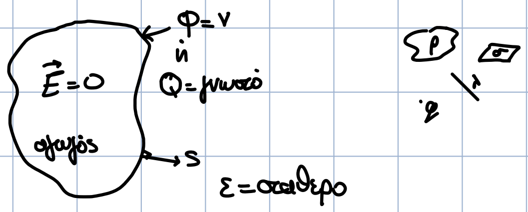
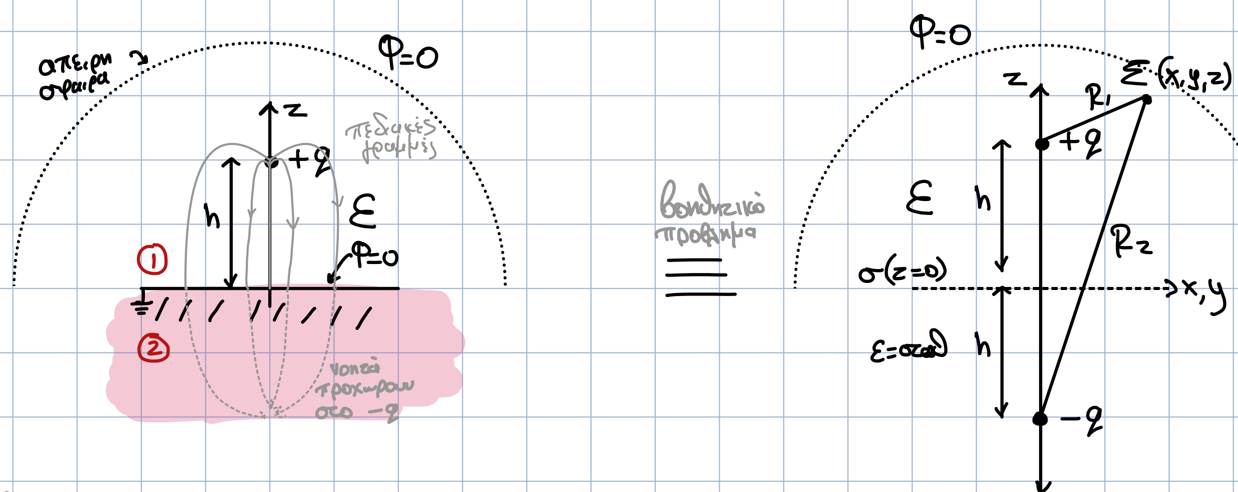
Η μέθοδος των ειδώλων (κατοπτρισμού)



Φορτίο q πάνω από απέραντο επίπεδο

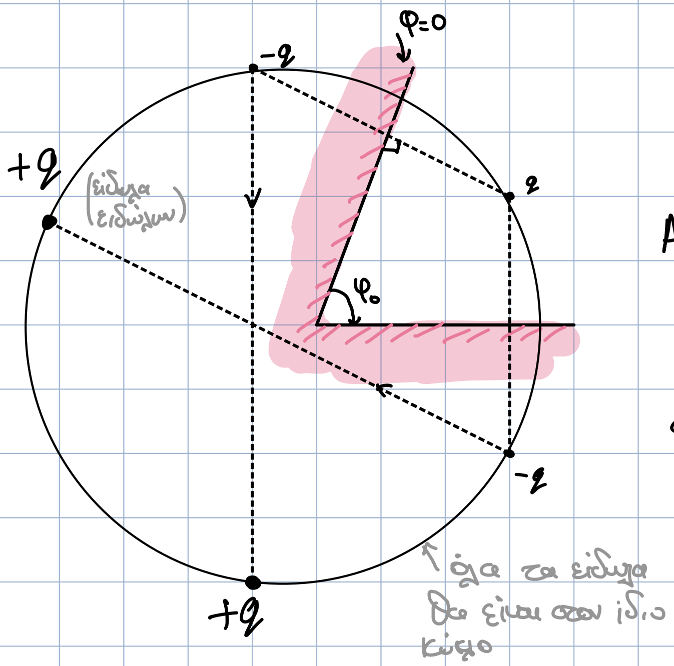


Θα αποδείξουμε ότι τα δύο σχήματα έχουν ίδια φ, E στην περιοχή 1

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} R_1=\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2} \\[1em] R_2=\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2} \end{array}\right\} \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}\right)$$

$$\vec{E}_\Sigma = -\nabla\varphi_\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+(z-h)\hat{z}}{\left[x^2+y^2+(z-h)^2\right]^{3/2}} - \frac{x\hat{x}+y\hat{y}+(z+h)\hat{z}}{\left[x^2+y^2+(z+h)^2\right]^{3/2}}\right]$$

