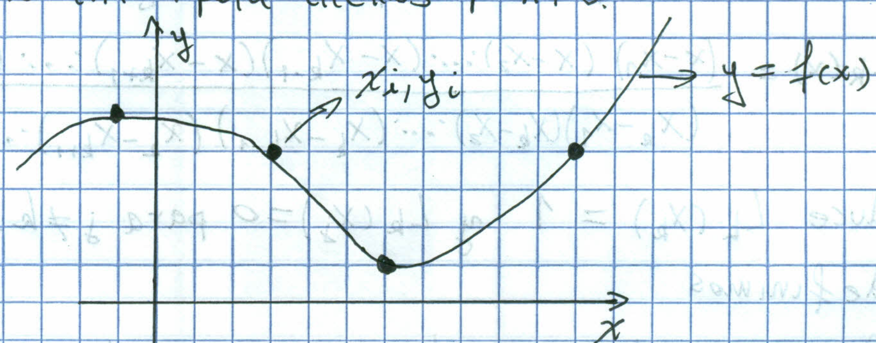
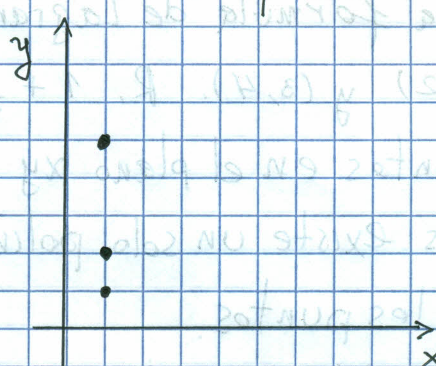
Interpolación

La aproximación de un conjunto de datos utilizando, por ejemplo, un polinomio es una forma de compresión de datos, pues es posible reemplazar un conjunto de datos, posiblemente grande, por un número relativamente pequeño de valores: los coeficientes del polinomio.

Si una función atraviesa un conjunto de puntos se dice que la función interpola dichos puntos.



Es decir que, la función $y = f(x)$ interpola los puntos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ si $y_i = f(x_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Nos enfocaremos en el caso especial para el cual f es un polinomio de un cierto grado. Notemos que no es posible interpolar puntos del tipo



con una función matemática.

¿Por qué usar polinomios? Por dos motivos: (1) Por sus propiedades matemáticas y la teoría relativamente simple para interpo-

Tema: Fecha: / /

lar con polinomios y (2) porque para evaluar un polinomio basta sumar y multiplicar, que son dos operaciones que las computadoras hacen bien y rápido.

Interpolación de Lagrange

Asumamos que tenemos n puntos en el plano xy y queremos interpolarlos con un polinomio. Existe una fórmula para usar un polinomio de grado $n-1$ que atraviese todos los puntos. Para $1 \leq k \leq n$ definimos el polinomio de grado $n-1$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

que produce $L_k(x_k) = 1$ y $L_k(x_j) = 0$ para $j \neq k$. De esta manera definimos

$$P_{n-1}(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \ldots + y_n L_n(x)$$

que pasa por todos los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, pues

$$P_{n-1}(x_j) = y_1 \overset{0}{\cancel{L_1(x_j)}} + y_2 \overset{0}{\cancel{L_2(x_j)}} + \ldots + y_j \underset{1}{\cancel{L_j(x_j)}} + \ldots + \overset{0}{\cancel{L_n(x_j)}}\, y_n = y_j$$

para $j = 1, \ldots, n$

Ejemplo Utilice la fórmula de Lagrange para interpolar los puntos $(0,1)$, $(2,2)$ y $(3,4)$. R. $1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

Si tenemos n puntos en el plano xy (con todos los x_i distintos entre sí) entonces existe un solo polinomio de grado $n-1$ que pasa por todos los puntos.

Si asumimos que existen 2 polinomios, P y Q, de grado $n-1$ que atraviesan los n puntos entonces tendremos que $P(x_1) = Q(x_1) = y_1$, $P(x_2) = Q(x_2) = y_2, \ldots, P(x_n) = Q(x_n) = y_n$. Si definimos $H = P(x) - Q(x)$ vemos que tenemos otro polinomio de grado $n-1$, como mucho. Este nuevo polinomio tendrá n raíces, pues $H(x_1) = H(x_2) = \dots = H(x_n) = 0$. El teorema fundamental del algebra nos dice que un polinomio de grado m puede tener como mucho m raíces, de lo contrario se trata del polinomio $f(x) = 0$. Por tanto, $H(x) = 0$ así que $P(x) = Q(x)$

Ejemplo Encuentre el polinomio que interpola los puntos $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,0)$ y $(3,-1)$. R. $2-x$.

