Ενέργεια στο ηλεκτροστατικό πεδίο

Έχουμε ένα σημειακό φορτίο από το άπειρο στην θέση που έχει

q_1 , $W_{e_1} = 0$

Αν φέρουμε από το άπειρο (μαθηματικό άπειρο) ένα q_2

$q_1 \quad q_2$

$$W_{e_2} = q_2 \varphi_{12}$$

ποιο φορτίο φέρνουμε

ποιο φορτίο το δημιουργεί

Αν φέρουμε ένα τρίτο φορτίο από το άπειρο τότε:

$q_1 \quad q_2$

q_3

$$W_{e_3} = q_3(\varphi_{13} + \varphi_{23}) \Rightarrow W_e = W_{e_1} + W_{e_2} + W_{e_3}$$

$$= 0 + q_2\varphi_{12} + q_3(\varphi_{13} + \varphi_{23}) \quad (1)$$

Έστω ότι πρώτα έχουμε το q_3, μετά το q_2 και τελευταίο το q_1

$$\left.\begin{array}{l} W'_{e_3} = 0 \\ W'_{e_2} = q_2 \varphi_{32} \\ W'_{e_1} = q_1(\varphi_{21} + \varphi_{31}) \end{array}\right\} W_e = q_2\varphi_{32} + q_1(\varphi_{21} + \varphi_{31}) \quad (2)$$

ίδιο με το προηγούμενο αφού τα φορτία στο τέλος είναι στην ίδια θέση.

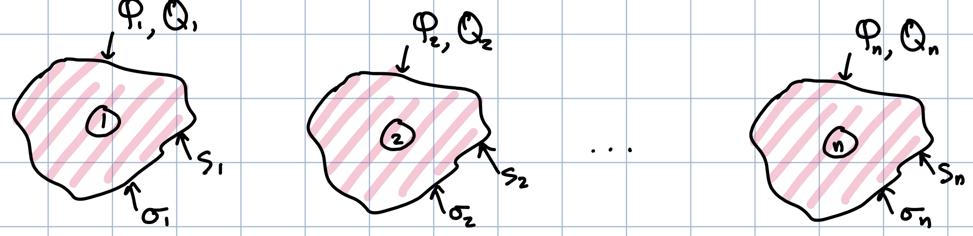
$$(1)+(2) \Rightarrow W_e = \frac{1}{2}\left[q_1(\varphi_{21}+\varphi_{31}) + q_2(\varphi_{12}+\varphi_{32}) + q_3(\varphi_{13}+\varphi_{23})\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i \varphi_i$$

Για n φορτία: $W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i \quad (3)$

Για κατανομή φορτίων: $W_e = \frac{1}{2}\int_{\text{σε όλα τα φορτία}} \varphi \, dq \quad (4)$, $dq = \rho dV, \sigma dS, \lambda dl$

(Υπάρχει ένας άλλος τρόπος απόδειξης με τον τύπο $W_e = \int_0^{\vec{D}} \vec{E} \, d\vec{D}'$)

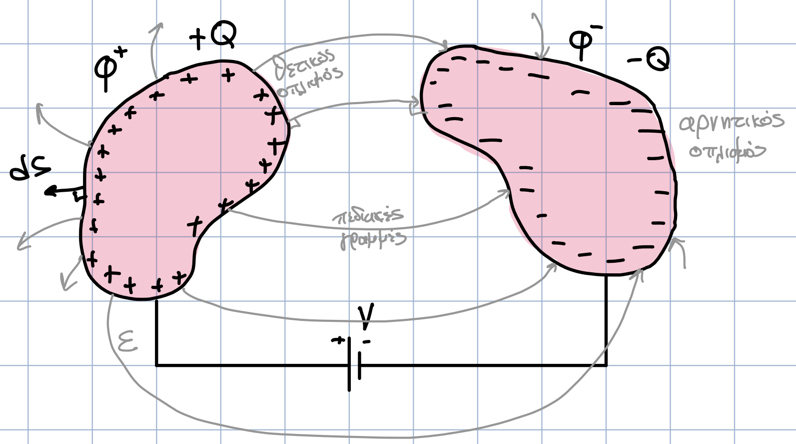
Ηλεκτροστατική ενέργεια συστήματος φορτισμένων αγωγών



$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i}\varphi_i\sigma_i\, dS_i \Rightarrow \boxed{W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i Q_i}$$

Για γραμμικά κ ισοτροπικά υλικά ισχύει $W_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}$

Παράδειγμα 3 (σελίδα 78)

