Teoria de Errores

Apuntes de Clases

Rolando Ticona

Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés

17 de febrero de 2020

Resumen

Física

Los bases son:

- Observaciones experimentales
- Mediciones cuantitativas

¿Discrepancia entre la teoría y el experimento?

- formular nuevas teorías y nuevos experimentos
- eliminar dicha discrepancia
- explicar así el fenómeno correspondiente

Física

Los bases son:

- Observaciones experimentales
- Mediciones cuantitativas

¿Discrepancia entre la teoría y el experimento?

- formular nuevas teorías y nuevos experimentos
- eliminar dicha discrepancia
- explicar así el fenómeno correspondiente

Física

Los bases son:

- Observaciones experimentales
- Mediciones cuantitativas

¿Discrepancia entre la teoría y el experimento?

- formular nuevas teorías y nuevos experimentos
- eliminar dicha discrepancia
- explicar así el fenómeno correspondiente

Física

Los bases son:

- Observaciones experimentales
- Mediciones cuantitativas

¿Discrepancia entre la teoría y el experimento?

- formular nuevas teorías y nuevos experimentos
- eliminar dicha discrepancia
- explicar así el fenómeno correspondiente

Física

Los bases son:

- Observaciones experimentales
- Mediciones cuantitativas

¿Discrepancia entre la teoría y el experimento?

- formular nuevas teorías y nuevos experimentos
- eliminar dicha discrepancia
- explicar así el fenómeno correspondiente

Física

Los bases son:

- Observaciones experimentales
- Mediciones cuantitativas

¿Discrepancia entre la teoría y el experimento?

- formular nuevas teorías y nuevos experimentos
- eliminar dicha discrepancia
- explicar así el fenómeno correspondiente

Física

Los bases son:

- Observaciones experimentales
- Mediciones cuantitativas

¿Discrepancia entre la teoría y el experimento?

- formular nuevas teorías y nuevos experimentos
- eliminar dicha discrepancia
- explicar así el fenómeno correspondiente

OBJETIVO DEL CURSO

El trabajo de laboratorio puede servir para:

- Demostrar teorías físicas
- Conocer el manejo de instrumentos
- Aprender a realizar experimentos
- Obtener valores de magnitudes de interés

OBJETIVO DEL CURSO

El trabajo de laboratorio puede servir para:

- Demostrar teorías físicas
- Conocer el manejo de instrumentos
- Aprender a realizar experimentos
- Obtener valores de magnitudes de interés

OBJETIVO DEL CURSO

El trabajo de laboratorio puede servir para:

- Demostrar teorías físicas
- Conocer el manejo de instrumentos
- Aprender a realizar experimentos
- Obtener valores de magnitudes de interés

OBJETIVO DEL CURSO

El trabajo de laboratorio puede servir para:

- Demostrar teorías físicas
- Conocer el manejo de instrumentos
- Aprender a realizar experimentos
- Obtener valores de magnitudes de interés

Cantidades Físicas

En el laboratorio, para expresar una cantidad fisica medible requerimos usar:

- un número.
- una unidad.
- Además, un termino que indique el grado de confianza en el valor obtenido. Esto se realiza especificando el *índice de precisión.*

Cantidades Físicas

En el laboratorio, para expresar una cantidad fisica medible requerimos usar:

- un número.
- una unidad.
- Además, un termino que indique el grado de confianza en el valor obtenido. Esto se realiza especificando el *índice de precisión.*

Cantidades Físicas

En el laboratorio, para expresar una cantidad fisica medible requerimos usar:

- un número.
- una unidad.
- Además, un termino que indique el grado de confianza en el valor obtenido. Esto se realiza especificando el *índice de precisión.*

Números

Sin embargo, debemos considerar dos clases de números: los contados o definidos y los medidos: el valor de un número contado o definido es *exacto*; en cambio, el de uno medido no puede ser conocido.

- Los números contados *no tienen errores*: el número de estudiantes en la clase, se expresa con *certeza absoluta*.
- Los números definidos *tampoco tienen errores*. Se dan respecto a *relaciones exactas*: los minutos de una hora.
- Un número medido *siempre* tiene incertidumbre. ¿Que estatura tiene? ¿170.5 centímetros, 170.52 centímetros? No podemos establecer este valor con *certeza absoluta*.

Números

Sin embargo, debemos considerar dos clases de números: los <u>contados o definidos</u> y los <u>medidos</u>: el valor de un número contado o definido es *exacto*; en cambio, el de uno medido no puede ser conocido.

- <u>Los números contados</u> *no tienen errores*: el número de estudiantes en la clase, se expresa con *certeza absoluta*.
- <u>Los números definidos</u> *tampoco tienen errores*. Se dan respecto a *relaciones exactas*: los minutos de una hora.
- <u>Un número medido</u> *siempre* tiene incertidumbre. ¿Que estatura tiene? ¿170.5 centímetros, 170.52 centímetros? No podemos establecer este valor con *certeza absoluta*.

Números

Sin embargo, debemos considerar dos clases de números: los contados o definidos y los medidos: el valor de un número contado o definido es *exacto*; en cambio, el de uno medido no puede ser conocido.

- Los números contados *no tienen errores*: el número de estudiantes en la clase, se expresa con *certeza absoluta*.
- Los números definidos *tampoco tienen errores*. Se dan respecto a *relaciones exactas*: los minutos de una hora.
- Un número medido *siempre* tiene incertidumbre. ¿Que estatura tiene? ¿170.5 centímetros, 170.52 centímetros? No podemos establecer este valor con *certeza absoluta*.

Números

Sin embargo, debemos considerar dos clases de números: los contados o definidos y los medidos: el valor de un número contado o definido es *exacto*; en cambio, el de uno medido no puede ser conocido.

- Los números contados *no tienen errores*: el número de estudiantes en la clase, se expresa con *certeza absoluta*.
- Los números definidos *tampoco tienen errores*. Se dan respecto a *relaciones exactas*: los minutos de una hora.
- Un número medido *siempre* tiene incertidumbre. ¿Que estatura tiene? ¿170.5 centímetros, 170.52 centímetros? No podemos establecer este valor con *certeza absoluta*.

Números

Sin embargo, debemos considerar dos clases de números: los contados o definidos y los medidos: el valor de un número contado o definido es *exacto*; en cambio, el de uno medido no puede ser conocido.

- Los números contados *no tienen errores*: el número de estudiantes en la clase, se expresa con *certeza absoluta*.
- Los números definidos *tampoco tienen errores*. Se dan respecto a *relaciones exactas*: los minutos de una hora.
- Un número medido *siempre* tiene incertidumbre. ¿Que estatura tiene? ¿170.5 centímetros, 170.52 centímetros? No podemos establecer este valor con *certeza absoluta*.

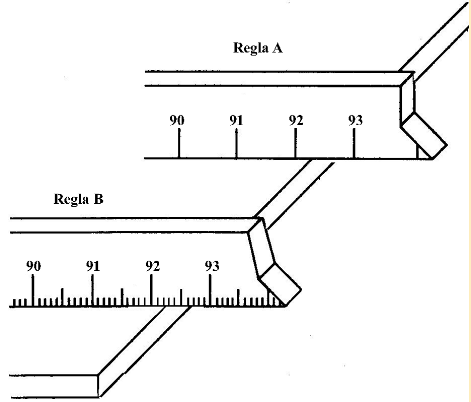
Números

Sin embargo, debemos considerar dos clases de números: los contados o definidos y los medidos: el valor de un número contado o definido es *exacto*; en cambio, el de uno medido no puede ser conocido.

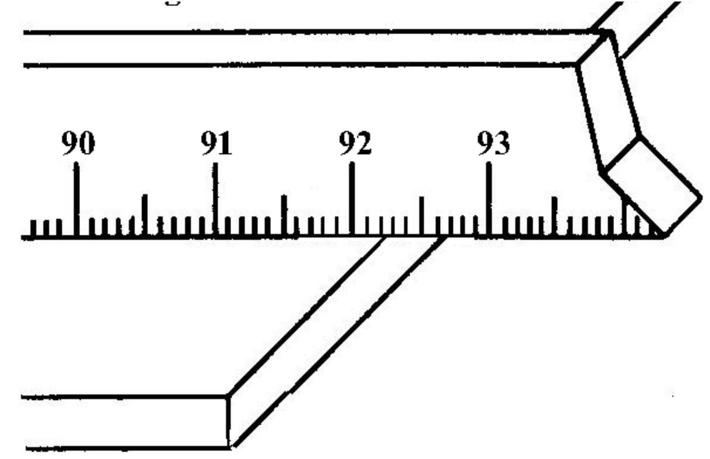
- Los números contados *no tienen errores*: el número de estudiantes en la clase, se expresa con *certeza absoluta*.
- Los números definidos *tampoco tienen errores*. Se dan respecto a *relaciones exactas*: los minutos de una hora.
- Un número medido *siempre* tiene incertidumbre. ¿Que estatura tiene? ¿170.5 centímetros, 170.52 centímetros? No podemos establecer este valor con *certeza absoluta*.

Magnitud y precisión

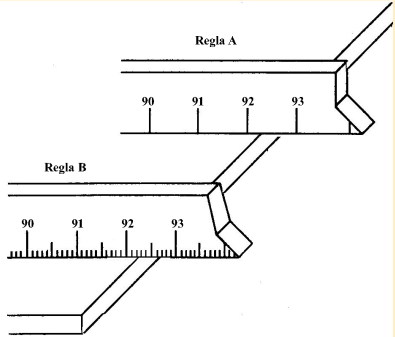
Al realizar una medición obtenemos dos tipos de información: la magnitud y la precisión de dicha medición.



Magnitud y precisión



Cifras Significativas

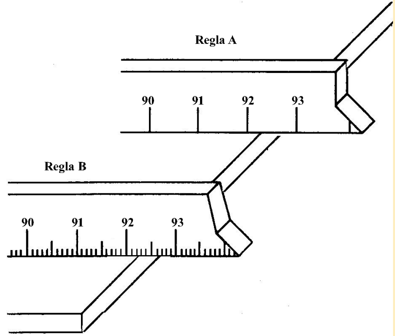


Magnitud y Precisión

El valor real, que se observa en la escala del instrumento (92 con la regla A y 92.2 con la B), nos da la **magnitud**. La **precisión** es indicada por el número de *cifras significativas* registradas y estimadas.

Por tanto, debemos incluir otro número, *que es estimado* (en este caso, a simple vista).

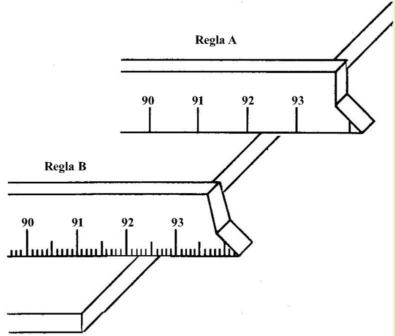
Cifras Significativas



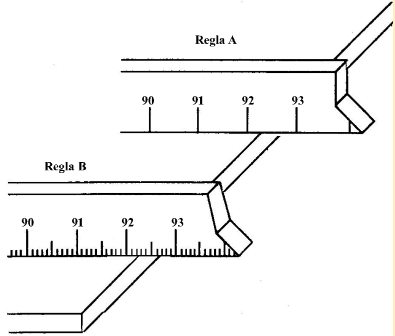
Entonces...

La medida de 92.2 (regla A), tiene *tres cifras significativas*.
La medida de 92.23 (regla B), tiene *cuatro cifras significativas*.

Cifras Significativas

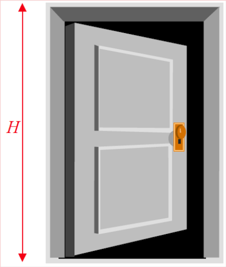


Cifras Significativas



A mayor precisión, mayor número de cifras significativas.

