

# 作业 8

2025 年 11 月 25 日

## 1 10 分

证明：如果定义在某个区间上的函数  $f$  和  $g$  都是凸函数，且都非减（或者都非增），二者都大于零，则函数  $fg$  在此区间上是凸函数。

证明. 不妨假设函数  $f$  和  $g$  二阶可导。记  $h(x) = f(x)g(x)$ 。

对  $h(x)$  求二阶导数：

$$\begin{aligned}h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\h''(x) &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)\end{aligned}\quad (5 \text{ 分})$$

根据题目已知条件分析上式各项符号：

1. 由于  $f$  和  $g$  均为凸函数，故  $f''(x) \geq 0$ ， $g''(x) \geq 0$ 。

2.  $f$  和  $g$  都大于零，即  $f(x) > 0$ ， $g(x) > 0$ 。

由上述两点可知，第一项  $f''(x)g(x) \geq 0$ ，第三项  $f(x)g''(x) \geq 0$ 。

3. 由于  $f$  和  $g$  都非减（或者都非增），则  $f'(x), g'(x)$  同号。因此，有  $2f'(x)g'(x) \geq 0$ 。

综上所述， $h''(x) \geq 0$ ，函数  $fg$  在此区间上是凸函数。

□

## 2 20 分

证明  $x^* = (1, 1/2, -1)$  是优化问题

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad & (1/2)x^T Px + q^T x + r \\ \text{subject to} \quad & -1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3\end{aligned}$$

的最优解，其中

$$P = \begin{bmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -22.0 \\ -14.5 \\ 13.0 \end{bmatrix}, \quad r = 1$$

证明. 由于矩阵  $P$  是对称正定的，目标函数是凸函数。因此，满足一阶必要条件（KKT 条件）的点即为全局最优解。（10 分）

目标函数的梯度为：

$$\nabla f(x) = Px + q$$

将  $x^* = [1, 1/2, -1]^T$  代入计算：

$$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$$

对于约束  $-1 \leq x_i \leq 1$ ，最优解  $x^*$  必须满足以下条件：

- 若  $x_i^* = -1$ （下界），则需  $\nabla f(x^*)_i \geq 0$ ；
- 若  $-1 < x_i^* < 1$ （内部），则需  $\nabla f(x^*)_i = 0$ ；
- 若  $x_i^* = 1$ （上界），则需  $\nabla f(x^*)_i \leq 0$ 。

综上所述， $x^*$  满足所有最优性条件。

□

### 3 30 分

考虑优化问题

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x^2 + 1 \\ & \text{subject to} && (x - 2)(x - 4) \leq 0, \end{aligned}$$

其中变量  $x \in \mathbf{R}$ 。

### 3.1 10 分

求解可行集, 最优值以及最优解。

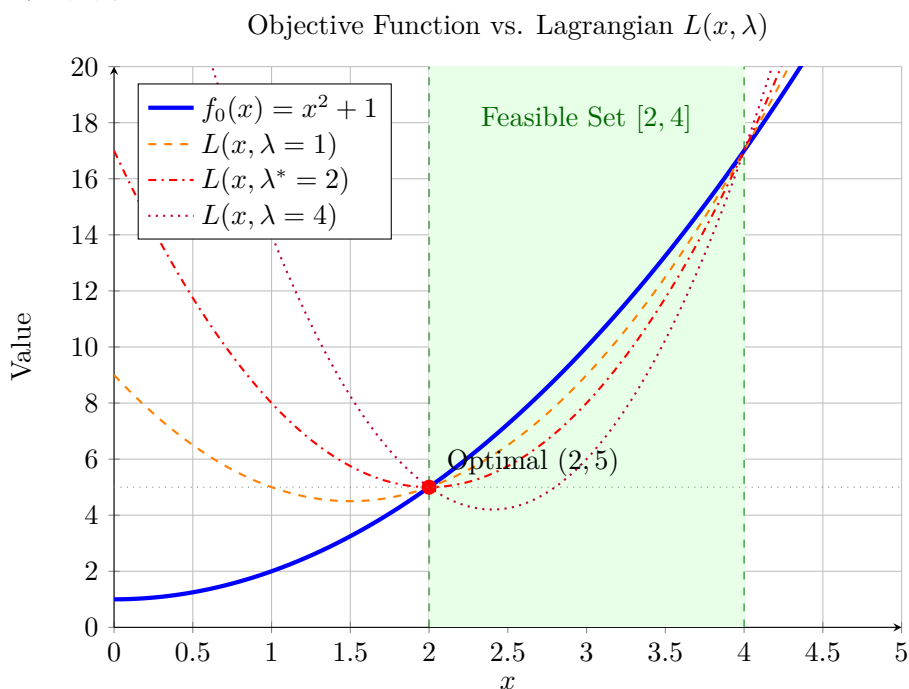
可行集为:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 4\} \quad (5 \text{ 分})$$

