

人工智能数学基础-作业 7(总分:70)

2025 年 11 月 7 日

1 作业提交

作业文件命名为“自己姓名-学号-人工智能数学基础 7”。例：詹姆斯-2024000274-人工智能数学基础 7

作业发送至助教邮箱并抄送至王老师邮箱。邮件的标题为：自己姓名-学号-人工智能数学基础 7

张硕助教邮箱：zhangshuo1422@ruc.edu.cn

王老师邮箱：wang.zihe@ruc.edu.cn

作业提交的 Deadline 为 2025 年 11 月 12 日 24:00

2 作业内容

2.1 10 分

计算导数 $f'(x)$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$

2.2 10 分

计算下面函数的微分 $\frac{df}{dx}$, 并给出每一个偏导数的维度。

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}z\right)$$

$$z = g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}$$

其中, $\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^D, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{D \times D}$ 。

2.3 10 分

计算 $\frac{df}{dx}$, 其中 $f(\mathbf{x}) = \text{tr}(\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \sigma^2 \mathbf{I}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$, $\text{tr}(\mathbf{A})$ 是 \mathbf{A} 的迹, 即对角线元素 A_{ii} 的和。

2.4 10 分

证明：函数变化最快的方向是梯度方向。

2.5 10 分

写出下面这个二次函数的梯度和 Hessian 矩阵

$$f(x) = x^T A x + b^T x + c,$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 向量 $b \in \mathbb{R}^n$, 以及 $c \in \mathbb{R}$ 。

2.6 10 分

设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $f(x) := \langle Ax, x \rangle$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ 。计算 f 在点 $(1, 1)^T$ 的二阶泰勒展开式。

2.7 10 分

计算导数 $f'(x)$,

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$$

其中 $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ 是常数.