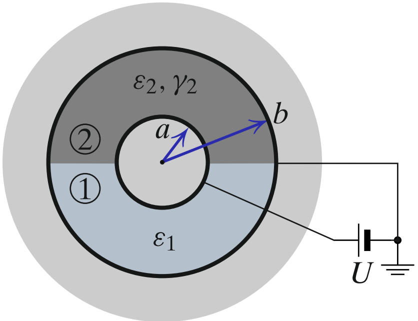
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Β', ΤΜΗΜΑ Ρ—Ω, ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2022–2023
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ ΖΟΥΡΟΣ

4η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
Μόνιμα ηλεκτρικά πεδία, Ηλεκτρική αντίσταση, Ηλεκτρικά φορτία στα μόνιμα ηλεκτρικά πεδία

Άσκηση 1

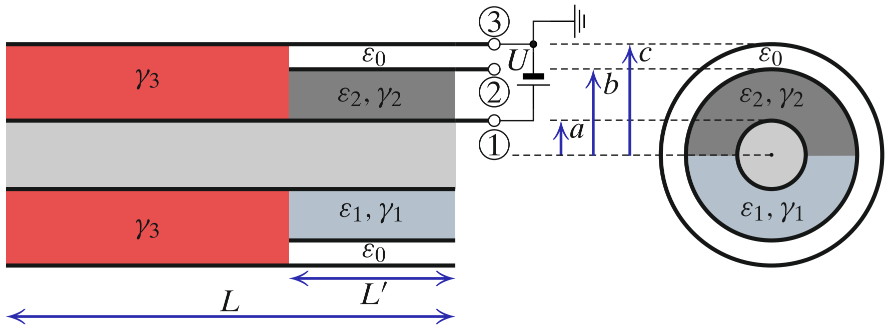
Η διάταξη του διπλανού σχήματος αποτελείται από δύο άπειρους κατά τον άξονα z τέλεια αγώγιμους κυλινδρικούς οπλισμούς, με ακτίνες a και b, αντίστοιχα, μεταξύ των οποίων εφαρμόζεται τάση U. Ο μισός χώρος ανάμεσά τους καλύπτεται από τέλειο διηλεκτρικό υλικό με επιτρεπτότητα ε_1, ενώ ο άλλος μισός από διηλεκτρικό υλικό με απώλειες το οποίο χαρακτηρίζεται από επιτρεπτότητα ε_2 και ειδική αγωγιμότητα γ_2. Στην περιοχή 1 δεν αναπτύσσεται χωρική πυκνότητα ελεύθερων φορτίων.



(α') Να ελεγχθεί εάν αναπτύσσεται χωρική πυκνότητα ελεύθερων φορτίων στην περιοχή 2, και να υπολογιστούν όλες οι επιφανειακές πυκνότητες ελεύθερων φορτίων που ενδεχομένως αναπτύσσονται στη διάταξη.
(β') Να ελεγχθεί εάν ικανοποιείται η συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου στις υφιστάμενες διεπιφάνειες των δύο υλικών.
(γ') Να υπολογιστεί η αντίσταση μόνωσης ανά μονάδα μήκους της διάταξης.

Άσκηση 2

Η κυλινδρική διάταξη του διπλανού σχήματος έχει συνολικό μήκος L κατά τον άξονα z, και φέρει τρεις οπλισμούς (τέλεια αγώγιμους/ο χώρος $r < a$ είναι τέλεια αγώγιμος) οι οποίοι καταλήγουν στους ακροδέκτες 1, 2 και 3. Σε μήκος L' του άξονα z τοποθετείται στο κάτω μισό κυλινδρικό κέλυφος ακτινικής απόστασης $b - a$, υλικό με ε_1, γ_1, ενώ στο άνω μισό, υλικό με ε_2, γ_2 (βλ. την εγκάρσια τομή στο δεξιό μέρος του σχήματος). Στον υπολοιπόμενο χώρο ακτινικής απόστασης $c - b$, με το ίδιο μήκος L', υπάρχει αέρας. Σε μήκος $L - L'$, τοποθετείται σε όλο το κυλινδρικό κέλυφος ακτινικής απόστασης $c - a$, αγώγιμο υλικό με γ_3. Τέλος, στους ακροδέκτες 1 και 3, επιβάλλεται τάση U, όπως φαίνεται στο σχήμα.



