Appendice A

Esercizi

A.3 Statistica Inferenziale

Esercizio A.3.1. *Le misure di una quantità X sono soggette ad errori casuali: $n = 15$ valori delle misure sono*

$$\begin{array}{cccccccccc} 2.05 & 1.42 & 6.18 & 6.69 & 4.47 & 5.36 & 3.47 & 6.74 & 5.19 & 0.91 \\ 3.22 & 9.50 & 5.85 & 3.41 & 5.66 \end{array}$$

Determinare l'intervallo di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per l'attesa

Soluzione: Non essendo nota la varianza, si calcolano innanzitutto le quantità

$$\overline{X} \simeq 4.675 \qquad S^2 = \frac{n}{n-1}\left(\overline{X^2} - \overline{X}^2\right) \simeq 5.273 \qquad S \simeq 2.296$$

poi con $\alpha = 0.05$ dalle Tavole E.2 di Student si trova

$$t_{1-\frac{\alpha}{3}}(n-1) = t_{0.975}(14) \simeq 2.145$$

e infine si calcolano gli estremi dell'intervallo di fiducia

$$\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{3}}(n-1) \simeq 4.675 \pm 1.272$$

come indicato nell'equazione (8.5) $\square$

Esercizio A.3.2. $n = 10$ *misure di una v-a* X *con attesa e varianza sconosciute danno i seguenti risultati*

1.01 2.25 1.60 1.75 1.49 1.45 2.51 1.87 3.95 2.10

Determinare l'intervallo di fiducia di livello $\alpha = 0.02$ *per l'attesa*

Soluzione: Non essendo nota la varianza, si calcolano innanzitutto le quantità

$$\overline{X} \simeq 1.998 \qquad\qquad S \simeq 0.811$$

poi con $\alpha = 0.02$ dalle Tavole E.2 di Student si trova

$$t_{1-\frac{\alpha}{3}}(n-1) = t_{0.990}(9) \simeq 2.821$$

e infine si calcolano gli estremi dell'intervallo di fiducia

$$\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \simeq 1.998 \pm 0.723$$

come indicato nell'equazione (8.5) $\square$

Esercizio A.3.3. $n = 18$ *misure di una v-a X forniscono i seguenti risultati*

$$\begin{array}{ccccccccc} 4.09 & 4.56 & 5.01 & 5.49 & 4.82 & 5.56 & 3.95 & 4.04 & 2.63 \\ 3.78 & 3.58 & 4.52 & 4.86 & 3.65 & 4.44 & 4.62 & 3.97 & 3.63 \end{array}$$

Supponendo che la varianza $\sigma^2 = 1$ sia conosciuta, determinare prima l'intervallo di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per l'attesa μ; eseguire poi un test bilaterale di Gauss di livello $\alpha = 0.05$ per decidere fra le due ipotesi

$$\mathcal{H}_0 \,:\, \mu = 4 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \,:\, \mu \neq 4$$

e calcolarne la significatività α_s

Soluzione: Si calcola innanzitutto $\overline{X} \simeq 4.289$; poi con $\alpha = 0.05$ dalle Tavole E.1 della normale standard si trova che

$$\varphi_{1-\frac{\alpha}{2}} = \varphi_{0.975} \simeq 1.960$$

per cui dall'equazione (8.4) l'intervallo di fiducia è

$$\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\varphi_{1-\frac{\alpha}{2}} \simeq 4.289 \pm 0.462$$

Per il test si osserva poi innanzitutto che con $\mu_0 = 4$ dall'equazione (9.15) si ha

$$|U_0| = \left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\right| \simeq 1.226$$

per cui essendo

$$|U_0| \simeq 1.226 < 1.960 \simeq \varphi_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

l'evento critico D (9.16) non si verifica, cioè i dati non sono in regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$. Sempre dalle Tavole E.1 potremo poi anche calcolare la significatività del test

$$\alpha_s = 2\,[1 - \Phi(|U_0|)] \simeq 2\,[1 - \Phi(1.226)] \simeq 0.22$$

che non è molto buona principalmente a causa del piccolo numero di dati a disposizione $\square$

Esercizio A.3.4. $n = 20$ *misure di una quantità aleatoria* X *forniscono i seguenti risultati:*

$$\begin{array}{cccccccccc} 2.23 & 4.09 & 3.97 & 5.57 & 3.09 & 3.00 & 2.85 & 2.12 & 3.26 & 2.11 \\ 3.10 & 1.82 & 2.82 & 1.99 & 3.25 & 1.53 & 2.99 & 1.03 & 3.86 & 2.45 \end{array}$$

Supponendo che media μ *e varianza* σ^2 *non siano note, eseguire un test bilaterale di livello* $\alpha = 0.05$ *per decidere tra le due ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \,:\, \mu = 3 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \,:\, \mu \neq 3$$

Soluzione: Siccome media e varianza non sono note dovremo eseguire un test di Student: calcoleremo quindi innanzitutto dai dati le stime puntuali

$$\overline{X} \simeq 2.857 \qquad\qquad S \simeq 1.031$$

poi con $\alpha = 0.05$ dalle Tavole E.2 si trova

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(19) \simeq 2.093$$

che fissa i limiti dell'evento critico, e infine con $\mu_0 = 3$ si calcola la statistica di Student (9.18)

$$|T_0| = \left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\right| \simeq 0.623$$

A questo punto si osserva che

$$|T_0| \simeq 0.623 < 2.093 \simeq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

per cui l'evento critico D (9.19) non si verifica, cioè i dati non sono in regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.5. *Le misure di pressione di un campione di* $n = 200$ *pneumatici di automobile hanno una media* $\overline{X} = 33.57$ *e una varianza* $S^2 = 1.723$. *Decidere tra le due ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \,:\, \mu = 34 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \,:\, \mu \neq 34$$

con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.01$

Soluzione: I valori dati per la media e la varianza devono essere considerati come calcolati dal campione di 200 misure che non è riportato: pertanto la varianza deve essere considerata non come conosciuta, ma come ricavata dai dati empirici (infatti con un altro campione di 200 misure il valore di S^2 sarebbe diverso). Pertanto dovremo eseguire un test di Student, ma sulle Tavole E.2 i quantili delle leggi con $n - 1 = 199$ gradi di libertà non sono riportati. Bisognerà quindi usare l'approssimazione (3.29) per calcolare questi quantili da quelli della normale standard delle Tavole E.1, sicché con $\alpha = 0.01$ avremo

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.995}(199) \simeq \varphi_{0.995} \simeq 2.58$$

