Ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones que involucran derivadas de funciones. Este tipo de ecuaciones son muy comunes en la física y otras ciencias.

Una gran parte de las ecuaciones diferenciales que surgen en la física no tienen una ~~fo~~ solución que pueda expresarse en forma cerrada y, gracias a esto, se debe recurrir a aproximaciones de distintos tipos. En este capítulo nos enfocaremos en aproximaciones numéricas.

El tipo de problema que deseamos atacar es el de resolver numéricamente la ecuación

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad (*)$$

para una f dada. La respuesta a este tipo de problemas es, en general, una familia de soluciones o, en otras palabras, infinitas soluciones al problema.

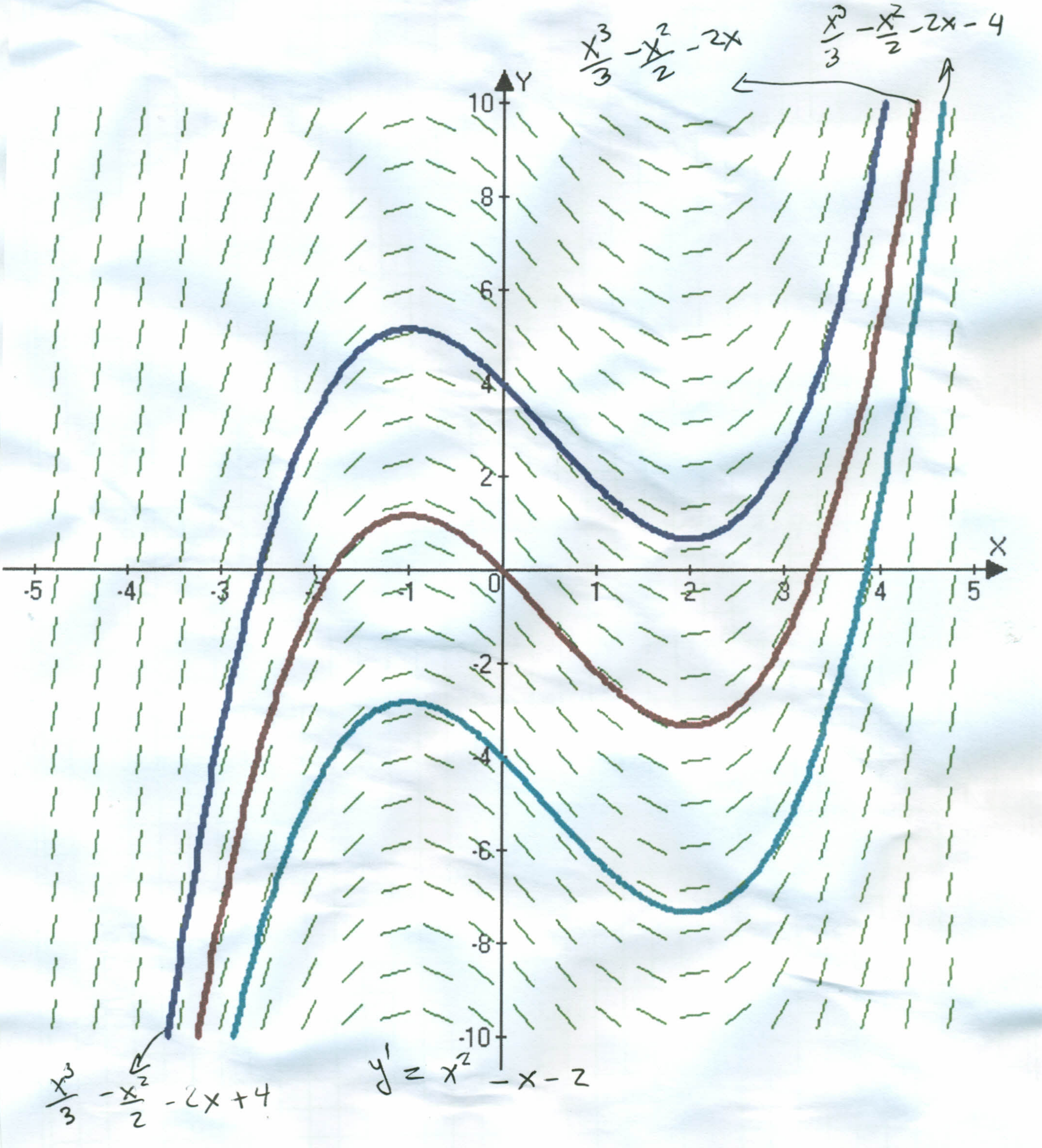
De manera más específica, nos concentraremos en resolver el denominado problema de valor inicial para una ecuación diferencial de primer grado

