ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Β', ΤΜΗΜΑ Ρ—Ω, ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2022–2023

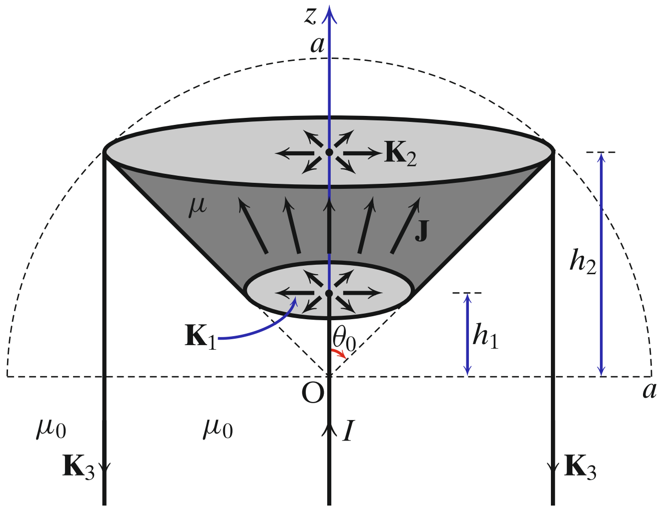
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ ΖΟΥΡΟΣ

5η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μαγνητοστατικά πεδία, Μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό, Αυτεπαγωγή

Άσκηση 1

Η εκ περιστροφής διάταξη του διπλανού σχήματος αποτελείται από έναν κόλουρο κώνο ο οποίος προκύπτει από την τομή της κωνικής επιφάνειας $\theta = \theta_0$ με τα επίπεδα $z = h_1$ και $z = h_2$. Το υλικό του κόλουρου κώνου έχει διαπερατότητα μ ενώ ο υπόλοιπος χώρος μ_0. Το άνω τμήμα του κώνου εφάπτεται ημισφαιρίου ακτίνας a, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Στο κέντρο της κυκλικής βάσης του κώνου που βρίσκεται στο επίπεδο $z = h_1$, προσάγεται ηλεκτρικό ρεύμα I από το $z \to -\infty$, μέσω λεπτού συρματόμορφου αγωγού ο οποίος βρίσκεται στον άξονα z. Κατόπιν, το ρεύμα μετατρέπεται σε επιφανειακή πυκνότητα $\mathbf{K}_1$ (στην κυκλική βάση του κώνου με $z = h_1$), σε χωρική πυκνότητα $\mathbf{J}$ (στον όγκο του κώνου), και σε επιφανειακή πυκνότητα $\mathbf{K}_2$ (στην κυκλική βάση του κώνου με $z = h_2$). Τέλος, το ρεύμα επιστρέφει στο $z \to -\infty$ μέσω της επιφανειακής πυκνότητας $\mathbf{K}_3$ που βρίσκεται σε κυλινδρική επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α') Να υπολογιστεί η χωρική πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J} = J(r)\hat{r}$.

(β') Να υπολογιστεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου και η μαγνητική επαγωγή, παντού στο χώρο.

(γ') Να υπολογιστούν οι επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος $\mathbf{K}_{1,2,3}$.

Άσκηση 2

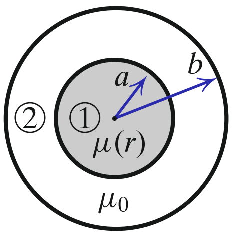
Αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα επαλληλίας για το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{d\boldsymbol{\ell}'}{R},$$

λόγω ροής ρεύματος σε λεπτό συρματόμορφο αγωγό, ικανοποιεί τη συνθήκη Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$.

Άσκηση 3

Η κυλινδρική διάταξη του διπλανού σχήματος έχει απέραντο μήκος κατά τον άξονα z. Ο εσωτερικός αγωγός ακτίνας a (περιοχή 1) έχει ανομοιογενή διαπερατότητα $\mu(r) = 2\mu_0/[1 + (r/a)^4]$. Ο εξωτερικός αγωγός αμελητέου πάχους, έχει ακτίνα b, ενώ η ενδιάμεση περιοχή 2 έχει διαπερατότητα μ_0. Ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I ρέει ομοιόμορφα (με σταθερή πυκνότητα) στον εσωτερικό αγωγό και επιστρέφει από τον εξωτερικό.



