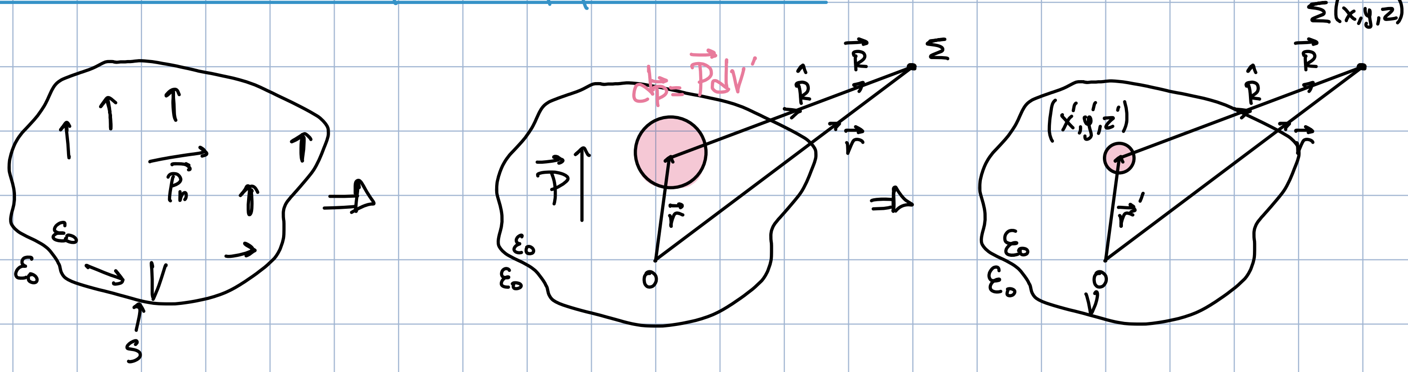
Πόλωση διηλεκτρικών υλικών - φορτία πόλωσης (σελ. 140)



$$\Delta\vec{p} = \sum_n \vec{p}_n \qquad d\Phi_\Sigma = \frac{\vec{p}\,\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad \frac{\hat{R}}{R^2} = \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \ (3)$$

$$\vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V} \ (1)$$: πόλωση του διηλεκτρικού υλικού

$$\vec{P} : \left(\frac{C}{m^2}\right)$$

$$\Phi_{P\Sigma} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{d\vec{p}\cdot\hat{R}}{R^2} \overset{(1)}{=}$$

$$\Phi_{P\Sigma} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}\hat{R}}{R^2}dV' \ (2)$$

$$\nabla' = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x'} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y'} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

Από (2), (3) $\Rightarrow$ $$\frac{\vec{P}\hat{R}}{R^2} \overset{(3)}{=} \vec{P}\,\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{-\nabla'\vec{P}}{R} + \nabla'\left(\frac{\vec{P}}{R}\right) \ (4)$$

(2), (4) $\Rightarrow$ $$\Phi_{P\Sigma} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \frac{-\nabla'\vec{P}}{R}dV' + \int_V \nabla'\left(\frac{\vec{P}}{R}\right)dV'\right] \overset{\text{Θ. Gauss}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \frac{-\nabla'\vec{P}}{R}dV' + \oint_S \frac{\vec{P}}{R}d\vec{S}'\right]$$

$$\Phi_{P\Sigma} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \frac{-\nabla'\vec{P}}{R}dV' + \oint_S \frac{\hat{n}\cdot\vec{P}}{R}d\vec{S}'\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \frac{\rho_p dV'}{R} + \oint_S \frac{\sigma dS'}{R}\right]$$

$$\rho_p = -\nabla\vec{P}$$
$$\sigma_p = \hat{n}\cdot\vec{P}$$

$$\Phi_{P\Sigma} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \frac{\mathrm{P}\rho dV'}{R} + \oint_S \frac{\sigma dS'}{R}\right]$$