$$y' = f(t, y)$$

$$y(a) = y_a$$

$$a \leq t \leq b$$

Es útil pensar en una ecuación diferencial como un campo de pendientes. Podemos pensar en $(*)$ como una ecuación que especifica la pendiente para valores de (t, y).

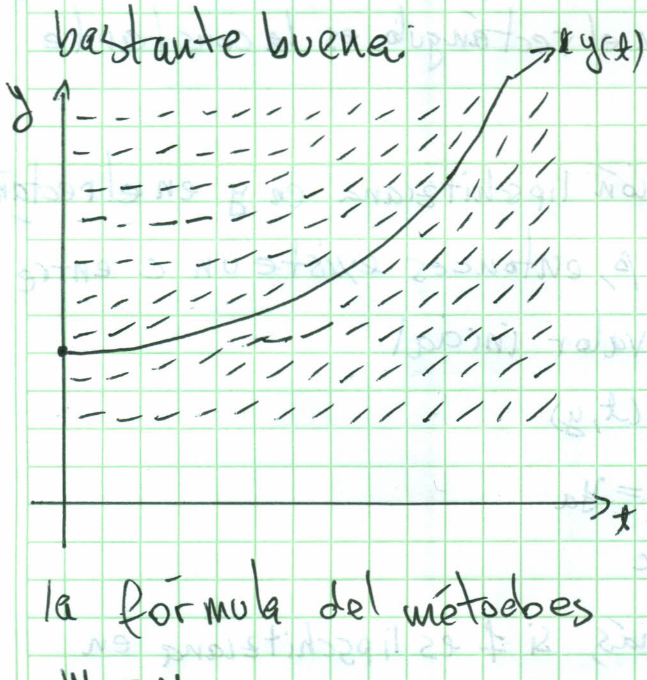


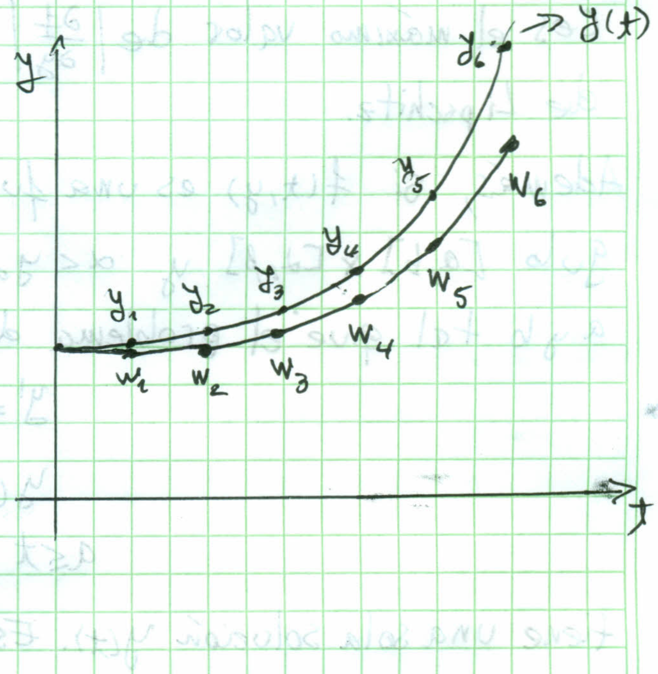
Cuando se especifica una condición inicial se elige una de las infinitas soluciones a la ecuación diferencial

El método de Euler

Si observamos la figura esta nos sugiere un método de aproximación: resolver la ecuación diferencial siguiendo el campo de pendientes.