A questo punto con $\mu_0 = 34$ si calcola il valore della statistica di Student (9.18)

$$|T_0| = \left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\right| \simeq 4.63$$

e si osserva che

$$|T_0| \simeq 4.63 > 2.58 \simeq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

per cui l'evento critico D (9.19) si verifica, cioè i dati sono in regione critica e quindi rifiuteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.6. $n = 20$ *misure dell'energia cinetica delle particelle di un gas forniscono – nelle opportune unità di misura – i seguenti risultati:*

$$\begin{array}{cccccccccc} 2.58 & 0.25 & 3.96 & 4.89 & 3.80 & 1.42 & 0.96 & 7.99 & 2.47 & 4.32 \\ 2.19 & 0.66 & 1.37 & 6.22 & 1.41 & 2.56 & 1.06 & 1.40 & 0.45 & 1.40 \end{array}$$

Supponendo che l'attesa μ *e la varianza* σ^2 *siano sconosciute, determinare l'intervallo di fiducia di livello* $\alpha = 0.05$ *per l'attesa* μ*. Eseguire poi un test bilaterale di livello* $\alpha = 0.05$ *per decidere fra le ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \ : \ \mu = 3 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \ : \ \mu \neq 3$$

Soluzione: Siccome la varianza è sconosciuta dovremo innanzitutto stimare le quantità necessarie:

$$\overline{X} \simeq 2.568 \qquad S^2 \simeq 4.210 \qquad S \simeq 2.052$$

e poi determinare con $\alpha = 0.05$ l'opportuno quantile di Student dalle Tavolr E.2:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(19) \simeq 2.093$$

A questo punto l'intervallo di fiducia è

$$\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \simeq 2.568 \pm 0.960$$

mentre la statistica di Student (9.18) con $\mu_0 = 3$ vale

$$|T_0| = \left| \sqrt{n}\, \frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \right| \simeq 0.942$$

Pertanto

$$|T_0| \simeq 0.942 < 2.093 \simeq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

per cui l'evento critico D (9.19) non si verifica, cioè i dati non sono in regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.7. $n = 10$ *misure di una v-a* X *con media e varianza sconosciute danno i seguenti risultati:*

$$2.47 \quad 1.79 \quad 0.01 \quad 2.94 \quad 4.10 \quad 2.13 \quad 4.51 \quad 0.72 \quad -2.99 \quad 0.83$$

Determinare l'intervallo di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ *per la media, ed eseguire un test unilaterale destro di livello* $\alpha = 0.05$ *per decidere fra le ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \mu \leq 0 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \mu > 0$$

Soluzione: Si stimano innanzitutto le quantità necessarie:

$$\overline{X} \simeq 1.651 \qquad\qquad S \simeq 2.174$$

e poi dalle Tavolr E.2 si determina l'opportuno quantile di Student per l'intervallo di fiducia di livello $\alpha = 0.05$:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(9) \simeq 2.262$$

Pertanto l'intervallo di fiducia è

$$\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \simeq 1.651 \pm 1.555$$

Per il test unilaterale destro di livello $\alpha = 0.05$, invece, il quantile di Student necessario è

$$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.950}(9) \simeq 1.833$$

mentre la statistica di Student (9.18) con $\mu_0 = 0$ vale

$$T_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \simeq 2.402$$

Pertanto si avrà

$$T_0 \simeq 2.402 > 1.833 \simeq t_{1-\alpha}(n-1)$$

per cui l'evento critico destro D (9.20) si verifica, cioè i dati sono in regione critica e quindi rifiuteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.8. *Sia dato il seguente campione di $n = 10$ misure di una v-a X con attesa e varianza sconosciute:*

$2.02 \quad -0.87 \quad -1.68 \quad -1.39 \quad -0.05 \quad -2.69 \quad 3.14 \quad -2.46 \quad -0.05 \quad 1.83$

Determinare gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per la media e per la varianza. Con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ si decida poi fra le due ipotesi

$$\mathcal{H}_0 \ : \ \mu = 0 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \ : \ \mu \neq 0$$

Soluzione: Una volta stimate le quantità necessarie

$$\overline{X} \simeq -0.220 \qquad S^2 \simeq 3.957 \qquad S \simeq 1.989$$

si cerchino sulle Tavole E.2 e E.3 i quantili necessati per i due intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0,05$:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(9) \simeq 2.262$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(9) \simeq 2.700 \qquad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(9) \simeq 19.023$$

Gli estremi dell'intervallo (8.5) per l'attesa sono

$$\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \simeq -0.220 \pm 1.432$$

mentre quelli dell'intervallo (8.7) per la varianza sono

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \simeq 1.872 \qquad\qquad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \simeq 13.187$$

Per il test bilaterale bisogna calcolare la statistica di Student (9.18) con $\mu_0 = 0$

$$|T_0| = \left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\right| \simeq 0.350$$

e siccome risulta

$$|T_0| \simeq 0.350 < 2.262 \simeq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

l'evento critico D (9.19) non si verifica, cioè i dati non sono in regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.9. *Si vuol verificare se in un determinato impianto il livello medio del rumore non superi* 90 dB*: si effettuano* $n = 9$ *misure durante una giornata e si trovano i seguenti valori in* dB*:*

95	98	92	84	105	92	110	86	98

Supponendo che il livello di rumore sia una v-a X *con media e varianza sconosciute, valutare con un test unilaterale destro di livello* $\alpha = 0.05$ *quale accettare fra le due ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \ : \ \mu \leq 90 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \ : \ \mu > 90$$

Soluzione: Dopo aver calcolato le quantità necessarie

$$\overline{X} \simeq 95.56 \qquad\qquad S \simeq 8.37$$

e dopo aver determinato il quantile di Student per un test unilaterale destro di livello $\alpha = 0.05$

$$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.950}(8) \simeq 1.86$$

si calcola la statistica di Student (9.18) con $\mu_0 = 90$

$$T_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \simeq 1.99$$

Siccome

$$T_0 \simeq 1.99 > 1.86 \simeq t_{1-\alpha}(n-1)$$

l'evento critico destro D (9.20) si verifica, cioè i dati sono in regione critica e quindi rifiuteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$, ma l'esiguità del margine fra i due membri della precedente disuguaglianza invitano a una certa cautela nelle conclusioni $\square$

Esercizio A.3.10. *Una fabbrica produce automezzi che consumano in media* 10 lt *di carburante ogni* 100 Km *ad una data velocità. Per verificare gli effetti di un nuovo dispositivo si misurano i litri di carburante consumati da un campione di* $n = 10$ *automezzi ottenendo i seguenti risultati:*

$$9.0 \quad 12.0 \quad 11.0 \quad 7.5 \quad 10.2 \quad 9.8 \quad 13.0 \quad 12.0 \quad 12.5 \quad 10.4$$

