

FIS101-Laboratorio de Física I
Teoría y Experimentos
(Apuntes de clase)

Rolando D. Ticona Peralta

Índice general

1. Fundamentos	1
1.1. Introducción	1
1.2. El Método Científico	1
1.3. Números	2
1.4. Cifras Significativas	3
1.4.1. Redondeo	5
1.4.2. Cifras significativas y cantidades calculadas	5
2. Análisis de Errores	8
2.1. Errores de Medición	8
2.1.1. Errores Sistemáticos	8
2.1.2. Errores Aleatorios	10
2.2. Calibración	10
2.3. La Utilidad de la Estadística	11
2.4. Análisis de Errores Aleatorios	12
2.4.1. Error absoluto	13
2.4.2. Error relativo	14
2.5. Propagación de Errores	15
2.5.1. Adición y Sustracción de Mediciones	16
2.5.2. Multiplicación y División de Mediciones	16
2.6. Criterios para rechazar datos	18
2.6.1. El test-Q.	19
2.6.2. El criterio de Chauvenet	20
3. Análisis Gráfico	23
3.1. Escala Lineal	23
3.2. Escala Semilogarítmica	27
3.3. Escala Log-log	29

4. Ajuste de Curvas	32
4.1. El Método de Mínimos Cuadrados	32
4.1.1. Apéndice: Ajuste de datos usando EXCEL	39
5. Experimentos	49
5.1. Experimento: Instrumentos de Precisión.	49
5.1.1. Objetivos	49
5.1.2. Teoría	49
5.1.3. Experimento	54
5.2. Experimento: Periodo de oscilación de un péndulo	56
5.2.1. Objetivo	56
5.2.2. Equipo	56
5.2.3. Precisión	56
5.2.4. Péndulo simple	56
5.2.5. Experimento	59
5.3. Experimento: Calibración de un dinamómetro.	61
5.3.1. Objetivo	61
5.3.2. Calibración de un dinamómetro con resorte	61
5.3.3. Procedimiento	61
5.4. Experimento: Calibración de un dinamómetro de elástico	63
5.4.1. Objetivo	63
5.4.2. Teoría	63
5.4.3. Ley de Arquímedes	64
5.4.4. Experimento.	65
5.5. Experimento: Velocidad media.	66
5.5.1. Objetivo	66
5.5.2. Equipo	66
5.5.3. Experimento	66
5.6. Experimento: Coeficiente de restitución elástica	67
5.6.1. Objetivo	67
5.6.2. Teoría	67
5.6.3. Experimento	68
5.6.4. Ejemplo	69
5.7. Experimento: Movimiento de los cuerpos	71
5.7.1. Objetivos	71
5.7.2. Teoría	71
5.7.3. Experimento	72
5.7.4. Ejemplo	72
5.8. Experimento: El péndulo físico	74

5.8.1. Introducción	74
5.8.2. Características del péndulo físico	74
5.8.3. Oscilaciones de una varilla delgada	76
5.8.4. Parte experimental	77
5.8.5. Tratamiento de datos	77
5.8.6. Apendice: Momentos de inercia	78
5.8.7. Referencias	80
5.8.8. Ejemplo	80

Índice de figuras

1.	La sonda orbital para determinar el clima de Marte en su preparación para la misión. Esta sonda se destruyó al intentar ingresar a la atmósfera de Marte debido a que los ingenieros en Lockheed Martin "olvidaron" convertir los datos (del empuje del motor) de libras a newtons, antes de dar la información a la NASA. Este "error" está más asociado al concepto convencional de equivocación. A este tipo de errores, designados como ilegítimos o espurios, no se aplica la teoría estadística de errores y el mejor modo de evitarlos es realizar una evaluación cuidadosa de los procedimientos de medición.	2
1.1.	Cifras significativas.	3
2.1.	(a) Error de paralaje, (b) error de apreciación y (c) error debido al exceso de presión sobre el objeto	9
2.2.	(a) Ni preciso ni exacto. (b) Preciso pero no exacto. (c) Exacto y preciso. . .	12
2.3.	13
3.1.	Velocidad versus tiempo. Los datos graficados, v versus t , muestran una relación lineal.	24
3.2.	Distancia versus tiempo. Los datos graficados, d versus t , muestran una relación no lineal.	26
3.3.	Graficando d versus t^2 proporciona una relación lineal.	26
3.4.	I_0 es la intensidad de luz incidente, x es el espesor de la muestra, e I la intensidad transmitida.	27
3.5.	Intensidad de luz versus espesor de las muestras.	28
3.6.	La intensidad de luz versus el espesor de las muestras. La relación lineal obtenida en un papel semilog muestra que los datos obedecen la ley de Lambert.	28
3.7.	Planetas: el eje semimayor versus el periodo. La relación lineal en un papel log-log indica que R y T obedecen una ley de potencias similar a la ecuación (3.11).	30
3.8.	Planetas: R versus $T^{2/3}$, muestran una relación lineal. Este gráfico requiere conocer el exponente en la relación de ley de potencias.	31

4.1.	Recta que muestra los residuales entre los datos, P_i , y la línea.	33
4.2.	Gráfico de la elongación del resorte, (L), versus la masa colgada, (m).	37
4.3.	40
4.4.	41
4.5.	42
4.6.	43
4.7.	44
4.8.	44
4.9.	45
4.10.	46
4.11.	47
5.1.	El calibrador Vernier.	50
5.2.	Escalas del vernier.	50
5.3.	Escalas del vernier.	51
5.4.	Ejemplo de lectura.	51
5.5.	El tornillo micrométrico: a : tope fijo de medición, b : tope móvil de medición, c : cilindro con escala, d : tambor con su escala, e : tornillo con acoplamiento deslizante, f : estribo	52
5.6.	Representación de una distancia d sobre la escala del cilindro (c) y la del tambor (d): $d = 0,5 \text{ mm} + 0,150 \text{ mm} = 0,650 \text{ mm}$	52
5.7.	Balanza de un platillo.	53
5.8.	Péndulo para medir la gravedad.	56
5.9.	El punto P gira con velocidad angular constante. Su proyección sobre el eje x genera un movimiento oscilatorio armónico simple.	57
5.10.	El péndulo simple.	58
5.11.	Esquema de un dinamómetro.	61
5.12.	Equilibrio de fuerzas. F es la fuerza de restitución del resorte que es igual a la fuerza aplicada, en este caso al peso del agua P	62
5.13.	64
5.14.	Solido plano empleado como pendulo fisico. En la posicion indicada, el peso produce respecto a O un momento que se opone al incremento del angulo.	75
5.15.	Varilla delgada de longitud L ; (a) vista frontal: los agujeros para su suspensión se han practicado a intervalos regulares y, (b) vista lateral: la distancia entre el punto de suspensión y el extremo superior es a . La distancia entre el punto de suspensión y el c.m. es d	76
5.16.	Representación del periodo T en función de la distancia a . Los círculos blancos y la curva son teóricos. En cambio, los círculos de colores son datos experimentales.	78

5.17. Varilla delgada de longitud L	79
5.18.	80
5.19.	81
5.20. Representación gráfica de k frente a T^2 . La pendiente experimental de la recta resultó 0.2490 m/s^2 , lo que da para la gravedad un valor de 9.83 m/s^2 (aquí no se presenta el cálculo de errores). El coeficiente de correlación de la recta es $r = 0.9712$	81
5.21.	82

Índice de cuadros

2.1. Valores críticos para rechazar un valor discordante simple al 90 % nivel de confidencia	19
2.2. Desviaciones máximas para el criterio de Chauvenet. La probabilidad se ajusta con n , el número de observaciones, por $(1/2n)$	21
3.1.	24
3.2.	25
4.1.	37
5.1.	50

Propósito y organización

Después de una experiencia anterior al dictar la asignatura de FIS101 LABORATORIO DE FÍSICA BÁSICA I, pienso que es necesario proporcionar al estudiante, en su primer semestre, algunas herramientas básicas para realizar, de una manera adecuada, los informes de los experimentos. Por esto, se agrupan algunos conceptos básicos y las guías de experimentos, para introducir al estudiante a los temas relacionados con la medición y el tratamiento de los datos en los análisis.

A la fecha, existe a la venta una variedad de manuales, guías y apuntes relacionados al tema que pueden ser consultados por el estudiante; más aún, en la internet se puede encontrar muchas direcciones de las cuales se puede "bajar" amplia información relacionada. En la presente serie de apuntes, solo se ha hecho un resumen de algunas de esas fuentes, con las instrucciones básicas para llevar a cabo las diferentes prácticas que constituyen la asignatura. Además de seguir dichas instrucciones es imprescindible que exista un diálogo continuo entre el profesor del laboratorio y los alumnos, con el fin de mejorar la enseñanza o subsanar las posibles fallas o errores tanto del presente manual como del material del laboratorio.

En la primera parte se introducen algunos conceptos fundamentales. A continuación, se presenta una introducción a la teoría de errores. El tercer capítulo está destinado al análisis gráfico de los datos obtenidos. El cuarto capítulo está designado al ajuste de las curvas obtenidas en cada experimento. Finalmente, en el último capítulo están las guías de los experimentos a realizarse en el transcurso del semestre.



Figura 1: La sonda orbital para determinar el clima de Marte en su preparación para la misión. Esta sonda se destruyó al intentar ingresar a la atmósfera de Marte debido a que los ingenieros en Lockheed Martin "olvidaron" convertir los datos (del empuje del motor) de libras a newtons, antes de dar la información a la NASA. Este "error" está más asociado al concepto convencional de equivocación. A este tipo de errores, designados como ilegítimos o espurios, no se aplica la teoría estadística de errores y el mejor modo de evitarlos es realizar una evaluación cuidadosa de los procedimientos de medición.

Capítulo 1

Fundamentos

1.1. Introducción

Lord Kelvin recalcó una vez que la medición es la parte más importante de una ciencia, en una idea que merece ser recordada:

“A menudo digo que cuando usted puede medir acerca de lo que habla, y expresarlo en números, conocerá algo acerca de ello; pero, cuando no pueda medirlo no podrá expresarlo en números, por tanto su conocimiento es de escasa e insatisfactoria calidad.”

Todo científico debe ser capaz de valorar la importancia relativa de una medición directa o calculada. Debe desarrollar una *conciencia de error*, de importancia fundamental al tratar con cantidades de baja precisión así como con las exactas. Espero que estos apuntes sirvan como una introducción a la medición y teoría de errores cuando es aplicada a medidas directas y a los resultados calculados a partir de ellas (medidas indirectas).

Debemos tener en cuenta que la especificación de una cantidad física medible requiere, por lo menos, de dos términos:

1. un número
2. una unidad (además, cuando es necesario, establecer la dirección para cantidades vectoriales)
3. Un término (frecuentemente despreciado), que indica el grado al cual podemos poner la confianza en el valor establecido. Esto se realiza especificando el *índice de precisión*.

1.2. El Método Científico

La experiencia u observación de la vida diaria da a conocer diversos fenómenos cuya causa ha tenido que preguntarse el hombre, tarde o temprano. Pero, el método verdaderamente científico de estudiar los fenómenos físicos consiste en someterlos al *proceso experimental*.

Esto quiere decir: reproducir los fenómenos, aislarlos y, en lo posible, variar a voluntad las circunstancias en que ellos influyen, con la idea de entender las causas que los producen. El método científico “clásico” asume tres etapas:

1. Una *hipótesis* que intenta explicar un fenómeno propuesto; por ejemplo: la fuerza es proporcional al producto de la masa por la aceleración. La fuerza, masa y aceleración son también definidas. Todas las consecuencias de la hipótesis deben ser lógicas.
2. Un *experimento* o medición es realizado en condiciones en las que la hipótesis es asumida como cierta. En el ejemplo, fuerza, masa y aceleración son medidos en su propio rango.
3. El experimento y la hipótesis son comparados. Si la hipótesis parece ser exacta y aceptable ante la comunidad, o personas mas competentes para juzgar el experimento y la hipótesis, entonces la hipótesis llega a ser una *teoría*

Sin embargo, el proceso actual de investigación puede ser muy diferente de este método en muchos casos. Por ejemplo, es común que las hipótesis sean propuestas en base de los experimentos en vez de lo opuesto. A menudo se asumen hipótesis, que se sabe no son estrictamente exactas, para explicar algunos fenómenos. Es también común, para los científicos, hablar de *modelos*, en vez de teorías. Un modelo puede ser una descripción física de un fenómeno que es adaptable al análisis matemático.

1.3. Números

En ciencia se usan dos clases de números: los que son contados o definidos y los que son medidos. Hay una gran diferencia entre estos tipos de números. Se puede establecer el valor *exacto* de un número contado o definido, en cambio, el de uno medido no puede ser conocido.

Por ejemplo, podemos contar el número de bancos en la clase, el número de dedos en las manos o el número de monedas en sus bolsillos con *absoluta certeza*. Los números contados no están sujetos a errores.

Los números definidos se dan respecto a *relaciones exactas*, definidas como verdaderas. Ejemplos: el número de centímetros en un metro, el número de segundos en una hora. Los números definidos tampoco están sujetos a errores.

Cada número medido, sin importar cuan cuidadosamente haya sido medido, tiene cierto grado de incertidumbre. ¿Cual es el ancho de su asiento? ¿123.5 centímetros, 123.52 centímetros, 123.520 centímetros o 123.5201 centímetros? No podemos establecer su medida exacta con *absoluta certeza*.

1.4. Cifras Significativas

Supongamos el siguiente ejemplo: deseamos medir el largo de una mesa con dos reglas diferentes, mostradas en la figura (1.1), la regla *A* tiene la escala solo en centímetros y la regla *B* tiene escala en milímetros. Podemos decir que la medida que proporciona la regla *A* es de 92.2 cm (está entre 92 y 93, pero más cerca de 92 que de 93). En cambio, con la regla *B* podemos ver que la medida está entre 92.2 y 92.3, por lo que podemos estimar (a ojo) que tiene una longitud de 92.25 cm .

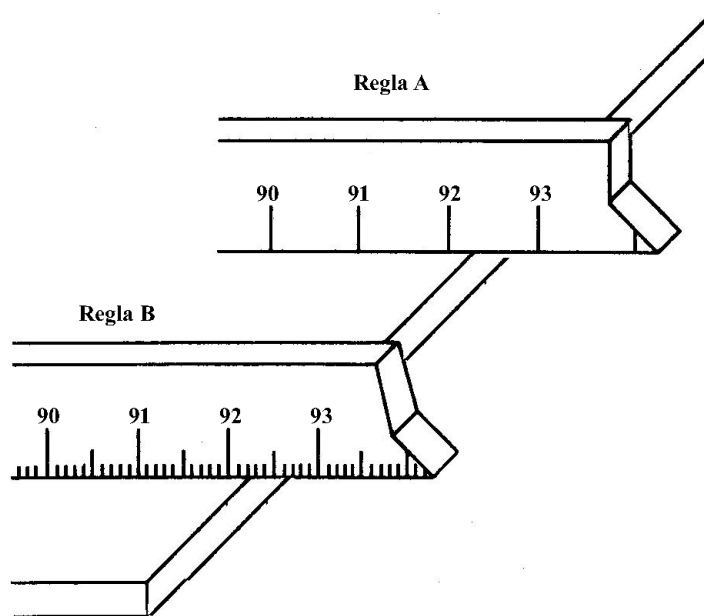


Figura 1.1: Cifras significativas.

Ninguna medida es exacta. La medición nos proporciona dos tipos de información: (a) *la magnitud* de la medición y (b) *la precisión* de la medición. La localización del punto decimal y el valor del número (92 con la regla *A* y 92.2 con la *B*), nos dan *la magnitud*. En cambio *la precisión* es indicada por el número de cifras significativas registradas. La medida de 92.2 (realizada con la regla *A*), tiene tres cifras significativas. En cambio, la medida de 92.25 (realizada con la *B*), tiene cuatro cifras significativas. El dígito que está más a la derecha es, por lo general, un dígito estimado. *Solo un* dígito estimado debe ser registrado como parte de la medición.

Por ejemplo, sería incorrecto reportar que con la primera regla se ha determinado una longitud de 92.253 centímetros!! Esta interpretación de cinco cifras significativas tiene los dígitos estimados (5 y 3) que están **incorrectos**, debido a que indican una precisión mayor a la que la regla puede dar. Por lo tanto es necesario tener mucho cuidado al expresar las mediciones y/o cálculos derivados de estas. Para facilitar el manejo, se han desarrollado

reglas estándar para escribir y usar cifras significativas en mediciones y valores calculados de las mediciones.

Regla 1. En números que no contengan ceros, todos los dígitos son significativos.

Ejemplos:

3.14	tres cifras significativas
3.14159	cinco cifras significativas
4567	cuatro cifras significativas

Regla 2. Todos los ceros entre cifras significativas son significativos.

Ejemplos:

7.052	cuatro cifras significativas
70598	cinco cifras significativas
405	tres cifras significativas

Regla 3. Los ceros a la izquierda del primer dígito diferente de cero solo sirven para fijar la posición del punto decimal y no son significativos.

Ejemplos:

0.0057	dos cifras significativas
0.0759	tres cifras significativas
0.00001	una cifra significativa

Regla 4. En un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último dígito diferente de cero son significativos.

Ejemplos:

43	dos cifras significativas
43.0	tres cifras significativas
43.00	cuatro cifras significativas
0.00200	tres cifras significativas
0.40050	cinco cifras significativas

Regla 5. En un número que no tiene punto decimal y que acaba en uno o más ceros, por ejemplo 3600, los ceros que componen dicho número, *pueden o no* ser significativos. El número es ambiguo en términos de cifras significativas. Antes de definir el número de cifras significativas, es necesario obtener información adicional acerca de como fue obtenido dicho número. Si es un *número medido*, los ceros no son significativos. Si el número *es contado o definido*, todos los dígitos son significativos.

Para evitar este tipo de confusiones, los números pueden expresarse utilizando la notación científica. Cuando se expresan en esta forma, todos los dígitos (sin tomar en cuenta los exponentes), son significativos.

Ejemplos:

$3,6 \times 10^5$	dos cifras significativas
$3,60 \times 10^5$	tres cifras significativas
$3,600 \times 10^5$	cuatro cifras significativas
2×10^{-5}	una cifra significativa
$3,0 \times 10^{-5}$	dos cifras significativas
$4,00 \times 10^{-5}$	tres cifras significativas

1.4.1. Redondeo

A menudo, la calculadora muestra ocho o más dígitos. ¿Como redondear tal número una cantidad con cierto número de cifras significativas? Tres reglas simples se aplican al proceso de borrar dígitos no deseados (o no significativos), de un número mostrado por la calculadora.

Regla 1. Si el primer dígito a ser eliminado es menor que 5, ese dígito, y los que le siguen, son eliminados simplemente.

Ejemplo: 54.234 redondeado a tres cifras significativas se escribirá como 54.2.

Regla 2. Si el primer dígito a ser eliminado es mayor que 5, o es un 5 seguido por dígitos diferentes de cero, los dígitos excedentes son eliminados y el último dígito retenido es incrementado en su valor por una unidad.

Ejemplo: 54.359 y 54.3598 redondeados a tres cifras significativas llegan a ser 54.4.

Regla 3. Si el primer dígito a ser eliminado es un 5 no seguido por otros dígitos, o es un 5 seguido solamente por ceros, se aplica la regla par-impar. Esta regla nos dice que: si el último dígito retenido es par, su valor *no cambia*, y el 5 y los dígitos que le siguen son eliminados. Pero, si el último dígito es impar, su valor se incrementa en uno. La intención de ésta regla par-impar es para *promediar* los efectos del redondeo.

Ejemplos:

54.35	redondeado a tres cifras significativas llega a ser 54.4
54.2500	redondeado a tres cifras significativas llega a ser 54.2
54.3500	redondeado a tres cifras significativas llega a ser 54.4

1.4.2. Cifras significativas y cantidades calculadas

El número permitido de cifras significativas, en un resultado calculado, depende del número de cifras significativas en los datos usados para obtener el resultado y del tipo de operaciones matemáticas usadas para obtener el resultado. Hay reglas separadas para la multiplicación y división, así como para la suma y resta.

