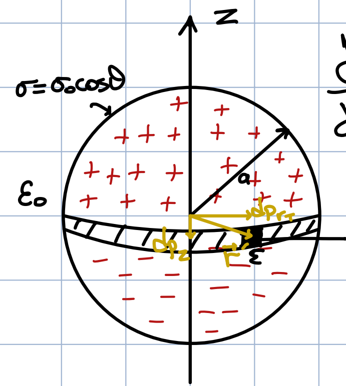
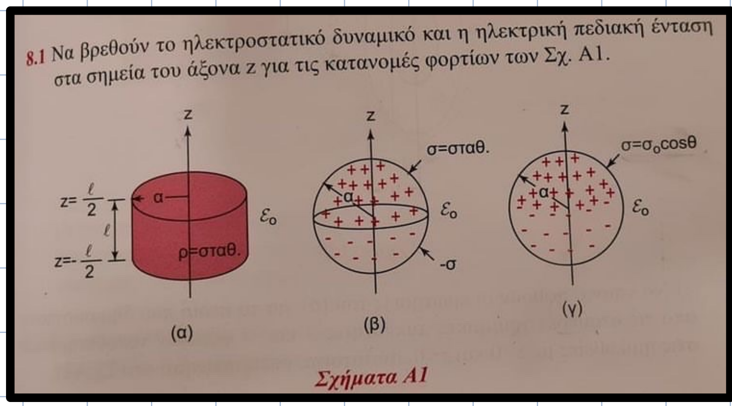
Άσκηση 8.1(γ)



$$\frac{d}{d\varphi}=0$$

$$\sigma dS = dq$$



8.1 Να βρεθούν το ηλεκτροστατικό δυναμικό και η ηλεκτρική πεδιακή ένταση στα σημεία του άξονα z για τις κατανομές φορτίων των Σχ. A1.

Σχήματα A1

$$\Phi_\Sigma(z)=\int_S \frac{\sigma\, dS_r}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos\theta\, a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{z^2+a^2-2za\cos\theta}} = -\frac{\sigma_0}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0\ 2}\cdot\cancel{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\cos\theta\, d(\cos\theta)}{\sqrt{z^2+a^2-2za\cos\theta}}$$

$$=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{4z^2}\int_0^{\pi}\frac{-2za\cos\theta\, d(-2za\cos\theta)}{\sqrt{z^2+a^2-2za\cos\theta}}$$

$$=-\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0 z^2}\left[\int_0^{\pi}\frac{[z^2+a^2-2za\cos\theta]\, d(-2za\cos\theta)}{\sqrt{z^2+a^2-2za\cos\theta}}-\int_0^{\pi}\frac{(z^2+a^2)\, d(-2za\cos\theta)}{\sqrt{z^2+a^2-2za\cos\theta}}\right]$$

$$=-\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0 z^2}\left[\frac{2}{3}(z^2+a^2-2az\cos\theta)^{3/2}-2(z^2+a^2)\sqrt{z^2+a^2-2za\cos\theta}\right]\Bigg|_{\theta=0}^{\pi}$$

$$=-\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0 z^2}\left[\frac{2}{3}\left[|z+a|^3-|z-a|^3\right]-2(z^2+a^2)\left(|z+a|-|z-a|\right)\right]$$

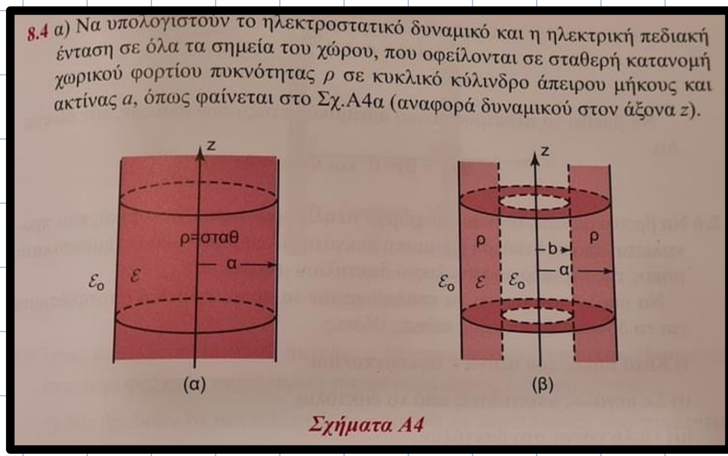
i) $z\geq a$, $\Phi_\Sigma=\dfrac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0 z^2}$, $z>a$ $\vec{E}_\Sigma(z)=-\nabla\Phi_\Sigma(z)=-\dfrac{d\Phi_\Sigma(z)}{dz}=\dfrac{2\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0 z^3}\hat{z}$

ii) $-a<z<a$, $\Phi_\Sigma=\dfrac{\sigma_0 z}{3\varepsilon_0}$, $-a<z<a$ $\vec{E}_\Sigma(z)=-\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{z}$

iii) $z\leq -a$, $\Phi_\Sigma=-\dfrac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0 z^2}$, $z<-a$ $\vec{E}_\Sigma(z)=-\dfrac{2\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0 z^3}\hat{z}$

$$\vec{P}=\int_{\text{σε όλα τα φορτία}}\vec{r}'\,dq=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}a\hat{r}'\sigma_0\cos\theta\, a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=-\hat{z}\,2\pi a^3\int_0^{\pi}\sigma_0\cos^2\theta\, d(\cos\theta)=\hat{z}\,\frac{4\pi}{3}a^3\sigma_0$$

