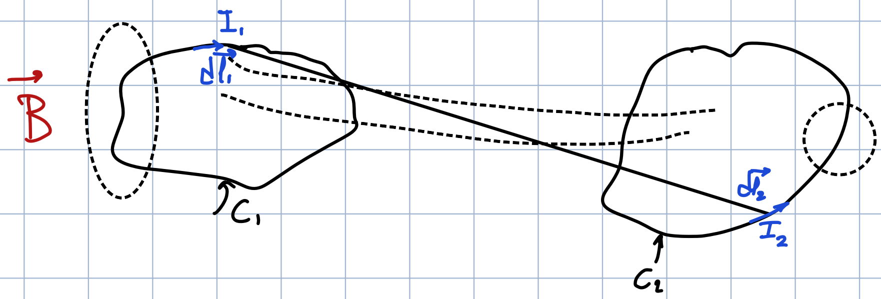
Αλληλεπαγωγή

⇒ 2 βρόχοι τυχαίου σχήματος , $\mu = \sigma\tau\alpha\theta$



→ Συντελεστής αλληλεπαγωγής

$$L_{21} = \frac{\Psi_{m,21}}{I_1}$$

σε ποιο βρόχο

σε ποιο ρεύμα οφείλεται

$$L_{12} = \frac{\Psi_{m,12}}{I_2}$$

Αν για 2 απλούς βρόχους έχουμε πηνία:

$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad \text{και} \quad L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

πεπλεγμένες ροές

$$L_{12} = \frac{\oint_{C_1} \vec{A}_2 \, d\vec{l}_1}{I_2} = \mu I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{4\pi I_2 R_{12}}$$

Τύπος του Neumann

$$L_{21} = \frac{\oint_{C_2} \vec{A}_1 \, d\vec{l}_2}{I_1} = \dots = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R_{12}} = L_{12} \quad [\text{Henry}]$$

Πεπλεγμένες ροές:

$$\Psi_1 = \Psi_{12} + \Psi_{21} = L_{11} I_1 + L_{12} I_2$$

$$\Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22} = L_{21} I_1 + L_{22} I_2$$

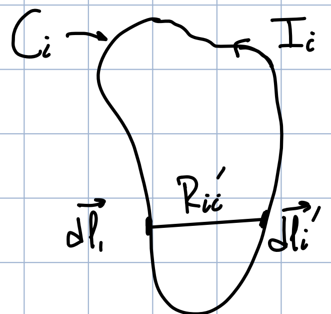
Για n βρόχους (πηνία):

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} + \dots + \Psi_{1i} + \Psi_{1n} = L_{11} I_1 + L_{12} I_2 + \dots + L_{1i} I_i + \dots + L_{1n} I_n$$

$$\vdots$$

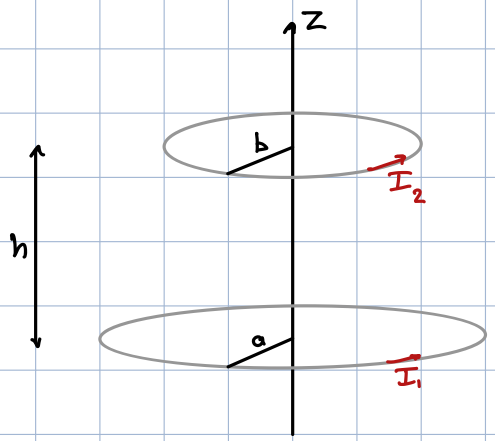
$$\Psi_i = \Psi_{i1} + \dots + \Psi_{ii} + \dots + \Psi_{in} = L_{i1} I_1 + \dots + L_{ii} I_i + \dots + L_{in} I_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} L_{ij} I_j$$



$$\Rightarrow \quad L_{ii} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_1} \frac{\vec{dl_i} \cdot \vec{dl_i'}}{R_{ii}'}$$

Άσκηση 11.6



α) $L_{12} = ;$ για $b \ll a$

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\Psi_{m,12}}{I_1} = \frac{\oint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2}{I_1}$$

$$= \left[\frac{\mu_0 \cancel{I_1} a^2 \cdot \pi b^2}{2(h^2+a^2)^{3/2}}\right] / \cancel{I_1} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(h^2+a^2)^{3/2}}$$

β) Ακριβής έκφραση του L_{12}

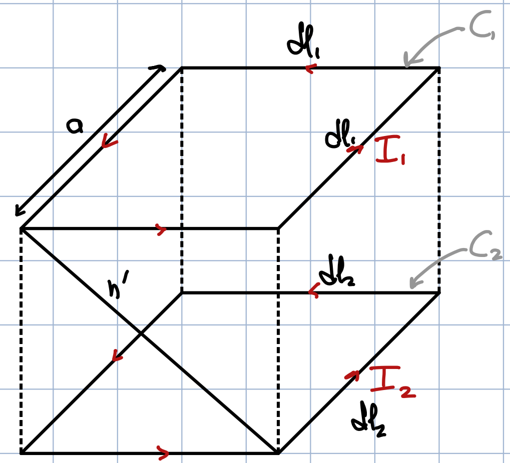
$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Psi_{m,21}}{I_1} = \frac{\oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2}{I_1} = \frac{A_{\varphi_1}(r_T=b, z=h)\cdot 2\pi b}{I_1}$$

$$A_{\varphi_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{r_T}}\cdot\left[\left(\frac{2}{k}-k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k)\right]$$

