

人工智能数学基础-作业 4(总分:100)

2025 年 10 月 13 日

1 作业提交

作业文件命名为“自己姓名-学号-人工智能数学基础 4”。例：张三-2024000274-人工智能数学基础 4

作业发送至助教邮箱并抄送至王老师邮箱。邮件的标题为：自己姓名-学号-人工智能数学基础 4

张硕助教邮箱：zhangshuo1422@ruc.edu.cn

王老师邮箱：wang.zihe@ruc.edu.cn

作业提交的 Deadline 为 2025 年 10 月 18 日 24:00

2 作业内容

2.1 20 分

下面的矩阵给出了漠河的天气部分信息。天气类型只有三种：雨（rain）、云（cloud）和雪（snow）。

		Rain	Cloud	Snow
$A =$	Rain	0.1	0.2	0.8
	Cloud	0.3	0.6	0.1
	Snow	a	b	c

矩阵的列表示概率。以第一列为例：如果今天下雨，那么明天下雨的概率为 0.1，多云的概率为 0.3。求 a, b, c 来补充矩阵。然后，通过计算 A 的稳态向量，确定长期情况下有雨、多云和下雪天气的概率。

2.2 10 分

考虑带有 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 运算的 \mathbb{R}^2 向量空间， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的定义如下

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{=: A} \mathbf{y}.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是否构成内积？

2.3 20 分

使用下面的内积定义方式，来计算 \mathbf{x}, \mathbf{y} 之间的距离。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1) \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

$$(2) \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}, \quad \mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4 20 分

考虑具有点积的欧几里得向量空间 \mathbb{R}^5 。子空间 $U \subseteq \mathbb{R}^5$ 和 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ 由下式给出

$$U = \text{span} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) 确定 \mathbf{x} 在 U 上的正交投影 $\pi_U(\mathbf{x})$

(b) 确定距离 $d(\mathbf{x}, U)$

2.5 15 分

设 A 和 B 是两个对称正定矩阵，下面哪些矩阵是对称正定矩阵，证明或者举出反例？

- A
- AB
- A^{-1}

2.6 15 分

课件中最小二乘法求解椭圆轨道的例题中，如果考虑椭圆方程为

$$A \cdot X^2 + Y^2 + C \cdot XY + D \cdot X + E \cdot Y + F = 0$$

那么按照最小二乘法求解的轨道是什么，请在坐标系中画出椭圆，并写出得到的方程表达式。