης L στην ομάδα $SU(2)$ δηλώνει τη χειραλικότητα της θεωρίας, αφού μόνο τα αριστερόστροφα φερμιόνια αλληλεπιδρούν με τα μποζόνια βαθμίδας $SU(2)$.

Έχοντας επιλέξει την ομάδα συμμετρίας, η Λαγκραντζιανή πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από τους αντίστοιχους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Τέτοιοι μετασχηματισμοί έχουν την μορφή

$$\phi \rightarrow e^{ia^i \frac{\sigma^i}{2}} e^{i\beta Y} \phi \quad Y \equiv y\sigma^0 \quad (6.22)$$

όταν το πεδίο ϕ βρίσκεται στην βασική αναπαράσταση της $SU(2)$, όπου $\frac{\sigma^i}{2}$, Y οι γεννήτορες των ομάδων $SU(2)$ και $U(1)$, αντίστοιχα, που δίδονται συναρτήσει πινάκων Pauli. Οι τέσσερις συναρτήσεις $\alpha^i(x)$ και $\beta(x)$ είναι συνεχείς και διαφορίσιμες συναρτήσεις του χωροχρόνου. Η αναλλοιότητα των κινητικών όρων επιτυγχάνεται αναβαθμίζοντας τη μερική παράγωγο στη συναλλοίωτη παράγωγο

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - igW_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - ig_y B_\mu Y \quad (6.23)$$

όπου τα μποζονικά πεδία βαθμίδας W_μ^i , B_μ συνοδεύουν τους γεννήτορες των ομάδων $SU(2)$ και $U(1)$ αντίστοιχα. Τα πεδία βαθμίδας υπόκεινται στους ακόλουθους μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned} W_\mu^i &\rightarrow W_\mu^i + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^i - \epsilon^{ijk} \alpha^j W_\mu^k \\ B_\mu &\rightarrow B_\mu + \frac{1}{g_y} \partial_\mu \beta \end{aligned} \quad (6.24)$$

Όροι μάζας για τα πεδία βαθμίδας απαγορεύονται λόγω μη αναλλοιότητας, ενώ επιτρέπονται κινητικοί όροι φτιαγμένοι από τους τανυστές $G_{\mu\nu}^i$ και $B_{\mu\nu}$

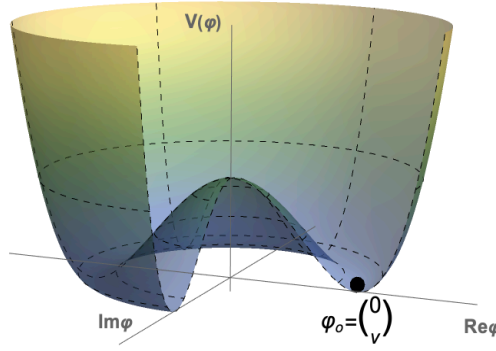
$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \quad (6.25)$$

Οι κινητικοί όροι των μποζονίων βαθμίδας στη Λαγκραντζιανή, ώστε αυτή να μένει αμετάβλητη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, είναι

$$\mathcal{L}_K = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (6.26)$$

Η Λαγκραντζιανή του ηλεκτρασθενούς μοντέλου στην απουσία φερμιονίων δίδεται από το άθροισμα της (6.26) και της Λαγκραντζιανής του πεδίου Higgs, (6.29), η οποία παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_\phi \quad (6.27)$$



Σχήμα 6.1: Η συνάρτηση δυναμικού του μιγαδικού πεδίου ϕ .

6.3 Εισαγωγή πεδίου Higgs

Για παραχθούν όροι μάζας για τα μποζόνια βαθμίδας εισάγουμε ένα βαθμωτό πεδίο, ϕ , στη βασική αναπαράσταση της ομάδας $SU(2)$ - το πεδίο Higgs. Οι τέσσερις βαθμοί ελευθερίας (β.ε.) του πεδίου ϕ

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \phi^0, \phi^+ \in \mathbb{C} \quad (6.28)$$

μετασχηματίζονται σύμφωνα με την (6.22). Η συνάρτηση δυναμικού του πεδίου πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες της επανακανονικοποίησης και να σέβεται τις συμμετρίες ως προς τους $SU(2)_L \times U(1)_Y$ μετασχηματισμούς. Η πιο γενική Λαγκραντζιανή είναι

$$\mathcal{L}_\phi = |D_\mu \phi|^2 - V(\phi) = |D_\mu \phi|^2 + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (6.29)$$

Όταν οι δύο παραμέτροι $\mu^2, \lambda \in \mathbb{R}$ είναι θετικές, το δυναμικό ελαχιστοποιείται από ένα σύνολο εκφυλισμένων καταστάσεων για τις οποίες ισχύει

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= v^2, \quad v \in \mathbb{R} \\ \min V(\phi^\dagger \phi) &= V(v^2) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Εάν $|\Omega\rangle$ είναι μια κατάσταση κενού, στην οποία η αναμενόμενη τιμή του πεδιακού τελεστή ϕ είναι μη μηδενική, $\langle \Omega | \phi | \Omega \rangle \neq 0$, τότε αυτή πρέπει να μετασχηματίζεται κάτω από τη δράση της μοναδιακού τελεστή $U(g)$ (όπου $g \in SU(2)_L \times U(1)_Y$), στην ορθοκανονική κατάσταση $|\Omega'\rangle \equiv U|\Omega\rangle$, με την ίδια ενέργεια αλλά διαφορετική αναμενόμενη τιμή για τον πεδιακό τελεστή ϕ :

$$\langle \Omega' | \phi | \Omega' \rangle = e^{ia^i \frac{\sigma^i}{2}} e^{i\beta Y} \langle \Omega | \phi | \Omega \rangle \quad (6.31)$$

Από τη συζήτηση της ενότητας 6.1 αναμένουμε ότι η πραγματική κατάσταση κενού θα είναι μια από τις εκφυλισμένες καταστάσεις $|\Omega\rangle$, με μη μηδενική αναμενόμενη τιμή $\langle \phi \rangle$. Ως αποτέλεσμα οι β.ε. της διπλέτας που περιγράφουν το κενό δεσμεύονται και κάποια από τα σωματίδια βαθμίδας αποκτούν μάζα. Μια γενική διπλέτα παράγεται από μια $SU(2)$

περιστροφή συγκεκριμένης διπλέτας με $\phi^+ = 0$ και $\phi^0 \in \mathbb{C}$

$$\phi = e^{i\xi \frac{\sigma^3}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

Η περιστροφή αφήνει την \mathcal{L}_ϕ αναλλοίωτη και καθιστά μια γενική διπλέτα (6.28) ισοδύναμη με την

$$\bar{\phi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

Με βάση τη διπλέτα (6.33), "δεσμεύονται" δύο από τους τέσσερις β.ε. του πεδίου Higgs [10]. Για να βρούμε το ελάχιστο του δυναμικού, βρίσκεται αντικαθιστούμε για $\bar{\phi}_0$ στο δυναμικό, $V(\phi^\dagger \phi)$, και ελαχιστοποιούμε ως προς $x \equiv |\phi^0|^2$. Έτσι, βρίσκουμε ένα σύνολο ελαχίστων για διάφορες τιμές του πραγματικού και φανταστικού μέρους της συνιστώσας ϕ^0 με μέτρο

$$v^2 \equiv \phi^{0*} \phi^0 = (\text{Re } \phi^0)^2 + (\text{Im } \phi^0)^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (6.34)$$

Το σύνολο των τιμών αυτών αντιστοιχεί στην κυκλική βάση του δυναμικού της γραφικής παράστασης 6.1.

Η (6.33) παράγεται από έναν $SU(2) \times U(1)$ μετασχηματισμό μιας διπλέτας με μια μόνο πραγματική συνιστώσα

$$\bar{\phi}_0 = e^{i\alpha(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} \quad (6.35)$$

Δευσμεύοντας λοιπόν ακόμη έναν από τους τέσσερις β.ε. του πεδίου Higgs, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τη διπλέτα

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

Οι τέσσερις συνολικά γεννήτορες της ομάδας $SU(2)_L \times U(1)_Y$ αντιστοιχούν με τους τέσσερις β.ε. του πεδίου Higgs (6.28). Η (6.36) αντιστοιχεί στη μαύρη κουκίδα της εικόνας 6.1. Τρεις ανεξάρτητες συμμετρίες σπάζουν, αλλά παραμένει μια που αφήνει την (6.36) αναλλοίωτη. Συνδυάζοντας το γεννήτορα $\frac{\sigma^3}{2}$ της $SU(2)$ με τον γεννήτορα Y της $U(1)$, παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi_0 = 0 \quad (6.37)$$

έχοντας θέσει το υπερφορτίο του ϕ ίσο με $y = \frac{1}{2}$, έτσι ώστε $Y = \frac{\sigma^0}{2}$. Έτσι, βρίσκουμε το υποσύνολο των μετασχηματισμών που δεν σπάζουν και αφήνουν την ϕ_0 αναλλοίωτη:

$$\phi_0 \rightarrow e^{if(x)Q} \phi_0 = \phi_0 \quad (6.38)$$

Οι πιο πάνω μετασχηματισμοί σχηματίζουν μια ομάδα $U(1)$ με γεννήτορα τον Q

$$Q \equiv \frac{\sigma^3}{2} + Y \quad (6.39)$$

Οι τρεις β.ε. του πεδίου Higgs που έχουν "δευσμευτεί" απορροφούνται από τα τρία μποζόνια των σπασμένων συμμετριών βαθμίδος παράγοντας τρία διανυσματικά πεδία με μη μηδενική μάζα.

