第一题

因为函数 f 与 g 定义在相同的区间，所以设定义域为 D，则 fg 的定义域也为 D

$\because f$ 与 g 都是 D 上的凸函数

$\therefore \forall x_1, x_2 \in D, \forall\lambda \in [0,1]$，有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = A$$
$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2) = B$$

若 $h = fg$ 也为凸函数，则 $\forall x_1, x_2 \in D, \forall\lambda \in [0,1]$, 应有

$$h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2)$$
$$\Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1)g(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)g(x_2) = C$$

比较 C 与 AB 的大小，若有 $AB \le C$ 则 h 为凸函数：

$$\begin{aligned} AB - C &= [\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)][\lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)] - [\lambda f(x_1)g(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)g(x_2)] \\ &= \lambda(\lambda-1)(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \end{aligned}$$

$\because f$ 与 g 都非减或非增

$\therefore (f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \ge 0$

又 $\because \lambda(\lambda-1) \le 0$

$\therefore AB - C \le 0 \Rightarrow AB \le C$

$\Rightarrow h = fg$ 为凸函数，证毕

第二题

将该优化问题写为标准形式：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \frac{1}{2}x^T Px + q^T x + r \\ \text{Subject to} \quad & -1 - x_i \le 0, \qquad i = 1,2,3 \\ & x_i - 1 \le 0, \qquad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

$$\text{其中，} P = \begin{pmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -22.0 \\ -14.5 \\ 13.0 \end{pmatrix}, \quad r = 1$$

首先验证该优化问题为凸问题：

(1) 对于 $f_0(x)$，可以把它看作 $\frac{1}{2}x^T Px$ 和 $q^T x + r$ 的加权和 (权重均为 1)，分别验证两部分的凸性：

a. 易得仿射函数 $q^T x + r$ 为凸函数

b.$\frac{1}{2}x^T Px$ 二阶可微，因此检验其 Hessian 矩阵是否半正定：

$\nabla^2(\frac{1}{2}x^T Px) = P \to$ 计算 P 顺序主子式

$|P_1| = 13 > 0$

$$|P_2| = \begin{vmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 17 \end{vmatrix} = 85 > 0$$

$|P_3| = |P| = 13(17 \cdot 12 - 6 \cdot 6) - 12(12 \cdot 12 - (-2) \cdot 6) + (-2)(12 \cdot 6 - 17 \cdot (-2)) = 324 > 0$

$\Rightarrow P$ 为正定矩阵

$\therefore \frac{1}{2}x^T Px$ 为凸函数

$\therefore$ 结合 a 与 b 可得$f_0(x)$ 为凸函数

(2) 对于约束条件，$f_i(x) = \pm x_i - 1$ 均为仿射函数，因此均为凸函数

$\therefore$ 综合（1）和（2），该优化问题为凸问题

$\because$ 原问题是凸问题时，满足 KKT 条件的点即为该问题的最优解

首先，满足 $-1 - x_i^* \leq 0, x_i^* - 1 \leq 0$

其次，构造 $Lagrange$ 函数：

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^T Px + q^T x + r + \sum_{i=1}^{3} \lambda_{1i}(-1 - x_i) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_{2i}(x_i - 1)$$

$\therefore \nabla_x L = x^T P + q^T + (\lambda_1 - \lambda_2)^T$

令 $\lambda_{1i}^*(-1 - x_i^*) = 0\,,\, \lambda_{2i}^*(x_i^* - 1) = 0\,,\, \nabla_x L = 0$，代入 x^* 求解：

