第一题

$a=1-0.1-0.3=0.6$
$b=1-0.2-0.6=0.2$
$c=1-0.8-0.1=0.1$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0.1&0.2&0.8\\0.3&0.6&0.1\\0.6&0.2&0.1\end{pmatrix}$

设稳态向量为 $\omega=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，则有 $\omega A=\omega$

$\therefore\begin{cases}0.1x+0.3y+0.6z=x\\0.2x+0.6y+0.2z=y\\0.8x+0.1y+0.1z=z\\x+y+z=1\end{cases}$

解得 $x=y=z=\frac{1}{3}$
$\therefore$ 长期情况下，有雨、多云和下雨的概率均为 $\frac{1}{3}$

第二题

若 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 构成内积，则需依次验证三个条件：

(1) 正定性：$\langle x,x\rangle\geq 0$（当且仅当 $x=0$ 时取等号）

(2) 对称性：$\forall x,y,\ \langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$

(3) 双线性映射：$\forall x,y,z,$ 对 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$ 且 $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle x,z\rangle$

对于（1），$\forall x=(x_1,x_2)^T\neq 0$，有 $x^T\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}x=2x_1^2+x_1x_2+2x_2^2=x_1^2+\frac{7}{4}x_2^2+(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2\geq 0$

当 $x_1=x_2=0$ 时取等号，故（1）成立

对于（2），$\forall x=(x_1,x_2)^T,y=(y_1,y_2)^T$，有 $\langle x,y\rangle=x^T\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}y=2x_1y_1+x_2y_1+2x_2y_2$

$=2y_1x_1+y_1x_2+2y_2x_2=y^T\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}x=\langle y,x\rangle$，故成立

对于（3）,$\forall x=(x_1,x_2)^T,y=(y_1,y_2)^T,z=(z_1,z_2)^T$，

有 $\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=(\alpha x+\beta y)^T\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}z=\alpha x^T\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}z+\beta y^T\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}z=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$

$\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=x^T\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}(\alpha y+\beta z)=\alpha x^T\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}y+\beta x^T\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}z=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle x,z\rangle$，故成立

综上，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 构成内积

第三题

$$x-y=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$$

(1) $\langle x-y,x-y\rangle=(x-y)^T(x-y)=22$

因此 $d(x,y)=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}=\sqrt{22}$

(2) $\langle x-y,x-y\rangle=(x-y)^T\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}(x-y)=47$

因此 $d(x,y)=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}=\sqrt{47}$

第四题

(a) 由 U 可得 $A=\begin{pmatrix}0&1&-3&-1\\-1&-3&4&-3\\2&1&1&5\\0&-1&2&0\\2&2&1&7\end{pmatrix}$

$$A^TA=\begin{pmatrix}9&9&0&27\\9&16&-14&27\\0&-14&31&3\\27&27&3&84\end{pmatrix}\qquad A^Tx=\begin{pmatrix}9\\23\\-25\\30\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 由 $A^TA\lambda=A^Tx$ 可得 $\lambda=\begin{pmatrix}-3\\4\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\therefore \pi_U(x)=A\lambda=\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

(b) $x-\pi_U(x)=\begin{pmatrix}-2&-4&0&6&-2\end{pmatrix}^T$

$d(x,U)=||x-\pi_U(x)||=\sqrt{\langle x-\pi_U(x),x-\pi_U(x)\rangle}=2\sqrt{15}$

第五题

(1) $A+B$ 是对称正定矩阵

对称性：$(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$，故对称性成立

正定性：$\forall x \neq 0,$ 有 $x^T(A+B)x = x^TAx + x^TBx > 0,$ 故正定性成立

(2) AB 不一定是对称正定矩阵，比如令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

则 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，显然不对称，故 AB 不一定是对称正定矩阵

(3) A^{-1} 为对称正定矩阵

对称性：$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$，故对称性成立

正定性：$\forall y = A^{-1}x,$ 有 $x^TA^{-1}x = (Ay)^TA^{-1}(Ay) = y^TAy$

由于 A 正定且 $y \neq 0$，故 $y^TAy > 0$

因此 $x^TA^{-1}x > 0$，故正定性成立

第六题

$$\begin{cases} A(0)^2 + (2)^2 + C(0)(2) + D(0) + E(2) + F & = 0 \\ A(2)^2 + (1)^2 + C(2)(1) + D(2) + E(1) + F & = 0 \\ A(1)^2 + (-1)^2 + C(1)(-1) + D(1) + E(-1) + F & = 0 \\ A(-1)^2 + (-2)^2 + C(-1)(-2) + D(-1) + E(-2) + F & = 0 \\ A(-3)^2 + (1)^2 + C(-3)(1) + D(-3) + E(1) + F & = 0 \\ A(-1)^2 + (1)^2 + C(-1)(1) + D(-1) + E(1) + F & = 0 \end{cases}$$