Supponendo che il consumo sia una v-a con media e varianza sconosciute, decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ *quale accettare fra le due ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \,:\, \mu = 10 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \,:\, \mu \neq 10$$

Soluzione: Dopo aver calcolato le quantità necessarie

$$\overline{X} \simeq 10.74 \qquad\qquad S \simeq 1.71$$

e dopo aver determinato il quantile di Student per un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(9) \simeq 2.26$$

si calcola la statistica di Student con $\mu_0 = 10$

$$|T_0| = \left| \sqrt{n}\, \frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \right| \simeq 1.37$$

Siccome

$$|T_0| \simeq 1.37 < 2.26 \simeq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

l'evento critico D (9.19) non si verifica, cioè i dati non sono in regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.11. *Per verificare l'efficacia di un medicinale si misura la temperatura di $n = 30$ pazienti prima (X) e dopo (Y) l'assunzione del farmaco. I campioni accoppiati così ricavati sono i seguenti:*

$$X = \begin{array}{cccccccccc} 36.8 & 37.9 & 38.3 & 38.1 & 38.3 & 38.8 & 36.3 & 37.7 & 37.1 & 36.9 \\ 37.7 & 37.5 & 37.4 & 39.0 & 38.6 & 41.4 & 37.9 & 37.5 & 39.9 & 38.2 \\ 38.4 & 37.7 & 37.5 & 36.6 & 38.0 & 38.6 & 39.0 & 37.6 & 38.0 & 39.5 \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{cccccccccc} 37.1 & 36.1 & 38.2 & 39.0 & 38.4 & 36.4 & 36.8 & 39.3 & 37.3 & 37.9 \\ 37.6 & 38.4 & 38.6 & 37.4 & 38.3 & 37.0 & 35.9 & 36.0 & 37.2 & 39.3 \\ 36.0 & 36.6 & 38.0 & 38.0 & 38.7 & 39.4 & 37.6 & 36.1 & 39.0 & 36.4 \end{array}$$

Decidere con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \mu_X \leq \mu_Y \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Soluzione: Trattandosi di un test unilaterale per campioni accoppiati (vedi Sezione 9.3.1) con ipotesi alternativa $\mu_X > \mu_Y$, bisognerà innanzitutto costruire il campione delle differenze

$$Z = X - Y = \begin{array}{rrrrrrrrrr} -0.3 & 1.8 & 0.1 & -0.9 & -0.1 & 2.4 & -0.5 & -1.6 & -0.2 & -1.0 \\ 0.1 & -0.9 & -1.2 & 1.6 & 0.3 & 4.4 & 2.0 & 1.5 & 2.7 & -1.1 \\ 2.4 & 1.1 & -0.5 & -1.4 & -0.7 & -0.8 & 1.4 & 1.5 & -1.0 & 3.1 \end{array}$$

con un valore d'attesa $\mu = \mu_X - \mu_Y$, e poi eseguire il test unilaterale per le ipotesi

$$\mathcal{H}_0 \,:\, \mu \leq 0 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \,:\, \mu > 0$$

A questo punto, siccome attese e varianze non sono note, si calcolano la media e la varianza corretta delle Z

$$\overline{Z} \simeq 0.473 \qquad\qquad S_Z^2 \simeq 2.455$$

e da queste il valore della statistica di Student (9.30)

$$T_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{Z}}{S_Z} \simeq 1.654$$

Per determinare poi l'evento critico unilaterale (9.31) di livello $\alpha = 0.05$ si cerca il quantile di Student

$$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.950}(29) \simeq 1.699$$

e siccome

$$T_0 \simeq 1.65 < 1.70 \simeq t_{1-\alpha}(n-1)$$

l'evento critico non si verifica, i dati non sono in regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.12. *Siano X e Y la quantità di nicotina depositata rispettivamente da sigarette senza filtro e con filtro: da un campione di $n = 11$ misure di X si ha $\overline{X} = 1.36$ e $S_X^2 = 0.22$, mentre da un campione di $m = 9$ misure di Y si ha $\overline{Y} = 0.70$ e $S_Y^2 = 0.03$. Stabilire con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.01$ se la media μ_X è significativamente più grande della media μ_Y decidendo quale accettare fra le ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \mu_X \leq \mu_Y \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Soluzione: Il test riguarda un confronto fra medie di campioni indipendenti con varianze sconosciute (i valori delle varianze dati nella traccia sono infatti ricavati dai campioni anche se questi non sono esplicitamente riportati): si veda a questo proposito la Sezione 9.3.2. L'evento critico unilaterale è pertanto quello in (9.36), e il quantile di Student che lo definisce per $\alpha = 0.01$ è

$$t_{1-\alpha}(n+m-2) = t_{0.99}(18) \simeq 2.552$$

Per calcolare la corrispondente statistica di Student (9.35) dovremo però preventivamente calcolare la varianza combinata (9.34) ottenendo

$$V^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2} \simeq 0.136 \qquad\qquad V \simeq 0.368$$

Per la statistica di Student avremo allora

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{V\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \simeq 3.99$$

e siccome

$$T_0 \simeq 3.99 > 2.552 \simeq t_{1-\alpha}(n+m-2)$$

ne concludiamo che l'evento critico unilaterale (9.36) si verifica, i dati sono in regione critica e quindi rifiuteremo $\mathcal{H}_0$ e accetteremo $\mathcal{H}_1$ $\square$

Esercizio A.3.13. *Per controllare l'efficacia di un nuovo medicinale si paragonano i risultati X ed Y di un certo tipo di analisi clinica eseguita su due campioni indipendenti rispettivamente di $n = 10$ ed $m = 12$ pazienti: ai 10 pazienti del primo gruppo è stato somministrato il nuovo farmaco; ai 12 del secondo gruppo è stato somministrato solo un placebo. Se il farmaco è efficace la media di X deve essere più grande della media di Y. I risultati delle analisi sono i seguenti:*

$$X = \begin{array}{ccccc} 9.51 & 8.39 & 8.62 & 9.48 & 8.85 \\ 9.29 & 8.43 & 9.57 & 9.30 & 9.21 \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{cccccc} 8.10 & 8.58 & 9.05 & 7.28 & 7.64 & 5.83 \\ 8.61 & 7.10 & 6.44 & 7.43 & 8.63 & 7.94 \end{array}$$