解得 $\lambda_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

有解，且解满足 $\lambda_i^* \geq 0, i = 1, 2$

$\therefore$ 该问题的最优解为 $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$，证毕

第三题

(a) $\because (x - 2)(x - 4) \leq 0$

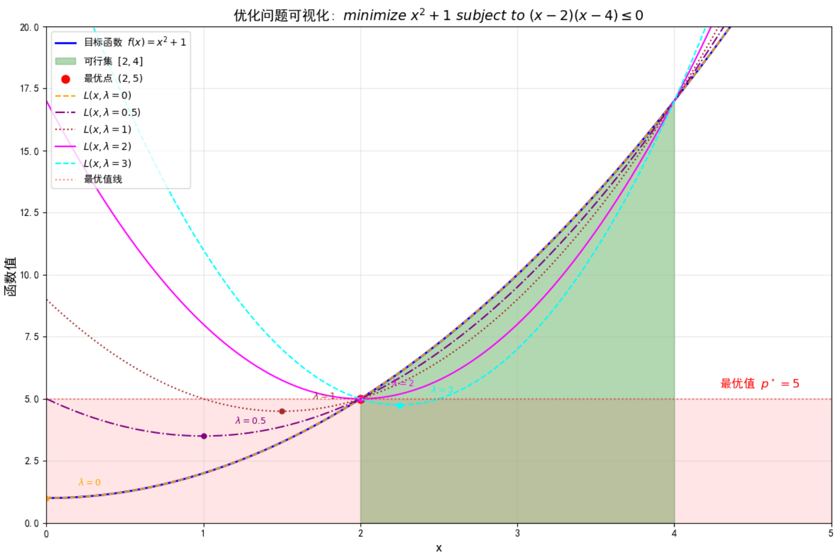
$\therefore$ 可行集为 $[2, 4]$

$\because x \in [2, 4]$时$, f_0(x)_{min} = 2^2 + 1 = 5$

$\therefore$ 最优值为 $p^* = 5$，最优解为 $x^* = 2$

(b) 构造 $Lagrange$ 函数：$L(x, \lambda) = x^2 + 1 + \lambda(x - 2)(x - 4) = (1 + \lambda)x^2 - 6\lambda x + (1 + 8\lambda)$

绘制目标函数图像并加入 λ 取正值的 $Lagrange$ 函数曲线:



由图像中取的正 $\lambda = 0, 0.5, 1, 2, 3$，可判断对于任意 $\lambda \geq 0$，都有 $p^* \geq \inf_x L(x, \lambda)$，下界性质得证

(c) 对偶函数 $g(\lambda)=\inf_x L(x,\lambda)=L(\frac{3\lambda}{1+\lambda},\lambda)=\frac{1+9\lambda-\lambda^2}{1+\lambda}(\lambda\geq 0)$

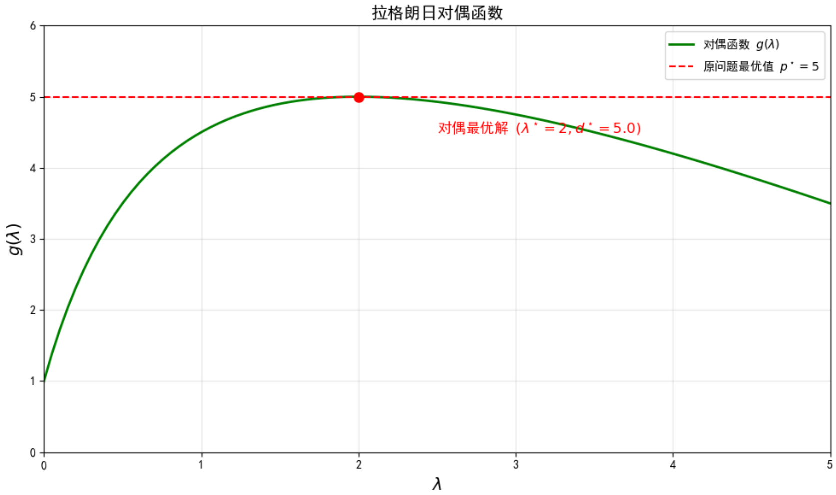
寻找对偶问题的最优值：$g'(\lambda)=\frac{-\lambda^2-2\lambda+8}{(1+\lambda)^2}=\frac{9}{(1+\lambda)^2}-1$，图像为开口向下的抛物线

$\therefore g'(\lambda)=0\Rightarrow$ 对偶最优解$\lambda^*=2$

$\therefore$ 对偶最优值 $d^*=g(2)=5$

$\because d^*=p^*$

$\therefore$ 强对偶性成立



第四题

$L(x,\lambda,\mu)=f_0(x)+\lambda f_1(x)+\mu h_1(x)=c^Tx+\lambda^T(Gx-h)+\mu^T(Ax-b)$

$\to g(\lambda,\mu)=\inf_x L(x,\lambda,\mu)=-\lambda^Th-\mu^Tb+\inf_x(c^T+\lambda^TG+\mu^TA)x$

$\because$ 若线性函数不是恒值，则其下确界是 $-\infty$

$\therefore$ 该线性规划问题的对偶函数为：

$$g(\lambda,\mu)=\begin{cases}-\lambda^Th-\mu^Tb, & c^T+\lambda^TG+\mu^TA=0\\ -\infty, & \text{其他情况}\end{cases}$$

$\therefore$ 该线性规划的对偶问题为：

$$\begin{aligned}\text{Maximize}\quad & -\lambda^Th-\mu^Tb\\ \text{Subject to}\quad & c^T+\lambda^TG+\mu^TA=0\\ & \lambda\succeq 0\end{aligned}$$

第五题

该问题的 KKT 条件如下：

$$\begin{aligned}\nabla f_0(x^*)+\nu^*\nabla h(x^*)&=0\\ h(x^*)&=0\end{aligned}$$

计算梯度：

$$\nabla f_0(x)=\begin{pmatrix}-6x_1+2 & 2x_2+2 & 4x_3+2\end{pmatrix},\quad \nabla h(x)=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2 & 2x_3\end{pmatrix}$$

