

人工智能数学基础-作业 2(总分:100)

2025 年 9 月 22 日

1 作业书写

请同学们使用[Overleaf](#)进行作业的书写，有关 Overleaf 的使用教程可参考[Overleaf 指南:30 分钟 LaTeX 入门](#)

Overleaf 如何输入中文小贴士：点击 menu 后将 compiler 设置为 XeLaTeX，并将 document-class 项目修改为 documentclass{ctexart}，就可以使用中文输入了。

参考资料：[Latex 常用符号整理](#)

2 作业提交

完成作业之后保存为 PDF 文件，将文件命名为“自己姓名-学号-人工智能数学基础 2”。例：张三-2024000274-人工智能数学基础 2

之后将文件发送至助教张硕邮箱并抄送至王老师邮箱

(邮件的标题为：自己姓名-学号-人工智能数学基础 2)

秦颖助教邮箱：qinying0420@ruc.edu.cn

王老师邮箱：wang.zihe@ruc.edu.cn

作业提交的 Deadline 为 2025 年 9 月 27 日 24:00

3 作业内容

3.1 10 分

先把矩阵 A 变为最简行阶梯型，再求非齐次线性方程 $Ax = b$ 的所有解 x 的集合 S ，其中 A 和 b 定义如下：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.2 20 分

以下 2 个向量组是否线性无关?

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3 40 分

考虑线性映射

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\Phi \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

- (1) 写出变换矩阵 A_Φ .
- (2) 确定 $\text{rank}(A_\Phi)$.
- (3) 计算 Φ 的核 (kernel) 与像 (image)。 $\dim(\ker(\Phi))$ 和 $\dim(\text{Im}(\Phi))$ 分别是什么?

3.4 20 分

证明: 设 $\mathbf{A}x = b$ 是 $m \times n$ 型非齐次线性方程组, 则 $\mathbf{A}x = b$ 有唯一解 $\iff r([\mathbf{A}, b]) = r(\mathbf{A}) = n$.

3.5 10 分

映射 $T : R^2 \rightarrow R^3$ 定义为:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

验证 T 是线性映射。