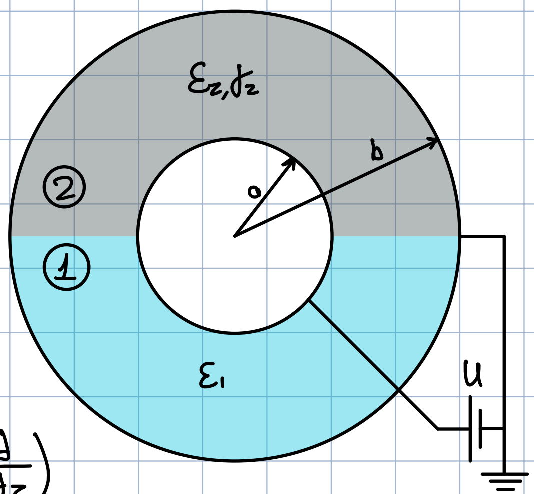
(α') Υπό τις συνθήκες $c \ll L', L - L'$ και $b - a \ll \pi a$, να υπολογιστούν οι χωρητικότητες και οι αγωγιμότητες που εμπλέκονται στη διάταξη.
(β') Να σχεδιαστεί το ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα της διάταξης μεταξύ των ακροδεκτών 1 και 3.

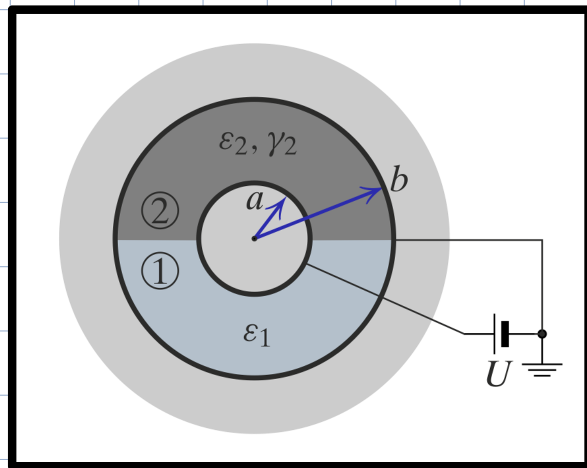
4^{η} Σειρά Ασκήσεων

Χριστόδουλος Στυλιανίδης

ΑΜ: el20614

Άσκηση 1:





$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}=0=\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ΚΥΛΙΝΔΡΟΙ

(α) Περιοχή 1:

$$J_1=0,\quad \nabla D_1=0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rD_r)=0 \Rightarrow D_{r_1}=\frac{C}{r},\quad E_{r_1}=\frac{C}{\varepsilon_1 r}$$

Περιοχή 2:

$$\nabla J_2=0 \Rightarrow J_{r_2}=\frac{C'}{r} \Rightarrow D_{r_2}=\frac{C'}{\gamma_2 r},\quad E_{r_2}=\frac{C'}{\varepsilon_2\gamma_2 r}$$

Τάση:

$$\rightarrow U=\int_a^b E_{r_1}dr=\frac{C}{\varepsilon_1}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow C=\frac{U\varepsilon_1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\rightarrow U=\int_a^b E_{r_2}dr=\frac{C'}{\varepsilon_2\gamma_2}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow C'=\frac{U\varepsilon_2\gamma_2}{\ln(b/a)}$$

$$D_{r_1}=\frac{U\varepsilon_1}{r\ln(b/a)}\qquad E_{r_1}=\frac{U}{r\ln(b/a)}$$

$$D_{r_2}=\frac{U\varepsilon_2}{r\ln(b/a)}\qquad E_{r_2}=\frac{U}{r\ln(b/a)}$$

Ελέγχω αν υπάρχει $\rho_{\varepsilon\varphi 2}$,

$$\rho_{\varepsilon\varphi 2} = \nabla(\varepsilon_0 \vec{E}_2) + \nabla \vec{P}_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r}\cdot\frac{\varepsilon_0 U}{\cancel{r}\ln(b/a)}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cancel{r}U}{\cancel{r}\ln(b/a)}(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\right) = 0$$

