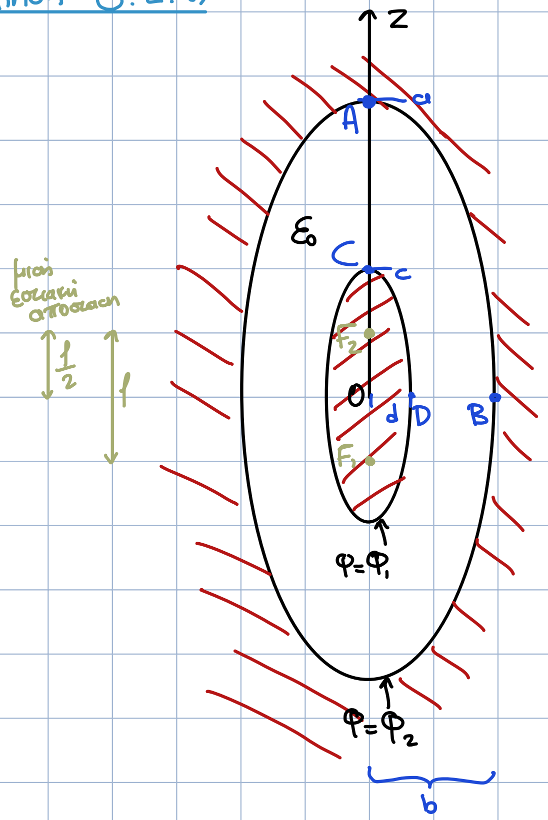
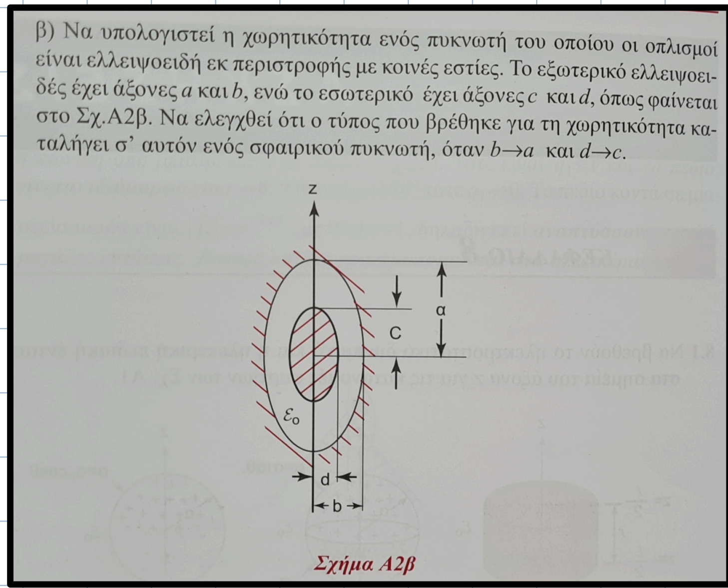
Άσκηση 8.2.β)




β) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα ενός πυκνωτή του οποίου οι οπλισμοί είναι ελλειψοειδή εκ περιστροφής με κοινές εστίες. Το εξωτερικό ελλειψοειδές έχει άξονες a και b, ενώ το εσωτερικό έχει άξονες c και d, όπως φαίνεται στο Σχ.Α2β. Να ελεγχθεί ότι ο τύπος που βρέθηκε για τη χωρητικότητα καταλήγει σ' αυτόν ενός σφαιρικού πυκνωτή, όταν $b \to a$ και $d \to c$.

Σχήμα Α2β

Πυκνωτής με σφαιροειδή οπλισμό ελλειψοειδής εκ περιστροφής

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\lambda(F_1F_2)}{\varphi_1-\varphi_2}\quad(1),\qquad OF_1=OF_2=OF=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{c^2-d^2}=f/2\quad(2)$$

$$(1)\Rightarrow\quad C=\frac{\lambda(F_1F_2)}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{\lambda(2(OF))}{\varphi_C-\varphi_A}=\frac{2\cancel{\lambda}\cdot OF}{\boxed{\frac{\cancel{\lambda}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{c+OF+c+OF}{c-OF+c-OF}-\ln\frac{a+OF+a+OF}{a-OF+a-OF}\right]}}$$

