

作业四

1. 第一题

由于每一列的元素和为 1，则 a, b, c :

$$0.1 + 0.3 + a = 1 \Rightarrow a = 0.6$$

$$0.2 + 0.6 + b = 1 \Rightarrow b = 0.2$$

$$0.8 + 0.1 + c = 1 \Rightarrow c = 0.1$$

因此，完整的矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

设稳态向量为 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ ，满足 $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ 。代入可得：

$$\begin{cases} 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.8\pi_3 = \pi_1 \\ 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.1\pi_3 = \pi_2 \\ 0.6\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.1\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

解得：

$$\pi_1 = \frac{34}{97}, \quad \pi_2 = \frac{33}{97}, \quad \pi_3 = \frac{30}{97}$$

故长期情况下，下雨、多云、下雪的概率为：

$$\frac{34}{97}, \quad \frac{33}{97}, \quad \frac{30}{97}.$$

2. 第二题

判断是否满足交换性：设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^\top$, 有

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$$

由于 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ ，则不满足交换性，所以该运算不构成内积。

3. 第三题

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$, 有

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{(2 \ 3 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}} = \sqrt{22}$$

2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^\top A \mathbf{y}$, 有

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{(2 \ 3 \ 3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}} = \sqrt{47}$$

4. 第四题

1. 计算可知 $r(A) = 3$, 令 $\pi_U(x) = Ac$, 则

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

有,

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 0 \\ 9 & 16 & -14 \\ 0 & -14 & 31 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 9 \\ 23 \\ -25 \end{pmatrix}$$

解得

$$A^\top Ac = A^\top x \Rightarrow c = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_U(x) = Ac = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$d(x, U) = \|x - \pi_U(x)\| = 2\sqrt{15}$$

5. 第五题

1. Oops!
2. AB 不一定对称正定。如

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

此时 A, B 均为对称正定矩阵，但

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (AB)^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq AB,$$

3. A^{-1} 一定正定对称。由于 A 为对称正定矩阵，则

$$(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1} = A^{-1},$$

故 A^{-1} 仍为对称矩阵。并且对于任意 $x \neq 0$, 令 $y = A^{-1}x \neq 0$, 则

$$x^\top A^{-1}x = y^\top Ay > 0.$$

因此 A^{-1} 也是对称正定矩阵。

6. 第六题

由于课件中图与文字有出入，并且计算量过大，椭圆方程列对即可。

按照 $(0, 2), (2, 1), (1, -1), (-1, -2), (-3, 1), (-1, -1)$ 计算如下。考虑椭圆方程：

$$A \cdot X^2 + Y^2 + C \cdot XY + D \cdot X + E \cdot Y + F = 0$$

代入六个点的数值：

$$\begin{aligned} A \cdot 0^2 + 2^2 + C \cdot 0 + D \cdot 0 + E \cdot 2 + F &= 0 \\ A \cdot 2^2 + 1^2 + C \cdot 2 + D \cdot 2 + E + F &= 0 \\ A \cdot 1^2 + 1^2 - C + D - E + F &= 0 \\ A \cdot 1^2 + 2^2 + C \cdot 2 - D - E \cdot 2 + F &= 0 \\ A \cdot 3^2 + 1^2 - C \cdot 3 - D \cdot 3 + E + F &= 0 \\ A + 1^2 + C - D - E + F &= 0 \end{aligned}$$

整理得到：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 9 & -3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} A \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

计算：

$$A^T A = \begin{pmatrix} 100 & -17 & -20 & 9 & 16 \\ -17 & 19 & 9 & -5 & 1 \\ -20 & 9 & 16 & 1 & -2 \\ 9 & -5 & 1 & 12 & 0 \\ 16 & 1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} -19 \\ -7 \\ 5 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

因此，最小二乘解为：

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{pmatrix} \frac{6213}{18190} \\ \frac{3087}{9095} \\ \frac{11421}{18190} \\ \frac{4092}{9095} \\ -\frac{24056}{9095} \end{pmatrix}$$

可得最佳拟合椭圆为：

$$6213 \cdot X^2 + 18190 \cdot Y^2 - 6174 \cdot XY + 11421 \cdot X - 8184 \cdot Y - 48112 = 0$$

如图 1 所示。

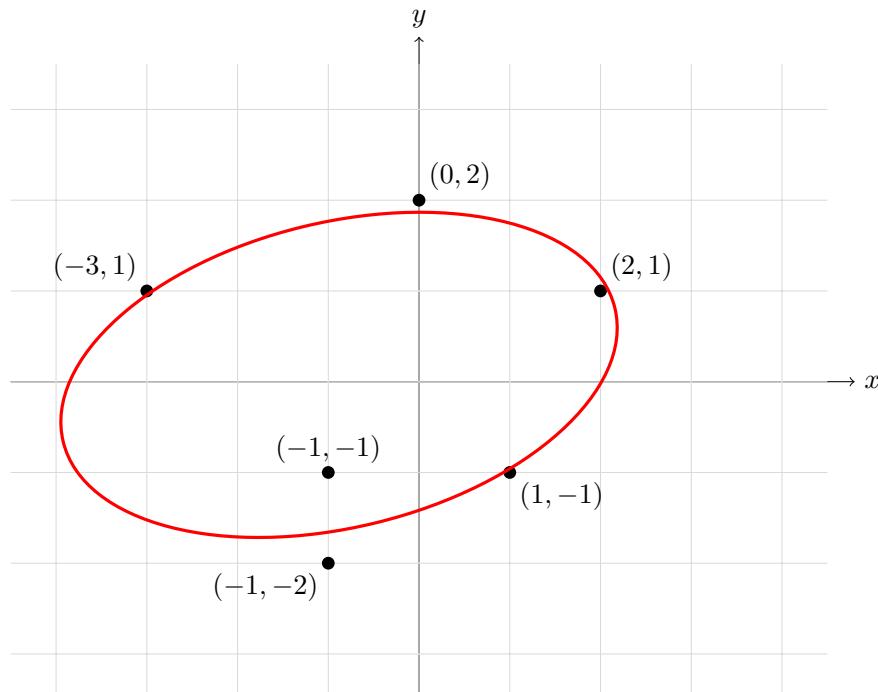


图 1：最佳拟合椭圆