Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Β Ιωάννης Ρουμελιώτης

Ύλη Μαθήματος

1) Ηλεκτροστατικά πεδία

2) Διηλεκτρικά υλικά

3) Μόνιμα ηλεκτρικά πεδία - αγωγοί

4) Μαγνητοστατικά πεδία

5) Μαγνητικά υλικά

6) Λύση εξισώσεων Laplace με χωρισμό μεταβλητών σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Κεφάλαιο 8

Ηλεκτροστατική

Ολοκληρωτικές εξισώσεις:

$$\oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

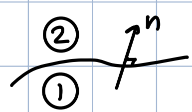
$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \int_V \rho\, dV = Q_{\varepsilon\sigma}$$

Σημειακές εξισώσεις:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (2)$$

σ.σ.



$\hat{n} \times (E_2 - E_1) \Rightarrow E_{\tau_2} = E_{\tau_1}$

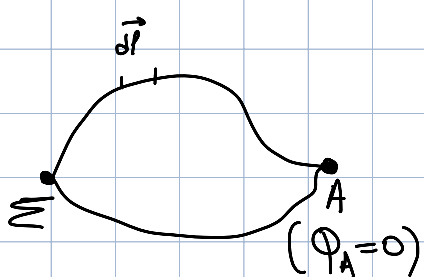
$\hat{n} \cdot (D_2 - D_1) \Rightarrow D_{n_2} = D_{n_1}$

(1) $\Rightarrow$ Θέτουμε $\vec{E} = -\nabla \varphi$, όπου φ είναι το ηλεκτροστατικό δυναμικό (V)

Ξέρουμε ότι $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$, με $\varphi' = \varphi + \sigma\tau\alpha\theta$

$-\nabla \varphi' = -\nabla \varphi$

και με σημείο αναφοράς το A: $\varphi_A = 0$



$$\Rightarrow \int_{\Sigma}^{A} \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_{\Sigma}^{A} \nabla\varphi\, d\vec{l} = -\int_{\Sigma}^{A} \frac{d\varphi}{dl}\, dl = -\int_{\Sigma}^{A} d\varphi =$$

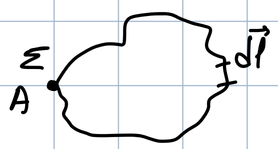
$$= \varphi_{(\Sigma)} - \varphi_{(A)} \quad (V)$$

διαφορά δυναμικού ή τάση

$$\int_{\Sigma}^{A} \vec{E}\, d\vec{l} = \int_{\Sigma}^{A} \vec{E}\, d\vec{l}$$

(1) (2)

$(\Sigma \equiv A)$



$\Rightarrow \varphi_{\Sigma} - \varphi_{A} = 0$

$\oint_{c} \vec{E}\, d\vec{l} = 0$ αστρόβιλο πεδίο ή συντηρητικό πεδίο

Γενικά: $\varphi_{\Sigma} = \int_{\Sigma}^{\alpha\nu\alpha\varphi} \vec{E}\, d\vec{l}$ (το δυναμικό έχει νόημα μόνο αν έχω σημείο αναφοράς)

$$\int_{\Sigma}^{A} q\vec{E}\, d\vec{l} = \int_{\Sigma}^{A} \vec{F}_e\, d\vec{l} = -\int_{\Sigma}^{A} \nabla W_e\, d\vec{l} = -\int_{\Sigma}^{A} \frac{dW_e}{dl} \cdot dl = W_{e_\Sigma} - W_{e_A} = q\left(\varphi_{\Sigma} - \varphi_{A}\right)$$

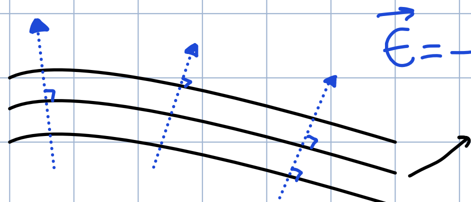
Αν Α σημείο αναφοράς: $W_{e_A} = 0$

$$q\varphi_{\Sigma} = W_{e_1} \Rightarrow \varphi_{\Sigma} = \frac{W_{e_\Sigma}}{q}$$

$$\underbrace{\varphi = \varphi\begin{pmatrix} x & y & z \\ r & \varphi & z \\ r & \theta & \varphi \end{pmatrix}}_{} = \sigma\tau\alpha\theta$$