Multiplicación y división: Para este tipo de operaciones, la respuesta deberá tener el

número de cifras significativas encontradas en la expresión que tiene el *menor* número de cifras significativas.

Estudiemos los siguientes ejemplos (suponiendo que todos los números son medidos).

- Ejemplo A:

$$8,536 \times 0,47 = 4,01192 \text{ (calculadora).}$$

La cantidad que tiene menor número de cifras significativas es 0.47 (dos), por lo que la respuesta debe tener dos cifras significativas. El redondeo de 4.01192, a dos cifras significativas, es 4.0

- Ejemplo B:

$$3840 \div 285,3 = 13,45916 \text{ (calculadora).}$$

La cantidad que tiene menor número de cifras significativas es 3840 (tres), por lo que la respuesta debe tener tres cifras significativas: 13.45916, redondeado a tres cifras significativas, es 13.5

- Ejemplo C:

$$36,00 \div 3,000 = 12 \text{ (calculadora).}$$

Ambas tienen cuatro cifras significativas, por lo que la respuesta deberá también tener cuatro cifras significativas (la calculadora muestra menos cifras significativas), y escribirse de la siguiente manera:

$$36,00 \div 3,000 = 12,00$$

Suma y resta: Para estas operaciones, el resultado no debe tener dígitos más allá de la posición del último dígito común a todos los números que son sumados o restados.

- Ejemplo A:

$$\begin{array}{r} 34.6 \\ 17.8 \\ 15. \quad + \\ \hline 67.4 \end{array}$$

La posición del último dígito común a todos los números está en el lugar de las *unidades*. Entonces, la respuesta proporcionada por la calculadora de 67.4 debe ser redondeada al lugar de las unidades, la cual nos da la respuesta correcta de 67.

- Ejemplo B:

$$\begin{array}{r}
 20.02 \\
 20.002 \\
 20.0002 \quad + \\
 \hline
 60.0222
 \end{array}$$

La posición del último dígito común a todos los números es el de las *centésimas*. Entonces, la respuesta proporcionada por la calculadora de 60.0222 debe ser redondeada a 60.02.

■ Ejemplo C:

$$\begin{array}{r}
 345.56 \\
 245.5 \quad - \\
 \hline
 100.06
 \end{array}$$

La posición del último dígito común a ambos números está en las *décimas*. Entonces, la respuesta proporcionada por la calculadora de 100.06 debe ser redondeada a 100.1.

Las cifras significativas, en un número, son todas las cifras obtenidas directamente de los procesos de medición y que excluyen los ceros incluidos solamente con el propósito de localizar el punto decimal. Esta definición puede ser ilustrada con algunos ejemplos (ver la siguiente tabla). El número 2, por ejemplo implica que el valor medido está entre 1.5 y 2.5 y que la precisión es alrededor de $0.5/2$ o el 25 por ciento.

Valor medido	Nro. de cifras significativas	Comentarios
2	1	25 % de precisión
2.0	2	2.5 % de precisión
2.00	3	0.25 % de precisión

Una medida y su error experimental deben tener sus últimas cifras significativas en la misma posición (relativa al punto decimal).

Ejemplos: 54.1 ± 0.1 , 121 ± 4 , 8.764 ± 0.002 , $(7.63 \pm 0.10) \times 10^3$.

Capítulo 2

Análisis de Errores

2.1. Errores de Medición

Medir consiste en comparar una magnitud con otra que se considera como patrón (unidad). Este proceso siempre está sujeto a incertidumbres (o errores), como a menudo son llamadas; es decir, siempre que medimos corremos el riesgo de no "acertar" con el valor exacto de la magnitud que queremos conocer. En general, esto se debe a la imperfección de nuestros instrumentos, o al diseño del proceso de medida, o a factores ambientales, etc. De manera que cuando expresamos el valor "medido" de una magnitud debemos siempre hacer una estimación del grado de confianza con el que se ha realizado la medida.

Sin embargo, antes de considerar este argumento es necesario distinguir entre dos tipos de errores: *sistemáticos* y *aleatorios*.

2.1.1. Errores Sistemáticos

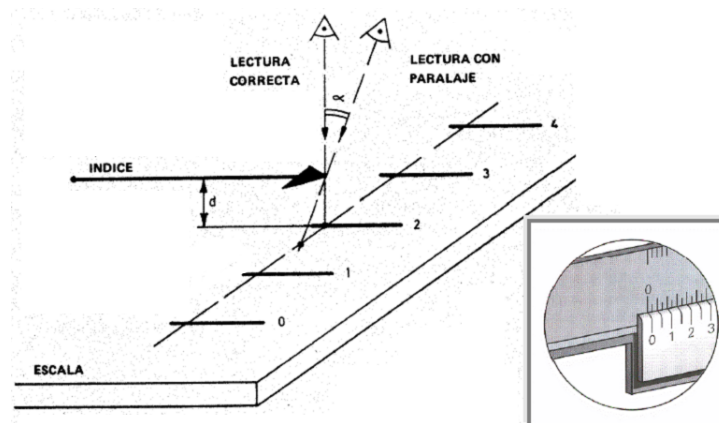
Los errores sistemáticos son debidos a la presencia de un factor no considerado en el montaje experimental o al mal conocimiento de algún otro. Como consecuencia el valor medido está siempre por encima o por debajo del valor verdadero. Por ejemplo, cuando la lectura de un instrumento no puede colocarse inicialmente en cero sino que está desplazada una cierta cantidad, el efecto puede eliminarse restando esa cantidad inicial a todas las medidas que se tomen, asumiendo que el instrumento no ha sido alterado adicionalmente en su funcionamiento. Su existencia es difícil de detectar pero son los más fáciles de corregir pues sólo requieren de la adecuada calibración del aparato.

Para simplificar podemos clasificarlos en tres clases:

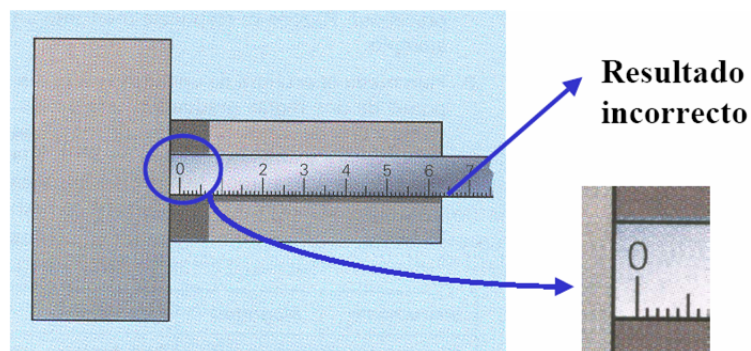
- **Instrumentales.** Debido a equipos descalibrados.
- **Observacionales.** Como errores de paralaje, es decir cuando la lectura del instrumento depende de la posición que adopte el observador.

- **Ambientales.** Influencia de la temperatura, la presión, y otros factores, de una manera regular sobre las medidas.

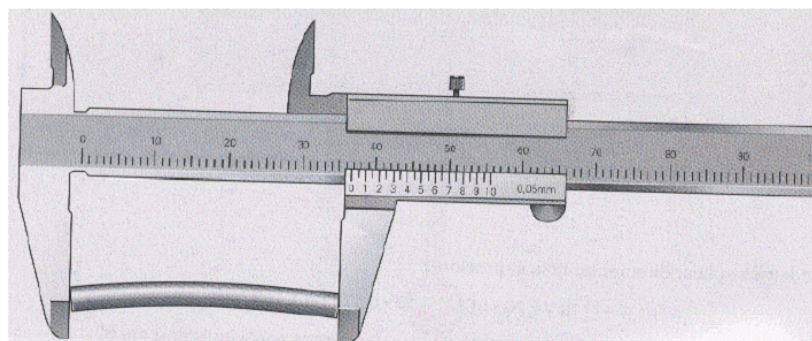
La figura (2.1) ilustra algunos de estos errores.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.1: (a) Error de paralaje, (b) error de apreciación y (c) error debido al exceso de presión sobre el objeto

2.1.2. Errores Aleatorios

Los errores *aleatorios* son aquellos que se producen en las pequeñas variaciones que aparecen entre observaciones sucesivas realizadas por un mismo operador. Las variaciones no son reproducibles de una medición a otra y no presentan la misma magnitud (en dos mediciones cualesquiera del grupo), más que por azar. Los errores aleatorios son en su mayoría de magnitud muy pequeña y para un gran número de mediciones se obtienen tantas desviaciones positivas como negativas. Las causas de estos errores son incontrolables para el observador. Aunque con estos errores no se pueden hacer correcciones para obtener valores más concordes con el real, el empleo de métodos estadísticos ayuda a llegar a algunas conclusiones relativas al valor más probable en un conjunto de mediciones.

Consideremos un experimento tal como la medición de longitud de una mesa con una regla común. Hacemos una serie de medidas repetidas leyendo la regla tan precisamente como se pueda. Se notará que los valores fluctúan y, si dibujamos la frecuencia de los resultados en la forma de un histograma, veremos que empieza a tomar forma una distribución. Como se mencionó anteriormente, los diferentes valores son el resultado de muchos factores, no controlados por el experimentador, que pueden cambiar de una medición a otra; por ejemplo, las contracciones y expansiones debidas a los cambios en la temperatura, una falla del experimentador para colocar el cero en el mismo punto cada vez, etc. Todas estas son fuentes de *errores instrumentales*, donde el termino *instrumento* también incluye al observador! Cuanto mas se controlen estos factores, menor será la magnitud de la fluctuación: se dice que el instrumento es mas *preciso*. En el limite de un instrumento perfecto (ideal), la distribución llega a ser una función δ centrada en el valor verdadero de la cantidad medida, que nunca se dará en la realidad.

2.2. Calibración

Los instrumentos usados en las mediciones pueden ser divididos en tres clases:

1. **Estándares** Las mediciones básicas de longitud, masa, tiempo y voltaje por los cuales todos los otros instrumentos son juzgados, deben ser guardados en laboratorios de estándares nacionales. Los instrumentos, por comparación con los estándares, son parte de los mismos. Por ejemplo, la balanza usada para comparar la masa estándar con otra masa, enviada para calibración, debe ser la misma para toda calibración.
2. **Dispositivos de medición absoluta.** Algunos instrumentos no requieren calibración (aunque esto no implique que estos están midiendo la cantidad requerida con precisión perfecta). En el *manómetro en U*, por ejemplo, la variación en el diámetro no influye en el resultado, por lo que, en la mayoría de los experimentos, no se requiere calibrar el manómetro si ρg ha sido especificado en forma precisa.

3. **Instrumentos que requieren calibración** Los instrumentos que requieren calibración incluyen la mayoría de los instrumentos: instrumentos eléctricos y electrónicos, los instrumentos químicos o los ópticos. La calibración puede ser realizada por el fabricante del instrumento antes, durante y después del uso del instrumento. En muchos casos, todos ellos son requeridos.

Las calibraciones pueden ser estáticas o dinámicas, dependiendo si el instrumento es para ser usado para dar medidas estáticas o dinámicas. Una calibración estática es realizada usando un estándar y el instrumento para medir un valor constante de la cantidad requerida. La calibración dinámica requiere probar el instrumento bajo condiciones que varían en el tiempo.

2.3. La Utilidad de la Estadística

La estadística es una parte del conocimiento matemático que trata con cantidades que varían en una forma aleatoria. En este curso solo consideraremos una aplicación de la estadística: el tratamiento de errores. En general, para los estudiantes que no tienen familiaridad con experimentos o mediciones, es difícil ver la utilidad de los métodos estadísticos. Parecería ser más útil el consejo *"si desea medir algo con más exactitud, compre una regla mejor"*. A pesar de que esto es verdadero, hay muchos casos en los que esta situación es imposible de alcanzar. La lectura de este capítulo podría ser más útil si se mantienen las ideas que se introducen en los ejemplos de medidas reales, además de recordar que no siempre disponemos de los instrumentos más exactos.

En secciones anteriores discutimos como se producen los errores y que los resultados de las mediciones son variables. Sin embargo, debemos enfrentar el problema de intentar extraer la máxima cantidad de información a partir de grupos de datos que no nos dan respuestas exactas. Hay dos propiedades que nos interesan: la tendencia de muchos datos, a agruparse alrededor de un valor central y la tendencia otros a dispersarse alrededor de dicho valor central.

Definamos el vocabulario que necesitaremos, se notará que las palabras son familiares pero que, para propósitos estadísticos, difieran a la definición de un diccionario.

1. **Magnitud.** El objetivo de muchas mediciones es la magnitud o *tamaño* de una variable.
2. **Observación.** Este es un resultado simple de aplicar un instrumento de medida - una lectura de ese instrumento.
3. **Populación fuente.** Si las mediciones fueron realizadas un número infinito de veces, podríamos tener una colección de todas las posibles medidas llamadas población fuente.

4. **Muestra.** Una muestra es un grupo finito de mediciones (o uno único), que proviene de la fuente de todas las mediciones posibles. Debe notarse que el número de muestras posibles es también infinito.
5. **Error.** Definido previamente como la diferencia entre el valor verdadero y el valor medido. El valor verdadero nunca es conocido, por lo que el valor de un error tampoco es conocido (si fuera conocido, podríamos corregir nuestros datos y no tener más errores que surjan de la fuentes.)
6. **Exactitud.** Esta es la cercanía al valor verdadero y, como un error, nunca es conocido en casos prácticos.
7. **Precisión.** Esta es la cercanía de la agrupación de datos.

La diferencia entre precisión y exactitud puede ser aclarada por la siguiente analogía. Si, en vez de hacer mediciones, disparamos flechas a un blanco, podríamos obtener los tres posibles resultados que se muestran en la siguiente figura (2.2).

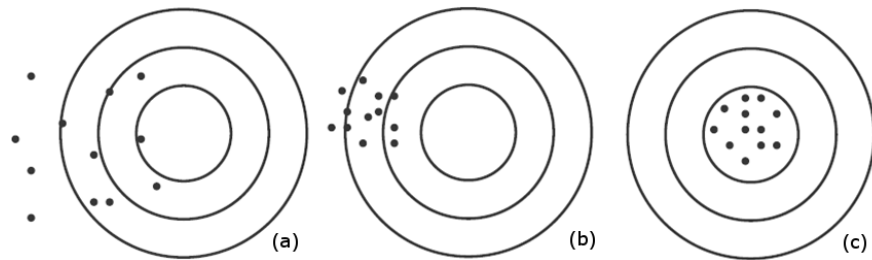


Figura 2.2: (a) Ni preciso ni exacto. (b) Preciso pero no exacto. (c) Exacto y preciso.

2.4. Análisis de Errores Aleatorios

Si una cantidad física como una longitud medida con un metro, o un intervalo de tiempo medido con un cronómetro, es realizada muchas veces, entonces se obtiene una distribución de lecturas debido a los errores aleatorios. Para ese grupo de datos el promedio o valor medio, \bar{x} , es definido por,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.1)$$

donde x_i es el i -ésimo valor medido y n es el número total de mediciones. Los n valores medidos serán distribuidos alrededor del valor medio como se muestra en la figura (2.3). (En muchas instancias \bar{x} se aproxima al valor verdadero si n es muy grande y no hay errores sistemáticos). Una pequeña dispersión de los valores medidos alrededor del valor medio implica alta precisión.

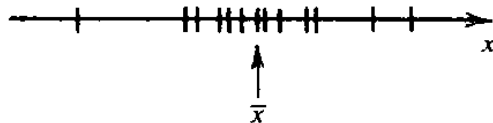


Figura 2.3:

Ahora que hemos determinado el "mejor valor" para las mediciones, que es \bar{x} , necesitamos estimar la incertidumbre o el error en este valor. Empezamos definiendo una forma en la cual la dispersión de los datos alrededor del valor medio puede ser caracterizada.

La **desviación estándar** s , es definida como

$$s \equiv \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{unidades de } x_i), \quad (2.2)$$

si la desviación estándar es pequeña entonces la dispersión en los valores medidos alrededor de la media es pequeño; entonces, la precisión las mediciones es alta. Debe mostrarse que la desviación estándar es siempre positiva y que tiene las mismas unidades que los valores medidos.

El error o incertidumbre del valor medio \bar{x} , es la **desviación estándar de la media** s_m , la cual se define como

$$s_m \equiv \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad (2.3)$$

donde s es la desviación estándar y n es el número total de mediciones.

El resultado a ser reportado es entonces

$$\bar{x} \pm s_m. \quad (2.4)$$

2.4.1. Error absoluto

Se denomina al valor de la incertidumbre determinada (ecuación (2.4)), o también la precisión de los instrumentos. Tiene las mismas dimensiones que la magnitud medida y es conveniente expresarla con las mismas unidades de ésta. En nuestro caso, si x es la magnitud en estudio, \bar{x} es el mejor valor obtenido y s_m su incertidumbre absoluta. El resultado es expresado adecuadamente por

$$x = \bar{x} \pm \delta x \quad (2.5)$$

El significado de esta notación es equivalente a decir que, según nuestra medición, con una cierta probabilidad razonable p_0 (generalmente $p_0 = 0.68$ o 68 %) el valor de x está contenido en el intervalo $(\bar{x} - \delta x, \bar{x} + \delta x)$, o sea:

$$\bar{x} - \delta x < x < \bar{x} + \delta x \quad (2.6)$$

lo que es equivalente a:

$$P(\bar{x} - \delta x < x < \bar{x} + \delta x) = p_0 \quad (2.7)$$

que significa que la probabilidad que el *mejor estimador* de x esté comprendido entre $\bar{x} - \delta x$ y $\bar{x} + \delta x$ es igual a p_0 . El valor de p_0 se conoce con el nombre de *coeficiente de confianza* y los valores $(\bar{x} - \delta x, \bar{x} + \delta x)$ determinan un *intervalo de confianza* para x .

2.4.2. Error relativo

Se define como el cociente entre el error absoluto estimado y el valor medido (o el valor medio de las medidas en caso de muchas medidas). Se expresa habitualmente como porcentaje (%),

$$\varepsilon = \frac{\delta x}{\bar{x}} \times 100 \quad (2.8)$$

y se escribirá en la forma:

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon (\%)$$

Ejemplo.

Las siguientes 25 observaciones fueron realizadas sobre una muestra. Determinar (a) la media de la muestra, (b) su desviación estándar y (c) el error del valor medio.

15.0	19.0	19.0	28.0	18.0
24.0	11.0	20.0	23.0	19.0
20.0	13.0	29.0	23.0	14.0
17.0	22.0	22.0	33.0	30.0
27.0	17.0	18.0	20.0	24.0

Solución:

(a) Utilizando la ecuación (2.1), obtenemos

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 21,0$$

(b) El valor de la desviación estándar lo obtenemos usando la ecuación (2.2)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} = 5,46$$

(c) El error de la media se obtiene de la ecuación (2.3)

$$s_m = \frac{5,46}{\sqrt{25}} = 1,09$$

Por tanto, la forma correcta de expresar el resultado será a partir de la ecuación (2.4)

$$\bar{x} \pm s_m = 21,0 \pm 1,1$$

Nota: Cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\bar{x} \rightarrow \text{valor verdadero}$$

$$s \rightarrow \sigma$$

$$s_m \rightarrow \sigma_m ,$$

donde

$$\sigma_m = \sigma / \sqrt{n} .$$

2.5. Propagación de Errores

La propagación de errores es un método para determinar el error en un valor, calculado a partir de dos o mas valores medidos, con sus errores (estimados) conocidos. Este método será discutido separadamente para la adición y resta de mediciones y para la multiplicación y división de mediciones.