άρα δεν υπάρχει χωρική πυκνότητα ελεύθερων φορτίων στην περιοχή 2

__Περιοχή 1:__

$$r=a : \sigma_{a_1} = \hat{n}\left(\vec{D}_1(r=a_+) - \cancel{\vec{D}(r=a_-)}^{0}\right) \Rightarrow \sigma_{a_1} = \frac{U\varepsilon_1}{a\ln(b/a)}$$

$$r=b : \sigma_{b_1} = \hat{n}\cdot\left(\cancel{D(r=b_+)}^{0} - \vec{D}_1(r=b_-)\right) \Rightarrow \sigma_{b_1} = -\frac{U\varepsilon_1}{b\ln(b/a)}$$

__Περιοχή 2:__

$$r=a : \sigma_{a_2} = \hat{n}\left(\vec{D}_2(r=a_+) - \cancel{\vec{D}(r=a_-)}^{0}\right) \Rightarrow \sigma_{a_2} = \frac{U\varepsilon_2}{a\ln(b/a)}$$

$$r=b : \sigma_{b_2} = \hat{n}\cdot\left(\cancel{D(r=b_+)}^{0} - \vec{D}_2(r=b_-)\right) \Rightarrow \sigma_{b_2} = -\frac{U\varepsilon_2}{b\ln(b/a)}$$

(β) Για $\varphi=0$: $\hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)\Big|_{\varphi=0} \Rightarrow \underset{\hat{n}=\hat{\varphi}}{\varphi=0} \Rightarrow \hat{\varphi}\times\hat{r}\left(\frac{U}{r\ln(b/a)} - \frac{U}{r\ln(b/a)}\right) = -\hat{z}\cdot 0 = 0$

αφού το φ δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα, τότε $\varphi=\pi$ πάλι δίνει μηδέν

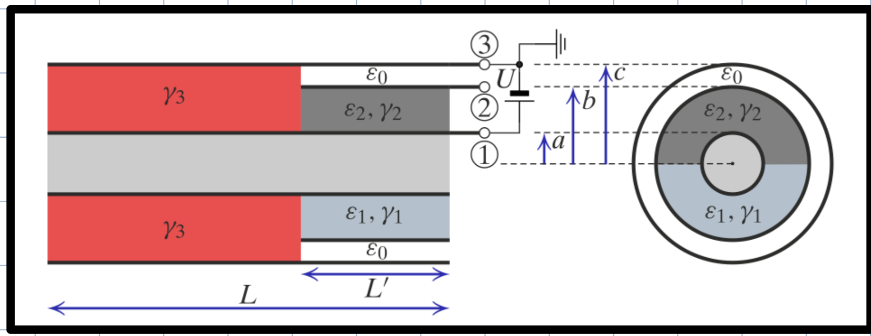
Άρα ικανοποιούνται οι συνέχειες των εφαπτομενικών συνιστωσών.

(γ) $I_{\mu_1} = \int_{S_1} \vec{J}_1 d\vec{S}_1 = 0$ (αφού $J_1=0$) $\Rightarrow I = \frac{U}{R}$, άρα αφού $I_{\mu_1}=0$ τότε $R_{\mu_1}\to\infty$

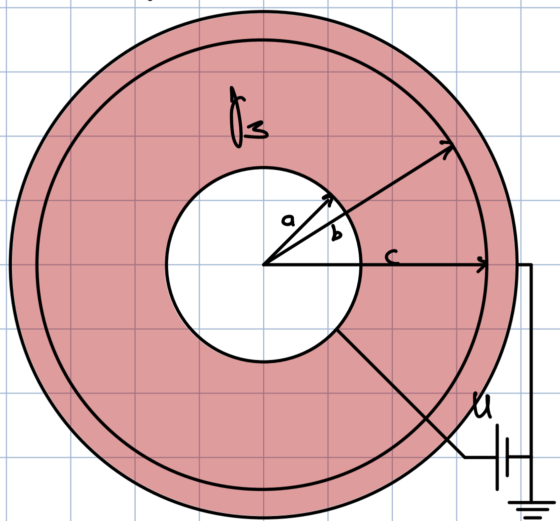
$$I_2 = \int_{S_2}\vec{J}_2 d\vec{S}_2 = \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon_2\sigma_2 U}{\ln(b/a)}\frac{1}{r}\cdot r\,d\varphi = \frac{U\varepsilon_2\sigma_2\pi}{\ln(b/a)} \Rightarrow R_{\mu_2} = \frac{U}{I} = \frac{\ln(b/a)}{\varepsilon_2\sigma_2\pi}$$