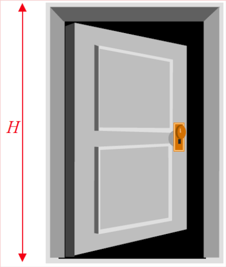
EJEMPLO



Medida "a ojo"

$$H = 205\ cm$$

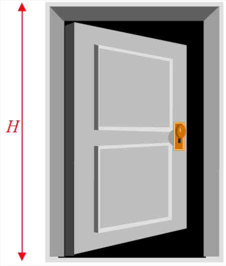
EJEMPLO



Medida "a ojo"

$$H = 205\ cm$$

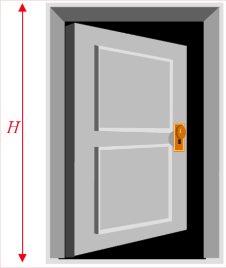
EJEMPLO



Medida con cinta métrica. (Escala: 1 mm)

$$H = 211{,}7\ cm$$

EJEMPLO



Medida con interferometría láser (10^{-3} mm).

$$H = 211{,}7678\ cm$$

Cifras Significativas

¿Que sucede si reportamos una longitud de 211.767878 cm?

Esta interpretación de nueve cifras significativas tiene dígitos estimados **incorrectos**, pues indican una precisión mayor a la de los instrumentos.

Para facilitar el manejo, se han establecido reglas estándar para la escritura y uso de cifras significativas y valores calculados de las mediciones.

Cifras Significativas

¿Que sucede si reportamos una longitud de 211.767878 cm?

Esta interpretación de nueve cifras significativas tiene dígitos estimados **incorrectos**, pues indican una precisión mayor a la de los instrumentos.

Para facilitar el manejo, se han establecido reglas estándar para la escritura y uso de cifras significativas y valores calculados de las mediciones.

Cifras Significativas

¿Que sucede si reportamos una longitud de 211.767878 cm?

Esta interpretación de nueve cifras significativas tiene dígitos estimados **incorrectos**, pues indican una precisión mayor a la de los instrumentos.

Para facilitar el manejo, se han establecido reglas estándar para la escritura y uso de cifras significativas y valores calculados de las mediciones.

Cifras Significativas

¿Que sucede si reportamos una longitud de 211.767878 cm?

Esta interpretación de nueve cifras significativas tiene dígitos estimados **incorrectos**, pues indican una precisión mayor a la de los instrumentos.

Para facilitar el manejo, se han establecido reglas estándar para la escritura y uso de cifras significativas y valores calculados de las mediciones.

Cifras Significativas

Regla 1

En números que no contengan ceros, todos los dígitos son significativos.
Ejemplos:

9.25
3.4529
2567

Cifras Significativas

Regla 2

Todos los ceros entre números enteros son significativos.

Ejemplos:

7.052

70598

405

Cifras Significativas

Regla 3

Los ceros a la izquierda del primer dígito diferente de cero **no son significativos**.

Ejemplos:

$$0.0057$$
$$0.0759$$
$$0.00001$$

Cifras Significativas

Regla 4

En un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último dígito, diferente de cero, son significativos.

Ejemplos:

43.0
43.00
0.00200
0.40050

Cifras Significativas

Regla 5

En un número que no tiene punto decimal y que acaba en uno o más ceros, por ejemplo 3600, los ceros que componen dicho número, *pueden o no* ser significativos.
Si es un *número medido*, los ceros no son significativos. Si el número *es contado o definido*, todos los dígitos son significativos.

Cifras Significativas

Notación Científica

Para evitar estas confusiones, podemos expresarlos utilizando la **notación científica**.

Todos los dígitos (sin tomar en cuenta los exponentes), son significativos.

$$3.6\times10^{5}$$
$$3.60\times10^{5}$$
$$3.600\times10^{5}$$
$$2\times10^{-5}$$
$$3.0\times10^{-5}$$
$$4.00\times10^{-5}$$

Redondeo

Regla 1

Si el primer dígito a ser eliminado es menor que 5, ese dígito y los siguientes, se eliminan.
Ejemplo redondeo a **tres cifras significativas**:

$$54.234756 = 54.2.$$

Redondeo

Regla 2

Si el primer dígito a ser eliminado es mayor que 5, o es un 5 seguido por dígitos diferentes de cero, los dígitos excedentes se eliminan y el último dígito retenido es incrementado en una unidad.

Ejemplos:

$$54.3\mathbf{6} = 54.4$$
$$54.3\mathbf{69864} = 54.4$$
$$54.3\mathbf{598} = 54.4.$$

Redondeo

Regla par - impar

Si el primer dígito a ser eliminado es un 5 no seguido por otros dígitos, o es un 5 seguido solamente por ceros, se aplica la regla par-impar.

Si el último dígito retenido es par, su valor *no cambia*, y el 5 y los dígitos que le siguen son eliminados. Pero, si el último dígito es impar, su valor *se incrementa en uno*.

Ejemplos:

$$54.45 = 54.4$$
$$54.4500 = 54.4$$
$$54.35 = 54.4$$
$$54.3500 = 54.4$$

Cantidades calculadas

Para cantidades calculadas, el resultado obtenido depende del número de cifras significativas y del tipo de operaciones matemáticas realizadas para obtener dicho resultado.
Hay reglas diferentes para la multiplicación y división, así como para la suma y resta.

- **Multiplicación y división**: La respuesta debe tener el número de cifras significativas de la expresión que tiene el *menor* número de cifras significativas.
- **Suma y resta**: Para estas operaciones, el resultado debe mantener la posición del último dígito común a todos los números que son sumados o restados.

Cantidades calculadas

Para cantidades calculadas, el resultado obtenido depende del número de cifras significativas y del tipo de operaciones matemáticas realizadas para obtener dicho resultado.
Hay reglas diferentes para la multiplicación y división, así como para la suma y resta.

- **Multiplicación y división**: La respuesta debe tener el número de cifras significativas de la expresión que tiene el *menor* número de cifras significativas.
- **Suma y resta**: Para estas operaciones, el resultado debe mantener la posición del último dígito común a todos los números que son sumados o restados.

Cantidades calculadas

Para cantidades calculadas, el resultado obtenido depende del número de cifras significativas y del tipo de operaciones matemáticas realizadas para obtener dicho resultado.
Hay reglas diferentes para la multiplicación y división, así como para la suma y resta.

- **Multiplicación y división**: La respuesta debe tener el número de cifras significativas de la expresión que tiene el *menor* número de cifras significativas.
- **Suma y resta**: Para estas operaciones, el resultado debe mantener la posición del último dígito común a todos los números que son sumados o restados.

Cantidades calculadas

Para cantidades calculadas, el resultado obtenido depende del número de cifras significativas y del tipo de operaciones matemáticas realizadas para obtener dicho resultado.
Hay reglas diferentes para la multiplicación y división, así como para la suma y resta.

- **Multiplicación y división**: La respuesta debe tener el número de cifras significativas de la expresión que tiene el *menor* número de cifras significativas.
- **Suma y resta**: Para estas operaciones, el resultado debe mantener la posición del último dígito común a todos los números que son sumados o restados.

Cantidades calculadas

Para cantidades calculadas, el resultado obtenido depende del número de cifras significativas y del tipo de operaciones matemáticas realizadas para obtener dicho resultado.
Hay reglas diferentes para la multiplicación y división, así como para la suma y resta.

- **Multiplicación y división**: La respuesta debe tener el número de cifras significativas de la expresión que tiene el *menor* número de cifras significativas.
- **Suma y resta**: Para estas operaciones, el resultado debe mantener la posición del último dígito común a todos los números que son sumados o restados.

Finalmente ....

Al expresar el resultado de una medida y su error experimental, éstos deben tener sus últimas cifras significativas en la misma posición (relativa al punto decimal).

Ejemplos:

$$54.1 \pm 0.1$$
$$121 \pm 4$$
$$8.764 \pm 0.002$$
$$(7.63 \pm 0.10)\times 10^3.$$

Resumen

BELLEZA

¿Bella?

¿más bella?

¿aún más bella?

La belleza: ¿una cantidad cuantificable?

BELLEZA

¿Bella?

¿más bella?

¿aún más bella?

La belleza: ¿una cantidad cuantificable?

BELLEZA

¿Bella?

¿más bella?

¿aún más bella?

La belleza: ¿una cantidad cuantificable?

BELLEZA

¿Bella?

¿más bella?

¿aún más bella?

La belleza: ¿una cantidad cuantificable?

BELLEZA

- ¿Cuál es la magnitud de la belleza de estas personas?
- La belleza no tiene unidades, por lo cual no es una cantidad que tenga magnitud
- Para cuantificar (medir o estimar) las propiedades de algo, hace falta un sistema de unidades
- Un sistema de unidades siempre empieza con unas decisiones arbitrarias

BELLEZA

- ¿Cuál es la magnitud de la belleza de estas personas?
- La belleza no tiene unidades, por lo cual no es una cantidad que tenga magnitud
- Para cuantificar (medir o estimar) las propiedades de algo, hace falta un sistema de unidades
- Un sistema de unidades siempre empieza con unas decisiones arbitrarias

BELLEZA

- ¿Cuál es la magnitud de la belleza de estas personas?
- La belleza no tiene unidades, por lo cual no es una cantidad que tenga magnitud
- Para cuantificar (medir o estimar) las propiedades de algo, hace falta un sistema de unidades
- Un sistema de unidades siempre empieza con unas decisiones arbitrarias

BELLEZA

- ¿Cuál es la magnitud de la belleza de estas personas?
- La belleza no tiene unidades, por lo cual no es una cantidad que tenga magnitud
- Para cuantificar (medir o estimar) las propiedades de algo, hace falta un sistema de unidades
- Un sistema de unidades siempre empieza con unas decisiones arbitrarias

Medición

- Medir significa comparar una magnitud con otra, que se considera como patrón (unidad). Este proceso siempre esta sujeto a incertidumbres (o errores).
- Los errores son imprecisiones (inevitables), asociadas a las medidas.
- Significado del error: Probabilidad de que el valor verdadero se encuentre en el intervalo:

$$x - \delta(x) \leq x \leq x + \delta(x) \tag{1}$$

- Se debe distinguir entre dos tipos de errores: *sistemáticos* y *aleatorios*.

Medición

- Medir significa comparar una magnitud con otra, que se considera como patrón (unidad). Este proceso siempre esta sujeto a incertidumbres (o errores).
- Los errores son imprecisiones (inevitables), asociadas a las medidas.
- Significado del error: Probabilidad de que el valor verdadero se encuentre en el intervalo:

$$x - \delta(x) \leq x \leq x + \delta(x) \tag{1}$$

- Se debe distinguir entre dos tipos de errores: *sistemáticos* y *aleatorios*.

Medición

- Medir significa comparar una magnitud con otra, que se considera como patrón (unidad). Este proceso siempre esta sujeto a incertidumbres (o errores).
- Los errores son imprecisiones (inevitables), asociadas a las medidas.
- Significado del error: Probabilidad de que el valor verdadero se encuentre en el intervalo:

$$x - \delta(x) \leq x \leq x + \delta(x) \tag{1}$$

- Se debe distinguir entre dos tipos de errores: *sistemáticos* y *aleatorios*.

Medición

- Medir significa comparar una magnitud con otra, que se considera como patrón (unidad). Este proceso siempre esta sujeto a incertidumbres (o errores).
- Los errores son imprecisiones (inevitables), asociadas a las medidas.
- Significado del error: Probabilidad de que el valor verdadero se encuentre en el intervalo:

$$x - \delta(x) \leq x \leq x + \delta(x) \quad (1)$$

- Se debe distinguir entre dos tipos de errores: *sistemáticos* y *aleatorios.*

Errores de Medición

- **Errores sistemáticos:(instrumentales, observacionales, ambientales)** Debido a métodos o instrumentos de medida inadecuados. Deben evitarse o minimizarse (habilidad que se adquiere con la práctica.) No hay reglas definidas.