Supongamos que x , y , y z son tres valores medidos y los errores estimados son δx , δy , y δz . Los resultados de las tres mediciones podrían ser reportados en la forma

$$x \pm \delta x \quad y \pm \delta y \quad z \pm \delta z \quad (2.9)$$

donde cada error estimado puede ser la división mas pequeña del instrumento del medida. Si w es alguna función conocida de los valores medidos $w(x, y, z)$, entonces podemos calcular w y su error δw . Para determinar δw , empezamos calculando la diferencial dw

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (2.10)$$

Aproximando la diferencial en la ecuación (2.10) con deltas, esto es,

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \quad (2.11)$$

Asumimos que los errores estimados δx , δy , y δz son errores aleatorios, y la teoría estadística muestra que δw es la raíz cuadrada de la suma de cuadrados, es decir:

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \delta z\right)^2} \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) es la formula básica para la propagación de errores.

2.5.1. Adición y Sustracción de Mediciones

Supongamos que

$$w = ax + by + cz \quad (2.13)$$

donde a , b , y c son constantes positivas o negativas, y que x , y , y z son valores medidos con los errores estimados conocidos δx , δy , y δz

Obtenemos δw usando la ecuación (2.12)

$$\delta w = \sqrt{(a\delta x)^2 + (b\delta y)^2 + (c\delta z)^2} \quad (2.14)$$

Debemos notar que δw es independiente del signo de las constantes, debido a que cada constantes está elevada al cuadrado en la ecuación (2.14). Si uno de los errores estimados es significativamente mayor que los otros, entonces podemos ignorar los otros; por ejemplo, si $b\delta y$ es el mayor, entonces

$$\delta w \simeq \sqrt{(b\delta y)^2} \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) es una forma rápida para aproximar el error en w , y se sugiere que este método sea usado mientras se trabaja en el laboratorio. El análisis de errores final debe ser realizado usando la ecuación (2.14).

2.5.2. Multiplicación y División de Mediciones

Supongamos que

$$w = kx^a y^b z^c \quad (2.16)$$

donde k , a , b , y c son constantes, positivas o negativas. Para encontrar δw , aplicamos la formula básica para la propagación de errores, la ecuación (2.12):

$$\delta w = \left[(kax^{a-1}y^b z^c)^2 (\delta x)^2 + (kbx^a y^{b-1} z^c)^2 (\delta y)^2 + (kcx^a y^b z^{c-1})^2 (\delta z)^2 \right]^{1/2} \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) llega a ser mas útil si dividimos ambos lados por w , donde en el lado derecho reemplazamos w con $kx^a y^b z^c$:

$$\frac{\delta w}{w} = \frac{\left[(kax^{a-1}y^b z^c)^2 (\delta x)^2 + (kbx^a y^{b-1} z^c)^2 (\delta y)^2 + (kcx^a y^b z^{c-1})^2 (\delta z)^2 \right]^{1/2}}{kx^a y^b z^c} \quad (2.18)$$

Elevando al cuadrado $1/kx^a y^b z^c$, moviéndolo bajo la raíz cuadrada, y simplificando obtenemos

$$\frac{\delta w}{w} = \sqrt{\left(\frac{a\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{b\delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{c\delta z}{z}\right)^2} \quad (2.19)$$

Finalmente,

$$\delta w = w \sqrt{\left(\frac{a\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{b\delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{c\delta z}{z}\right)^2} \quad (2.20)$$

En la ecuación (2.20) debemos notar que cada término de la forma $\delta q/q$ es una fracción adimensional de error multiplicada por el exponente apropiado. Podemos estimar el error en el resultado, δw , ignorando todos los errores fraccionales, excepto el mayor de éstos. Por ejemplo, si $\delta y/y$ es el mayor, entonces

$$\delta w \simeq w \frac{b\delta y}{y} \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) es una aproximación rápida que es útil cuando uno realiza trabajos el laboratorio. Sin embargo, el análisis final de los errores debe ser realizado utilizando la ecuación (2.20).

Ejemplo para pequeños errores aleatorios no correlacionados.

Como un ejemplo, calculemos el número de moles de un gas a partir de la medida de su presión, volumen y temperatura:

$$n = \frac{pV}{RT} \quad (2.22)$$

Asumimos que el gas es ideal (una posible fuente error sistemático). Supongamos que nuestras mediciones de p , V , y T son: $p = 0.268 \pm 0.012 \text{ atm}$, $V = 1.26 \pm 0.05 \text{ L}$, y $T = 294.2 \pm 0.3 \text{ K}$. Recordemos también que $R = (0.082056 \pm 0.000004) \text{ L} \cdot \text{atm} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Si introducimos estos números en una calculadora, hallamos que $n = 0.013987894 \text{ moles}$. Pero, ¿cuántos de esos dígitos son significantes? Para determinarlo, debemos propagar los errores en p , V , R , y T usando la ecuación (2.22)

$$\delta n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial p} \delta p\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial V} \delta V\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial R} \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial T} \delta T\right)^2} \quad (2.23)$$

Para usar esto, debemos determinar las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial p} &= \frac{V}{RT} \\ \frac{\partial n}{\partial V} &= \frac{p}{RT} \\ \frac{\partial n}{\partial T} &= -\frac{pV}{RT^2} \\ \frac{\partial n}{\partial R} &= -\frac{pV}{R^2 T} \end{aligned} \quad (2.24)$$

En este punto, es muy importante darse cuenta que un cálculo separado de cada término en la ecuación (2.24) puede ser usado para determinar cual variable contribuye en su mayoría al error en el número de *moles*. Entonces, calculemos cada término separadamente

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial n}{\partial p}\delta p\right)^2 &= \left(\frac{1,26}{0,082056 \times 294,2}\right)^2 (0,012)^2 = 3,92 \times 10^{-7} \text{ mol}^2 \\
 \left(\frac{\partial n}{\partial V}\delta V\right)^2 &= \left(\frac{0,268}{0,082056 \times 294,2}\right)^2 (0,05)^2 = 3,08 \times 10^{-7} \text{ mol}^2 \\
 \left(\frac{\partial n}{\partial R}\delta R\right)^2 &= \left(\frac{0,268 \times 1,26}{0,082056^2 \times 294,2}\right)^2 (0,000004)^2 = 4,65 \times 10^{-13} \text{ mol}^2 \\
 \left(\frac{\partial n}{\partial T}\delta T\right)^2 &= \left(\frac{0,268 \times 1,26}{0,082056 \times 294,2^2}\right)^2 (0,3)^2 = 2,03 \times 10^{-10} \text{ mol}^2
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

El error en la presión es el más importante en esta determinación, es decir, es el error limitante así como el volumen también es importante. Considerando que determinar incertidumbres siempre cuesta tiempo y energía. Si despreciamos el error en la temperatura, el resultado casi no sería afectado, así que hemos gastado tiempo, energía y probablemente el dinero de alguien. Debe notarse que el error en la constante de los gases R es la contribución más despreciable. Generalmente no debería ser incluido entre las variables de propagación de errores. Finalmente, el error en n es

$$\begin{aligned}
 \delta n &= \sqrt{3,92 \times 10^{-7} + 3,08 \times 10^{-7} + 4,65 \times 10^{-13} + 20,3 \times 10^{-10}} \\
 \delta n &= 0,0008367 \text{ moles}
 \end{aligned}$$

Usando las reglas del redondeo, la cifra más significativa en la incertidumbre es "8", entonces tendremos una sola cifra significativa en la incertidumbre. El resultado debe ser reportado como

$$n = (1,40 \pm 0,08) \times 10^{-2} \text{ moles}$$

La importancia de esta situación, en relación con la magnitud relativa de las incertidumbres, es evidente cuando se valora el diseño de un experimento, la adquisición de instrumental, etc. Se gana muy poco tratando de reducir las "pequeñas" incertidumbres, debido a que predominan las "grandes" en la propagación de cuadrados y cualquier mejora en el resultado global del experimento debe lograrse por la mejora del instrumental o de la técnica experimental en relación con esas incertidumbres relativamente "grandes".

2.6. Criterios para rechazar datos

Nunca deben rechazarse datos sin una buena razón defendible. Un dato que no puede ser ajustado por una teoría dada, puede ser debido a que se ha cometido un error de alguna

clase. Por otra parte, los datos pueden no ajustar debido a que la teoría no es adecuada. Esta es una forma en la cuál un fenómeno nuevo puede ser descubierto. Si debe rechazarse algún dato, del total de datos, los siguientes criterios pueden ser aplicados: el test-Q y el criterio de Chauvenet, pero no deben ser aplicados iterativamente. *Solo un dato* puede ser rechazado por éstos métodos. Si hay más datos que al parecer deben ser rechazados, debe hallarse el porqué.

2.6.1. El test-Q.

Este es extremadamente facil de aplicar y trabaja bien para muestras con pequeños números de datos. *Asume* que el experimento está gobernado por la distribución normal, pero no asume que se dispone de de una buena estimación de σ . No es aplicable a experimentos con distribuciones de error no normal, como los experimentos de conteaje con pequeños números de cuentas por muestra. Para aplicar un test-Q, se debe calcular el valor de Q para la muestra:

$$Q = \frac{|X_{sosp} - X_{prox}|}{|X_{mayor} - X_{menor}|} \quad (2.26)$$

El valor X_{sosp} (sospechoso) será, por supuesto , el mayor o menor del grupo. Si el valor de Q es mayor que el valor crítico dado por la tabla (2.1), se puede descartar el valor sospechoso. Luego se debe recalcular \bar{x} , s y s_m , basado en el nuevo número (menor) de observaciones.

Nro. de lecturas	Q-crítico
n	Q_c
3	0.94
4	0.76
5	0.64
6	0.56
7	0.51
8	0.47
9	0.44
10	0.41

Cuadro 2.1: Valores críticos para rechazar un valor discordante simple al 90% nivel de confianza

Debe recalarse que el test-Q debe ser aplicado *una sola vez* a los datos. Si se tiene más de un valor "raro" se debe continuar con el mismo o rehacer el experimento. Para observaciones particularmente importantes, es necesario decidir al principio que criterio será usado para rechazar datos. Esto es crucial para eliminar el sesgo.

Ejemplo

Dados 5 valores: 10, 7, 6, 2, 11. ¿Podemos descartar el valor 2?

$$Q = \frac{|2 - 6|}{11 - 2} = 0,44$$

Para $N = 5$, $Q_c = 0.64$, por lo que este valor no puede ser descartado.

2.6.2. El criterio de Chauvenet

Un segundo test estadístico es el *criterio de Chauvenet*. Tiene la ventaja de que puede ser usado para cualquier forma de distribución padre, pero la desventaja es que dicha distribución *sus parámetros* deben ser conocidos (recuerde que el test-Q no requiere de σ .) La idea es simple: una lectura puede ser rechazada si la probabilidad de obtener la desviación particular de la media es menor de $1/2n$, donde n es el número total de observaciones. Para experimentos donde se tiene unas pocas medidas y ninguna información *a priori* acerca de la distribución padre, el test-Q es mejor. Si se tienen por lo menos 10 puntos, o se conoce algo acerca de la distribución padre, el criterio de Chauvenet es una buena elección. El procedimiento es el siguiente

1. Se determinan la media aritmética \bar{x} y la desviación estándar s de los datos ya corregidos y ordenados.
2. A partir de esto se determina la razón de las desviaciones individuales a la desviación estándar, definida como:

$$\frac{d_i}{s} = \frac{|x_i - \bar{x}|}{s} \quad (2.27)$$

3. Se determina la relación:

$$\frac{d_{max}}{s}$$

4. Se compara esta relación, con los valores críticos de la *razón limitante*,

$$\frac{d_c}{\sigma},$$

reportados en la tabla (2.2).

5. Si

$$\frac{d_{max}}{s} \leq \frac{d_c}{\sigma},$$

entonces el valor extremo no es discrepante y por tanto no se rechaza.

Nro. de lecturas	razón limitante	Nro. de lecturas	razón limitante
n	d_c/σ	n	d_c/σ
5	1.65	25	2.33
6	1.73	30	2.39
7	1.80	35	2.45
8	1.73	40	2.50
9	1.92	50	2.57
10	1.96	75	2.71
12	2.03	100	2.81
15	2.13	300	3.14
19	2.22	500	3.29
20	2.24	1000	3.48

Cuadro 2.2: Desviaciones máximas para el criterio de Chauvenet. La probabilidad se ajusta con n , el número de observaciones, por $(1/2n)$.

6. Si

$$\frac{d_{max}}{s} > \frac{d_c}{\sigma} ,$$

entonces el valor extremo es discrepante y por tanto debe rechazarse y, de ser así, se regresa al paso inicial.

Ejemplo

Se tienen los siguientes datos: 70, 60, 62, 75, 56, 68, 82, 90, 55 y 60; ($n = 10$)

1. ordenando la serie: 55; 56; 60; 60; 62; 68; 70; 75; 82; 90

2. $\bar{x} = 67.8$ y $s = 11.60$

3. El valor crítico para $n = 10$ es:

$$\frac{d_c}{\sigma} = 1,96$$

4. Investigando los valores extremos de la serie,

$$d_{max1} = |55 - 67,80| = 12,80$$

$$\frac{d_{max1}}{s} = \frac{12,80}{11,60} = 1,103 < 1,96 ,$$

el dato no es rechazable.

$$d_{max2} = |90 - 67,80| = 22,20$$

$$\frac{d_{max2}}{s} = \frac{22,20}{11,60} = 1,914 < 1,96 ,$$

el dato tampoco puede rechazarse.

Ejercicio

Se realizaron 120 medidas y un histograma reveló que ellas fueron distribuidas normalmente con un valor medio $\bar{x} = 12.367$ y una desviación estándar $\sigma = 0.058$. ¿Puede ser descartado un punto en 12.872?

Capítulo 3

Análisis Gráfico

Un propósito de muchos experimentos es encontrar la relación entre las variables medidas. Una buena forma de lograr esta tarea es dibujar un gráfico de los datos y entonces analizar dicho gráfico. Las siguientes instrucciones simples deben ser seguidas al dibujar sus datos:

1. Si dibuja a mano use un lápiz bien afilado, de lo contrario, introduciría imprecisiones innecesarias.
2. Dibuje sus gráficos en una pagina completa de papel para gráficos. Un gráfico comprimido reducirá la precisión de sus análisis gráficos.
3. Póngale al gráfico un título conciso.
4. La variable dependiente debe ser graficada en el eje vertical (y), y la variable independiente debe ser graficada en el eje horizontal (x).
5. Ponga los correspondientes títulos en cada uno de los ejes.
6. Seleccione una escala para cada eje y empiece cada eje en cero, si fuera posible.
7. Use barras de error para indicar los errores en las medidas, tal como se muestran en las figuras de éste capítulo
8. Dibuje una curva a través de los puntos de datos. Si los errores son aleatorios, entonces alrededor de una tercera parte de los puntos no estarán contenidos dentro de los rangos de los errores de la mejor curva.

3.1. Escala Lineal

La computadora es un instrumento poderoso para los análisis de datos. Hay software disponible con el cual se puede manejar dichos datos que, además, puede analizarse gráfica-

mente. Como un ejemplo considere el estudio de la velocidad de un objeto (variable dependiente) como una función del tiempo (variable independiente). Los datos se presentan en la tabla (3.1).

Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
1	0.45 ± 0.06
2	0.81 ± 0.06
3	0.91 ± 0.06
4	1.01 ± 0.06
5	1.36 ± 0.06
6	1.56 ± 0.06
7	1.65 ± 0.06
8	1.85 ± 0.06
9	2.17 ± 0.06

Cuadro 3.1:

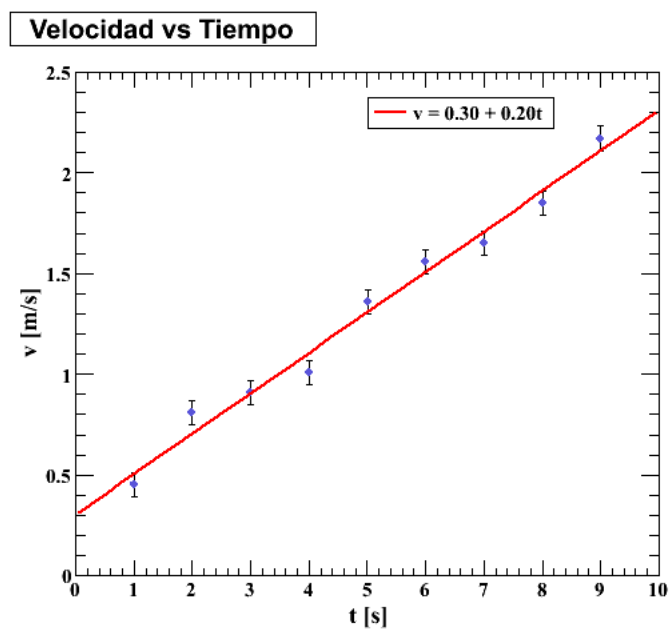


Figura 3.1: Velocidad versus tiempo. Los datos graficados, v versus t , muestran una relación lineal.

Los datos son graficados en la figura (3.1), usando las anteriores instrucciones. Los datos graficados muestran que la velocidad v es una función lineal del tiempo t .

La ecuación general para una línea recta es

$$y = b + mx \quad (3.1)$$

Tiempo (s)	Distancia (m)
1	0.20 \pm 0,05
2	0.43 \pm 0,05
3	0.81 \pm 0,05
4	1.57 \pm 0,10
5	2.43 \pm 0,10
6	3.81 \pm 0,10
7	4.80 \pm 0,20
8	6.39 \pm 0,20

Cuadro 3.2:

donde m es la pendiente y b , el punto donde el eje vertical es interceptado cuando $x = 0$. Sea $v = y$, $x = t$, $a = m$, y $v_0 = b$; entonces,

$$v = v_0 + at \quad (3.2)$$

Esta es la forma de la ecuación para la línea dibujada a través de los datos, donde v_0 es el valor de la velocidad a $t = 0$ y a es la pendiente de la línea que representa la aceleración del objeto. A partir del gráfico vemos que $v_0 = 0,32 \text{ m/s}$. Para determinar la pendiente seleccionamos dos puntos sobre la línea, los cuales estén bastante separados. Entonces,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2,35 - 0,40 \text{ (m/s)}}{10,0 - 0,5 \text{ (s)}} = 0,20 \text{ m/s}^2 \quad (3.3)$$

La ecuación para la línea es

$$v = 0,32 + 0,20t \quad (\text{m/s}) \quad (3.4)$$

Los datos graficados en la figura son analizados en la sección (4.1), como un ejemplo de regresión lineal.

Como un segundo ejemplo, consideremos el estudio de la distancia recorrida por un objeto como una función del tiempo. Los datos están mostrados en la tabla (3.2), y son graficados en la figura (3.2).

En esta instancia, una línea recta a través de los puntos de datos no sería aceptable. Una inspección del gráfico sugiere que d es proporcional a t^n , donde $n > 1$; por ejemplo, d podría ser una función cuadrática del tiempo y, por tanto, $n = 2$.

Supongamos que conocemos la relación teórica entre d y t , la cual es

$$d = \frac{1}{2}at^2 \quad (\text{m}) \quad (3.5)$$

donde a es la aceleración del objeto. A menudo es útil conocer si los datos están de acuerdo con la teoría. Si los datos siguen la anterior relación teórica, entonces una gráfica de d versus t^2 debería dar como resultado una línea recta.

