人工智能数学基础-作业 3（参考答案，满分：90）

2025 年 9 月 29 日

1 作业书写

（与原题一致，略。）

2 作业提交

（与原题一致，略。）

3 作业内容（参考答案）

3.1 10 分

题： 计算两个向量 $(3,-4)^\top$，$(7,-8)^\top$ 组成的平行四边形面积。

解： 面积等于 2×2 行列式的绝对值：

$$S=\left|\det\begin{bmatrix}3 & 7\\ -4 & -8\end{bmatrix}\right|=|\,3\cdot(-8)-(-4)\cdot 7\,|=|\,-24+28\,|=\boxed{4}. \tag{1}$$

3.2 20 分

设

$$B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

(a) $\det(B)$　按第 2 行展开或视为 2×2 与 1×1 的块对角：

$$\det(B)=3\cdot\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=3\,(4-1)=\boxed{9}. \tag{2}$$

(b) B^{-1}　B 对应于索引 $\{1,3\}$ 的 2×2 块 $C=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$ 与中间的标量 3 的直和，

$$C^{-1}=\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}. \tag{3}$$

将 C^{-1} 嵌回 $(1,3)$ 行列，得

$$\boxed{B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\end{bmatrix}.} \tag{4}$$

3.3　20 分

仍取上题矩阵

$$B=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}.$$

占优特征值与特征向量　特征分解来自于子块 $C=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$ 的谱：$\sigma(C)=\{3,1\}$，再连同中间坐标的特征值 3。因此

$$\operatorname{spec}(B)=\{\,3,3,1\,\},\qquad \lambda_{\max}=\boxed{3}. \tag{5}$$

对应 $\lambda=3$ 的特征空间

$$\mathcal{E}_3=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}, \tag{6}$$

而 $\lambda=1$ 的特征向量可取

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}. \tag{7}$$

设初始向量 $v^{(0)}=(d_1,d_2,d_3)^{\mathsf T}$（由学号后三位组成）。将 $v^{(0)}$ 分解到上述正交基

$$v_1=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad v_3=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

上，可得系数

$$c_1=\tfrac{d_1+d_3}{\sqrt{2}},\qquad c_2=d_2,\qquad c_3=\tfrac{d_1-d_3}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

于是

$$B^k v^{(0)} = 3^k(c_1v_1 + c_2v_2) + 1^k c_3 v_3. \tag{9}$$

若 $(d_1 + d_3, d_2) \neq (0, 0)$，则归一化的幂法序列 $v^{(k)} = \dfrac{B^k v^{(0)}}{\|B^k v^{(0)}\|}$ 收敛到

$$\lim_{k\to\infty} v^{(k)} \ \parallel \ c_1v_1 + c_2v_2 = \begin{bmatrix} \frac{d_1+d_3}{2} \\ d_2 \\ \frac{d_1+d_3}{2} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

即收敛到占优特征空间 $\mathcal{E}_3$ 中由初始投影决定的方向。若 $d_2 = 0$ 且 $d_1 = -d_3$（初始向量恰与 $\mathcal{E}_3$ 正交），则幂法停留在 $\lambda = 1$ 的方向，不体现占优特征值。

3.4 20 分

已知

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 是 \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix} 的特征向量.$$

(1) 求 a, b, λ　由 $A\xi = \lambda\xi$，

$$\begin{aligned} &第\ 1\ 行:\ 2 - 1 - 2 = -1 = \lambda \cdot 1 \ \Rightarrow\ \lambda = \boxed{-1}; \\ &第\ 2\ 行:\ 5 + a - 3 = a + 2 = \lambda \cdot 1 \ \Rightarrow\ a = \boxed{-3}; \\ &第\ 3\ 行:\ -1 + b + 2 = b + 1 = \lambda \cdot (-1) \ \Rightarrow\ b = \boxed{0}. \end{aligned} \tag{11}$$

(2) A **是否相似于对角矩阵？**　代入 $a = -3, b = 0$ 得

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

其特征多项式为

$$\chi_A(t) = \det(tI - A) = (t + 1)^3, \tag{12}$$

几何重数 $\dim\ker(A + I) = 1$（仅与 ξ 共线的一维子空间），故不可对角化。

$$\boxed{A\ 不相似于对角矩阵}. \tag{13}$$

3.5 20 分

设

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) 对角化 A 具有互异特征值 $1, 2, 3, 4$，对应一组线性无关特征向量可取

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 1, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda_2 = 2, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ &\lambda_3 = 3, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \lambda_4 = 4, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

令

$$P = \begin{bmatrix} v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \operatorname{diag}(1, 2, 3, 4), \tag{15}$$

则

$$\boxed{A = PDP^{-1}}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \\ -1 & 6 & -3 & -8 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

(b) 计算 A^{10} 由对角化公式

$$A^{10} = P\, D^{10}\, P^{-1} = P \operatorname{diag}\big(1^{10}, 2^{10}, 3^{10}, 4^{10}\big)\, P^{-1}. \tag{17}$$

直接化简得

$$\boxed{A^{10} = \begin{bmatrix} 174076 & -1738737 & 1393656 & 2958318 \\ 57002 & -2321065 & 2209108 & 4473172 \\ 59048 & -1284767 & 1166672 & 2392390 \\ -1023 & -1042437 & 1045506 & 2088967 \end{bmatrix}}. \tag{18}$$