(α') Να υπολογιστεί ο συνολικός συντελεστής αυτεπαγωγής (υπολογίζοντας πρώτα τους συντελεστές εσωτερικής και εξωτερικής αυτεπαγωγής) ανά μονάδα μήκους της διάταξης, μέσω υπολογισμού της πεπλεγμένης μαγνητικής ροής.

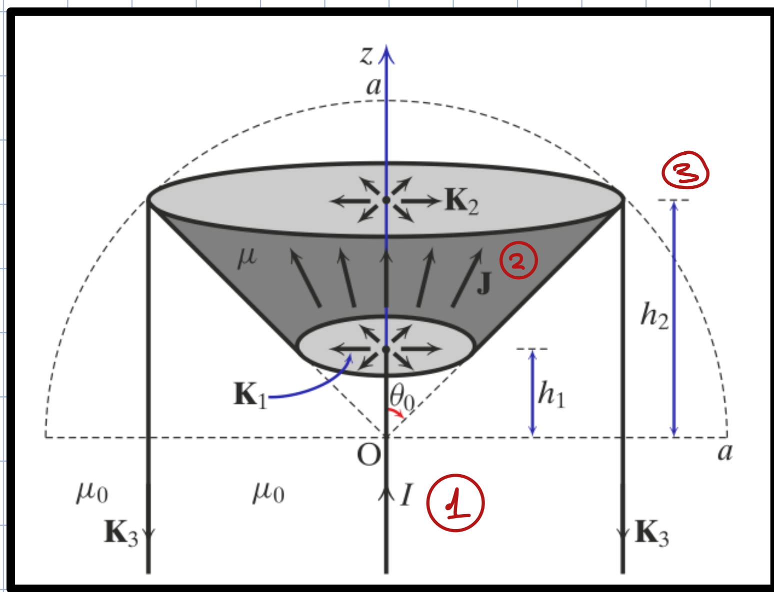
(β') Επαληθεύστε το αποτέλεσμα (α') μέσω της μαγνητοστατικής ενέργειας.

5^{η} Σειρά Ασκήσεων

Χριστόδουλος Στυλιανίδης

ΑΜ: el20614

Άσκηση 1:



(a) $I = \int_S \vec{J}\, d\vec{S} =$

$$= \int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} J(r)\, r^2 \sin\theta \, d\theta\, d\varphi =$$

$$2\pi r^2 J(r)(1-\cos\theta_0) \Rightarrow$$

$$J_r(r) = \frac{I}{2\pi r^2(1-\cos\theta_0)}$$

(β) Εννοείται και το $\vec{H}$ και το $\vec{B}$ έχουν μόνο διεύθυνση στο $\hat{\varphi}$, $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}=0\right)$

Περιοχή 1: (για $z<h_1$) (κ r τ.ω. να μην συμπεριλαμβάνει το K_3) χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων, άρα

$$\left.\begin{aligned} \oint H_1 dl_1 &= I \\ 2\pi r_T H_1 &= I \end{aligned}\right\} \vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi r_T}, \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_T}$$

Περιοχή 2: (για $h_1<z<h_2$, $\theta<\theta_0$)

$$\oint \vec{H}_2 d\vec{l} = \int \vec{J} d\vec{S} \Rightarrow 2\pi r \sin\theta\, \vec{H}_2 = \int_0^{\theta}\int_0^{2\pi} \frac{I\, \cancel{r^2} \sin\theta}{2\pi \cancel{r^2}(1-\cos\theta_0)}\, d\theta\, d\varphi$$

$$2\pi r\sin\theta\, \vec{H}_2 = I\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta_0)} \Rightarrow \vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi r\sin\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta_0}, \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu I}{2\pi r\sin\theta}\,\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta_0}$$

Περιοχή 3: (για $r>a$
ή $z>h_2$
ή $z<0$ με r τ.ω. να συμπεριλαμβάνει το K_3)

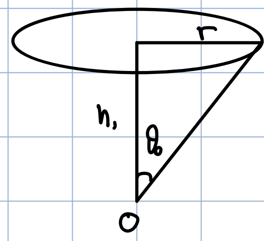
$$\vec{H}_3 = \vec{B}_3 = 0$$

(γ) $\vec{H}_2 = \dfrac{I}{2\pi r \sin\theta}\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta_0}$ (σφαιρικές), $\vec{H}_1 = \dfrac{I}{2\pi r_T}$ (κυλινδρικές)