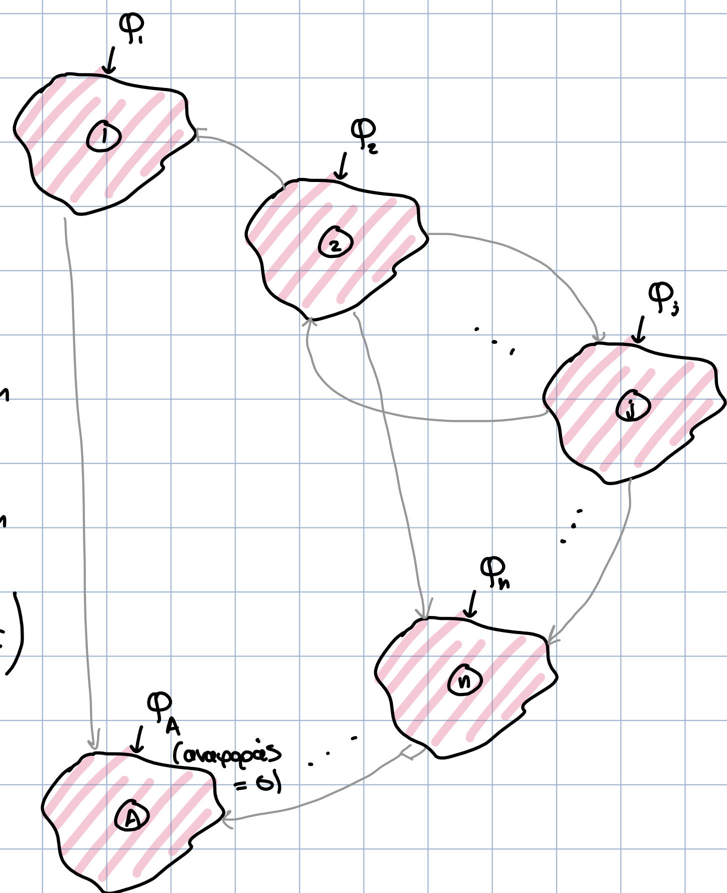


$$(5) \Rightarrow W_e = \frac{1}{2}\left(Q\varphi^+ - Q\varphi^-\right) = \frac{1}{2}Q\left(\varphi^+ - \varphi^-\right) = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W_e = \frac{Q^2}{2C}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \varepsilon \vec{E}\, d\vec{s}}{\int_+^- \vec{E}\, d\vec{\ell}} = \frac{\oint_S \sigma_+ dS}{\int_+^- \vec{E}\, d\vec{\ell}}$$

Συστήματα χωρητικοτήτων (σελ 93)



$$\Phi_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + \dots + P_{1j}Q_j + \dots + P_{1n}Q_n$$
$$\Phi_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + \dots$$
$$\vdots$$
$$\Phi_j = P_{j1}Q_1 + P_{j2}Q_2 + \dots + P_{jj}Q_j + \dots + P_{jn}Q_n$$
$$\vdots$$
$$\Phi_n = P_{n1}Q_1 + P_{n2}Q_2 + \dots + P_{nj}Q_j + \dots + P_{nn}Q_n$$

(P_{ij}) = συντελεστές δυναμικού $\left(F^{-1} = \frac{1}{F}\right)$

Ιδιότητες συντελεστών δυναμικού

α) Ισχύει ότι $P_{ij} \geq 0$

Έστω ότι $Q_j > 0$ & $Q_i = 0,\ i \neq j \Rightarrow \Phi_i = P_{ij}Q_j \geq 0 \Rightarrow P_{ij} \geq 0$ αφού $Q_j > 0$

$\Phi_j = P_{jj}Q_j$

β) Ισχύει ότι $\boxed{P_{jj} \geq P_{ij}}$ $\qquad \Phi_j \geq \Phi_i \Rightarrow P_{jj}Q_j \geq P_{ij}Q_j$

$$P_{jj} \geq P_{ij}$$

γ) Ισχύει ότι $\boxed{P_{ij} = P_{ji}}$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_j \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \cdots P_{ij} \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & \cdots & \\ \vdots & & \\ P_{j1} & P_{j2} & P_{jn} \\ \vdots & \vdots & \\ P_{n1} & P_{n2} \;\dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_j \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \Rightarrow [\Phi] = [P][Q]$$

Συντελεστές χωρητικότητας και συντελεστές επαγωγής

$$[Q] = [P]^{-1}[\Phi] = [C][\Phi] \longrightarrow \begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\Phi_1 + \cdots + C_{1j}\Phi_j + \cdots + C_{1n}\Phi_n \\ Q_2 &= \cdots \\ &\vdots \\ Q_j &= C_{j1}\Phi_1 + \cdots + C_{jj}\Phi_j + \cdots + C_{jn}\Phi_n \\ &\vdots \\ Q_n &= C_{n1}\Phi_1 + \cdots + C_{nj}\Phi_j + \cdots + C_{nn}\Phi_n \end{aligned}$$

$$[C] = [P]^{-1}$$

Ιδιότητες των C_{ii}, C_{ij}

C_{ii} = συντελεστές χωρητικότητας

C_{ij} = συντελεστές επαγωγής

α) $C_{ij} = C_{ji}$

β) $C_{jj} > 0$ κ $C_{ij} \leq 0$, $i \neq j$ $\xRightarrow{\text{απόδειξη}}$ Έστω $\Phi_j > 0$ κ $\Phi_i = 0$, $i \neq j$