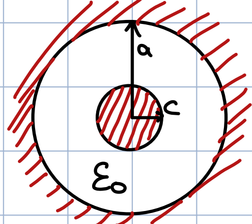
αυτό προκύπτει από την 8.2(α) στο προηγούμενο Lecture

$$=8\pi\varepsilon_0\cdot\frac{OF}{\ln\left[\frac{(c+OF)(a-OF)}{(c-OF)(a+OF)}\right]}\quad(3)$$

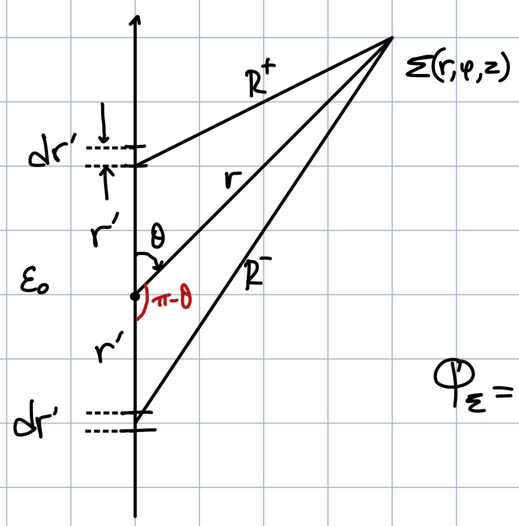
Τείνω την εστιακή απόσταση στο O → μεταφορά σε σφαίρα αφού ταυτίζονται οι 2 ευθείες

Άρα για σφαιρικό πυκνωτή:

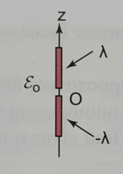
$$\left.\begin{array}{l} OF\to 0\\ \text{δηλ. } b\to a\\ d\to c\end{array}\right\}\quad C\to 4\pi\varepsilon_0\frac{ac}{a-c}$$



Άσκηση 8.2.γ)



γ) Να επαναληφθούν οι ερωτήσεις του (α) για το πεδίο που δημιουργείται από τις σταθερές γραμμικές πυκνότητες λ και $-\lambda$ φορτίων τοποθετημένων στις ημιευθείες με $z>0$ και $z<0$, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο Σχ.Α2γ.



Σχήμα Α2γ

$$\Phi_\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{\lambda dr'}{R^+}-\frac{\lambda dr'}{R^-}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{r'=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2+2rr'\cos\theta}}\right)dr'\right]$$

$$\Phi_\Sigma = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}+2r'-2r\cos\theta}{2\sqrt{r^2+r'^2+2rr'\cos\theta}+2r'+2r\cos\theta}\Bigg|_{r'=0}^{\infty}$$

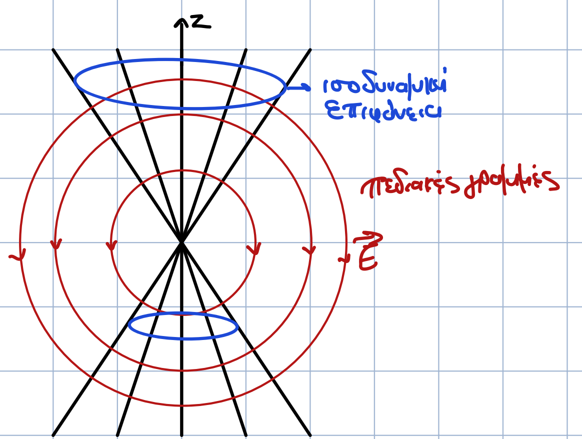
για $r'\to\infty$ $\quad \Phi_\Sigma = \ln\frac{r'}{r'} = \ln 1 = 0$

άρα

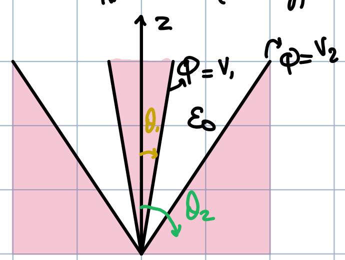
$$\Phi_\Sigma = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[0-\ln\frac{\cancel{r}(1-\cos\theta)}{\cancel{r}(1+\cos\theta)}\right] \overset{\text{τριγ. ταυτότητα}}{=\!=\!=} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\vec{E}_\Sigma = -\nabla\Phi_\Sigma = -\frac{1}{r}\frac{d\Phi_\Sigma}{d\theta}\hat{\theta} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r\sin\theta}\hat{\theta}$$

Οι ισοδυναμικές επιφάνειες έχουν σταθερό θ (Οι ισοδυναμικές επιφάνειες δεν τέμνονται ποτέ!)

