

人工智能数学基础-作业 10 (总分:100)

2025 年 12 月 12 日

1 作业提交

作业文件命名为“自己姓名-学号-人工智能数学基础 10”。作业发送至助教邮箱并抄送至王老师邮箱。邮件的标题为：自己姓名-学号-人工智能数学基础 10

张硕助教邮箱：zhangshuo1422@ruc.edu.cn

王老师邮箱：wang.zihe@ruc.edu.cn

作业提交的 Deadline 为 2025 年 12 月 18 日 22:00

2 作业内容

2.1 20 分

下面是给出 X, Y 的联合分布 $p(X, Y)$ 表示为如下

$X \setminus Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

求以下四问

- (a) $H(X), H(Y)$.
- (b) $H(X | Y), H(Y | X)$.
- (c) $H(X, Y)$.
- (d) $I(X; Y)$.

2.2 20 分

考虑两个高斯分布的混合

$$0.4\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + 0.6\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8.4 & 2.0 \\ 2.0 & 1.7 \end{bmatrix}\right)$$

- a) 计算每个维度的边际分布
- b) 计算二维分布的均值

2.3 20 分

考虑一个高斯随机变量 $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_x)$, 其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$. 此外, 我们有 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{w}$, 其中 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^E$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{E \times D}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^E$, 和 $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{w} | \mathbf{0}, \mathbf{Q})$ 是独立的高斯噪声. ‘独立’表示 \mathbf{x} 和 \mathbf{w} 是独立的随机变量, 并且 \mathbf{Q} 是对角矩阵.

a) 求出似然 (Likelihood) $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$.

b) 分布 $p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y} | \mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ 是高斯分布. 计算均值 $\boldsymbol{\mu}_y$ 和协方差 $\boldsymbol{\Sigma}_y$. 请写出详细的计算过程.

2.4 20 分

证明: 高斯分布是在均值和方差约束下的熵最大的分布。

2.5 20 分

有两个袋子。第一个袋子里装着 4 个芒果和 2 个苹果，第二个袋子里装着 4 个芒果和 4 个苹果。我们有一枚有偏差的硬币，它显示正面的概率为 0.6，显示背面的概率为 0.4。如果扔硬币之后，显示正面，则我们就从 1 号袋子中随机挑选一个水果，否则就从 2 号袋子中随机挑选一个水果。

你的朋友扔了一次硬币（你看不到结果），并且从相应的袋子中随机拿了一个水果，这个水果是一个芒果。

问，这个芒果是最初在第二个袋子里的概率是多少？