

# 人工智能数学基础-作业 10 (总分:100)

2025 年 12 月 12 日

## 1 作业提交

作业文件命名为“自己姓名-学号-人工智能数学基础 10”。作业发送至助教邮箱并抄送至王老师邮箱。邮件的标题为：自己姓名-学号-人工智能数学基础 10

张硕助教邮箱：zhangshuo1422@ruc.edu.cn

王老师邮箱：wang.zihe@ruc.edu.cn

作业提交的 Deadline 为 2025 年 12 月 18 日 22:00

## 2 作业内容

### 2.1 20 分

下面是给出  $X, Y$  的联合分布  $p(X, Y)$  表示为如下

$X \setminus Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

求以下四问

- (a)  $H(X), H(Y)$ .
- (b)  $H(X | Y), H(Y | X)$ .
- (c)  $H(X, Y)$ .
- (d)  $I(X; Y)$ .

### 2.2 20 分

考虑两个高斯分布的混合

$$0.4\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + 0.6\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8.4 & 2.0 \\ 2.0 & 1.7 \end{bmatrix}\right)$$

- a) 计算每个维度的边际分布
- b) 计算二维分布的均值

### 2.3 20 分

考虑一个高斯随机变量  $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_x)$ , 其中  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ . 此外, 我们有  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{w}$ , 其中  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^E, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{E \times D}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^E$ , 和  $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{w} | \mathbf{0}, \mathbf{Q})$  是独立的高斯噪声. ‘独立’ 表示  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{w}$  是独立的随机变量, 并且  $\mathbf{Q}$  是对角矩阵.

- a) 求出似然 (Likelihood)  $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ .
- b) 分布  $p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y} | \mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$  是高斯分布. 计算均值  $\boldsymbol{\mu}_y$  和协方差  $\boldsymbol{\Sigma}_y$ . 请写出详细的计算过程。

### 2.4 20 分

证明: 高斯分布是在均值和方差约束下的熵最大的分布。

### 2.5 20 分

有两个袋子。第一个袋子里装着 4 个芒果和 2 个苹果, 第二个袋子里装着 4 个芒果和 4 个苹果。我们有一枚有偏差的硬币, 它显示正面的概率为 0.6, 显示背面的概率为 0.4。如果扔硬币之后, 显示正面, 则我们就从 1 号袋子中随机挑选一个水果, 否则就从 2 号袋子中随机挑选一个水果。

你的朋友扔了一次硬币 (你看不到结果), 并且从相应的袋子中随机拿了一个水果, 这个水果是一个芒果。

问, 这个芒果是最初在第二个袋子里的概率是多少?