人工智能数学基础-作业 5（参考答案，满分：80）

2025 年 10 月 20 日

1 作业提交

（与原题一致，略。）

2 作业内容（参考答案）

2.1 20 分

设四元数单位为 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$，向量视作纯虚四元数。

$$\boldsymbol{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k},\qquad \boldsymbol{b}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

基本恒等式（纯虚四元数）：

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}=-\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\ +\ \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}. \tag{1}$$

内积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\cdot 1+3\cdot(-2)+(-1)\cdot 1=2-6-1=-5. \tag{2}$$

外积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}&=\mathbf{i}(3\cdot 1-(-1)\cdot(-2))-\mathbf{j}(2\cdot 1-(-1)\cdot 1)+\mathbf{k}(2\cdot(-2)-3\cdot 1)\\ &=\mathbf{i}(3-2)-\mathbf{j}(2+1)+\mathbf{k}(-4-3)=\boxed{\mathbf{i}-3\mathbf{j}-7\mathbf{k}}.\end{aligned} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boxed{-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+7\mathbf{k}}. \tag{4}$$

乘法

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(-5)+(\mathbf{i}-3\mathbf{j}-7\mathbf{k})=\boxed{5+\mathbf{i}-3\mathbf{j}-7\mathbf{k}}. \tag{5}$$

2.2 10 分

命题：改变四元数相乘的顺序，其结果的实部不变。

证：任取 $p=a_0+\boldsymbol{a}$，$q=b_0+\boldsymbol{b}$，其中 $a_0,b_0\in\mathbb{R}$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为纯虚。由乘法展开及上式恒等式：

$$pq=(a_0b_0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\ +\ (a_0\boldsymbol{b}+b_0\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{6}$$

故

$$\Re(pq)=a_0b_0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}. \tag{7}$$

同理

$$qp=(b_0a_0-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\ +\ (b_0\boldsymbol{a}+a_0\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}), \tag{8}$$

而 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，故

$$\Re(qp)=b_0a_0-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=a_0b_0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\Re(pq). \tag{9}$$

证毕。

2.3 10 分

命题：$(pq)^*=q^*p^*$.

证：仍取 $p=a_0+\boldsymbol{a}$，$q=b_0+\boldsymbol{b}$。由

$$pq=(a_0b_0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\ +\ (a_0\boldsymbol{b}+b_0\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \tag{10}$$

及四元数共轭对实部不变、对虚部取负，得

$$(pq)^*=(a_0b_0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\ -\ (a_0\boldsymbol{b}+b_0\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{11}$$

而

$$\begin{aligned}q^*p^*&=(b_0-\boldsymbol{b})(a_0-\boldsymbol{a})=b_0a_0-b_0\boldsymbol{a}-a_0\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}\\&=b_0a_0-b_0\boldsymbol{a}-a_0\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\\&=a_0b_0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\big(a_0\boldsymbol{b}+b_0\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\big),\end{aligned} \tag{12}$$

（因 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$），与 $(pq)^*$ 一致，命题得证。

2.4 20 分

将向量绕轴 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)^\mathsf{T}$ 顺时针旋转 $120°$，再平移 $(2,3,4)^\mathsf{T}$ 的映射矩阵。

取单位轴 $\widehat{\boldsymbol{n}}=(1,1,1)^\mathsf{T}/\sqrt{3}$。采用右手定则：沿轴的正向观测，“顺时针 120°”对应角度 $\theta=-120°$。Rodrigues 公式给旋转矩阵

$$R=\cos\theta\,I+(1-\cos\theta)\,\widehat{\boldsymbol{n}}\,\widehat{\boldsymbol{n}}^\mathsf{T}+\sin\theta\,[\widehat{\boldsymbol{n}}]_\times, \tag{13}$$

其中 $[\widehat{\boldsymbol{n}}]_\times$ 为 $\widehat{\boldsymbol{n}}$ 的反对称阵。代入 $\cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2}$，$\sin(-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，并计算可得

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{即}(x, y, z)^\mathsf{T} \mapsto (y, z, x)^\mathsf{T}. \tag{14}$$

于是齐次坐标下的刚体变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}. \tag{15}$$

2.5 20 分

用四元数乘法表示“绕 $(1, 1, 0)^\mathsf{T}$ **逆时针旋转** 90°”。

设单位轴

$$\widehat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^\mathsf{T}, \qquad \theta = 90^\circ. \tag{16}$$

对应的单位四元数（旋转子）为

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \widehat{\boldsymbol{n}}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}}. \tag{17}$$

将向量 $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)^\mathsf{T}$ 视作纯虚四元数 $\underline{\boldsymbol{u}} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$，则旋转后的向量由

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{u}}' = q\,\underline{\boldsymbol{u}}\,q^*}, \tag{18}$$

给出（因 q 为单位四元数，$q^{-1} = q^*$）。