6.4 Μάζες μποζονίων βαθμίδας

Ακολουθούμε την ανάλυση του Peskin [15] και εξετάζουμε τον κινητικό όρο του μποζονικού πεδίου Higgs. Η συναλλοίωτη παράγωγος είναι

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig W_\mu^i \tau^i - ig_y B_\mu Y \quad \tau^i \equiv \frac{\sigma^i}{2} \quad (6.40)$$

Δρώντας στην κατάσταση ϕ_0 , η οποία είναι ομογενής, οι μερικές παράγωγοι μηδενίζονται και έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} |D_\mu \phi_0|^2 &= \phi_0^\dagger (g W_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + g_y B_\mu Y)^2 \phi_0 \\ &= \phi_0^\dagger (\frac{g^2}{4} W^2 \mathbf{1} + g g_y W^3 \sigma^3 Y + (g_y B Y)^2) \phi_0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

Με βάση τη (6.36) και το υπερφορτίο του ϕ , βρίσκουμε

$$|D_\mu \phi_0|^2 = \frac{1}{4} v^2 g^2 W^2 - \frac{1}{2} v^2 g g_y W^3 B + \frac{1}{4} (v g_y)^2 B^2 \quad (6.42)$$

Καταλήγουμε σε τρεις όρους με μάζας, οι οποίοι γράφονται στην μορφή γινομένου πινάκων

$$|D_\mu \phi_0|^2 = \frac{1}{2} (m^2)^{ab} \Gamma_\mu^a \Gamma_\mu^b \quad (6.43)$$

όπου

$$\Gamma_\mu \equiv (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu) \quad (6.44)$$

και m^2 ο πίνακας μάζας

$$m^2 \equiv \frac{v^2}{2} \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -g g_y \\ 0 & 0 & -g g_y & g_y^2 \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

Ο πίνακας μάζας όμως δεν είναι διαγώνιος για την εξαγωγή των μαζών των φυσικών σωματιδίων. Διαγωνοποιούμε τον πίνακα μάζας m_D^2 με τον ακόλουθο μετασχηματισμό ομοιότητας

$$m_D^2 = E^{-1} m^2 E = \frac{v^2}{2} \cdot \text{diag}(g^2, g^2, (g^2 + g_y^2), 0) \quad (6.46)$$

όπου

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{\sqrt{g^2 + g_y^2}} & \frac{g_y}{\sqrt{g^2 + g_y^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-g_y}{\sqrt{g^2 + g_y^2}} & \frac{g}{\sqrt{g^2 + g_y^2}} \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

Ο μετασχηματισμός ομοιότητας οδηγεί στην νέα βάση μποζονίων βαθμίδας, ως εξής

$$W'_\mu \equiv (W_\mu^1, W_\mu^2, Z_\mu^0, A_\mu) = (E^{-1})^{ab} \Gamma_\mu^b \quad (6.48)$$

Τα πεδία W^3 και B της αρχικής βάσης περιστρέφονται στα πεδία Z^0 και A . Το πρώτο, με μάζα $\frac{v}{\sqrt{2}}\sqrt{g^2 + g_y^2}$, αντιστοιχεί στο συνδυασμό

$$Z_\mu^0 := \frac{gW_\mu^3 - g_y B_\mu}{\sqrt{g^2 + g_y^2}} \quad (6.49)$$

και είναι συζευγμένο με τα ουδέτερα ρεύματα των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Το δεύτερο, με μηδενική μάζα, είναι ο φορέας των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων, το φωτόνιο

$$A_\mu := \frac{g_y W_\mu^3 + g B_\mu}{\sqrt{g^2 + g_y^2}} \quad (6.50)$$

Τα πεδία W^1 και W^2 αποκτούν μάζα $\frac{vg}{\sqrt{2}}$, και αποτελούν τους ηλεκτρικά φορτισμένους φορείς των ασθενών αλληλεπιδράσεων

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (6.51)$$

Συνδέονται με τους αντίστοιχους συνδυασμούς των γεννητόρων τ^1 και τ^2

$$\tau^\pm \equiv \tau^1 \pm i\tau^2 \quad (6.52)$$

Ο ορθογώνιος πίνακας \bar{E}^{-1} που παράγει την περιστροφή

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{g^2 + g_y^2}} \begin{pmatrix} g & -g_y \\ g_y & g \end{pmatrix}}_{\bar{E}^{-1}} \begin{pmatrix} W^3 \\ B \end{pmatrix} \quad (6.53)$$

μπορεί να εκφραστεί ως πίνακας περιστροφής στο επίπεδο, συναρτήσει της γωνίας θ_w

$$\bar{E}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \quad (6.54)$$

η οποία ονομάζεται η ασθενής γωνία πρόσμιξης. Ο λόγος των σταθερών σύζευξης ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας πρόσμιξης

$$\tan \theta_w \equiv \frac{g_y}{g} \quad (6.55)$$

Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία θ_w με βάση τον λόγο των μαζών των σωματιδίων W και Z

$$\theta_w = \cos^{-1} \frac{m_W}{m_Z} \sim 28^\circ \quad (6.56)$$

Τέλος, στη νέα βάση, η συναλλοίωτη παράγωγος (6.40) γράφεται ως

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \tau^+ + W_\mu^- \tau^-) - i \frac{g}{\cos \theta_w} Z_\mu^0 (\tau^3 - \sin^2 \theta_w Q) - ie A_\mu Q \quad (6.57)$$

Έχοντας ταυτίσει το πεδίο A_μ με το φωτόνιο, βρίσκουμε τη σταθερά σύζευξη του με φορτισμένα πεδία

$$e \equiv \frac{gg_y}{\sqrt{g^2 + g_y^2}} = g \sin \theta_w \quad (6.58)$$

Το ηλεκτρικό φορτίο ταυτίζεται με την ιδιοτιμή του γεννήτορα Q :

$$Q = \tau^3 + Y \quad (6.59)$$

Η λαγκραντζιανή της ηλεκτρασθενούς θεωρίας, στη βαθμίδα όπου το Higgs δίδεται από την πραγματική διπλέτα που παρουσιάσαμε πιο πάνω, και αγνοώντας τους φερμιονικούς όρους, δίδεται συναρτήσει των φυσικών πεδίων $A_\mu, Z_\mu, W_\mu \equiv W_\mu^+, W_\mu^\pm \equiv W_\mu^-$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} |\overline{D}_\mu W_\nu - \overline{D}_\nu W_\mu|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu}^2 + (\partial_\mu \phi)^2 \\ & + \frac{1}{2} g^2 \phi^2 |W_\mu|^2 + \frac{1}{2} \frac{g^2 \phi^2}{2 \cos^2 \theta_w} Z_\mu^2 \\ & - ig (\sin \theta_w F_{\mu\nu} + \cos \theta_w Z_{\mu\nu}) W^{\dagger\mu} W^\nu \\ & + \frac{1}{2} g^2 ((W_\mu^\dagger W_\nu)^2 - (W_\mu^\dagger W^\mu)^2) \\ & - \lambda (\phi^2 - v^2)^2 \end{aligned} \quad (6.60)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος των μποζονίων W είναι η ακόλουθη

$$\overline{D}_\mu \equiv \partial_\mu - ig (\cos \theta_w Z_\mu + \sin \theta_w A_\mu)$$

Η αρχική συμμετρία είναι σπασμένη στην $U(1)$ συμμετρία του ηλεκτρομαγνητισμού.

6.5 Φερμιόνια στο καθιερωμένο Πρότυπο

Η αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας από το πεδίο Higgs επιτρέπει την εισαγωγή φερμιονικών όρων μάζας. Σε αντίθεση με το καθιερωμένο πρότυπο, η θεωρία Dirac για ένα σχετικιστικό φερμιονικό πεδίο επιδέχεται άμεσα όρους μάζας, καθώς η απαίτηση για αναλλοιώτητα κατά Lorentz ικανοποιείται εύκολα

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi \quad (6.61)$$

Οι σπίνορες ψ του Dirac γράφονται συναρτήσει ενός αριστερόστροφου ψ_L και δεξιόστροφου ψ_R σπινόρα ως εξής

$$\psi = \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \psi + \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \psi \equiv \psi_L + \psi_R \quad (6.62)$$

Αντικαθιστώντας στην (6.61) και χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες $\{\gamma^5, \gamma^0\} = 0$, $(\gamma^5)^2 = 1$, $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$, βρίσκουμε ότι οι όροι μάζας με δύο ψ_L ή δύο ψ_R μηδενίζονται:

$$m\bar{\psi}_L\psi_L = \bar{\psi}\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\psi\right) = 0 \quad (6.63)$$

Η αναλλοιότητα ως προς μετασχηματισμούς βαθμίδας στο καθιερωμένο πρότυπο απαγορεύει όρους μάζας με έναν αριστερόστροφο και έναν δεξιόστροφο σπίνορα

$$m\bar{\psi}_L\psi_R \quad (6.64)$$

6.5.1 Χειραλικότητα

Εξαιτίας της χειραλικότητας των ασθενών αλληλεπιδράσεων μετασχηματίζονται διαφορετικά οι δεξιόστροφοι και οι αριστερόστροφοι σπίνορες ως προς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Τα δεξιόστροφα φερμιόνια, ψ_R , δεν αλληλεπιδρούν ασθενώς. Επομένως μετασχηματίζονται σύμφωνα με την τετριμμένη μοναδιαία αναπαράσταση (singlet) της $SU(2)$. Το ηλεκτρικό τους φορτίο ισούται με το υπερφορτίο. Ως προς μετασχηματισμούς βαθμίδας, μετασχηματίζονται με μια μιγαδική φάση, ανάλογα με το υπερφορτίο τους

$$\psi_R \rightarrow e^{i\beta_Y} \psi_R \quad (6.65)$$

Τα αριστερόστροφα φερμιόνια αλληλεπιδρούν ασθενώς και συνεπώς οι μετασχηματισμοί βαθμίδας εμπλέκουν την ομάδα $SU(2)$. Οι λεπτονικές διεργασίες ασθενών αλληλεπιδράσεων σέβονται αυστηρά την ταξινόμηση σε τρεις λεπτονικές οικογένειες: e , μ και τ και διατηρούν τους τρεις λεπτονικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, οι διασπάσεις $\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu$ και $e^- \rightarrow \nu_e W^-$ παρατηρούνται πειραματικά, όχι όμως οι διασπάσεις $W^- \rightarrow e\nu_\mu$, $\mu \rightarrow e\nu_e\bar{\nu}_\mu$, $\mu \rightarrow e\gamma$. Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις εμπλέκουν κάθε αριστερόστροφο λεπτόνιο και το αντίστοιχο αριστερόστροφο νετρίνο. Έτσι, τα λεπτόνια μετασχηματίζονται στη βασική αναπαράσταση της $SU(2)$ σχηματίζοντας τις διπλέτες

$$\ell_L^i \equiv \begin{pmatrix} \nu_i \\ i \end{pmatrix}_L, \quad i = e, \mu, \tau \quad (6.66)$$

Παρομοίως τα quarks ταξινομούνται σε τρεις οικογένειες ως ακολούθως

$$q_L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \quad (6.67)$$

Σε αντίθεση με την διατήρηση των λεπτονικών αριθμών, υπάρχουν ασθενείς διεργασίες που εμπλέκουν quarks από διαφορετικές οικογένειες, όπως για παράδειγμα, η διάσπαση $s \rightarrow u W^-$ [7].

Τα αριστερόστροφα φερμιόνια λοιπόν $\psi_L \equiv \ell_L^i, q_{i,L}$ μετασχηματίζονται ως ακολούθως

$$\psi_L \rightarrow e^{i\alpha^i \frac{\sigma^i}{2}} e^{i\beta_Y} \psi_L \quad (6.68)$$

	(3,2,1/6)	(3,1,2/3)	(3,1,-1/3)	(1,2,-1/2)	(1,1,-1)
SU(2)	$\left(\begin{pmatrix} u^r \\ d^r \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u^g \\ d^g \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u^b \\ d^b \end{pmatrix}_L \right)$	$(u^r, u^g, u^b)_R$	$(d^r, d^g, d^b)_R$	$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$	e_R
	SU(3)				

Πίνακας 6.1: Οι αναπαράστάσεις των φερμιονίων ως προς τις ομάδες συμμετρίας του καθιερωμένου προτύπου.

Επομένως οι όροι μάζας (6.64) δεν είναι αναλλοίωτοι ως προς τους μετασχηματισμούς βαθμίδας και έτσι δεν μπορούν να εμφανιστούν στην \mathcal{L} .