(αν είχαμε και ελεύθερα φορτία)

$$\Phi = \Phi_q + \Phi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_q}\frac{dq}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \frac{\rho_p dV'}{R} + \oint \frac{\sigma_p dS'}{R}\right]$$

Φ_q: ελεύθερα φορτία; Φ_p: φορτία πόλωσης; V_q: σε όλα τα φορτία

$$Q_{p,\text{συνολικό}} = 0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_q} dq\,\frac{\hat{R}}{R^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \rho_p dV'\frac{\hat{R}}{R^2} + \oint \frac{\hat{n}\cdot\vec{P}}{R^2}\hat{R}dS\right]$$

V_q: σε όλα τα φορτία

Οι πεδιακές εξισώσεις στα διηλεκτρικά υλικά $\left(\frac{d}{dt}=0\right)$ (σελ 147)

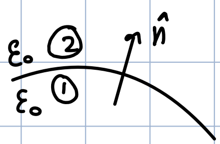
$$\vec{E}=\frac{\vec{F_e}}{q}$$

$$\oint_C \vec{E}\,d\vec{l}=0 \quad (1)$$

$$\oint_S \varepsilon_0\vec{E}\,d\vec{S}=\int_V \rho\,dV+\int_V \rho_p\,dV=Q_{\varepsilon\sigma}+Q_{p,\varepsilon\sigma} \quad (2)$$

$$\nabla\times\vec{E}=0$$

$$\nabla(\varepsilon_0\vec{E})=\rho+\rho_p=\rho-\nabla\vec{P} \quad (3)$$



$$\hat{n}\times(\vec{E_2}-\vec{E_1})=0$$

$$\hat{n}\cdot(\varepsilon_0\vec{E_2}-\varepsilon_0\vec{E_1})=\sigma+\sigma_p=\sigma+\sigma_{p_1}+\sigma_{p_2}=\sigma+\hat{n}\,\vec{P_1}-\hat{n}\,\vec{P_2}=\sigma+\hat{n}\left(\vec{P_1}-\vec{P_2}\right) \quad (4)$$

$$(3)\Rightarrow\nabla\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)=\rho\Rightarrow\nabla\vec{D}=\rho \qquad \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \quad (5)$$

$$(4)\Rightarrow\hat{n}\left[\left(\varepsilon_0\vec{E_2}+\vec{P_2}\right)-\left(\varepsilon_0\vec{E_1}+\vec{P_1}\right)\right]=\sigma\Rightarrow\hat{n}\cdot\left(\vec{D_2}-\vec{D_1}\right)=\sigma$$

$$\nabla\times\vec{E}=0\overset{(5)}{\Rightarrow}\nabla\times\frac{\vec{D}-\vec{P}}{\varepsilon_0}=0\Rightarrow\nabla\times\vec{D}=\nabla\times\vec{P}$$

$$\hat{n}\times(\vec{E_2}-\vec{E_1})=0\overset{(5)}{\Rightarrow}\hat{n}\times\left(\frac{\vec{D_2}-\vec{P_2}}{\varepsilon_0}-\frac{\vec{D_1}-\vec{P_1}}{\varepsilon_0}\right)=0\Rightarrow\hat{n}\times\left(\vec{D_2}-\vec{D_1}\right)=\hat{n}\times\left(\vec{P_2}-\vec{P_1}\right)$$

Συνηθισμένα διηλεκτρικά υλικά

$$\vec P = \varepsilon_0 \chi_e \vec E \quad (6)$$

χ_e: ηλεκτρική δεκτικότητα

$$(5,6) \Rightarrow \vec D = \varepsilon_0\vec E + \varepsilon_0\chi_e \vec E = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi_e)}_{\varepsilon_r} \vec E = \underbrace{\varepsilon_0\varepsilon_r}_{\varepsilon}\vec E = \varepsilon \vec E$$

ε_r σχετική επιτρεπτότητα

ε: επιτρεπτότητα

$$(5) \Rightarrow \vec P = \vec D - \varepsilon_0 \vec E = (\varepsilon-\varepsilon_0)\vec E = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\vec D$$