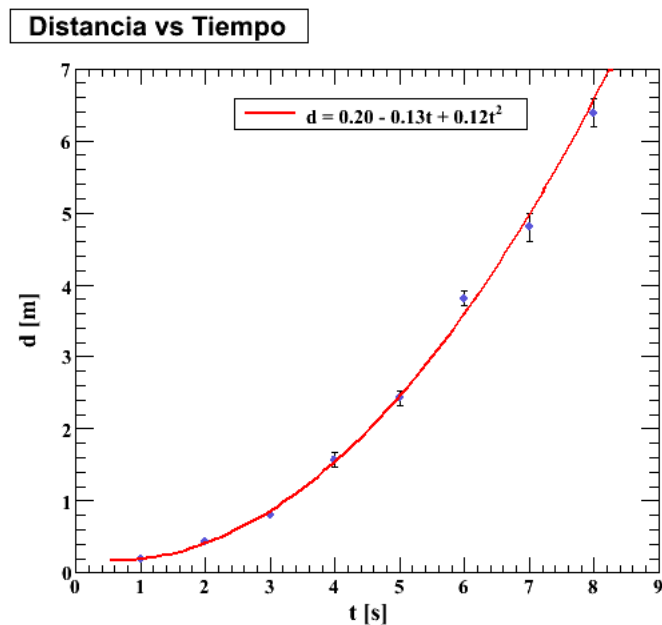


Figura 3.2: Distancia versus tiempo. Los datos graficados, d versus t , muestran una relación no lineal.

El gráfico en la figura (3.3) indica que d es una función lineal de t^2 y, por tanto, que los datos están de acuerdo con los relación teórica. La ecuación para la línea recta es

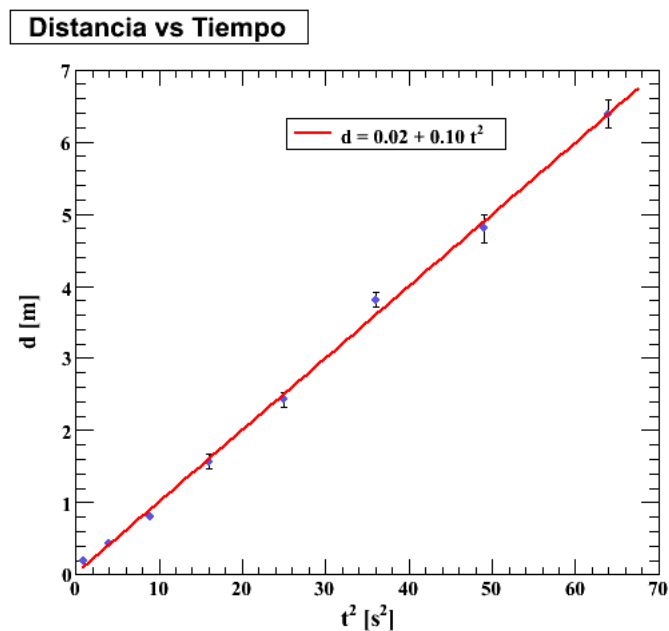


Figura 3.3: Graficando d versus t^2 proporciona una relación lineal.

$$d = d_0 + mt^2 \quad (m) \quad (3.6)$$

donde m es la pendiente y d_0 es el punto donde se intercepta el eje vertical.

3.2. Escala Semilogarítmica

A menudo la relación entre las variables medidas no es lineal. Consideremos, por ejemplo, la intensidad de luz I transmitida a través de una muestra de espesor x , mostrado en la figura (3.4), donde I_0 es la intensidad incidente de la luz. La ley de Lambert establece la relación

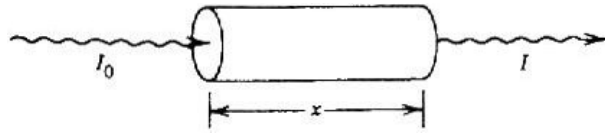


Figura 3.4: I_0 es la intensidad de luz incidente, x es el espesor de la muestra, e I la intensidad transmitida.

teórica entre la variable dependiente I y la variable independiente x como:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (W/cm^2) \quad (3.7)$$

donde μ es el coeficiente de absorción, una constante que depende de longitud de onda de la luz y las propiedades de absorción de la muestra. Supongamos que I es medida como una función de x , y los datos dibujados, como se muestra en la figura (3.5).

Una buena manera de determinar las relación experimental entre I y x es usar papel semilog. Este papel tiene el eje y en escala logarítmica (saca *automáticamente* los logaritmos de los datos graficados), y el eje x en escala lineal. Los datos son mostrados en la figura (3.6). Debemos notar que nunca hay cero en el eje de los logaritmos, y que cuando se están leyendo valores del eje logarítmico, se lee el *logaritmo del valor y no el valor mismo*; por ejemplo *log de 9 y no 9*.

La curva dibujada a través de los datos es una línea recta con una pendiente negativa y la intensidad en el punto en el cual el eje y es interceptado, por la recta, es I_0 . La ley de Lambert está de acuerdo con este resultado como puede comprobarse al tomar el logaritmo de la ley de Lambert:

$$\ln I = \ln(I_0 e^{-\mu x}) = \ln I_0 - \mu x \quad (\sin unidades) \quad (3.8)$$

Nuevamente, la ecuación general de la línea recta es de la forma

$$y = b + mx, \quad (3.9)$$

con $y = \ln I$, $m = \mu$, y $b = \ln I_0$.

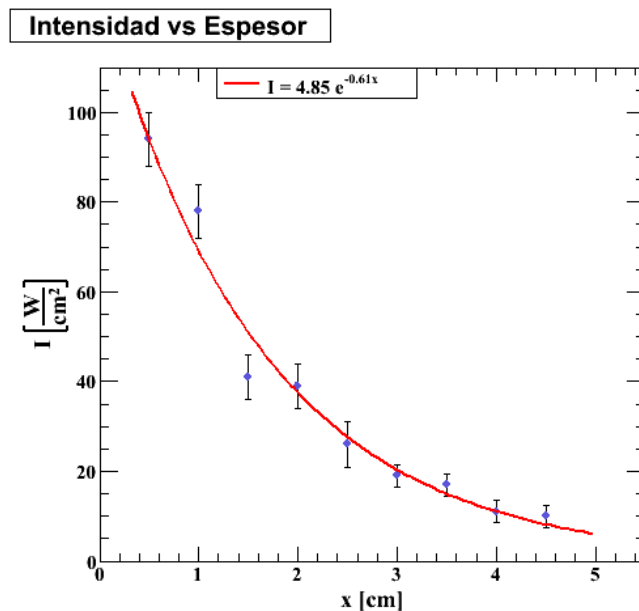


Figura 3.5: Intensidad de luz versus espesor de las muestras.

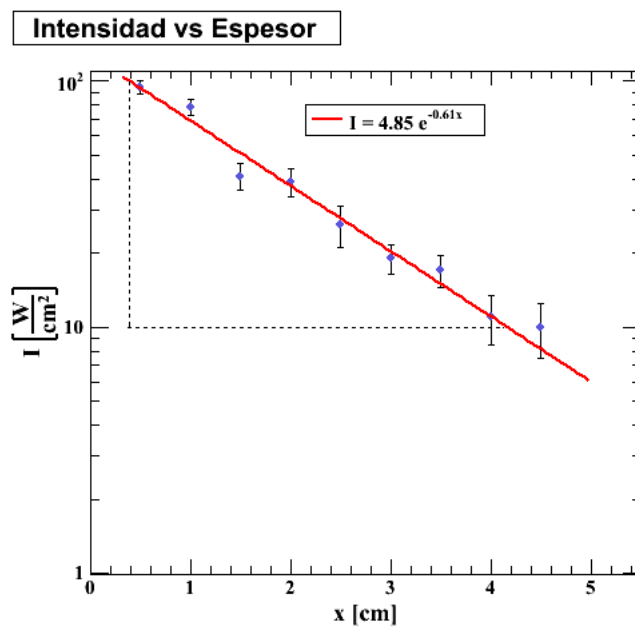


Figura 3.6: La intensidad de luz versus el espesor de las muestras. La relación lineal obtenida en un papel semilog muestra que los datos obedecen la ley de Lambert.

Analizando nuevamente la figura (3.6) vemos que la pendiente de la línea dibujada a

través de los puntos de los datos puede ser usada para calcular μ :

$$pendiente = \frac{\Delta(\ln I)}{\Delta x} = \frac{\ln 10 - \ln 100}{(3,80 - 0,40) \text{ cm}} = -0,678 \text{ cm}^{-1} \quad (3.10)$$

A partir de la ley de Lambert, la pendiente teórica es

$$pendiente = -\mu$$

Igualando las pendientes teórica y experimental encontramos que

$$\mu = 0,678 \text{ cm}^{-1}$$

Si no disponemos de papel semilog, podemos graficar $\ln I$ en el eje vertical y x en el eje horizontal. Nuevamente, la curva será una línea recta con pendiente μ y la intersección vertical $\ln I_0$, y hacemos el análisis anterior en forma similar.

3.3. Escala Log-log

El papel log-log es usado para obtener un gráfico lineal cuando y y x satisfacen una relación de ley de potencias,

$$y = cx^n \quad (3.11)$$

donde c y n son constantes. Por ejemplo, el semi-eje mayor R de la órbita de un planeta está relacionada a su periodo T (tiempo para una revolución alrededor del Sol), a través de,

$$\begin{aligned} R^3 &= KT^2 \\ R &= K^{1/3}T^{2/3} \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde K es una constante y R está relacionada no linealmente a T .

El gráfico lineal es obtenido sacando logaritmos a ambos lados de la ecuación (3.12)

$$\begin{aligned} \log R &= \log(K^{1/3}T^{2/3}) \\ &= \log T^{2/3} + \log K^{1/3} \\ &= 2/3 \log T + \log K^{1/3}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $y = \log R$, $x = \log T$, $m = 2/3$, y $b = \log K^{1/3}$. Entonces una gráfica de $\log R$ versus $\log T$ será una línea recta. El papel de gráficas log-log toma automáticamente los logaritmos de los datos dibujados. Este gráfico es mostrado la figura (3.7).

Las unidades usadas son *años y unidades astronómicas (UA)*, donde 1 UA es el semieje mayor de la órbita de la tierra (los errores mostrados en la gráfica son irreales.) La pendiente del gráfico log-log es

$$pendiente = \frac{\Delta(\log R)}{\Delta(\log T)} = \frac{\log 10^2 - \log 10^0}{\log 10^3 - \log 10^0} = \frac{2}{3} \quad (3.14)$$

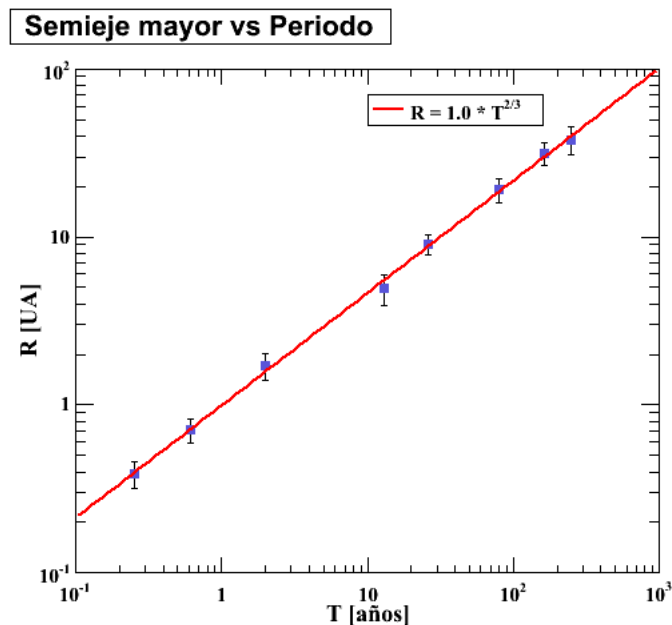


Figura 3.7: Planetas: el eje semimayor versus el periodo. La relación lineal en un papel log-log indica que R y T obedecen una ley de potencias similar a la ecuación (3.11).

Note que la pendiente del gráfico log-log es el exponente de la relación de ley de potencias. Por ejemplo, la relación de ley de potencias $y = cx^n$ dibujada sobre un papel log-log tiene una pendiente igual a n . Entonces, un gráfico log-log es un buen método para determinar el exponente en una relación de ley de potencias.

Otra forma para obtener un gráfico de lineal recta es dibujar y versus x^n o R versus $T^{2/3}$ en un papel de escala lineal (figura (3.8)).

Un problema al graficar R versus $T^{2/3}$ es que los valores de R menores que alrededor de 1 UA no pueden ser dibujados con mucha exactitud.

En unidades de años y unidades astronómicas, $K = 1$, y una inspección de la curva en la figura muestra una pendiente $n \approx 1$.

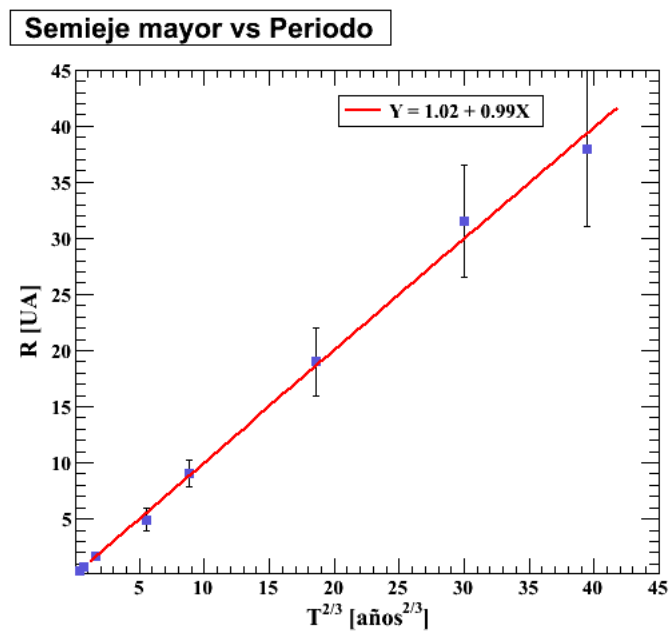


Figura 3.8: Planetas: R versus $T^{2/3}$, muestran una relación lineal. Este gráfico requiere conocer el exponente en la relación de ley de potencias.

Capítulo 4

Ajuste de Curvas

Frecuentemente, n pares de puntos (x_i, y_i) , directamente medibles, están relacionados por alguna fórmula teórica, $y = f(x)$, que involucra algunas constantes desconocidas a ser evaluadas de los datos observados. El problema es encontrar la *mejor* función lineal para este conjunto de datos, que puede estar disperso en grado considerable. Se puede resolver el problema con rapidez al graficar los puntos de datos en papel de gráficas y dibujar una línea recta por ellos a ojo. Por supuesto que esta no es la práctica más común.

Deseamos encontrar la ecuación para la "mejor" curva que ajusta este conjunto de datos. Si los puntos están linealmente relacionados, entonces el proceso es llamado **regresión lineal**. Generalmente los puntos no están linealmente relacionados y el proceso de obtener la ecuación para la mejor curva es llamado **regresión no lineal**. La técnica usada para determinar la curva que mejor se ajusta es conocida como el **método de mínimos cuadrados**, que proporciona una forma más confiable de obtener una mejor relación funcional. El ejemplo más familiar y simple, por supuesto, es cuando y está relacionada a x por la ecuación de una línea recta:

$$y = a + bx ,$$

donde a es una constante que representa la intercepción del eje y , y b es la pendiente.

Asumimos que los puntos de datos siguen la distribución de Gauss y el método de mínimos cuadrados es utilizado para determinar el valor más probable.

4.1. El Método de Mínimos Cuadrados

Como se ha citado anteriormente, si tenemos n puntos (x_i, y_i) , nos gustaría encontrar la ecuación para la mejor recta que pasa a través de estos puntos. Estos puntos están mostrados en la figura (4.1).

Hacemos las siguientes suposiciones:

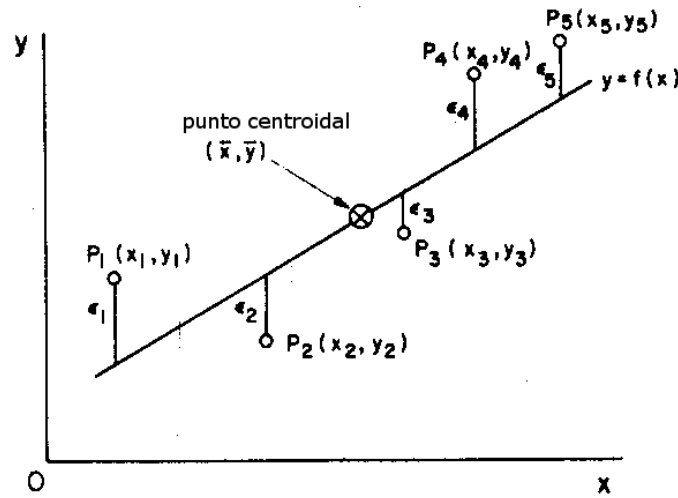


Figura 4.1: Recta que muestra los residuales entre los datos, P_i , y la línea.

1. Los valores medidos (x_i, y_i) están distribuidos de acuerdo a la distribución de Gauss (esto es en general así, si los errores son aleatorios).
2. Los errores están en la dirección vertical del gráfico y son iguales, es decir: $\delta y_1 = \delta y_2 = \dots = \delta y_n$ (entonces la desviación estándar σ_y es constante).
3. Al dibujar una línea $y = f(x)$ a través de los datos, las discrepancias entre los puntos y la línea trazada, pueden ser trazados como $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, etc. Estas cantidades son llamadas *residuales*. La "mejor" línea es la que hace que la suma de los cuadrados de los residuales sea un valor mínimo.

Aproximamos el juego de n medidas (x_i, y_i) a través de una relación lineal

$$y = a + bx, \quad (4.1)$$

Es obvio que nuestro resultado final nos permitirá calcular los valores a y b .

Para cada punto x_i, y_i , sobre la línea, es también obvio que

$$y_i - (a + bx_i) = 0$$

Sin embargo, para un punto que no esté sobre la línea, esto no será verdadero y la diferencia entre y_i y $a + bx_i$ sobre la línea, evaluada en x_i , será igual al residual ϵ_i .

Por tanto, para un punto experimental

$$y_i - (a + bx_i) = \epsilon_i \quad (4.2)$$

La suma de los cuadrados de los residuales es $\sum \epsilon_i^2$, y

$$\sum \epsilon_i^2 = \sum [y_i - (a + bx_i)]^2 \quad (4.3)$$

Debemos hacer de ésta cantidad un mínimo para determinar las variables a y b . Por lo tanto, hacemos

$$\frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial a} = 0$$

y

$$\frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial b} = 0$$

Diferenciando la ecuación (4.3) primero con respecto a a y luego a b , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial a} &= -2 \sum [y_i - (a + bx_i)] \\ \frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial b} &= -2 \sum x_i [y_i - (a + bx_i)] \end{aligned}$$

Esto es,

$$\sum [y_i - (a + bx_i)] = 0 \quad (4.4)$$

y

$$\sum \{x_i [y_i - (a + bx_i)]\} = 0 \quad (4.5)$$

Debido a que todos los x_i e y_i son conocidos, las ecuaciones (4.4) y (4.5) representan dos ecuaciones con dos incógnitas a y b , por lo cuál debemos resolverlas.

Consideremos inicialmente la ecuación (4.4)

$$\sum [y_i - (a + bx_i)] = \sum y_i - \sum a - b \sum x_i = 0$$

Dividiendo entre n y recordando que, como a es una constante, $\sum a = na$, obtenemos,

$$\frac{\sum y_i}{n} - a - \frac{b \sum x_i}{n} = 0 \quad (4.6)$$

Pero

$$\frac{\sum y_i}{n} = \bar{y} \quad y \quad \frac{b \sum x_i}{n} = b\bar{x}$$

o

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad (4.7)$$

Entonces, la ecuación (4.7) nos dice que se requiere que la línea pase a través del *punto centroidal* de los datos, que es el punto \bar{x}, \bar{y} en el gráfico:

La ecuación (4.5) ahora da

$$\sum x_i y_i - a \sum x_i - b \sum x_i^2 = 0 \quad (4.8)$$

Ahora simplemente debemos resolver las ecuaciones (4.6) y (4.8) para obtener

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.9)$$

y

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.10)$$

Los valores que calculamos para a y b de acuerdo a las ecuaciones (4.9) y (4.10) al ser introducidas en $y = a + bx$ dan la línea donde la suma de los residuales $\sum \epsilon_i^2$ es un mínimo. La ecuación resultante es llamada la *regresión de y sobre x*, debido a que se asumió que los errores están en y , no en x .