目标函数在区间  $[2, 4]$  上单调递增。因此, 最小值在区间左端点  $x = 2$  处取得。因此, 最优解:  $x^* = 2$ ; 最优值:  $p^* = 2^2 + 1 = 5$

### 3.2 10 分

绘制目标函数根据  $x$  变化的图像。在同一幅图中, 标出可行集, 最优点及最优值, 选择一些正的 Lagrange 乘子  $\lambda$ , 绘出 Lagrange 函数  $L(x, \lambda)$  关于  $x$  的变化曲线。



利用图像, 证明下界性质 (对任意  $\lambda \geq 0, p^* \geq \inf_x L(x, \lambda)$  )。

证明. Lagrange 函数定义为  $L(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda f_1(x)$ , 其中  $\lambda \geq 0$ 。即:

$$L(x, \lambda) = (x^2 + 1) + \lambda(x^2 - 6x + 8)$$

对于任意可行点  $\tilde{x}$  (即满足  $f_1(\tilde{x}) \leq 0$ ) 和任意  $\lambda \geq 0$ , 由于  $\lambda \geq 0$  且  $f_1(\tilde{x}) \leq 0$ , 有  $\lambda f_1(\tilde{x}) \leq 0$ 。因此:

$$L(\tilde{x}, \lambda) = f_0(\tilde{x}) + \lambda f_1(\tilde{x}) \leq f_0(\tilde{x})$$

所以:

$$g(\lambda) = \inf_x L(x, \lambda) \leq L(x^*, \lambda) \leq p^*$$

□

### 3.3 10 分

推导 Lagrange 对偶函数  $g$ , 求解对偶问题最优值以及对偶最优解  $\lambda^*$ 。此时强对偶性是否成立?

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(1 + \lambda)x - 6\lambda = 0 \implies x(\lambda) = \frac{3\lambda}{1 + \lambda}$$

将  $x(\lambda)$  代入  $L(x, \lambda)$  得到  $g(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= (1 + \lambda) \left( \frac{3\lambda}{1 + \lambda} \right)^2 - 6\lambda \left( \frac{3\lambda}{1 + \lambda} \right) + (1 + 8\lambda) \\ &= \frac{-\lambda^2 + 9\lambda + 1}{1 + \lambda} \end{aligned} \quad (5 \text{ 分})$$

对偶问题为: maximize  $g(\lambda)$  subject to  $\lambda \geq 0$

令  $g'(\lambda) = 0$ , 解得  $\lambda = 2$  或  $\lambda = -4$  (舍去, 因需  $\lambda \geq 0$ )。

检查  $\lambda^* = 2$  时的二阶导数或根据函数性质可知这是最大值点。对偶最优值为:

$$d^* = g(2) = 5 = p^*$$

强对偶性成立。

## 4 20 分

求解线性规划

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c^T x \\ &\text{subject to} && Gx \preceq h \\ &&& Ax = b \end{aligned}$$

的对偶函数。给出对偶问题，并将隐式等式约束显式表达。

引入拉格朗日乘子  $\lambda$  (对应不等式约束  $Gx \preceq h$ ) 和  $\nu$  (对应等式约束  $Ax = b$ )。

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \nu) &= c^T x + \lambda^T (Gx - h) + \nu^T (Ax - b) \\ &= (c + G^T \lambda + A^T \nu)^T x - h^T \lambda - b^T \nu \end{aligned}$$

$$g(\lambda, \nu) = \inf_x L(x, \lambda, \nu) = \begin{cases} -h^T \lambda - b^T \nu & \text{if } G^T \lambda + A^T \nu + c = 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