Για το νερό H_2O: $\varepsilon_r = 80,1$ έως την μικροκυματική περιοχή

: $\varepsilon_r = 1,75$ στις οπτικές συχνότητες

Δείκτης διάθλασης: $\dfrac{c_0}{c} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$

c_0 ← ταχύτητα φωτός κενό

c ← ταχύτητα φωτός στο υλικό

μ_r ← μαγνητικό, θα το δούμε σε επόμενο κεφάλαιο

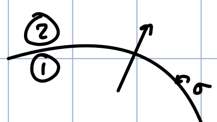
Πεδιακές εξισώσεις στα συνηθισμένα διηλ. υλικά

$$\oint_C \vec E\, d\vec l = 0$$

$$\oint_S \vec D\, d\vec S = \int_V \rho\, dv = Q_{\varepsilon\sigma}$$

$$\nabla\times\vec E = 0 \Rightarrow \vec E = -\nabla\varphi$$

$$\nabla \vec D = \rho$$



$$\hat n \times(\vec E_2 - \vec E_1) = 0$$

$$\hat n\cdot(\vec D_2-\vec D_1) = \sigma$$

$$\nabla(\varepsilon\vec E) = -\nabla(\varepsilon\nabla\varphi) = \rho$$

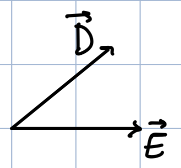
$$\nabla(\varepsilon\nabla\varphi) = -\rho$$, Αν ε=σταθ

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{Poisson}$$

$$\nabla(\varepsilon_0\vec E) = \rho + \rho_p = \rho - \nabla\cdot\vec P$$

$$-\varepsilon_0\nabla(\nabla\varphi) = \rho - \nabla\vec P \Rightarrow \nabla^2\varphi = \frac{-\rho - \nabla\vec P}{\varepsilon_0}$$

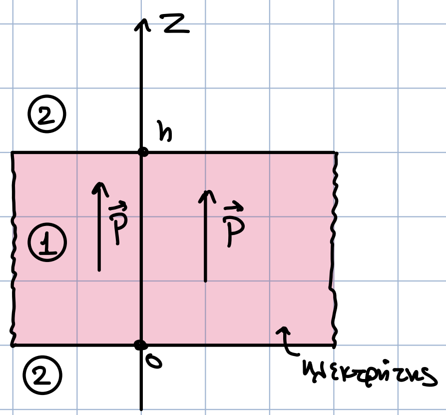
Ανισοτροπικά Υλικά



$$D_x = \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z$$
$$D_y = \varepsilon_{yx}E_y + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_y$$
$$D_z = \varepsilon_{zx}E_z + \varepsilon_{zy}E_z + \varepsilon_{zz}E_z$$

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (σελ 154)



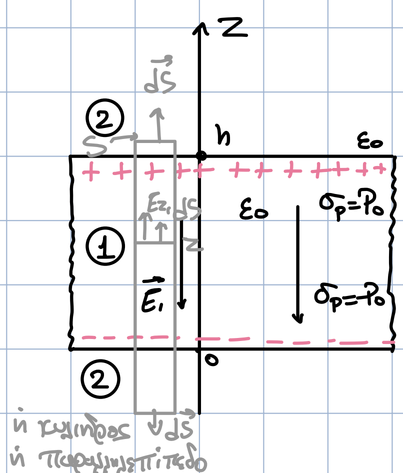
a) $\vec P = P_0 \hat z$
$\vec E, \vec D = ;$

$$\frac{d}{dx} = 0 = \frac{d}{dy}$$

$$\vec P_2 \simeq 0 \Rightarrow \rho_{p_2} = -\nabla \vec P_2 = 0$$

περιοχή ① $\rho_{p_1} = -\nabla \vec P = -\frac{dP_0}{dz} = 0$

$$\sigma_p(z=0) = \hat n \cdot \vec P = -\hat z (P_0 \hat z) = -P_0$$
$$\sigma_p(z=h) = \hat z (P_0 \hat z) = P_0$$



$$\nabla(\varepsilon_0 \vec E) = \rho - \nabla \vec P$$
$$\int \nabla(\varepsilon_0 \vec E) dV = \int_V \rho dV - \int_V \nabla \vec P dV$$
$$\oint_S \varepsilon_0 \vec E d\vec S = \int_V \rho dV - \oint_S \vec P d\vec S$$

