作业一

1. 第一题

(1) $\forall\alpha \in \mathbb{Z}$, $\forall\beta \in \mathbb{Z}$,因为$\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$,所以$\mathbb{Z}$ 关于减法封闭。
(2) 取 $1, 3 \in \mathbb{Z}^*$, 因为 $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}^*$, 所以 $\mathbb{Z}^*$ 关于普通除法不封闭。

2. 第二题

设 a 的阶为 r_1, 因为

$$(b^{-1}ab)^{r_1} = b^{-1}ab\, b^{-1}ab \cdots b^{-1}ab = b^{-1}a^{r_1}b = b^{-1}b = e,$$

所以 $b^{-1}ab$ 的阶存在，不妨设为 r_2, 则 $r_2 \mid r_1$。又因为

$$e = (b^{-1}ab)^{r_2} = b^{-1}ab\, b^{-1}ab \cdots b^{-1}ab = b^{-1}a^{r_2}b,$$

所以

$$beb^{-1} = b(b^{-1}a^{r_2}b)b^{-1} = a^{r_2},$$

即 $e = a^{r_2}$。因此 $r_1 \mid r_2$。综上所述，$r_1 = r_2$，也即 $|b^{-1}ab| = |a|$。

3. 第三题

由传递闭包的定义可知 R 的传递闭包为

$$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}\ ;$$

4. 第四题

(1) 取 $\{a, b, c\} = \{1, 0, -1\}$。易验证该集合关于乘法封闭，下面证明其唯一性：
因为 $abc \in \{a, b, c\}$，不妨设 $abc = a$，则 $a = 0$ 或者 $bc = 1$。

- $bc = 1$. 因为 $1 = bc \in A$，若 $1 = a$，则 $b^2 \in \{1, b, 1/b\}$。因为 $b \neq 1, 0$，b 只能为 -1，则 $b = c = -1$，矛盾。若 $1 = b$ 或 $1 = c$，则 $c = b = 1$，矛盾。

- $a = 0$. 因为 $b \neq c \neq a = 0$, 故 $bc, b^2 \in \{b, c\}$。不妨设 $bc = b$, 有 $c = 1 \Rightarrow b^2 \in \{b, 1\} \Rightarrow b = -1$

故 $\{a, b, c\} = \{1, 0, -1\}$。
(2) 不存在这样的集合 $\{a, b, c\}$。因为 $a, b, c \in \mathbb{R}$，我们有如下两种情况：

- $\{a, b, c\}$ 存在正数。不妨设 $c = \max\{a, b, c\}$，有 $c + c > c$，因此 $c + c \notin \{a, b, c\}$。

- $\{a, b, c\}$ 存在负数。不妨设 $c = \min\{a, b, c\}$，有 $c + c < c$，因此 $c + c \notin \{a, b, c\}$。

综上，不存在这样的集合 $\{a, b, c\}$ 满足对加法封闭。