对偶问题是最大化对偶函数，并满足  $\lambda \succeq 0$ 。

因此，对偶问题为：

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && -h^T \lambda - b^T \nu \\ &\text{subject to} && G^T \lambda + A^T \nu + c = 0 \\ &&& \lambda \succeq 0 \end{aligned}$$

## 5 20 分

问题

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3) \\ &\text{subject to} && x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \end{aligned}$$

不是凸优化问题，但是强对偶性亦成立。给出 KKT 条件。找出满足 KKT 条件的所有  $x, \nu$ ，并给出最优解。

将问题写成标准形式：

$$\text{minimize } x^T Q x + 2c^T x \quad \text{subject to } x^T x = 1$$

其中  $Q = \text{diag}(-3, 1, 2)$ ,  $c = [1, 1, 1]^T$ 。拉格朗日函数为：

$$L(x, \nu) = x^T Q x + 2c^T x + \nu(x^T x - 1)$$

KKT 条件：

$$\begin{cases} (-3 + \nu)x_1 = -1 \\ (1 + \nu)x_2 = -1 \\ (2 + \nu)x_3 = -1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

求解的方程为久期方程：

$$\frac{1}{(\nu - 3)^2} + \frac{1}{(\nu + 1)^2} + \frac{1}{(\nu + 2)^2} = 1$$

1.  $\nu \approx -3.14928981$

$$x \approx \begin{bmatrix} 0.1626 & 0.4653 & 0.8701 \end{bmatrix}^T$$

2.  $\nu \approx 0.22350900$

$$x \approx \begin{bmatrix} 0.3602 & -0.8173 & -0.4497 \end{bmatrix}^T$$

3.  $\nu \approx 1.89189898$

$$x \approx \begin{bmatrix} 0.9024 & -0.3458 & -0.2569 \end{bmatrix}^T$$

4.  $\nu \approx 4.03522595$

最优解：

$$x \approx \begin{bmatrix} -0.9660 & -0.1986 & -0.1657 \end{bmatrix}^T \quad (5 \text{ 分})$$

## 6 10 分

证明  $f$  是凸函数的充要条件是其具有半正定的 Hessian 矩阵。

证明.  $\Rightarrow$ : (5 分)

假设  $f$  是凸函数。根据凸函数的一阶条件，对于任意  $x \in S$ ，有：

$$f(x + tv) \geq f(x) + t\nabla f(x)^T v$$

其中  $t$  是足够小的标量, 使得  $x + tv \in S$ 。对  $f(x + tv)$  在  $x$  处进行二阶泰勒展开:

$$f(x) + t\nabla f(x)^T v + \frac{t^2}{2} v^T \nabla^2 f(x) v + o(t^2) \geq f(x) + t\nabla f(x)^T v$$

化简得:

$$\frac{t^2}{2} v^T \nabla^2 f(x) v + o(t^2) \geq 0$$

两边同时除以  $t^2$  (假设  $t \neq 0$ ) 并取极限  $t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} v^T \nabla^2 f(x) v + \frac{o(t^2)}{t^2} \right) \geq 0 \implies v^T \nabla^2 f(x) v \geq 0$$

因为  $x$  和  $v$  是任意的, 所以  $\nabla^2 f(x)$  是半正定的。

$\Leftarrow$ : (5 分)

假设对于任意  $x \in S$ , Hessian 矩阵  $\nabla^2 f(x)$  都是半正定的。取  $S$  中任意两点  $x$  和  $y$ 。根据带有拉格朗日余项的二阶泰勒定理, 存在某个  $z$  位于连接  $x$  和  $y$  的线段上 (即  $z = x + \theta(y - x), \theta \in (0, 1)$ ), 使得:

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{1}{2} (y - x)^T \nabla^2 f(z) (y - x)$$

由假设可知,  $\nabla^2 f(z)$  是半正定的, 因此对于向量  $v = y - x$ , 二次型项非负:

$$\frac{1}{2} (y - x)^T \nabla^2 f(z) (y - x) \geq 0$$

因此:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$$

这正是凸函数的一阶充要条件。故  $f$  是凸函数。

□