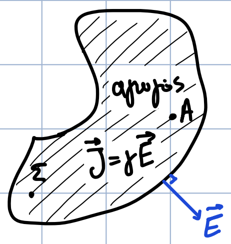
Μια τέτοια επιφάνεια ονομάζεται ισοδυναμική επιφάνεια

$\vec{E} = -\nabla\varphi$



ισοδυναμικές επιφάνειες

Μικροσκοπικός νόμος του Ohm:



Αν $\vec{E} \neq 0 \Rightarrow \vec{J} \neq 0$, αλλά αφού μιλάμε για ηλεκτροστατικά πεδία

Άρα πρέπει $\vec{E} = 0$

$\vec{E} = -\nabla\varphi = 0 \Rightarrow \varphi =$ σταθερό (κάθε αγωγός έχει σταθ. δυναμικό)

$\varphi_\Sigma - \varphi_A = \cancelto{0}{\int_\Sigma^A \vec{E}\, d\vec{l}} = 0 \Rightarrow \varphi_\Sigma = \varphi_A$ (όλα τα σημεία του αγωγού έχουν το ίδιο δυναμικό)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla(\varepsilon \vec{E}) = -\nabla(\varepsilon \nabla \varphi) = \rho$$

Αν $\varepsilon =$ σταθ $\Rightarrow \varepsilon \nabla^2 \varphi = -\rho \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$ εξίσωση Poisson

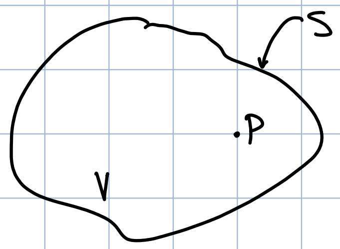
Αν $\rho = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$ εξίσωση Laplace

Καρτεσιανές συντεταγμένες: $\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$

Κυλινδρικές συντεταγμένες: $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$

Ιδιότητες δυναμικού (εξίσωση Laplace)

1)



$$\nabla^2\varphi=0$$

Αν σε όλα τα σημεία του όγκου V ισχύει η εξίσωση Laplace ($\rho=0$), τότε το φ δεν μπορεί να πάρει τις ελάχιστες ή μέγιστες τιμές του στα σημεία του V.

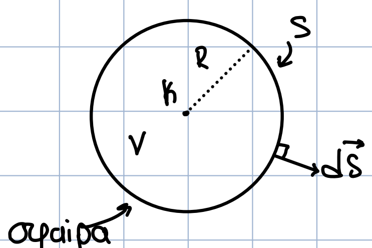
Για να γίνει ελάχιστο (μέγιστο) στο σημείο P στο V πρέπει εκεί:

i) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=0$

ii) $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}>0$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}>0$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}>0$, $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}<0, \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}<0, \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}<0\right)$

Τότε όμως $\nabla^2\varphi>0$, $(\nabla^2\varphi<0)$ Άτοπο αφού $\nabla^2\varphi=0$

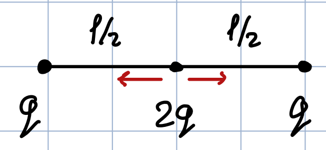
2)



Ισχύει ότι $\varphi_A=\dfrac{1}{4\pi R^2}\oint_S \varphi\, dS=\dfrac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_V \varphi\, dV$