Si comenzamos en un punto (t_0, y_0) y seguimos la pendiente en ese punto podemos movernos a un nuevo punto (t_1, y_1) cerca al punto original (t_0, y_0). Obviamente lo que obtendremos será una aproximación al punto que yace exactamente sobre la curva $y(t)$, pero si nos movemos pequeñas distancias y el cambio en las pendientes no es brusco la aproximación puede ser bastante buena.





la formula del métodoes

$W_0 = y_0$

$W_{i+1} = W_i + h\, f(t_i, W_i)$ para $i = 0, 1, \ldots$

<u>Ejemplo</u> Aplique el metodo de Euler para resolver

$$y' = ty + t^3$$

$$y(0) = 1$$

$$0 \leq t \leq 1$$

R.- $w_{i+1} = w_i + h(t_i w_i + t_i^3)$

Para determinar el error primero necesitamos algunas definiciones y teoremas:

Se dice que una función es lipschitziana en un rectángulo $[a,b] \times [\alpha,\beta]$ si existe una constante L para la cual

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

para todo (t,y_1) y (t,y_2) en el rectángulo

Ejemplo Encuentre la constante de Lipschitz de la función $f(t,y) = ty + t^3$ en el rectángulo $[0,1] \times (-\infty,\infty)$. R. $L=1$.

Si la función f es continuamente diferenciable en y, entonces es el máximo valor de $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ en el rectángulo es la constante de Lipschitz.

Además, si $f(t,y)$ es una función lipschitziana en y en el rectángulo $[a,b] \times [\alpha,\beta]$ y $\alpha < y_a < \beta$, entonces existe un c entre a y b tal que el problema de valor inicial

$$y' = f(t,y)$$

$$y(a) = y_a$$

$$a \leq t \leq c$$

tiene una sola solución $y(t)$. Es más, si f es lipschitziana en $[a,b] \times (-\infty,\infty)$ entonces la solución es única en $[a,b]$.

Finalmente, si f es una función lipschitziana en y en el rectángulo $[a,b] \times [\alpha,\beta]$ y $Y(t)$ y $Z(t)$ son soluciones de

$$y' = f(t,y)$$

con condiciones iniciales $Y(a)$ y $Z(a)$ entonces

$$|Y(t) - Z(t)| \leq e^{L(t-a)}\,|Y(a) - Z(a)|$$

Para demostrar esto consideremos que si $Y(a) = Z(a)$ enton

ces $Y(t)=Z(t)$ y la desigualdad claramente se satisface.
Si asumimos que $Y(a)\neq Z(a)$ entonces $Y(t)\neq Z(t)$ para todo t en el intervalo, pues de lo contrario las soluciones no serían únicas.
Si definimos $u(t)=Y(t)-Z(t)$ y además $u>0$ (¿por qué?).
tendremos que $u'=Y'-Z'=f(t,Y)-f(t,Z)$ así que

$$u'=|f(t,Y)-f(t,Z)|\leq L|Y(t)-Z(t)|=L|u(t)|=Lu$$

de donde

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}\leq L$$

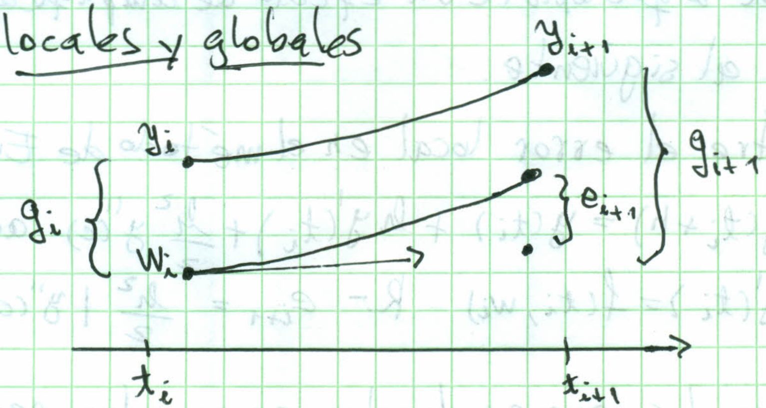
y por el teorema del valor medio

$$\frac{\ln u(t)-\ln u(a)}{t-a}\leq L$$

de donde

$$u(t)\leq u(a)e^{L(t-a)}$$

Errores locales y globales



Pensemos en un paso del método de Euler al aproximar la solución de

$$y'=f(t,y)$$
$$y(a)=y_a$$
$$a\leq t\leq b$$

En el i-ésimo paso tenemos el error acumulado de los pasos previos además de añadir un nuevo error. El error global es

