

美赛备赛14周

常见模型

一级主题	二级主题	三级主题	模型举例
运筹学 (Operations Research)	规划论 (Programming Theory)	线性规划 (Linear programming)	线性规划(Linear programming)、整数规划(Integer Programming)、混合整数规划(Mixed Integer Programming)
		非线性规划 (Nonlinear programming)	凸规划(Convex programming)、二次规划(Quadratic programming,QP)、集合规划(Set programming)
		其他(Others)	目标规划(Goal Programming)、多目标规划(Multi-Objective Programming)、多层规划(Multi-level Programming)、动态规划(Dynamic Programming)
	图论(Graph Theory)	路(Path)	最短路模型(Shortest Path: S-T,All-Pair)、欧拉图模型(Euler Path)、哈密顿图模型(Hamiltonian Cycle)、旅行商问题(Traveling Salesman Problem)
		树(Tree)	最小生成树(Minimum Spanning Tree)、哈夫曼树(Huffman Tree)、斯坦纳树(Steiner Tree)
		流(Flow)	网络流模型（最大流）(Max-Flow/Min-Cost Max-Flow)
		其他(Others)	匹配模型(Matching Problem)、着色模型(Graph Coloring)、覆盖模型(Vertex Cover/Set Cover)、图的代数表示(邻接矩阵Adjacency Matrix、拉普拉斯矩阵Laplacian Matrix)
	随机规划论 (Stochastic Programming Theory)		排队论(Queueing Theory)、库存论(Inventory Theory)、决策论(Decision Theory)、统筹论(Overall Planning)

一级主题	二级主题	三级主题	模型举例
最优化方法 (Optimalization)	确定性算法(Determinate Algorithm)		贪心算法(Greedy Algorithm)、分治法(Divide & Conquer)、局部搜索(Local Search)
	启发式算法(Heuristic Algorithm)		禁忌搜索(Tabu Search)、遗传算法(Genetic Algorithm)、免疫算法(Immunity Algorithm)、模拟退火(Simulate Anneal, SA)、粒子群算法(Particle Swarm Optimization, PSO)、蚁群算法(Ant Colony Optimization, ACO)
	迭代式算法(Iterative Algorithm)		梯度下降/最速下降/坐标下降法(Gradient/Coordinate Descent)、牛顿法/拟牛顿法(Newton Method)、共轭梯度法(Conjugate Gradient Method)、黄金分割搜索(Golden-Section Search)
	约束优化		线性逼近法、可行方向法、投影梯度法
	求解技巧(Techniques)		分枝定界法(Branch and Bound Method)、限制(Relaxation)、松弛(Restriction)、罚函数法(Penalty Function)、对偶(Antithesis)、拉格朗日乘数法(Lagrange Multiplier)、KKT条件(Karush-Kuhn-Tucker)、BP神经网络(Back Propagation)
机器学习主题 (Machine Learning)	分类(Classify)		K邻近(KNN)、决策树(Decision Tree)、随机森林(Random Forest)、支持向量机(Support Vector Machine,SVM)、线性判别分析(Linear Discriminant Analysis, LDA)、逻辑斯谛回归(Logistic Regression)、朴素贝叶斯(Naïve Bayes)
	聚类(Cluster)		K-Means算法(包括K-Means++变种)(K-Means Algorithm)、期望最大化算法(Expectation Maximization, EM)、SOM聚类(Self Organizing Maps Clustering)、层次聚类(Hierarchical Clustering)
	回归(Regression)		线性回归(Linear Regression)、局部加权线性回归(Locally Weighted Linear Regression)、岭回归(Ridge Regression)、泊松回归(Poisson Regression)
	降维 (Dimensionality Reduction)	线性(Linear)	典型相关分析(Canonical Correlation Analysis, CCA)、主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)
		非线性(Non-Linear)	局部线性嵌入(Locally Linear Embedding, LLE)、拉普拉斯特征映射(Laplacian Eigenmaps)、核函数法(Kernel Function)
	集成学习算法(Ensemble Learning)		Boosting算法(Boosting Algorithm)、Bagging算法(Bagging Algorithm)

一级主题	二级主题	三级主题	模型举例
预测主题 (Prediction)	离散型预测 (Discrete)		马尔科夫模型(Markov decision model)、灰色预测(Grey forecasting)、贝叶斯网络(Bayesian network)、差分方程(Difference equation)
	连续型预测 (Continuous)	时间序列模型(Sequential)	ARIMA模型(Autoregressive Integrated Moving Average model)、GARCH模型 (包括EGARCH变种) (Autoregressive conditional heteroskedasticity model)
		微分方程模型 (Differential equations)	传染病模型(Infectious disease model)、人口预测模型(Population prediction model)、经济增长模型(Economic growth model)、河流污染物扩散模型(River pollutant diffusion model)、作战模型(Battle model)、热传导模型(Heat conduction model)
评价主题 (Evaluation)	打分式评价(Scoring)		模糊综合评价(Fuzzy comprehensive evaluation)、灰色评价(Grey evaluation)、层次分析法(Analytic Hierarchy Process, AHP)、网络分析法(Analytic Network Process, ANP)、数据包络分析法(Data Envelopment Analysis, DEA)、理想解方法 (TO、加权积(Weighted product)PSIS方法) (Technique for Order Preference by Similarity to an Ideal Solution)、熵权法(Entropy weight method)、信息熵法(Information Entropy Method)
	统计类评价 (Statistical)	相关性检验 (Correlation Test)	Pearson相关系数检验(Pearson Correlation Coefficient Test)、威尔科克森符号秩检验(Wilcoxon's Sign Rank Test)、肯德尔和谐系数(Kandall Coefficient of Concordance Test)
		拟合优度检验 (Goodness of Fit Test)	方差分析 (Analysis of Variance, ANOVA) 、卡方检验(Chi-Square Goodness-of-Fit Test)、KS检验(Kolmogorov-Smirnov Test)