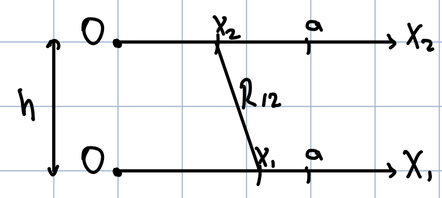
όπου $k = \dfrac{2\sqrt{a r_T}}{\sqrt{(a+r_T)^2+z^2}} = \dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(a+b)^2+z^2}}$

$$\Longrightarrow L_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot[\ldots]\cdot 2\pi b = \mu_0\sqrt{ab}\cdot[\ldots]$$

Άσκηση 11.7



Βοηθητικό πρόβλημα:



$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x_1=0}^{a}\int_{x_2=0}^{a}\frac{dx_1\,dx_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+h^2}}$$

Έστω $x_1 - x_2 = \omega$ άρα $dx_1 = d\omega$

$$\Rightarrow L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x_2=0}^{a} dx_2 \int_{\omega=-x_2}^{a-x_2}\frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2+h^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x_2=0}^{a} dx_2 \cdot \ln\left(\omega+\sqrt{\omega^2+h^2}\right)\Big|_{\omega=-x_2}^{a-x_2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x_2=0}^{a} dx_2 \cdot \ln\left[a-x_2+\sqrt{(a-x_2)^2+h^2}\right] - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x_2=0}^{a} dx_2 \ln\left[-x_2+\sqrt{x_2^2+h^2}\right]$$

Θέτουμε $a-x_2 = x$ για το πρώτο ολοκλήρωμα
και $x_2 = x$ στο δεύτερο

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^a dx \cdot \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+h^2}}{-x+\sqrt{x^2+h^2}}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[x\ln\left(\frac{x}{h}+\sqrt{\left(\frac{x}{h}\right)^2-1}\right)-\sqrt{x^2+h^2}\right]_{x=0}^{a}$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right)-\sqrt{a^2+h^2}+h\right]$$

$$h' = \sqrt{a^2+h^2}$$

$$\Rightarrow L_{12} = 4 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\left[a \ln\left(\frac{a^2+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right) - \sqrt{a^2+h^2} + h - a \ln\left(\frac{a^2+\sqrt{a^2+h^2}}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) + \sqrt{2a^2+h^2} - \sqrt{a^2+h^2}\right]$$

$$= \frac{2\mu_0}{\pi}\left[h - 2\sqrt{a^2+h^2} + \sqrt{2a^2+h^2} + a \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right) - a \ln\left(\frac{a+\sqrt{2a^2+h^2}}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\right]$$

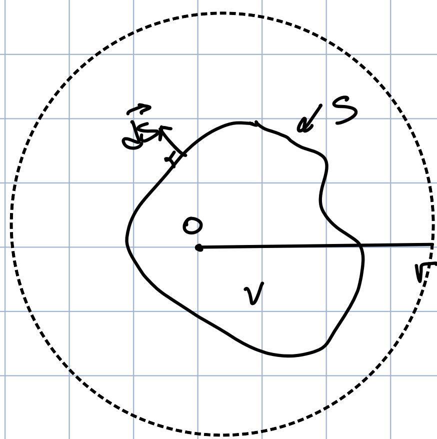
Για την εύρεση της αυτεπαγωγής στην ουσία έχουμε $h \to 0$. Έτσι ο συντελεστής απειρίζεται. Περιμέναμε κάτι τέτοιο διότι το σύρμα είναι απείρως λεπτό

Ενέργεια στο μαγνητοστατικό πεδίο

$$W_m = \int_V w_m \, dV \quad (1) \qquad , \quad w_m = \int_0^{\vec{B}} \vec{H} \, d\vec{B}$$

$$dw_m = \vec{H} \, d\vec{B} = \vec{H} \cdot (\nabla \times d\vec{A})$$

$$= \nabla (d\vec{A} \times \vec{H}) + \nabla \times \vec{H} \, d\vec{A}$$



$$\Rightarrow dw_m = \nabla \cdot (d\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (2)$$

$$(1) \; dW_m = \int_V dw_m \, dV \overset{(2)}{=} \int_V \nabla \cdot (d\vec{A} \times \vec{H}) dV + \int_V \vec{J} \, d\vec{A} \, dV$$

Για $r \to \infty \Rightarrow \underbrace{\oint_S \frac{1}{r^2} \frac{1}{r^3} \cdot r^2}_{\to 0} + \int_V \vec{J} \, d\vec{A} \, dV$

S = άπειρη σφαίρα

$$\Rightarrow dW_m = \int_V \vec{J} \, d\vec{A} \, dV = \int_V \int_0^{\vec{A}} (\vec{J} \, d\vec{A}) \, dV$$

Για γραμμικά υλικά: $W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \, d\vec{A} \, dV$