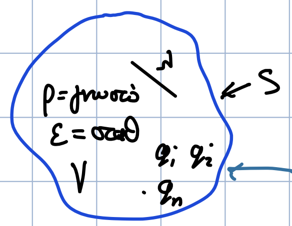
Προβλήματα με οριακές συνθήκες

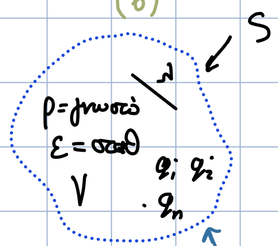
(α)



Ορ. συνθήκες $\varphi|_s$

=

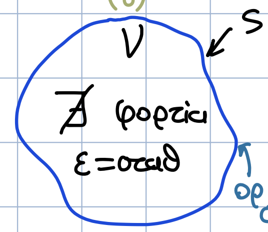
(β)



" ορ. συνθήκες στην $\varphi_\mu|_s$ "

+

(γ)



ορ. συνθήκες $\varphi_0|_s$ = ορ. συνθήκες $\varphi|_s$ − "ορ. συνθ. $\varphi_\mu|_s$"

άγνωστα φορτία

∄ φορτία ή τοποθετούμε γνωστά αυθαίρετα φορτία

Άγνωστα φορτία = Άγνωστα φορτία του (α) − γνωστά φορτία του (β)

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{(Εξίσωση Poisson)}$$

$$\varphi = \underbrace{\varphi_\mu}_{\text{μερική λύση (δεξιά πλευρά)}} + \underbrace{\varphi_0}_{\text{ομογενούς (Laplace)}}$$

$$\varphi_\mu = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{dq}{R}$$

$$\nabla^2\varphi_\mu = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\varphi_\mu = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\substack{\text{σε όλα}\\ \text{τα φορτία}}} dq\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{αν}}\right)$$

$$\nabla^2\varphi_0 = 0$$

Θεώρημα μοναδικότητας

Η εξίσωση Poisson (Laplace) έχει μοναδική λύση στα σημεία του όγκου V σε όλα τα σημεία της επιφάνειας S δίνεται:

1) Η τιμή του δυναμικού Φ (συνθήκη Dirichlet)

ή

2) Η τιμή της $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (κάθετη παράγωγο στο φ) (συνθήκη Neumann)

ή

3) Η τιμή του Φ σε τμήμα S' της S και η τιμή της $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ στο υπόλοιπο τμήμα S'' (Μικτές συνθήκες)

Απόδειξη:

1η ταυτότητα Green $\int_V (u\nabla^2 \upsilon + \nabla u \nabla \upsilon)dV = \oint_S u \frac{\partial \upsilon}{\partial n} dS$ (1)

Έστω ότι υπάρχουν 2 λύσεις η Φ^{I} κ Φ^{II}, ισχύει ότι $\nabla^2 \Phi^{I} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

κ' $\nabla^2 \varphi^{II} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

Έστω $\Phi_\delta = \nabla^2 \varphi^{I} - \nabla^2 \varphi^{II} = 0$ (2) άρα ικανοποιεί η εξίσωση Laplace

(διαφορά)

(1) ⇒ Θέτουμε $u = \upsilon = \Phi_\delta$ (3)

$$\int_V \left(\Phi_\delta \cancelto{0}{\nabla^2 \Phi_\delta} + (\nabla \Phi_\delta)^2\right) dV = \oint_S \Phi_\delta \frac{\partial \Phi_\delta}{\partial n} dS \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow \int_V |\nabla \Phi_\delta|^2 dV = \oint_S \Phi_\delta \frac{\partial \Phi_\delta}{\partial n} dS = 0 \Rightarrow \nabla \Phi_\delta = 0 \Rightarrow \Phi_\delta = \text{σταθ}$$

όποια συνθήκη και να ισχύει ή το $\Phi_\delta = 0$ ή $\frac{\partial \Phi_\delta}{\partial n} = 0$

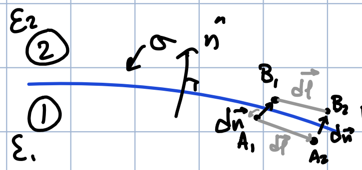
$$\Rightarrow \Phi^{I} - \Phi^{II} = \text{σταθ}$$

$\Phi^{I} = \Phi^{II}$ (συνθήκη Dirichlet) (μικτές συνθήκες)

