

# 人工智能数学基础-作业 7(总分:70)

2025 年 11 月 7 日

## 1 作业提交

作业文件命名为“自己姓名-学号-人工智能数学基础 7”。例：詹姆斯-2024000274-人工智能数学基础 7

作业发送至助教邮箱并抄送至王老师邮箱。邮件的标题为：自己姓名-学号-人工智能数学基础 7

张硕助教邮箱：zhangshuo1422@ruc.edu.cn

王老师邮箱：wang.zihe@ruc.edu.cn

作业提交的 Deadline 为 2025 年 11 月 12 日 24:00

## 2 作业内容

### 2.1 10 分

计算导数  $f'(x)$ ,

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$

### 2.2 10 分

计算下面函数的微分  $\frac{df}{dx}$ ，并给出每一个偏导数的维度。

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}z\right)$$

$$z = g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}$$

其中， $\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^D, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{D \times D}$ 。

### 2.3 10 分

计算  $\frac{df}{dx}$ ，其中  $f(\mathbf{x}) = \text{tr}(\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \sigma^2 \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ ， $\text{tr}(\mathbf{A})$  是  $\mathbf{A}$  的迹，即对角线元素  $A_{ii}$  的和。

### 2.4 10 分

证明：函数变化最快的方向是梯度方向。

**2.5 10 分**

写出下面这个二次函数的梯度和 Hessian 矩阵

$$f(x) = x^T Ax + b^T x + c,$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n$ , 矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 向量  $b \in \mathbb{R}^n$ , 以及  $c \in \mathbb{R}$ 。

**2.6 10 分**

设  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  定义为  $f(x) := \langle Ax, x \rangle$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ 。计算  $f$  在点  $(1, 1)^T$  的二阶泰勒展开式。

**2.7 10 分**

计算导数  $f'(x)$ ,

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$$

其中  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$  是常数.