Tema: Fecha: / 1 /

Sistemas de ecuaciones

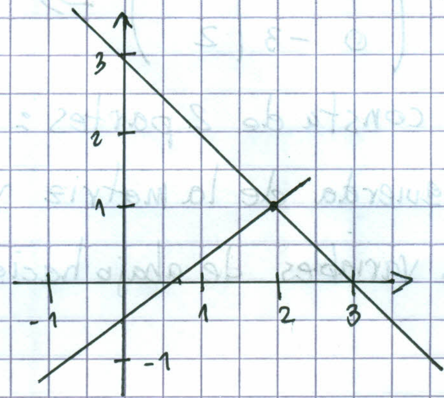
En este capítulo consideraremos el problema de resolver múltiples ecuaciones con múltiples incógnitas. Empezaremos con el caso lineal.

La eliminación de Gauss

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 3x - 4y &= 2 \end{aligned} \qquad (+)$$

Geométricamente representa 2 líneas en el plano xy



y el punto de intersección es la solución del sistema.

El método de eliminación de Gauss es una manera de resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Empezaremos por describir su versión más sencilla. La idea está en obtener un sistema equivalente, más fácil de resolver, usando tres reglas:

a) Intercambiar una ecuación con otra

b) Sumar o restar el múltiplo de una ecuación a otra

c) Multiplicar una ecuación por una constante distinta de 0.

Por ejemplo, podemos multiplicar la primera ecuación de (+) por 3 y restarla de la segunda para obtener

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ -7y &= 2 \end{aligned}$$

Tema: Fecha: / /

Una vez hecho esto podemos resolver el sistema de abajo hacia arriba, lo que resulta en $x=2$ y $y=1$

Esta técnica es más sencilla usando matrices. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones se puede escribir en lenguaje matricial

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -1 \\ 6x + y &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

para luego aplicar la eliminación de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{aligned} x &= 1/9 \\ y &= -2/3. \end{aligned}$$

Notemos que la técnica consta de 2 partes: a) Obtener 0 en la parte inferior ~~de~~ izquierda de la matriz y b) Despejar y sustituir los valores de las variables de abajo hacia arriba.

<u>Número de operaciones</u>

Consideremos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

¿Cuántas operaciones son necesarias para a) eliminar los elementos y b) sustituir los valores?

a) Para eliminar, por ejemplo, el valor a_{21} necesitamos

1 división : $\frac{a_{21}}{a_{11}}$

n multiplicacions: $\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12}, \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}, \dots, \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n}, \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$

n adiciones: $a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}, a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}, \dots, a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n}, b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$

es decir, $2n+1$ operaciones. Para eliminar $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$ por tanto necesitamos $(2n+1)(n-1)$ operaciones.

¿y para eliminar $a_{32}, a_{42}, \ldots, a_{n2}$? $[2(n-1)+1](n-2)$ operaciones

¿y para eliminar $a_{n-1\,n-2}, a_{n\,n-2}$? $[2(3)+1](2)$ operaciones

¿y para eliminar $a_{n\,n-1}$? $[2(2)+1](1)$ operaciones.

En total tenemos

$$\sum_{k=2}^{n}(2k+1)(k-1) = \sum_{k=2}^{n}(2k^2-k-1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-2+1-\frac{n(n+1)}{2}+1-n =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-2 \qquad \frac{n(n+1)}{2}-1 \qquad n-1 \qquad = \frac{2}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{7}{6}n$$

recordando que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{k=1}^{n} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) Luego de la eliminación, el sistema queda así

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

de donde

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

así que el número de operaciones será

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Esto implica que el tiempo total en llevar a cabo todo el proceso es

$$\frac{2}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{6}n \approx \frac{2}{3}n^3 \quad \text{para } n \text{ grande.}$$

Ejemplo Calcule el tiempo necesario para realizar las sustituciones de un sistema de 500 ecuaciones con 500 incógnitas en una computadora que demora 1 s en realizar la eliminación. R. ~0,003 s

Tema: Fecha: / /

La factorización LU

Un sistema de ecuaciones lineales se puede escribir como

$$A x = b$$

donde A es la matriz de coeficientes, x el vector de variables y b el vector de constantes. La idea esencial del problema es encontrar x para A y b dados.

