

作业 8

2025 年 11 月 25 日

1 10 分

证明：如果定义在某个区间上的函数 f 和 g 都是凸函数，且都非减（或者都非增），二者都大于零，则函数 fg 在此区间上是凸函数。

证明. 不妨假设函数 f 和 g 二阶可导。记 $h(x) = f(x)g(x)$ 。

对 $h(x)$ 求二阶导数：

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ h''(x) &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \end{aligned} \quad (5 \text{ 分})$$

根据题目已知条件分析上式各项符号：

1. 由于 f 和 g 均为凸函数，故 $f''(x) \geq 0$, $g''(x) \geq 0$ 。

2. f 和 g 都大于零，即 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ 。

由上述两点可知，第一项 $f''(x)g(x) \geq 0$, 第三项 $f(x)g''(x) \geq 0$ 。

3. 由于 f 和 g 都非减（或者都非增），则 $f'(x), g'(x)$ 同号。因此，有 $2f'(x)g'(x) \geq 0$ 。

综上所述， $h''(x) \geq 0$, 函数 fg 在此区间上是凸函数。

□

2 20 分

证明 $x^* = (1, 1/2, -1)$ 是优化问题

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & (1/2)x^T Px + q^T x + r \\ \text{subject to} \quad & -1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

的最优解，其中

$$P = \begin{bmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -22.0 \\ -14.5 \\ 13.0 \end{bmatrix}, \quad r = 1$$

证明. 由于矩阵 P 是对称正定的，目标函数是凸函数。因此，满足一阶必要条件 (KKT 条件) 的点即为全局最优解。(10 分)

目标函数的梯度为：

$$\nabla f(x) = Px + q$$

将 $x^* = [1, 1/2, -1]^T$ 代入计算：

$$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$$

对于约束 $-1 \leq x_i \leq 1$ ，最优解 x^* 必须满足以下条件：

- 若 $x_i^* = -1$ (下界)，则需 $\nabla f(x^*)_i \geq 0$ ；
- 若 $-1 < x_i^* < 1$ (内部)，则需 $\nabla f(x^*)_i = 0$ ；
- 若 $x_i^* = 1$ (上界)，则需 $\nabla f(x^*)_i \leq 0$ 。

综上所述， x^* 满足所有最优性条件。

□

3 30 分

考慮优化问题

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x^2 + 1 \\ & \text{subject to} && (x - 2)(x - 4) \leq 0, \end{aligned}$$

其中变量 $x \in \mathbf{R}$ 。

3.1 10 分

求解可行集, 最优值以及最优解。

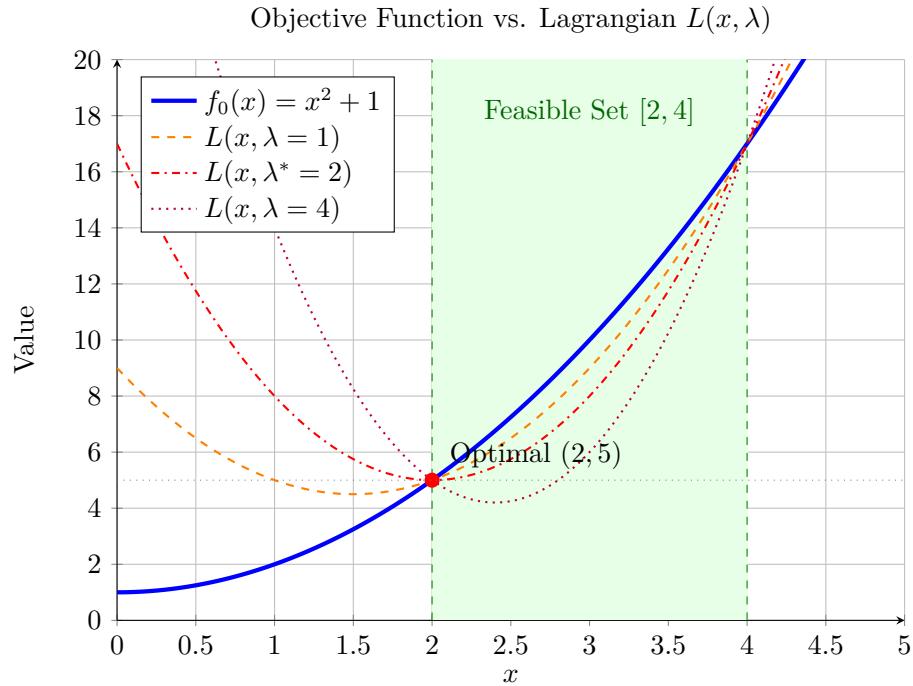
可行集为:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 4\} \quad (5 \text{ 分})$$

