ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9 - ΖΩΓΡΑΦΟΥ
Καθηγητής Ι.Α.Ρουμελιώτης

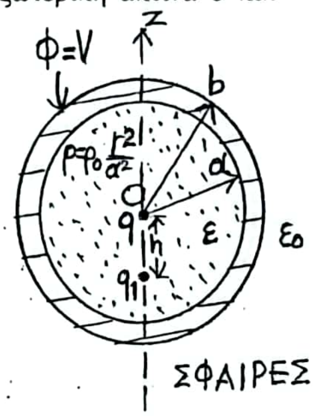
ΠΡΟΣΟΧΗ : ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΕΠΙΣΤΡΕΦΟΝΤΑΙ ΜΑΖΙ ΜΕ ΤΟ ΓΡΑΠΤΟ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥ: ....
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ : ....

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Β
ΤΜΗΜΑ 1^{ο} : Α-Δ
29 Αυγούστου 2019

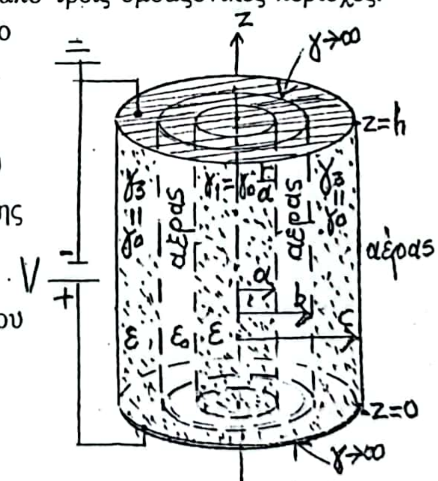
Θέμα 1^{ο} (26%)

Το αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος του σχήματος έχει εσωτερική ακτίνα α, εξωτερική ακτίνα b και δυναμικό Φ=V. Στο κέντρο του Ο υπάρχει σημειακό φορτίο q. Στη θέση z=-h (h<α) του άξονα z υπάρχει δεύτερο σημειακό φορτίο q_1.
Για 0<r<α υπάρχει χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho=\rho_0 r^2/\alpha^2$, όπου ρ_0 γνωστή σταθερά και r η απόσταση από το κέντρο Ο του κελύφους.
Η επιτρεπτότητα είναι ε, σταθερή. Για r>b υπάρχει αέρας, χωρίς φορτία.
Να υπολογιστούν:
α) Το ηλεκτροστατικό δυναμικό $0<r\le\alpha$ και για $b\le r<\infty$ σε σφαιρικές συντεταγμένες. (22%)
β) Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο q_1.(4%)



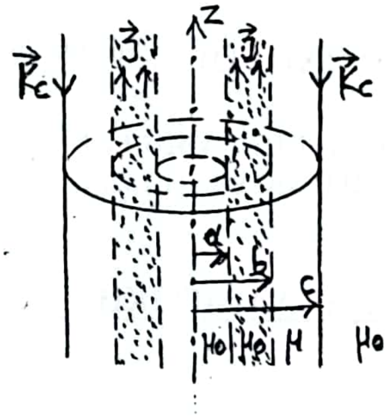
Θέμα 2^{ο} (37%)

Η κυλινδρική διάταξη του σχήματος έχει ύψος h και αποτελείται από τρεις ομοαξονικές περιοχές.
Για $0\le r<\alpha$ (r είναι η απόσταση από τον άξονα z) υπάρχει αγώγιμο υλικό με ειδική αγωγιμότητα $\gamma_1=\gamma_0 r/\alpha$, όπου γ_0 γνωστή σταθερά.
Για α<r<b υπάρχει αέρας ($\gamma_2=0$) και για b<r<c υπάρχει αγώγιμο υλικό με σταθερή ειδική αγωγιμότητα $\gamma_3=\gamma_0$. Οι δύο βάσεις με z=0 και z=h είναι τέλεια αγώγιμες και συνδέονται με πηγή συνεχούς τάσης V. Έξω από την κυλινδρική διάταξη υπάρχει αέρας.
Να βρεθούν:
α) Η πυκνότητα και η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και το ηλεκτρικό δυναμικό σε καθεμία από τις παραπάνω τρεις ομοαξονικές περιοχές.(23%)
β) Η ηλεκτρική αντίσταση και η χωρητικότητα καθεμίας από τις τρεις περιοχές, αν η επιτρεπτότητα είναι ε, σταθερή, στους αγωγούς και ε_0 στον αέρα. Επίσης η συνολική αντίσταση και η συνολική χωρητικότητα της διάταξης.(14%)