En algunos casos, es posible factorizar A en 2 matrices triangulares

$$A = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior ($L_{ij} = 0$ para $i<j$) y U es una matriz triangular superior ($U_{ij} = 0$ para $i>j$).

Ejemplo encuentre la factorización LU de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. La clave se encuentra en realizar la eliminación de Gauss y almacenar los factores usados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{de fila 2}]{\text{3 fila 1 restado}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

elemento 2,1.

La esencia de la factorización LU se puede resumir en tres propiedades

a) Sea $L_{ij}(-c)$ una matriz triangular inferior que posee todos los elementos 0, salvo el elemento i,j que es $-c$ y la diagonal principal, que son todos 1. En esta situación, el producto

$$L_{ij}(-c)\, A$$

es igual al resultado de sustraer c veces la fila j de la fila i

Tema: Fecha: / 5 /

Por ejemplo, para $L_{21}(-c)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-ca_{11} & a_{22}-ca_{12} & a_{23}-ca_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

b) $L_{ij}(-c)^{-1} = L_{ij}(c)$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Sustitución con la factorización LU</u>

¿Cómo resolvemos el problema original $Ax=b$ con la factorización LU? Haga $c=Ux$ y resuelva

a) $Lc=b$ para encontrar c

b) $Ux=c$ para encontrar x

recordando que $A=LU$ y por tanto $LUx=b$.

<u>Ejemplo</u> Resuelva

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

usando la factorización LU.

No es difícil encontrar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}}_{U}$$

así que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Tiempo de ejecución de la factorización LU</u>

Tema: Fecha: / /

Vimos que el tiempo de ejecución de la eliminación de Gauss era $\sim \frac{2}{3}n^3 + n^2$, donde el proceso de eliminación contribuye el ~~fact~~ término cúbico y el proceso de eliminación el término cuadrático.

Note que en la eliminación de Gauss es necesario trabajar con A y b contemporáneamente.

Imagine que queremos resolver k sistemas

$$Ax = b_1$$
$$\vdots$$
$$Ax = b_k$$

La eliminación de Gauss tardaría aproximadamente $2kn^3/3$ operaciones, en cambio la factorización LU tardaría $2n^3/3 + 2kn^2$ (el 2 se debe a las 2 sustituciones) pues ~~el~~ la matriz A es común.

Si n es grande, la diferencia puede ser substancial.

Incluso cuando $k=1$ el número de operaciones en los dos métodos es el mismo.

Errores

Existen dos principales fuentes de error en la eliminación de Gauss:

a) La sensibilidad de las soluciones a los errores en la entrada, como vimos en el método de Newton, puede estimarse con el factor de amplificación y está relacionado con el concepto de estabilidad.

b) Los errores que pueden surgir de emplear números muy grandes junto a números pequeños en los mismos cálculos

a) Magnificación de los errores

En el método de Newton vimos cómo los errores de entrada pueden amplificarse en la salida, pero tanto la entrada (ecuación) como la salida (raíz) eran escalares. En este caso estamos tratando con matrices y vectores. Para esto, necesitamos un par de definiciones

* La norma del máximo de un vector es $\|x\|_\infty = \max |x_i|$, para $i = 1, \ldots, n$.

