第一题

$$S = \left|\det\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}\right| = 4$$

第二题

(1) $\det(B) = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 12 - 3 = 9$

(2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$

$$\therefore B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

第三题

本人的学号后三位为 594，因此初始向量 $\nu_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\nu_1 = B\nu_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 27 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\nu_2 = B\nu_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 27 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 81 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\nu_3 = B\nu_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 81 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ 243 \\ 121 \end{pmatrix}$$

可知矩阵收敛到 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 即占优特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

由 $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ 可求出占优特征值 $\lambda = 3$

第四题

(1) $(A-\lambda I)\xi=0$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1-\lambda \\ 2+a+\lambda \\ b+1+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \lambda=-1, a=-3, b=0$

(2) $\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)^3$

$\therefore \lambda=-1$ 为 A 的唯一特征值，代数重数为 3

$$A+\lambda I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore rank(A+\lambda I)=2 \rightarrow$ 几何重数为$3-2=1$

$\therefore$ 代数重数不等于几何重数，故 A 不与对角矩阵相似

第五题

(1) $\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1-\lambda & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8-\lambda & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4-10\lambda^3+35\lambda^2-50\lambda+24=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$

$\lambda_1=1$ 时，$A-\lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 7 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \lambda_1$ 的一个特征向量 ν_1 为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$

同理可以得到 λ_2 的一个特征向量 ν_2 为 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$,

λ_3 的一个特征向量 ν_3 为 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$,

λ_4 的一个特征向量 ν_4 为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$

因此 A 的对角化矩阵 B 为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 特征向量组成的矩阵 P 为 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

矩阵 P 的逆矩阵 P^{-1} 为 $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \\ -1 & 6 & -3 & -8 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A = PBP^{-1}$ 验证成立

(2) $A^{10} = PB^{10}P^{-1}$

$$\because B^{10} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 59049 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1048576 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{使用计算器计算得到 } A^{10} = PB^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 174076 & -1738737 & 1393656 & 2958318 \\ 57002 & -2321065 & 2209108 & 4473172 \\ 59048 & -1284767 & 1166672 & 2392390 \\ -1023 & -1042437 & 1045506 & 2088967 \end{pmatrix}$$