Το υπερφορτίο κάθε διπλέτας μπορεί να προσδιοριστεί με βάση το ηλεκτρικό φορτίο Q (6.39). Για παράδειγμα, οι συνιστώσες της διπλέτας ℓ_L^e έχουν ηλεκτρικά φορτία 0 και -1, αντίστοιχα και έτσι το υπερφορτίο που αντιστοιχεί στη διπλέτα ισούται με $y = -\frac{1}{2}$. Οι συνιστώσες της διπλέτας των quarks $q_{u,L}$ έχουν ηλεκτρικά φορτία $\frac{2}{3}$ και $-\frac{1}{3}$ αντίστοιχα, και επομένως το υπερφορτίο ισούται με $y = +\frac{1}{6}$.

6.5.2 Η πλήρης θεωρία $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

Το καθιερωμένο πρότυπο περιλαμβάνει επίσης την περιγραφή των ισχυρών αλληλεπιδράσεων των quarks. Η περιγραφή βασίζεται σε μια μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας με ομάδα την $SU(3)$. Οι ομάδα αυτή έχει οκτώ γεννήτορες και επομένως υπάρχουν οκτώ φορείς για την ισχυρή δύναμη, τα γκλουόνια, που είναι άμαζα σωματίδια με σπιν 1. Τα quarks έχουν την ιδιότητα του χρώματος με τρεις τιμές, κόκκινο (r), πράσινο (g) και μπλε (b) και έτσι μετασχηματίζονται με βάση τη θεμελιώδη αναπαράσταση της $SU(3)$ με διαστατικότητα 3. Σε αυτό το σημείο, Τα φερμιόνια της πρώτης οικογένειας μπορούν να ταξινομηθούν με βάση τις $U(1)$, $SU(2)$ και $SU(3)$ αναπαράστάσεις τους - δεξ πίνακα 6.1.

6.5.3 Φερμιονικοί όροι μάζας

Αξιοποιούμε το μηχανισμό Higgs με βάση τον οποίο τα μποζόνια βαθμίδας αποκτούν μάζα. Εισάγουμε στους όρους (6.64) το πεδίο ϕ με υπερφορτίο $y = 1/2$

$$\bar{\psi}_L \cdot \phi \psi_R + \text{h.c.} \quad (6.69)$$

επιτυγχάνοντας έτσι την αναλλοιότητα ως προς όπλους τους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Για μια λεπτονική διπλέτα μόνο μια από τις δύο συνιστώσες αποκτά μάζα, με το νεutrino να παραμένει άμαζο. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση της διπλέτας ηλεκτρονίου έχουμε

$$\lambda_e \bar{\ell}_L^e \cdot \phi e_R + \text{h.c.} \quad (6.70)$$

όπου λ μια αδιάστατη σταθερά σύζευξης. Το Higgs σπάζει τη συμμετρία αποκτώντας την αναμενόμενη τιμή (6.36). Έτσι παίρνουμε τον όρο μάζας για το ηλεκτρόνιο

$$\lambda_e v \bar{e}_L e_R + \text{h.c.} \quad (6.71)$$

Η μάζα του ηλεκτρονίου είναι ανάλογη της αναμενόμενης τιμής v και της σταθεράς σύζευξης λ :

$$m_e = \lambda_e v \quad (6.72)$$

Ο εκφυλισμός του κενού της ηλεκτρασθενούς θεωρίας αίρεται στην παρουσία ισχυρών μαγνητικών πεδίων, τα οποία θέτουν την αναμενόμενη τιμή του βαθμωτού πεδίου Higgs ίση με μηδέν: $\langle \phi \rangle \rightarrow 0$. Η μηδενική τιμή είναι αναλλοίωτη ως προς τη δράση της ομάδας της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας (6.31), και η αντίστοιχη κατάσταση κενού είναι συμμετρική.

7.1 Κορώνα Ηλεκτρασθενούς συμμετρίας

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου μιας ακραίας, μαγνητικά φορτισμένης μαύρης τρύπας μεταβάλλεται με την απόσταση σύμφωνα με τον κανόνα του αντιστρόφου τετραγώνου

$$|F| \equiv eB = \frac{Q}{2r^2} \quad (7.1)$$

Η ένταση αυτή έχει μονάδες $(eV)^2$. Η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται στον ορίζοντα $r_e = \frac{Q\sqrt{\pi G}}{e}$ και δίδεται από την έκφραση

$$|F| = \frac{e^2}{2\pi G^2 Q} \quad (7.2)$$

Παρατηρούμε ότι η μέγιστη αυτή τιμή ελαττώνεται όταν αυξάνεται το μαγνητικό φορτίο Q .

Διάφορα φαινόμενα που οδηγούν τελικά στην αποκατάσταση της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας λαμβάνουν χώρα, όταν το μαγνητικό φορτίο είναι μικρότερο από μια οριακή τιμή Q_{ew} , που καθορίζεται από την ενεργειακή κλίμακα στην οποία σπάζει η συμμετρία. Εάν $Q < Q_{ew}$, υπάρχουν δύο κρίσιμες ακτίνες, r_h και r_w , στις οποίες η ένταση του μαγνητικού πεδίου παίρνει τιμές ίσες με τα τετράγωνα των μαζών του πεδίου Higgs και των μποζονίων W , $m_h^2 \equiv 4\lambda v^2$ και $m_w^2 \equiv \frac{g^2 v^2}{2}$, αντίστοιχα:

$$r_h = \sqrt{\frac{Q}{2}} \frac{1}{m_h} < r_w = \sqrt{\frac{Q}{2}} \frac{1}{m_w} \quad (7.3)$$

Όταν το μαγνητικό φορτίο ισούται με την οριακή τιμή Q_{ew} , η ακτίνα του ορίζοντα r_e ισούται με την ακτίνα r_w

$$r_e(Q_{ew}) = r_w(Q_{ew}) \quad Q_{ew} = \frac{e^2}{2\pi G m_w^2} \quad (7.4)$$

Στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να σχηματιστεί η ηλεκτρασθενής κορώνα και τα φαινόμενα δεν λαμβάνουν χώρα.

Σε ακτίνες $r \leq r_w$, η κατάσταση κενού (με σπασμένη την ηλεκτρασθενή συμμετρία) δεν είναι ευσταθής επειδή τα μποζόνια W γίνονται ταχυονικά. Δημιουργούνται συμπυκνώματα μποζονίων W και το σύστημα μεταβαίνει σε μια νέα κατάσταση κενού με χαμηλότερη ενέργεια. Καθώς η ακτίνα ελαττώνεται, η αναμενόμενη τιμή του πεδίου Higgs ελαττώνεται από την αρχικά μη μηδενική της τιμή στη μηδενική τιμή όταν $r = r_h$. Για ακτίνες $r_e < r < r_h$ η αναμενόμενη τιμή του Higgs είναι μηδενική και έτσι έχουμε επαναφορά της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας. Η ενδιάμεση περιοχή $r_h \leq r \leq r_w$ είναι η ηλεκτρασθενής κορώνα. Το συμπύκνωμα μποζονίων W θωρακίζει το μαγνητικό πεδίο $SU(2)$. Μάλιστα, όταν $|F| > m_h^2$ (ισοδύναμα $r < r_h$) στο μαγνητικό πεδίο συνεισφέρει μόνο η $U(1)$ συνιστώσα του υπερφορτίου.

7.2 Μετάβαση στην περιοχή ηλεκτρασθενούς συμμετρίας

Στην ηλεκτρασθενή θεωρία η σύζευξη των φορτισμένων μποζονικών πεδίων W με το μαγνητικό πεδίο οδηγεί σε αστάθειες. Στην παρουσία μαγνητικού πεδίου, η ενεργός μάζα στο τετράγωνο των μποζονίων W (τα οποία έχουν σπιν 1 και μη μηδενικό ηλεκτρικό φορτίο) είναι [2, 1]

$$m_{eff}^2 = -(|F| - m_W^2) \quad (7.5)$$

εξαιτίας της σύζευξης του σπιν με το μαγνητικό πεδίο. Επομένως, όταν η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι αρκετά μεγάλη, $|F| > m_W^2 \sim 10^{20} T$, η ενεργός μάζα στο τετράγωνο γίνεται αρνητική και τα μποζόνια W ταχυονικά. Η ύπαρξη ταχυονικών σωματιδίων στο φάσμα υποδηλώνει ότι η κατάσταση κενού είναι ασταθής, με αποτέλεσμα τη δημιουργία συμπυκνωμάτων μποζονίων W και τη μετάβαση σε μια νέα ευσταθή κατάσταση κενού.

Άρα λοιπόν, στην παρουσία ισχυρών μαγνητικών πεδίων, $|F| \equiv eF_{12} \geq m_w^2$, η αρχική κατάσταση κενού, η οποία χαρακτηρίζεται από σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας και τις ακόλουθες αναμενόμενες τιμές για τους πεδιακούς τελεστές $\langle \phi \rangle > 0$, $\langle W_\mu \rangle = \langle Z_\mu \rangle = 0$ δεν είναι ευσταθής. Θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις καταστάσεις που ελαχιστοποιούν την ενέργεια. Θα εργαστούμε στη βαθμίδα όπου το πεδίο Higgs έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

με τη μη μηδενική συνιστώσα να είναι πραγματική. Η αναμενόμενη τιμή της συνιστώσας αυτής θα προσδιοριστεί συναρτήσει του συμπυκνώματος W . Οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες των αναλλοίωτων τανυστών

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (7.7\alpha')$$

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \quad (7.7\beta')$$

είναι οι μαγνητικές $F_{12} = -F_{21}$ και $Z_{12} = -Z_{21}$, οι οποίες θα προσδιοριστούν από τις εξισώσεις της θεωρίας. Εργαζόμαστε στη βαθμίδα Landau με το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό να δίδεται από την έκφραση

$$A_\mu = x_1 \frac{|F|}{e} \delta_{\mu 2} \quad (7.8)$$

Το υπόβαθρο μαγνητικό πεδίο θεωρείται ομογενές, και εργαζόμαστε στο κάθετο επίπεδο. Η γενίκευση για σφαιρική επιφάνεια κάθετη σε μονοπολικό πεδίο είναι άμεση.

Η λαγκραντζιανή του ηλεκτρασθενούς μοντέλου δίνεται στην εξίσωση (6.60). Η πυκνότητα ενέργειας αποτελεί άθροισμα τέλειων τετραγώνων [2, 1] και συνεπώς ο κάθε όρος πρέπει να μηδενίζεται για την ελαχιστοποίηση ελαχιστοποίηση της. Όταν οι σταθερές σύζευξης λ (στο δυναμικό Higgs) και g (της $SU(2)_L$ ομάδας) συνδέονται με τη σχέση

$$\lambda = \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_w} \quad (7.9)$$

η ελαχιστοποίηση της ενέργειας επιτυγχάνεται όταν οι κάθετες στο μαγνητικό πεδίο συνιστώσες του δυναμικού W_μ είναι μη μηδενικές και παίρνουν τη μορφή

$$W_0 = W_3 = 0, \quad W_1 = -iW_2 = W(x_1 + ix_2), \quad W \in \mathbb{C} \quad (7.10)$$

Με βάση την (7.10), οι σχετικές πεδιακές εξισώσεις ανάγονται στις ακόλουθες [2, 1]

$$(D_1 + iD_2)W = 0, \quad D_i \equiv \partial_i - ig(\sin \theta_w A_i + \cos \theta_w Z_i) \quad (7.11a)$$

$$F_{12} = \frac{g}{2 \sin \theta_w} v^2 + 2g \sin \theta_w |W|^2 \quad (7.11b)$$

$$Z_{12} = \frac{g}{2 \cos \theta_w} (\phi^2 - v^2) + 2g \cos \theta_w |W|^2 \quad (7.11c)$$

$$Z_i = -\frac{2 \cos \theta_w}{g} \varepsilon_{ij} \partial_j \ln \phi \quad i = 1, 2 \quad (7.11d)$$

όπου $v \equiv |\langle \phi_0 \rangle|$ η αναμενόμενη τιμή του Higgs στην απουσία μαγνητικού πεδίου.