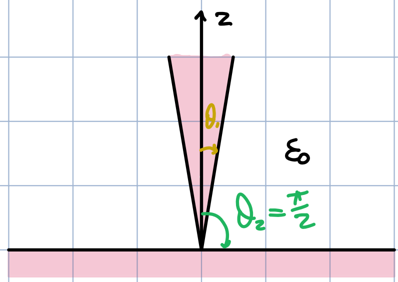


(⊥ στις κωνικές ισοδυναμικές επιφάνειες) σε άλλο παράδειγμα: (κεραίες)

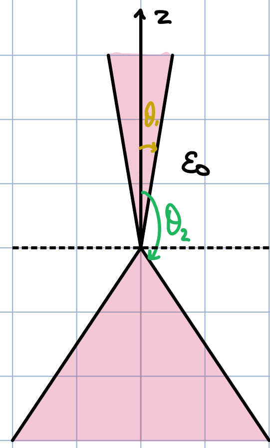


ημιαπέραντο

①



②



③

χωρητικότητα κεραίας

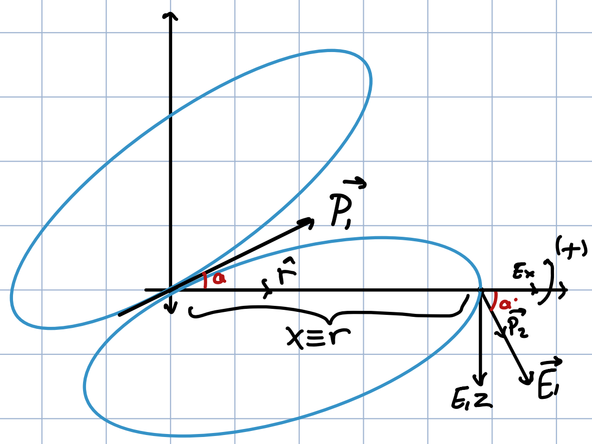
$$C_\mu = \frac{\lambda}{V_1 - V_2} = \frac{\cancel{\lambda}}{\frac{\cancel{\lambda}}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\cot\frac{\theta_1}{2} - \ln\cot\frac{\theta_2}{2}\right]}$$

Στην κεραία έχω και χωρητικότητα & αυτεπαγωγής, θέλω να βελτιώσω κάτι σε κάποιο μήκος κύματος.

κεραία: γραμμή μεταφοράς

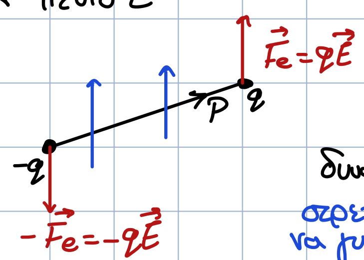
Άσκηση 8.3

8.3 Δύο ηλεκτρικά δίπολα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, με τα κέντρα τους στερεωμένα σε κάποια απόσταση. Εάν οι γωνίες των διπόλων αυτών με την ευθεία που ενώνει τα κέντρα τους είναι α και α', να αποδείξετε ότι κατά την ισορροπία ισχύει η σχέση $\tan\alpha' = -\frac{1}{2}\tan\alpha$, όπου α είναι η γωνία του διπόλου που παραμένει σταθερό και α' είναι η γωνία του διπόλου που προσαρμόζεται για την ισορροπία.



(−) γωνία άρα θα βρω ένα μείον στο αποτέλεσμα

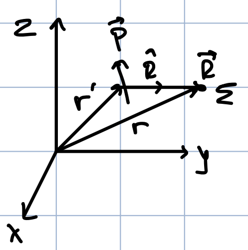
ηλ πεδίο $\vec{E}$



το πεδίο ασκεί δυνάμεις στα φορτία

στρεπτική ροπή που τείνει να γυρίσει το δίπολο σε ισορροπία

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\,\hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$ (τύπος για δίπολο στην αρχή συντεταγμένων)



όπου $r \to R$

από τύπο: $$\vec{E}_1 = \frac{3(\vec{P}_1\hat{r})\hat{r} - \vec{P}_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{3P_1\cos a\,\hat{x} - P_1\cos a\,\hat{x} - P_1\sin a\,\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