όπως και στα ελεύθερα φορτία ξέρω ότι ∃ μόνο $E_z(z)$

από την συνθήκη συμμετρίας

$\underbrace{2\varepsilon_0 E_{z_2} S}_{\text{επάνω βάση}} = 0$ $\Rightarrow E_{z_2} = 0$

$\vec E_2 = 0$

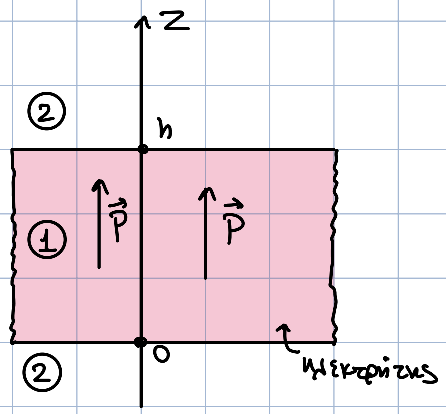
, τώρα για το κάτω ορθογώνιο: $\varepsilon_0 E_{z_1}(z) S + 0 = -P_0 S$

$$E_{z_1}(z) = -\frac{P_0}{\varepsilon_0}$$

άρα $\vec E_1 = -\frac{P_0 \hat z}{\varepsilon_0} = -\frac{\vec P}{\varepsilon_0}$

$$\vec D_1 = \varepsilon_0 \vec E_1 + \vec P = -\vec P + \vec P = 0$$

$\vec D_2 = \varepsilon_0 \vec E_2 = 0$ $\vec D = 0$ παντού

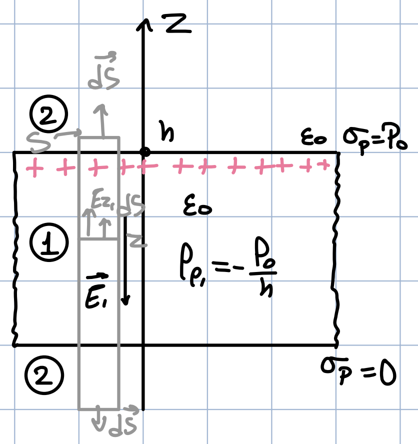


β) $\vec{P} = P_0 \frac{z}{h}\hat{z}$

$\rho_{p_1} = -\nabla\vec{P} = -\frac{d}{dz}\left(P_0 \frac{z}{h}\right) = -\frac{P_0}{h}$ (άρα τώρα έχω και χωρικό)

$\sigma_p(z=0) = -\hat{z}\left(P_0\frac{z}{h}\hat{z}\right) = 0$

$\sigma_p(z=h) = \hat{z}\left(P_0 \frac{z}{h}\hat{z}\right) = P_0$



$2\varepsilon_0 E_{z_2} S = 0 \Rightarrow E_{z_2} = 0$

$\varepsilon_0 E_{z_1}(z)\cancel{S} + 0 = -\frac{\rho_0}{h}\cancel{S}\, z$

$E_{z_1}(z) = -\frac{P_0}{\varepsilon_0}\frac{z}{h}\hat{z}$

$\vec{D}_1 = \varepsilon_0\vec{E}_1 + \vec{P} = -P_0\frac{z}{h}\hat{z} + P_0\frac{z}{h}\hat{z} = 0$

$\vec{D}_2 = \varepsilon_0\vec{E}_2 = 0$ άρα ξανά $\vec{D} = 0$ παντού