$\hat{z}\times\hat{\varphi} = -\hat{r}_T$

$$\vec{K}_1 = \hat{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \hat{z}\times\hat{\varphi}\left(\frac{I(1-\cos\theta)}{2\pi r\sin\theta(1-\cos\theta_0)} - \frac{I}{2\pi r\sin\theta}\right)$$

$$= -\hat{r}_T\frac{I}{2\pi r\sin\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta_0} - 1\right)$$, για $\vec{K}_1$ έχουμε $r = h_1\tan\theta_0$



άρα $$\vec{K}_1(\theta) = \frac{I}{2\pi h_1\tan\theta_0\sin\theta}\left(1 - \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta_0}\right)\hat{r}_T$$

$$\vec{K}_2 = \hat{z}\times\left(\cancelto{0}{\vec{H}_3} - \vec{H}_2\right) = \hat{z}\times\hat{\varphi}\left(-\frac{I}{2\pi r\sin\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta_0}\right)$$
$$= \frac{I}{2\pi r\sin\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta_0}\,\hat{r}_T$$

όπου για $\vec{K}_2$, $r = h_2\tan\theta_0$

$$\vec{K}_2(\theta) = \frac{I}{2\pi h_2\tan\theta_0\sin\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta_0}\,\hat{r}_T$$

για $r_T = h_2\tan\theta_0$ (ακτίνα κυλίνδρου που ρέει το K_3)

$$\vec{K}_3 = \hat{r}_T\times\left(\cancelto{0}{\vec{H}_3} - \vec{H}_1\right) = \hat{r}_T\times\hat{\varphi}\left(-\frac{I}{2\pi h_2\tan\theta_0}\right)$$, άρα:

$$\vec{K}_3 = -\frac{I}{2\pi h_2\tan\theta_0}\,\hat{z}$$

Άσκηση 2:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi}\vec{\nabla}\oint_c \frac{d\vec{l}'}{\vec{R}} = \frac{\mu I}{4\pi}\oint \vec{\nabla}\cdot\frac{d\vec{l}'}{\vec{R}}$$

Ισχύει ότι $\quad \vec{\nabla}\cdot\frac{1}{\vec{R}} = -\vec{\nabla}'\frac{1}{\vec{R}}$

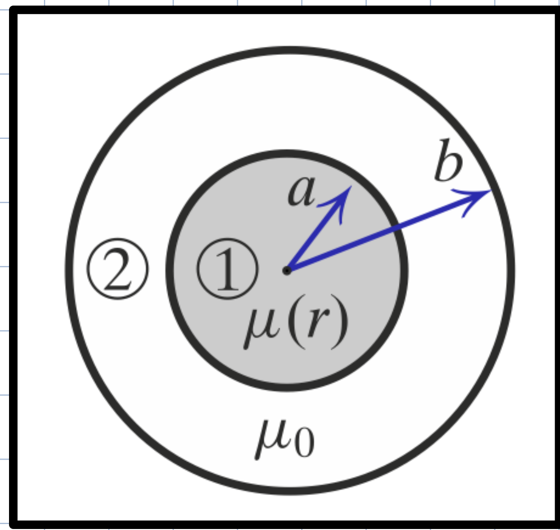
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu I}{4\pi}\oint \vec{\nabla}'\cdot\frac{1}{\vec{R}}d\vec{l}' = -\frac{\mu I}{4\pi}\left[\cancelto{0}{\left(\frac{1}{\vec{R}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}} - \oint_c \cancelto{0}{(\nabla'\cdot 1)}\frac{1}{\vec{R}'}d\vec{l}'\right]$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = 0$$

Άρα ικανοποιείται η σχέση Coulomb $\nabla\cdot A(r) = 0$

Άσκηση 3:

$$\mu(r) = \frac{2\mu_0}{1+\left(\frac{r}{a}\right)^4}$$



ΚΥΛΙΝΔΡΟΙ

Ισχύει ότι

$$B_\varphi = \begin{cases} \dfrac{\mu(r) I r}{2\pi a^2}, & 0 \leq r < a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}, & a < r < b \end{cases}$$

(a) Περιοχή 1:

η $\Psi_{\mu,\varepsilon\sigma}$ προκαλείται από το I και το $I(r) \sim \left(\frac{r^2}{a^2}\right)$

$$d\Psi_{\mu,\varepsilon\sigma}(r) = B_\varphi(r)\,dr = \frac{\mu(r) I}{2\pi a^2} r\,dr$$

$$d\Psi_{\varepsilon\sigma}(r) = \left(\frac{r^2}{a^2}\right) d\Psi_{\mu,\varepsilon\sigma}(r) \Rightarrow \Psi_{\varepsilon\sigma} = \int_{r=0}^{a} \frac{I}{\cancel{2}\pi \cancel{a^4}} \cdot \frac{\cancel{2}\cancel{a^4}\mu_0}{a^4+r^4} r^3\,dr = \frac{I\mu_0}{4\pi}\int_{r=0}^{a} \frac{4r^3}{r^4+a^4}\,dr$$

$$= \frac{I\mu_0}{4\pi} \ln\left(r^4+a^4\right)\Big|_{r=0}^{a} = \frac{I\mu_0}{4\pi}\left[\ln\left(2a^4\right) - \ln\left(a^4\right)\right] = \frac{I\mu_0 \ln 2}{4\pi},$$

$$L_{\varepsilon\sigma,\mu} = \frac{\Psi_{\mu,\varepsilon\sigma}}{I} \Rightarrow L_{\varepsilon\sigma,\mu} = \frac{\mu_0 \ln(2)}{4\pi}$$

Περιοχή 2:

$$\Psi_{m,\varepsilon\xi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{1}{r}\,dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(b/a) \Longrightarrow L_{\varepsilon\xi,\mu} = \frac{\mu_0 \ln(b/a)}{2\pi}$$

Ο συνολικός συντελεστής αυτεπαγωγής ανά μονάδα μέτρησης του z

$$L_\mu = L_{\varepsilon\sigma,\mu} + L_{\varepsilon\xi,\mu} = \frac{\mu_0 \ln(b/a)}{2\pi} + \frac{\mu_0 \ln 2}{4\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot \ln\left(2\frac{b^2}{a^2}\right)$$

(β) αγνοώ το dz αφού θέλω το αποτέλεσμα ανά μονάδα μήκους του z

$$W_{m,\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2}\int_V \frac{|\vec{B}_1|^2}{\mu(r)}dV = \frac{1}{2}\int_{r=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\frac{I\cdot r}{2\pi a^2}\right)^2 \frac{2a^4\mu_0}{r^4+a^4}\, r\,dr\,d\varphi$$

$$W_{m,\varepsilon\sigma,\mu} = \frac{1}{2}\int_{r=0}^{a}\frac{I^2 r^2}{\cancel{4}\pi^{\cancel{2}}\cancel{a^4}}\cdot\frac{\cancel{2}\cancel{a^4}\mu_0}{r^4+a^4}\,\cancel{2\pi} r\,dr = \frac{I^2\mu_0}{2\pi}\int_0^a \frac{r^3}{r^4+a^4}dr = \frac{I^2\mu_0}{2\pi}\cdot\left.\frac{\ln(r^4+a^4)}{4}\right|_{r=0}^{a}$$

$$= \frac{I^2\mu_0}{8\pi}\left[\ln(2a^4) - \ln(a^4)\right] = \frac{\mu_0\ln(2) I^2}{8\pi}, \quad W = \tfrac{1}{2}LI^2, \text{ άρα } L = \frac{2W}{I^2}$$

$$L_{\varepsilon\sigma,\mu} = \frac{\mu_0 \ln(2)}{4\pi}$$

(ανά μονάδα μήκους του άξονα z)

$$W_{m,\varepsilon\xi} = \frac{1}{2}\int_V \frac{|\vec{B}_2|^2}{\mu_0}dV = \frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2\cdot\mu_0\, r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{r=a}^{b}\frac{I^2}{2\pi r}\cdot\mu_0\,dr$$

$$= \frac{I^2\mu_0 \ln(b/a)}{4\pi}, \quad L = \frac{2W}{I^2}, \quad L_{\varepsilon\xi,\mu} = \frac{\mu_0\ln(b/a)}{2\pi}$$

Άρα όντως τα αποτελέσματα είναι τα ίδια