Θέμα 3$^{\text{ο}}$ (37%)

Η κυλινδρική διάταξη του σχήματος έχει άπειρο μήκος στη διεύθυνση z. Στην περιοχή α<r<b (r είναι η απόσταση από τον άξονα z) ρέει συνεχές ρεύμα έντασης I, με χωρική πυκνότητα $\bar{J} = \hat{z}J_0 r^3 / \alpha^3$. Η επιστροφή του ρεύματος I γίνεται από την κυλινδρική επιφάνεια με r=c, με επιφανειακή πυκνότητα $\bar{K}_c = -\hat{z}K_c$. Η μαγνητική διαπερατότητα είναι $\mu = \mu_0 c / r$ στην περιοχή με b<r<c και μ_0 στον υπόλοιπο χώρο.



Ζητούνται συναρτήσει του I:

α) Τα J_0, K_c και η ένταση του μαγνητικού πεδίου για $0 \le r < \infty$.(12%)

β) Το διανυσματικό δυναμικό για $0 \le r < \infty$, με αναφορά για r=0.(14%)

γ) Η μαγνήτιση για b<r<c, η χωρική πυκνότητα των ρευμάτων μαγνήτισης εκεί και η επιφανειακή πυκνότητα του ρεύματος μαγνήτισης για r=b.(7%)

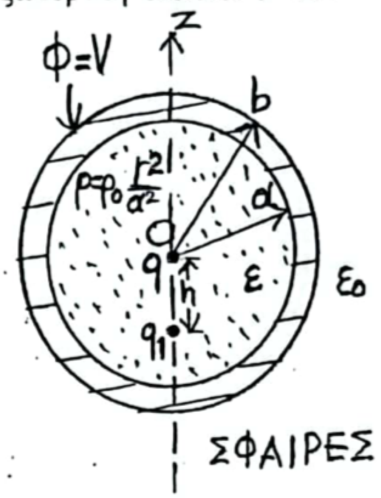
δ) Ο εξωτερικός συντελεστής αυτεπαγωγής (περιοχή με b<r<c), ανά μονάδα μήκους ως προς z.(4%)

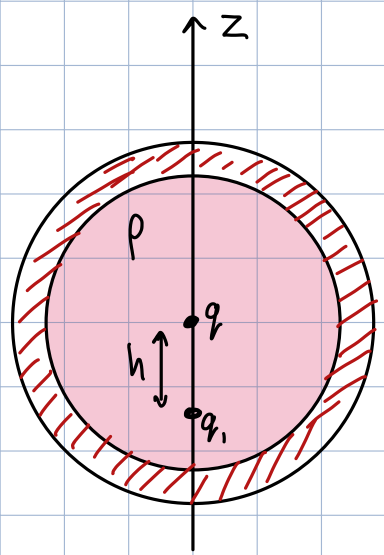
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΑ ΚΙΝΗΤΑ ΤΗΛΕΦΩΝΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΑΠΕΝΕΡΓΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΚΑΙ ΜΕΣΑ ΣΤΙΣ ΤΣΑΝΤΕΣ ΣΑΣ

Θέμα 1ο (26%)

Το αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος του σχήματος έχει εσωτερική ακτίνα α, εξωτερική ακτίνα b και δυναμικό Φ=V. Στο κέντρο του Ο υπάρχει σημειακό φορτίο q. Στη θέση z=-h (h<α) του άξονα z υπάρχει δεύτερο σημειακό φορτίο q_1.
Για 0<r<α υπάρχει χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho=\rho_0 r^2/\alpha^2$, όπου ρ_0 γνωστή σταθερά και r η απόσταση από το κέντρο Ο του κελύφους.
Η επιτρεπτότητα είναι ε, σταθερή. Για r>b υπάρχει αέρας, χωρίς φορτία.
Να υπολογιστούν:
α) Το ηλεκτροστατικό δυναμικό $0<r\le\alpha$ και για $b\le r<\infty$ σε σφαιρικές συντεταγμένες. (22%)
β) Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο q_1.(4%)