- **Errores aleatorios:** Debido a causas (imprevisibles), que dan lugar a resultados distintos cuando se repiten las medidas. Se pueden analizar mediante métodos estadísticos (Teoría de errores).

Errores de Medición

- **Errores sistemáticos:(instrumentales, observacionales, ambientales)** Debido a métodos o instrumentos de medida inadecuados. Deben evitarse o minimizarse (habilidad que se adquiere con la práctica.) No hay reglas definidas.

- **Errores aleatorios:** Debido a causas (imprevisibles), que dan lugar a resultados distintos cuando se repiten las medidas. Se pueden analizar mediante métodos estadísticos (Teoría de errores).

Errores de Medición

- **Errores sistemáticos:(instrumentales, observacionales, ambientales)** Debido a métodos o instrumentos de medida inadecuados. Deben evitarse o minimizarse (habilidad que se adquiere con la práctica.) No hay reglas definidas.

- **Errores aleatorios:** Debido a causas (imprevisibles), que dan lugar a resultados distintos cuando se repiten las medidas. Se pueden analizar mediante métodos estadísticos (Teoría de errores).

Errores de Medición

- **Errores sistemáticos:(instrumentales, observacionales, ambientales)** Debido a métodos o instrumentos de medida inadecuados. Deben evitarse o minimizarse (habilidad que se adquiere con la práctica.) No hay reglas definidas.

- **Errores aleatorios:** Debido a causas (imprevisibles), que dan lugar a resultados distintos cuando se repiten las medidas. Se pueden analizar mediante métodos estadísticos (Teoría de errores).

EJEMPLOS

Medida de un intervalo de tiempo con un cronómetro.

- El cronómetro funciona mal y da siempre un intervalo de tiempo menor (o mayor): error sistemático.
- Error al pulsar el *empiezo* y la *detención* por el experimentador: error aleatorio.

EJEMPLOS

Medida de un intervalo de tiempo con un cronómetro.

- El cronómetro funciona mal y da siempre un intervalo de tiempo menor (o mayor): **error sistemático**.
- Error al pulsar el *empiezo* y la *detención* por el experimentador: **error aleatorio**.

EJEMPLOS

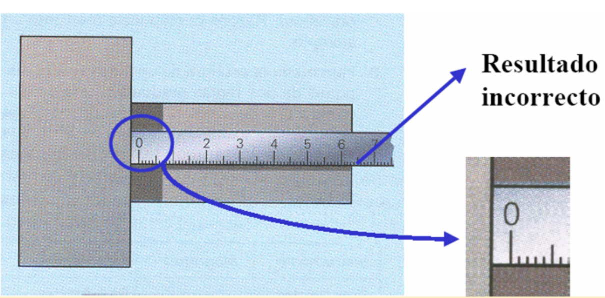
Medida de un intervalo de tiempo con un cronómetro.

- El cronómetro funciona mal y da siempre un intervalo de tiempo menor (o mayor): **error sistemático**.
- Error al pulsar el *empiezo* y la *detención* por el experimentador: **error aleatorio**.

Ejemplos

error sistemático

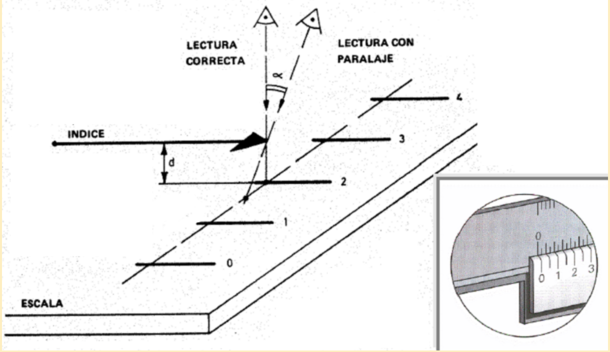
La regla está mal calibrada y da siempre longitudes menores (o mayores),



Ejemplos

ERROR ALEATORIO

Error en la interpolación entre dos marcas por el experimentador:



Vocabulario

Algunas definiciones simples

- **Error**. Diferencia entre el valor verdadero y el valor medido. El valor verdadero nunca es conocido.
  El valor de un error tampoco es conocido (si fuera conocido, podríamos corregir nuestros datos y no tener más errores que surjan de la fuentes.)

- **Exactitud**. La cercanía al valor verdadero y, como un error, nunca es conocido en casos prácticos.
- **Precisión**. Cercanía de la agrupación de datos.

Vocabulario

Algunas definiciones simples

- **Error**. Diferencia entre el valor verdadero y el valor medido. El valor verdadero nunca es conocido.
  El valor de un error tampoco es conocido (si fuera conocido, podríamos corregir nuestros datos y no tener más errores que surjan de la fuentes.)

- **Exactitud**. La cercanía al valor verdadero y, como un error, nunca es conocido en casos prácticos.
- **Precisión**. Cercanía de la agrupación de datos.

Vocabulario

ALGUNAS DEFINICIONES SIMPLES

- **Error**. Diferencia entre el valor verdadero y el valor medido. El valor verdadero nunca es conocido.
  El valor de un error tampoco es conocido (si fuera conocido, podríamos corregir nuestros datos y no tener más errores que surjan de la fuentes.)

- **Exactitud**. La cercanía al valor verdadero y, como un error, nunca es conocido en casos prácticos.
- **Precisión**. Cercanía de la agrupación de datos.

Vocabulario

Algunas definiciones simples

- **Error**. Diferencia entre el valor verdadero y el valor medido. El valor verdadero nunca es conocido.
  El valor de un error tampoco es conocido (si fuera conocido, podríamos corregir nuestros datos y no tener más errores que surjan de la fuentes.)

- **Exactitud**. La cercanía al valor verdadero y, como un error, nunca es conocido en casos prácticos.
- **Precisión**. Cercanía de la agrupación de datos.

Vocabulario

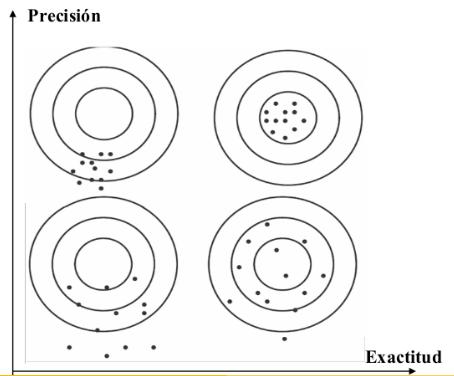
Algunas definiciones simples

- **Error**. Diferencia entre el valor verdadero y el valor medido. El valor verdadero nunca es conocido.
  El valor de un error tampoco es conocido (si fuera conocido, podríamos corregir nuestros datos y no tener más errores que surjan de la fuentes.)

- **Exactitud**. La cercanía al valor verdadero y, como un error, nunca es conocido en casos prácticos.
- **Precisión**. Cercanía de la agrupación de datos.

Precisión y exactitud

La diferencia entre precisión y exactitud puede ser aclarada por la siguiente analogía. Si, en vez de hacer mediciones, disparamos flechas a un blanco,



Análisis Estadístico

Valor medio

Si la lectura de una cantidad física, como un intervalo de tiempo medido con un cronómetro, es realizada muchas veces, se obtiene una distribución de lecturas debido a los errores aleatorios.

El valor medio o promedio, de una serie de medidas, $\bar{x}$, es definido a traves de la expresión,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \tag{2}$$

donde x_i es el *i-esimo* valor medido y n es el numero total de mediciones.

Análisis Estadístico

Valor medio

Si la lectura de una cantidad física, como un intervalo de tiempo medido con un cronómetro, es realizada muchas veces, se obtiene una distribución de lecturas debido a los errores aleatorios.
El valor medio o promedio, de una serie de medidas, $\bar{x}$, es definido a traves de la expresión,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \qquad (2)$$

donde x_i es el *i-esimo* valor medido y n es el numero total de mediciones.

Análisis Estadístico

desviación Estándar

Ahora que hemos determinado el "mejor valor" para las mediciones, $\bar{x}$, debemos estimar la incertidumbre o el error en este valor.
Definimos una forma en la cual la dispersión de los datos, alrededor del valor medio, puede ser caracterizada.
La **desviación estándar** s, es definida como

$$s \equiv \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2} \quad (unidades\ de\ x_i)\ , \tag{3}$$

Análisis Estadístico

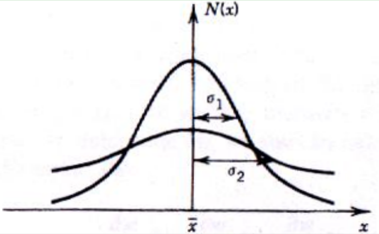
desviación Estándar

Ahora que hemos determinado el "mejor valor" para las mediciones, $\bar{x}$, debemos estimar la incertidumbre o el error en este valor.
Definimos una forma en la cual la dispersión de los datos, alrededor del valor medio, puede ser caracterizada.
La **desviación estándar** s, es definida como

$$s \equiv \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2} \quad (unidades\ de\ x_i)\ , \tag{3}$$

Análisis Estadístico

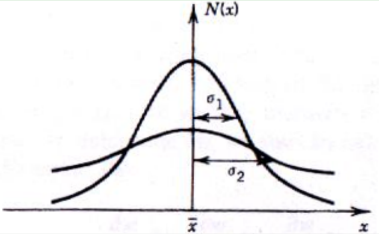
DISPERSIÓN



Si la desviación estándar es pequeña, entonces la dispersión, en los valores medidos alrededor de la media, es pequeña
Por lo tanto, la precisión de las mediciones es alta.
La desviación estándar es siempre positiva y tiene las mismas unidades que los valores medidos.

Análisis Estadístico

DISPERSIÓN



Si la desviación estándar es pequeña, entonces la dispersión, en los valores medidos alrededor de la media, es pequeña
Por lo tanto, la precisión de las mediciones es alta.
La desviación estándar es siempre positiva y tiene las mismas unidades que los valores medidos.

Análisis Estadístico

Error de la Media

El error o incertidumbre del valor medio $\bar{x}$, es la **desviación estándar de la media** s_m, la cual se define como

$$s_m \equiv \frac{s}{\sqrt{n}} \; , \tag{4}$$

donde s es la desviación estándar y n es el número total de mediciones.

El resultado a ser reportado es entonces

$$\bar{x} \pm s_m \; . \tag{5}$$

Análisis Estadístico

Error de la Media

El error o incertidumbre del valor medio $\bar{x}$, es la **desviación estándar de la media** s_m, la cual se define como

$$s_m \equiv \frac{s}{\sqrt{n}} \ , \tag{4}$$

donde s es la desviación estándar y n es el número total de mediciones.

El resultado a ser reportado es entonces

$$\bar{x} \pm s_m \ . \tag{5}$$

Análisis Estadístico

Error absoluto

Se denomina al valor de la incertidumbre determinada (ecuación (5)), o también la precisión de los instrumentos.
Tiene las mismas dimensiones que la magnitud medida. En nuestro caso, si x es la magnitud en estudio, $\bar{x}$ es el mejor valor obtenido y s_m su incertidumbre absoluta.
El resultado es expresado adecuadamente por

$$x = \bar{x} \pm \delta x \tag{6}$$

Análisis Estadístico

Error absoluto

Se denomina al valor de la incertidumbre determinada (ecuación (5)), o también la precisión de los instrumentos. Tiene las mismas dimensiones que la magnitud medida. En nuestro caso, si x es la magnitud en estudio, $\bar{x}$ es el mejor valor obtenido y s_m su incertidumbre absoluta.

El resultado es expresado adecuadamente por

$$x = \bar{x} \pm \delta x \tag{6}$$

Análisis Estadístico

Error absoluto

Se denomina al valor de la incertidumbre determinada (ecuación (5)), o también la precisión de los instrumentos. Tiene las mismas dimensiones que la magnitud medida. En nuestro caso, si x es la magnitud en estudio, $\bar{x}$ es el mejor valor obtenido y s_m su incertidumbre absoluta.
El resultado es expresado adecuadamente por

$$x = \bar{x} \pm \delta x \tag{6}$$

Análisis Estadístico

Error relativo

Se define como el cociente entre el error absoluto estimado y el valor medido (o el valor medio de las medidas en caso de muchas medidas).