* Sea x_a una aproximación de la solución del sistema $Ax = b$. El residuo es $r = b - Ax_a$ y el error de la ~~residuo~~ entrada es $\|b - Ax_a\|_\infty$ mientras que el error de la salida es $\|x - x_a\|_\infty$

Ejemplo. Encuentre los errores de entrada y salida para la solución $x_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ R. Entrada 3, salida 1

* Además, los errores relativos son $\frac{\|b - Ax_a\|_\infty}{}$ y $\frac{\|x - x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ de donde la magnificación es $\frac{\|x - x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty} \cdot \frac{\|b\|_\infty}{\|b - Ax_a\|_\infty}$

* Finalmente, el número condicionante de una matriz A, cond(A), es el máximo error posible (magnificación) para resolver $Ax = b$ para todos los posibles b. Sorprendentemente es

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (+)$$

donde $\|A\| = \|A\|_\infty$ es el máximo valor de las sumas absolutas de las filas

Notemos que la norma del máximo cumple con las propiedades de una norma, tanto para vectores como para matrices.

i) $\|x\| \geq 0$ con igualdad si y sólo si $x = 0$

ii) Si α es un escalar $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

Tema: Fecha: / /

iii) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

Para demostrar (+) consideremos que $Ax=b$ y $A(x-x_a)=r$

así
$$\|x-x_a\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\|$$

y
$$\frac{1}{\|b\|} \geq \frac{1}{\|A\| \|x\|}$$

pues
$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Uniendo las ~~igualdades~~ desigualdades y reacomodando tenemos que
$$\frac{\|x-x_a\|}{\|x\|} \frac{\|b\|}{\|r\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$$

b) Números grandes y pequeños

Considere resolver el sistema
$$10^{-20}x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 = 4$$

i) la solución exacta es
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\cdot 10^{20}}{10^{20}-2} \\ \frac{4-10^{20}}{2-10^{20}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) la solución directa en la computadora
$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-20} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-20} & 1 & 1 \\ 0 & 2-10^{20} & 4-10^{20} \end{array}\right) \underset{\text{en la computadora}}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-20} & 1 & 1 \\ 0 & -10^{20} & -10^{20} \end{array}\right)$$

así que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) la solución después de intercambiar filas es $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El problema radica en el uso de multiplicadores muy grandes, que se puede evitar con el intercambio de filas.

Tema: Fecha: /9/

La factorización PA=LU

La eliminación de Gauss y la factorización LU que vimos hasta ahora suponen que todos los multiplicadores y divisores que nos encontraremos son distintos de 0.

Para evitar estos divisores la clave esta en permutar las filas de A.

Matrices de permutación

Una matriz de permutación es una matriz de nxn cuyas entradas son todas 0, excepto por un solo 1 en cada fila y columna. Nótese que se puede construir una matriz de permutación intercambiando filas o columnas de manera arbitraria en la matriz identidad.

Por ejemplo, las 6 posibles matrices de permutación de 3x3 son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema fundamental de las matrices de permutación Sea P una matriz de permutación de nxn, obtenida de una serie de permutaciones de las filas de la matriz identidad. Entonces, la matriz PA es la matriz que se obtiene de realizar exactamente las mismas permutaciones en A.

La factorización PA=LU

Esta factorización consiste fundamentalmente en realizar la factorización LU de manera contemporánea al intercambio de filas implícito con la presencia de P.

En la práctica, se hacen los intercambios de filas de manera que los multiplicadores sean todos menores o iguales a 1 en valor absoluto. Todos los intercambios se reflejan en la matriz de permutación, que inicialmente es igual a la matriz identidad.

Por ejemplo, para encontrar la factorización $PA=LU$ hacemos para un A

$$A=\begin{pmatrix}2&1&5\\4&4&-4\\1&3&1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

intercambiar filas 1 y 2 $\longrightarrow$

$$A=\begin{pmatrix}4&4&-4\\2&1&5\\1&3&1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

restar 1/2 de la fila 1 de 2 $\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix}4&4&-4\\1/2&-1&7\\1&3&1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

restar 1/4 de la fila 1 de 3 $\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix}4&4&-4\\1/2&-1&7\\1/4&2&2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