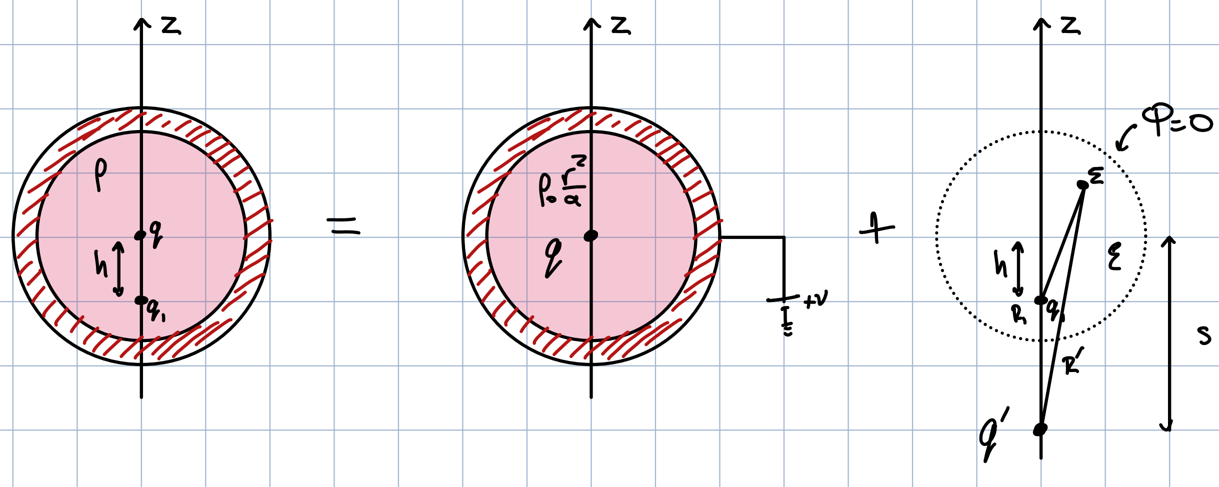
Θέμα 1ο. Ψάχνουμε

α) Φ_1, Φ_2 σε σφαιρικές συντεταγμένες

β) δύναμη $\vec{F}$ στο q_1

Με επαλληλία:

(1) (2)



Για το πρώτο πρόβλημα ισχύει η σφαιρική συμμετρία,

Άρα $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi}{dr}\right) = -\rho_0 \frac{r^2}{\varepsilon a^2} \Rightarrow$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon a^2} r^4 \Rightarrow r^2 \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{\rho_0 r^5}{5\varepsilon a^2} + C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{\rho_0 r^5}{5\varepsilon a^2 r^2} + \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow \Phi = \int -\frac{\rho_0 r^3}{5\varepsilon a^2} + \frac{C_1}{r^2}\, dr$$

$\Phi = -\frac{\rho_0 r^4}{20\varepsilon a^2} - \frac{C_1}{r} + C_1'$, για να βρω τα C_1, C_1' αρκεί να βάλω

$\Phi(r=a) = V$ και $\Phi_{r\to 0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$

$$\Phi(r\to 0) = -\frac{C_1}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \Rightarrow C_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}$$

$$\Phi(r=a) = -\frac{\rho_0 a^2}{20\varepsilon} + \frac{q}{4\pi\varepsilon a} + C_1' = V$$

$$C_1' = V + \frac{\rho_0 a^2}{20\varepsilon} - \frac{q}{4\pi\varepsilon a}$$

$$\Phi = -\frac{\rho_0 (r^4 - a^4)}{20\varepsilon a^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) + V$$

Ενώ για το δεύτερο πρόβλημα

σελίδα 62 $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{\rho} + \frac{q'}{\rho'}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{(r^2+h^2-2rh\cos\theta)^{1/2}} - \frac{a/d}{\left(r^2+\frac{a^4}{h^2}-2r\frac{a^2}{h}\cos\theta\right)^{1/2}}\right]$

Άρα το Φ για $0<r<a$ του αρχικού μας προβλήματος είναι

$$\boxed{\Phi_1 = -\frac{\rho_0(r^4-a^4)}{20\varepsilon a^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{(r^2+h^2-2rh\cos\theta)^{1/2}} - \frac{a/d}{\left(r^2+\frac{a^4}{h^2}-2r\frac{a^2}{h}\cos\theta\right)^{1/2}}\right] + V}$$