Decidere con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \mu_X \leq \mu_Y \qquad \mathcal{H}_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Soluzione: Anche in questo caso si tratta di un confronto di medie di campioni indipendenti tramite un test unilaterale con varianze sconosciute. Dopo aver calcolato dai campioni

$$\overline{X} \simeq 9.065 \qquad S_X^2 \simeq 0.206 \qquad \overline{Y} \simeq 7.719 \qquad S_Y^2 \simeq 0.927$$
$$V^2 \simeq 0.603 \qquad V \simeq 0.776$$

e dopo aver trovato il quantile di Student con $\alpha = 0.05$

$$t_{1-\alpha}(n+m-2) = t_{0.95}(20) \simeq 1.725$$

si calcola la statistica di Student

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{V\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \simeq 4.050$$

e siccome

$$T_0 \simeq 4.050 > 1.725 \simeq t_{1-\alpha}(n+m-2)$$

ne concludiamo che l'evento critico unilaterale (9.36) si verifica, i dati sono in regione critica e quindi rifiuteremo $\mathcal{H}_0$ e accetteremo $\mathcal{H}_1$ $\square$

Esercizio A.3.14. *La differenza fra entrate e uscite (in milioni di Euro) di una ditta è una v-a con varianza* $\sigma^2 = 1$. *Vengono introdotte alcune modifiche nel sistema di vendita dei prodotti: per controllare se la situazione finanziaria è migliorata si confrontano i bilanci* X *di* $n = 10$ *mesi successivi all'introduzione di tali modifiche con quelli* Y *di* $m = 12$ *mesi precedenti, e si ottengono i seguenti risultati*

$$X = \begin{array}{ccccc} 0.61 & 0.90 & 2.76 & 1.31 & 3.33 \\ 2.08 & 1.42 & -0.67 & 2.22 & 3.28 \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{cccccc} 0.80 & 2.28 & 1.11 & -1.26 & 0.70 & 1.26 \\ 0.42 & 2.24 & 1.58 & -0.21 & -0.26 & -2.02 \end{array}$$

Supponendo che le modifiche abbiano lasciato immutata la varianza, decidere con un test di livello $\alpha = 0.05$ *quale accettare fra le ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \mu_X \leq \mu_Y \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Soluzione: Questa volta il confronto fra le medie di campioni indipendenti è effettuato supponendo che le varianze $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$ siano conosciute, per cui l'evento critico unilaterale assume la forma (9.33). Pertanto, dopo aver calcolato dai campioni

$$\overline{X} \simeq 1.724 \qquad\qquad \overline{Y} \simeq 0.553$$

si cerca sulle Tavole E.1 con $\alpha = 0.05$ il quantile della normale standard

$$\varphi_{1-\alpha} = \varphi_{0.950} \simeq 1.65$$

e si calcola il valore della statistica di Gauss (9.32)

$$U_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}} \simeq 2.74$$

Siccome

$$U_0 \simeq 2.74 > 1.65 \simeq \varphi_{1-\alpha}$$

ne concludiamo che l'evento critico unilaterale (9.33) si verifica, i dati sono in regione critica e quindi rifiuteremo $\mathcal{H}_0$ e accetteremo $\mathcal{H}_1$

A scopo illustrativo possiamo confermare questo risultato abbandonando l'ipotesi che le varianze siano conosciute e calcolandone invece una stima dai campioni. In questo caso avremmo

$$S_X^2 \simeq 1.596 \qquad S_Y^2 \simeq 1.722 \qquad V^2 \simeq 1.665 \qquad V \simeq 1.290$$

mentre con $\alpha = 0.05$ il quantile di Student sarebbe

$$t_{1-\alpha}(n+m-2) = t_{0.950}(20) \simeq 1.725$$

Siccome ora la statistica di Student (9.35) è

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{V\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \simeq 2.119$$

avremo

$$T_0 \simeq 2.119 > 1.725 \simeq t_{1-\alpha}(n+m-2)$$

cioè l'evento critico unilaterale (9.36) si verifica, i dati sono in regione critica e quindi ancora una volta rifiuteremo $\mathcal{H}_0$ e accetteremo $\mathcal{H}_1$ $\square$

Esercizio A.3.15. *Per controllare se una nuova procedura di fabbricazione ha modificato la qualità dei prodotti di una azienda si paragonano le misure X ed Y di una data caratteristica dei prodotti prima e dopo l'introduzione della nuova procedura. Si ottengono così due campioni indipendenti rispettivamente di $n = 10$ ed $m = 12$ valori:*

$$X = \begin{matrix} 9.41 & 9.71 & 10.32 & 9.05 & 8.63 \\ 9.12 & 8.65 & 8.91 & 10.36 & 8.80 \end{matrix}$$

$$Y = \begin{matrix} 8.10 & 7.58 & 8.06 & 8.43 & 8.63 & 8.69 \\ 7.61 & 8.39 & 10.57 & 9.11 & 8.60 & 8.62 \end{matrix}$$

decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

Soluzione: Si tratta di un test di confronto di medie di campioni indipendenti con varianze sconosciute per cui l'evento critico bilaterale è (9.36). Dopo aver calcolato

$$\overline{X} \simeq 9.296 \qquad \overline{Y} \simeq 8.533 \qquad S_X^2 \simeq 0.412 \qquad S_Y^2 \simeq 0.612 \qquad V \simeq 0.522$$

e dopo aver trovato con $\alpha = 0.05$ il quantile di Student

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) = t_{0.975}(20) \simeq 2.086$$

si determina la statistica di Student

$$|T_0| = \left| \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{V\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right| \simeq 3.415$$

Siccome

$$|T_0| \simeq 3.415 > 2.086 \simeq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$$

l'evento critico bilaterale (9.36) si verifica, i dati sono in regione critica e quindi rifiuteremo $\mathcal{H}_0$ e accetteremo $\mathcal{H}_1$ $\square$

Esercizio A.3.16. *Siano dati due campioni indipendenti* $X_1, \ldots, X_n$ *e* $Y_1, \ldots, Y_m$*, composti rispettivamente di* $n = 21$ *e* $m = 31$ *valori, e supponiamo che le varianze empiriche calcolate a partire dai dati siano rispettivamente*

$$S_X^2 = 2 \qquad\qquad S_Y^2 = 1$$

Determinare prima gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ *delle varianze* σ_X^2 *e* σ_Y^2*, e successivamente eseguire un test bilaterale di Fisher di livello* $\alpha = 0.05$ *per decidere fra le due ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \,:\, \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Soluzione: Per determinare gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ delle varianze dobbiamo prima trovare sulle Tavole E.3 i quantili occorrenti

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(20) \simeq 34.170 \qquad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(20) \simeq 9.591$$
$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1) = \chi^2_{0.975}(30) \simeq 46.979 \qquad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(m-1) = \chi^2_{0.025}(30) \simeq 16.791$$