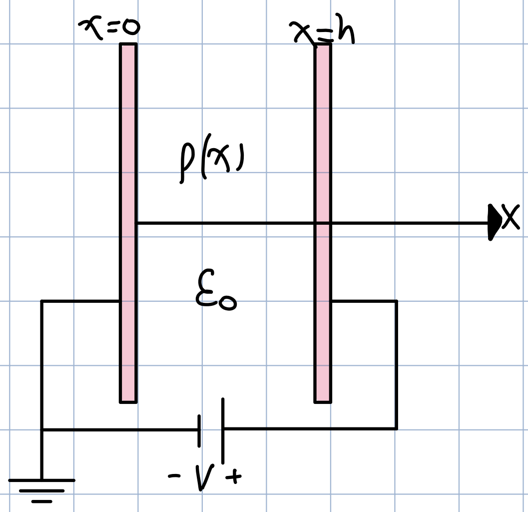
$$= \frac{2P_1\cos a\,\hat{x} - P_1\sin a\,\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

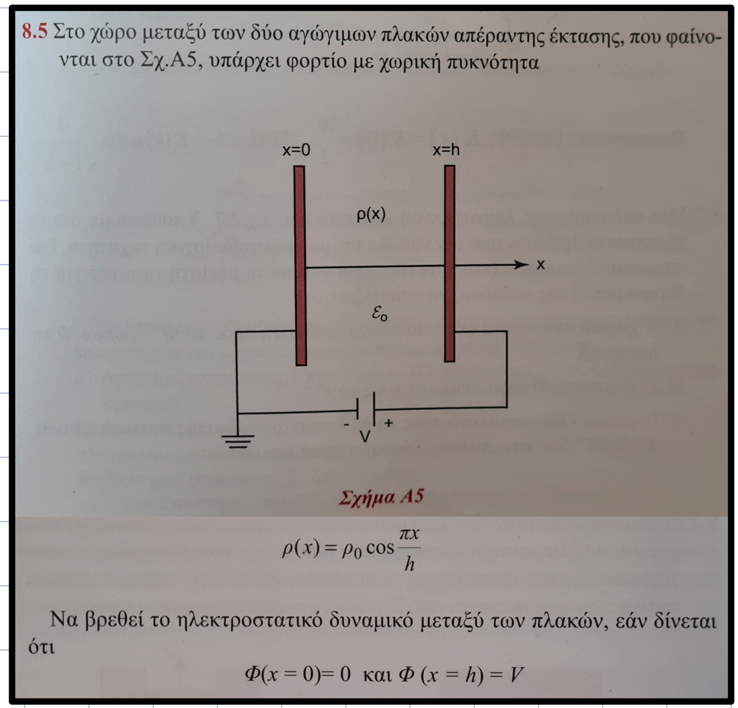
$$\tan a' = \frac{-\cancel{P_1}\sin a}{2\cancel{P_1}\cos a} = -\frac{1}{2}\tan a \Rightarrow \boxed{\tan a' = -\frac{\tan a}{2}}$$

Κριτήριο Ισορροπίας

(// και ομόρροπο με την ένταση)

Άσκηση 8.5





8.5 Στο χώρο μεταξύ των δύο αγώγιμων πλακών απέραντης έκτασης, που φαίνονται στο Σχ.Α5, υπάρχει φορτίο με χωρική πυκνότητα

