作业 2

2025 年 9 月 27 日

1　10 分

先把矩阵 A 变为最简行阶梯型, 再求非齐次线性方程 $Ax = b$ 的所有解的集合 S, 其中 A 和 b 定义如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

最简行阶梯型:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5\text{ 分})$$

最终解集 S:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}. \qquad (5\text{ 分})$$

2　20 分

以下 2 个向量组是否线性无关?

（只判断对，没有给出正确的理由不得分）

向量组 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在一组不全为零的标量 $k_1, k_2, \ldots, k_n$，使得线性组合 $k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = \mathbf{0}$ 成立。

判断方法通常是将向量作为列构成一个矩阵 $A = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$，然后考察方程组 $A\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 的解。

- **方法一：** 计算方阵行列式
- **方法二：** 行化简求秩

2.1 10 分

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

线性相关

2.2 10 分

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性无关

3 40 分

考虑线性映射

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

3.1　10 分

写出变换矩阵 A_Φ。

$$A_\Phi = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2　10 分

确定 $\mathrm{rank}(A_\Phi)$。

$$\mathrm{rank}(A_\Phi) = 3$$

3.3　20 分

计算 Φ 的核 (kernel) 与像 (image)。$\dim(\ker(\Phi))$ 和 $\dim(\mathrm{Im}(\Phi))$ 分别是什么?

$$\ker(\Phi) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad (5\text{ 分})$$

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right) \qquad (5\text{ 分})$$

$$\dim(\ker(\Phi)) = 0 \qquad (5\text{ 分})$$

$$\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = 3 \qquad (5\text{ 分})$$

4　20 分

证明: 设 $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ 是 $m \times n$ 型非齐次线性方程组, 则 $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$.

证明. ⇒:

1. (5 分) $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ 有解 ⇒ 向量 $\mathbf{b}$ 可以表示为矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量的线性组合 ⇒ $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}([\mathbf{A}, \mathbf{b}])$
2. (5 分) 反证法。假设 $\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$ ⇒ 矩阵 A 的列向量组线性相关 ⇒ 存在 $\eta \neq \mathbf{0}$ 使得 $\mathbf{A}\eta = \mathbf{0}$

   已知 $\mathbf{x}_0$ 是非齐次方程组 $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ 的一个解（即 $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$）。构造一个新的向量 $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0 + \eta$。由于 $\eta \neq \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}_0$。

   $$\mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \eta) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\eta = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

   这表明 $\mathbf{x}'$ 也是方程组 $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ 的一个解。矛盾！因此，$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$。

结合 1 和 2 的结论，我们证明了：如果解唯一，则 $\mathrm{r}([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$。

⇐:

1. (5 分) $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}([\mathbf{A}, \mathbf{b}])$ ⇒ 向量 $\mathbf{b}$ 可以表示为矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量的线性组合 ⇒ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ 有解
2. (5 分) 反证法。假设非齐次方程组 $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ 有两个不同的解，记为 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ ⇒ $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b}$，即 $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$。这说明向量 $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ 是齐次方程组 $\mathbf{A}x = \mathbf{0}$ 的一个解。

   $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$，即 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$。矛盾！所以，方程组的解唯一。

结合 1 和 2 的结论，我们证明了：如果 $\mathrm{r}([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$，则解唯一。 □

5 10 分

映射 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 定义为:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

验证 T 是线性映射。

对任意 $u=(x_1,y_1)^T, v=(x_2,y_2)^T$，以及标量 α,β，有

$$T(\alpha u+\beta v)=T\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta x_2\\ \alpha y_1+\beta y_2\end{pmatrix}=\alpha T(u)+\beta T(v)$$