$$g_i=|w_i-y_i|$$

y el error local

$$e_i = |w_i - z(t_i)|$$

que es la diferencia entre la aproximación del método de Euler y la verdadera solución del problema de valor inicial

$$y' = f(t,y)$$
$$y(t_i) = w_i \qquad (\dagger)$$
$$t_i \leq t \leq t_{i+1}$$

Notemos que, en general, $z(t) \neq y(t)$. Es decir, que el error local es la diferencia entre la aproximación y la solución con valor inicial w_i en un solo paso. Cabe notar que el error global no es simplemente la suma de los errores locales precedentes. Esto se debe a que existe un efecto de amplificación del error de un paso al siguiente.

Ejemplo Encuentre el error local en el método de Euler. Ayuda: Considere $y(t_i+h) = y(t_i) + h\,y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(c)$ además de $y(t_i) = w_i$ y $y'(t_i) = f(t_i, w_i)$ R.- $e_{i+1} = \frac{h^2}{2} |y''(c)| \Rightarrow e_{i+1} \leq M h^2$

Consideremos cómo los errores locales se acumulan para formar los errores globales. En la condición inicial

$$g_0 = |w_0 - y_0| = e_0 = |w_0 - z_0| = 0$$

luego de un paso

$$g_1 = |w_1 - y_1| = e_1 = |w_1 - z(t_1)|$$

Ahora, para el segundo paso, si recordamos que z es la solución del problema de valor inicial $(\dagger)$ con $i=1$ tendremos que

$$g_2 = |w_2 - y_2| = |w_2 - z(t_2) + z(t_2) - y_2| \leq \underbrace{|w_2 - z(t_2)|}_{e_2} + |z(t_2) - y_2|$$

$$\leq e_2 + e^{Lh} |y(t_1) - y_1| = e_2 + e^{Lh} |w_1 - y_1| = e_2 + e^{Lh} g_1$$

por teorema

es decir que

$$g_2 \leq e_2 + e^{Lh} e_1$$

De manera similar para $i = 3$

$$g_3 = |w_3 - y_3| \leq e_3 + e^{Lh} g_2 \leq e_3 + e^{Lh} e_2 + e^{2Lh} e_1$$

y la relación general es

$$g_i = |w_i - y_i| \leq \sum_{k=1}^{i} e_k e^{(i-k)Lh}$$

Si recordamos que el error del método de Euler satisface

$$e_i \leq M h^{k+1}$$

para un entero k y $M > 0$ entonces

$$g_i \leq \sum_{j=1}^{i} e_j e^{(i-j)Lh} \leq M h^{k+1} \sum_{j=1}^{i} e^{(i-j)Lh} = M h^{k+1} \frac{e^{iLh} - 1}{e^{Lh} - 1}$$

$$\leq M h^{k+1} \frac{e^{L(t_i - a)} - 1}{Lh} = \frac{M}{L} h^k \left(e^{L(t_i - a)} - 1\right).$$

Si M es un límite superior para $|y''(t)|$ en $[a, b]$ entonces

$$g_i = |w_i - y_i| \leq \frac{Mh}{2L} \left(e^{L(t_i - a)} - 1\right).$$

Ejemplo Encuentre un límite superior para el error de la aproximación de la solución del problema del valor inicial usando Euler

$$y' = ty + t^3$$
$$y(0) = y_0$$
$$0 \leq t \leq 1$$

Ayuda: $y(t) = 3e^{t^2/2} - t^2 - 2$; $y''(1) = 3\sqrt{e^1} - 2$. R. $\frac{3\sqrt{e^1} - 2}{2} eh \approx 4{,}064$

Métodos de Taylor

Tema: Fecha: / /

Hemos visto que el método de Euler tiene orden uno. Usando la expansión de Taylor no es difícil ver que métodos de todos los ordenes existen.