Όταν $eF_{12} \gtrsim m_w^2$, η (7.11a) οδηγεί στις αναλυτικές λύσεις

$$W(x_1, x_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} (z + \bar{z})^2 - \pi n^2 + 2\pi n z \right\} \quad z \equiv \sqrt{\frac{m_w^2}{2\pi}}, (x_1 + ix_2) \quad (7.12)$$

Το πλάτος $|W|$ μηδενίζεται στις κορυφές περιοδικού πλέγματος στο επίπεδο $x_1 x_2$. Οι σταθερές C_n προσδιορίζονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η ενέργεια [4]. Όταν ισχύει η σχέση $C_{n+1} = C_n$, το πλέγμα είναι τετραγωνικό και για $C_{n+2} = C_n$ εξαγωνικό. Το εξαγωνικό πλέγμα αποτελεί τη διάταξη με τη χαμηλότερη ενέργεια [12]. Στο σχήμα 7.1a παρουσιάζεται η γραφική παράσταση του πλάτους $|W(x_1, x_2)|$, όπου φαίνεται το περιοδικό πλέγμα των εξαγωνικών κυψελίδων. Η μιγαδική φάση απεικονίζεται στο σχήμα 7.1b. Οι φωτεινές ευθείες αντιστοιχούν στις ασυνέχειες της φάσης. Έχουν το άκρο τους σε σημείο μηδενισμού του πλάτους και εκτείνονται στο άπειρο. Οι ευθείες ασυνέχειας αλλάζουν ως προς μετασχηματισμούς βαθμίδας, αλλά οι ρίζες του πλάτους παραμένουν αναλλοίωτες.

Εκτελώντας το μετασχηματισμό βαθμίδας

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \chi \quad (7.13)$$

απαλείφεται η φάση του δυναμικού $W = |W|e^{i\chi}$. Τότε το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό A_μ δίνεται συναρτήσει των πραγματικών ποσοτήτων $|W|, \phi$ από την έκφραση [1, 2]

$$A_i = \frac{1}{e} \varepsilon_{ij} \partial_j (\ln |W| + 2 \cos^2 \theta_w \ln \phi) \quad i = 1, 2 \quad (7.14)$$

και δεν εκδηλώνει ασυνέχειες, σε αντίθεση με τη φάση $\text{Arg}(W) = \chi$. Συνεπώς, σε ένα κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, που περιβάλλει τμήματα των ευθειών ασυνέχειας της φάσης, συνεισφέρει μόνο ο δεύτερος όρος της (7.13)

$$\oint (A_\mu + \partial_\mu \chi) dx^\mu = \oint \partial_\mu \chi dx^\mu \quad (7.15)$$

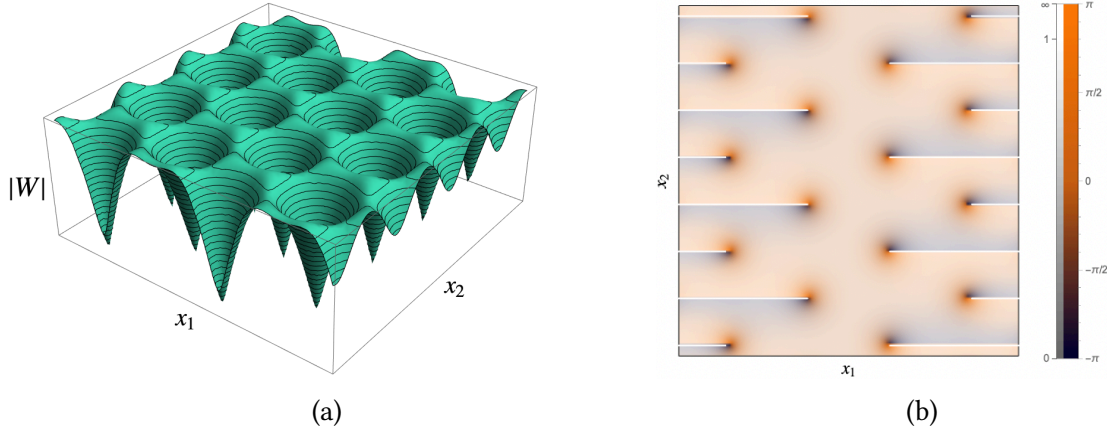


Figure 7.1: Αριστερά: Η πλάτος $|W|$ ως συνάρτηση στο κάθετο στο μαγνητικό πεδίο επίπεδο. Οι ρίζες του πλάτους αντιστοιχούν στα κέντρα των εξαγωνικών δινών. Δεξιά: Το γράφημα της φάσης $\text{Arg}(W)$, με βάση βαθμονομημένη χρωματική κλίμακα. Διαμέσου των φωτεινών ευθειών εκδηλώνεται ασυνέχεια 2π στη φάση. Οι ευθείες έχουν άκρο σε ρίζα του πλάτους και καταλήγουν στο άπειρο.

Η μαγνητική ροή διαμέσου της επιφάνειας Σ που περιβάλλεται από το βρόχο είναι κβαντισμένη και ισούται με

$$\int_{\Sigma} F_{12} d^2x = n\Phi_o = \oint \partial_{\mu} \chi dx^{\mu} \quad (7.16)$$

όπου $n \in \mathbb{Z}$ και $\Phi_o \equiv \frac{2\pi}{e}$ η στοιχειώδης μαγνητική ροή. Η διαφορά φάσης, που προκύπτει εκτελώντας το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, είναι κβαντισμένη.

Αντιπαραβάλλουμε τα αποτελέσματα αυτά με τη συμπεριφορά υπεραγώγιμων υλικών εντός μαγνητικού πεδίου. Οι δίνες του συμπυκνώματος ζευγών Cooper σε υπεραγώγιμα υλικά απαγορεύουν τη διείσδυση στο υλικό εξωτερικού μαγνητικού πεδίου - φαινόμενο Meissner. Αντίθετα, οι δίνες του συμπυκνώματος μποζονίων W ενισχύουν το αβελιανό μαγνητικό πεδίο F_{12} , όπως φαίνεται από το θετικό πρόσημο της συνεισφοράς του συμπυκνώματος στην (7.11b).

Αυξάνοντας ακόμη περισσότερο το μαγνητικό πεδίο, $F_{12} > m_w^2$, το συμπύκνωμα διατηρεί την περιοδική μορφή του, (7.12), όπως μπορεί να αποδειχθεί διαταρακτικά [1, 2]. Εντός μιας κυψελίδας ικανοποιούνται οι εξισώσεις (στη βαθμίδα (7.13))

$$\partial^2 \ln |W| = -\frac{g^2 \phi^2}{2} - 2g^2 |W|^2 \quad \partial^2 \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2 \quad (7.17a)$$

$$\partial^2 \ln \phi^2 = \frac{g^2}{2 \cos^2 \theta_w} (\phi^2 - v^2) + 2g^2 |W|^2 \quad (7.17b)$$

Με βάση τις εξισώσεις αυτές, βρίσκουμε τη μέση τιμή $\langle \phi^2 \rangle$, ως προς την επιφάνεια A μιας κυψελίδας

$$\langle \phi^2 \rangle \equiv \frac{1}{A} \int_A \phi^2 d^2x \quad (7.18)$$

Ολοκληρώνοντας την (7.17b), η συνεισφορά του αριστερού μέλους στη μέση τιμή μηδενίζεται

$$\int_A \partial^2 \ln \phi^2 d^2x = 0 \quad (7.19)$$

Το ολοκλήρωμα της (7.11b) και η εξίσωση (7.16) οδηγούν στη σχέση

$$\frac{1}{A} \int_A |W|^2 d^2x = \frac{e\overline{F_{12}} - m_W^2}{2e^2} \quad \overline{F_{12}} \equiv \frac{2\pi n}{eA} \quad (7.20)$$

όπου $\overline{F_{12}}$ η μέση τιμή του μαγνητικού πεδίου ως προς την κυψελίδα. Εάν συνδυάσουμε τις πιο πάνω εξισώσεις, παίρνουμε

$$\langle \phi^2 \rangle = v^2 \left(\frac{m_h^2}{m_h^2 \sin^2 \theta_w} - \frac{2e \cos^2 \theta_w \overline{F_{12}}}{v^2 g^2 \sin^2 \theta_w} \right) = v^2 \frac{m_h^2 - e\overline{F_{12}}}{m_h^2 - m_W^2}, \quad \overline{F_{12}} \leq \frac{m_h^2}{e} \quad (7.21)$$

7.3 Αποκατάσταση συμμετρίας

Σύμφωνα με την (7.21), η μέση τιμή $\langle \phi^2 \rangle \rightarrow 0$ καθώς $e\overline{F_{12}} \rightarrow m_h^2$, και συνεπώς η αναμενόμενη τιμή του Higgs ελαττώνεται, $\langle \phi \rangle \rightarrow 0$. Στο στάδιο αυτό, συνεχίζει να εκδηλώνεται η ρήξη της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας, αφού το πεδίο Higgs έχει μη μηδενική αναμενόμενη τιμή. Όταν $\langle \phi^2 \rangle = 0$, η ρήξη της συμμετρίας παύει να υφίσταται, επειδή η αναμενόμενη τιμή $\langle \phi \rangle = 0$ είναι συμμετρική ως προς τις συμμετρίες $SU(2) \times U(1)$. Η σχέση (7.21) σηματοδοτεί τη μετάβαση στην συμμετρική φάση της ηλεκτρασθενούς θεωρίας, με τα πεδία βαθμίδας να είναι τα τρία μη αβελιανά W_μ^i και το αβελιανό B_μ . Υπενθυμίζουμε τις σχέσεις και τους αντίστοιχους ταυιστές έντασης, (6.25):

$$B_\mu = \cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu \quad (7.22a)$$

$$W_\mu^3 = \sin \theta_w A_\mu + \cos \theta_w Z_\mu \quad (7.22b)$$

$$W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu + W_\mu^\dagger) \quad W_\mu^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu - W_\mu^\dagger) \quad (7.22c)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (7.22d)$$

$$G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (7.22e)$$

Η συμμετρική ως προς $SU(2) \times U(1)$ λαγκραντζιανή είναι

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + |D_\mu \phi|^2 - \lambda(\phi^2 - v^2)^2 \quad (7.23)$$