La división de diferencias de Newton

El método de Lagrange es útil desde el punto de vista matemático e intuitivo, pero no se lo usa en la computadora, pues existe otra manera más simple de interpolar un polinomio.

La división de diferencias de Newton es un método relativamente simple de encontrar ~~un~~ el polinomio de grado $n-1$ que atraviesa un conjunto de n puntos que, por el teorema anteriormente demostrado, debe de ser el mismo que producirá la interpolación de Lagrange.

Primero debemos definir un poco de notación antes de ver el método.

Sean $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$ n puntos sobre el plano xy. Las diferencias divididas (hacia adelante) son

$$[y_k] = y_k \quad \text{para } k = 1, \dots, n$$

$$[y_k, \dots, y_{k+j}] = \frac{[y_{k+1}, \dots, y_{k+j}] - [y_k, \dots, y_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k} \quad \text{para } k = 1, \dots, n-j \text{ y } j = 1, \dots, n-1$$

Por ejemplo

$[y_1] = y_1$

$$[y_1, y_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$[y_1, y_2, y_3] = \frac{[y_2, y_3] - [y_1, y_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$

$$[y_1, y_2, y_3, y_4] = \frac{[y_2, y_3, y_4] - [y_1, y_2, y_3]}{x_4 - x_1}$$

que se puede escribir como

$$\begin{array}{cccccc}
x_1 & y_1 & = [y_1] & & & \\
 & & & [y_1, y_2] & & \\
x_2 & y_2 & = [y_2] & & [y_1, y_2, y_3] & \\
 & & & [y_2, y_3] & & [y_1, y_2, y_3, y_4] \\
x_3 & y_3 & = [y_3] & & [y_2, y_3, y_4] & \\
 & & & [y_3, y_4] & & \\
x_4 & y_4 & = [y_4] & & &
\end{array}$$

y, de manera más concreta, si tenemos los puntos $(0,1)$, $(2,2)$ $(3,4)$ y $(1,0)$ esto sería

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & = [1] & & & \\
 & & & [1,2] & & \\
2 & 2 & = [2] & & [1,2,4] & \\
 & & & [2,4] & & [1,2,4,0] \\
3 & 4 & = [4] & & [2,4,0] & \\
 & & & [4,0] & & \\
1 & 0 & = [0] & & &
\end{array}$$

que es

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & = 1 & & & \\
 & & & 1/2 & & \\
2 & 2 & = 2 & & 1/2 & \\
 & & & 2 & & -1/2 \\
3 & 4 & = 4 & & 0 & \\
 & & & 2 & & \\
1 & 0 & = 0 & & &
\end{array}$$

Tema: Fecha: / 5 /

Así, podemos escribir el algoritmo para la división de diferencias de Newton para los puntos $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$:

for $j = 1, \dots, n$

$\quad [y_j] = y_j$

for $i = 2, \dots, n$

$\quad$ for $j = 1, \dots, n+1-i$

$$[y_j, \dots, y_{j+i-1}] = ([y_{j+1}, \dots, y_{j+i-1}] - [y_j, \dots, y_{j+i-2}]) / (x_{j+i-1} - x_j)$$

de manera que el polinomio que interpola los puntos es

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} [y_1, \dots, y_i](x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})$$

Ejemplo Encuentre el polinomio que interpola los puntos $(0,1)$, $(2,2)$, $(3,4)$ usando la división de diferencias de Newton R.- $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$.

Ejemplo Añada el punto $(1,0)$ al problema anterior R.- $-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{7}{2}x + 1$.

¿Cuántos polinomios de grado n pasan por n puntos? R.- ∞

Representación de funciones con polinomios aproximados

Es posible aproximar funciones complicadas usando polinomios, lo que facilita su evaluación en una computadora. Por ejemplo, imagine que deseamos evaluar la función seno ¿cómo podríamos proceder?