目标函数在区间 $[2, 4]$ 上单调递增。因此, 最小值在区间左端点 $x = 2$ 处取得。因此, 最优解: $x^* = 2$; 最优值: $p^* = 2^2 + 1 = 5$

3.2 10 分

绘制目标函数根据 x 变化的图像。在同一幅图中, 标出可行集, 最优点及最优值, 选择一些正的 Lagrange 乘子 λ , 绘出 Lagrange 函数 $L(x, \lambda)$ 关于 x 的变化曲线。



利用图像, 证明下界性质 (对任意 $\lambda \geq 0, p^* \geq \inf_x L(x, \lambda)$)。

证明. Lagrange 函数定义为 $L(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda f_1(x)$, 其中 $\lambda \geq 0$ 。即:

$$L(x, \lambda) = (x^2 + 1) + \lambda(x^2 - 6x + 8)$$

对于任意可行点 \tilde{x} (即满足 $f_1(\tilde{x}) \leq 0$) 和任意 $\lambda \geq 0$, 由于 $\lambda \geq 0$ 且 $f_1(\tilde{x}) \leq 0$, 有 $\lambda f_1(\tilde{x}) \leq 0$ 。因此:

$$L(\tilde{x}, \lambda) = f_0(\tilde{x}) + \lambda f_1(\tilde{x}) \leq f_0(\tilde{x})$$

所以:

$$g(\lambda) = \inf_x L(x, \lambda) \leq L(x^*, \lambda) \leq p^*$$

□

3.3 10 分

推导 Lagrange 对偶函数 g , 求解对偶问题最优值以及对偶最优解 λ^* 。
此时强对偶性是否成立?

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(1+\lambda)x - 6\lambda = 0 \implies x(\lambda) = \frac{3\lambda}{1+\lambda}$$

将 $x(\lambda)$ 代入 $L(x, \lambda)$ 得到 $g(\lambda)$:

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= (1+\lambda) \left(\frac{3\lambda}{1+\lambda} \right)^2 - 6\lambda \left(\frac{3\lambda}{1+\lambda} \right) + (1+8\lambda) \\ &= \frac{-\lambda^2 + 9\lambda + 1}{1+\lambda} \end{aligned} \quad (5 \text{ 分})$$

对偶问题为: maximize $g(\lambda)$ subject to $\lambda \geq 0$

令 $g'(\lambda) = 0$, 解得 $\lambda = 2$ 或 $\lambda = -4$ (舍去, 因需 $\lambda \geq 0$)。

检查 $\lambda^* = 2$ 时的二阶导数或根据函数性质可知这是最大值点。对偶最优值为:

$$d^* = g(2) = 5 = p^*$$

强对偶性成立。

4 20 分

求解线性规划

$$\text{minimize } c^T x$$

$$\text{subject to } Gx \preceq h$$

$$Ax = b$$

的对偶函数。给出对偶问题，并将隐式等式约束显式表达。

引入拉格朗日乘子 λ (对应不等式约束 $Gx \preceq h$) 和 ν (对应等式约束 $Ax = b$)。

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \nu) &= c^T x + \lambda^T (Gx - h) + \nu^T (Ax - b) \\ &= (c + G^T \lambda + A^T \nu)^T x - h^T \lambda - b^T \nu \end{aligned}$$

$$g(\lambda, \nu) = \inf_x L(x, \lambda, \nu) = \begin{cases} -h^T \lambda - b^T \nu & \text{if } G^T \lambda + A^T \nu + c = 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