Αν είχαμε το q σε μία γωνία

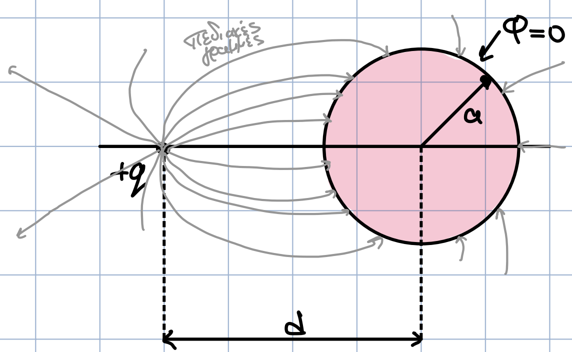


Αν $\varphi_0 = \frac{\pi}{n}$

$n = 1, 2, 3 \ \ldots$

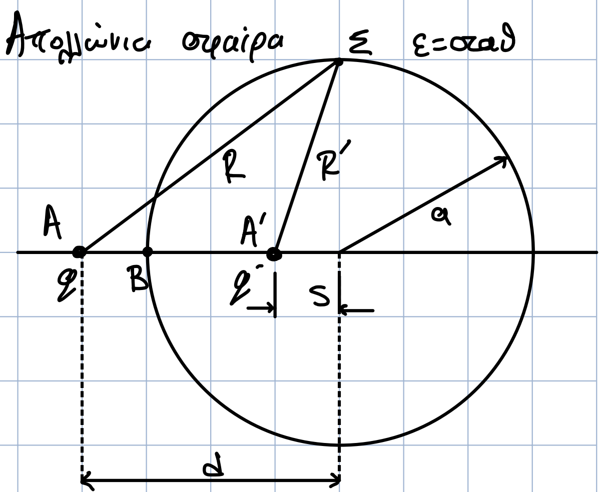
ο αριθμός των ειδώλων είναι περιορισμένος $(2n-1)$

Φορτίο δίπλα σε αγώγιμη σφαίρα



Βοηθητικό πρόβλημα

$\equiv$



$$\Phi_\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{R}+\frac{q'}{R'}\right), \quad \text{Για } \Phi_\Sigma = 0 \Rightarrow \frac{q}{R} = -\frac{q'}{R'}$$

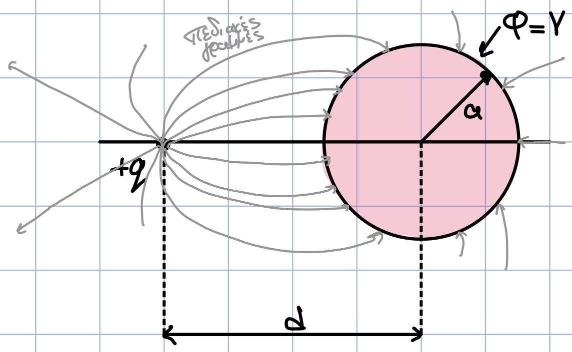
$$\frac{R}{R'} = -\frac{q}{q'} = \text{σταθ} > 0$$

Μετακινούμε το σημείο Σ στο σημείο Β γιατί μας βολεύει (ευθεία)
Θα βρίσκαμε ίδια αποτελέσματα σε όποιο δήποτε σημείο της σφαίρας

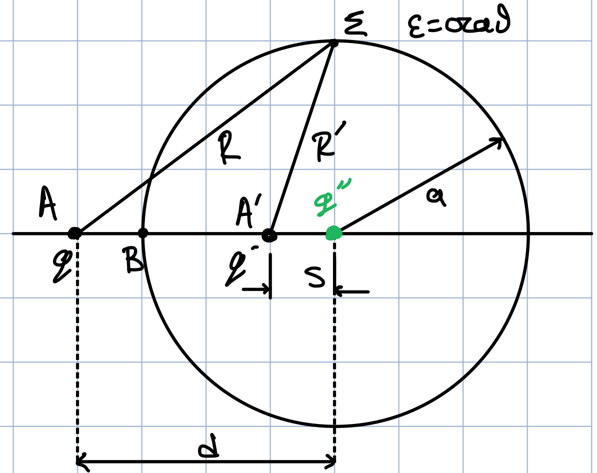
$$\frac{R_B}{R'_B} = \frac{R_{B'}}{R'_{B'}} \Rightarrow \frac{d-a}{a-s} = \frac{d+a}{a+s} = \frac{d\cancel{-a}+d\cancel{+a}}{a\cancel{-s}+a\cancel{+s}} = \frac{d}{a} = -\frac{q}{q'} \quad \boxed{d = -a\frac{q}{q'}}, \ \boxed{s = \frac{a^2}{d}}$$

$$\Phi_\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{R}+\frac{q'}{R'}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{R} - \frac{q\frac{a}{d}}{R'}\right)$$