Primero limitémonos al intervalo $[0, \pi/2]$. Podemos tomar 4 puntos equidistantes en este intervalo: $(0,0)$, $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, $(\frac{2\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660)$ y $(\frac{3\pi}{6}, 1)$

Tema: Fecha: / /

Usando la división de diferencias de Newton tenemos

0	0			
		$3/\pi$		
$\pi/6$	$1/2$		$\left(\frac{3}{\pi}\right)^2(\sqrt{3}-2)$	
		$\frac{3}{\pi}(\sqrt{3}-1)$		$2\,\frac{3^2}{\pi^3}\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$
$2\pi/6$	$\sqrt{3}/2$		$\left(\frac{3}{\pi}\right)^2(3-2\sqrt{3})$	
		$\frac{6}{\pi}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$3\pi/6$	1			

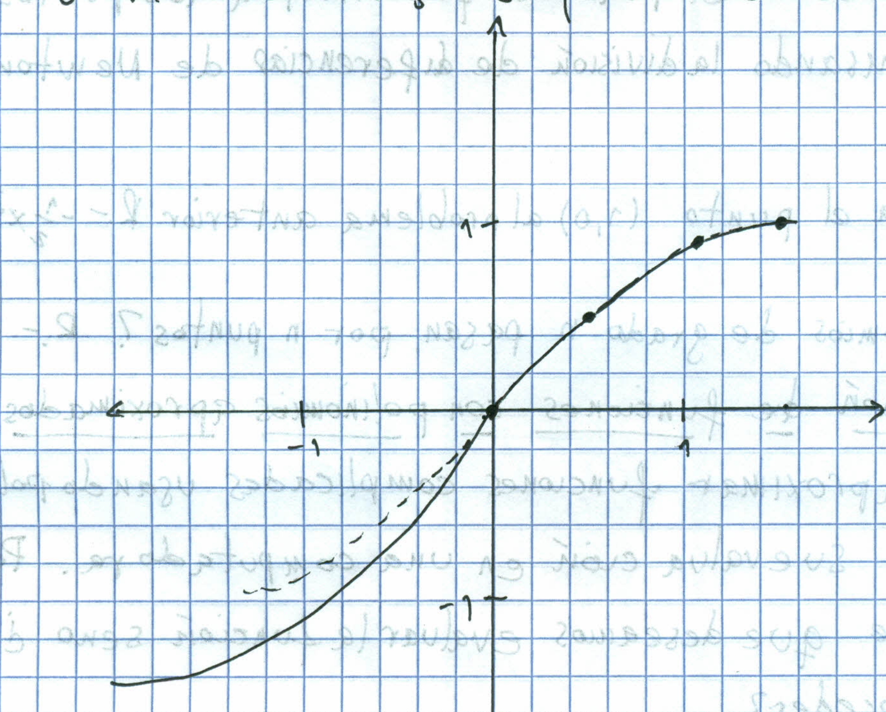
así que el polinomio de tercer grado es

$$P_3(x) = 0 + \frac{3}{\pi}x + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2(\sqrt{3}-2)\,x(x-\pi/6) + 2\,\frac{3^2}{\pi^3}\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

ó, de manera anidada,

$$P_3(x) = 0 + x\left(\frac{3}{\pi} + \left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(\left(\frac{3}{\pi}\right)^2(\sqrt{3}-2) + \left(x-\frac{\pi}{3}\right)2\,\frac{3^2}{\pi^3}\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\right)\right)$$

Podemos visualizar las dos funciones en el siguiente gráfico



Notemos que la interpolación produce una aproximación bastante buena en el intervalo $[0,\pi/2]$.

Errores en la interpolación

Existe un teorema que nos permite estimar el error en la interpolación, es decir, el error que uno comete al aproximar una función f con un polinomio de grado $n-1$ o menos (usando n puntos).