对偶问题是最大化对偶函数，并满足 $\lambda \succeq 0$ 。

因此，对偶问题为：

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && -h^T \lambda - b^T \nu \\ &\text{subject to} && G^T \lambda + A^T \nu + c = 0 \\ &&& \lambda \succeq 0 \end{aligned}$$

5 20 分

问题

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3) \\ &\text{subject to} && x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \end{aligned}$$

不是凸优化问题，但是强对偶性亦成立。给出 KKT 条件。找出满足 KKT 条件的所有 x, ν ，并给出最优解。

将问题写成标准形式：

$$\text{minimize } x^T Q x + 2c^T x \quad \text{subject to } x^T x = 1$$

其中 $Q = \text{diag}(-3, 1, 2)$, $c = [1, 1, 1]^T$ 。拉格朗日函数为：

$$L(x, \nu) = x^T Q x + 2c^T x + \nu(x^T x - 1)$$

KKT 条件：

$$\begin{cases} (-3 + \nu)x_1 = -1 \\ (1 + \nu)x_2 = -1 \\ (2 + \nu)x_3 = -1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

求解的方程为久期方程:

$$\frac{1}{(\nu - 3)^2} + \frac{1}{(\nu + 1)^2} + \frac{1}{(\nu + 2)^2} = 1$$

1. $\nu \approx -3.14928981$

$$x \approx \begin{bmatrix} 0.1626 & 0.4653 & 0.8701 \end{bmatrix}^T$$

2. $\nu \approx 0.22350900$

$$x \approx \begin{bmatrix} 0.3602 & -0.8173 & -0.4497 \end{bmatrix}^T$$

3. $\nu \approx 1.89189898$

$$x \approx \begin{bmatrix} 0.9024 & -0.3458 & -0.2569 \end{bmatrix}^T$$

4. $\nu \approx 4.03522595$

最优解:

$$x \approx \begin{bmatrix} -0.9660 & -0.1986 & -0.1657 \end{bmatrix}^T \quad (5 \text{ 分})$$

6 10 分

证明 f 是凸函数的充要条件是其具有半正定的 Hessian 矩阵。

证明. \Rightarrow : (5 分)

假设 f 是凸函数。根据凸函数的一阶条件, 对于任意 $x \in S$, 有:

$$f(x + tv) \geq f(x) + t\nabla f(x)^T v$$

其中 t 是足够小的标量，使得 $x + tv \in S$ 。对 $f(x + tv)$ 在 x 处进行二阶泰勒展开：

$$f(x) + t\nabla f(x)^T v + \frac{t^2}{2}v^T \nabla^2 f(x)v + o(t^2) \geq f(x) + t\nabla f(x)^T v$$

化简得：

$$\frac{t^2}{2}v^T \nabla^2 f(x)v + o(t^2) \geq 0$$

两边同时除以 t^2 （假设 $t \neq 0$ ）并取极限 $t \rightarrow 0$ ：

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}v^T \nabla^2 f(x)v + \frac{o(t^2)}{t^2} \right) \geq 0 \implies v^T \nabla^2 f(x)v \geq 0$$

因为 x 和 v 是任意的，所以 $\nabla^2 f(x)$ 是半正定的。

\Leftarrow : (5 分)

假设对于任意 $x \in S$ ，Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(x)$ 都是半正定的。取 S 中任意两点 x 和 y 。根据带有拉格朗日余项的二阶泰勒定理，存在某个 z 位于连接 x 和 y 的线段上（即 $z = x + \theta(y - x)$, $\theta \in (0, 1)$ ），使得：

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^T \nabla^2 f(z)(y - x)$$

由假设可知， $\nabla^2 f(z)$ 是半正定的，因此对于向量 $v = y - x$ ，二次型项非负：

$$\frac{1}{2}(y - x)^T \nabla^2 f(z)(y - x) \geq 0$$

因此：

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$$

这正是凸函数的一阶充要条件。故 f 是凸函数。

□