Se expresa habitualmente como porcentaje (%),

$$\varepsilon = \frac{\delta x}{\bar{x}} \times 100 \tag{7}$$

y se escribirá en la forma:

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon(\%)$$

Análisis Estadístico

Error relativo

Se define como el cociente entre el error absoluto estimado y el valor medido (o el valor medio de las medidas en caso de muchas medidas).
Se expresa habitualmente como porcentaje (%),

$$\varepsilon = \frac{\delta x}{\bar{x}} \times 100 \tag{7}$$

y se escribirá en la forma:

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon(\,\%)$$

Análisis Estadístico

Error relativo

Se define como el cociente entre el error absoluto estimado y el valor medido (o el valor medio de las medidas en caso de muchas medidas).
Se expresa habitualmente como porcentaje (%),

$$\varepsilon = \frac{\delta x}{\bar{x}} \times 100 \tag{7}$$

y se escribirá en la forma:

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon(\,\%)$$

Criterio para rechazar datos

Nunca deben rechazarse datos sin una razón justificada. Un dato que no se ajusta a una teoría dada, puede haber sido obtenido cometiendo algún error.
Además, los datos pueden no ajustarse a una teoría debido a que no es la adecuada. Esta es una forma en la cuál un fenómeno nuevo puede ser descubierto.

Criterio para rechazar datos

Si algún dato debe rechazarse, del total de datos, el criterio a ser aplicado puede ser el de Chauvenet, que es útil se tienen por lo menos 10 puntos, o se conoce algo acerca de la distribución original.
Pero solo debe ser aplicado una sola vez. *Solo un dato* puede ser rechazado por este método. Si hay más datos sospechosos, debe determinarse la razón.

Criterio para rechazar datos

El criterio de Chauvenet (procedimiento)

- Se determinan la media aritmética $\bar{x}$ y la desviación estándar s de los datos.
- A partir de esto se determina la razón de las desviaciones individuales a la desviación estándar, definida como:

$$\frac{d_i}{s} = \frac{\mid x_i - \bar{x} \mid}{s} \tag{8}$$

- La relación: d_{max}/s es comparada con los valores críticos de la *razón limitante*,

$$\frac{d_c}{\sigma},$$

Criterio para rechazar datos

El criterio de Chauvenet (procedimiento)

- Se determinan la media aritmética $\bar{x}$ y la desviación estándar s de los datos.
- A partir de esto se determina la razón de las desviaciones individuales a la desviación estándar, definida como:

$$\frac{d_i}{s} = \frac{\mid x_i - \bar{x} \mid}{s} \qquad (8)$$

- La relación: d_{max}/s es comparada con los valores críticos de la *razón limitante*,

$$\frac{d_c}{\sigma},$$

Criterio para rechazar datos

El criterio de Chauvenet (procedimiento)

- Se determinan la media aritmética $\bar{x}$ y la desviación estándar s de los datos.
- A partir de esto se determina la razón de las desviaciones individuales a la desviación estándar, definida como:

$$\frac{d_i}{s} = \frac{\mid x_i - \bar{x} \mid}{s} \tag{8}$$

- La relación: d_{max}/s es comparada con los valores críticos de la *razón limitante*,

$$\frac{d_c}{\sigma} \ ,$$

Criterio para rechazar datos

El criterio de Chauvenet

1. Si
$$\frac{d_{max}}{s} \leq \frac{d_c}{\sigma} ,$$
entonces el valor extremo no se rechaza.
2. Si
$$\frac{d_{max}}{s} > \frac{d_c}{\sigma} ,$$
entonces el valor extremo debe rechazarse y, de ser así, se regresa al paso inicial.

Criterio para rechazar datos

El criterio de Chauvenet

1. Si
$$\frac{d_{max}}{s} \leq \frac{d_c}{\sigma} \ ,$$
entonces el valor extremo no se rechaza.
2. Si
$$\frac{d_{max}}{s} > \frac{d_c}{\sigma} \ ,$$
entonces el valor extremo debe rechazarse y, de ser así, se regresa al paso inicial.

Criterio para rechazar datos

El criterio de Chauvenet

1. Si
$$\frac{d_{max}}{s} \leq \frac{d_c}{\sigma} \ ,$$
entonces el valor extremo no se rechaza.
2. Si
$$\frac{d_{max}}{s} > \frac{d_c}{\sigma} \ ,$$
entonces el valor extremo debe rechazarse y, de ser así, se regresa al paso inicial.

Criterio para rechazar datos

Desviaciones máximas

Nro. de lecturas n	razón limitante d_c/σ	Nro. de lecturas n	razón limitante d_c/σ
5	1.65	25	2.33
6	1.73	30	2.39
7	1.80	35	2.45
8	1.73	40	2.50
9	1.92	50	2.57
10	1.96	75	2.71
12	2.03	100	2.81
15	2.13	300	3.14
19	2.22	500	3.29
20	2.24	1000	3.48

Ejemplo

Para el siguiente grupo de datos, determinar (a) la media de la muestra, (b) su desviación estándar, (c) el error del valor medio (d) ¿debe rechazarse algun dato?.

15.0	19.0	19.0	28.0	18.0
24.0	11.0	20.0	23.0	19.0
20.0	13.0	29.0	23.0	14.0
17.0	22.0	22.0	33.0	30.0
27.0	17.0	18.0	20.0	24.0

Ejemplo

Solución:

(a) Utilizando la ecuación (2), obtenemos

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 21{,}0$$

(b) El valor de la desviación estándar lo obtenemos usando la ecuación (3)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} = 5{,}46$$

Ejemplo

Solución:

(a) Utilizando la ecuación (2), obtenemos

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 21{,}0$$

(b) El valor de la desviación estándar lo obtenemos usando la ecuación (3)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} = 5{,}46$$

Ejemplo

Solución:

(a) Utilizando la ecuación (2), obtenemos

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 21{,}0$$

(b) El valor de la desviación estándar lo obtenemos usando la ecuación (3)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} = 5{,}46$$

Ejemplo

Solución:

(c) El error de la media se obtiene de la ecuación (4)

$$s_m = \frac{5{,}46}{\sqrt{25}} = 1{,}09$$

Por tanto, la forma correcta de expresar el resultado será a partir de la ecuación (5)

$$\bar{x} \pm s_m = 21{,}0 \pm 1{,}1$$

(d)

$$\frac{d_i}{s} = \frac{|\ 33 - 21\ |}{5{,}46} = 2{,}2$$

Ejemplo

Solución:

(c) El error de la media se obtiene de la ecuación (4)

$$s_m = \frac{5{,}46}{\sqrt{25}} = 1{,}09$$

Por tanto, la forma correcta de expresar el resultado será a partir de la ecuación (5)

$$\bar{x} \pm s_m = 21{,}0 \pm 1{,}1$$

(d)

$$\frac{d_i}{s} = \frac{\mid 33 - 21 \mid}{5{,}46} = 2{,}2$$

Ejemplo

Solución:

(c) El error de la media se obtiene de la ecuación (4)

$$s_m = \frac{5{,}46}{\sqrt{25}} = 1{,}09$$

Por tanto, la forma correcta de expresar el resultado será a partir de la ecuación (5)

$$\bar{x} \pm s_m = 21{,}0 \pm 1{,}1$$

(d)

$$\frac{d_i}{s} = \frac{\mid 33 - 21 \mid}{5{,}46} = 2{,}2$$

Ejemplo

Solución:

(c) El error de la media se obtiene de la ecuación (4)

$$s_m = \frac{5{,}46}{\sqrt{25}} = 1{,}09$$

Por tanto, la forma correcta de expresar el resultado será a partir de la ecuación (5)

$$\bar{x} \pm s_m = 21{,}0 \pm 1{,}1$$

(d)

$$\frac{d_i}{s} = \frac{\mid 33 - 21 \mid}{5{,}46} = 2{,}2$$

Medida única de una magnitud

En este caso consideramos que el error absoluto coincide con el valor de la sensibilidad del aparato utilizado para realizar la medida. El resultado de una medida es de la forma:

$$x \pm \delta x \;\; (\delta x \; = \; \textit{sensibilidad del instrumento})$$

Errores en medidas indirectas

La propagación de errores es un método para determinar el error, en un valor, calculado a partir de dos o mas valores medidos, con sus errores (estimados) conocidos.
Este método será discutido separadamente para la adición y resta de mediciones y para la multiplicación y división de mediciones.

Errores en medidas indirectas

La propagación de errores es un método para determinar el error, en un valor, calculado a partir de dos o mas valores medidos, con sus errores (estimados) conocidos.
Este método será discutido separadamente para la adición y resta de mediciones y para la multiplicación y división de mediciones.

Errores en medidas indirectas

La propagación de errores es un método para determinar el error, en un valor, calculado a partir de dos o mas valores medidos, con sus errores (estimados) conocidos.
Este método será discutido separadamente para la adición y resta de mediciones y para la multiplicación y división de mediciones.

Propagación de Errores

La medida indirecta de una magnitud se realiza aplicando una fórmula a un conjunto de medidas directas, relacionadas a la magnitud problema.
Mediante dicha fórmula se obtiene también el error de la medida.
Supongamos que la magnitud w es función de otras magnitudes físicas, estando relacionada con ellas por $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots)$.

Propagación de Errores

La medida indirecta de una magnitud se realiza aplicando una fórmula a un conjunto de medidas directas, relacionadas a la magnitud problema.
Mediante dicha fórmula se obtiene también el error de la medida.
Supongamos que la magnitud w es función de otras magnitudes físicas, estando relacionada con ellas por $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, ...)$.

Propagación de Errores

Siendo x, y, y z valores medidos, con sus respectivos errores (estimados): δx, δy, y δz.
Los resultados de las tres mediciones son reportados en la forma

$$x \pm \delta x \quad y \pm \delta y \quad z \pm \delta z \tag{9}$$

El error estimado puede, incluso, ser la división mas pequeña del instrumento del medida.

Propagación de Errores

Siendo x, y, y z valores medidos, con sus respectivos errores (estimados): δx, δy, y δz.
Los resultados de las tres mediciones son reportados en la forma

$$x \pm \delta x \quad y \pm \delta y \quad z \pm \delta z \tag{9}$$

El error estimado puede, incluso, ser la división mas pequeña del instrumento del medida.

Propagación de Errores

Asumimos que los errores δx, δy, y δz son errores aleatorios, a partir de la teoría estadística se demuestra que δw está dada por::

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right)^2} \qquad (10)$$

Esta ecuación es la formula básica para la propagación de errores.

Adición y Sustracción de Mediciones

ejemplo 1

Supongamos que

$$w = ax + by + cz \tag{11}$$

donde a, b, y c son constantes positivas o negativas, y que x, y, y z son valores medidos con los errores estimados conocidos δx, δy, y δz

Obtenemos δw usando la ecuación (10)

$$\delta w = \sqrt{(a\delta x)^2 + (b\delta y)^2 + (c\delta z)^2}$$

Adición y Sustracción de Mediciones

ejemplo 1

Supongamos que

$$w = ax + by + cz \tag{11}$$

donde a, b, y c son constantes positivas o negativas, y que x, y, y z son valores medidos con los errores estimados conocidos δx, δy, y δz

Obtenemos δw usando la ecuación (10)

$$\delta w = \sqrt{(a\delta x)^2 + (b\delta y)^2 + (c\delta z)^2}$$

Multiplicación y División de Mediciones

ejemplo 2

Supongamos que

$$w = xyz \tag{12}$$

Para encontrar δw, aplicamos la formula básica para la propagación de errores, la ecuación (10):

Haciendo las operaciones correspondientes se llega a,

$$\delta w = w\sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2}$$

Debemos notar que cada término de la forma $\delta q/q$ es una fracción adimensional.

