

人工智能数学基础-作业 8(总分:120)

2025 年 11 月 17 日

1 作业提交

作业文件命名为“自己姓名-学号-人工智能数学基础 8”。作业发送至助教邮箱并抄送至王老师邮箱。邮件的标题为：自己姓名-学号-人工智能数学基础 8

秦颖助教邮箱：qinying0420@ruc.edu.cn

王老师邮箱：wang.zihe@ruc.edu.cn

作业提交的 Deadline 为 2025 年 11 月 23 日 24:00

2 作业内容

2.1 10 分

证明：如果定义在某个区间上的函数 f 和 g 都是凸函数，且都非减（或者都非增），二者都大于零，则函数 fg 在此区间上是凸函数。

2.2 20 分

证明 $x^* = (1, 1/2, -1)$ 是优化问题

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && (1/2)x^T Px + q^T x + r \\ & \text{subject to} && -1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

的最优解，其中

$$P = \begin{bmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -22.0 \\ -14.5 \\ 13.0 \end{bmatrix}, \quad r = 1$$

2.3 30 分

考虑优化问题

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x^2 + 1 \\ & \text{subject to} && (x - 2)(x - 4) \leq 0, \end{aligned}$$

其中变量 $x \in \mathbf{R}$ 。

(a) 求解可行集，最优值以及最优解。

(b) 绘制目标函数根据 x 变化的图像。在同一幅图中, 标出可行集, 最优点及最优值, 选择一些正的 Lagrange 乘子 λ , 绘出 Lagrange 函数 $L(x, \lambda)$ 关于 x 的变化曲线。利用图像, 证明下界性质 (对任意 $\lambda \geq 0, p^* \geq \inf_x L(x, \lambda)$)。

(c) 推导 Lagrange 对偶函数 g , 求解对偶问题最优值以及对偶最优解 λ^* 。此时强对偶性是否成立?

2.4 20 分

求解线性规划

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Gx \preceq h \\ & && Ax = b \end{aligned}$$

的对偶函数。给出对偶问题, 并将隐式等式约束显式表达。

2.5 20 分

问题

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3) \\ & \text{subject to} && x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \end{aligned}$$

不是凸优化问题, 但是强对偶性亦成立。给出 KKT 条件。找出满足 KKT 条件的所有 x, ν , 并给出最优解。

2.6 10 分

证明 f 是凸函数的充要条件是其具有半正定的 Hessian 矩阵。

2.7 10 分

介绍一位 John von Neumann Theory Prize of Informs 获得者的学术贡献。