για $r>b$ έχω μόνο το V με σφαιρική συμμετρία, άρα

$$\nabla^2\varphi=0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)=0$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dr}=c_1 \quad \varphi=\int\frac{c_1}{r^2}dr+c_1'$$

$$\varphi=-\frac{c_1}{r}+c_1'$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(r=b)=-\frac{c_1}{b}+c_1'=V \\ \varphi(r\to\infty)=0 \text{ (σφαίρες)}\end{array}\right\} \quad c_1=-bV$$

$$\boxed{\varphi_2=V\frac{b}{r}}$$

β) Για να βρω την δύναμη στο q_1, αρκεί να βρω από την επαλληλία το κάθε φορτίο πως ασκεί την δύναμη του στο q_1

Για το πρώτο σχήμα θα πάρω Ν. Gauss για ηλεκτρικό με $r=h$

Άρα έχω:

$E_r\cdot 4\pi r^2=q+\int\rho\, dV$, αφού είναι για $r=h$, έχω σφαιρική συμμετρία,

$$=q+\int\rho_0\frac{r^2}{a^2}4\pi r^2dr=q+\frac{\rho_0 4\pi}{a^2}\frac{r^5}{5}$$

$\Rightarrow E_r(r=h)=\dfrac{q}{4\pi h^2}+\dfrac{\rho_0 h^3}{5a^2}$, $F=qE$, και αφού το F είναι στον $-\hat{z}$

τότε για το (1) $\vec{F}_1=-\left(\dfrac{q^2}{4\pi h^2}+\dfrac{\rho_0 q h^3}{5a^2}\right)\hat{z}$

για το σχήμα (2) η $\vec{F}$ είναι πάλι στο $-\hat{z}$ (αφού το $q'=-q_1\frac{a}{h}$ άρα ελκτική)

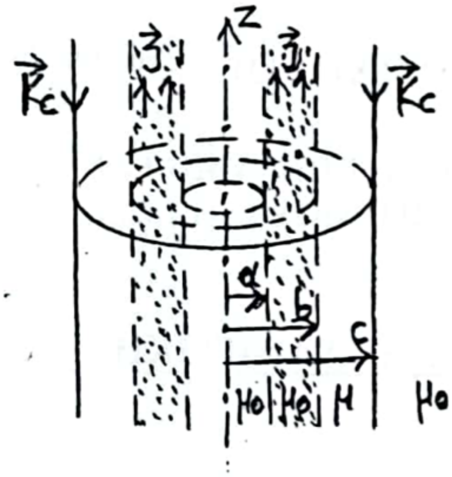
$$\vec{F}_2=-\frac{q_1^2 a}{4\pi\varepsilon h(s-h)^2}\hat{z}$$

Άρα $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2\Rightarrow$

$$\vec{F}_{q_1}=-\left[\frac{q^2}{4\pi h^2}+\frac{\rho_0 q h^3}{5a^2}+\frac{q_1^2 a}{4\pi\varepsilon h(s-h)^2}\right]\hat{z}$$

Θέμα 3ο (37%)

Η κυλινδρική διάταξη του σχήματος έχει άπειρο μήκος στη διεύθυνση z. Στην περιοχή $a<r<b$ (r είναι η απόσταση από τον άξονα z) ρέει συνεχές ρεύμα έντασης I, με χωρική πυκνότητα $\vec{J}=\hat{z}J_0 r^3/\alpha^3$. Η επιστροφή του ρεύματος I γίνεται από την κυλινδρική επιφάνεια με r=c, με επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K}_c=-\hat{z}K_c$. Η μαγνητική διαπερατότητα είναι $\mu=\mu_0 c/r$ στην περιοχή με $b<r<c$ και μ_0 στον υπόλοιπο χώρο.



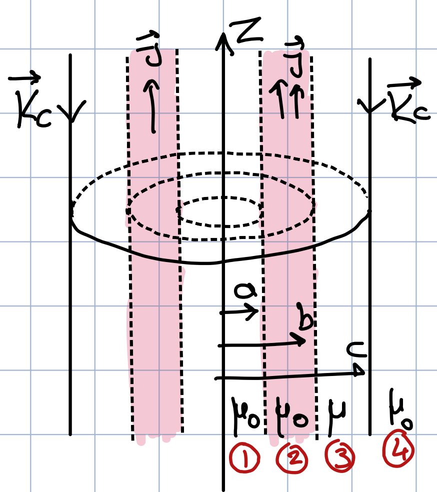
Ζητούνται συναρτήσει του I:

α) Τα J_0, K_c και η ένταση του μαγνητικού πεδίου για $0\le r<\infty$.(12%)

β) Το διανυσματικό δυναμικό για $0\le r<\infty$, με αναφορά για r=0.(14%)

γ) Η μαγνήτιση για b<r<c, η χωρική πυκνότητα των ρευμάτων μαγνήτισης εκεί και η επιφανειακή πυκνότητα του ρεύματος μαγνήτισης για r=b.(7%)

δ) Ο εξωτερικός συντελεστής αυτεπαγωγής (περιοχή με b<r<c), ανά μονάδα μήκους ως προς z.(4%)



Θέμα 3: Ψάχνουμε

α) $J_0, K_c, \vec{H}$ παντού συναρτήσει του I

β) $\vec{A}$ παντού με $\vec{A}_{αν}(r=0)=0$

γ) $\vec{M}_3$, $\vec{J}_{M_3}$, $\vec{K}_{M_3}(r=b)$

δ) $L_{εξ}=;$

α) Όλο το ρεύμα I φεύγει προς $+\hat{z}$ ως χωρικό ρεύμα $\vec{J}$, άρα

$$\int \vec{J}\,d\vec{S}=I \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_a^b J_0\frac{r^3}{a^3}\,r\,dr\,d\varphi=\frac{J_0 r^5}{5a^3}\cdot 2\pi\Big]_{r=a}^{b}=\frac{2\pi J_0(b^5-a^5)}{5a^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{J_0=\frac{5Ia^3}{2\pi(b^5-a^5)}}$$

Ξέρουμε ότι όλο το ρεύμα I_0 επιστρέφει στην επιφάνεια για $r=c$, άρα

$$I=\int \vec{K}_c\, d\ell = -2\pi c\, K_c \Rightarrow \boxed{K_c = -\frac{I}{2\pi c}}$$

Όπως και στα ελεύθερα φορτία υπάρχει μόνο H_φ, B_φ και για τις περιοχές ① κ ④ $H_{\varphi_4} = H_{\varphi_1} = 0 = B_{\varphi_1} = B_{\varphi_4}$ μαζί στην περ ① δεν έχω καθόλου ρεύμα και στην ④ έχω $+I-I=0$

Περιοχή ② $a<r<b$, έστω κύκλος ακτίνας r $\oint_C \vec{H}d\vec{\ell} = \int \vec{J} d\vec{S}$

$$2\pi r H_{\varphi_2} = \int_0^{2\pi}\int_a^r J_0 \frac{r^3}{a^3} dS_z = \int_0^{2\pi}\int_a^r \frac{5Ir^3}{2\pi(b^5-a^5)} r\,dr\,d\varphi = \frac{I(r^5-a^5)}{(b^5-a^5)}$$

Άρα $H_{\varphi_2} = \frac{I}{2\pi r}\frac{(r^5-a^5)}{(b^5-a^5)}$, $B_{\varphi_2} = \frac{I\mu_0}{2\pi r}\frac{(r^5-a^5)}{(b^5-a^5)}$

Περιοχή ③ $b<r<c$, ξανά κύκλος ακτίνας r

$$2\pi r H_{\varphi_3} = \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_a^b \vec{J} d\vec{S}}_{I} \Rightarrow 2\pi r H_{\varphi_3} = I$$

$$\Rightarrow H_{\varphi_3} = \frac{I}{2\pi r} \qquad B_{\varphi_3} = \frac{I\mu}{2\pi r},\ \mu = \mu_0\frac{c}{r} \Rightarrow B_{\varphi_3} = \frac{I\mu_0 c}{2\pi r^2}$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_4 = \vec{B}_1 = \vec{B}_4 = 0$$

$$\vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi r}\frac{(r^5-a^5)}{(b^5-a^5)}\hat{\varphi}, \quad \vec{B}_2 = \frac{I\mu_0}{2\pi r}\frac{(r^5-a^5)}{(b^5-a^5)}\hat{\varphi}$$

$$\vec{H}_3 = \frac{I}{2\pi r}\hat{\varphi}, \quad \vec{B}_3 = \frac{I\mu_0 c}{2\pi r^2}\hat{\varphi}$$

β) Αφού όλα τα ρεύματα έχουν διεύθυνση $\hat{z}$, τότε $\exists$ μόνο $A_z(r)$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} : \quad B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \Rightarrow A_z = -\int B_\varphi \, dr + C$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 = \frac{\partial}{\partial z}$$