Με βάση τις εξισώσεις (7.10), (7.11b), (7.11c), συμπεραίνουμε ότι, στο διάστημα $m_W^2 \leq e\overline{F_{12}} \leq m_h^2$, οι μόνες μη μηδενικές μαγνητικές εντάσεις είναι οι ακόλουθες

$$B_{12} = \frac{g v^2}{2 \tan \theta_w} + \frac{g}{2} \tan \theta_w (v^2 - \phi^2) \quad (7.24a)$$

$$G_{12}^3 = -G_{21}^3 = \frac{1}{2}g^2\phi^2 \quad (7.24b)$$

Επομένως, καθώς $e\overline{F}_{12} \rightarrow m_h^2$, επιβιώνει μόνο το αβελιανό μαγνητικό πεδίο που συνδέεται με το υπερφορτίο $U(1)_Y$. Συγκεκριμένα, το μαγνητικό αυτό πεδίο είναι παράλληλο με το αρχικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $U(1)_{EM}$. Επειδή οι εντάσεις $G_{\mu\nu}^i$ μηδενίζονται, μηδενίζεται το μη αβελιανό μαγνητικό πεδίο $SU(2)$. Η $SU(2)$ συνειστώσα του αρχικού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου θωρακίζεται. Το υπερμαγνητικό πεδίο ισούται με

$$g_y B_{12} \geq m_h^2 \equiv 4\lambda v^2 \quad (= 2\mu^2) \quad (7.25)$$

Η λαγκραντζιανή που περιγράφει τη σύζευξη του αβελιανού πεδίου βαθμίδας $U(1)_Y$ και του βαθμωτού πεδίου Higgs είναι

$$\mathcal{L} = -B_{\mu\nu}^2 + \underbrace{|\partial_\mu - i\frac{1}{2}g_y B_\mu\phi|^2 + \mu^2|\phi|^2 - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \lambda v^2}_{\mathcal{L}_o}, \quad (\mu^2 = 2\lambda v^2) \quad (7.26)$$

όπου το υπερφορτίο του Higgs ισούται με $Y=\frac{1}{2}$ και $g_y = g \tan \theta_w$ η σταθερά σύζευξης του $U(1)_Y$ πεδίου βαθμίδας. Το δυναμικό B_μ στη βαθμίδα Landau δίδεται από την έκφραση

$$B_\mu = x_1 B_{12} \delta_{\mu 2} \quad (\Rightarrow B_\mu^2 = -(B_{12} x_1)^2) \quad (7.27)$$

όπου B_{12} το σταθερό μαγνητικό πεδίο. Οι εξισώσεις κίνησης για το πεδίο Higgs, για $\phi \sim 0$ είναι

$$\frac{\delta \mathcal{L}_o}{\delta \phi^*} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_o}{\delta (\partial_\mu \phi^*)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^2 \phi = \left(-\frac{g_y^2}{4} (B_{12} x_1)^2 - i g_y B_\mu \partial_\mu + \mu^2 \right) \phi \quad (7.28)$$

Χωρίζοντας μεταβλητές $\phi = e^{iE_n x_0} \phi_n(x_1, x_2, x_3)$, παίρνουμε

$$E_n^2 \phi_n = - \left(\partial_i^2 - g_y^2 \left(\frac{B_{12} x_1}{2} \right)^2 - i g_y (B_{12} x_1) \partial_2 + \mu^2 \right) \phi_n \quad (7.29)$$

Οι λύσεις πρέπει να είναι αναλλοίωτες ως προς μεταφορές στις διευθύνσεις x_2, x_3 . Επομένως θέτουμε

$$\phi_n \sim e^{ip_2 x_2} e^{ip_3 x_3} \tilde{\phi}_n(x_1) \quad (7.30)$$

Η (7.29) παίρνει τη μορφή

$$E_n^2 \tilde{\phi}_n = \left(p_3^2 - \mu^2 - \partial_1^2 + \left(\frac{g_y B_{12}}{2} x_1 - p_2 \right)^2 \right) \tilde{\phi}_n \quad (7.31)$$

Οι τελευταίοι δύο όροι στα δεξιό μέλος της (7.31) διαγωνοποιούνται με χρήση των ιδιοσυναρτήσεων ενός αρμονικού ταλαντωτή στην διεύθυνση x_1 , συχνότητας $\frac{g_y B_{12}}{2}$. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι

$$g_y B_{12} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (7.32)$$

Ο ακέραιος αριθμός n χαρακτηρίζει τις στάθμες Landau. Η ενέργεια της χαμηλότερης στάθμης είναι

$$E_o^2 = p_3^2 - \mu^2 + \frac{g_y B_{12}}{2} \quad (7.33)$$

Το υπερμαγνητικό πεδίο ικανοποιεί τη σχέση (7.25) και άρα η ενεργός μάζα του πεδίου Higgs που απορρέει από την εξίσωση διασποράς (7.33) είναι θετική. Επομένως, η συμμετρική κατάσταση $\phi=0$ είναι ευσταθής όταν το μαγνητικό πεδίου παίρνει τιμές στο διάστημα (7.25). Η ηλεκτρασθενής συμμετρία επαναφέρεται.

Το υπερμαγνητικό πεδίο συζεύγνυται διαφορετικά με την ύλη. Αντικαθιστούμε τη σταθερά σύζευξης του ηλεκτρομαγνητισμού

$$e \equiv \frac{gg_y}{\sqrt{g^2 + g_y^2}}, \quad \left(g = \frac{g_y}{\tan \theta_w} \right) \quad (7.34)$$

με την υπερμαγνητική σταθερά σύζευξης, $e \rightarrow g_y = \frac{e}{\cos \theta_w}$. Για παράδειγμα, η μάζα μιας ακραίας σπής ελαττώνεται κατά $\cos \theta_w$:

$$M_e = \sqrt{\frac{\pi}{G}} \frac{Q}{e} \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{G}} \frac{Q}{g_y} = \sqrt{\frac{\pi}{G}} \frac{Q}{e} \cos \theta_w \quad (7.35)$$

7.4 Καταστολή μηχανισμού Higgs

Η αναμενόμενη τιμή του πεδίου Higgs ελαττώνεται καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου μέχρι να μηδενιστεί εντελώς στην περιοχή $r_e \leq r \leq r_h$. Οι μάζες των φερμιονίων μηδενίζονται. Έτσι, γίνονται πιο έντονες οι κβαντικές διακυμάνσεις των πεδίων αυτών και ενισχύεται το φαινόμενο της ακτινοβολίας Hawking. Στην ενίσχυση της ακτινοβολίας συνεισφέρει ο εκφυλισμός της χαμηλότερης στάθμης Landau, ο οποίος είναι ανάλογος του μαγνητικού φορτίου Q .

7.5 Υπερφορτίο και εκφυλισμός

Στην ενότητα 5.3, προσδιορίσαμε τον εκφυλισμό της χαμηλότερης στάθμης Landau LLL για σωματίδια με φορτίο ίσο με ακέραιου πολλαπλάσιο του φορτίου του ηλεκτρονίου. Στην περίπτωση υπερμαγνητικού πεδίου, όπως συμβαίνει εντός της ηλεκτρασθενούς κορώνας, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη το υπερφορτίο κάθε σωματιδίου. Τα υπερφορτία φαίνονται στον πίνακα 6.1. στην εξωτερική περιοχή μιας μελανής σπής. Στην επόμενη ενότητα μελετούμε τις λύσεις της εξίσωσης Dirac στην παρουσία βαρυτικού και ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

7.6 Εξίσωση Dirac

Η γενίκευση της εξίσωσης Dirac σε καμπύλους χώρους γίνεται με την χρήση κατάλληλης συναλλοίωτης παραγώγου. Αυτή ορίζεται ως ακολούθως

$$\nabla_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^a \gamma^b \quad (7.36)$$

όπου $\omega_{ab\mu}$ η σπινορική σύνδεση (spin connection) [3]

$$\omega_{\mu ab} \equiv e_{\nu a} e^\lambda_b \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e^\lambda_b \partial_\mu e_{\lambda a} \quad (7.37)$$

και γ^a οι πίνακες Dirac με τις αντιμεταθετικές σχέσεις

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} \mathbf{I}_4 \quad (7.38)$$

Τα πεδία e_μ^a συνδέονται με τη μετρική $g_{\mu\nu}$ με βάση τη σχέση [3]

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}, \quad \eta_{ab} := \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (7.39)$$

Οι λατινικοί και οι ελληνικοί δείκτες ανεβοκατεβαίνουν ως εξής

$$e^\mu_a = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e_\nu^b \quad (7.40)$$

Όταν το φερμιονικό πεδίο αλληλεπιδρά με ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο η πιο πάνω συναλλοίωτη παράγωγος ανάγεται στην

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^a \gamma^b + iqA_\mu \quad (7.41)$$

Η εξίσωση Dirac για άμαζο φερμιονικό πεδίο χ είναι

$$ie^\mu_a \gamma^a D_\mu \chi = 0 \quad (7.42)$$

Γράφουμε τη μετρική (4.17) στη βοηθητική μορφή

$$ds^2 = F(r)(-dt^2 + dx^2) + r^2(x)d\Omega^2, \quad F(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G\pi Q^2}{e^2 r^2}\right) \quad (7.43)$$

όπου

$$dx \equiv \frac{dr}{F(r)} \quad (7.44)$$

Η άμαξη εξίσωση Dirac είναι αναλλοίωτη ως προς τοπικούς σύμμορφους μετασχηματισμούς Weyl. Για τον λόγο αυτό, μπορούμε να αμελήσουμε έναν ολικό σύμμορφο παράγοντα, θέτοντας το συντελεστή του γωνιακού μέρους της μετρικής ίσο με τη μονάδα:

$$ds^2 = e^{2\rho}(-dt^2 + dx^2) + d\Omega^2, \quad e^{2\rho(x)} \equiv \frac{F(r)}{r^2} \quad (7.45)$$

Με βάση τη μετρική (7.45), οι μη μηδενικές συνιστώσες του πεδίου e_μ^a είναι

$$e_t^0 = e^\rho, \quad e_x^1 = e^\rho, \quad e_\theta^2 = 1, \quad e_\phi^3 = \sin \theta \quad (7.46)$$

Βρίσκουμε στη συνέχεια τα μη μηδενικά στοιχεία της σπινωρικής σύνδεσης (7.37)

$$\omega_{t10} = -\omega_{t01} = \frac{d\rho}{dx} \equiv \rho', \quad \omega_{\phi 32} = -\omega_{\phi 23} = \cos \theta \quad (7.47)$$

Στον δισδιάστατο χωρόχρονο tx , οι πίνακες Dirac ικανοποιούν τις αντιμεταθετικές σχέσεις

$$\{\bar{\gamma}^a, \bar{\gamma}^b\} = 2\eta^{ab} \mathbf{I}_2, \quad \eta_{ab} := \text{diag}(-1, +1) \quad (7.48)$$

που ικανοποιούνται από τους πίνακες

$$\bar{\gamma}^0 = i\sigma^x \quad \bar{\gamma}^1 = \sigma^y \quad (7.49)$$

Για τη σφαίρα, οι αντίστοιχες σχέσεις είναι

$$\{\bar{\gamma}^a, \bar{\gamma}^b\} = 2\delta^{ab} \mathbf{I}_2, \quad \delta^{ab} := \text{diag}(+1, +1) \quad (7.50)$$

και

$$\bar{\gamma}^1 = \sigma^x \quad \bar{\gamma}^2 = \sigma^y \quad (7.51)$$

Οι δυσδιάστατες αναπαραστάσεις, (7.49) και (7.51), συνδυάζονται στις ακόλουθες τετραδιάστατες [14]

$$\gamma^0 = i\sigma^x \otimes \mathbf{I}_2 \quad \gamma^1 = \sigma^y \otimes \mathbf{I}_2 \quad \gamma^2 = \sigma^z \otimes \sigma^x \quad \gamma^3 = \sigma^z \otimes \sigma^y \quad (7.52)$$

που ικανοποιούν τις σχέσεις (7.38). Στην αναπαράσταση (7.52) ο χειραλικός τελεστής είναι

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i(-\sigma^z \otimes i\sigma^z) = \sigma^z \otimes \sigma^z \quad (7.53)$$

Οι λύσεις της (7.42) αποτελούν ιδιοκαταστάσεις του (7.53) με ιδιοτιμές +1 και -1, και αντιστοιχούν σε δεξιόστροφα και αριστερόστροφα φερμιονικά πεδία. Αντικαθιστώντας τα πιο πάνω στην (7.42), η εξίσωση Dirac παίρνει τη μορφή

$$\left[e^{-\rho} \left(i\sigma^x \partial_t + \sigma^y \left(\partial_x + \frac{\rho'}{2} \right) \right) \otimes \mathbf{I}_2 + \sigma^z \otimes \left(\sigma^y \frac{\partial_\phi + iqA_\phi}{\sin \theta} + \sigma^x \left(\partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2} \right) \right) \right] \chi = 0 \quad (7.54)$$

Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση μαγνητικού μονοπολικού πεδίου η μόνη μη μηδενική συνιστώσα του δυναμικού είναι η A_ϕ .