αφού το z μαζί ψάχνουμε ανά μονάδα μήκους.

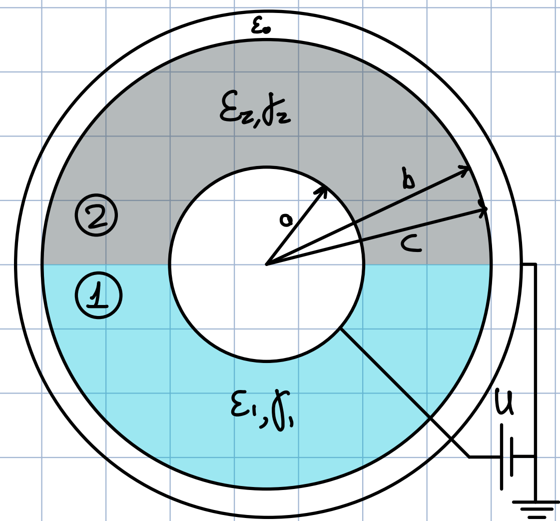
Άσκηση 2:



για L στον Z



για L' στον Z



(α) Περιοχή με ε_0:

$J_0 = 0$ (αφού $\gamma_0 = 0$) άρα $I_0 = 0$ και όπως πριν $R_0 \to \infty$, $G_0 = 0$

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 L'}{\ln(c/b)}$$

Περιοχή με ε_3:

$E_3 = 0$ ($\varepsilon_3 = 0$) $\quad C_3 = 0$, $\quad G_3 = \dfrac{\ln(c/a)}{2\pi\gamma_3 (L-L')}$, $\quad R_3 = \dfrac{2\pi\gamma_3 (L-L')}{\ln(c/a)}$

Περιοχή με ε_1:

$$\nabla \vec{J}_1 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r J_{r_1}) = 0 \Rightarrow J_{r_1} = \frac{C_1}{r} \Rightarrow E_{r_1} = \frac{C_1 \gamma_1}{r}$$

$$U = \int_a^b \vec{E}_1 dr = C_1 \gamma_1 \ln(b/a) \Rightarrow C_1 = \frac{U}{\gamma_1 \ln(b/a)}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{U \hat{r}}{r \ln(b/a)} \qquad \vec{J}_1 = \frac{U \gamma_1 \hat{r}}{r \ln(b/a)} \quad , \quad I_1 = \int_{S_1} \vec{J}_1 d\vec{S}_1 = \int_{z=-\frac{L'}{2}}^{L'/2} \int_0^{\pi} \frac{U \gamma_1}{\cancel{r} \ln(b/a)} \cancel{r}\, dz\, d\varphi$$

$$I_1 = \frac{U \gamma_1}{\ln(b/a)} L'\pi \Rightarrow R_1 = \frac{\ln(b/a)}{\gamma_1 L' \pi} \quad , \quad G_1 = \frac{\gamma_1 L' \pi}{\ln(b/a)} \quad . \quad C_1 = \frac{L' \varepsilon_1 \pi}{\ln(b/a)}$$

και για Περιοχή με ε_2: (όμοια, αφού δεν έχουν κάτι διαφορετικό με την περιοχή ε_1)

$$R_2 = \frac{\ln(b/a)}{\gamma_2 L' \pi} \quad , \quad G_2 = \frac{\gamma_2 L' \pi}{\ln(b/a)} \quad . \quad C_2 = \frac{L' \varepsilon_2 \pi}{\ln(b/a)}$$

(β)