$Q_j = C_{jj}\Phi_j > 0 \Rightarrow C_{jj} > 0$

$Q_i = C_{ij}\Phi_j \leq 0 \Rightarrow C_{ij} \leq 0$

γ) Ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{n} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} C_{ji} \geq 0$ $\xRightarrow{\text{απόδειξη}}$ από τον πίνακα $[Q]=[C][\Phi]$

αθροίζω κατά στήλη:

$\sum_{i=1}^{n} Q_i = \Phi_j \sum_{i=1}^{n} C_{ij} > 0$

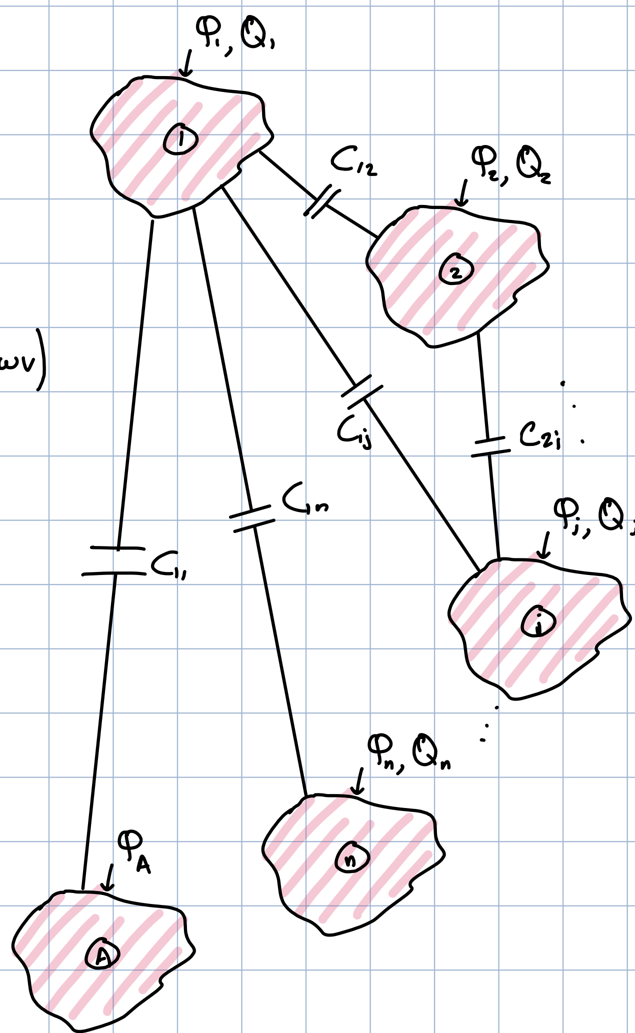
αφού το $\Phi_j > 0$, τότε $\sum_{i=1}^{n} C_{ij} > 0$

Μερικές χωρητικότητες

$$Q_j = c_{j1}(\varphi_1-\varphi_j) + C_{j2}(\varphi_2-\varphi_j) + \dots + \underbrace{(C_{j1}+C_{j2}+\dots+C_{jn})}_{C_{jj}}\varphi_j + \dots + C_{jn}(\varphi_n-\varphi_j)$$

Θέτουμε
$$\left.\begin{aligned} C_{ij} &= -c_{ij} \\ C_{jj} &= \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \end{aligned}\right\} \text{Μερικές χωρητικότητες } (F)$$

$$Q_j = C_{j1}(\varphi_j-\varphi_1) + C_{j2}(\varphi_j-\varphi_2) + \dots + C_{jj}\varphi_j + \dots + C_{jn}(\varphi_j-\varphi_n)$$