Ahora nos preguntamos lo siguiente "¿cuáles son las incertidumbres en a y b ?" Cada y_i tiene una incertidumbre (asumida para todos los valores y_i como la misma), y, por tanto, a y b tendrán también incertidumbres. Estas incertidumbres son las desviaciones estándar de las medias s_{ma} y s_{mb} . Para calcular s_{ma} y s_{mb} , necesitamos la desviación estándar s_y .

También nos preguntamos: "¿cuál es la incertidumbre estadística en las mediciones y_1, y_2, \dots, y_n ?" En este caso, la desviación estándar s_y es

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum (y_i - a - bx_i)^2} \quad (4.11)$$

La desviación estándar de la media s_{my} es

$$s_{my} = \frac{s_y}{n^{1/2}} \quad (4.12)$$

Para cada y_i el resultado a ser reportado es

$$y_i \pm s_{my} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.13)$$

La razón por el factor de $n-2$ en el denominador de la ecuación (4.11) es que el cálculo de a y b reduce el número de puntos de datos independientes (x_i, y_i) de n a $n-2$; el denominador en la ecuación para la desviación estándar es el número de puntos de datos independientes.

Nota:

Es importante verificar si los errores experimentales δy_i , registrados durante la toma de datos, son consistentes con el error estadístico calculado s_{my} . Si $s_{my} \gg \delta y_i$, indicaría la existencia de errores (estimados), que no son tomados en cuenta. Por el contrario, si $\delta y_i \gg s_{my}$, sugiere una estimación del error sobrevaluada, esto es, los valores de δy_i debían haber sido más pequeños.

Consideremos ahora los errores en a y b , s_{ma} y s_{mb} . Las ecuaciones (4.9) y (4.10) dan a y b como funciones de los valores medidos (x_i, y_i), donde el error estadístico para cada y_i es dado por la ecuación (4.12). Como a y b son funciones conocidas de y_i con los errores de y_i conocidos, los errores en a y b pueden ser determinados por propagación de errores. La fórmula básica para la propagación de errores, ecuación (2.12), puede ser escrita como

$$\delta q = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial q}{\partial b_j} \right)^2 (\delta b_j)^2} \quad (4.14)$$

donde los valores medidos son $b_j \pm \delta y_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, y δq es el error de la cantidad calculada $q(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Reemplazando δq y δb_j con las desviaciones estándar de la media s_{mq} y s_{mb_j} , y elevando además al cuadrado, tenemos

$$s_{mq}^2 = \sum \left(\frac{\partial q}{\partial b_j} \right)^2 s_{mb_j}^2 \quad (4.15)$$

A partir de esta expresión, podemos determinar el error de la media en a , definida (en estos apuntes) como $s_{ma} \equiv \delta_a$,

$$s_{ma}^2 = \sum \left(\frac{\partial a}{\partial y_j} \right)^2 s_{my}^2 \equiv \delta_a^2 \quad (4.16)$$

donde la derivada parcial $\partial a / \partial y_i$ se calcula usando la ecuación (4.6) y s_{my} está dada por la ecuación (4.12),

$$\frac{\partial a}{\partial y_j} = \frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i) \sum x_j}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.17)$$

Entonces, luego de usar algo de algebra, la ecuación (4.16) nos da

$$\delta_a = \sqrt{\frac{s_{my}^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (4.18)$$

El resultado que debe reportarse es

$$a \pm \delta_a \quad (4.19)$$

El calculo del error en la pendiente, obtenido a partir de s_b^2 es similar al de s_a^2 , dando

$$\delta_b = \sqrt{\frac{n s_{my}^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (4.20)$$

reportándose como

$$b \pm \delta_b \quad (4.21)$$

Ejemplo de análisis.

Un alumno realiza una experimento para medir la constante de un resorte. El cuelga diferentes masas de un resorte y mide la longitud de elongación, L , de éste. Así determina que esta longitud es función de la fuerza aplicada.

La teoría dice que $k\Delta L = F$ donde k es la constante del resorte, $\Delta L = L - L_0$ (L_0 es la longitud del resorte sin aplicar fuerza alguna) y $F = mg$. Por resultados obtiene:

Calcule la constante de la resorte y el largo del resorte sin fuerza aplicada. Se puede suponer que el error en la masa es despreciable y $g = 9,80 \text{ ms}^{-2}$. Entonces,

$$k\Delta L = k(L - L_0) = mg$$

m (g)	L (cm)
200	5.1
300	5.5
400	5.9
500	6.8
600	7.4
700	7.5
800	8.6
900	9.4

Cuadro 4.1:

y, por tanto

$$L = L_0 + \frac{g}{k}m \quad (4.22)$$

donde L_0 representa la longitud del resorte sin aplicar fuerza alguna. Entonces un gráfico de L versus m debería tener la forma de una línea recta con pendiente g/k .

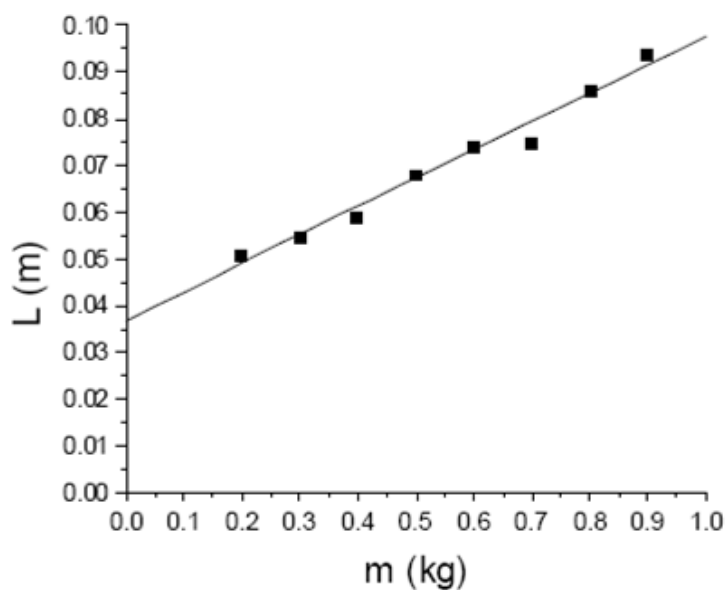


Figura 4.2: Gráfico de la elongación del resorte, (L), versus la masa colgada, (m).

Este es mostrado en la figura (4.2).

Tratamiento de los datos

Reescribiendo la ecuación (4.22) de la forma:

$$y = a + b \cdot x$$

con

$$x = m, \quad y = L$$

y

$$a = L_0, \quad b = \frac{g}{k}$$

podemos ajustar los datos de la tabla 1 y obtener una expresión de la forma:

$$L = 0,0369 + 0,0607 \cdot m$$

con errores iguales a,

$$\delta b = 0,0037, \quad \delta a = 0,0022$$

La gráfica de los datos ajustados es mostrada en la figura (4.2). Por tanto,

$$k = \frac{g}{b} = \frac{9,80}{0,0607} = 161,4$$

Recordando además que,

$$\left(\frac{\delta k}{k}\right)^2 = \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2$$

obtenemos,

$$\delta k = \frac{k \delta b}{b} = \frac{161,4 \times 0,0037}{0,0607} = 9,8$$

Resultados

El valor de la constante k del resorte es igual a,

$$k = (161,4 \pm 9,8) \text{ N/m},$$

y la longitud, L_0 , del resorte sin fuerza aplicada es,

$$L_0 = (0,037 \pm 0,002) \text{ m}.$$

4.1.1. Apéndice: Ajuste de datos usando EXCEL

Supongamos otro ejemplo de un resorte sometido a tracción, que se ha cargado con diferentes masas ($\mathbf{F=mg}$, variable dependiente o y) y se han anotado los alargamientos (\mathbf{L} , variable independiente o x).

elongación (mm)	masa (g)
60	200
120	400
160	500
210	700
260	900
290	1000

Aplicando el método de mínimos cuadrados ajustamos a la recta:

$$y = a + bx$$

con:

$$a = 3,50; \quad \delta a = 0,01$$

$$b = -18,42; \quad \delta b = 0,82$$

y, coeficiente de correlación


$$r = 0,9995$$

A continuación vamos a indicar un procedimiento basado en la utilización de la hoja de cálculo *EXCEL*, que facilita y agiliza todos los cálculos anteriores.

Una vez abierta la hoja de cálculo introducimos en la primera columna los valores de la variable independiente *elongación* y en la segunda columna los de la variable dependiente *fuerza* (los valores de x en la primera y los valores de y en la segunda columna), a continuación seleccionamos todas las celdas, el aspecto de nuestra hoja es el que se presenta en la figura (4.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Datos para la gráfica del estudio estático del muelle								
2									
3	Alargamiento	Cargas							
4		sucesivas							
5	$\Delta l = l - l_0$	f							
6	60	200							
7	120	400							
8	150	500							
9	210	700							
10	260	900							
11	290	1000							
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									

Figura 4.3:

A continuación, hacemos clic sobre el asistente para gráficos  lo que nos muestra un cuadro de diálogo similar al de la figura (4.4)

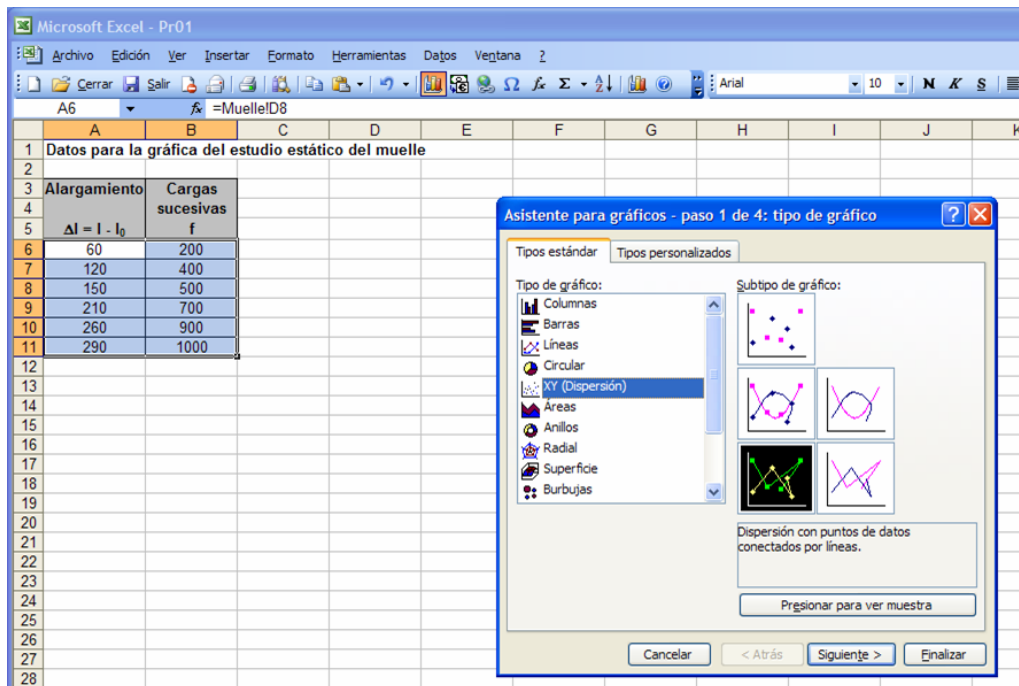


Figura 4.4:

En la opción del tipo de gráfico elegimos **XY (Dispersión)** y en **Subtipo de gráficos** elegimos la opción, que en este ejemplo esta seleccionada en negro. Una vez seleccionadas nuestras opciones pulsamos **Siguiente >**, que nos conducirá a la pantalla presentada en la figura (4.5)

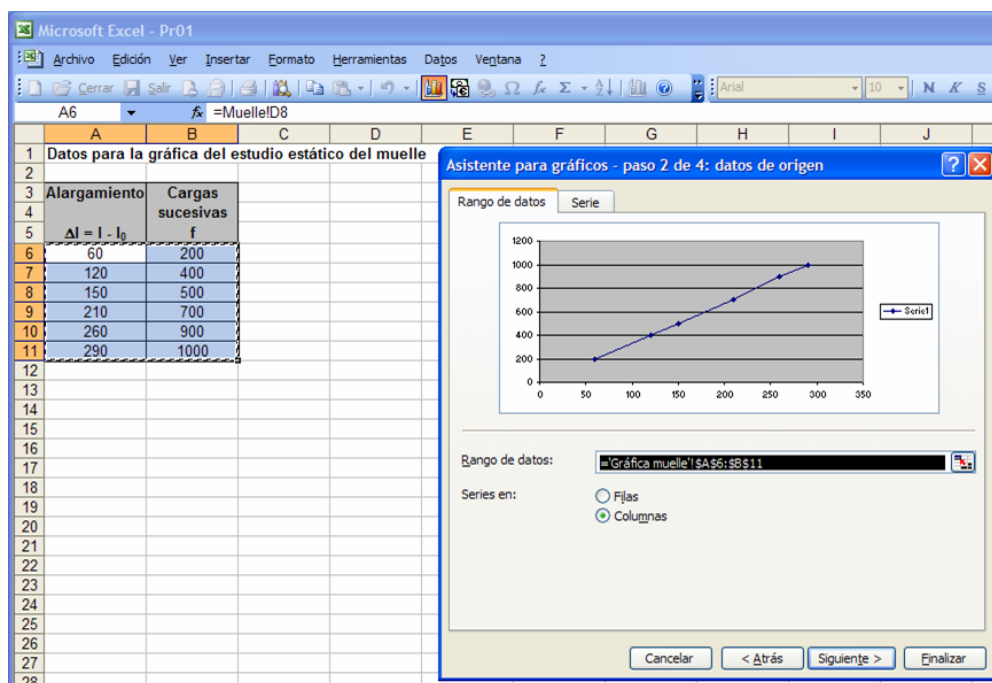


Figura 4.5:

Volvemos a usar **Siguiente >**, que nos mostrará la pantalla presentada en la figura (4.6)

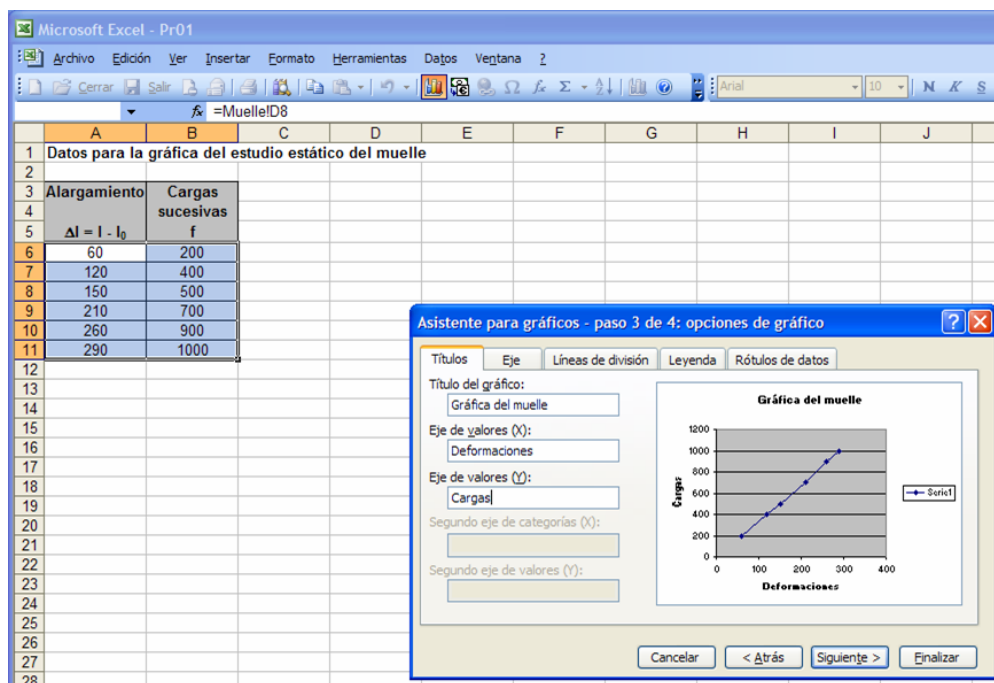


Figura 4.6:

. Si queremos (o también podemos dejarlo en blanco) pasamos a rellenar **Título del gráfico**, **Eje de valores (X)** **Eje de valores (Y)** y pulsamos **Siguiendo >** con lo cual nos aparece el cuadro de la figura (4.7)

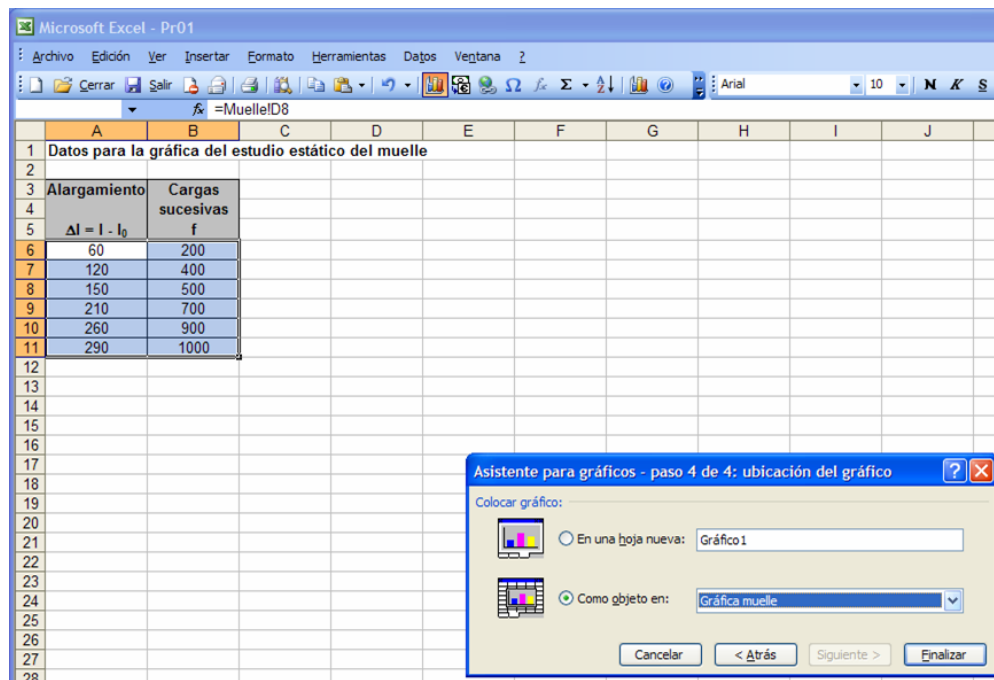


Figura 4.7:

podemos marcar o bien **En una hoja nueva** (ponemos el título) o **Como objeto en**, si elegimos esta opción el gráfico se inserta en la hoja que estamos trabajando. Eligiendo **En una hoja nueva** nos aparece el gráfico, en una nueva hoja, de la forma de la figura (4.8)

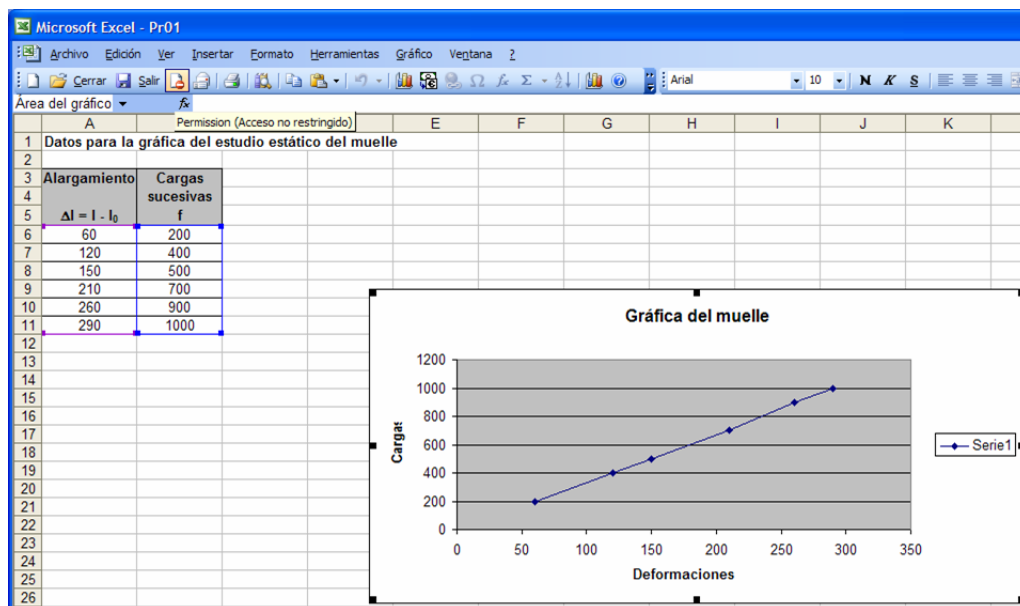


Figura 4.8:

Este gráfico nos muestra los puntos dispuestos en el plano XY.

