第一题

(1) 若 $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$，显然有 $a - b \in \mathbb{Z}$，因此整数集 $\mathbb{Z}$ 对普通的减法运算封闭。

(2) 令 $b \in \mathbb{Z}^*$，则 $\exists a = kb + 1 \in \mathbb{Z}^* \, (k \in \mathbb{Z})$ 使得 $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Z}^*$，因此非零整数集 $\mathbb{Z}^*$ 对普通的除法运算不封闭。

第二题

$\because a, b$ 是有限阶元
$\therefore$ 令 $|a| = m, |b| = n \, (m, n \in \mathbb{Z}^+)$
$\therefore (b^{-1}ab)^m = (b^{-1}abb^{-1}ab...b^{-1}ab)$
设 e 为群 G 的单位元
则 $b^{-1}b = e$
$\therefore (b^{-1}ab)^m = b^{-1}a^m b = b^{-1}b = e$
若 $\exists k < m (k \in \mathbb{Z}^+)$, 使得 $(b^{-1}ab)^k = e$
则一定有 $a^k = e$, 与 $|a| = m$ 矛盾
$\therefore |b^{-1}ab| = m = |a|$
证明完毕

第三题

$\because \; R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$
$\therefore \; R^2 = R \circ R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$（新增 $(2,2),(3,1)$）
又 $\because \; R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$，无新增
$\therefore \; t(R) = \bigcup_{n \geq 1} R^n = R \cup R^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

第四题

(1) 若封闭, 则有 $ab \in A$、$a^2 \in A$ 等
若要满足某个数的平方仍属于集合 A, 则 a,b,c 的取值只能是 0、1 或-1
若 a, b, c 取值不为 0,1,-1, 则 $a^2 \neq a$
此时若满足封闭性则必有 $b = a^2$ 或 $c = a^2$
同理 b, c 则可推出 $b = b^4$ 或 $c = c^4$, 与 a, b, c 取值不为 0,1,-1 矛盾
综上，可以确定 a, b, c 的取值只能是 0、1 或 -1 使得 A 对普通乘法封闭

(2) 同 (1) 可知若满足封闭性，则 $a + b \in A$、$a + a \in A$
此时令 $a = 0$, 则 $b + b = c$, 从而有 $A = \{0, b, 2b\}$
显然由 $b \neq 0$ 可知该集合对普通加法不封闭
若 $a \neq 0$, 则同理可知该集合对普通加法依然不封闭
综上，无法确定 a, b, c 的取值使得 A 对普通加法封闭