7.7 Λύσεις Dirac

Οι τετραδιάστατες λύσεις της εξίσωσης (7.42) σε χωροχρόνο της μορφής $\mathbf{M} = \mathbb{R}^{1,1} \times S^2$ ανάγονται σε τανυστικό γινόμενο δύο δισδιάστατων σπινόρων ψ και η [14]

$$\chi_{ij}(t, x, \theta, \phi) = e^{-\rho(x)} \psi_i(t, x) \otimes \eta_j(\theta, \phi), \quad i, j = 1, 2 \quad (7.55)$$

Η εξίσωση Dirac ανάγεται σε σύστημα δύο ασύζευκτων διαφορικών εξισώσεων

$$[i\sigma^x \partial_t + \sigma^y \partial_x] \psi = 0 \quad (7.56a)$$

$$\left[\sigma^y \frac{\partial_\phi + iqA_\phi}{\sin \theta} + \sigma^x \left(\partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2} \right) \right] \eta = 0 \quad (7.56b)$$

Οι δύο εξισώσεις της (7.56b), μια για κάθε συνιστώσα του σπίνορα η ,

$$\eta := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (7.57)$$

ικανοποιούνται με χρήση των ιδιοκαταστάσεων Haldane (5.34). Για φερμιονικό πεδίο με θετικό φορτίο $q = e$, η λύση είναι

$$\eta_+ \equiv \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_1 = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{s_0 - \frac{1}{2} + m} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{s_0 - \frac{1}{2} - m} e^{-im\phi} \quad (7.58)$$

Για αρνητικό φορτίο $q = -e$ παίρνουμε

$$\eta_- \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{s_0 - \frac{1}{2} + m} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{s_0 - \frac{1}{2} - m} e^{im\phi} \quad (7.59)$$

Οι σπίνορες αυτοί έχουν καλά ορισμένη χειραλικότητα, $\sigma^z \eta_\pm = \pm \eta_\pm$, όπως φένεται από τη δράση του τελεστή χειραλικότητας στην αναπαράσταση της σφαίρας S^2 , $\mathbf{I}_2 \otimes \sigma^z$. Αρνητικά (θετικά) φορτισμένα φερμιονικά πεδία περιγράφονται με βάση τον σπίνορα η_- (η_+). Για πεδία με κλασματικό φορτίο η ανάλυση είναι ποιοτικά παρόμοια.

Η ανάλυση της εξίσωσης (7.56a) γίνεται με παρόμοιο τρόπο. Συναρτήσε των συνιστωσών του ψ , η (7.56a) ανάγεται στις

$$(\partial_t + \partial_x) \psi_1 = 0 \quad (7.60a)$$

$$(\partial_t - \partial_x) \psi_2 = 0 \quad (7.60b)$$

Οι λύσεις έχουν τη μορφή

$$\psi_1 := \psi_1(t - x) \quad (7.61a)$$

$$\psi_2 := \psi_2(t + x) \quad (7.61b)$$

Η συνάρτηση (7.61a) περιγράφει ένα δεξιόστροφο, εξερχόμενο πεδίο. Αντίθετα, η (7.60b) περιγράφει αριστερόστροφα, εισερχόμενα πεδία. Οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή χειραλικότητας $\sigma^z \otimes \mathbf{I}_2$, στην αναπαράσταση του $\mathbb{R}^{1,1}$, ικανοποιούν $\sigma^z \psi_\pm = \pm \psi_\pm$ και προκύπτουν από τις λύσεις (7.61)

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_1(t - x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2(t + x) \end{pmatrix} \quad (7.62)$$

$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$	In-Out
$(3, 2, 1/6)$	Q^-
$(3, 1, 2/3)$	$-2Q$
$(3, 1, -1/3)$	Q^-
$(1, 2, -1/2)$	$-Q$
$(1, 1, -1)$	Q^-

Πίνακας 7.1: Ο συνολικός εκφυλισμός κάθε αναπαράστασης. Για τα εξερχόμενα φερμιόνια η παύλα είναι αριστερά και δεξιά για τα εισερχόμενα.

Το γινόμενο (7.55) των δύο δισδιάστατων σπινόρων η και ψ δίνει το τετραδιάστατο φερμιονικό πεδίο. Η χειραλικότητα καθορίζεται με βάση την αναπαράσταση της ομάδας $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός αρνητικά φορτισμένου, αριστερόστροφου πεδίου χ_L , ο σπίνορας στην S^2 είναι ο η_- και επομένως

$$\gamma^5 \chi_L = (\sigma^z \otimes \sigma^z)(\psi \otimes \eta_-) \Rightarrow -\chi_L = (\sigma^z \psi) \otimes (-\eta_-) \quad (7.63)$$

Συνεπώς ο σπίνορας ψ είναι ίσος με ψ_+ , και έτσι το πεδίο χ_L είναι εξερχόμενο. Τα πιο πάνω συνοψίζονται στον ακόλουθο κανόνα για τον προσδιορισμό των εξερχόμενων και εισερχόμενων πεδίων

$$\text{sign}(h_\chi \cdot q) = \begin{cases} + & (\text{out}) \\ - & (\text{in}) \end{cases} \quad (7.64)$$

όπου h_χ και q η χειραλικότητα και το φορτίο του αντίστοιχα. Λόγω του υπερμαγνητικού πεδίου εντός της ηλεκτρασθενούς κορώνας, χρησιμοποιούμε το υπερφορτίο.

7.8 Εισερχόμενα - Εξερχόμενα φερμιόνια

Ο εκφυλισμός κάθε αναπαράστασης της ομάδας $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ εντός της κορώνας ισούται με το γινόμενο του υπερφορτίου, του αριθμού των πεδίων και του μαγνητικού φορτίου Q . Για παράδειγμα, στα δεξιόστροφον up quarks αντιστοιχεί εκφυλισμός $2Q$, με βάση την (7.64) είναι εισερχόμενα [13]. Οι αναπαραστάσεις ταξινομούνται στον πίνακα 7.1. Υπάρχουν $3Q$ εκφυλισμένες καταστάσεις που αντιστοιχούν σε εξερχόμενα πεδία. Επειδή υπάρχουν τρεις οικογένειες στο καθιερωμένο πρότυπο, ο εκφυλισμός των εξερχόμενων πεδίων είναι

$$\text{Εκφυλισμός "out" καταστάσεων} = 9Q \quad (7.65)$$

7.9 Ρθμός εκπομπής ενέργειας μελανών οπών

Όταν τα εξερχόμενα πεδία του πίνακα 7.1 παραχθούν εξαιτίας κβαντικών διακυμάνσεων κοντά στον ορίζοντα, διαδίδονται προς το άπειρο μεταφέροντας την ενέργεια (μάζα) που χάνει η οπή. Εντός της ηλεκτρασθενούς κορώνας, η σχέση διασποράς των άμαζων φερμιονικών πεδίων δίνεται από τη σχέση (5.62)

$$E^2 - p_3^2 = 0 \quad (7.66)$$

όπου εξουδετερώνεται η συνεισφορά της τροχιακής στροφορμής και η συνεισφορά της αλληλεπίδρασης του σπιν με το μαγνητικό πεδίο. Η θερμική ατμόσφαιρα της μαύρης τρύπας μπορεί να ιδωθεί ως ένα θερμικό σύστημα $9Q$ δισδιάστατων εξερχόμενων φερμιονικών πεδίων. Η πυκνότητα ενέργειας (ανά μονάδα μήκους), για ένα εξερχόμενο φερμιονικό πεδίο, είναι

$$\rho = \int_0^\infty \frac{p}{e^{p/T} + 1} \frac{dp}{\pi} = \frac{T^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi}{12} T^2 \quad (7.67)$$

Άρα η συνολική πυκνότητα ενέργειας των $9Q$ εξερχόμενων φερμιονικών πεδίων είναι

$$\rho = \frac{3\pi Q}{4} T^2 \quad (7.68)$$

Εάν στην πιο πάνω σχέση αντικαταστήσουμε τη θερμοκρασία Hawking μιας μελανής οπής, παίρνουμε το ρυθμό μεταβολής της μάζας της με τον χρόνο.

Με χρήση της (4.27), η επιπρόσθετη μάζα πέραν της ακραίας τιμής $M_e = \sqrt{\frac{\pi}{G}} \frac{Q}{g_y}$ δίδεται από την έκφραση

$$\delta M \sim \frac{2\pi^{\frac{7}{2}} \sqrt{G} Q^3}{g_y^3} T^2 \quad (7.69)$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της μάζας μιας μη ακραίας μελανής οπής είναι

$$\frac{d(\delta M)}{dt} = -\frac{3\pi Q}{4} \frac{g_y^3}{2\pi^{\frac{7}{2}} \sqrt{G} Q^3} \delta M \Rightarrow \delta M \propto e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau \equiv \frac{8\pi^{\frac{5}{2}} \sqrt{G}}{3g_y^3} Q^2 \quad (7.70)$$

Η μεταβολή δM μηδενίζεται ασυμπτωτικά και η μελανή οπή καταλήγει σε μια ακραία οπή με μηδενική θερμοκρασία. Αντίθετα, μια αφόρτιστη μαύρη τρύπα Schwarzschild ακτινοβολεί διαρκώς μέχρι να εξαϋλωθεί πλήρως. Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας για μια μελανή οπή Schwarzschild είναι

$$\frac{dM}{dt} \sim r_s^2 T^4 \sim T^2 \quad (7.71)$$

Η φορτισμένη οπή εξαυλώνεται μέχρι το όριο της ακραιότητας σε χρόνο μικρότερο κατά $1/Q$, σε σχέση με την μελανή οπή Schwarzschild.