代入 KKT 条件，得方程组：

$$\begin{cases} -6x_1^* + 2 + 2\nu^* x_1^* &= 0 \\ 2x_2^* + 2 + 2\nu^* x_2^* &= 0 \\ 4x_3^* + 2 + 2\nu^* x_3^* &= 0 \\ x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2} - 1 &= 0 \end{cases}$$

借助计算器得到三个解，满足 KKT 条件的所有点为：

$$\text{点 1:} \quad x \approx \begin{pmatrix} 0.1626 \\ 0.4651 \\ 0.8696 \end{pmatrix}, \quad \nu \approx -3.1500,$$
$$\text{点 2:} \quad x \approx \begin{pmatrix} 0.3604 \\ -0.8163 \\ -0.4494 \end{pmatrix}, \quad \nu \approx 0.2250,$$
$$\text{点 3:} \quad x \approx \begin{pmatrix} -0.9662 \\ -0.1986 \\ -0.1657 \end{pmatrix}, \quad \nu \approx 4.0350.$$

求最优解，计算每一个点对应的 $f_0(x)$ 值：

$$\begin{aligned} \text{点 1:} \quad f_0(x) &\approx -3(0.1626)^2 + (0.4651)^2 + 2(0.8696)^2 + 2(0.1626 + 0.4651 + 0.8696) \\ &\approx 4.6441, \\ \text{点 2:} \quad f_0(x) &\approx -3(0.3604)^2 + (-0.8163)^2 + 2(-0.4494)^2 + 2(0.3604 - 0.8163 - 0.4494) \\ &\approx -1.1299, \\ \text{点 3:} \quad f_0(x) &\approx -3(-0.9662)^2 + (-0.1986)^2 + 2(-0.1657)^2 + 2(-0.9662 - 0.1986 - 0.1657) \\ &\approx -5.3672. \end{aligned}$$

因此点 3 的 f_0 最小，故点 3 为最优解，最优值为-5.3672，

即 $x^* \approx \begin{pmatrix} -0.9662 \\ -0.1986 \\ -0.1657 \end{pmatrix}, \quad f_0(x^*) \approx -5.3672.$

第六题

(1) 充分性：若 $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ $(\forall x \in D)$，则对任意 $x, y \in D$ 与 $t \in [0,1]$，考虑一维函数

$$g(t) = f\big(x + t(y-x)\big), \quad t \in [0,1].$$

由链式法则，

$$g'(t) = \nabla f\big(x + t(y-x)\big)^T (y-x), \qquad g''(t) = (y-x)^T \nabla^2 f\big(x + t(y-x)\big)(y-x) \geq 0.$$

故 g 在区间 $[0,1]$ 上为一维凸函数，于是

$$g(t) \leq (1-t)g(0) + tg(1) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

令 $t=\lambda$ 即得

$$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \le (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y), \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

因此 f 是凸函数，故充分性成立。

(2) 必要性：若 f 凸且 $f \in C^2(D)$，取任意点 $x \in D$ 与任意方向 $d \in \mathbb{R}^n$，考虑一维函数

$$\phi(t) = f(x+td), \quad t \text{ 在使} x+td \in D \text{ 的某开区间内}.$$

由于 f 凸，ϕ 亦凸（一维线性组合保持凸性）。

因此对一维二阶可微凸函数必有 $\phi''(0) \ge 0$。计算二阶导：

$$\phi''(0) = d^T \nabla^2 f(x) d \ge 0, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

于是 $\nabla^2 f(x)$ 的二次型非负，说明 Hessian 半正定。

由于 x 与 d 任取，得 $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ 对所有 $x \in D$ 成立，必要性证明完毕。

综上，f 是凸函数 $\Longleftrightarrow$ $\nabla^2 f(x) \succeq 0$（对所有 $x \in D$），命题得证。

第七题

叶荫宇, 斯坦福大学李国鼎讲席教授，2009 年荣获 INFORMS 冯·诺依曼理论奖，是首位获此殊荣的华人科学家。其主要学术贡献包括：

- **优化算法与复杂性理论**
  - 内点法奠基：在线性规划内点法理论研究中做出开创性工作
  - 原始-对偶预测-校正框架：显著提升大规模线性规划问题求解效率
  - 分布式鲁棒优化：为不确定性决策提供理论工具
- **锥优化与半定规划**
  - 系统发展锥规划模型，统一并推广线性与凸优化理论
  - 应用于传感器网络定位，提出基于半定规划的节点定位方法
- **算法求解器与工业应用**
  - 参与开发优化求解器 COPT，将求解速度提升 3 倍以上
  - 研究成果应用于电力系统调度、高速铁路规划等领域
- **在线优化与学习算法**
  - 推动在线线性规划发展，提出自适应决策方法
  - 在强化学习与马尔可夫决策过程复杂度分析中做出贡献
- **学术荣誉**
  - 2009 年冯·诺依曼理论奖（INFORMS）
  - 2012 年国际数学规划大会 Tseng Lectureship 奖
  - 2014 年 SIAM 优化奖
  - 谷歌学术引用超 65,000 次