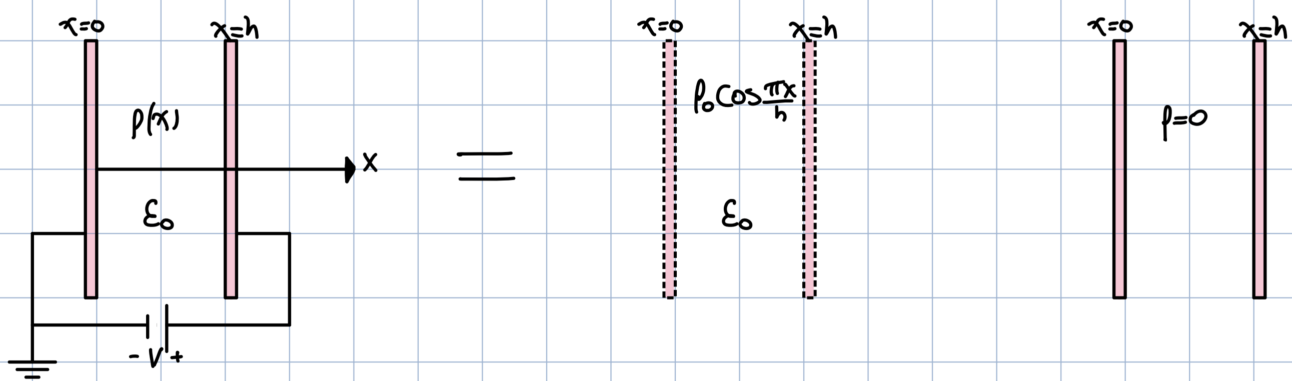
Σχήμα Α5

$$\rho(x)=\rho_0\cos\frac{\pi x}{h}$$

Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό μεταξύ των πλακών, εάν δίνεται ότι

$$\Phi(x=0)=0 \text{ και } \Phi(x=h)=V$$

Λύση με επαλληλία (πιο γενικός τρόπος, αν έχουμε περισσότερες διαστάσεις)



$$\nabla^2\Phi=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)$$

(Μερική λύση)

$$\nabla^2\Phi_\mu=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)$$

(Laplace)

$$\nabla^2\Phi_0=0$$

$$\Phi_\mu=C_\mu\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)$$

$$\Phi=\Phi_\mu+\Phi_0$$

$$\frac{d^2\Phi_\mu}{dx^2}=-C_\mu\frac{\pi^2}{h^2}\cancel{\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)}=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cancel{\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)} \Leftrightarrow C_\mu=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{h^2}{\pi^2}$$

άρα $\Phi_\mu=\dfrac{\rho_0 h^2}{\varepsilon_0\pi^2}\cos\left(\dfrac{\pi x}{h}\right)$

για $x=0$ $\quad \varphi_{\mu}=\frac{\rho_0 h^2}{\varepsilon_0 \pi^2}$

$x=h$ $\quad \varphi_{\mu}=-\frac{\rho_0 h^2}{\varepsilon_0 \pi^2}$

έχοντας αυτά, για να βρω την Laplace μπορώ να χρησιμοποιήσω ότι $\varphi(x=0)=0$ και $\varphi(x=h)=V$, άρα

$\varphi_0(x=0)=-\frac{\rho_0 h^2}{\varepsilon_0 \pi^2}$ και $\varphi_0(x=h)=V+\frac{\rho_0 h^2}{\varepsilon_0 \pi^2}$

$$\nabla^2 \varphi_0=0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi_0}{dx^2}=0 \Rightarrow \varphi_0=Ax+B$$

$$\varphi_0(x=0)=B=-\frac{\rho_0 h^2}{\varepsilon_0 \pi^2} \qquad \varphi_0(x=h)=Ah-\frac{\rho_0 h^2}{\varepsilon_0 \pi^2}=V+\frac{\rho_0 h^2}{\varepsilon_0 \pi^2}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{V}{h}+\frac{2\rho_0 h}{\varepsilon_0 \pi^2}$$

Άρα $\varphi_0=\left(\frac{V}{h}+\frac{2\rho_0 h}{\varepsilon_0 \pi^2}\right)x-\frac{\rho_0 h^2}{\varepsilon_0 \pi^2}$

$$\boxed{\varphi=\frac{\rho_0 h^2}{\varepsilon_0 \pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)+\left(\frac{V}{h}+\frac{2\rho_0 h}{\varepsilon_0 \pi^2}\right)x-\frac{\rho_0 h^2}{\varepsilon_0 \pi^2}}$$

Επειδή έχουμε μόνο ένα άξονα (στους άλλους δύο υπάρχει ανεξαρτησία) μπορούμε να το λύσουμε απευθείας:

Δεύτερος τρόπος:

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right) \Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{dx^2}=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)$$

$$\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)\cdot\frac{h}{\pi}+A$$

$$\varphi=\frac{\rho_0 . h^2}{\varepsilon_0 . \pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)+Ax+B$$

με την χρήση $\begin{matrix}\varphi(x=0)=0\\ \varphi(x=h)=V\end{matrix}$ μπορούμε να βρούμε τα A και B