Multiplicación y División de Mediciones

ejemplo 2

Supongamos que

$$w = xyz \tag{12}$$

Para encontrar δw, aplicamos la formula básica para la propagación de errores, la ecuación (10):

Haciendo las operaciones correspondientes se llega a,

$$\delta w = w\sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2}$$

Debemos notar que cada término de la forma $\delta q/q$ es una fracción adimensional.

Resumen

Introducción

El propósito de muchos experimentos es encontrar la relación entre las variables medidas. Una buena forma de hacerlo es dibujar un gráfico de los datos y entonces analizar dicho gráfico. Es recomendable seguir las siguientes instrucciones al dibujar sus datos:

- En lo posible, use una pagina completa, pues un gráfico comprimido reducirá la precisión de los análisis.
- Poner un título conciso.
- La variable independiente debe ser graficada en el eje horizontal (x), y la variable dependiente en el eje vertical (y).

Introducción

El propósito de muchos experimentos es encontrar la relación entre las variables medidas. Una buena forma de hacerlo es dibujar un gráfico de los datos y entonces analizar dicho gráfico. Es recomendable seguir las siguientes instrucciones al dibujar sus datos:

- En lo posible, use una pagina completa, pues un gráfico comprimido reducirá la precisión de los análisis.
- Poner un título conciso.
- La variable independiente debe ser graficada en el eje horizontal (x), y la variable dependiente en el eje vertical (y).

Introducción

El propósito de muchos experimentos es encontrar la relación entre las variables medidas. Una buena forma de hacerlo es dibujar un gráfico de los datos y entonces analizar dicho gráfico. Es recomendable seguir las siguientes instrucciones al dibujar sus datos:

- En lo posible, use una pagina completa, pues un gráfico comprimido reducirá la precisión de los análisis.
- Poner un título conciso.
- La variable independiente debe ser graficada en el eje horizontal (x), y la variable dependiente en el eje vertical (y).

Introducción

El propósito de muchos experimentos es encontrar la relación entre las variables medidas. Una buena forma de hacerlo es dibujar un gráfico de los datos y entonces analizar dicho gráfico. Es recomendable seguir las siguientes instrucciones al dibujar sus datos:

- En lo posible, use una pagina completa, pues un gráfico comprimido reducirá la precisión de los análisis.
- Poner un título conciso.
- La variable independiente debe ser graficada en el eje horizontal (x), y la variable dependiente en el eje vertical (y).

Introducción

El propósito de muchos experimentos es encontrar la relación entre las variables medidas. Una buena forma de hacerlo es dibujar un gráfico de los datos y entonces analizar dicho gráfico. Es recomendable seguir las siguientes instrucciones al dibujar sus datos:

- En lo posible, use una pagina completa, pues un gráfico comprimido reducirá la precisión de los análisis.
- Poner un título conciso.
- La variable independiente debe ser graficada en el eje horizontal (x), y la variable dependiente en el eje vertical (y).

Introducción

El propósito de muchos experimentos es encontrar la relación entre las variables medidas. Una buena forma de hacerlo es dibujar un gráfico de los datos y entonces analizar dicho gráfico. Es recomendable seguir las siguientes instrucciones al dibujar sus datos:

- En lo posible, use una pagina completa, pues un gráfico comprimido reducirá la precisión de los análisis.
- Poner un título conciso.
- La variable independiente debe ser graficada en el eje horizontal (x), y la variable dependiente en el eje vertical (y).

Introducción

- Poner títulos adecuados en cada uno de los ejes.
- Colocar escala adecuada para cada eje y empezar cada eje en cero (si fuera posible.)
- Use barras de error para indicar los errores en las medidas (como se muestran en las figuras de éste capítulo.)
- Trazar una curva a través de los puntos de datos. Si los errores son aleatorios, entonces alrededor de una tercera parte de los puntos estarán fuera de los rangos de los errores de la mejor curva.

Introducción

- Poner títulos adecuados en cada uno de los ejes.
- Colocar escala adecuada para cada eje y empezar cada eje en cero (si fuera posible.)
- Use barras de error para indicar los errores en las medidas (como se muestran en las figuras de éste capítulo.)
- Trazar una curva a través de los puntos de datos. Si los errores son aleatorios, entonces alrededor de una tercera parte de los puntos estarán fuera de los rangos de los errores de la mejor curva.

Introducción

- Poner títulos adecuados en cada uno de los ejes.
- Colocar escala adecuada para cada eje y empezar cada eje en cero (si fuera posible.)
- Use barras de error para indicar los errores en las medidas (como se muestran en las figuras de éste capítulo.)
- Trazar una curva a través de los puntos de datos. Si los errores son aleatorios, entonces alrededor de una tercera parte de los puntos estarán fuera de los rangos de los errores de la mejor curva.

Introducción

- Poner títulos adecuados en cada uno de los ejes.
- Colocar escala adecuada para cada eje y empezar cada eje en cero (si fuera posible.)
- Use barras de error para indicar los errores en las medidas (como se muestran en las figuras de éste capítulo.)
- Trazar una curva a través de los puntos de datos. Si los errores son aleatorios, entonces alrededor de una tercera parte de los puntos estarán fuera de los rangos de los errores de la mejor curva.

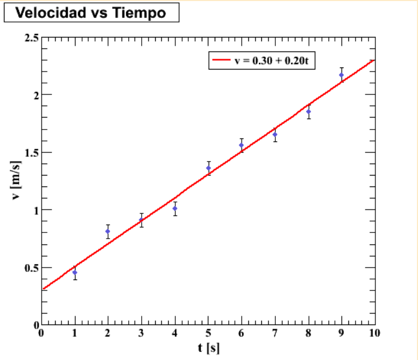
Introducción

- Poner títulos adecuados en cada uno de los ejes.
- Colocar escala adecuada para cada eje y empezar cada eje en cero (si fuera posible.)
- Use barras de error para indicar los errores en las medidas (como se muestran en las figuras de éste capítulo.)
- Trazar una curva a través de los puntos de datos. Si los errores son aleatorios, entonces alrededor de una tercera parte de los puntos estarán fuera de los rangos de los errores de la mejor curva.

Función lineal

Estudiemos la velocidad de un objeto (variable dependiente) como una función del tiempo (variable independiente).

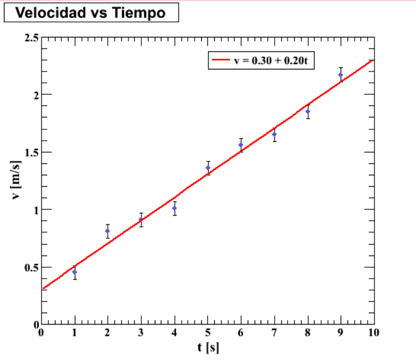
Tiempo	Velocidad
1	0.45±0.06
2	0.81±0.06
3	0.91±0.06
4	1.01±0.06
5	1.36±0.06
6	1.56±0.06
7	1.65±0.06
8	1.85±0.06
9	2.17±0.06



Función lineal

Estudiemos la velocidad de un objeto (variable dependiente) como una función del tiempo (variable independiente).

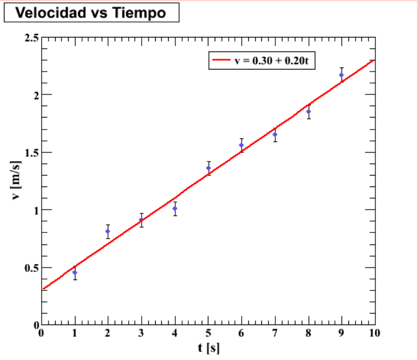
Tiempo	Velocidad
1	0.45±0.06
2	0.81±0.06
3	0.91±0.06
4	1.01±0.06
5	1.36±0.06
6	1.56±0.06
7	1.65±0.06
8	1.85±0.06
9	2.17±0.06



Función lineal

Estudiemos la velocidad de un objeto (variable dependiente) como una función del tiempo (variable independiente).

Tiempo	Velocidad
1	0.45±0.06
2	0.81±0.06
3	0.91±0.06
4	1.01±0.06
5	1.36±0.06
6	1.56±0.06
7	1.65±0.06
8	1.85±0.06
9	2.17±0.06



Función lineal

Solo para este ejemplo usaremos

$$y = b + mx$$

Si $v = y$, $x = t$, $a = m$, y $v_0 = b$; entonces,

$$v = v_0 + at$$

Esta es la ecuación para la línea dibujada a través de los datos; v_0 es la velocidad en $t = 0$ y a, la pendiente de la recta y representa la aceleración del objeto.

Función lineal

Solo para este ejemplo usaremos

$$y = b + mx$$

Si $v = y$, $x = t$, $a = m$, y $v_0 = b$; entonces,

$$v = v_0 + at$$

Esta es la ecuación para la línea dibujada a través de los datos; v_0 es la velocidad en $t = 0$ y a, la pendiente de la recta y representa la aceleración del objeto.

Función lineal

Solo para este ejemplo usaremos

$$y = b + mx$$

Si $v = y$, $x = t$, $a = m$, y $v_0 = b$; entonces,

$$v = v_0 + at$$

Esta es la ecuación para la línea dibujada a través de los datos; v_0 es la velocidad en $t = 0$ y a, la pendiente de la recta y representa la aceleración del objeto.

Función lineal

A partir del gráfico vemos que $v_0 = 0{,}32\ m/s$.

Para determinar la aceleración, a, seleccionamos dos puntos (bastante separados), sobre la línea.
Entonces,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2{,}35 - 0{,}40\ (m/s)}{10{,}0 - 0{,}5\ (s)} = 0{,}20\ m/s^2$$

Entonces, la ecuación de la recta es

$$v = 0{,}32 + 0{,}20t \quad (m/s)$$

Función lineal

A partir del gráfico vemos que $v_0 = 0{,}32\ m/s$.

Para determinar la aceleración, a, seleccionamos dos puntos (bastante separados), sobre la línea.
Entonces,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2{,}35 - 0{,}40\ (m/s)}{10{,}0 - 0{,}5\ (s)} = 0{,}20\ m/s^2$$

Entonces, la ecuación de la recta es

$$v = 0{,}32 + 0{,}20t \qquad (m/s)$$

Función lineal

A partir del gráfico vemos que $v_0 = 0{,}32\ m/s$.

Para determinar la aceleración, a, seleccionamos dos puntos (bastante separados), sobre la línea.
Entonces,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2{,}35 - 0{,}40\ (m/s)}{10{,}0 - 0{,}5\ (s)} = 0{,}20\ m/s^2$$

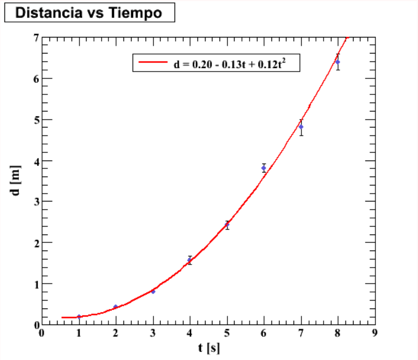
Entonces, la ecuación de la recta es

$$v = 0{,}32 + 0{,}20t \quad (m/s)$$

Función cuadrática

Estudiemos la distancia recorrida por un objeto como una función del tiempo.

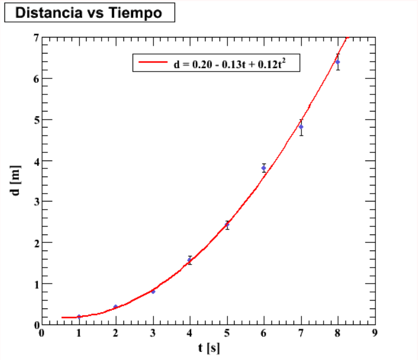
Tiempo	Distancia
1	0.20±0.05
2	0.43±0.05
3	0.81±0.05
4	1.57±0.10
5	2.43±0.10
6	3.81±0.10
7	4.80±0.20
8	6.39±0.20



Función cuadrática

Estudiemos la distancia recorrida por un objeto como una función del tiempo.