$$得到\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 9 & -3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} A \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^TA = \begin{pmatrix} 100 & -19 & 20 & 11 & 16 \\ -19 & 19 & 11 & -5 & -1 \\ -20 & 11 & 16 & -1 & -2 \\ 11 & -5 & -1 & 12 & 2 \\ 16 & -1 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^Tb = \begin{pmatrix} -19 \\ -5 \\ 5 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 由 $A^TAx = A^Tb$ 可得 $x = \begin{pmatrix} \frac{189}{730} \\ -\frac{221}{365} \\ \frac{533}{730} \\ -\frac{66}{365} \\ -\frac{908}{365} \end{pmatrix}$

$\therefore$ 最佳拟合椭圆为 $\frac{189}{730}x^2 + y^2 - \frac{221}{365}xy + \frac{533}{730}x - \frac{66}{365}y - \frac{908}{365} = 0$

乘以 730 后化简得**椭圆方程** $\boldsymbol{189x^2 + 730y^2 - 442xy + 533x - 132y - 1816 = 0}$

在坐标系中标记出这六个点并画出椭圆

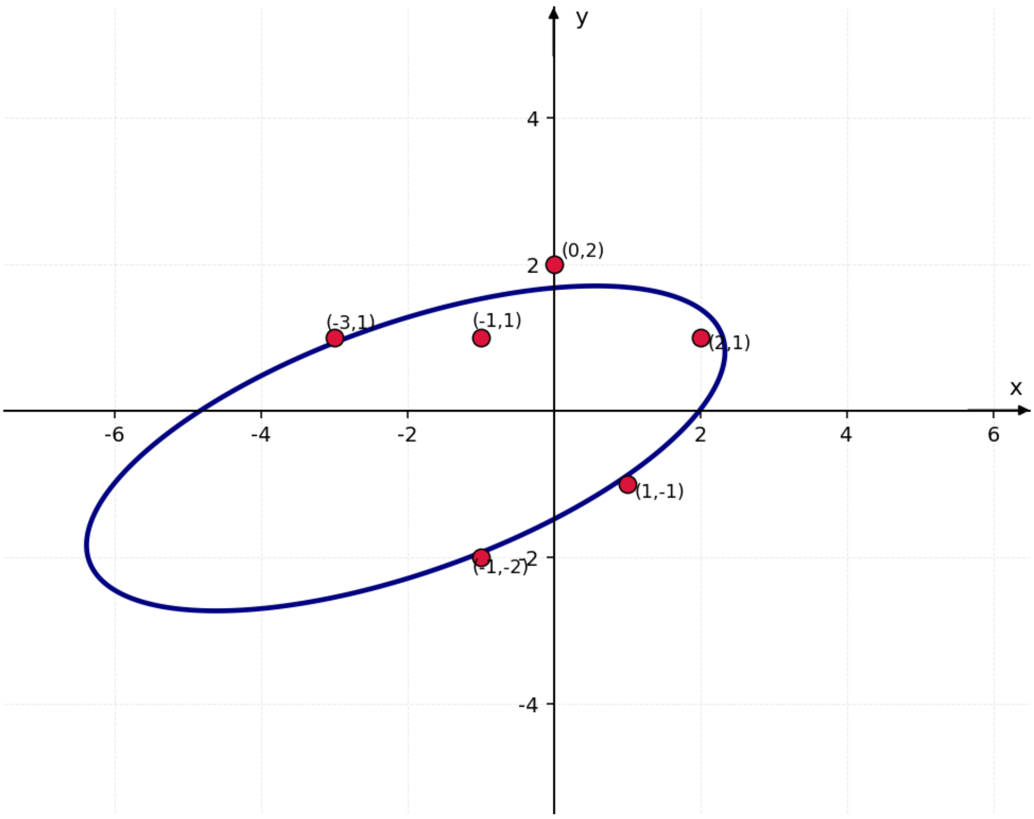

图 1: 样本点及拟合得到的椭圆