Gli estremi degli intervalli di fiducia (8.7) per le varianze σ^2_X e σ^2_Y sono allora rispettivamente

$$\frac{(n-1)S^2_X}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \simeq 1.171 \qquad \frac{(n-1)S^2_X}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \simeq 4.171$$
$$\frac{(m-1)S^2_Y}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1)} \simeq 0.639 \qquad \frac{(m-1)S^2_Y}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(m-1)} \simeq 1.787$$

e quindi gli intervalli per σ^2_X e σ^2_Y sono rispettivamente

$$[1.171\,,\ 4.171] \qquad [0.639\,,\ 1.787]$$

Per il test bilaterale sulle varianze (vedi Sezione 9.4) useremo poi la statistica di Fisher (9.39) nella forma

$$F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Pertanto, per determinare l'evento critico bilaterale (9.40) del test di livello $\alpha = 0.05$ dovremo innanzitutto individuare sulle Tavole E.4 gli opportuni quantili

$$f_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) = f_{0.025}(20, 30) = \frac{1}{f_{0.975}(30, 20)} \simeq \frac{1}{2.35} \simeq 0.43$$

$$f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) = f_{0.975}(20, 30) \simeq 2.20$$

Siccome per i nostri dati $F_0 = 2$, avremo che

$$f_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) \simeq 0.43 \ < \ F_0 = 2 \ < \ 2.20 \simeq f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)$$

cioè l'evento critico bilaterale (9.40) non si verifica, i dati non sono in regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.17. *Due serie indipendenti di $n = 9$ ed $m = 10$ misure rispettivamente di due quantità aleatorie X ed Y danno i seguenti risultati*

$$
\begin{array}{lcrrrrrrrrrr}
X & = & 4.83 & -2.52 & -1.79 & -2.85 & 1.45 & 1.09 & 1.87 & 2.03 & -2.60 & \\
Y & = & -1.34 & 1.32 & -0.96 & 0.29 & -1.41 & 0.23 & -0.56 & -0.32 & 0.66 & 1.27
\end{array}
$$

Determinare gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per le due varianze sconosciute σ_X^2 e σ_Y^2, e successivamente eseguire un test unilaterale di livello $\alpha = 0.05$ per decidere fra le ipotesi

$$\mathcal{H}_0 \,:\, \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \,:\, \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$$

Soluzione: Bisogna prima calcolare medie e varianze dei campioni

$$\overline{X} \simeq 0.179 \qquad S_X^2 \simeq 7.346 \qquad\qquad \overline{Y} \simeq -0.082 \qquad S_Y^2 \simeq 0.998$$

e poi per determinare gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ delle varianze dobbiamo trovare sulle Tavole E.3 i quantili occorrenti

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(8) \simeq 17.535 \qquad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(8) \simeq 2.180$$
$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1) = \chi^2_{0.975}(9) \simeq 19.023 \qquad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(m-1) = \chi^2_{0.025}(9) \simeq 2.700$$

Con questi valori gli estremi degli intervalli di fiducia (8.7) per le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono allora rispettivamente

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \simeq 3.352 \qquad \frac{(n-1)S_X^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \simeq 26.960$$
$$\frac{(m-1)S_Y^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1)} \simeq 0.472 \qquad \frac{(m-1)S_Y^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(m-1)} \simeq 3.326$$

e quindi gli intervalli per σ_X^2 e σ_Y^2 sono rispettivamente

$$[3.352\,,\ 26.960] \qquad [0.472\,,\ 3.326]$$

Per il test unilaterale sulle varianze useremo la statistica di Fisher (9.39), e per determinare l'evento critico unilaterale (9.40) del test di livello $\alpha = 0.05$ cercheremo sulle Tavole E.4 il quantile

$$f_{1-\alpha}(n-1, m-1) = f_{0.950}(8, 9) \simeq 3.23$$

A questo punto, siccome

$$F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \simeq 7.36$$

avremo

$$F_0 \simeq 7.36 \ > \ 3.23 \simeq f_{1-\alpha}(n-1, m-1)$$

cioè l'evento critico unilaterale (9.40) si verifica, i dati sono in regione critica e quindi rifiuteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ e accetteremo $\mathcal{H}_1$ $\square$

Esercizio A.3.18. *Siano dati i seguenti due campioni indipendenti:*

$$X = \begin{matrix} 3.16 & 4.37 & 6.67 & 2.49 & 2.06 \\ 4.10 & -0.88 & 3.84 & 1.45 & \end{matrix} \qquad Y = \begin{matrix} 3.51 & 6.94 & 5.46 & 5.27 & 7.48 \\ 5.76 & 2.21 & 7.29 & 7.80 & 6.06 \end{matrix}$$

Con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ *si decida quale accettare fra le ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad \mathcal{H}_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Poi con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ *si decida quale accettare fra le ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \mathcal{H}_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

Soluzione: Conviene innanzitutto calcolare dai campioni le quantità necessarie

$$\overline{X} \simeq 3.029 \qquad S_X^2 \simeq 4.485 \qquad \overline{Y} \simeq 5.778 \qquad S_Y^2 \simeq 3.215$$

poi per il primo test bilaterale sulle varianze di livello $\alpha = 0.05$ si determinano i quantili di Fisher

$$f_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) = f_{0.025}(8, 9) = \frac{1}{f_{0.975}(9, 8)} \simeq \frac{1}{4.36} \simeq 0.23$$
$$f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) = f_{0.975}(8, 9) \simeq 4.10$$

e siccome la statistica di Fisher è

$$F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \simeq 1.395$$

si ottiene

$$f_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) \simeq 0.23 \; < \; F_0 = 1.395 \; < \; 4.10 \simeq f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)$$

cioè l'evento critico bilaterale (9.40) non si verifica, i dati non sono in regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Per il test bilaterale sulle medie di livello $\alpha = 0.05$ bisogna invece prima determinare il quantile di Student

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) = t_{0.975}(17) \simeq 2.11$$

poi calcolare la varianza combinata (9.34) ottenendo

$$V^2 \simeq 3.813 \qquad\qquad V \simeq 1.95$$

e poi la statistica di Student (9.35)

$$|T_0| \simeq 3.06$$

A questo punto si osserva che

$$|T_0| \simeq 3.06 > 2.11 \simeq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$$

per cui l'evento critico bilaterale (9.36) si verifica, i dati sono in regione critica e quindi rifiuteremo $\mathcal{H}_0 : \mu_X = \mu_Y$ e accetteremo $\mathcal{H}_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ $\square$

Esercizio A.3.19. *Siano X e Y due quantità aleatorie: due campioni indipendenti rispettivamente di $n = 21$ e $m = 16$ misure hanno medie $\overline{X} = 5$ e $\overline{Y} = 3$, e varianze corrette (stimate a partire dai campioni) $S_X^2 = 5$ e $S_Y^2 = 3$. Decidere prima con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

e poi con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \mu_X \leq \mu_Y \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Infine determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per le attese μ_X e μ_Y