$\Phi^{I} = \Phi^{II} + \text{σταθ}$ (συνθήκη Neumann)

δεν μας πειράζει μία σταθερά γιατί εμείς θα βρούμε το E, $E = -\nabla \Phi$, άρα θα χαθεί

Οριακές συνθήκες για το Φ σε διαχωριστικές επιφάνειες



$$\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \Leftrightarrow E_{\tau_2}=E_{\tau_1}$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\hat{n}(\varepsilon_2\vec{E}_2-\varepsilon_1\vec{E}_1)=\hat{n}\left(-\varepsilon_2\nabla\Phi_2+\varepsilon_1\nabla\Phi_1\right)=-\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}+\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\sigma$$

$$\Phi_{A_1}-\Phi_{B_1}=\int_{A_1}^{B_1}\vec{E}\,d\vec{n}\to 0$$ (αφού $dn\to 0$ απειροστό, αν δεν είναι άπειρο το E, τότε είναι 0) $\Leftrightarrow \Phi_{A_1}=\Phi_{B_1}$ (1)

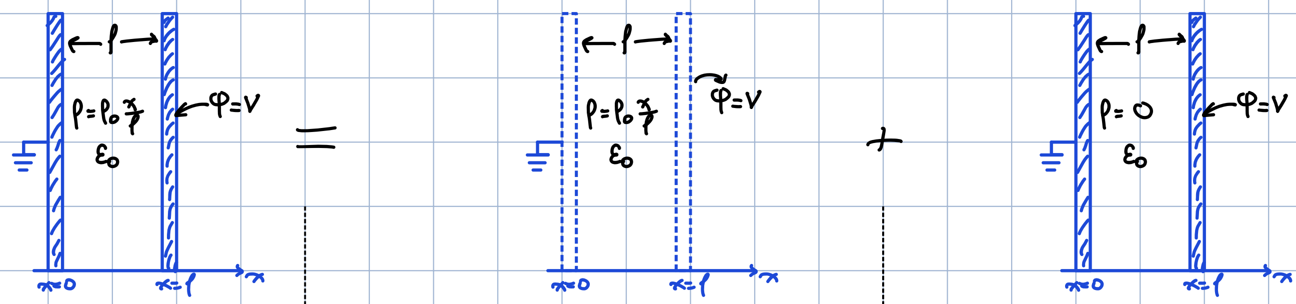
$\Phi_{A_1}=\Phi_{B_1}$, όμοια προκύπτει ότι $\Phi_{A_2}=\Phi_{B_2}$ (2)

$$(1),(2)\Rightarrow \Phi_{A_1}-\Phi_{A_2}=\Phi_{B_1}-\Phi_{B_2}\Leftrightarrow \int_{A_1}^{A_2}\vec{E}_1\,d\vec{l}=\int_{B_1}^{B_2}\vec{E}_2\,d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \int_{A_1}^{A_2}E_{\tau_1}\,dl=\int_{B_1}^{B_2}E_{\tau_2}\,dl \overset{\text{άρα}}{\Leftrightarrow} E_{\tau_1}=E_{\tau_2}$$

(Συνέχεια εφαπτομενικών συνιστωσών = συνέχεια δυναμικού)

Παράδειγμα 1 (σελίδα 45)



μερική λύση από εδώ

ομογενούς από Laplace

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\varphi(x=0)=0$ (γείωση)

$\varphi(x=\ell)=V$ (φορτισμένο)

γενικά $\varphi = \varphi_\mu + \varphi_0$

$$\nabla^2\varphi_\mu = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

αφού εξαρτάται μόνο από x $\Big\}$ $\dfrac{d^2\varphi_\mu}{dx^2} = -\dfrac{\rho_0}{\ell\varepsilon_0}\cdot x$

$\varphi_\mu = -\dfrac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0\ell}$ (1) (δεν βάζω σταθερές γιατί ψάχνω μερική λύση)

$\varphi_\mu(x=0)=0 \quad \varphi_\mu(x=\ell) = -\dfrac{\rho_0\ell^2}{6\varepsilon_0}$

$$\nabla^2\varphi_0 = 0$$

$\varphi_0 = C_1 x + C_2$ (εδώ βάζω σταθ.)

