

# 人工智能数学基础-作业 4(总分:100)

2025 年 10 月 13 日

## 1 作业提交

作业文件命名为“自己姓名-学号-人工智能数学基础 4”。例：张三-2024000274-人工智能数学基础 4

作业发送至助教邮箱并抄送至王老师邮箱。邮件的标题为：自己姓名-学号-人工智能数学基础 4

张硕助教邮箱：zhangshuo1422@ruc.edu.cn

王老师邮箱：wang.zihe@ruc.edu.cn

作业提交的 Deadline 为 2025 年 10 月 18 日 24:00

## 2 作业内容

### 2.1 20 分

下面的矩阵给出了漠河的天气部分信息。天气类型只有三种：雨 (rain)、云 (cloud) 和雪 (snow)。

		Rain	Cloud	Snow
A =	Rain	0.1	0.2	0.8
	Cloud	0.3	0.6	0.1
	Snow	a	b	c

矩阵的列表示概率。以第一列为例如：如果今天下雨，那么明天下雨的概率为 0.1，多云的概率为 0.3。求  $a, b, c$  来补充矩阵。然后，通过计算  $A$  的稳态向量，确定长期情况下有雨、多云和下雪天气的概率。

### 2.2 10 分

考虑带有  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  运算的  $\mathbb{R}^2$  向量空间， $\langle \cdot, \cdot \rangle$  的定义如下

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{=: A} \mathbf{y}.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  是否构成内积？

**2.3 20 分**

使用下面的内积定义方式，来计算  $x, y$  之间的距离。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1) \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

$$(2) \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}, \quad \mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**2.4 20 分**

考虑具有点积的欧几里得向量空间  $\mathbb{R}^5$ 。子空间  $U \subseteq \mathbb{R}^5$  和  $x \in \mathbb{R}^5$  由下式给出

$$U = \text{span} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) 确定  $\mathbf{x}$  在  $U$  上的正交投影  $\pi_U(\mathbf{x})$
- (b) 确定距离  $d(\mathbf{x}, U)$

**2.5 15 分**

设  $A$  和  $B$  是两个对称正定矩阵，下面哪些矩阵是对称正定矩阵，证明或者举出反例？

- $A$
- $AB$
- $A^{-1}$

**2.6 15 分**

课件中最小二乘法求解椭圆轨道的例题中，如果考虑椭圆方程为

$$A \cdot X^2 + Y^2 + C \cdot XY + D \cdot X + E \cdot Y + F = 0$$

那么按照最小二乘法求解的轨道是什么，请在坐标系中画出椭图，并写出得到的方程表达式。