Έστω φορτίζουμε την σφαίρα σε $\varphi = V$



Βοηθητικό πρόβλημα $\equiv$

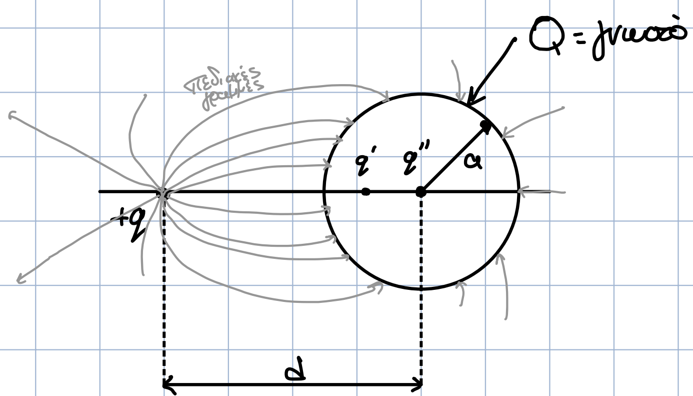


το q'' θα δίνει το V στην σφαίρα

άρα $V = \dfrac{q''}{4\pi\varepsilon a} \Rightarrow q'' = 4\pi\varepsilon a V$

$$\Phi_\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{R} - \frac{q\frac{a}{d}}{R'}\right) + \frac{q''}{4\pi\varepsilon r}, \quad \boxed{\Phi_\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{R} - \frac{q\frac{a}{d}}{R'}\right) + V\frac{a}{r}}$$

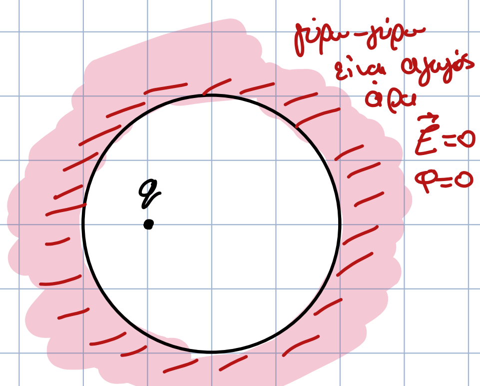
Έστω φορτίζουμε την σφαίρα σε γνωστό Q



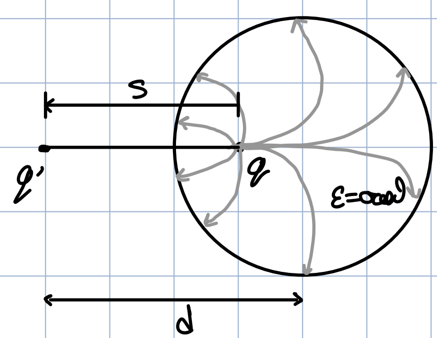
$$Q = q' + q'' \Rightarrow q'' = Q - q'$$

το q' το έχουμε υπολογίσει και "μηδενίζει" το δυναμικό στην σφαίρα, ενώ το q'' εδώ, φορτίζει την σφαίρα στο Q (το οποίο είναι γνωστό)

Σφαιρική κοιλότητα:



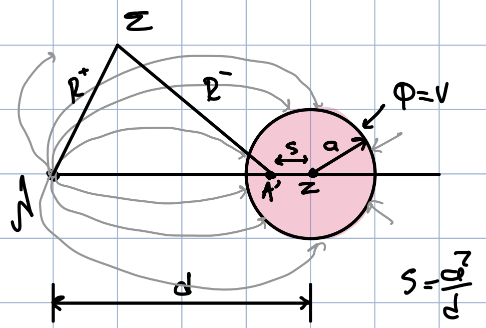
Βοηθητικό σχήμα $\equiv$



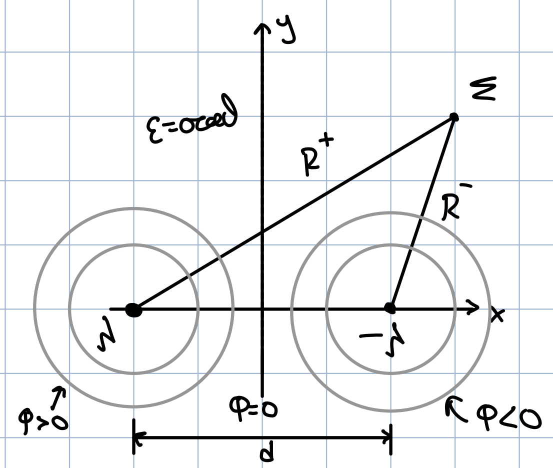
$q' = -q\dfrac{a}{d}$

$S = \dfrac{a^2}{d}$

Γραμμικό φορτίο παράλληλο σε αγώγιμο κύλινδρο



Βοηθητικό πρόβλημα ≡



Οι πεδιακές γραμμές εδώ, όλες θα πηγαίνουν στην επιφάνεια του κυλίνδρου (κάθετα) γιατί δεν έχουμε την άπειρη σφαίρα όπως πριν (δεν την έχουμε γιατί ο κύλινδρος είναι άπειρος)

$$\Phi_\Sigma = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln R^+ - \frac{(-\lambda)}{2\pi\varepsilon}\ln R^- + \sigma\tau\alpha\theta$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{R^+}{R^-}\right) + \sigma\tau\alpha\theta \quad (1)$$

$$\Phi_\Sigma = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \frac{R^+}{R^-} = \sigma\tau\alpha\theta$$, για $x=0$ $R^+=R^-$ άρα $\Phi=0$

Αν $\Phi_{\kappa\upsilon\lambda\acute\iota\nu\delta\rho\omicron\upsilon} = 0$

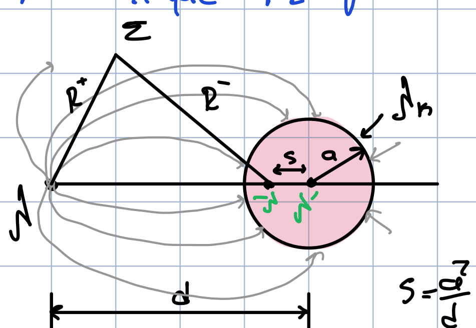
στην επιφάνεια του κυλίνδρου με $r=a$ ισχύει ότι $\frac{R^+}{R^-} = \frac{d}{a}$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow \Phi_\Sigma = 0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{a} + \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \sigma\tau\alpha\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{d}{a}\right)$ (3)

άρα τώρα για γειωμένο κύλινδρο θα παίρνουμε (1),(3) $\Phi_\Sigma = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{R^+ a}{R^- d}\right)$

(άρα για $r=a$, $\frac{R^+}{R^-} = \frac{d}{a}$ δηλαδή $\Phi_\Sigma = 0$)