Οι μαγνητικά φορτισμένες μελανές οπές είναι ευσταθείς, και αποτελούν λύσεις του καθιερωμένου προτύπου και της βαρύτητας. Είναι ικανές να υποστηρίξουν ισχυρά μαγνητικά πεδία. Τα πεδία στην περιοχή κοντά στον ορίζοντα οδηγούν σε μη τετριμμένα κβαντικά φαινόμενα, που διαφοροποιούν τις μαγνητικά φορτισμένες μελανές οπές από τις αντίστοιχες αφόρτιστες μελανές οπές τύπου Schwarzschild.

Στην εξωτερική περιοχή κοντά στον ορίζοντα η κατάσταση κενού του καθιερωμένου προτύπου είναι ασταθής. Η αστάθεια προκύπτει από την σύζευξη του σπιν των ηλεκτρικά φορτισμένων μποζονίων W με το μαγνητικό πεδίο, καθιστώντας τα ταχυονικά. Η αστάθεια οδηγεί στη δημιουργία συμπυκνωμάτων των μποζονίων W στην εξωτερική περιοχή του ορίζοντα των φορτισμένων οπών, σπάζοντας τη σφαιρική συμμετρία. Εντός του φλοιού που σχηματίζουν ο ορίζοντας και η ακτίνα r_w , ο μηχανισμός Higgs καταστέλλεται, τα φερμιονικά πεδία καθίστανται άμαζα και το κενό γίνεται υπεραγωγίμο.

Στο μη σχετικιστικό, σφαιρικό πρόβλημα Haldane (στην παρουσία μαγνητικού μονοπόλου) η χαμηλότερη στάθμη Landau εκδηλώνει εκφυλισμό $Q + 1$, όπου Q το μαγνητικό φορτίο. Ο εκφυλισμός και οι ιδιοσυναρτήσεις (5.34) χρησιμοποιούνται για την επίλυση του σχετικιστικού προβλήματος. Οι λύσεις της γενικής εξίσωσης Dirac (ενότητα 7.7) διαχωρίζουν τα φερμιονικά πεδία σε εξερχόμενα, που μπορούν να διαφύγουν από το βαρυτικό πεδίο της φορτισμένης μελανής οπής, και εισερχόμενα. Η ταξινόμηση επιτυγχάνεται στη βάση του κανόνα (7.64), του υπερφορτίου και της τετραδιάστατης χειραλικότητας των φερμιονικών πεδίων. Ο εκφυλισμός κάθε φερμιονικής αναπαράστασης της $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ (πίνακας 6.1) παρουσιάζεται στον πίνακα 7.1. Ο συνολικός εκφυλισμός των εξερχόμενων φερμιονίων ισούται με $9Q$. Τα $9Q$ πεδία αυτά είναι άμαζα εντός της ηλεκτρασθενούς κορώνας και συνεισφέρουν στην ακτινοβολία Hawking. Ο ρυθμός εκπομπής της ενέργειας υπολογίζεται στην ενότητα 7.9 και είναι ανάλογος του μαγνητικού φορτίου ($\sim QT^2$). Συγκρίνοντας με τον ρυθμό εξαύλωσης μιας μελανής οπής Schwarzschild εκδηλώνεται ενίσχυση του φαινομένου της ακτινοβολίας Hawking. Μια μη ακραία μαγνητικά φορτισμένη οπή, $GM^2 > \pi Q^2/e^2$, εξαυλώνεται πολύ πιο γρήγορα από μια αφόρτιστη οπή της ίδιας μάζας. Η φορτισμένη οπή θα σταματήσει να ακτινοβολεί όταν η μάζα ελαττωθεί στην οριακή τιμή $GM^2 = \pi Q^2/e^2$.

A' | Ταυτότητες και Υπολογισμοί

A'.1 Ταυτότητες

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \quad (A'.1)$$

$$\vec{\nabla} \times (f \vec{A}) = \vec{\nabla} f \times \vec{A} + f \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (A'.2)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\nabla \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad (A'.3)$$

$$\vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (A'.4)$$

$$\nabla_\lambda V^\rho \equiv \partial_\lambda V^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma \quad (A'.5)$$

$$\nabla_\lambda T_{\mu\nu}^\rho \equiv \partial_\lambda T_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho T_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma T_{\sigma\nu}^\rho - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma T_{\mu\sigma}^\rho \quad (A'.6)$$

$$\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = S^{\mu\nu} \quad (A'.7)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} \quad (A'.8)$$

Α'.2 Αποδείξεις πράξεων

Α'.2.1 Όρος μονοπόλου στη συνάρτηση μαγνητικού πεδίου

$$\int_L \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \int_L \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \cdot d\vec{\ell}' = - \int_L \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \cdot d\vec{x}' = - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{Α'.9})$$

Σημείωση Α'.9 Στην τρίτη ισότητα έγιναν οι αντικατάστασεις $d\vec{\ell}' \rightarrow d\vec{x}'$ και $\vec{\nabla} \rightarrow -\vec{\nabla}'$ (ταυτότητα (Α'.1)). Το απειροστό μήκος $d\vec{\ell}'$ στην επικαμπύλια ολοκλήρωση ισούται με την απειροστή μετατόπιση $d\vec{x}'$, κατά μήκος της χορδής Dirac.

Α'.2.2 Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο χορδών Dirac

Θεώρημα Stokes

$$\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d^2\vec{x} \quad (\text{Α'.10})$$

Έστω η διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} = f(\vec{x})\vec{g}$, όπου \vec{g} ανεξάρτητο του \vec{x} :

$$\oint_C f(\vec{x})\vec{g} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\vec{\nabla} \times (f(\vec{x})\vec{g})) \cdot d^2\vec{x} \quad (\text{Α'.11})$$

$$\vec{g} \cdot \oint_C f(\vec{x})d\vec{\ell} = \iint_S (\vec{\nabla} f \times \vec{g} + f(\vec{\nabla} \times \vec{g})) \cdot d^2\vec{x} \quad (\text{Α'.12})$$

$$= -\vec{g} \cdot \iint_S \vec{\nabla} f \times d^2\vec{x} \quad (\text{Α'.13})$$

$$\Rightarrow \oint_C f(\vec{x})d\vec{\ell} = - \iint_S \nabla f \times d^2\vec{x} \quad (\text{Α'.14})$$

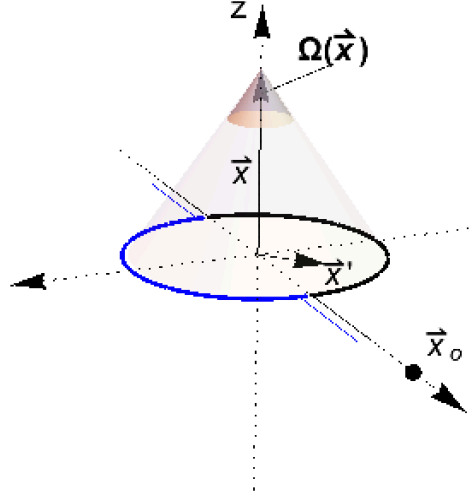
$$\Rightarrow \oint f(|\vec{x} - \vec{x}'|) d\vec{\ell}' = - \iint_S \vec{\nabla}' f \times d^2\vec{x}' = \iint_S \vec{\nabla} f \times d^2\vec{x}' \quad (\text{Α'.15})$$

Σημείωση Α'.11-Α'.14 Στην (Α'.12) χρησιμοποιήσαμε την (Α'.2). Η μετάθεση των διανυσμάτων της (Α'.13) έγινε ως εξής

$$(\vec{\nabla} f \times \vec{g}) \cdot d\vec{A} = \varepsilon^{ijk} (\vec{\nabla} f)^j g^k (d\vec{A})^i = -\varepsilon^{ijk} (\vec{\nabla} f)^j (d\vec{A})^k g^i = -\vec{g} \cdot (\vec{\nabla} f \times d\vec{A})$$

Α'.2.3 Δύο χορδές Dirac

Ακολουθώς εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα (2.16) για δύο χορδές Dirac, όπως φαίνονται στο σχήμα Α'.1. Αρκεί να εξεταστούν οι δύο αυτές διαμορφώσεις, για να γίνει εμφανές η συνάρτηση $\Omega(\vec{x})$ της (2.16) είναι πλειότιμη, που όμως σε συνδυασμό με τον δεύτερο όρο δίνουν την καλά ορισμένη διαφορά δυναμικών $\vec{A}_{L'}(\vec{x}) - \vec{A}_L(\vec{x})$.



Σχήμα Α'.1: Δύο ημιάπειρες χορδές Dirac. Οι χορδές τρέχουν παράλληλα κατά μήκος ενός άξονα, σε απειροστά μικρή απόσταση μεταξύ τους, και στη συνέχεια κατά μήκος αντιδιαμετρικών ημι-κυκλίων ακτίνας R' και κέντρο την αρχή των αξόνων. Κάθε χορδή τερματίζεται στο σημείο \vec{x}_0 .

Εκτελούμε το πρώτο επιφανειακό ολοκλήρωμα της (2.16) πραγματοποιώντας το πρώτο. Η επιφάνεια S είναι ο δίσκος

$$\vec{x}' = \{ (x', y', 0) \mid \sqrt{x'^2 + y'^2} \leq R \} \quad \forall \vec{x}' \in S$$

Σε πολικές συντεταγμένες έχουμε $\vec{x}' = \rho' \hat{\rho}'$, $d\vec{s}' = \rho' d\rho' d\phi' \hat{z}$ και το σημείο παρατήρησης είναι το $\vec{x} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$. Για χάριν απλότητας επιλέγουμε το σημείο παρατήρησης στον άξονα z ($\rho = 0$) και παίρνουμε

$$\Omega(\vec{x}) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho' \hat{\rho}' - z \hat{z}}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \cdot \rho' d\rho' d\phi' \hat{z} = - \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{z \rho' d\rho' d\phi'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \quad (\text{Α'.16})$$

Με προσεκτική διερεύνηση, μπορούμε να διακρίνουμε την πλειοτιμία της (Α'.16). Στο όριο που προσεγγίζουμε την επιφάνεια από τον θετικό άξονα z ($z \rightarrow 0^+$), παίρνουμε¹

$$\Omega(\vec{x}) = - \lim_{z \rightarrow 0^+} 2\pi \int_0^R \frac{z \rho' d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} = - \lim_{z \rightarrow 0^+} 2\pi \int_0^{R/z} \frac{\rho' d\rho'}{(1 + \rho'^2)^{3/2}} = -2\pi \quad (\text{Α'.17})$$

¹Για τη δεύτερη ισότητα έγινε η αντικατάσταση $\rho' \rightarrow \frac{\rho'}{|z|}$.