预测主题模型

连续性

时间序列模型

用于预测时间序列的后续数据

时间序列建模基本步骤

1. 获取被观测系统**时间序列数据**。
2. 对数据绘图，观测是否为**平稳时间序列**；对于非平稳时间序列要先进行**d阶差分运算**，化为平稳时间序列。
3. 经过第二步处理，已经得到平稳时间序列。要对平稳时间序列分别求得其**自相关系数ACF**和**偏自相关系数PACF**，通过对自相关图和偏自相关图的分析，得到最佳的阶层 和阶数 。
4. 由以上得到的 ACF、PACF，得到ARIMA模型。然后开始对得到的模型进行模型检验。

ARIMA模型

ARIMA模型分析

- Meaning：autoRegressive I ntegrated Moving a average自回归综合移动平均线
- Function：ARIMA 模型可以被视为一个“过滤器”，它试图将信号与噪声分开，然后将信号外推到未来以获得预测。ARIMA模型特别适合于拟合显示非平稳性的数据。
- 平稳性
平稳性就是要求经由样本时间序列所得到的拟合曲线在未来的一段时间内仍然能够按照现有的形态延续下去。如果一个时间序列不是平稳的，通常需要通过差分的方式将其转化为平稳时间序列。
- ARMA(p, q) 自回归移动平均模型

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \gamma_i y_{t-1} + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

加入差分法即为ARIMA(p, d, q)模型，其中p是自回归项数，q是移动平均项数，d为时间序列成为平稳时所做的差分次数。

建模步骤

- 对序列绘图进行**平稳性检验**，观察序列是否为平稳，对于非平稳时间序列要先进行d阶差分，转化为平稳序列。
- 经过第一步处理，已经得到**平稳时间序列**。要对平稳时间序列分别求得其**自身相关系数ACF**，和**偏自相关系数PACF**，通过对自相关图和偏自相关图的分析或通过**AIC/BIC**搜索，得到最佳的阶数 p 、 q 、 d
- 由以上得到 p 、 q 、 d 的值，得到**ARIMA模型**，然后开始对得到的模型计算 γ_i 和 θ_i ，前者一般通过统计软件包（如Python的statsmodels）直接拟合，后者可以通过最小二乘法简单计算。
- 模型评估
使用平均绝对误差（MAE）和均方根误差（RMSE）评估模型的性能。

微分方程模型

大部分的微分方程模型需要靠现写微分方程搭建，需要自行设定多种因素直接的作用关系，根据此来写微分方程组。

传染病模型

微分方程加传染病模型

- 指数模型。简单
- SI模型**：考虑到总人数固定，问题为未考虑感染者康复的问题。

设人口总数为常数 N 。人群分为易感染者（Susceptible）和易感染者（Infective），所占比例在 t 时刻为 $s(t)$ 和 $i(t)$ ， $s(t)+i(t)=1$ 。

日感染率：每个病人在单位时间（每天）内**接触**的平均人数为**常数 λ** ，称为**日感染率**；当病人所接触的是健康者时，会将其感染成病人

CSDN @MkingG

- 在 t 时刻**病人总数** $Ni(t)$ ， **Δt 时间内会新增** $\lambda s(t)Ni(t)\Delta t$ 个病人，则**单位时间内新增**病人数：

$$\frac{Ni(t + \Delta t) - Ni(t)}{\Delta t} = \lambda N s(t) i(t)$$

- 令 $\Delta t \rightarrow 0$ ，得微分方程

$$\frac{di(t)}{dt} = \lambda s(t) i(t)$$

微信公众号：数学建模BOOM

- 根据**第2条假设**，由于 $s(t) + i(t) = 1$ ，所以可写作

$$\frac{di(t)}{dt} = \lambda i(t)(1 - i(t))$$

CSDN @MkingG

- 设 $t = 0$ 时，患病人数占总人口的比例为 $i(0) = i_0$ ，则SI模型：

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \lambda i(t)(1 - i(t)), & t > 0 \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

- 求解该微分方程，得

$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1\right)e^{-\lambda t}}$$

微信公众号：数学建模BOOM

- SIS模型**：多考虑每天康复的病人占总病人的比例，问题为未考虑病人康复后的免疫性。

- 得到SIS模型：

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \lambda i(t)(1 - i(t)) - \mu i(t), & t > 0, \\ i(0) = i_0. \end{cases}$$