~~restar 1/2 de la fila 2 de 3~~

intercambiar filas 2 y 3 $\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix}4&4&-4\\1/4&2&2\\1/2&-1&7\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

restar $-1/2$ de la fila 2 de la 3 $\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix}4&4&-4\\1/4&2&2\\1/2&-1/2&8\end{pmatrix}$$

esto resulta en

$$\underset{P}{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}}\underset{A}{\begin{pmatrix}2&1&5\\4&4&4\\1&3&1\end{pmatrix}}=\underset{L}{\begin{pmatrix}1&0&0\\1/4&1&0\\1/2&-1/2&1\end{pmatrix}}\underset{U}{\begin{pmatrix}4&4&-4\\0&2&2\\0&0&8\end{pmatrix}}$$

Y se puede utilizar esta factorización para resolver sistemas del tipo $Ax=b$ con una pequeña modificación a la técnica de factorización LU:

$$PAx = Pb$$

se convierte en

$$Lc = Pb$$

$$Ux = c$$

Notemos que no se necesita conocer b para hacer la factorización $PA = LU$.

Métodos iterativos

De manera similar al caso de encontrar las raíces reales de una función, también existen métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

El método de Jacobi

El método consiste en despejar cada una de las variables e iterar hasta la eventual convergencia. Eventual porque el método no siempre converge.

Por ejemplo, para resolver el sistema

$$3x + y = 5$$

$$x + 2y = 5$$

despejamos cada variable

$$x = \frac{5-y}{3}, \quad y = \frac{5-x}{2}$$

e iteramos, donde

$$x_{i+1} = \frac{5-y_i}{3}, \quad y_{i+1} = \frac{5-x_i}{2}$$

para algún x_0, y_0 apropiado.

Tema: Fecha: / /

En lenguaje matricial, sea $A = L + D + U$, donde L es el triángulo inferior de A, U es el superior y D la diagonal principal. Entonces, el método de Jacobi produce

$$Ax = b$$

$$(D+L+U)x = b$$

$$Dx = b - (L+U)x$$

$$\rightarrow \quad x_{i+1} = D^{-1}\left[b - (L+U)x_i\right].$$

y se inicia las iteraciones con $x = x_0$.

El método de Gauss-Seidel

Este método es una variante del método de Jacobi. La diferencia radica en que en este método se usan los valores más recientes disponibles, incluso si pertenecen al paso presente.

De manera similar al método anterior

$$Ax = b$$

$$(D+L+U)x = b$$

$$(D+L)x = b - Ux$$

de donde

$$x_{i+1} = D^{-1}(b - Ux_i - Lx_{i+1})$$

Notemos que la matriz L permite acomodar los valores recién calculados del vecto x_{i+1}.

Convergencia de los métodos iterativos

Se dice que una matriz A es estrictamente dominante diagonalmente si para $i = 1, \ldots, n$ se cumple $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

Ahora, si A es una matriz estrictamente dominante entoces (1) A no es singular y (2) el método de Jacobi converge independientemente de b. Cabe mencionar que ~~la~~ la dominación diagonal es una condición solamente ~~...~~ suficiente y que, además, el método de Gauss-Seidel también converge.

¿Qué motivos existen para usar esto métodos en lugar de los directos que ya vimos? R. Las matrices escasas.

Métodos para matrices definidas positivas y simétricas

Una matriz A es simétrica si $A = A^T$. Por otra parte, se la define positiva si $x^T A x > 0$ para todos los vectores $x \neq 0$.

Ejemplo Muestre que $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ es simétrica y además está definida positiva.

Ejemplo Muestre que $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ no es definida positiva

Propiedad 1 Si A es una matriz simétrica entonces esta definida positiva si y solo si todos sus valores propios son positivos

Propiedad 2 Si A es una matriz simétrica definida positiva entonces $S^T A S$ es simétrica definida positiva si S tiene el rango completo.

Propiedad 3 Toda submatriz principal de una matriz simétrica definida positiva es simétrica definida positiva.