Στο όριο που προσεγγίζουμε την επιφάνεια από τον αρνητικό άξονα των z ($z \rightarrow 0^-$), παίρνουμε²

$$\Omega(\vec{x}) = \lim_{z \rightarrow 0^-} 2\pi \int_0^{R/z} \frac{\rho' d\rho'}{(1 + \rho'^2)^{3/2}} = +2\pi \quad (\text{A'.18})$$

Τα αποτελέσματα (A'.17) και (A'.18) είναι ανεξάρτητα της ακτίνας και του επιπέδου στο οποίο βρίσκεται ο δίσκος. Συνοψίζοντας, έχουμε τα ακόλουθα

$$\Omega(\vec{x}) \rightarrow \begin{cases} -2\pi & z \rightarrow 0^+ \\ 2\pi & z \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Διαμέσου της επιφάνειας S του σχήματος Α'.1 ($\vec{x} \rightarrow \vec{x}' \in S$) η συνάρτηση $\Omega(\vec{x})$ αλλάζει πρόσημο. Έτσι, η κλίση της είναι

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}' \in S} \vec{\nabla} \Omega(\vec{x}) = -4\pi \delta(z) \hat{z} \quad (\text{A'.19})$$

Ο δεύτερος όρος της (2.16) υπολογίζεται ως εξής

$$\int_S \delta(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{s}' = \int_0^R \int_0^{2\pi} \delta(z\hat{z} - \rho'\hat{\rho}') \rho' d\rho' d\phi' \hat{z} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\delta(z)\delta(\rho')}{2\pi\rho'} \rho' d\rho' d\phi' \hat{z} = \delta(z)\hat{z} \quad (\text{A'.20})$$

Αντικαθιστώντας τις (A'.19) και (A'.20) στην (2.16), συμπεραίνουμε ότι η διαφορά (2.16) είναι καλά ορισμένη.

A'.2.4 Μεταβολή δράσης Eistein-Hilbert

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^\rho = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho - \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \quad (\text{A'.21})$$

$$\nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \quad (\text{A'.22})$$

$$\nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho) = \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \quad (\text{A'.23})$$

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^\rho = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \quad (\text{A'.24})$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \quad (\text{A'.25})$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) d^4x \\ &= \int \sqrt{-g} (\nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)) d^4x \\ &= \int \sqrt{-g} \nabla_\nu (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) d^4x \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A'.26})$$

²Επειδή το z είναι αρνητικό, ο αριθμητής είναι θετικός.

Α'.2.5 Μεταβολή δράσης Maxwell

$$\begin{aligned}
 \delta_g L_M &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} (\delta g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha} \delta g^{\nu\beta}) \sqrt{-g} - \frac{1}{4} F^2 \delta \sqrt{-g} \\
 &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \delta g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + F_{\nu\mu} F_{\beta\alpha} g^{\nu\beta} \delta g^{\mu\alpha}) \sqrt{-g} - \frac{1}{4} F^2 (-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\alpha} \delta g^{\mu\alpha}) \quad (A'.27) \\
 &= -\left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \delta g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{8} F^2 g_{\mu\alpha\beta\gamma} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\alpha}
 \end{aligned}$$

Α'.3 Λύση διαφορικής εξίσωσης 4.15

Η διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού είναι γραμμική και μη ομογενής. Γράφεται στην ακόλουθη μορφή για τον προσδιορισμό του ολοκληρωτικού παράγοντα $\mu(r)$

$$\begin{aligned}
 2r \frac{db}{dr} + e^{2b} (1 - \frac{A}{r^2}) - 1 &= 0 \\
 2 \frac{db}{dr} e^{-2b} + (\frac{1}{r} - \frac{A}{r^3}) - \frac{e^{-2b}}{r} &= 0 \quad (A'.28) \\
 \frac{d}{dr} (e^{-2b}) + \frac{e^{-2b}}{r} &= \left(\frac{1}{r} - \frac{A}{r^3} \right)
 \end{aligned}$$

Με την αντικατάσταση $y \equiv e^{-2b}$

$$y' + \frac{1}{r} y - \left(\frac{1}{r} - \frac{A}{r^3} \right) = 0 \quad (A'.29)$$

η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$N(r, y)y' + M(r, y) = 0 \quad (A'.30)$$

επιτρέποντας τον προσδιορισμό του $\mu(r)$

$$\mu(r) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_r}{N}\right) = \exp\left(\int \frac{1}{r} dr\right) = r \quad (A'.31)$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την (Α'.29) με μ , η δ.ε. γίνεται

$$\frac{d}{dr}(\mu y) = \mu \left(\frac{1}{r} - \frac{A}{r^3} \right) \quad (A'.32)$$

η λύση της οποίας είναι επίσης λύση της (Α'.29). Ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[r_o, r]$ ($r_o \neq 0$), βρίσκουμε τη γενική λύση

$$y(r) = 1 + \frac{A}{r^2} - \frac{c(r_o)}{r} \quad \Rightarrow \quad b(r) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{A}{r^2} - \frac{c(r_o)}{r} \right) \quad (A'.33)$$

Κώδικας Mathematica 1 : Ορισμός Διανύσματος θέσης, μετρικής, αντιστρόφου

```
x = {t, r, θ, φ};
g = {{-Exp[2 a[r]], 0, 0, 0},
      {0, Exp[2 b[r]], 0, 0},
      {0, 0, r^2, 0},
      {0, 0, 0, r^2*Sin[θ]^2}};
ginv = Simplify[Inverse[g]];
```

Κώδικας Mathematica 2 : Σύμβολα Christoffel

```
CS = Simplify[Table[1/2 (
  Sum[
    ginv[[i, z]]*D[g[[j, z]], x[[k]]], {z, 4}]
+Sum[
  ginv[[i, z]]*D[g[[k, z]], x[[j]]], {z, 4}]
-Sum[
  ginv[[i, z]]*D[g[[j, k]], x[[z]]], {z, 4}]],
  {i, 4}, {j, 4}, {k, 4}
]];
```

Κώδικας Mathematica 3 : Τανυστής Riemann

```
Riemann = Simplify[Table[
  D[CS[[i, j, z]], x[[k]]]
+Sum[CS[[i, k, s]]
  * CS[[s, j, z]], {s, 4}]
-Sum[CS[[i, z, s]]
  * CS[[s, j, k]], {s, 4}],
  {i, 4}, {j, 4}, {k, 4}, {z, 4}
]];
```

Κώδικας Mathematica 4 : Τανυστής Ricci

```
Ricci = Simplify[Table[
  Sum[
    Riemann[[i, j, i, z]], {i, 4}],
  {j, 4}, {z, 4}
]];
```

Κώδικας Mathematica 5 : Ηλεκτρομαγνητικός Τανυστής

```

F = Table[0,{i,4},{i,4}];
B[r_] := Q/(2 e r ^ 2);
F[[3,4]] = Q/(2 e)*Sin[θ];
F[[4,3]] = -Q/(2 e)*Sin[θ];

```

Κώδικας Mathematica 6 : Τανυστής ενέργειας-ορμής

```

EnergyTensor = Simplify[Table[
Sum[F[[i,k]]*F[[j,z]]*ginv[[k,z]],{k,4},{z,4}]
- 1/4 g[[i,j]]*Sum[
F[[i,j]]*F[[m,n]]*ginv[[m,i]] ginv[[n,j]],
{i,4},{j,4},{m,4},{n,4}],
{i,4},{j,4}]];

```

Κώδικας Mathematica 7 : Ίχνος τανυστή ενέργειας-ορμής

```

Ttrace = Simplify[
Sum[
ginv[[i,j]]*EnergyTensor[[i,j]],{i,4},{j,4}]
];

```

Κώδικας Mathematica 8 : Δεξιό σκέλος εξίσωσης Einstein

```

T = Simplify[Table[
EnergyTensor[[i,j]] - 1/2 Ttrace*g[[i,j]],{i,4},{j,4}]
];

```

Κώδικας Mathematica 9 : Εξισώσεις Einstein

```

For[i = 1, i <= 4, i++,
For[j = 1, j <= 4, j++,
If[PossibleZeroQ[Ricci[[i,j]]], Null,
Print["{", x[[i]], x[[j]], "}", ":",
Simplify[
Ricci[[i,j]] - 8*Pi*G*T[[i,j]] == 0
]]]]]

```

Βιβλιογραφία

- [1] J. AMBJØRN and P. OLESEN. «ELECTROWEAK MAGNETISM: THEORY AND APPLICATIONS.» In: *International Journal of Modern Physics A* 05.23 (1990), pp. 4525–4557. DOI: 10.1142/S0217751X90001914. eprint: <https://doi.org/10.1142/S0217751X90001914>. URL: <https://doi.org/10.1142/S0217751X90001914>.
- [2] J. Ambjørn and P. Olesen. «A condensate solution of the electroweak theory which interpolates between the broken and the symmetric phase.» In: *Nuclear Physics B* 330.1 (1990), pp. 193–204. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(90\)90307-Y](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90307-Y). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139090307Y>.
- [3] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco, USA: Pearson, 2003.
- [4] Maxim Chernodub. «Superconducting properties of vacuum in strong magnetic field.» In: *International Journal of Modern Physics D* 23 (June 2014). DOI: 10.1142/S0218271814300092.
- [5] H. C. Corben and Julian Schwinger. «The Electromagnetic Properties of Mesotrons.» In: *Phys. Rev.* 58 (1940), pp. 953–968. DOI: 10.1103/PhysRev.58.953.
- [6] Paul Adrien Maurice Dirac. «Quantised singularities in the electromagnetic field.» In: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 133.821 (1931), pp. 60–72. DOI: 10.1098/rspa.1931.0130.
- [7] David J Griffiths. *Introduction to elementary particles; 2nd rev. version*. Physics textbook. New York, NY: Wiley, 2008. URL: <https://cds.cern.ch/record/111880>.
- [8] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2nd ed. 2004.
- [9] F. D. M. Haldane. «Fractional Quantization of the Hall Effect: A Hierarchy of Incompressible Quantum Fluid States.» In: *Phys. Rev. Lett.* 51 (7 Aug. 1983), pp. 605–608. DOI: 10.1103/PhysRevLett.51.605. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.605>.
- [10] C. Itzykson and J.B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2012. ISBN: 9780486134697. URL: <https://books.google.com.cy/books?id=CxYCMNrUnTEC>.
- [11] John David Jackson. *Classical electrodynamics; 2nd ed.* New York, NY: Wiley, 1975. URL: <https://cds.cern.ch/record/100964>.
- [12] Samuel W. MacDowell and Ola Törnkvist. «Structure of the ground state of the electroweak gauge theory in a strong magnetic field.» In: *Phys. Rev. D* 45 (10 May 1992), pp. 3833–3844. DOI: 10.1103/PhysRevD.45.3833. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.45.3833>.

- [13] Juan Maldacena. «Comments on magnetic black holes.» In: *Journal of High Energy Physics* 2021.4 (Apr. 2021). ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/jhep04(2021)079. URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP04\(2021\)079](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP04(2021)079).
- [14] Juan Martin Maldacena, Alexey Milekhin, and Fedor K. Popov. «Traversable wormholes in four dimensions.» In: *arXiv: High Energy Physics - Theory* (2018).
- [15] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, 1995. ISBN: 978-0-201-50397-5.
- [16] Jun John Sakurai. *Modern quantum mechanics; rev. ed.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. URL: <https://cds.cern.ch/record/1167961>.
- [17] L. Susskind and J. Lindesay. *An introduction to black holes, information and the string theory revolution: The holographic universe*. 2005.
- [18] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York, NY: Wiley, 1972. URL: <https://cds.cern.ch/record/100595>.
- [19] Steven Weinberg. «SPONTANEOUSLY BROKEN GLOBAL SYMMETRIES.» In: *The Quantum Theory of Fields*. Vol. 2. Cambridge University Press, 1996, pp. 163–251. DOI: 10.1017/CB09781139644174.007.