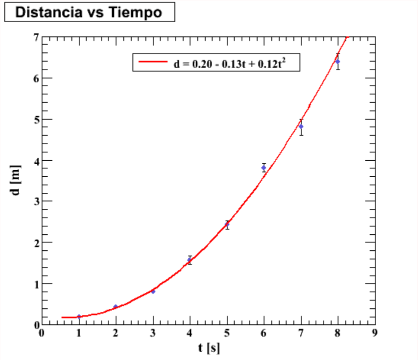
Tiempo	Distancia
1	0.20±0.05
2	0.43±0.05
3	0.81±0.05
4	1.57±0.10
5	2.43±0.10
6	3.81±0.10
7	4.80±0.20
8	6.39±0.20



Función cuadrática

Estudiemos la distancia recorrida por un objeto como una función del tiempo.

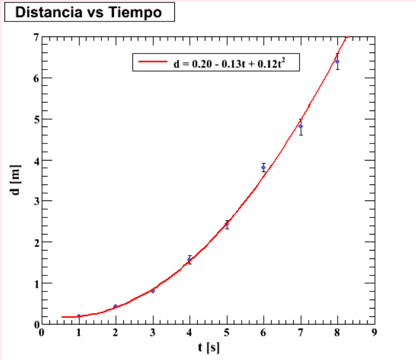
Tiempo	Distancia
1	0.20±0.05
2	0.43±0.05
3	0.81±0.05
4	1.57±0.10
5	2.43±0.10
6	3.81±0.10
7	4.80±0.20
8	6.39±0.20



Función cuadrática

Estudiemos la distancia recorrida por un objeto como una función del tiempo.

Tiempo	Distancia
1	0.20±0.05
2	0.43±0.05
3	0.81±0.05
4	1.57±0.10
5	2.43±0.10
6	3.81±0.10
7	4.80±0.20
8	6.39±0.20



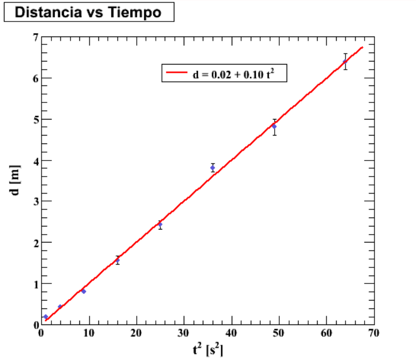
Función cuadrática

Supongamos que conocemos la relación teórica entre d y t, la cual es

$$d = \frac{1}{2}at^2 \quad (m)$$

donde a es la aceleración del objeto.

Si los datos siguen la anterior relación teórica, entonces la gráfica de d versus t^2 debe dar como resultado una línea recta.



$$d = d_0 + mt^2 \quad (m)$$

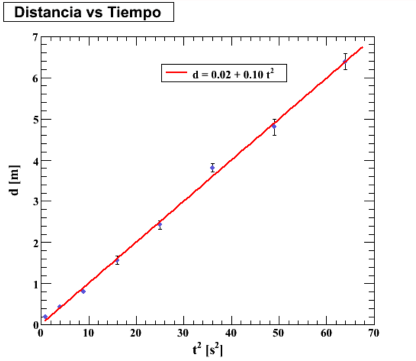
Función cuadrática

Supongamos que conocemos la relación teórica entre d y t, la cual es

$$d = \frac{1}{2}at^2 \quad (m)$$

donde a es la aceleración del objeto.

Si los datos siguen la anterior relación teórica, entonces la gráfica de d versus t^2 debe dar como resultado una línea recta.



$$d = d_0 + mt^2 \quad (m)$$

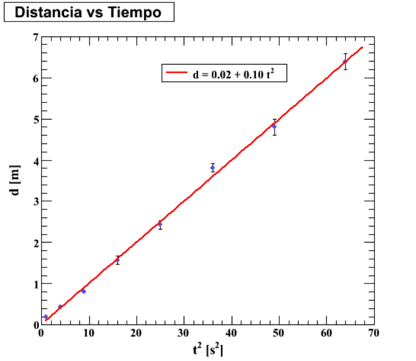
Función cuadrática

Supongamos que conocemos la relación teórica entre d y t, la cual es

$$d = \frac{1}{2}at^2 \quad (m)$$

donde a es la aceleración del objeto.

Si los datos siguen la anterior relación teórica, entonces la gráfica de d versus t^2 debe dar como resultado una línea recta.



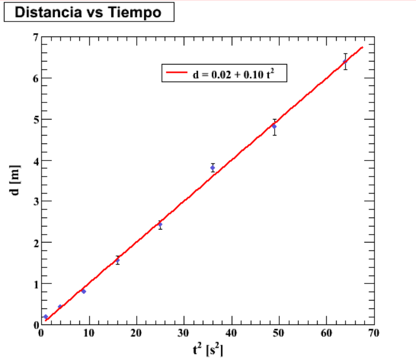
$$d = d_0 + mt^2 \quad (m)$$

Función cuadrática

Supongamos que conocemos la relación teórica entre d y t, la cual es

$$d = \frac{1}{2}at^2 \quad (m)$$

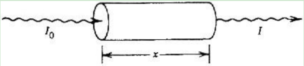
donde a es la aceleración del objeto.
Si los datos siguen la anterior relación teórica, entonces la gráfica de d versus t^2 debe dar como resultado una línea recta.



$$d = d_0 + mt^2 \quad (m)$$

Función exponencial

En ciertos casos, la relación entre las variables no es lineal. Por ejemplo, la intensidad de luz I transmitida a través de una muestra de espesor x,



I_0 es la intensidad incidente de la luz.

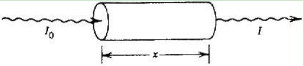
La ley de Lambert establece la relación entre la variable dependiente I y la variable independiente x como:

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

La constante, μ, se conoce como coeficiente de absorción.

Función exponencial

En ciertos casos, la relación entre las variables no es lineal. Por ejemplo, la intensidad de luz I transmitida a través de una muestra de espesor x,

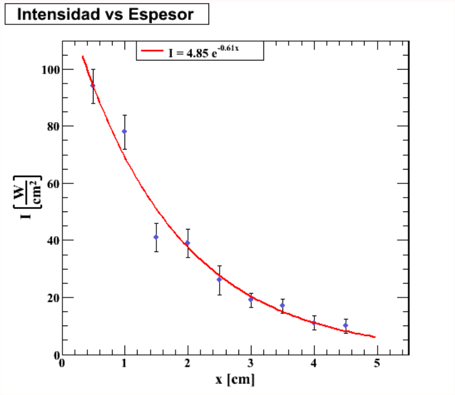


I_0 es la intensidad incidente de la luz.
La ley de Lambert establece la relación entre la variable dependiente I y la variable independiente x como:

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

La constante, μ, se conoce como coeficiente de absorción.

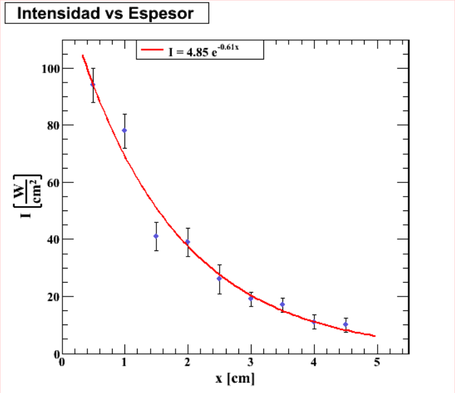
Función exponencial



I es medida como una función de x.

De la curva dibujada no podemos determinar una relación entre I y x (no podemos decir que los datos obedecen la ley de Lambert).

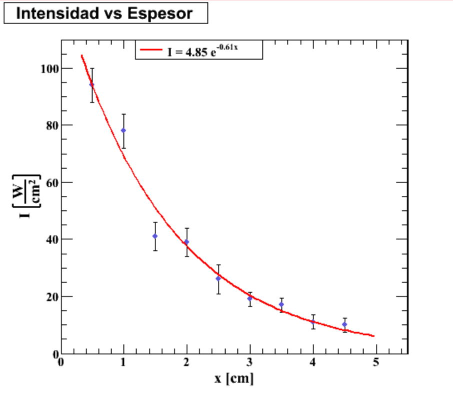
Función exponencial



I es medida como una función de x.

De la curva dibujada no podemos determinar una relación entre I y x (no podemos decir que los datos obedecen la ley de Lambert).

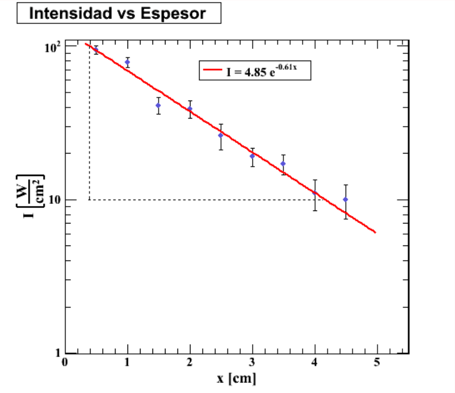
Función exponencial



I es medida como una función de x.

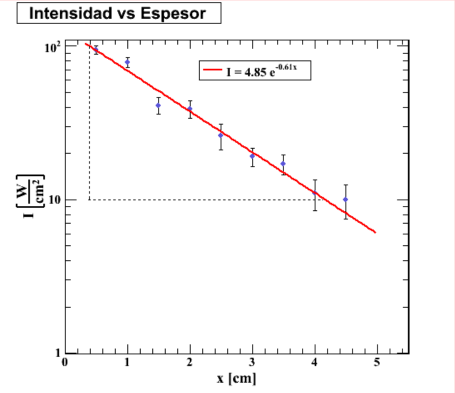
De la curva dibujada no podemos determinar una relación entre I y x (no podemos decir que los datos obedecen la ley de Lambert).

Función exponencial



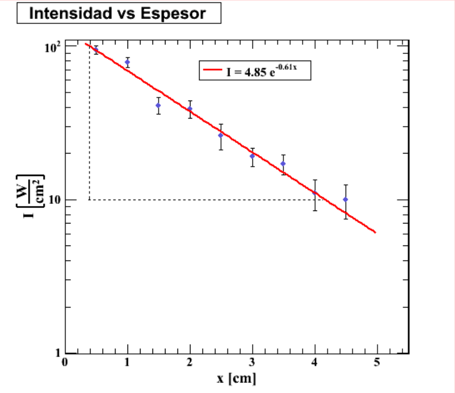
Es mejor graficar los datos en escala semilogarítmica.
En esta escala, se grafican "automáticamente" los logaritmos de los datos de I, y los del eje x en escala lineal.

Función exponencial



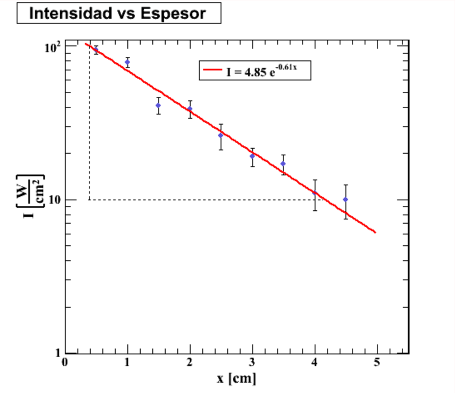
Es mejor graficar los datos en escala semilogarítmica.
En esta escala, se grafican "automáticamente" los logaritmos de los datos de I, y los del eje x en escala lineal.