Ahora vamos a buscar la recta de ajuste. Para ello, llevamos el cursor hasta cualquiera de los puntos del gráfico, pulsamos el *boton derecho del mouse*, lo que nos presenta un cuadro de diálogo en el cual debemos seleccionar **Agregar línea de tendencia**

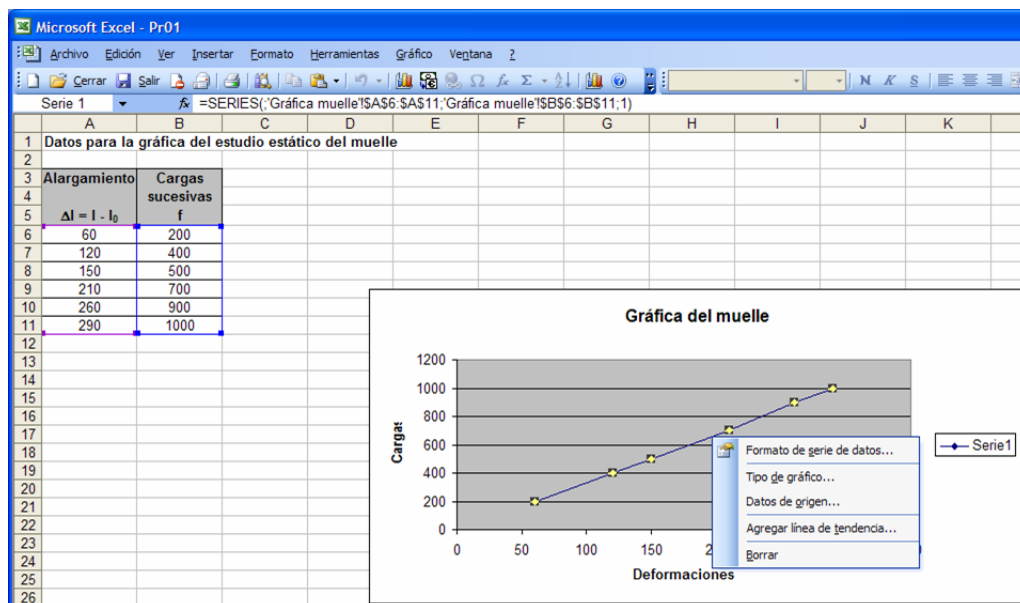


Figura 4.9:
Apareciendo el cuadro de diálogo de la figura (4.10)

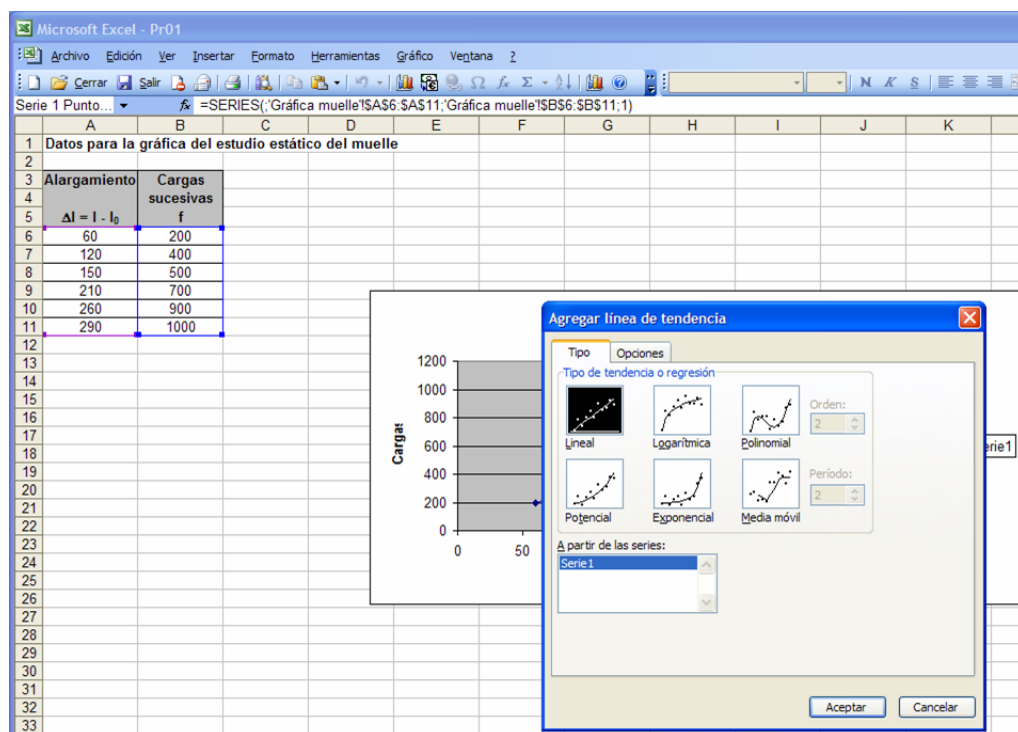


Figura 4.10:
Elegimos **Lineal** (aparece por defecto) y luego pulsamos en **Opciones**, obteniendo

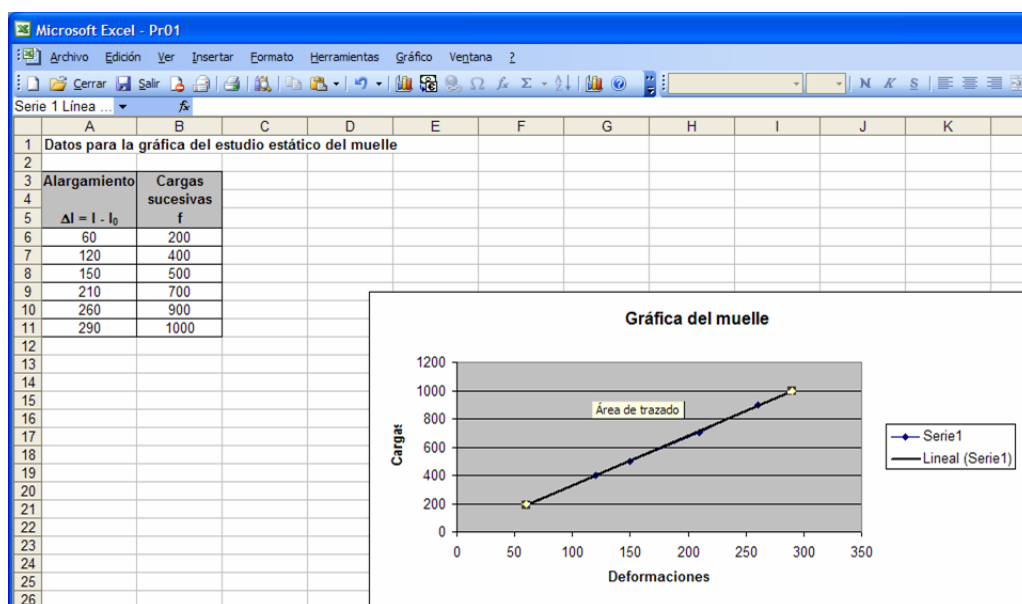


Figura 4.11:

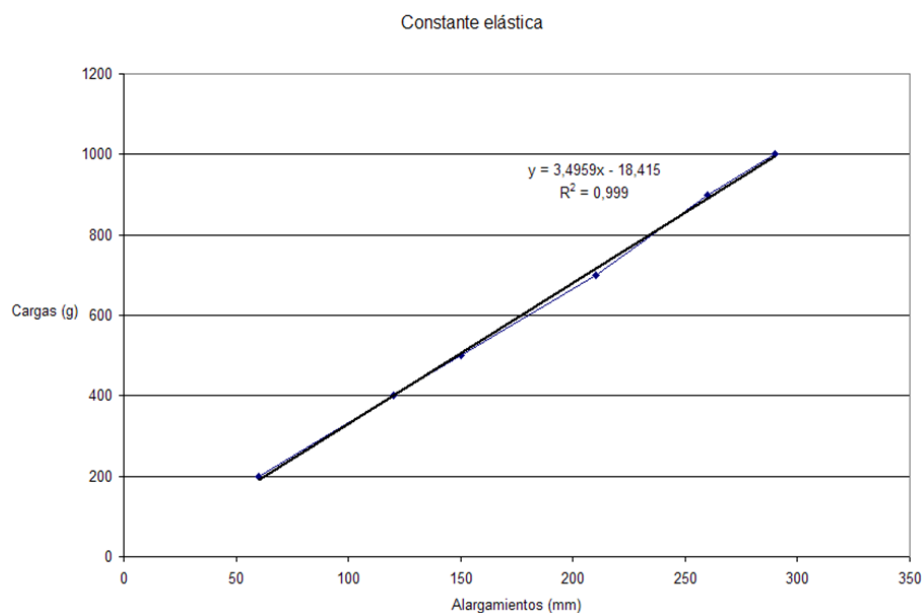
Marcamos **Presentar ecuación** en el gráfico y **Presentar el valor de R cuadrado** en el gráfico, después de hacer clic sobre **Aceptar** nos aparece la recta de ajuste, su ecuación correspondiente y el coeficiente de correlación al cuadrado.

Podemos también, aun sin dibujar la recta de ajuste, calcular el valor de la pendiente, la ordenada en el origen y el coeficiente de correlación, para ello, nos situamos en una celda en blanco y escribimos (para este ejemplo):

=PENDIENTE(B6:B11;A6:A11), nos proporciona el valor de la pendiente. Elegimos otra celda en blanco y escribimos:

=INTERSECCION.EJE(B6:B11;A6:A11), que nos proporciona el valor de la ordenada. Luego,

=COEF.DE.CORREL(B6:B11;A6:A11), que nos da el valor del coeficiente de correlación. El aspecto de nuestra hoja sera:



$$\text{Pendiente} = 3.49586417 \pm 0.00102217$$

$$\text{Ordenada en el origen} = -18.4153243 \pm 0.08164966$$

$$\text{Coeficiente de correlación} = 0.9994979$$

Capítulo 5

Experimentos

5.1. Experimento: Instrumentos de Precisión.

5.1.1. Objetivos

Familiarizar al estudiante con los instrumentos de precisión (Vernier, tornillo micrométrico, balanza, cronómetro.)

Aplicar la teoría de errores y la propagación de estos.

Determinar volúmenes y densidades de cuerpos de geometría regulares.

5.1.2. Teoría

Regla Común

Es uno de los instrumentos más utilizados para determinar mediciones de objetos de dimensiones normalmente grandes, en esta clase de instrumento se puede medir hasta milímetros, existiendo reglas cuya precisión es de medio milímetro.

Calibrador Vernier

El calibrador vernier fue elaborado para satisfacer la necesidad de un instrumento de lectura directa que pudiera brindar una medida fácilmente, en una sola operación. La figura (5.1) indica la nomenclatura para las partes de un vernier característico.

El vernier es una escala auxiliar que se desliza a lo largo de una escala principal para permitir, en ésta, lecturas fraccionales exactas de la mínima división.

Para lograr esto, una escala vernier está graduada en un número de divisiones iguales en la misma longitud que $n - 1$ divisiones de la escala principal; una fracción de $1/n$ de la mínima división de la escala principal puede leerse (figura (5.2)).

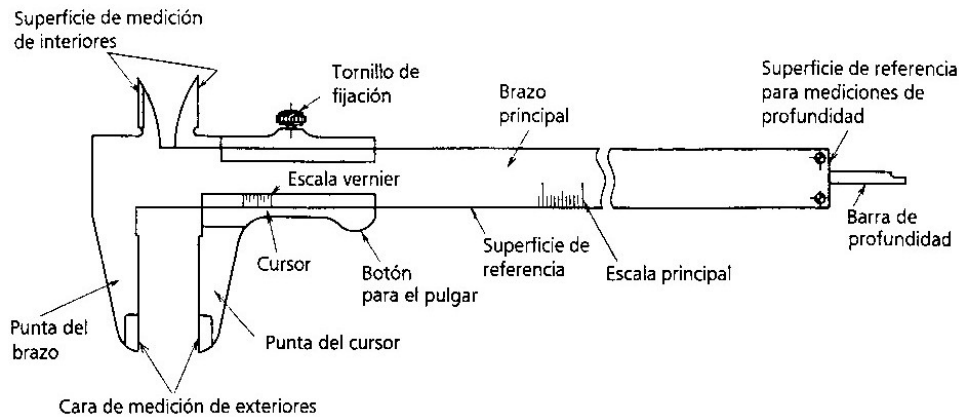


Figura 5.1: El calibrador Vernier.

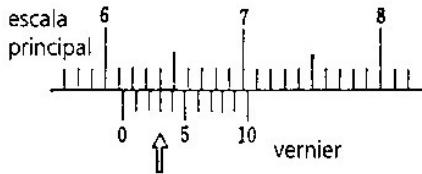


Figura 5.2: Escalas del vernier.

Algunos calibradores vernier, en milímetros tienen 20 divisiones que ocupan 19 divisiones de la escala principal graduada 1 *mm*, o 50 divisiones que ocupan 49 divisiones sobre la escala principal graduada cada 1 *mm*, por lo que dan legibilidades de 0,05 *mm* y 0,02 *mm*, respectivamente. La tabla (5.1), muestra diferentes tipos de graduaciones sobre las escalas principales y vernier.

En la figura figura (5.3) se nota que la escala del vernier es ligeramente menor que una división en la escala estacionaria principal. Si el cero del vernier está en cualquier división de la escala principal, entonces n divisiones del vernier corresponden a $n - 1$ divisiones de la escala principal. Por lo tanto, cada división de la escala del vernier es

$$\frac{n - 1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

de una división de la escala principal. Consecuentemente, la división del vernier es $1/n$ más

Mínima división escala principal	Graduaciones escala vernier	Lecturas del vernier
1 <i>mm</i>	20 divisiones en 19 <i>mm</i>	0.05 <i>mm</i>
	50 divisiones en 49 <i>mm</i>	0.02 <i>mm</i>

Cuadro 5.1:

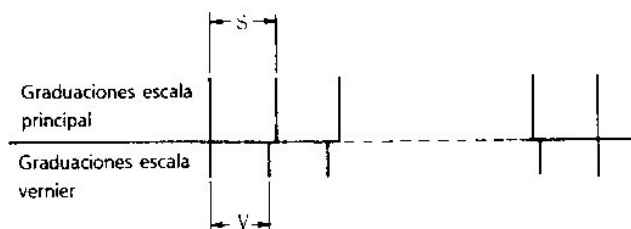


Figura 5.3: Escalas del vernier.

corta que una división de la escala principal. Esta cantidad, $(1/n)$, de una división de la escala principal es llamada "menor contejo" del vernier. Es necesario determinar siempre el "menor contejo" de un vernier antes de realizar las mediciones.

En la figura (5.4), se muestra un ejemplo de una lectura realizada con un vernier. La parte

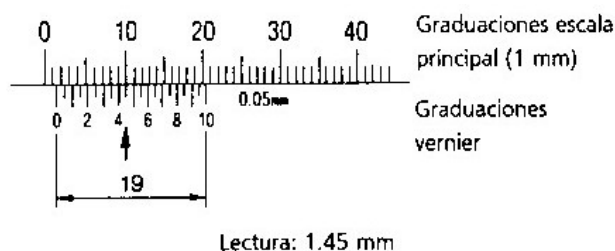


Figura 5.4: Ejemplo de lectura.

inferior (que se desliza) tiene una ventana con las divisiones del vernier. Veinte divisiones del vernier corresponden, en total, a las 19 divisiones de la escala principal.

En la escala principal, las menores divisiones de la escala principal están en 1 mm . Debido a que 1 mm se divide en 20 partes, la menor división del vernier es igual a $1/20 = 0.05\text{ mm}$. En la figura (5.4) la novena graduación (próxima a la graduación numerada 4) después del índice cero sobre la escala vernier, está alineada con una graduación sobre la escala principal. Así, la distancia entre las graduaciones de 1 mm sobre la escala principal y el índice cero del vernier es:

$$0,05\text{ mm} \times 9 = 0,45\text{ mm}$$

Entonces, la lectura total es,

$$1\text{ mm} + 0,45\text{ mm} = 1,45\text{ mm}$$

El límite del error instrumental (LEI) es $= \pm 0.02\text{ mm}$ (el menor contejo)

El tornillo micrométrico

Para medir grosores no demasiado grandes se utiliza en general un tornillo micrométrico. Se compone de un estribo macizo que sostiene un tope de medición fijo y otro móvil, a

la izquierda y a la derecha respectivamente (figura (5.5)). Los topes de medición se abren

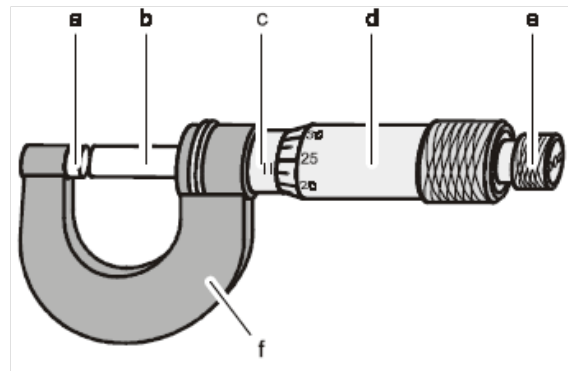


Figura 5.5: El tornillo micrométrico: *a* : tope fijo de medición, *b*: tope móvil de medición, *c*: cilindro con escala, *d*: tambor con su escala, *e*: tornillo con acoplamiento deslizante, *f*: estribo

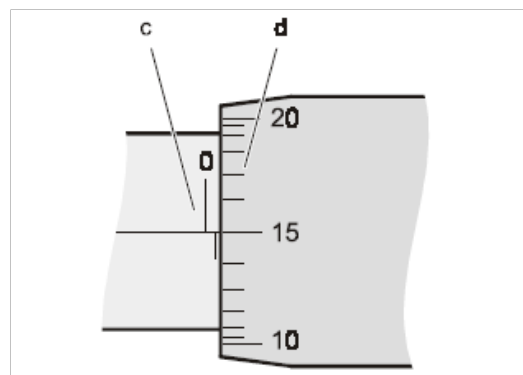


Figura 5.6: Representación de una distancia *d* sobre la escala del cilindro (*c*) y la del tambor (*d*): $d = 0,5 \text{ mm} + 0,150 \text{ mm} = 0,650 \text{ mm}$

y cierran haciendo girar un tambor en torno a un cilindro firmemente unido al estribo. La escala sobre el cilindro corresponde a la distancia de los topes en intervalos de medio milímetro. La marca de cero en la escala coincide con el cierre completo de los topes de medición. Por cada vuelta entera del tambor, el tope derecho se mueve medio milímetro. Para aumentar la precisión de la medición, se encuentra otra escala grabada sobre el tambor cuyas 50 marcas corresponden a una variación de la distancia de $10 \mu\text{m}$ entre los topes de medición. La precisión de lectura es, entonces, de aproximadamente $2 \mu\text{m}$ (figura (5.6)). El objeto a medir se sujeta entre los topes de medición. Para evitar aquí deformaciones se gira un tornillo unido al tambor mediante un acoplamiento deslizante.