La factorización de Cholesky

Si A es una matriz simétrica definida positiva de tamaño $n \times n$ entonces existe una matriz triangular superior R de tamaño $n \times n$ tal que $A = R^T R$.

Es posible demostrar el teorema por inducción.

Tomemos el caso base $n = 2$. En este caso

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Tema: Fecha: / /

y de la propiedad 3 sabemo que a y c son mayores que 0. Además $ac-b^2>0$ (determinante) por la propiedad 1. Si la factorización de Cholesky es posible, entonces debemos tener que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{a} & u \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & u\sqrt{a} \\ u\sqrt{a} & u^2+v^2 \end{pmatrix}$$

Así, $u = b/\sqrt{a}$ y $v^2 = c - b^2/a > 0$ (por el determinante).

Entonces, una posible factorización es

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{a}} & \sqrt{c-b^2/a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{a} & b/\sqrt{a} \\ 0 & \sqrt{c-b^2/a} \end{pmatrix} = R^T R$$

Ahora pasemos al paso inductivo. Para esto particionemos A

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & b^T \\ \hline b & C \end{array}\right)$$

con b de $(n-1)\times 1$ y C de $(n-1)\times(n-1)$. Además, si hacemos $u = b/\sqrt{a}$, $A_1 = C - uu^T$ y definimos

$$S = \left(\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & u^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & I \\ 0 & \end{array}\right)$$

podemos escribir que

$$S^T \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right) S = \left(\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & 0 \cdots 0 \\ \hline u & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & u^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & I \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} a & b^T \\ \hline b & uu^T + A_1 \end{array}\right) = A$$

Notemos que A_1 es simétrica y definida positiva, pues

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right) = (S^T)^{-1} A S^{-1}$$

es simétrica definida positiva por la propiedad 2 y A_1 lo es también, por la propiedad 3.

La hipótesis inductiva nos dice que $A_1 = V^T V$ con V triangular superior. Finalmente, definamos

$$R = \left(\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & u^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & V \\ 0 & \end{array}\right)$$

para ver que

$$R^T R = \left(\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & 0 \dots 0 \\ \hline u & V^T \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & u^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & V \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & b^T \\ \hline b & uu^T + V^T V \end{array}\right) = A.$$

Esta demostración nos permite escribir el algoritmo de la factorización de Cholesky:

for $k = 1, 2, \dots, n$

  if $A_{kk} < 0$:

    break.

  $R_{kk} = \sqrt{A_{kk}}$

  $u^T = \frac{1}{R_{kk}} A_{k,k+1:n}$

  $R_{k,k+1:n} = u^T$

  $A_{k+1:n,k+1:n} = A_{k+1:n,k+1:n} - uu^T$

Ejemplo Encuentre la factorización de Cholesky de $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sistemas de ecuaciones no lineales

El método de Newton multivariado

El método de Newton en una variable era

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

que se trata de hacer una aproximación con la serie de Taylor. La generalización a n variables usa el Jacobiano

Tema: Fecha: / /

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f_3 \end{pmatrix}$$

donde

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \end{pmatrix}$$

con $x = (x_1, x_2, x_3)$

La expansión en serie de Taylor es, alrededor de x_0

$$F(x) = F(x_0) + DF(x_0)(x - x_0) + \dots$$

El método de Newton utiliza la aproximación

$$0 = F(r) \approx F(x_0) + DF(x_0)(r - x_0)$$

de donde

$$r - x_0 \approx -DF(x_0)^{-1} F(x_0)$$

así que el método hace

$$x^{k+1} = x^k - [DF(x^k)]^{-1} F(x_k).$$

para un $x^0 = x_0$ apropiado

Ejemplo Resuelva 2 pasos del método de Newton para encontrar la solución de

$$v - u^3 = 0$$

$$u^2 + v^2 - 1 = 0$$

con $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. R. $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}$