作业 6

2025 年 11 月 9 日

1　20 分

下面矩阵是否可以进行 Cholesky 分解，如果可以请分解。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

Cholesky 分解适用于对称正定矩阵。设给定的矩阵为 A

1.1　检查条件 (10 分)

a) 对称性： 因为 $A = A^T$，所以矩阵 A 是对称矩阵。

b) 正定性： 通过计算 A 的所有顺序主子式来判断其正定性。由于所有顺序主子式均大于零，该对称矩阵是正定矩阵。

1.2　Cholesky 分解 (10 分)

寻找一个下三角矩阵 L，使得 $A = LL^T$。

逐列（或逐行）求解 L 的元素，Cholesky 因子 L 为：

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2 20 分

使用迭代 QR 分解的方式求解下面矩阵的特征值。

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

1. QR 分解 ($A_0 = Q_0 R_0$) (10 分)
对 A_0 的列向量 a_1, a_2, a_3 使用 Gram-Schmidt 正交化来求 Q_0。
对于 q_1: $u_1 = a_1 \quad q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$
对于 q_2: $u_2 = a_2 - (a_2 \cdot q_1) q_1 \quad q_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$
对于 q_3: $u_3 = a_3 - (a_3 \cdot q_1) q_1 - (a_3 \cdot q_2) q_2 \quad q_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$
由此，我们得到 Q_0 和 $R_0 = Q_0^T A_0$:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -5/\sqrt{78} & -3/\sqrt{26} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{78} & 4/\sqrt{26} \\ 1/\sqrt{3} & 7/\sqrt{78} & -1/\sqrt{26} \end{bmatrix}$$

$$R_0 = Q_0^T A_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 8/\sqrt{3} & 9/\sqrt{3} \\ 0 & 26/\sqrt{78} & 6/\sqrt{78} \\ 0 & 0 & 14/\sqrt{26} \end{bmatrix}$$

2. 计算 $A_1 = R_0 Q_0$

$$A_1 = R_0 Q_0 = \begin{bmatrix} \frac{20}{3} & \frac{32}{3\sqrt{26}} & \frac{14}{\sqrt{78}} \\ \frac{32}{3\sqrt{26}} & -\frac{5}{39} & \frac{49}{13\sqrt{3}} \\ \frac{14}{\sqrt{78}} & \frac{49}{13\sqrt{3}} & -\frac{7}{13} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 6.667 & 2.092 & 1.585 \\ 2.092 & -0.128 & 2.223 \\ 1.585 & 2.223 & -0.538 \end{bmatrix}$$

依此类推，计算 $A_3, A_4, \ldots$
随着 $k \to \infty$，A_k 将收敛到一个对角矩阵 Λ:

$$\lim_{k \to \infty} A_k = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

通过数值计算，矩阵 A 的特征值约为:

$$\lambda_1 \approx 7.8, \quad \lambda_2 \approx 0.7, \quad \lambda_3 \approx -2.5 \qquad (10 \text{ 分})$$

3 20 分

求奇异值分解：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

即 $A = U\Sigma V^T$.（步骤对 10 分，计算对 10 分）

3.1 计算 Σ 矩阵

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

求解 $A^T A$ 的特征值 λ：$\det(A^T A - \lambda I) = 0$ 解得 $= \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 2$.

奇异值 σ_i 是特征值的平方根，按降序排列, 奇异值矩阵 Σ 为：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

3.2 计算 V 矩阵

V 矩阵的列向量 v_i 是 $A^T A$ 对应的归一化特征向量。

对于 $\lambda_1 = 8$:$(A^T A - 8I)v_1 = 0$, 得到归一化特征向量 $v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$.

对于 $\lambda_2 = 2$:$(A^T A - 2I)v_2 = 0$, 得到归一化特征向量 $v_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$.

因此，V 矩阵为：$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

3.3 计算 U 矩阵

U 矩阵的列向量 u_i 可以通过 $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ 计算：

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

将 U, Σ, 和 V^T 组合在一起，得到 A 的奇异值分解：

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

4 20 分

证明对于任意 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 矩阵 A^TA 和 AA^T 拥有相同的非零特征值。

证明. 1. 证明 A^TA 的任意非零特征值也是 AA^T 的特征值。

设 λ 是 A^TA 的一个非零特征值，则存在一个非零向量 $v \in \mathbb{R}^n$，使得：

$$(A^TA)v = \lambda v$$

将上式两边同时左乘矩阵 A：

$$A(A^TA)v = A(\lambda v)$$

$$(AA^T)(Av) = \lambda(Av) \qquad (10\text{ 分})$$

令 $u = Av$，反证法：假设 $u = 0$，将 $Av = 0$ 代入 $(A^TA)v = \lambda v$ 中：

$$A^T(Av) = \lambda v$$

$$0 = \lambda v$$

已知 $\lambda \neq 0$ 且 $v \neq 0$，矛盾。所以，$u = Av$ 是非零向量。(10 分)

则根据定义，λ 是 AA^T 的一个特征值，其对应的特征向量为 $u = Av$。

2. 同理证明 AA^T 的任意非零特征值也是 A^TA 的特征值。

因此，矩阵 A^TA 和 AA^T 拥有相同的非零特征值。

□

5 20 分

5.1 5 分

求解下列方程组

$$4.5x_1 + 3.1x_2 = 19.249$$

$$1.6x_1 + 1.1x_2 = 6.843$$

写成矩阵形式用消元法求解。得到解为：

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.94 \\ 0.49 \end{pmatrix}$$

5.2 5 分

求解下列方程组

$$4.5x_1 + 3.1x_2 = 19.249$$

$$1.6x_1 + 1.1x_2 = 6.84$$

写成矩阵形式用消元法求解。得到解为:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.01 \\ 1.84 \end{pmatrix}$$

5.3 10 分

请分析解变化大的原因

常数项的微小扰动 $\delta\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = (0, 0.003)^T$ 导致解向量产生了巨大的变化，其根本原因在于系数矩阵 A 是“接近奇异”的。可以通过以下两点来分析（回答其中一点即得分）:

1. **行列式接近于零**: 系数矩阵 A 的行列式: $\det(A) = -0.01$, 非常接近于 0，表明矩阵 A 接近奇异矩阵。从几何上看，这意味着方程组所代表的两条直线几乎平行。对于两条几乎平行的直线，其交点（即方程组的解）的位置对直线的微小平移（由常数项的改变引起）非常敏感。微小的平移会导致交点发生巨大的移动。

2. **条件数巨大**: 条件数越大，输入数据的微小扰动对解的影响就越大。使用无穷范数来计算条件数 $\kappa(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 4636$. 根据误差理论，解的相对误差和常数项的相对误差满足不等式:

   $$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \kappa(A) \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

   由于 $\kappa(A)$ 巨大，即使 $\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ 很小，也会导致 $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ 很大。