περιοχή ① $\quad A_{z_1} = C_1, \quad A_{z_1}(r=a) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{A_{z_1} = 0}$

περιοχή ② $\quad A_{z_2} = -\int \frac{I\mu_0}{2\pi r} \frac{(r^5 - a^5)}{(b^2 - a^2)} dr + C_2 = -\frac{I\mu_0}{2\pi(b^2-a^2)} \int \frac{r^5 - a^5}{r} dr + C_2$

$$A_{z_2} = -\frac{I\mu_0}{2\pi(b^2-a^2)}\left[\frac{r^5}{5} - a^5 \ln r\right] + C_2, \quad A_{z_2}(r=a) = -\frac{I\mu_0}{2\pi(b^2-a^2)}\left[\frac{a^5}{5} - a^5 \ln a\right] + C_2 = 0$$

$$C_2 = \frac{I\mu_0}{2\pi(b^2-a^2)}\left[\frac{a^5}{5} - a^5 \ln a\right]$$

Άρα $\boxed{A_{z_2}(r) = -\frac{I\mu_0}{2\pi(b^2-a^2)}\left[\frac{r^5 - a^5}{5} - a^5 \ln \frac{r}{a}\right]}$

περιοχή ③ $\quad A_{z_3} = -\int B_{\varphi_3} dr + C_3 = -\int \frac{I\mu_0 c}{2\pi r^2} dr + C_2$

$$= +\frac{I\mu_0 c}{2\pi r} + C_2$$

, για το $\vec{A}$ υπάρχει συνέχεια, άρα

$A_{z_3}(r=b) = A_{z_2}(r=b)$

$$A_{z_2}(r=b) = -\frac{I\mu_0}{2\pi(b^2-a^2)}\left[\frac{b^5 - a^5}{5} - a^5 \ln \frac{b}{a}\right] = A_{z_3}(r=b) = \frac{I\mu_0 c}{2\pi b} + C_2$$

$$C_2 = -\frac{I\mu_0}{2\pi(b^2-a^2)}\left[\frac{b^5 - a^5}{5} - a^5 \ln \frac{b}{a}\right] - \frac{I\mu_0 c}{2\pi b}$$

$$\boxed{A_{z_3}(r) = \frac{I\mu_0 c}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) - \frac{I\mu_0}{2\pi(b^2-a^2)}\left[\frac{b^5 - a^5}{5} - a^5 \ln \frac{b}{a}\right]}$$

$$A_{z_4} = C_4 \Rightarrow A_{z_3}(r=c) = A_{z_4}(r=c)$$

$$\boxed{A_{z_4} = \frac{I\mu_0 c}{2\pi}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right) - \frac{I\mu_0}{2\pi(b^2-a^2)}\left[\frac{b^5-a^5}{5} - a^5 \ln\frac{b}{a}\right]}$$

γ) $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$, εδώ για περιοχή 3

$$\boxed{\vec{M}_3 = \frac{I(c-r)}{2\pi r^2}\hat{\varphi}}$$

$$\vec{J}_{M_3} = \nabla \times \vec{M}_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r M_{\varphi_3}) = -\frac{Ic}{2\pi r^3} \Rightarrow \boxed{\vec{J}_{M_3} = -\frac{Ic}{2\pi r^3}\hat{z}}$$

$$K_M(r=b) = \hat{n}\times(\vec{M}_3 - \cancel{\vec{M}_2}) = \hat{r}\times(\vec{M}_3(r=b)) = \hat{r}\times\hat{\varphi}\left(\frac{I(c-b)}{2\pi r^2}\right) = \hat{z}\,\frac{I(c-b)}{2\pi r^2}$$

σε περιοχές με (μ_0) η μαγνήτιση είναι 0

$$\boxed{\vec{K}_M(r=b) = \frac{I(c-b)}{2\pi r^2}\hat{z}}$$

δ) $$L = \frac{\int_S \vec{B}\,d\vec{S}}{I} = \frac{\int_0^{\ell}\int_b^{c} \frac{\cancel{I}\mu_0 c}{2\pi r^2}\,dr\,dz}{\cancel{I}} \Rightarrow L_\ell = \left.\frac{\mu_0 c}{\pi r}\right]_b^c \Rightarrow \boxed{L_\ell = \frac{\mu_0}{\pi} - \frac{\mu_0 b}{\pi c}}$$

ανά μονάδα μήκους του z