En el ejemplo de la anterior figura, tomemos primero la lectura del cilindro (observe que cada graduación, sobre el cilindro corresponde a $0,5 \text{ mm}$), y luego la del tambor. Debemos

sumar los dos para obtener la lectura total. Entonces podemos ver que:

- 1) El tambor se ha detenido en un punto más allá de la línea correspondiente a 0 *mm*.
- 2) Una línea adicional es visible entre la línea correspondiente a 0 *mm* y el borde del tambor.
- 3) La línea 15 sobre el tambor corresponde con la línea central del cilindro, así:

a) Lectura sobre el cilindro	0.0
b) Lectura entre el 4 y el borde del tambor	0.5
c) Línea del tambor coincidiendo con la del cilindro	0.15
Lectura total	<u>0,650 mm</u>

Siempre debe verificarse la corrección cero del instrumento. Este debe ser adicionado o sustraído de cualquier lectura.

Balanzas

Las balanzas son usadas para medir la masa o el peso de un objeto. El proceso consiste en una comparación del peso de un objeto cualquiera con el de un peso conocido. Debido a que la aceleración de la gravedad es la misma a ambos lados de la balanza, lo que en realidad se comparan son las masas en vez de los pesos (aunque debe entenderse que su operación está basada en la fuerza de atracción gravitacional que actúa sobre el objeto desconocido y la masa conocida.) Por tanto, las medidas de la balanza son independientes de la localidad donde se usa la balanza.

Las balanzas vienen en diferentes formas y configuraciones con diferentes rangos y sensibilidades. La balanza más común en el presente laboratorio es la balanza de un platillo, usada para el pesaje rápido de masas relativamente grandes. La carga máxima de la balanza



Figura 5.7: Balanza de un platillo.

mostrada en la figura (5.7) es de 1110 gramos sin el peso adicionado que se cuelga al extremo de la viga, y 2110 con el peso adicionado. La sensibilidad de la balanza depende de la carga; 0.1 *g* para cargas muy ligeras, hasta 0.0 *g* para una carga de 2000 *g*. La ventaja principal de este tipo de balanza, sobre las comunes, es que no requiere ningún peso suelto hasta los 1110

g. Las medidas pueden ser realizadas muy rápidamente. El límite del error instrumental de ésta balanza es, generalmente, $\pm 0.1 \text{ g}$.

Cronómetros

Actualmente existen cronómetros de hasta milésimas de segundo, sin embargo, los cronómetros comerciales solo alcanzan la centésima de segundo (0.01 s). Sin embargo, el error que comete el observador al pulsar el cronómetro es de $\approx 0.20 \text{ s}$.

5.1.3. Experimento

Equipos y Materiales

- 3 o 4 cuerpos geométricos
- Calibrador Vernier
- Tornillo Micrométrico
- Balanza

Procedimiento

1. Verificar si los instrumentos de medición están calibrados
2. Identificar las mediciones necesarias que deberá tomar con cada cuerpo geométrico
3. Para cada cuerpo mida 10 veces cada una de las dimensiones necesarias del cuerpo con el instrumento adecuado.

Cálculos

1. Para cada cuerpo, calcúlese el valor más probable y el error de cada una de las dimensiones (longitud y/o masa) y exprésela como:

$$L = \bar{L} \pm \delta L$$
$$m = \bar{m} \pm \delta m .$$

Este cálculo debe efectuarse, por separado, para cada uno de los instrumentos empleados

2. Con los valores obtenidos, calcúlese el volumen de cada cuerpo y exprese como

$$V = \bar{V} \pm \delta V$$

3. Con los valores obtenidos en los puntos (1) y (2), exprese la densidad del material como

$$\rho = \bar{\rho} \pm \delta\rho$$

4. Realice una tabla en la que se identifique el cuerpo geométrico, instrumento, dimensiones de cada cuerpo como en el punto (1)
5. Efectúese una discusión de los resultados obtenidos con cada instrumento.

Cuestionario

1. ¿En el laboratorio es más importante la precisión o la exactitud?
2. ¿Un conjunto de medidas bastante precisas indica necesariamente que estas sean exactas? ¿Por qué?
3. ¿Un conjunto de medidas bastante exactas, indica que éstas sean precisas, por qué?

5.2. Experimento: Periodo de oscilación de un péndulo

5.2.1. Objetivo

Calcular los errores por el método estadístico.

Estudiar el movimiento oscilatorio y utilizar un péndulo para determinar el valor de la gravedad.

5.2.2. Equipo

Hilo resistente, una bola de vidrio grande y un cronómetro. En la figura (5.8) se muestra el péndulo. El hilo puede pegarse a la bola de vidrio con soldadura plástica.



Figura 5.8: Péndulo para medir la gravedad.

5.2.3. Precisión

Hay que medir el periodo de oscilación del péndulo con el cronómetro. Se repetirá varias veces la medida para tomar el valor promedio y su error estadístico. Es necesario medir también la longitud del péndulo. Su error será el error de precisión de la regla.

5.2.4. Péndulo simple

Comenzamos estudiando el movimiento oscilatorio. Para ello consideremos un punto que gira con velocidad angular constante ω sobre un círculo de radio R , como se ilustra en la figura (5.9).

Sea A la proyección del punto P sobre el eje x . El movimiento de A sobre el eje x es un movimiento oscilatorio conocido como *movimiento armónico simple*. Si en un tiempo Δt el punto P ha recorrido la distancia s sobre el círculo, su proyección sobre el eje x ha avanzado la distancia Δx .

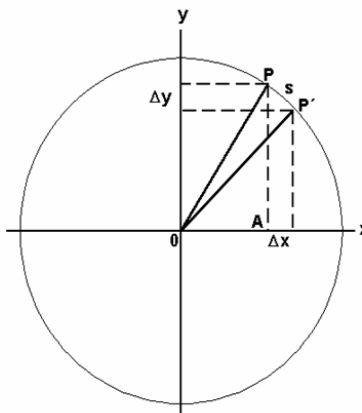


Figura 5.9: El punto P gira con velocidad angular constante. Su proyección sobre el eje x genera un movimiento oscilatorio armónico simple.

La velocidad con que se mueve el punto P es:

$$\frac{s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

donde T es el periodo de giro.

Si s es pequeño, por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{s} &\cong \frac{y}{R} \\ \Delta x &\cong s \frac{y}{R} \end{aligned}$$

La velocidad con que se mueve el punto A es:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{s}{\Delta t} \frac{y}{R} \\ v_x &= \omega y \end{aligned}$$

Análogamente tenemos que:

$$\Delta y \cong s \frac{x}{R}$$

Ahora bien, una variación de la velocidad del punto A en un intervalo de tiempo pequeño Δt , es:

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \omega \Delta y \\ \Delta v_x &= \omega s \frac{x}{R} \end{aligned}$$

Entonces, su aceleración será:

$$a = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \omega \frac{s}{\Delta t} \frac{x}{R}$$

$$a = \omega^2 x$$

Aplicando la segunda ley de Newton, la fuerza que produce una aceleración de este tipo sobre un cuerpo de masa m será:

$$F = m\omega^2 x ,$$

es decir una fuerza directamente proporcional al desplazamiento x . Recordemos que, por ejemplo, la fuerza de restitución elástica tiene esta propiedad. Es directamente proporcional a la deformación del resorte, k es la constante elástica del mismo.

$$F = kx$$

Así concluimos que un sistema de una masa con un resorte producirá un movimiento oscilatorio armónico simple.

Comparando estas dos últimas expresiones tenemos que:

$$\begin{aligned} m\omega^2 &= k \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} , \end{aligned}$$

donde T es el periodo de oscilación.

Ahora consideraremos el movimiento oscilatorio de un péndulo. En la figura (5.10) mostramos las fuerzas que actúan sobre un péndulo simple. Una masa m que cuelga sujeta a un punto fijo O . Sobre la masa m actúa por una parte su peso G y por otra la tensión T de la cuerda que la sostiene. Descomponiendo el peso en una componente en la dirección de la

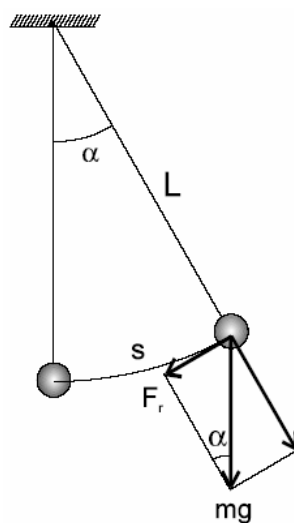


Figura 5.10: El péndulo simple.

tensión y otra componente transversal que hemos designado por F , vemos que esta última es la responsable del movimiento oscilatorio del péndulo. La otra componente se equilibra con la tensión, x es el desplazamiento lateral del péndulo respecto a la vertical.

Nuevamente, si x es pequeño ($x \ll L$), por semejanza de triángulos vemos que:

$$\frac{F}{x} \cong \frac{G}{L}$$

$$F \cong \frac{G}{L}x$$

Que es una fuerza directamente proporcional al desplazamiento x . En consecuencia, el movimiento del péndulo será un movimiento armónico simple.

Comparando con la expresión general que obtuvimos en función de la velocidad angular.

$$\frac{G}{m} = \omega^2 L$$

Para cualquier péndulo, la relación entre el peso y la masa es la misma e igual a la aceleración de la gravedad g . Esta ley de proporcionalidad del peso a la masa nos dice que **la masa pesada y la masa inercial son iguales** de donde se ve que podemos determinar g por medio de la longitud del péndulo y el número de oscilaciones.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

5.2.5. Experimento

1. Con un cronómetro se mide varias veces N un cierto número n de oscilaciones (pequeñas oscilaciones $\theta < 10^\circ$.)
2. Se calcula el valor medio \bar{t} y la desviación estándar σ de la muestra: (t_1, t_2, \dots, t_N)
3. Se determina como valor medido del periodo a través de:

$$T = \frac{\bar{t} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}}{n}$$

4. Se realiza un histograma de la densidad de frecuencias y se compara con la **distribución normal** para los parámetros \bar{t} y σ .

5. Calcular la aceleración de la gravedad, g , partir de la relación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

por lo que,

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}L$$

6. Aplicando la propagación de errores, a esta expresión, tenemos que el error con que determinaremos g está dado por:

$$\delta g = g \left(\frac{\delta L}{L} + 2\frac{\delta T}{T} \right)^{1/2}$$

5.3. Experimento: Calibración de un dinamómetro.

5.3.1. Objetivo

Determinar la constante de recuperación, k , de un resorte a través del ajuste lineal por mínimos cuadrados.

5.3.2. Calibración de un dinamómetro con resorte

Un dinamómetro es un instrumento de medida de fuerzas en base a la propiedad elástica de resortes o ligas.

Hay muchas maneras de construir un dinamómetro casero. El principio es un resorte y una escala para medir la longitud del mismo. La deformación del resorte, es decir cuanto se estira a partir de su longitud natural, es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre él.

$$F = k\Delta l$$

Δl es la deformación del resorte.

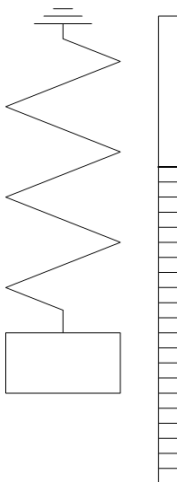


Figura 5.11: Esquema de un dinamómetro.

5.3.3. Procedimiento

Podemos construirnos un dinamómetro utilizando un resorte suave. Una vez construido un dinamómetro debemos calibrarlo; para ello utilizaremos el agua como patrón de masa. Sabemos que un centímetro cúbico (1c.c.) de agua define una masa de un gramo. Una jeringa, que ya viene calibrada en centímetros cúbicos, nos permite medir los volúmenes de agua requeridos.

1. Colgamos de nuestro dinamómetro un vaso desechable lo más liviano posible. Marcamos en la escala del mismo, la longitud inicial del resorte.
2. Ahora, vertemos agua en el vaso con la jeringa hasta que el resorte se estire hasta la marca más próxima de nuestra escala. Observamos el volumen de agua vertido, en consecuencia su masa.
3. Echamos nuevamente agua hasta la siguiente marca y así sucesivamente, anotando, en todos los casos la masa de agua que pende del dinamómetro.
4. En cada posición el peso que cuelga está equilibrado por la fuerza de restitución del resorte de modo que: Entonces:

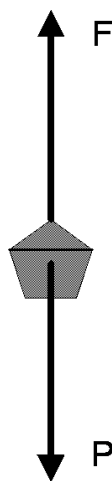


Figura 5.12: Equilibrio de fuerzas. F es la fuerza de restitución del resorte que es igual a la fuerza aplicada, en este caso al peso del agua P .

$$\begin{aligned}
 P &= k\Delta x \\
 mg &= k\Delta x \\
 m &= \frac{k}{g}\Delta x \\
 m &= \lambda\Delta x
 \end{aligned}$$

5. Tenemos una relación lineal entre la masa y la deformación (estiramiento) del resorte. La constante λ nos da el número de gramos por unidad de longitud (u.l.) de nuestra escala. Multiplicando λ por la gravedad tendremos k que es la fuerza por unidad de longitud.

5.4. Experimento: Calibración de un dinamómetro de elástico

5.4.1. Objetivo

Graficar la relación funcional entre la masa que se cuelga de un elástico y su estiramiento.

Utilizando esta curva de calibración podemos determinar la densidad de un cuerpo utilizando la ley de Arquímedes

5.4.2. Teoría

Los elásticos poseen ciertas propiedades que, en cierta forma, son diferentes de la mayoría de los metales bajo presión. Generalmente, los metales están sujetos a dos tipos de deformación: elástica y plástica. En una deformación elástica, cualquier cambio en la tensión causa una deformación instantánea que obedece la ley de Hooke. La elongación del cuerpo bajo tensión, hasta alcanzar el límite elástico, es proporcional a la fuerza de estiramiento. Si la fuerza (carga) es removida, el cuerpo retornará a su longitud original. Por tanto, una deformación es un proceso reversible. En una deformación plástica el cuerpo es estirado más allá del límite elástico y no retornará a su longitud original. El cuerpo retiene una deformación permanente y el proceso es irreversible.

Entonces, las curvas de carga-elongación son inicialmente lineales hasta cierto límite, luego cambian. La elasticidad de un material es definida por la porción lineal de la curva, y es definida por el módulo elástico. El módulo elástico es calculado de la siguiente relación,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F/A}{\Delta L/L} \quad (5.1)$$

donde,

E = módulo de elasticidad

σ = elasticidad

ϵ = deformación

F = carga (peso)

A = área

ΔL = elongación

L = longitud inicial

Cuando se aplica una fuerza sobre un elástico (por ejemplo colgar una masa), la deformación del elástico de goma es función de la fuerza que se aplica sobre él.

De modo que, se puede establecer una relación funcional:

$$F = f(x)$$

entre la fuerza aplicada (F) y el estiramiento del elástico respecto a su tamaño natural (x). En el caso de los elásticos de goma esta relación no es lineal, en todo el rango, como se comprobará en el experimento.

Si la fuerza que se aplica es un peso, dado que $F = mg$, entonces se puede establecer una relación funcional:

$$m = \frac{1}{g}f(x) = f'(x)$$

de la masa con la deformación del elástico.

Una vez calibrado el dinamómetro de elástico, se lo utiliza para medir la masa de otros cuerpos.

5.4.3. Ley de Arquímedes

Cuando se sumerge un cuerpo en un fluido, éste ejerce sobre el cuerpo una fuerza de empuje en dirección contraria a la gravedad, es decir hacia arriba, que es igual al peso de la masa de agua desplazada por el cuerpo sumergido (figura (5.13)). Esto se debe a que

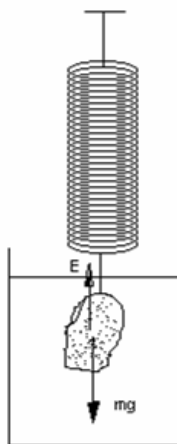


Figura 5.13:

la presión hidrostática aumenta con la profundidad de manera que la fuerza hidrostática resultante sobre el cuerpo por debajo es mayor que la fuerza hidrostática sobre el cuerpo por arriba, resultando de ello una fuerza de empuje hacia arriba. Como en el espacio que ocupa el cuerpo antes se encontraba el fluido y éste estaba en equilibrio, concluimos, sin mayores demostraciones, que la fuerza de empuje es igual al peso del líquido desplazado por el cuerpo,

$$E = m_L g \quad (5.2)$$

donde E es la fuerza de empuje de Arquímedes, m_L la masa de líquido desplazado por el cuerpo y g la constante de la gravedad.

Si pesamos un objeto, con un dinamómetro, obtenemos una masa m y luego volvemos a pesar el mismo objeto, pero sumergido en el líquido, tendremos que:

$$F = mg - E = mg - \rho_L Vg$$

$$\frac{F}{g} = m^* = m - \rho_L V ,$$

entonces,

$$V = \frac{m - m^*}{\rho_L}$$

por tanto,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{m - m^*} \rho_L$$

Donde m es la masa del cuerpo, m^* es la masa aparente del cuerpo cuando se lo mide sumergido en el líquido; V es el volumen sumergido, ρ_L es la densidad del líquido y ρ la densidad del cuerpo.

De este modo se puede medir la densidad de un cuerpo, conocida la densidad del líquido en el que se lo sumerge.

5.4.4. Experimento.

Colgando distintas masas conocidas de nuestro elástico medimos su deformación respecto a su longitud natural y obtenemos una tabla de calibración que nos permite determinar la masa desconocida de un cuerpo.

Por definición, se utiliza el agua como patrón para definir las unidades de masa. Un gramo, $[g]$, es la masa de un centímetro cúbico o mililitro de agua. ($1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$)

Por tanto, utilizando una jeringa hipodérmica de 10 ml , podemos construir nuestra tabla de calibración, colocando agua de 10 en 10 g en una bolsa plástica colgada del dinamómetro. Usamos una bolsa de plástico porque su masa es pequeña y podemos despreciarla.

Una vez construida la tabla de calibración (tabla (??)), graficamos m vs. x para obtener la curva de calibración.

Pesamos la piedra, luego pesamos la piedra sumergida en agua ($\rho_{H_2O} = 1 \text{ g/cm}^3$) y así determinamos la densidad de la piedra.

5.5. Experimento: Velocidad media.

5.5.1. Objetivo

Determinar la velocidad media

5.5.2. Equipo

Globos pequeños, cinta métrica, cronómetro.

5.5.3. Experimento

1. Infle uno o más globos pequeños.
2. Desde una altura fija, que se mide con la cinta métrica, deje caer el globo y mida el tiempo. Repita de 50 a 100 veces.
3. Calcule el tiempo medio de caída, calcule la desviación cuadrática media de la muestra de datos. Calcule el error del tiempo de caída.
4. Haga un histograma de la densidad de frecuencias:

$$p_i = \frac{n_i}{n\Delta t}$$

5. Agrupe los datos en intervalos de Δt y compare con la distribución normal.

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$

6. Calcule la velocidad media de caída con su error.

5.6. Experimento: Coeficiente de restitución elástica

5.6.1. Objetivo

Determinar el coeficiente de restitución inelástica de una pelota al rebotar contra el suelo.

5.6.2. Teoría

En la colisión entre una pelota y la Tierra, esta última puede considerarse de masa infinita. Si la colisión es inelástica, la energía cinética no se conserva durante la colisión.