Risposta: Nel primo test bilaterale di Fisher sulla varianza l'evento critico non si verifica

$$f_{0.025}(20,15) \simeq 0.39 \ < \ F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \simeq 1.67 \ < \ 2.76 \simeq f_{0.975}(20,15)$$

per cui si accetta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Nel secondo test unilaterale di Student sulle attese si ha

$$V^2 \simeq 4.143$$

e quindi l'evento critico si verifica

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{V\sqrt{{}^1/_n + {}^1/_m}} \simeq 2.96 \ > \ 1.69 \simeq t_{0.950}(35)$$

per cui si rifiuta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 \,:\, \mu_X \leq \mu_Y$. Infine

$$5 \pm 1.02 \qquad\qquad 3 \pm 0.92$$

sono gli intervalli di fiducia di μ_X e μ_Y $\square$

Esercizio A.3.20. *Siano dati i due seguenti campioni indipendenti delle quantità aleatorie X e Y:*

$$X = \begin{array}{l} 1.13\ 0.11\ 0.74\ 0.97\ 0.10\ 1.14\ 0.68\ 0.21\ 0.70\ 0.41 \\ 0.82\ 0.04\ 0.85\ 0.85\ 0.84\ 0.11\ 0.55\ 0.09\ 1.01\ 0.34 \\ 1.04 \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{l} 0.85\ 0.62\ 0.21\ 0.22\ 0.34\ 0.13\ 0.93\ 0.38\ 0.01\ 0.65 \\ 0.97\ 0.79\ 0.42\ 0.09\ 0.44\ 0.31 \end{array}$$

Determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per le varianze σ_X^2 e σ_Y^2, e poi decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Risposta: Innanzitutto risulta

$$\overline{X} \simeq 0.606 \qquad \overline{Y} \simeq 0.460 \qquad S_X^2 \simeq 0.145 \qquad S_Y^2 \simeq 0.094$$

per cui gli intervalli di fiducia di σ_X^2 e σ_Y^2 sono

$$[0.08\,,\ 0.30] \qquad\qquad [0.05\,,\ 0.23]$$

Nel test bilaterale di Fisher sulla varianza l'evento critico non si verifica

$$f_{0.025}(20, 15) \simeq 0.39 \ < \ F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \simeq 1.53 \ < \ 2.76 \simeq f_{0.975}(20, 15)$$

per cui si accetta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ $\square$

Esercizio A.3.21. *Due campioni indipendenti delle quantità* X *e* Y *con attese* μ_X, μ_Y *e varianze* σ_X^2, σ_Y^2 *sconosciute, sono composti rispettivamente di* $n = 21$ *e* $m = 31$ *misure, e hanno medie* $\overline{X} = 1.09$ *e* $\overline{Y} = 2.22$ *e varianze corrette (calcolate dai campioni)* $S_X^2 = 2.34$ *e* $S_Y^2 = 3.11$. *Decidere prima con un test bilaterale di livello* $\alpha = 0.05$ *quale accettare fra le due ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \,:\, \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

e poi decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.01$ *quale accettare fra le le due ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \,:\, \mu_X = \mu_Y \qquad\qquad \mathcal{H}_1 \,:\, \mu_X \neq \mu_Y$$

Risposta: Nel primo test bilaterale di Fisher sulla varianza l'evento critico non si verifica

$$f_{0.025}(20,30) \simeq 0.43 \;<\; F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \simeq 0.75 \;<\; 2.20 \simeq f_{0.975}(20,30)$$

per cui si accetta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Nel secondo test unilaterale di Student sulle attese si ha

$$V^2 \simeq 2.802$$

e quindi l'evento critico non si verifica

$$|T_0| = \frac{|\overline{X} - \overline{Y}|}{V\sqrt{{}^1/_n + {}^1/_m}} \simeq 2.39 \;<\; 2.68 \simeq t_{0.995}(50)$$

per cui si accetta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 \,:\, \mu_X = \mu_Y$ $\square$

Esercizio A.3.22. *Siano dati i due seguenti campioni indipendenti delle quantità aleatorie X e Y:*

$$X = \begin{array}{ccccccccccc} 5.49 & 4.37 & 4.42 & 3.79 & 5.57 & 3.37 & 4.30 & 3.14 & 4.55 & 4.23 & \\ 3.44 & 2.51 & 4.46 & 2.54 & 3.59 & 4.20 & 3.14 & 3.50 & 2.26 & 4.01 & 4.06 \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{ccccccccccc} 5.84 & 2.29 & 3.71 & 5.09 & 7.07 & 5.61 & 4.83 & 3.29 & 5.55 & 6.78 & \\ 5.74 & 5.58 & 5.28 & 4.89 & 4.21 & 2.54 & 3.71 & 3.81 & 4.60 & 6.81 & \\ 4.60 & 5.10 & 4.72 & 6.33 & 5.76 & 4.86 & 3.50 & 5.18 & 6.60 & 5.47 & 3.49 \end{array}$$

Determinate prima gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per σ_X^2 e σ_Y^2, e poi decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Risposta: Innanzitutto risulta

$$\overline{X} \simeq 3.854 \qquad \overline{Y} \simeq 4.930 \qquad S_X^2 \simeq 0.764 \qquad S_Y^2 \simeq 1.493$$

per cui gli intervalli di fiducia di σ_X^2 e σ_Y^2 sono

$$[0.45\,,\ 1.59] \qquad\qquad [0.95\,,\ 2.67]$$

Nel test bilaterale di Fisher sulla varianza l'evento critico non si verifica

$$f_{0.025}(20,30) \simeq 0.43 \ < \ F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \simeq 0.51 \ < \ 2.20 \simeq f_{0.975}(20,30)$$

per cui si accetta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ $\square$

Esercizio A.3.23. *Due serie indipendenti di* $n = 10$ *ed* $m = 9$ *misure rispettivamente di due quantità aleatorie* X *ed* Y *danno i seguenti risultati*

$$\begin{array}{lcrrrrrrrrrr} X & = & -1.34 & 1.32 & -0.96 & 0.29 & -1.41 & 0.23 & -0.56 & -0.32 & 0.66 & 1.27 \\ Y & = & 4.83 & -2.52 & -1.79 & -2.85 & 1.45 & 1.09 & 1.87 & 2.03 & -2.60 & \end{array}$$

Eseguire un test di bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ *per decidere quale accettare fra le due ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Risposta: Innanzitutto risulta

$$\overline{X} \simeq -0.082 \qquad \overline{Y} \simeq 0.168 \qquad S_X^2 \simeq 0.998 \qquad S_Y^2 \simeq 7.303$$