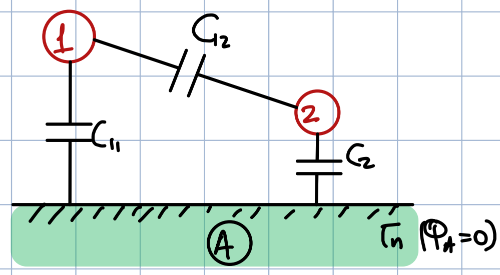


$\frac{n(n+1)}{2} = \#(\text{μερικών χωρητικοτήτων})$

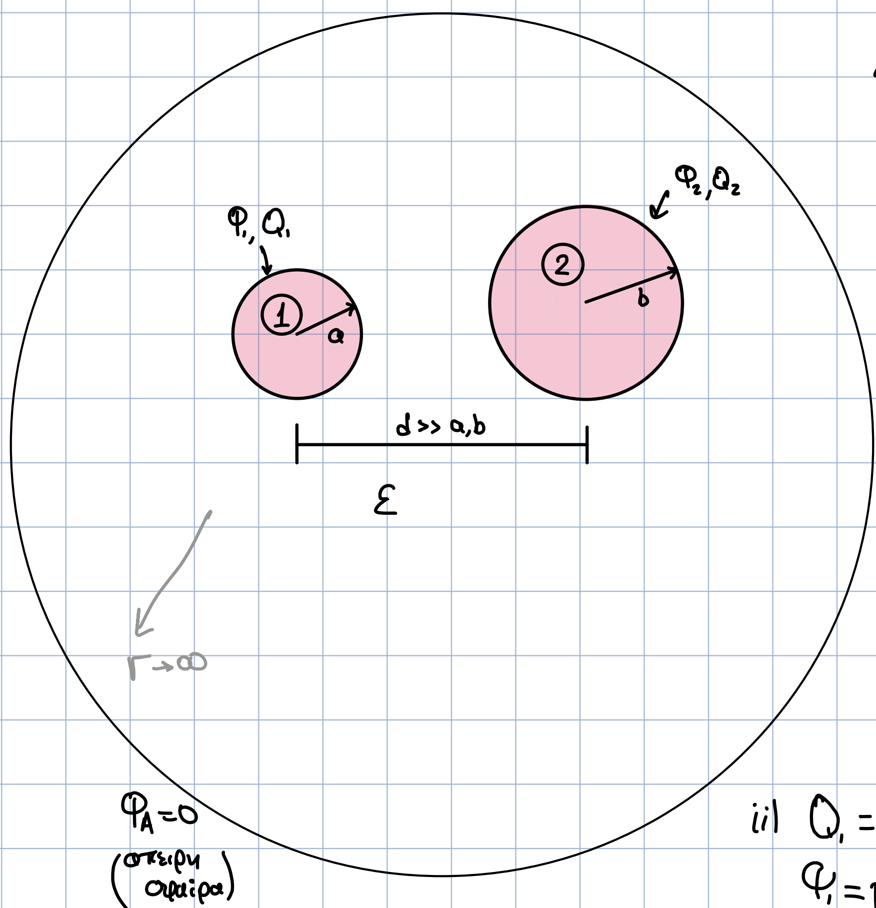
C_{11} = χωρητικότητα λειτουργίας

Χωρητικότητα δει ζευγάριος

$$C_{1,1A} = C_{11} + \frac{C_{12}C_{22}}{C_{12}+C_{22}}$$



Παράδειγμα 4 (σελίδα 107)



$[P], [C], C_1, C_2 = ;$

$$\varphi_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2$$
$$\varphi_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2$$

i) Για $Q_1 \neq 0$, $Q_2 = 0$

$$\varphi_1 = P_{11}Q_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon a} \Rightarrow P_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon a}$$

$$\varphi_2 = P_{21}Q_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon d} \Rightarrow P_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon d}$$

ii) $Q_1 = 0$, $Q_2 \neq 0$

$$\varphi_1 = P_{12}Q_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon d} \Rightarrow P_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon d} = P_{21}$$

$$\varphi_2 = P_{22}Q_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon b} \Rightarrow P_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon b}$$

$$[P] = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{b} \end{bmatrix}, \quad [C] = [P^{-1}] = 4\pi\varepsilon \frac{1}{\det(c)}\begin{bmatrix} \frac{1}{b} & -\frac{1}{d} \\ -\frac{1}{d} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} = 4\pi\varepsilon ab\begin{bmatrix} \frac{1}{b} & -\frac{1}{d} \\ -\frac{1}{d} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} C_{11} &= 4\pi\varepsilon a \\ C_{12} &= -4\pi\varepsilon \frac{ab}{d} = C_{21} \\ C_{22} &= 4\pi\varepsilon b \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_{12} &= -C_{12} = 4\pi\varepsilon \frac{ab}{d} = C_{21} \\ C_{11} &= C_{11} + C_{12} = 4\pi a\varepsilon - \cancel{4\pi\varepsilon \frac{ab}{d}}^{\to 0} \simeq 4\pi\varepsilon a \\ C_{22} &= C_{21} + C_{22} = -4\pi\varepsilon \frac{ab}{d} + 4\pi\varepsilon b \simeq 4\pi\varepsilon b \end{aligned}$$