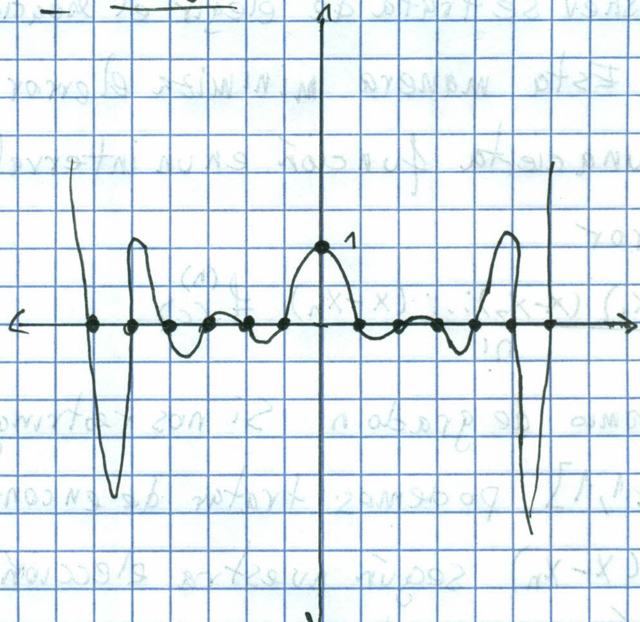
Asuma que $P(x)$ es el polinomio que interpola los n puntos de una función f $(x_1, y_1); \ldots, (x_n, y_n)$. El error es

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

para algún c entre x_1 y x_n, suponiendo que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Ejemplo Encuentre un límite superior para el error, en el intervalo $[0{,}25; 0{,}75]$, entre $f(x) = e^x$ y el polinomio que interpola los puntos $-1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1$. R.- $0{,}000995$ en $0{,}25$ y $0{,}002323$ en $0{,}75$.

El fenómeno de Runge



Sabemos, por lo que ya vimos, que es posible usar polinomios para interpolar cualquier conjunto de puntos (siempre y cuando todos los puntos en el eje x sean distintos entre sí).

Sin embargo, las formas de los polinomios no son siempre como uno las desea, como podemos ver en la ilustración de esta sección. A pesar que todos los puntos tienen valores entre $[0,1]$ en y, el polinomio que ~~esta~~ interpola los puntos no se queda en ese intervalo.

Claramente, del gráfico, podemos ver que el error de la aproximación es bastante grande hacia los extremos del intervalo, situación característica del fenómeno de Runge. ¿Cómo podemos evitar, o al menos minimizar, este efecto? La solución se encuentra usando la llamada interpolación de Chebyshev.

Interpolación de Chebyshev

Generalmente el espaciamiento de los puntos es regular. La interpolación de Chebyshev se trata de elegir el espaciamiento de una manera particular. Esta manera minimiza el error de la interpolación al aproximar una cierta función en un intervalo dado.

Notemos que el error

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

es en sí un polinomio de grado n. Si nos restringimos inicialmente al intervalo $[-1,1]$ podemos tratar de encontrar un mínimo para $(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ según nuestra elección de $x_1,\dots,x_n$.

La elección de números reales $-1 \leq x_1,\dots,x_n \leq 1$ que minimiza $\max_{-1\leq x\leq 1} |(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$ es

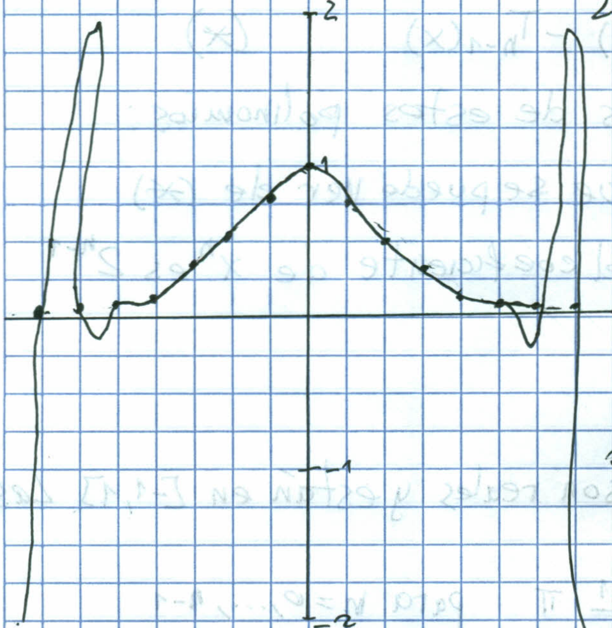
$$x_m = \cos \frac{2m-1}{2n}\pi \quad \text{para } m = 1,\dots,n$$