Nel test bilaterale di Fisher sulla varianza l'evento critico si verifica

$$F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \simeq 0.14 \ < \ 0.24 \simeq f_{0.025}(9,8) \ < \ 4.36 \simeq f_{0.975}(9,8)$$

per cui si rifiuta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 \, : \, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ $\square$

Esercizio A.3.24. *Per giudicare il rendimento di due classi di* $n = 31$ *e* $m = 21$ *studenti si paragonano i voti (espressi in trentesimi) con i quali è stato superato un certo esame. I due campioni indipendenti sono i seguenti:*

$$X = \begin{array}{cccccccccccccccc} 25 & 27 & 27 & 26 & 27 & 25 & 23 & 25 & 22 & 26 & 25 & 21 & 24 & 22 & 24 & 24 \\ 23 & 22 & 29 & 26 & 21 & 26 & 23 & 24 & 24 & 20 & 29 & 22 & 23 & 18 & 27 & \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{ccccccccccc} 21 & 19 & 19 & 22 & 25 & 20 & 25 & 23 & 26 & 27 & 22 \\ 25 & 27 & 20 & 19 & 23 & 28 & 22 & 25 & 23 & 28 & \end{array}$$

Decidere prima con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ *quale accettare tra le ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad \mathcal{H}_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

e poi decidere con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.01$ *quale accettare tra le ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \mu_X \leq \mu_Y \qquad \mathcal{H}_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Risposta: Innanzitutto risulta

$\overline{X} \simeq 24.193 \qquad \overline{Y} \simeq 23.286 \qquad S_X^2 \simeq 6.495 \qquad S_Y^2 \simeq 8.914$

Nel primo test bilaterale di Fisher sulla varianza l'evento critico non si verifica

$$f_{0.025}(30,20) \simeq 0.46 \ < \ F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \simeq 0.73 \ < \ 2.35 \simeq f_{0.975}(30,20)$$

per cui si accetta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Nel secondo test unilaterale di Student sulle attese si ha

$$V^2 \simeq 7.462$$

e quindi l'evento critico non si verifica

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{V\sqrt{{}^1/_n + {}^1/_m}} \simeq 1.18 \ < \ 2.40 \simeq t_{0.990}(50)$$

per cui si accetta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 : \mu_X \leq \mu_Y$ $\square$

Esercizio A.3.25. *Siano dati i seguenti due campioni aleatori di $n = 16$ ed $m = 21$ misure:*

$$X = \begin{array}{l} 9.08 \;\; 9.80 \;\; 10.76 \;\; 9.58 \;\; 10.56 \;\; 9.99 \;\; 10.61 \;\; 8.86 \;\; 10.41 \;\; 10.27 \;\; 7.94 \\ 8.61 \;\; 10.38 \;\; 9.77 \;\; 11.30 \;\; 10.09 \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{l} 3.99 \;\; 4.04 \;\; 4.20 \;\; 6.11 \;\; 7.26 \;\; 6.43 \;\; 5.23 \;\; 5.93 \;\; 3.71 \;\; 4.53 \;\; 4.91 \\ 5.33 \;\; 3.95 \;\; 4.60 \;\; 3.87 \;\; 5.25 \;\; 4.09 \;\; 5.21 \;\; 5.85 \;\; 4.10 \;\; 4.26 \end{array}$$

Calcolare prima gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.01$ per le varianze σ_X^2 e σ_Y^2, e poi decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare tra le ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Risposta: Innanzitutto risulta

$$\overline{X} \simeq 9.876 \qquad \overline{Y} \simeq 4.898 \qquad S_X^2 \simeq 0.779 \qquad S_Y^2 \simeq 0.961$$

per cui gli intervalli di fiducia di σ_X^2 e σ_Y^2 sono

$$[0.36\,,\,2.54] \qquad\qquad [0.48\,,\,2.59]$$

Nel test bilaterale di Fisher sulla varianza l'evento critico non si verifica

$$f_{0.025}(15,20) \simeq 0.36 \;<\; F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \simeq 0.81 \;<\; 2.57 \simeq f_{0.975}(15,20)$$

per cui si accetta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ $\square$

Esercizio A.3.26. *Per confrontare le attività di due materiali radioattivi si rilevano i numeri di particelle emesse in un intervallo di* 10 *minuti. Si misurano pertanto, rispettivamente per i due materiali,* $n = 31$ *e* $m = 31$ *valori di tale conteggio ottenendo i seguenti campioni indipendenti*

$$X = \begin{array}{cccccccccccccccc} 15 & 20 & 21 & 26 & 20 & 14 & 13 & 17 & 22 & 21 & 24 & 19 & 18 & 22 & 17 & 17 \\ 19 & 23 & 21 & 22 & 31 & 14 & 14 & 24 & 24 & 21 & 20 & 25 & 17 & 20 & 20 & \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{cccccccccccccccc} 18 & 18 & 23 & 19 & 14 & 14 & 14 & 16 & 23 & 21 & 17 & 21 & 14 & 22 & 17 & 19 \\ 16 & 9 & 22 & 13 & 17 & 19 & 16 & 19 & 22 & 11 & 16 & 9 & 19 & 21 & 13 & \end{array}$$

Decidere prima con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ *quale accettare tra le ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad \mathcal{H}_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

e poi decidere con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.01$ *quale* *accettare tra le ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \mu_X \leq \mu_Y \qquad \mathcal{H}_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Risposta: Innanzitutto risulta

$$\overline{X} \simeq 20.032 \qquad \overline{Y} \simeq 17.161 \qquad S_X^2 \simeq 15.966 \qquad S_Y^2 \simeq 15.073$$

Nel primo test bilaterale di Fisher sulla varianza l'evento critico non si verifica

$$f_{0.025}(30, 30) \simeq 0.48 \ < \ F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \simeq 1.06 \ < \ 2.07 \simeq f_{0.975}(30, 30)$$

per cui si accetta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Nel secondo test unilaterale di Student sulle attese si ha

$$V^2 \simeq 15.519$$

e quindi l'evento critico si verifica

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{V\sqrt{{}^1/_n + {}^1/_m}} \simeq 2.87 \ > \ 2.39 \simeq t_{0.990}(60)$$

per cui si rifiuta l'ipotesi $\mathcal{H}_0 : \mu_X \leq \mu_Y$ $\square$

Esercizio A.3.27. *Per studiare l'attività di un centralino telefonico si rileva il numero X di telefonate che arrivano tra le 11.00 e le 12.00 in $n = 100$ giorni lavorativi tipici. Le frequenze N_j con cui si ritrovano i diversi valori $j = 0, 1, \ldots$ di X sono le seguenti:*