Αν είχαμε λ_κ γνωστό στην επιφάνεια του κυλίνδρου

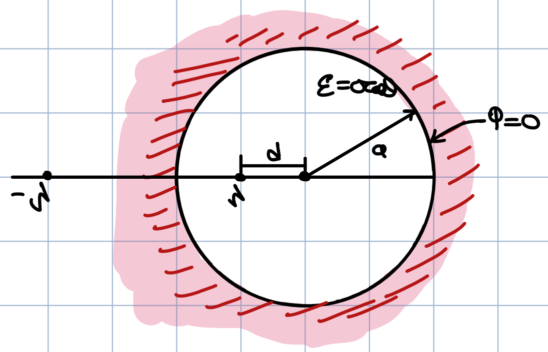


άρα $\lambda_\kappa = -\lambda + \lambda'$

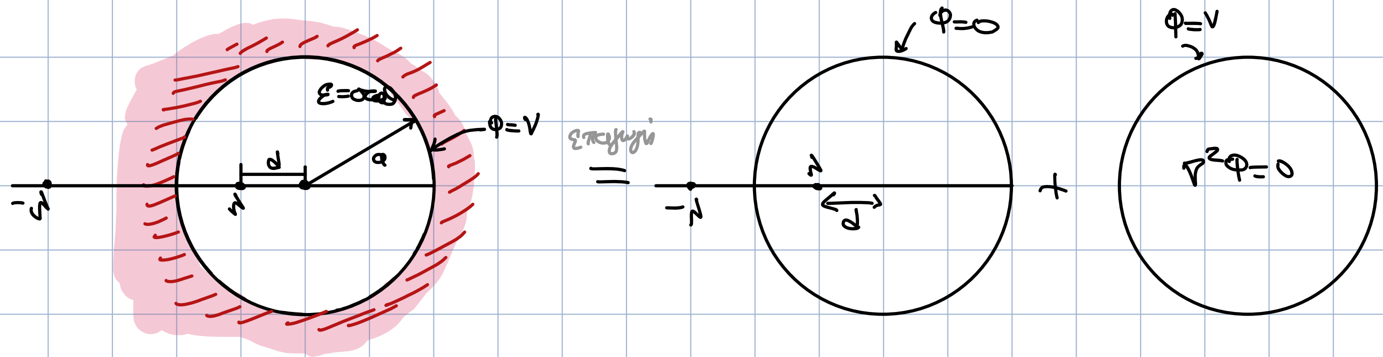
$\lambda' = \lambda_\kappa + \lambda$

$$\Phi_\Sigma = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln R^+ - \frac{(-\lambda)}{2\pi\varepsilon}\ln R^- - \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon}\ln r + \sigma\tau\alpha\theta$$

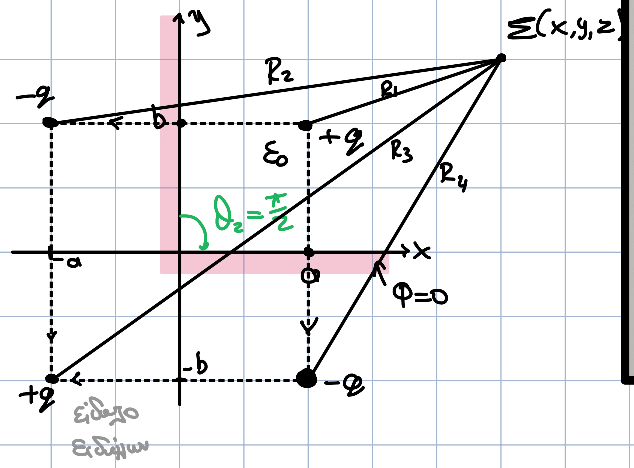
Κυλινδρική κοιλότητα:

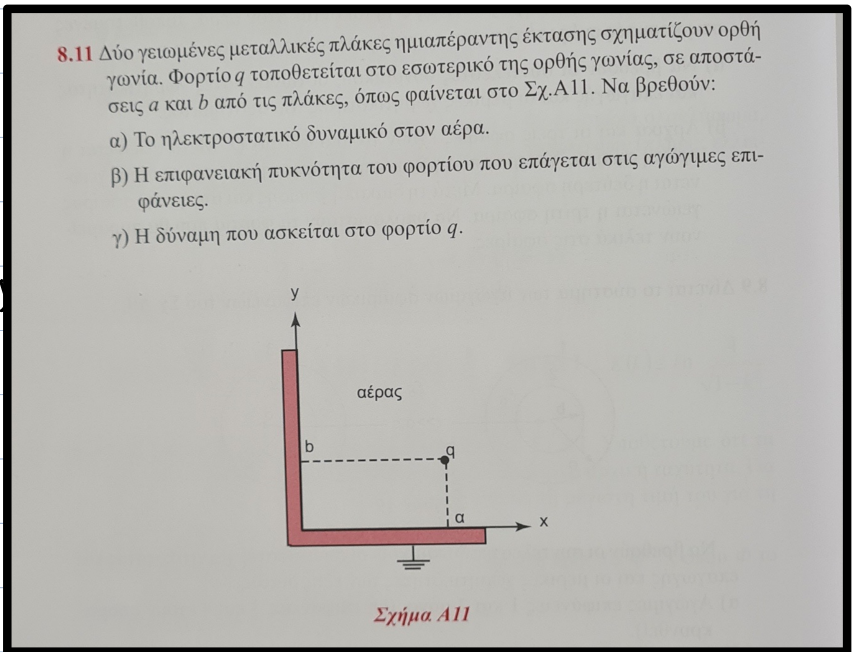


Αν φορτίσουμε τον αγωγό με V



Άσκηση 8.11





8.11 Δύο γειωμένες μεταλλικές πλάκες ημιαπέραντης έκτασης σχηματίζουν ορθή γωνία. Φορτίο q τοποθετείται στο εσωτερικό της ορθής γωνίας, σε αποστάσεις a και b από τις πλάκες, όπως φαίνεται στο Σχ.Α11. Να βρεθούν:

α) Το ηλεκτροστατικό δυναμικό στον αέρα.

β) Η επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου που επάγεται στις αγώγιμες επιφάνειες.

γ) Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο q.

Σχήμα Α11

a) $$\Phi_\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)$$

$$R_1 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2} \qquad R_3 = \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}$$

$$R_2 = \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2} \qquad R_4 = \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2}$$

$$(0 \leq x, y < \infty) \qquad -\infty < z < \infty$$