第一题

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&5&5\\1&5&14\end{pmatrix}$$

若 A 可以进行 $Cholesky$ 分解，则存在下三角矩阵 $L=\begin{pmatrix}l_{11}&0&0\\l_{21}&l_{22}&0\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\end{pmatrix}$，使得 $A=LL^T$

$$\therefore A=LL^T=\begin{pmatrix}l_{11}^2&l_{11}l_{21}&l_{11}l_{31}\\l_{11}l_{21}&l_{21}^2+l_{22}^2&l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32}\\l_{11}l_{31}&l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32}&l_{31}^2+l_{32}^2+l_{33}^2\end{pmatrix}$$

则 l_{11} 与 l_{21}、l_{31} 同号且平方为 1，l_{22} 与 l_{32} 同号且平方为 4，$l_{33}^2=9$

均取正值，解得 $L=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{pmatrix}$，故 A 可以进行 $Cholesky$ 分解

第二题

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&5\\1&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}\quad 令\ Q=\begin{pmatrix}q_1&q_2&q_3\end{pmatrix}$$

则 $q_1=\frac{a_1}{||a_1||}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\quad \widehat{q_2}=a_2-(a_2\cdot q_1)q_1=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}-\frac{8\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}$

$$\therefore q_2=\frac{\widehat{q_2}}{||\widehat{q_2}||}=\frac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix}-5\\-2\\7\end{pmatrix}$$

$$\widehat{q_3}=a_3-(a_3\cdot q_1)q_1-(a_3\cdot q_2)q_2=\frac{7}{13}\begin{pmatrix}-3\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore q_3=\frac{\widehat{q_3}}{||\widehat{q_3}||}=\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-3\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore Q=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{5}{\sqrt{78}} & -\frac{3}{\sqrt{26}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{\sqrt{78}} & \frac{4}{\sqrt{26}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{7}{\sqrt{78}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} \quad R=Q^TA=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{8}{\sqrt{3}} & 3\sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{78}}{3} & \frac{\sqrt{78}}{13} \\ 0 & 0 & \frac{7\sqrt{26}}{13} \end{pmatrix}$$

令 $A'=RQ$ 开始迭代直到收敛，用 Python 程序计算得 $A'\approx\begin{pmatrix} 7.818 & 0 & 0 \\ 0 & 0.709 & 0 \\ 0 & 0 & -2.526 \end{pmatrix}$

故 A 的特征值为 $7.818\,,\,0.709\,,\,-2.526$

第三题

$$A^TA=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

特征多项式为 $|\lambda I-A^TA|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & -3 \\ -3 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-5)^2-9=\lambda^2-10\lambda+16=(\lambda-8)(\lambda-2)$

故特征值为 $\lambda_1=8\,,\,\lambda_2=2\longrightarrow D=\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ 故 A 的奇异值 $\sigma_1=2\sqrt{2}\,,\,\sigma_2=\sqrt{2}$

对 $\lambda_1=8$，解方程组 $(A^TA-8I)x=0$ 得特征向量 $\widehat{p_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\longrightarrow p_1=\frac{\widehat{p_1}}{||\widehat{p_1}||}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

对 $\lambda_2=2$，解方程组 $(A^TA-2I)x=0$ 得特征向量 $\widehat{p_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\longrightarrow p_2=\frac{\widehat{p_2}}{||\widehat{p_2}||}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\therefore P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$q_1=\frac{1}{\sigma_1}Ap_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}A\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_2=\frac{1}{\sigma_2}Ap_2=\frac{1}{\sqrt{2}}A\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

因此 A 的奇异值分解为 $A=QDP^T$

第四题

设 A^TA 的一个特征值为 $\lambda(\lambda\neq0)$，则有 $A^TAx=\lambda x$，两边左乘 A 得 $AA^TAx=\lambda Ax$

令 $y = Ax$，若 $y \neq 0$，则 AA^T 的一个特征值也为 λ

若 $y = 0$，则 $A^TAx = 0 \to \lambda = 0$，矛盾

$\therefore A^TA$ 的非零特征值是 AA^T 的非零特征值

同理可证 AA^T 的非零特征值也是 A^TA 的非零特征值

$\therefore A^TA$ 与 AA^T 拥有相同的非零特征值

第五题

(a) 写成矩阵形式 $Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 4.5 & 3.1 \\ 1.6 & 1.1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 19.249 \\ 6.843 \end{pmatrix}, \quad \det A = 4.5 \cdot 1.1 - 3.1 \cdot 1.6 = -0.01$$

由 Cramer 法则，有

$$x_1 = \frac{\det\big([b,\, a_2]\big)}{\det A} = \frac{19.249 \cdot 1.1 - 3.1 \cdot 6.843}{-0.01} = \frac{-0.0394}{-0.01} = 3.94$$
$$x_2 = \frac{\det\big([a_1,\, b]\big)}{\det A} = \frac{4.5 \cdot 6.843 - 1.6 \cdot 19.249}{-0.01} = \frac{-0.0049}{-0.01} = 0.49$$

(b) 同样使用 Cramer 法则：

$$x_1 = \frac{19.249 \cdot 1.1 - 3.1 \cdot 6.84}{-0.01} = \frac{-0.0301}{-0.01} = 3.01$$
$$x_2 = \frac{4.5 \cdot 6.84 - 1.6 \cdot 19.249}{-0.01} = \frac{-0.0184}{-0.01} = 1.84$$

(c) 由于 $\det A \approx -0.01$ 非常小，系统病态
方程右端由 6.843 到 6.84 的微小变化，引起解从 (3.94, 0.49) 显著改变为 (3.01, 1.84)
为此计算 A 的条件数：

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4.5 & 1.6 \\ 3.1 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.5 & 3.1 \\ 1.6 & 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.81 & 15.71 \\ 15.71 & 10.82 \end{pmatrix}$$

特征多项式为 $|\lambda I - A^TA| = \begin{vmatrix} \lambda - 22.81 & -15.71 \\ -15.71 & \lambda - 10.82 \end{vmatrix} = (\lambda - 22.81)(\lambda - 10.82) - 246.8041$

$\longrightarrow \lambda^2 - 33.63\lambda + 0.0001 = 0$

解得特征值 $\lambda_1 \approx 33.63\,,\, \lambda_2 \approx 0.000003$

$\therefore$ 条件数 $\kappa(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \sqrt{\frac{33.63}{0.000003}} \approx 3348$

过高的条件数表明该线性系统是病态的，具有高敏感性，因此输入数据的微小变化也会导致解的显著变化