Función exponencial



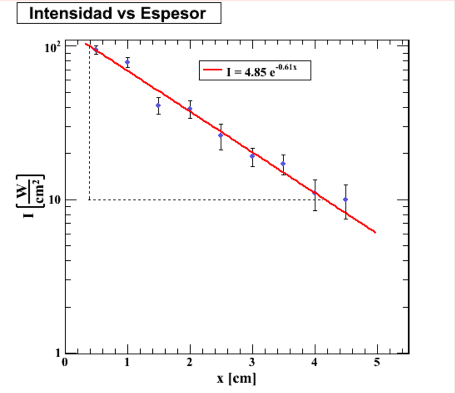
Es mejor graficar los datos en escala semilogarítmica.
En esta escala, se grafican "automáticamente" los logaritmos de los datos de I, y los del eje x en escala lineal.

Función exponencial



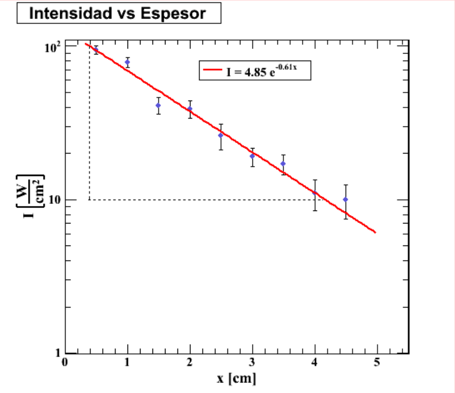
La curva dibujada a través de los datos es una línea recta con una pendiente negativa. La intensidad en el punto en el cual la recta intercepta al eje y, es I_0.

Función exponencial



La curva dibujada a través de los datos es una línea recta con una pendiente negativa. La intensidad en el punto en el cual la recta intercepta al eje y, es I_0.

Función exponencial



La curva dibujada a través de los datos es una línea recta con una pendiente negativa. La intensidad en el punto en el cual la recta intercepta al eje y, es I_0.

Función exponencial

Otra forma es linerizar la ecuación de la La ley de Lambert:

$$\ln I = \ln(I_0 e^{-\mu x}) = \ln I_0 - \mu x$$

Entonces, la ecuación que se obtiene es de una recta de la forma

$$y = a + bx \ ,$$

con $y = ln\ I$, $b = \mu$, y $a = ln\ I_0$.

Función exponencial

Otra forma es linerizar la ecuación de la La ley de Lambert:

$$\ln I = \ln(I_0 e^{-\mu x}) = \ln I_0 - \mu x$$

Entonces, la ecuación que se obtiene es de una recta de la forma

$$y = a + bx \ ,$$

con $y = ln\ I$, $b = \mu$, y $a = ln\ I_0$.

Función exponencial

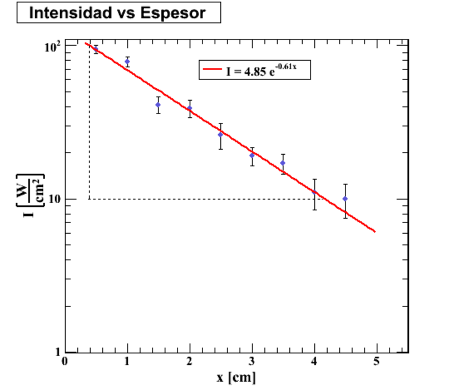
Entonces, podemos graficar $ln\ I$ en el eje vertical y x en el eje horizontal.
La curva será una línea recta con pendiente $b = \mu$ y la intersección vertical $ln\ I_0$, y el análisis es similar al de una relación lineal.

Función exponencial

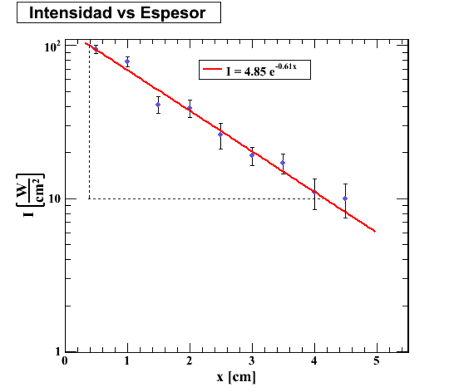
Entonces, podemos graficar $ln\ I$ en el eje vertical y x en el eje horizontal.
La curva será una línea recta con pendiente $b{=}\mu$ y la intersección vertical $ln\ I_0$, y el análisis es similar al de una relación lineal.

Función exponencial

Entonces, podemos graficar $ln\ I$ en el eje vertical y x en el eje horizontal.
La curva será una línea recta con pendiente $b=\mu$ y la intersección vertical $ln\ I_0$, y el análisis es similar al de una relación lineal.



$$b = \mu = \frac{\Delta(\ln I)}{\Delta x} = \frac{\ln 10 - \ln 100}{(3{,}80 - 0{,}40)\ cm} = -0{,}678\ cm^{-1}$$



$$b = \mu = \frac{\Delta(\ln I)}{\Delta x} = \frac{\ln 10 - \ln 100}{(3{,}80 - 0{,}40)\ cm} = -0{,}678\ cm^{-1}$$

Función de potencias

La escala log-log se usa para obtener un gráfico lineal cuando x e y, satisfacen una relación de *ley de potencias*,

$$y = cx^n \tag{13}$$

con c y n constantes.

Por ejemplo, el semi-eje mayor R de la órbita de un planeta está relacionada a su periodo T (tiempo para una revolución alrededor del Sol), a través de,

$$R^3 = KT^2$$
$$R = K^{1/3}T^{2/3} \tag{14}$$

K es una constante y, R ya no está relacionada linealmente a T.

Función de potencias

La escala log-log se usa para obtener un gráfico lineal cuando x e y, satisfacen una relación de *ley de potencias*,

$$y = cx^n \tag{13}$$

con c y n constantes.

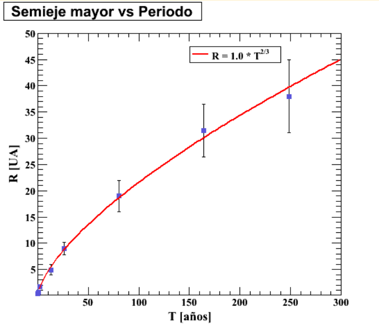
Por ejemplo, el semi-eje mayor R de la órbita de un planeta está relacionada a su periodo T (tiempo para una revolución alrededor del Sol), a través de,

$$\begin{aligned} R^3 &= KT^2 \\ R &= K^{1/3}T^{2/3} \end{aligned} \tag{14}$$

K es una constante y, R ya no está relacionada linealmente a T.

Función de potencias

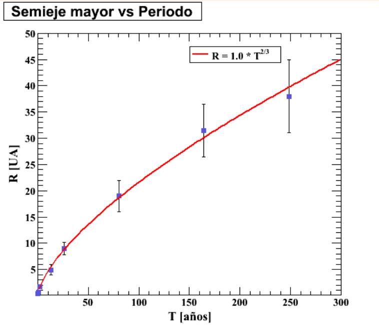
Un ejemplo de graficar los datos en escala lineal es el siguiente:



Una UA es el semieje mayor de la órbita de la Tierra.

Función de potencias

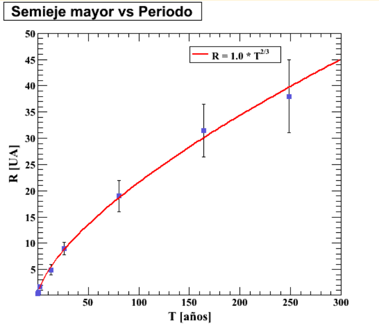
Un ejemplo de graficar los datos en escala lineal es el siguiente:



Una UA es el semieje mayor de la órbita de la Tierra.

Función de potencias

Un ejemplo de graficar los datos en escala lineal es el siguiente:



Una UA es el semieje mayor de la órbita de la Tierra.

Función de potencias

Podemos linearizar el gráfico sacando logaritmos a ambos lados de la ecuación (14)

$$\begin{aligned}\log R &= \log(K^{1/3}T^{2/3}) \\ &= \log T^{2/3} + \log K^{1/3} \\ &= 2/3 \log T + \log K^{1/3} \ , \end{aligned} \tag{15}$$

con $y = \log R$, $x = \log T$, $m = 2/3$, y $b = \log K^{1/3}$.
Entonces, graficando $\log R$ versus $\log T$ obtenemos una línea recta.

Función de potencias

Podemos linearizar el gráfico sacando logaritmos a ambos lados de la ecuación (14)

$$\begin{aligned} \log R &= \log(K^{1/3}T^{2/3}) \\ &= \log T^{2/3} + \log K^{1/3} \\ &= 2/3 \log T + \log K^{1/3} \ , \end{aligned} \tag{15}$$

con $y = \log R$, $x = \log T$, $m = 2/3$, y $b = \log K^{1/3}$.

Entonces, graficando $\log R$ versus $\log T$ obtenemos una línea recta.

Función de potencias

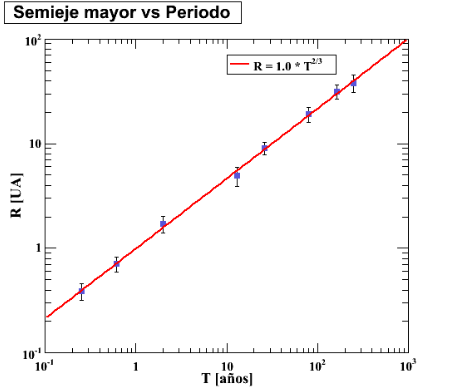
Podemos linearizar el gráfico sacando logaritmos a ambos lados de la ecuación (14)

$$\begin{aligned}\log R &= \log(K^{1/3}T^{2/3}) \\ &= \log T^{2/3} + \log K^{1/3} \\ &= 2/3 \log T + \log K^{1/3}\ , \end{aligned} \tag{15}$$

con $y = \log R$, $x = \log T$, $m = 2/3$, y $b = \log K^{1/3}$.
Entonces, graficando $\log R$ versus $\log T$ obtenemos una línea recta.

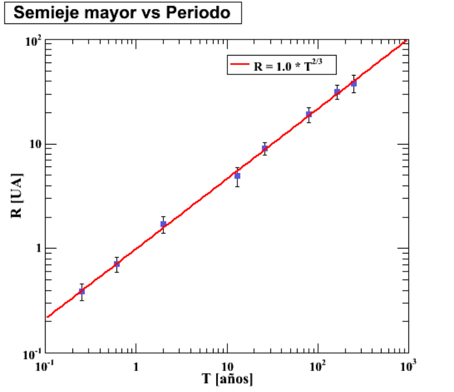
Función de potencias

En escala de gráficas log-log se grafican automáticamente los logaritmos de los datos obtenidos.

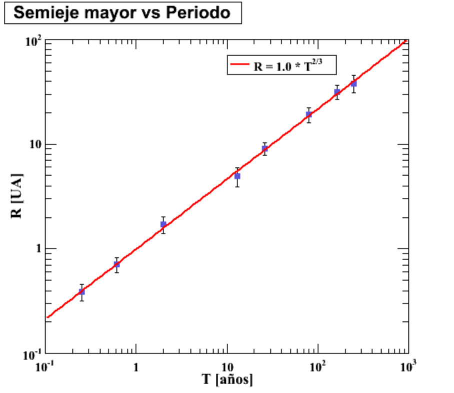


Función de potencias

En escala de gráficas log-log se grafican automáticamente los logaritmos de los datos obtenidos.