4. SIR模型：

- 对于全体人群： $s(t) + i(t) + r(t) = 1$

s, i, t 分别为易感染者，病人和免疫者。

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda s(t)i(t) - \mu i(t) \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda s(t)i(t) \\ \frac{dr}{dt} = \mu i(t) \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0, r(0) = 0 \end{cases}$$

人口预测模型

1. 常用逻辑斯蒂模型， x_m 为可容纳的最大人口，缺点较粗糙，考虑因素太少，可以改良。

$$\frac{dx}{dt} = r(x)x = rx(1 - \frac{x}{x_m})$$

最终得到：

$$x(t) = \frac{x_m}{(1 + (\frac{x_m}{x_0} - 1)e^{-rt})}$$

热传导模型

热传导

- 傅里叶热量传导定理： 定量热流
- 内部热源产热： 体积分

讲这些量代入能量守恒定律，便得方程

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + g(t, x, y, z)$$

打分评价模型

层次分析法

AHP详解+代码

主要作用： 一种较为科学的主观赋值评价方法，用于确定各指标的权重

建模步骤：

- 1. 构建层次结构模型
- 2. 构造判断矩阵

a_{ij} 代表第i个指标比第j个指标的重要程度，人为设定，如下

这是一个判断矩阵。

景色	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	2	4
北戴河	1/2	1	2
桂林	1/4	1/2	1

矩阵各行列满足倍数关系，不然矛盾

- 3. 一致性检验

检验判断矩阵是否满足一致性，检验方法先求解最大特征值，再求解CI、RI、CR值，判断一致性是否通过

- 4. 层次单排序

这一步是求解各指标的权重，有算数平均法，几何平均法等

熵权法

熵权法+代码

主要作用： 更为客观地得到权重的计算

基本思想： 通过信息熵的概念讲数据中差异小的指标赋予较小权重，给差异大的赋予较大权重

建模步骤：

- 1. 标准化：正向化指标，归一化指标
- 2. 计算概率矩阵：正向化矩阵每一个指标值除以所在列的和
- 3. 计算对应指标的熵权

信息熵计算公式

$$e_j = - \frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^n p_{ij} \ln(p_{ij}) \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

由于信息熵越大所包含的信息值越少，定义信息效用值 $d_j = 1 - e_j$

对信息效用值归一化得到熵权值 $W_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^m d_j}$

TOPSIS法

TOPSIS法+代码

主要作用： 在层次分析法或熵权法得到各指标权值后，不在使用简单的加权求和计算得分值，而是通过设定理想最优解和最差解，通过判断不同方案离两者的差距来选择

建模步骤：

1. 原始矩阵正向化归一化，大部分的评价打分类模型都是基于这个前提处理
2. 计算权重（层次分析法或熵权法）
3. 寻找标准化矩阵中的最好解与最差解，如下图

- 上一步得到标准化矩阵 Z

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nm} \end{bmatrix}$$

- 定义最大值 $Z^+ = (Z_1^+, Z_2^+, \dots, Z_m^+) = (\max\{z_{11}, z_{21}, \dots, z_{n1}\}, \max\{z_{12}, z_{22}, \dots, z_{n2}\}, \dots, \max\{z_{1m}, z_{2m}, \dots, z_{nm}\})$
- 定义最小值 $Z^- = (Z_1^-, Z_2^-, \dots, Z_m^-) = (\min\{z_{11}, z_{21}, \dots, z_{n1}\}, \min\{z_{12}, z_{22}, \dots, z_{n2}\}, \dots, \min\{z_{1m}, z_{2m}, \dots, z_{nm}\})$

定义第 i 个评价对象与最优解（最大值）的距离 $D_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^m W_j (Z_j^+ - z_{ij})^2}$

同理 $D_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m W_j (Z_j^- - z_{ij})^2}$

接下来计算得分 $S_i = \frac{D_i^+}{D_i^+ + D_i^-}$

模糊综合评价法

模糊综合评价法

主要作用： 不同于确定性数学模型，部分指标如是否年轻可能没有一个明确的界定，这时使用模糊综合评价来确定隶属度。举例，在确定性问题中，评判一个方案的优劣可以通过数值的大小，而在模糊综合评价中是通过隶属度，比如学生成绩评价集{优秀，良好，及格，不合格}和对应的隶属度{0.3, 0.5, 0.2, 0}，最后看隶属度最高的来模糊评价方案

例子： 看链接的例子便于理解

① 因素集（评价指标集）： $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

② 评语集（评语的结果）： $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

③ 权重集（指标的权重）： $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

例如：评价一个学生的表现：

$U = \{\text{专业排名, 课外实践, 志愿服务, 竞赛成绩}\}$

$V = \{\text{优, 良, 差}\}$

$A = \{0.4, 0.2, 0.1, 0.3\}$

建模步骤：

1. 确定因素集、评语集、权重集
2. 构造判断矩阵 R
3. 进行模糊综合评价

注意： 该方法只需对模型中具有模糊概念的指标比如高矮、胖瘦进行处理，其余定量指标仍可使用求和或TOPSIS法计算。

灰色关联分析

主成分分析