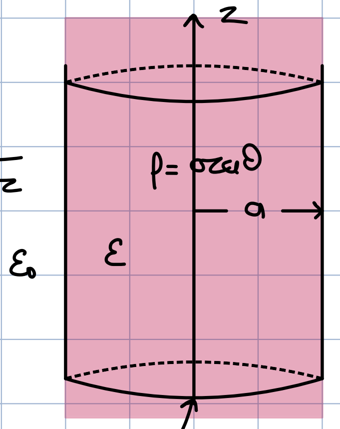
Άσκηση 8.4


8.4 α) Να υπολογιστούν το ηλεκτροστατικό δυναμικό και η ηλεκτρική πεδιακή ένταση σε όλα τα σημεία του χώρου, που οφείλονται σε σταθερή κατανομή χωρικού φορτίου πυκνότητας ρ σε κυκλικό κύλινδρο άπειρου μήκους και ακτίνας a, όπως φαίνεται στο Σχ.Α4α (αναφορά δυναμικού στον άξονα z).

Σχήματα Α4

α)

$$\frac{d}{d\varphi}=0=\frac{d}{dz}$$



$$\varphi(r=0)=0\ (=\varphi_A)$$

Πρώτος Τρόπος:

Περιοχή ① $\nabla^2\varphi_1=-\frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi_1}{dr}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon}$

$$r\frac{d\varphi_1}{dr}=-\frac{\rho r^2}{2\varepsilon}+C_1$$

$$\varphi_1=-\frac{\rho r^2}{4\varepsilon}+C_1\ln r+C_1' \quad (1)$$

Για $r\to 0$ $\varphi_1\to 0$ (∄ ανιq)
$C_1=0$, $C_1'=0$

$$\varphi_1=-\frac{\rho r^2}{4\varepsilon} \quad (3)$$

Περιοχή ② $\nabla^2\varphi_2=0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi_2}{dr}\right)=0$

$$\Rightarrow \varphi_2=C_2\ln r+C_2' \quad (2)$$

Για $r=a$ $\varphi_1(r=a)=\varphi_2(r=a)$
και $D_{r_2}-D_{r_1}=\sigma=0$

$$\varepsilon_0\frac{d\varphi_2}{dr}=\varepsilon\frac{d\varphi_1}{dr} \quad (5)$$

(2-3),(5) $\varepsilon_0\frac{C_2}{a}=-\cancel{\varepsilon}\cdot\frac{\cancel{2}\rho a}{\cancel{4}_{2}\cancel{\varepsilon}}$ (2),(3) $\Rightarrow -\frac{\rho a^2}{4\varepsilon}=C_2\ln a+C_2'$

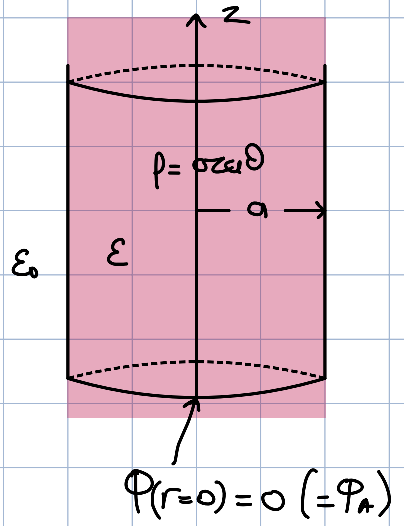
$$C_2=-\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \qquad C_2'=-\frac{\rho a^2}{4\varepsilon}+\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln(a)$$

$$\varphi_2=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{r}\right)-\frac{\rho a^2}{4\varepsilon} \quad (7)$$

Περ ① $\vec{E}_1=-\nabla\varphi_1=-\frac{d\varphi_1}{dr}\hat{r}=\frac{\rho r}{2\varepsilon}\hat{r}$ Περ ② $\vec{E}_2=-\nabla\varphi_2=-\frac{d\varphi_2}{dr}\hat{r}=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r}$

Άσκηση 8.4

a)



Δεύτερος Τρόπος:

(Θα βρούμε πρώτα το ηλεκτρικό πεδίο)

$$\frac{d}{d\varphi}=0=\frac{d}{dz} \Rightarrow \vec{E}=E_r\hat{r}$$

Περιοχή 1

$$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S}=Q_{\varepsilon\sigma}$$

$$\varepsilon E_{r_1}\cdot 2\pi r\ell=\rho\pi r^2\ell \Rightarrow E_{r_1}=\frac{\rho r}{2\varepsilon} \quad (8)$$

$$\varphi_1(r)-0=\int_r^0 E_{r_1}\,dr'=\frac{\rho r'^2}{4\varepsilon}\bigg|_{r'=r}^{0}=-\frac{\rho r^2}{4\varepsilon} \quad (9)$$

Περιοχή 2

$$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S}=Q_{\varepsilon\sigma}$$

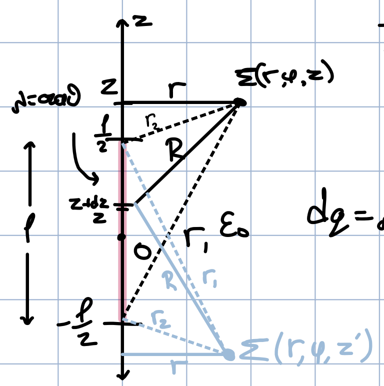
$$\varepsilon_0 E_{r_2}\cdot 2\cancel{\pi} r\cancel{\ell}=\rho\cancel{\pi}a^2\cancel{\ell}$$

$$E_{r_2}=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi_2(r)-\varphi_2(a)=\int_r^a E_{r_2}\,dr=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{r}\right)$$

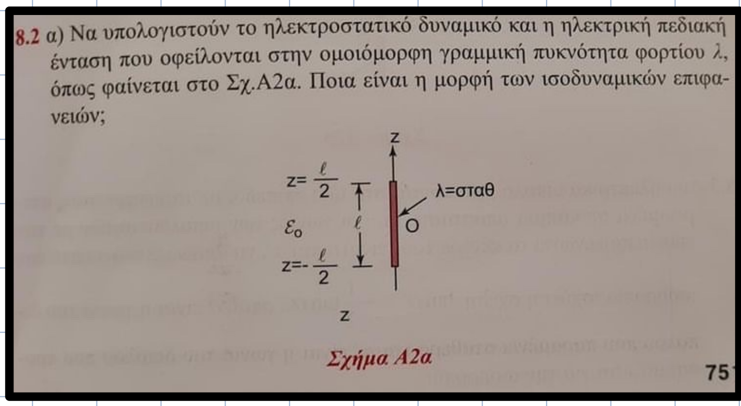
$$\Rightarrow \varphi_2(r)=-\frac{\rho a^2}{4\varepsilon}+\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{r}\right)$$

Άσκηση 8.2



$$\frac{d}{d\varphi}=0$$

$$dq=\lambda dz'$$



8.2 α) Να υπολογιστούν το ηλεκτροστατικό δυναμικό και η ηλεκτρική πεδιακή ένταση που οφείλονται στην ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα φορτίου λ, όπως φαίνεται στο Σχ.Α2α. Ποια είναι η μορφή των ισοδυναμικών επιφανειών;

Σχήμα Α2α

75

$$\Phi_\Sigma=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{\lambda dz'}{R}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z'=-\frac{\ell}{2}}^{\ell/2}\frac{dz'}{\sqrt{(z-z')^2+r^2}}=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{d(z-z')}{\sqrt{(z-z')^2+r^2}}$$

$$=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(z-z'+\sqrt{(z-z')^2+r^2}\right)\Big|_{-\ell/2}^{\ell/2}=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z-\frac{\ell}{2}+\sqrt{(z-\ell/2)^2+r^2}}{z+\ell/2\ \sqrt{(z+\ell/2)^2+r^2}}$$

$$\Phi_\Sigma=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z+\ell/2+\overbrace{\sqrt{(z+\ell/2)^2+r^2}}^{r_1}}{z-\frac{\ell}{2}+\underbrace{\sqrt{(z-\ell/2)^2+r^2}}_{r_2}}\right)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z+\ell/2+r_1}{z-\ell/2+r_2}\right)$$

$$\vec{E}_\Sigma=-\nabla\Phi_\Sigma=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}=\cdots$$

Οι ισοδυναμικές επιφάνειες έχουν $\Phi=$σταθερό, άρα πρέπει $\dfrac{z+\ell/2+r_1}{z-\ell/2+r_2}=$ σταθερο $=C$

Για τα δύο σημεία Σ, Σ': πρέπει

$$\frac{z+\ell/2+r_1}{z-\ell/2+r_2}=\frac{(-z)+\ell/2+r_1}{(-z)-\ell/2+r_2}\xlongequal{\text{ιδιότητα αναλογιών}}\frac{(\cancel{z}+\ell/2+r_1-\cancel{z}+\ell/2+r_2)}{(\cancel{z}-\ell/2+r_1-\cancel{z}-\ell/2+r_2)}=\frac{r_1+r_2+\ell}{r_1+r_2-\ell}=C\Rightarrow r_1+r_2=\text{σταθ}$$