Asumamos que la solución $y(t)$ es diferenciable un número $k+1$ de veces. Entonces podemos escribir

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t) + \frac{1}{2} h^2 y''(t) + \dots + \frac{1}{k!} h^k y^{(k)}(t) + \frac{1}{(k+1)!} h^{k+1} y^{(k+1)}(t)$$

así, podemos escribir el siguiente algoritmo de orden k

$$W_0 = y_0$$

$$W_{i+1} = W_i + h f(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, w_i) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(t_i, w_i)$$

este algoritmo se conoce como el método de Taylor de orden k.

Ejemplo Determine el método de Taylor de segundo orden para resolver

$$y' = ty + t^3$$
$$y(0) = y_0$$

R- $W_{i+1} = w_i + h(t_i w_i + t_i^3) + \frac{1}{2} h^2 (w_i + 3t_i^2 + t_i(t_i w_i + t_i^3))$.

Sistemas de ecuaciones diferenciales

La aplicación de los métodos vistos a sistemas de ecuaciones diferenciales

$$y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n)$$

es directa.

Ejemplo Considere el sistema

$$y_1' = y_2^2 - 2y_1$$
$$y_2' = y_1 - y_2 - t y_2^2$$

con $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$. Aplique el método de Euler para hallar una aproximación de $y_1(t)$, $y_2(t)$. R.- $w_{i+1,1} = w_{i,1} + h\,(w_{i,2} - 2w_{i,1})$

$w_{i+1,2} = w_{i,2} + h\,(w_{i,1} - w_{i,2} - t_i w_{i,2}^2)$.

Ecuaciones diferenciales de grados mayores

Una sola ecuación diferencial de grado n

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (\mp)$$

se puede convertir en un sistema de ecuaciones

$$y_1 = y$$
$$y_2 = y'$$
$$y_3 = y''$$
$$\vdots$$
$$y_n = y^{(n-1)}$$

de manera que $(\mp)$ se puede escribir como

$$y_n' = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Ejemplo Convierta la ecuación diferencial

$$y''' = a(y'')^2 - y' + y\,y'' + \operatorname{sen} t$$

en un sistema de ecuaciones R.- $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$

$y_1' = y_2$, $y_2' = y_3$, $y_3' = a y_3^2 - y_2 + y_1 y_3 + \operatorname{sen} t$.

Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta son una familia de métodos numéricos para aproximar las soluciones de EDO. En esta familia quedan incluidos los métodos de Euler y otros.

Otro método perteneciente a esta familia es el método del punto medio

Tema: Fecha: / /

$w_0 = y_0$

$w_{i+1} = w_i + h\, f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right)$

que, al igual que el método de Euler, tiene un error que va con h^2 o, en otras palabras, es de segundo orden.
Para verificar el orden del método debemos verificar el orden del error local. Si usamos el teorema de Taylor

$$y_{i+1} = y(t_i + h) = y_i + h\, y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y'''(c)$$

y notamos que $y' = f(t,y)$ y $\frac{df}{dt}(t,y) = \frac{\partial f}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial t}$ tenemos

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial y} f(t_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i)\right] + \frac{h^3}{6} y'''(c)$$

Por otro lado,

$$f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right) = f(t_i, y_i) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i) + \mathcal{O}(h^2)$$

Ahora, ya que

$$w_{i+1} = w_i + h\, f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right)$$

no es difícil ver

$$y_{i+1} - w_{i+1} = \mathcal{O}(h^3)$$

así que el error global es proporcional a h^2, de manera que el método del punto medio es de segundo orden.
Este método es miembro de la familia de métodos de Runge-Kutta de segundo orden de dos estadios

$$w_{i+1} = w_i + h\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_i, w_i) + \frac{h}{2\alpha} f(t_i + \alpha h, w_i + \alpha h f(t_i, w_i))$$

para $\alpha \neq 0$. El valor de 1/2 para α corresponde al método del valor medio.

Existen métodos de Runge-Kutta de todos los órdenes, uno de los más populares es el de cuarto orden, abreviado frecuentemente como RK4.

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4)$$

con

$$s_1 = f(t_i, w_i)$$

$$s_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} s_1\right)$$

$$s_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} s_2\right)$$

$$s_4 = f(t_i + h, w_i + h s_3)$$

Es posible interpretar $\frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4)$ como una estima mejorada de la pendiente en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$

La demostración de que se trata de un método de 4to orden es similar a la del método del punto medio, sólo que un poco más morosa.