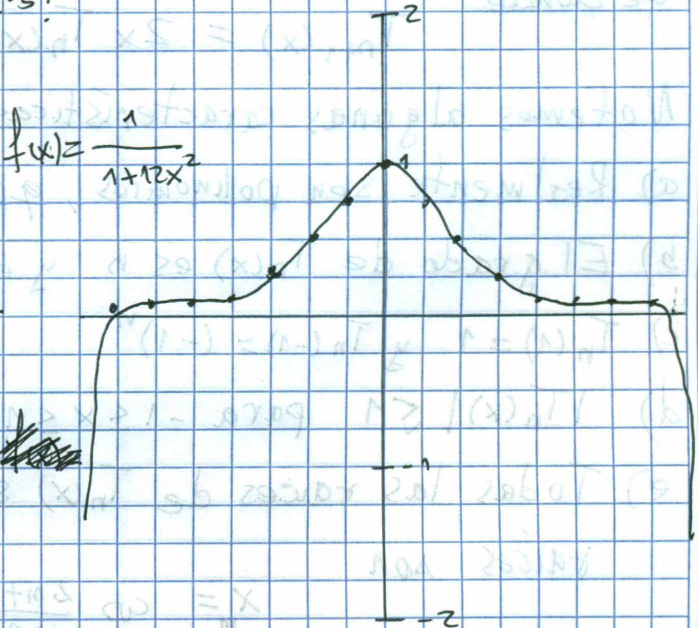
y el valor mínimo alcanzado es $\frac{1}{2^{n-1}}$. De este teorema, es posible minimizar el error de interpolación en $[-1,1]$ eligiendo los puntos

$$x_m = \cos \frac{2m-1}{2n}\pi \quad \text{para } m = 1, \ldots, n.$$

Al polinomio que interpola estos puntos se lo conoce como polinomio de interpolación de Chebyshev.

Ejemplo Encuentre el error, para el peor de los casos, entre la función e^x y el polinomio de Chebyshev de grado 4 usado para interpolar la función en $[-1,1]$. R.- $\frac{e}{2^4 5!} \approx 0{,}00142$.





Los polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev están dados por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Por ejemplo,

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Tema: Fecha: / /

¿Cómo calcular los polinomios de Chebyshev? Recordando algunas identidades trigonométricas; En particular

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Si hacemos $y = \arccos x$ entonces de la definición

$$T_{n+1}(x) = \cos[(n+1)y] = \cos ny \cos y - \operatorname{sen} ny \operatorname{sen} y$$

$$T_{n-1}(x) = \cos[(n-1)y] = \cos ny \cos y + \operatorname{sen} ny \operatorname{sen} y$$

Sumando estas dos relaciones tenemos

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos ny \cos y = 2x\, T_n(x)$$

de donde

$$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (*)$$

Notemos algunas características de estos polinomios:

a) Realmente son polinomios, que se puede ver de $(*)$

b) El grado de $T_n(x)$ es n y el coeficiente de x^n es 2^{n-1}.

c) $T_n(1) = 1$ y $T_n(-1) = (-1)^n$

d) $|T_n(x)| \leq 1$ para $-1 \leq x \leq 1$

e) Todas las raíces de $T_n(x)$ son reales y están en $[-1,1]$. Las raíces son

$$x_m = \cos \frac{2m+1}{2n}\pi \quad \text{para } m = 0, \dots, n-1$$

f) $T_n(x)$ alterna entre -1 y 1 un total de $n+1$ veces. Esto sucede en $\cos 0, \cos\frac{\pi}{n}, \dots, \cos\frac{n-1}{n}\pi, \cos\pi$.

Para demostrar que el mínimo valor está dado por

$$(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

asumamos que existe otro polinomio $P_n(x)$ (con $a_n = 1$) con un máximo menor a $1/2^{n-1}$, es decir que $|P_n(x)| < 1/2^{n-1}$ para $-1 \leq x \leq 1$. Si consideramos la diferencia $P_n(x) - T_n(x)/2^{n-1}$ entonces esta debe cruzar el eje x al menos n veces, pues $T_n(x)$

oscila entre -1 y 1 $n+1$ veces. Esto implica que $P_n(x) - \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ tiene n raíces, lo cual es imposible, pues el grado de esta diferencia es $n-1$ (pues los términos de grado n se cancelan).