Για $x=0$ $\varphi_0=0$, $C_2=0$

Για $x=\ell$ $\varphi_0 = C_1\ell = V + \dfrac{\rho_0\ell^2}{6\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \varphi_0 = \left(\dfrac{V}{\ell} + \dfrac{\rho_0\ell}{6\varepsilon_0}\right)x$ (2)

$\varphi_0(x=0)=0 \quad \varphi_0(x=\ell) = V + \dfrac{\rho_0\ell^2}{6\varepsilon_0}$

(αυτά από $\varphi = \varphi_\mu + \varphi$)

$$\varphi = \left(\frac{V}{\ell} + \frac{\rho_0\ell}{6\varepsilon_0}\right)x - \frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0\ell}$$

Απευθείας λύση (αφού είναι μονοδιάστατο x)

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{x}{\ell}, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0\ell}\cdot x$$

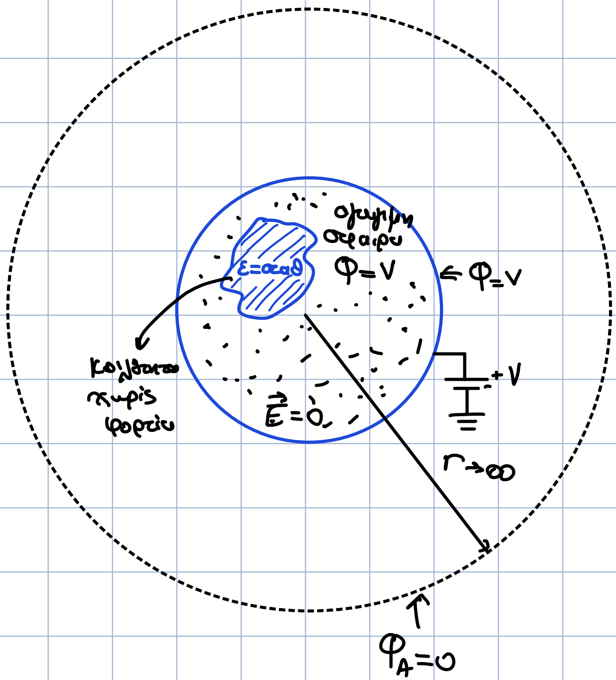
$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0\ell} + C_1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0\ell} + C_1 x + C_2 \quad (3)$$

οριακές συνθήκες

$x=0$	$x=\ell$
$\varphi(x=0)=0$	$\varphi(x=\ell)=V$
$C_2=0$	$C_1 = \left(\frac{V}{\ell}+\frac{\rho_0\ell}{6\varepsilon_0}\right)$

άρα $\varphi = -\dfrac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0\ell} + \left(\dfrac{V}{\ell} + \dfrac{\rho_0\ell}{6\varepsilon_0}\right)x$

Παράδειγμα 2



Στο εσωτερικό της κοιλότητας

$\nabla^2 \varphi_\kappa = 0$, έστω $\varphi_\kappa = V$

$\nabla^2 V = 0$

Στα τοιχώματα:

$\varphi_\kappa = V$, άρα μοναδική λύση (Dirichlet)

Για $r > a$ (ακτίνα σφαίρας)

$$\nabla^2 \varphi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = C_1$$

$$\varphi = -\frac{C_1}{r} + C_2 \qquad (a \leq r < \infty)$$

Για $r \to \infty$ $C_2 = 0$, $r = a$ $\varphi = -\frac{C_1}{a} = V$

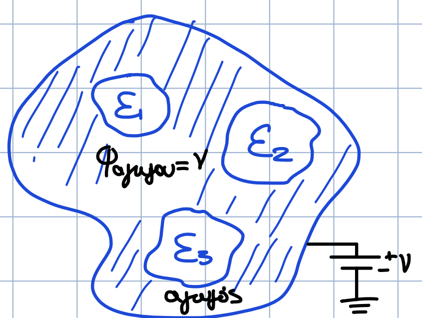
$C_1 = -aV$

Άρα:

$$\varphi = V\frac{a}{r} \quad (r > a)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\hat{r}\frac{d\varphi}{dr} = V\frac{a}{r^2} \quad (r > a)$$

Παράδειγμα 3



Οι κοιλότητες δεν περιέχουν φορτία, $\varphi_\kappa = ;$ $\vec{E}_\kappa = ;$

Στο εσωτερικό των κοιλοτήτων $\nabla^2 \varphi_\kappa = 0 \Rightarrow \varphi_\kappa = V$

$\vec{E}_\kappa = -\nabla \varphi_\kappa = 0$

Κλωβός Faraday