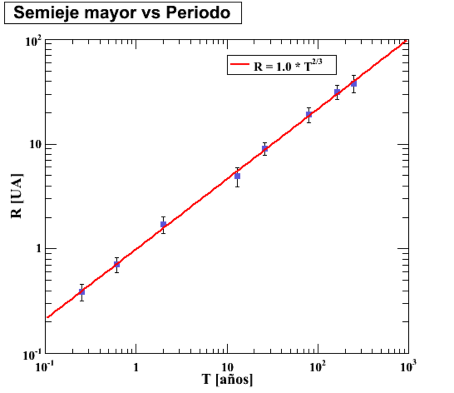


Función de potencias



$$n = \frac{\Delta(\log R)}{\Delta(\log T)} = \frac{\log 10^2 - \log 10^0}{\log 10^3 - \log 10^0} = \frac{2}{3}$$

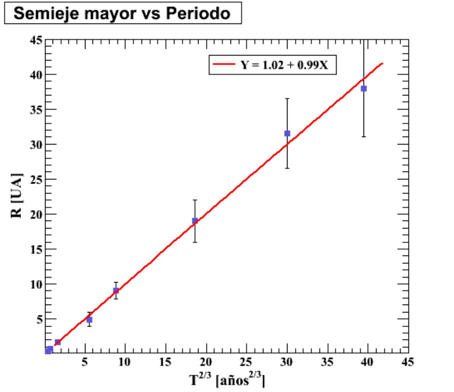
Función de potencias



$$n = \frac{\Delta(\log R)}{\Delta(\log T)} = \frac{\log 10^2 - \log 10^0}{\log 10^3 - \log 10^0} = \frac{2}{3}$$

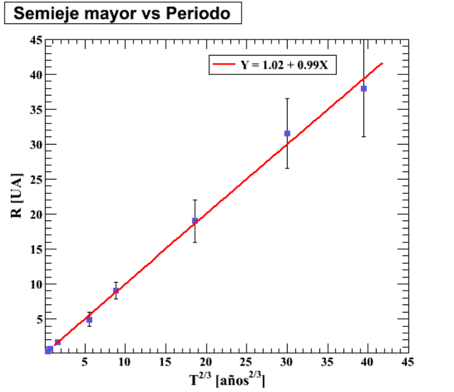
Función de potencias

Otra forma para obtener un gráfico de lineal recta es dibujar y versus x^n. En el presente ejemplo R versus $T^{2/3}$, en escala lineal.



Función de potencias

Otra forma para obtener un gráfico de lineal recta es dibujar y versus x^n. En el presente ejemplo R versus $T^{2/3}$, en escala lineal.



Resumen

Introducción

Frecuentemente, los datos (x_i, y_i), directamente medibles, están relacionados a través de una función teórica, $y = f(x)$, que involucra algunas constantes (desconocidas), a ser evaluadas de los datos observados.
El problema es encontrar la *mejor* función lineal, para este conjunto de datos.

Introducción

Se puede resolver "facilmente" el problema graficando los puntos de datos y dibujar una curva, a través de ellos a "ojo" ¿...?.
En realidad, debemos encontrar la ecuación para la "mejor" curva que ajusta este conjunto de datos. Si los puntos están linealmente relacionados, entonces el proceso es llamado **regresión lineal**.

Introducción

Se puede resolver "facilmente" el problema graficando los puntos de datos y dibujar una curva, a través de ellos a "ojo" ¿...?.
En realidad, debemos encontrar la ecuación para la "mejor" curva que ajusta este conjunto de datos. Si los puntos están linealmente relacionados, entonces el proceso es llamado **regresión lineal**.

Introducción

Se puede resolver "facilmente" el problema graficando los puntos de datos y dibujar una curva, a través de ellos a "ojo" ¿...?.
En realidad, debemos encontrar la ecuación para la "mejor" curva que ajusta este conjunto de datos. Si los puntos están linealmente relacionados, entonces el proceso es llamado **regresión lineal**.

Introducción

Puede, también, ocurrir que los puntos no estén relacionados linealmente.
El proceso de obtener la ecuación, para la mejor curva, es llamado **regresión no lineal**.
La técnica usada para determinar la curva que mejor se ajusta es conocida como el **método de mínimos cuadrados**, que proporciona una forma más confiable de obtener la mejor relación funcional.

Introducción

Puede, también, ocurrir que los puntos no estén relacionados linealmente.
El proceso de obtener la ecuación, para la mejor curva, es llamado **regresión no lineal**.
La técnica usada para determinar la curva que mejor se ajusta es conocida como el **método de mínimos cuadrados**, que proporciona una forma más confiable de obtener la mejor relación funcional.

Introducción

El ejemplo más familiar y simple, por supuesto, es cuando y está relacionada a x por la ecuación de una línea recta:

$$y = a + bx \ ,$$

a es una constante que representa la intercepción del eje y, y b la pendiente.

Introducción

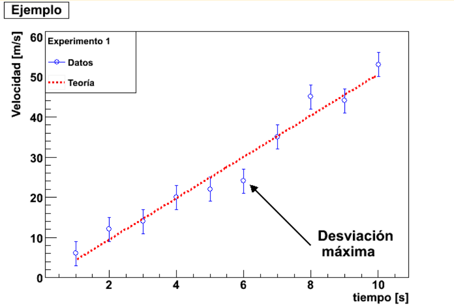
El ejemplo más familiar y simple, por supuesto, es cuando y está relacionada a x por la ecuación de una línea recta:

$$y = a + bx \ ,$$

a es una constante que representa la intercepción del eje y, y b la pendiente.

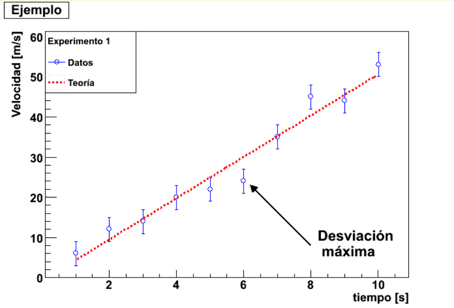
Mínimos cuadrados

Como se ha citado anteriormente, si tenemos n puntos (x_i, y_i), nos gustaría encontrar la ecuación para la mejor recta que pasa a través de estos puntos.



Mínimos cuadrados

Como se ha citado anteriormente, si tenemos n puntos (x_i, y_i), nos gustaría encontrar la ecuación para la mejor recta que pasa a través de estos puntos.



Mínimos cuadrados

Hacemos las siguientes suposiciones:

1. Los valores medidos (x_i, y_i) están distribuidos de acuerdo a la distribución de Gauss.
2. Los errores están en la dirección vertical del gráfico y son iguales, es decir: $\delta y_1 = \delta y_2 = ... = \delta y_n$ (entonces los desviación estándar σ_y es constante).

Mínimos cuadrados

Hacemos las siguientes suposiciones:

1. Los valores medidos (x_i, y_i) están distribuidos de acuerdo a la distribución de Gauss.
2. Los errores están en la dirección vertical del gráfico y son iguales, es decir: $\delta y_1 = \delta y_2 = ... = \delta y_n$ (entonces los desviación estándar σ_y es constante).

Mínimos cuadrados

Hacemos las siguientes suposiciones:

1. Los valores medidos (x_i, y_i) están distribuidos de acuerdo a la distribución de Gauss.
2. Los errores están en la dirección vertical del gráfico y son iguales, es decir: $\delta y_1 = \delta y_2 = ... = \delta y_n$ (entonces los desviación estándar σ_y es constante).

Mínimos cuadrados

Es obvio que nuestro resultado final nos permitirá calcular los valores a y b.
Para cada punto x_i, y_i, sobre la línea se tiene que,

$$y_i - (a + bx_i) = 0$$

Mínimos cuadrados

Es obvio que nuestro resultado final nos permitirá calcular los valores a y b.

Para cada punto x_i, y_i, sobre la línea se tiene que,

$$y_i - (a + bx_i) = 0$$

Mínimos cuadrados

Es obvio que nuestro resultado final nos permitirá calcular los valores a y b.
Para cada punto x_i, y_i, sobre la línea se tiene que,

$$y_i - (a + bx_i) = 0$$

Constante y pendiente

Despues de realizar algunas operaciones, los valores de la constante a y la pendiente b, que nos interesan, son:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{16}$$

y

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{17}$$

Incertidumbres

Los valores que calculamos para a y b al ser introducidas en $y = a + bx$ nos proporcionan la ecuación de la mejor recta ajustada.
Dicha ecuación resultante es llamada la regresión de y sobre x, debido a que se asumió que los errores están en y, no en x.

Incertidumbres

Los valores que calculamos para a y b al ser introducidas en $y = a + bx$ nos proporcionan la ecuación de la mejor recta ajustada.
Dicha ecuación resultante es llamada la <u>regresión de y sobre x</u>, debido a que se asumió que los errores están en y, no en x.

Incertidumbres

Ahora nos preguntamos:"¿cuales son las incertidumbres en a y b?"
Cada y_i tiene una incertidumbre (asumida para todos los valores y_i como la misma), y, por tanto, a y b tendrán también incertidumbres.
Estas incertidumbres son las desviaciones estándar de las medias $s_{ma} \equiv \delta a$ y $s_{mb} \equiv \delta b$.
Para calcular δa y δb, necesitamos la desviación estándar s_y.

Incertidumbres

Ahora nos preguntamos:"¿cuales son las incertidumbres en a y b?"

Cada y_i tiene una incertidumbre (asumida para todos los valores y_i como la misma), y, por tanto, a y b tendrán también incertidumbres.

Estas incertidumbres son las desviaciones estándar de las medias $s_{ma} \equiv \delta a$ y $s_{mb} \equiv \delta b$.

Para calcular δa y δb, necesitamos la desviación estándar s_y.

Incertidumbres

Ahora nos preguntamos:"¿cuales son las incertidumbres en a y b?"
Cada y_i tiene una incertidumbre (asumida para todos los valores y_i como la misma), y, por tanto, a y b tendrán también incertidumbres.
Estas incertidumbres son las desviaciones estándar de las medias $s_{ma} \equiv \delta a$ y $s_{mb} \equiv \delta b$.
Para calcular δa y δb, necesitamos la desviación estándar s_y.

Incertidumbres

Ahora nos preguntamos:"¿cuales son las incertidumbres en a y b?"
Cada y_i tiene una incertidumbre (asumida para todos los valores y_i como la misma), y, por tanto, a y b tendrán también incertidumbres.
Estas incertidumbres son las desviaciones estándar de las medias $s_{ma} \equiv \delta a$ y $s_{mb} \equiv \delta b$.
Para calcular δa y δb, necesitamos la desviación estándar s_y.

Incertidumbres

En este caso, la desviación estándar s_y es

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum(y_i - a - bx_i)^2} \tag{18}$$

La desviación estándar de la media s_{my} es

$$s_{my} = \frac{s_y}{n^{1/2}} \tag{19}$$

Para cada y_i el resultado a ser reportado es

$$y_i \pm s_{my} \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{20}$$

Incertidumbres

Obviando pasos intermedios, se tiene que:

$$\delta_a = \sqrt{\frac{s_{my}^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{21}$$

y

$$\delta_b = \sqrt{\frac{n s_{my}^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{22}$$

El resultado que debe reportarse, considerando los errores de la pendiente b y la constante a es:

$$a \pm \delta_a \qquad y \qquad b \pm \delta_b$$

Incertidumbres

Obviando pasos intermedios, se tiene que:

$$\delta_a = \sqrt{\frac{s_{my}^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{21}$$

y

$$\delta_b = \sqrt{\frac{n s_{my}^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{22}$$

El resultado que debe reportarse, considerando los errores de la pendiente b y la constante a es:

$$a \pm \delta_a \qquad y \qquad b \pm \delta_b$$

Incertidumbres

Obviando pasos intermedios, se tiene que:

$$\delta_a = \sqrt{\frac{s_{my}^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{21}$$

y

$$\delta_b = \sqrt{\frac{n s_{my}^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{22}$$

El resultado que debe reportarse, considerando los errores de la pendiente b y la constante a es:

$$a \pm \delta_a \qquad y \qquad b \pm \delta_b$$

Incertidumbres

Obviando pasos intermedios, se tiene que:

$$\delta_a = \sqrt{\frac{s_{my}^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{21}$$

y

$$\delta_b = \sqrt{\frac{n s_{my}^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{22}$$

El resultado que debe reportarse, considerando los errores de la pendiente b y la constante a es:

$$a \pm \delta_a \qquad y \qquad b \pm \delta_b$$