Cambio de intervalo

El cambio de intervalo es bastante simple. Basta con definir una nueva variable $y = \alpha x + \beta$, donde α es el factor de escala y β el de ubicación. Esto resulta en que en un intervalo arbitrario $[a, b]$ tenemos que las raíces de los polinomios de Chebyshev son

$$x_m = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2m-1}{2n}\pi$$

y se cumple la desigualdad

$$|(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}}$$

Ejemplo Encuentre un límite superior para el polinomio de Chebyshev de 3er orden que aproxima la función sen x en $[0, \pi/2]$

R. $\leq \left(\frac{\pi/2}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!\, 2^3} \approx 0{,}00198$

Splines cúbicas

En la interpolación con polinomios que vimos hasta ahora usamos un polinomio de grado $n-1$ (a lo mucho) para interpolar n puntos. Existe otra alternativa que consiste en utilizar varias fórmulas para interpolar un conjunto de puntos. Esta técnica se conoce como spline. En esta sección nos enfocaremos en splines cúbicas.

Para definir las splines cúbicas asumimos que tenemos un conjunto de n puntos y que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Tema: Fecha: / /

La spline cúbica para estos n puntos es un conjunto de n-1 polinomios cúbicos:

$S_1(x) = y_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3$ para $[x_1, x_2]$

$S_2(x) = y_2 + b_2(x-x_2) + c_2(x-x_2)^2 + d_2(x-x_2)^3$ para $[x_2, x_3]$

$\vdots$

$S_{n-1}(x) = y_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x-x_{n-1})^3$ para $[x_{n-1}, x_n]$

con las siguientes propiedades

a) $S_i(x_i) = y_i$, $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$

b) $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$

c) $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$

Encontrar una spline que interpole un conjunto de n puntos implica encontrar b_i, c_i, d_i de manera que las propiedades a, b y c se cumplan.

La primera parte de a) se cumple inmediatamente de la definición. La segunda parte forma un conjunto de n-1 ecuaciones y tanto b) como c) definen un conjunto de n-2 ecuaciones cada una, haciendo un total de 3n-5 ecuaciones para 3n-3 incógnitas (b_i, c_i y d_i).

Es decir que, de principio, el sistema tiene infinitas soluciones. La manera de encontrar una solución es añadir las 2 ecuaciones faltantes, que se puede hacer de varias maneras:

Spline natural. En este caso las dos ecuaciones faltantes son $S''_1(x_1) = S''_{n-1}(x_n) = 0$. Al resolver las 3n-3 ecuaciones con 3n-3 incógnitas se obtiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & \\ \delta_1 & 2\delta_1+2\delta_2 & \delta_2 & & & & \\ 0 & \delta_2 & 2\delta_2+2\delta_3 & \delta_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \delta_{n-2} & 2\delta_{n-2}+2\delta_{n-1} & \delta_{n-1} \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_1}\right) \\ \vdots \\ 3\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} - \frac{\Delta_{n-2}}{\delta_{n-2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\dagger)$$

donde $\delta_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta_i = y_{i+1} - y_i$ y además $b_i = \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$ $d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i}$. El algoritmo para encontrar la spline cúbica natural de un conjunto de puntos es

for $i = 1, \ldots, n-1$

$\quad \delta_i = x_{i+1} - x_i$

$\quad \Delta_i = y_{i+1} - y_i$

Resolver $(\dagger)$ para encontrar $c_1, \ldots, c_n$

for $i = 1, \ldots, n-1$

$\quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i}$

$\quad b_i = \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$

Ejemplo Encuentre la spline cúbica para $(0;3)$, $(1;-2)$, $(2;1)$.

R. $S_1(x) = 3 - 7x + 2x^3$ para $[0,1]$ $S_2(x) = -2 - (x-1) + 6(x-1)^2 - 2(x-1)^3$ para $[1,2]$

Tema: Fecha: / /

Spline de curvatura ajustada $S''_1(x_1) = a$ y $S''_{n-1}(x_n) = b$ donde a y b se eligen como se quiera.

Spline de pendiente ajustada $S'_1(x_1) = a$ y $S'_{n-1}(x_n) = b$.

Spline cúbica terminada en parábolas $d_1 = d_{n-1} = 0$.

Spline not-a-knot $d_1 = d_2$ y $d_{n-2} = d_{n-1}$ ó de manera equivalente $S'''_1(x_2) = S'''_2(x_2)$ y $S'''_{n-2}(x_{n-1}) = S'''_{n-1}(x_{n-1})$.

Vale la pena notar que para $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ con $n \geq 2$ existe una spline única, ya sea natural, de curvatura ajustada o de pendiente ajustada. Lo mismo ocurre para la spline terminada en parábolas si $n \geq 3$ y para la spline not-a-knot si $n \geq 4$.