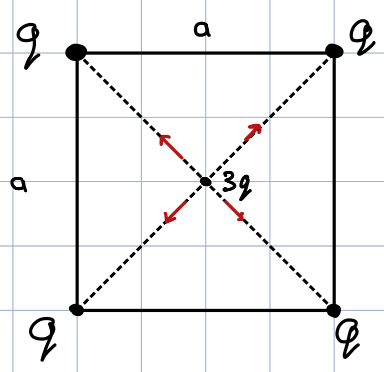
Επίσης ισχύει ότι $\vec{E}_K=\dfrac{1}{4\pi R^2}\oint_S \vec{E}\, d\vec{S}=\dfrac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_V \vec{E}\, dV$

3) Θεώρημα Earnshaw



Το φορτίο $2q$ ισορροπεί

(ασταθής ισορροπία)

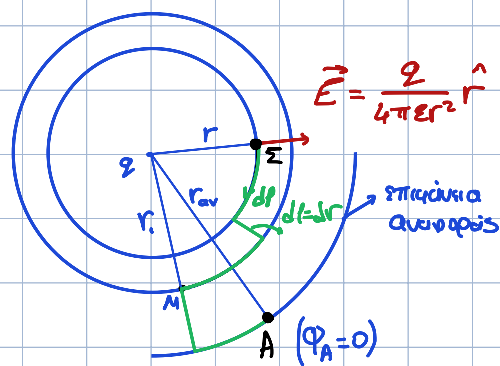


Το φορτίο $3q$ ισορροπεί

(ασταθής ισορροπία)

Υπολογισμός δυναμικού σε κατανομές φορτίου, γνωστές σε όλο το χώρο

1) Δυναμικό γύρω από σημειακό φορτίο q

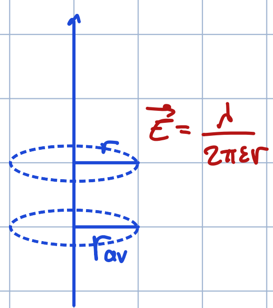


Ψάχνω Φ_Σ, $\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}\, d\vec{\ell}$

$$\Phi_\Sigma = \int_\Sigma^{αναφ} \vec{E}\, d\vec{\ell} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\int_r^{r_1} \frac{dr'}{r'^2} + \int_{r_1}^{r_{αν}} \frac{dr'}{r'^2}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_r^{r_{αν}} \frac{dr'}{(r')^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{αν}}\right]$$, για $r_{αν} \to \infty$ $\Phi_\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$

2) Άπειρο γραμμικό φορτίο



ε = σταθ
λ = σταθ

$$\Phi_\Sigma = \int_\Sigma^{r_{αν}} \vec{E}\, d\vec{\ell} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\int_r^{r_{αν}} \frac{dr'}{r'}$$

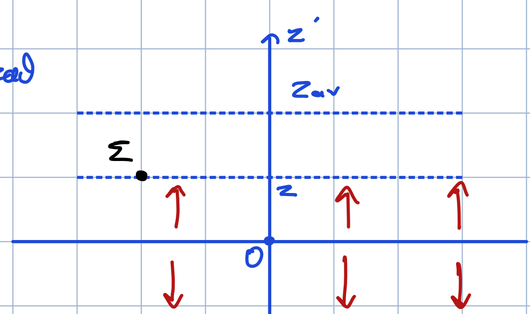
$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_{αν}}{r}\right) = \overbrace{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(r_{αν})}^{\text{σταθερός αριθμός}} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln r$$

$$\Phi_\Sigma = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln r + C_1$$

3) Άπειρο επίπεδο με σ = σταθ

$\left(\frac{\partial}{\partial x} = 0 = \frac{\partial}{\partial y}\right)$

ε = σταθ



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\, sgn(z)\, \hat{z} \qquad sgn(z) = \frac{z}{|z|} = \begin{cases} 1, & z>0 \\ -1, & z<0 \end{cases}$$

$$\Phi_\Sigma = \int_z^{z_{αν}} \vec{E}\, d\vec{\ell} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon}\int_z^{z_{αν}} sgn(z')\,dz' = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left[sgn(z_{αν})z_{αν} - sgn(z)z\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left[|z_{αν}| - |z|\right] = -\frac{\sigma}{2\varepsilon}|z| + C_1, \quad C_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon}|z_{αν}|$$