Sean: V la velocidad con que llega la pelota al suelo y v la velocidad con que rebota inmediatamente después de la colisión, de modo que:

$$\frac{1}{2}mV^2 \geq \frac{1}{2}mv^2 .$$

Una igualdad de esta expresión corresponde a un choque elástico. Luego,

$$V^2 \geq v^2$$

Entonces

$$\left(\frac{v}{V}\right)^2 = \varepsilon^2 \leq 1 ,$$

donde, la relación entre la velocidad después del choque a la velocidad antes del choque se define como el coeficiente de restitución de la colisión inelástica, ε ,

$$\varepsilon = \frac{v}{V} \leq 1 .$$

Si se suelta la pelota desde una altura H , el tiempo que tarda en caer hasta tocar el suelo por primera vez es:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}} ,$$

la velocidad con que llega la pelota al suelo inmediatamente antes del primer rebote es,

$$v_0 = gt_0 ,$$

y, la velocidad con que sale inmediatamente después del primer rebote es,

$$v_1 = \varepsilon v_0$$

Sean t_1, t_2, \dots, t_{n-1} , los tiempos desde que se suelta la pelota hasta el *segundo*, *tercer*, ..., *n-esimo* rebotes, respectivamente.

El tiempo transcurrido entre el *primer* y *segundo* rebotes es,

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \frac{2v_1}{g} = \varepsilon \frac{2v_0}{g} = 2t_0\varepsilon .$$

La velocidad con que sale la pelota inmediatamente después del *segundo* rebote será,

$$v_2 = \varepsilon v_1 = \varepsilon^2 v_0 ,$$

y así, sucesivamente. Generalizando,

$$\Delta t_n = t_n - t_{n-1} = 2t_0 \varepsilon^n .$$

Por tanto, teóricamente, el intervalo de tiempo entre dos rebotes sucesivos es proporcional a la potencia n del coeficiente de restitución inelástico, donde n es el número del n - *esimo* rebote después del *primero*.

5.6.3. Experimento

1. Sosteniendo la pelota con el brazo estirado, lo más alto posible ($H \sim 2m$), suéltela al mismo tiempo que activa el cronómetro. Registre el tiempo que la pelota tarda en caer al suelo (t_0).
2. Repita la operación unas diez veces. Tome el valor promedio de las diez medidas y calcule su error estadístico.
3. Como se trata de una caída libre, el valor teórico de t_0 es:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

donde H es la altura desde la que lanzamos la pelota. Suponiendo que la altura sea aproximadamente 2 m y tomando $g = 9.81\text{ m/s}^2$, el tiempo de caída calculado será de 0.64 s . Supongamos que el error que cometemos en la altura, al soltar la pelota una y otra vez, sea del orden de 10 cm , entonces, para $H = 2.1\text{ m}$, el tiempo de caída es $t'_0 = 0.65\text{ s}$ y para $H = 1.9\text{ m}$, $t''_0 = 0.62\text{ s}$.

4. Las diferencias en tiempo son, entonces:

$$\Delta t'_0 = t'_0 - t_0 = 0,01\text{ s} \quad y \quad \Delta t''_0 = t_0 - t''_0 = 0,02\text{ s}$$

que son mucho menores que el tiempo de reacción del experimentador al manipular el cronómetro que es del orden de 0.3 s . Así, teniendo cuidado de estirar el brazo lo más alto posible siempre, el error que cometamos por las diferencias de altura estarán dentro del error en la medida del tiempo.

5. Repetir el experimento, registrando ahora el tiempo desde que se suelta la pelota hasta que ésta da el *segundo* bote (t_1). Nuevamente realizamos unas diez medidas, se toma el promedio con su correspondiente error estadístico. Hacemos lo mismo para medir los tiempos al *tercer* (t_2), *cuarto* (t_3), *quinto* (t_4), etc., *rebotes*. Dependiendo de la pelota y las condiciones del suelo, se pueden registrar hasta diez rebotes.

6. Con los tiempos promedio, calcule los intervalos de tiempo entre rebotes sucesivos.

(a) Determine el valor de calculándolo de cada par de intervalos sucesivos:

$$\varepsilon = \frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}} \quad i = 1, \dots, n$$

Saque el promedio de los valores obtenidos con su correspondiente error estadístico.

(b) **Método optativo:** Haga una gráfica de $\ln(\Delta t_n)$ en función de n . La relación es:

$$\ln(\Delta t_n) = \ln(2t_0) - n \ln \varepsilon$$

que es de la forma:

$$y = a + bx$$

$$y = \ln(\Delta t_n)$$

$$x = n$$

Mediante una regresión lineal obtenemos,

$$a = \ln(2t_0)$$

$$b = \ln \varepsilon ,$$

De donde puede obtener el valor de ε . Estime su error.

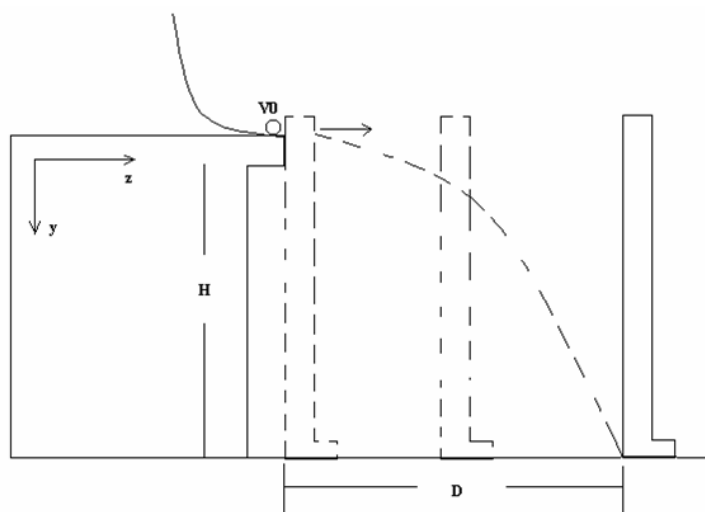
5.7. Experimento: Movimiento de los cuerpos

5.7.1. Objetivos

- Estudiar el movimiento parabólico
- Determinar la ecuación

5.7.2. Teoría

Galileo describió con exactitud el movimiento de un proyectil al separarlo en dos ejes de movimiento los cuales presentan diferentes características Tomando un caso particular, y con un sistema de referencia formado por el plano xy : Analizando el movimiento en un



plano (el eje y es positivo hacia abajo), tenemos que,

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t \quad y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}$$

Sin embargo, debemos tener en cuenta que el momento que el objeto abandona la rampa, lo hace horizontalmente. Por esta razón $\theta = 0$; entonces,

$$y = \left(\frac{g}{2v_0^2} \right) x^2$$

Para realizar un ajuste por mínimos cuadrados, la ecuación puede ser escrita como

$$y = kx^n$$

5.7.3. Experimento

Materiales

- Rampa
- Prensa
- Plomada
- Esfera metálica
- Tablero para impactos
- Regla de 1 *m*
- Papel carbónico.

Procedimiento

1. Fijar la rampa de deslizamiento.
2. Determinar el origen de coordenadas del sistema de referencia.
3. Desplazar el tablero una distancia constante para lograr impactos con la esfera, los cuales son marcados por el papel carbónico.
4. Se realiza el anterior procedimiento con diferentes distancias para conocer las alturas de caída.

5.8. Experimento: El péndulo físico

5.8.1. Introducción

Dentro del ciclo de estudios de laboratorios básicos generalmente se aborda el tema relacionado con oscilaciones mecánicas a través de varios experimentos entre los cuales se encuentra el péndulo físico (también llamado péndulo compuesto). En este experimento, una de las variables a estudiar, es el tiempo de oscilación de una barra metálica cuya medición puede realizarse manualmente.

Objetivos

- Encontrar la relación que existe entre la longitud L , y El periodo T , al poner a oscilar una varilla rígida.
- Estimar la constante, g , de la gravedad, estimando su valor experimental explícito y el radio de giro K_0 .

5.8.2. Características del péndulo físico

Un péndulo físico es un sólido rígido, de masa m , y forma arbitraria que puede oscilar en un plano vertical alrededor de un eje perpendicular a un plano que contenga a su centro de masas. El punto de intersección, O (alejado de su centro de masa una distancia d), del eje con dicho plano es el punto de suspensión. La posición de equilibrio es aquella en que el centro de masas se encuentra en la misma vertical y por debajo del punto de suspensión. En la figura (5.14) se presenta esquemáticamente un sólido plano de espesor pequeño representando a un péndulo físico. Cuando el cuerpo, cuyo momento de inercia respecto al eje de rotación es I_0 , se separa de su posición de equilibrio un ángulo θ y se suelta, un momento restaurador $\vec{\tau}_0$ asociado a la fuerza gravitacional $m\vec{g}$, producirá un movimiento oscilatorio. El momento restaurador para una elongación es

$$\vec{\tau} = \vec{d} \times m\vec{g} \quad (5.3)$$

El módulo de este momento puede escribirse como,

$$\tau = -mgd \sin\theta \quad (5.4)$$

El signo negativo indica que se trata de un momento *recuperador*, es decir, actúa en sentido opuesto a las variaciones angulares, lo cual es debido a la componente tangencial de la fuerza de gravedad.

Este momento puede relacionarse por medio de la ecuación fundamental de la dinámica de rotación con la aceleración angular α del péndulo y su momento de inercia I_0 respecto al

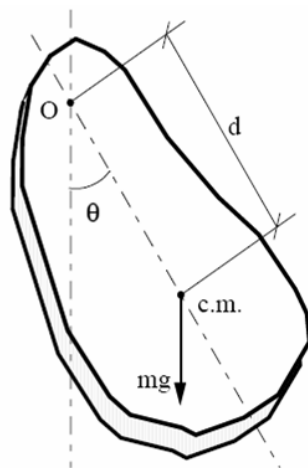


Figura 5.14: Sólido plano empleado como péndulo físico. En la posición indicada, el peso produce respecto a O un momento que se opone al incremento del ángulo.

punto de suspensión. En forma escalar la relación es

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} , \quad (5.5)$$

que, haciendo analogía a la segunda ley de Newton, $\vec{\tau}$ es el análogo rotacional de la fuerza, I representa la masa y $\vec{\alpha}$ es el análogo de la aceleración lineal ($\alpha = d^2\theta/dt^2$).

Igualando a la ecuación (5.4), podemos escribir,

$$I\alpha = -mgd \sin\theta$$

o

$$I\alpha + mgd \sin\theta = 0 , \quad (5.6)$$

Debido a que τ es proporcional a $\sin\theta$ y no θ , en general no se puede considerar que el movimiento sea armónico simple. Sin embargo, al igual que en el caso del péndulo simple, para ángulos pequeños $\sin\theta \approx \theta$, de manera que, para amplitudes pequeñas, la ecuación (5.6) puede reescribirse como una ecuación diferencial de segundo orden que corresponde a un movimiento armónico simple:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgd \theta = 0 ,$$

reordenado términos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 , \quad (5.7)$$

con la frecuencia angular, ω , definida como,

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I} .$$

por tanto, su periodo de oscilación esta dado por,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} . \quad (5.8)$$

5.8.3. Oscilaciones de una varilla delgada

Una varilla delgada en forma de paralelepípedo, larga en comparación con su ancho y espesor, puede utilizarse como péndulo físico para realizar medidas de periodos o de momentos de inercia. En el presente experimento, consideraremos una varilla homogénea como la mostrada en la figura (5.15), en la que se han practicado pequeños orificios a lo largo de su eje de simetría a intervalos regulares. Estos orificios sirven como puntos de oscilación. El

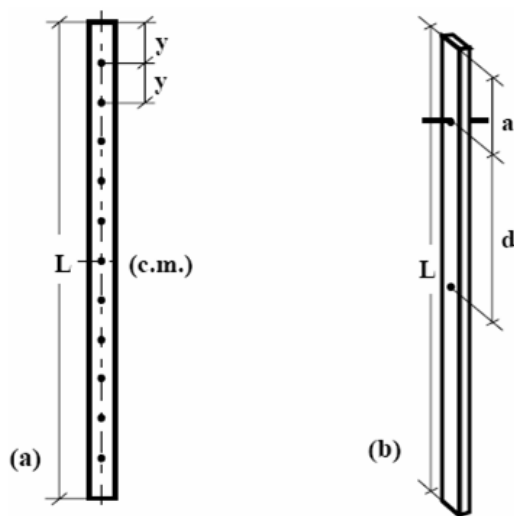


Figura 5.15: Varilla delgada de longitud L ; (a) vista frontal: los agujeros para su suspensión se han practicado a intervalos regulares y , (b) vista lateral: la distancia entre el punto de suspensión y el extremo superior es a . La distancia entre el punto de suspensión y el c.m. es d .

periodo teórico de una varilla suspendida en la forma indicada en la figura (5.15), oscilando con pequeñas amplitudes, está dado por,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left(\frac{L^2}{12d} + d \right)} , \quad (5.9)$$

esto puede escribirse en forma similar a la ecuación que nos da el periodo de un péndulo simple:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k}{g}} , \quad (5.10)$$

en la que se ha denominado,

$$k = \left(\frac{L^2}{12d} + d \right) . \quad (5.11)$$

5.8.4. Parte experimental

Se dispone de una varilla homogénea de longitud $L = 110 \text{ cm}$, con orificios practicados cada 5 cm , y un cronómetro capaz de apreciar 0.01 s .

- Tómense lecturas de los periodos de las oscilaciones utilizando como puntos de suspensión los orificios situados a distancias $a = 10 \text{ cm}$, 15 cm , 20 cm ... del extremo de la varilla hasta llegar a $a = 45 \text{ cm}$.
- Para determinar los periodos se medirá el tiempo invertido en 10 oscilaciones en cada uno de los orificios utilizados; cada medida de dicho tiempo se repetirá al menos **cinco veces** (es decir, se miden cinco tandas de diez oscilaciones cada vez, y el tiempo de oscilación sobre cada orificio es la media).
- *Precaución: en todas las medidas debe asegurarse de que el péndulo oscila en un plano, sin movimientos de bamboleo.*

5.8.5. Tratamiento de datos

Con los datos obtenidos en la parte experimental (5.8.4), realícense las siguientes tablas y representaciones gráficas:

1. Construir una tabla donde figuren las siguientes columnas:
 - i) valores de distancia a desde el punto de suspensión hasta el extremo;
 - ii) valores de distancia d hasta el c.m. ($d = [L/2] - a$);
 - iii) valores de k calculados para cada d según la ecuación (5.11);
 - iv) valores del tiempo invertido en N oscilaciones (la media de los tiempos medidos en las tandas de 10 oscilaciones);
 - v) valores del periodo T medido para cada a (columna anterior dividida por el número de oscilaciones)
 - vi) valores del cuadrado del periodo T^2 medido para cada a .
2. Construir una representación gráfica en papel milimetrado colocando los cuadrados del periodo en el eje de las abcisas y los valores calculados de k en el de las ordenadas. Medir gráficamente la pendiente de la recta obtenida. ¿Qué valor para la aceleración

de la gravedad se obtiene con esta pendiente? (expresar dicho valor con su error correspondiente). Emplear luego un ajuste por mínimos cuadrados para obtener la misma pendiente, y el valor de la aceleración de la gravedad. ¿En qué ecuación de la parte teórica de esta práctica se basa este tratamiento de datos?

3. ¿Cuál es el valor de la gravedad obtenido? ¿A qué factores debe atribuirse la posible diferencia con el valor real de la gravedad en el laboratorio?
4. ¿Cómo varía el periodo de oscilación a medida que el punto de suspensión se acerca al centro de masas? ¿Aumenta o disminuye? ¿Podría justificar esto?
5. Construir una representación gráfica en papel milimetrado colocando los valores de la distancia a en el eje de las abscisas y los valores del cuadrado del periodo en el de las ordenadas (figura (5.16)).

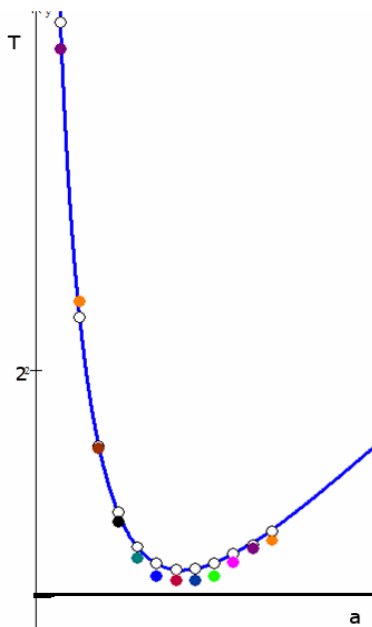


Figura 5.16: Representación del periodo T en función de la distancia a . Los círculos blancos y la curva son teóricos. En cambio, los círculos de colores son datos experimentales.

5.8.6. Apéndice: Momentos de inercia

Momento de inercia de una distribución continua de masa

Para una distribución continua de masa, la fórmula que tenemos que aplicar es

$$I = \int x^2 dm, \quad (5.12)$$

dm es un elemento de masa situado a una distancia x del eje de rotación.

Momento de inercia de una varilla

Vamos a calcular el momento de inercia de una varilla de masa m y longitud L respecto de un eje perpendicular a la varilla que pasa por el centro de masas (figura (5.17)). La masa

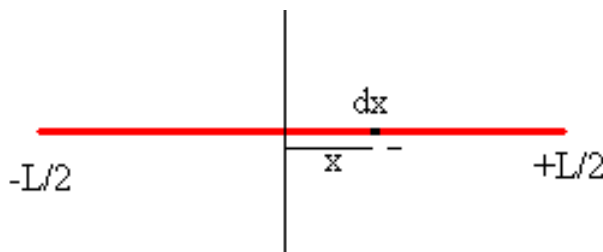


Figura 5.17: Varilla delgada de longitud L .

dm del elemento de longitud de la varilla comprendido entre x y $x + dx$ es

$$dm = \frac{m}{L} dx$$

El momento de inercia de la varilla es

$$I_C = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{L} x^2 dx = \frac{1}{12} m L^2, \quad (5.13)$$

Respecto de cualquier otro eje paralelo al primero, el momento de inercia puede obtenerse aplicando el teorema de Steiner.

Teorema de Steiner

El teorema de Steiner es una fórmula que nos permite calcular el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje de rotación que pasa por un punto O , cuando conocemos el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de masas.

El momento de inercia del sólido respecto de un eje que pasa por O es (figura (5.18))

$$I_0 = \sum m_i r_i^2$$

El momento de inercia respecto de un eje que pasa por C es

$$I_C = \sum m_i R_i^2$$

Para relacionar I_O e I_C hay que relacionar r_i y R_i . En la figura (5.18), tenemos que

$$\begin{aligned} r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 = (x_{ic} + d)^2 + y_{ic}^2 = R_i^2 + 2dx_{ic} + d^2 \\ I_0 &= \sum m_i R_i^2 + 2d \sum m_i x_{ic} + d^2 \sum m_i \\ I_0 &= I_C + md^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

El término intermedio en el segundo miembro es cero ya que obtenemos la posición x_C del centro de masa desde el centro de masa.

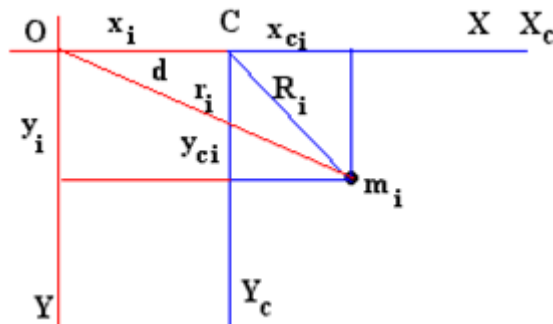


Figura 5.18:

5.8.7. Referencias

- *Péndulo físico y momentos de inercia*, Departamento de Física Aplicada, Universidad de Castilla-La Mancha, Escuela Técnica Superior Ing. Agrónomos
- *Péndulo físico*, R. Castillo, L. Ríos, Universidad del Norte, rcastilloj@uninorte.edu.co
- *GUIAS FISICA EXPERIMENTAL III*, B. Cruz, W. Ramírez, R. Ramirez, R. A. Zuluaga, Departamento de Física de la Universidad Tecnológica de Pereira (2005)
- <http://www.educando.edu.do/sitios/PNC2005/recursos/recursos/>