第一题

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1\\1&1&0&-3&0\\2&-1&0&1&-1\\-1&2&0&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1\\0&2&0&-3&-1\\0&1&0&1&-3\\0&1&0&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&0&-4&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

将对 A 所做的行变换应用到 $\bar{A}$, 可以求解 $Ax=b$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&3\\1&1&0&-3&0&6\\2&-1&0&1&-1&5\\-1&2&0&-2&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1&3\\0&1&0&0&-2&0\\0&0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{整理为方程组}\begin{cases}x_1-x_5=3\\x_2-2x_5=0\\x_3=t\quad(t\in\mathbb{R})\\x_4-x_5=-1\\x_5=s\quad(s\in\mathbb{R})\end{cases}$$

$$\text{解集}S=\left\{x\in\mathbb{R}^5\mid x=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

第二题

(1) 将 x_1,x_2,x_3 写为矩阵 X

$$X=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&1&-3\\3&-2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&-\frac{7}{2}&\frac{7}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

X 的非零行有两行，即 $\operatorname{rank}(X)=2<n$

因此，x_1,x_2,x_3 线性相关。

(2) 将 x_1,x_2,x_3 写为矩阵 X

$$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

X 的非零行有三行，即 $\operatorname{rank}(X)=3=n$

因此，x_1,x_2,x_3 线性无关。

第三题

(1) 求解 $A_\Phi\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1+2x_2+x_3\\x_1+x_2+x_3\\x_1-3x_2\\2x_1+3x_2+x_3\end{pmatrix}$ 解得 $A_\Phi=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&1\\1&-3&0\\2&3&1\end{pmatrix}$

(2) 对 A_Φ 做初等行变换

$$A_\Phi=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&1\\1&-3&0\\2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{11}{3}&-\frac{1}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

A_Φ 的非零行有三行，即 $\operatorname{rank}(A_\Phi)=3$

(3) $\ker(A_\Phi)=\{\,x\in\mathbb{R}^3\mid A_\Phi x=0\,\}$
$\because\ \operatorname{rank}(A_\Phi)+\dim\ker(A_\Phi)=n=3$
$\therefore\ \dim\ker(A_\Phi)=0$
从而 $\ker(A_\Phi)=\{0\}$

$$\operatorname{Im}(A_\Phi)=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^4,\quad\dim\operatorname{Im}(A_\Phi)=3.$$

第四题

($\Rightarrow$) 充分性：

若 $Ax=b$ 有唯一解，则解存在，故 $b\in\operatorname{Im}(A)$，从而有 $\operatorname{rank}([A\,|\,b])=\operatorname{rank}(A)$
又因为解唯一，有 $|A|=0\to\dim\ker(A)=0$，由秩—零度定理 $\dim\ker(A)+\operatorname{rank}(A)=n$，得 $\operatorname{rank}(A)=n$
综上，$\operatorname{rank}([A\,|\,b])=\operatorname{rank}(A)=n$

($\Leftarrow$) 必要性：

若 $\operatorname{rank}([A\,|\,b])=\operatorname{rank}(A)=n$，则由 $\operatorname{rank}([A\,|\,b])=\operatorname{rank}(A)$ 可以确定方程组有解

其次 $\operatorname{rank}(A)=n$ 由秩一零度定理推出 $\dim\ker(A)=0$，故解至多一个

综上，解存在且至多一个，故解唯一

命题得证

第五题

若 T 为线性映射，则 T 需满足两点：

$(1)T\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ （2）$T\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}=\lambda T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

对于（1），有：

$$T\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\\y_1+y_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1-y_1\\y_1\\x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3x_2-y_2\\y_2\\x_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

对于（2），有：

$$T\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\lambda x-\lambda y\\\lambda y\\\lambda x\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3x-y\\y\\x\end{pmatrix}=\lambda T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

综上，T 为线性映射，验证完毕