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
j = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \geq 9 \\
N_j = & 1 & 4 & 15 & 18 & 22 & 17 & 10 & 8 & 3 & 2
\end{array}
$$

Verificare con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0,05$ se questi dati sono compatibili con l'ipotesi

$$\mathcal{H}_0 \ : \ \textit{il campione si adatta alla legge di Poisson } \mathfrak{P}(4)$$

Soluzione: Si deve innanzitutto verificare se è rispettata la condizione di applicabilità che richiede $np_j \geq 5$ per tutti gli indici j presenti nel campione: in questo esercizio le p_j sono le probabilità della legge di Poisson $\mathfrak{P}(4)$

$$p_j = e^{-4}\,\frac{4^j}{j!} \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots$$

Se le condizioni non sono soddisfatte (come in effetti avviene in questo caso) si deve procedere a raggruppare i valori j con le probabilità più piccole ottenendo (come nell'Esempio 9.9) un nuovo elenco di probabilità q_j e di frequenze empiriche M_j sulle quali eseguire il test. Converrà pertanto stilare la seguente tabella

j	N_j	p_j	np_j	j	q_j	nq_j	M_j	$\frac{(M_j - nqj)^2}{nq_j}$
0	1	0.018	1.8					
1	4	0.073	7.3	$0, 1$	0.091	9.1	5	1.888
2	15	0.147	14.7	2	0.147	14.7	15	0.008
3	18	0.195	19.5	3	0.195	19.5	18	0.121
4	22	0.195	19.5	4	0.195	19.5	22	0.311
5	17	0.156	15.6	5	0.156	15.6	17	0.120
6	10	0.104	10.4	6	0.104	10.4	10	0.017
7	8	0.060	6.0	7	0.060	6.0	8	0.703
8	3	0.030	3.0	≥ 8	0.051	5.1	5	0.003
≥ 9	2	0.021	2.1					
							$K_0 =$	**3.170**

Nelle prime quattro colonne sono riportati i dati del problema con i valori dei prodotti np_j (con $n = 100$) dai quali si evince la necessità di raggruppare le classi estreme per soddisfare le condizioni di applicabilità del test. Nelle successive quattro colonne è mostrato l'effetto del raggruppamento, e nell'ultima colonna dai dati modificati sono calcolati gli addendi della statistica di Pearson (9.41) K_0 il cui valore (la somma di tutti i termini dell'ultima colonna) è infine mostrato in grassetto in fondo a destra. L'evento critico (9.42) del test di livello $\alpha = 0.05$ è poi definito da un quantile del *chi-quadro* con $m-1=7$ gradi di libertà perché dopo il raggruppamento le classi sono diventate $m=8$. Pertanto dalle Tavole E.3 avremo

$$\chi^2_{1-\alpha}(m-1) = \chi^2_{0.950}(7) \simeq 14.07$$

e siccome

$$K_0 \simeq 3.17 < 14.07 \simeq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$$

l'evento critico non si verifica, i dati non sono inn regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.28. *Si misura $n = 500$ volte una v-a X che assume i cinque valori $j = 0, 1, 2, 3, 4,$ e si ottengono le seguenti frequenze dei risultati:*

$$\begin{array}{rccccc} j = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ N_j = & 4 & 51 & 163 & 173 & 109 \end{array}$$

Verificare con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0.05$ se questi dati sono compatibili con l'ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \text{ il campione si adatta alla legge binomiale } \mathfrak{B}\left(4; {}^2\!/_3\right)$$

Soluzione: In questo caso le p_j sono le probabilità binomiali $\mathfrak{B}\left(4; {}^2\!/_3\right)$

$$p_j = \binom{4}{j}\left({}^2\!/_3\right)^j\left({}^1\!/_3\right)^{4-j} \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, 4$$

e come si può vedere dalla tabella seguente, con $n = 500$ non c'è bisogno di raggruppare le classi

j	N_j	p_j	np_j	$\frac{(N_j - npj)^2}{np_j}$
0	4	0.012	6.2	0.765
1	51	0.099	49.4	0.053
2	163	0.296	148.1	1.489
3	173	0.395	197.5	3.046
4	109	0.198	98.8	1.061
			$K_0 =$	**6.414**

Siccome il numero di gradi di libertà è $m = 5$, il quantile del *chi-quadro* che definisce l'evento critico (9.42) di livello $\alpha = 0.05$ è

$$\chi^2_{1-\alpha}(m-1) = \chi^2_{0.950}(4) \simeq 9.49$$

Avremo pertanto

$$K_0 \simeq 6.41 < 9.49 \simeq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$$

per cui l'evento critico non si verifica, i dati non sono inn regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.29. *Si ripete per $n = 200$ volte il lancio di 5 monetine, si conta in ogni ripetizione il numero di teste (con valori $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), e si ottengono le seguenti frequenze*

$$\begin{array}{rcccccc} j = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ N_j = & 8 & 37 & 62 & 56 & 34 & 3 \end{array}$$

Verificare con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0.05$ se questi dati sono compatibili con l'ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \text{ il campione si adatta alla legge binomiale } \mathfrak{B}\left(5; {}^1\!/_2\right)$$

Soluzione: Le p_j sono le probabilità binomiali $\mathfrak{B}\left(5; {}^1\!/_2\right)$

$$p_j = \binom{5}{j}\left({}^1\!/_2\right)^5 \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, 5$$

e come si può vedere dalla tabella seguente, con $n = 200$ non c'è bisogno di raggruppare le classi

j	N_j	p_j	np_j	$\frac{(N_j-npj)^2}{np_j}$
0	8	0.031	6.3	0.490
1	37	0.156	31.3	1.058
2	62	0.313	62.5	0.004
3	56	0.313	62.5	0.676
4	34	0.156	31.3	0.242
5	3	0.031	6.3	1.690
			$K_0 =$	**4.160**

Siccome il numero di gradi di libertà è $m = 6$, il quantile del *chi-quadro* che definisce l'evento critico (9.42) di livello $\alpha = 0.05$ è

$$\chi^2_{1-\alpha}(m-1) = \chi^2_{0.950}(5) \simeq 11.07$$

Avremo pertanto

$$K_0 \simeq 4.16 < 11.07 \simeq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$$

per cui l'evento critico non si verifica, i dati non sono inn regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.30. *Con $n = 200$ misure di una v-a discreta X che prende valori $j = 0, \dots, 4$ si ottengono le seguenti frequenze*

$$\begin{array}{rccccc} j = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ N_j = & 30 & 72 & 70 & 24 & 4 \end{array}$$

Verificare con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0.05$ se questi dati sono compatibili con l'ipotesi

$$\mathcal{H}_0 \;:\; \textit{il campione si adatta alla legge binomiale } \mathfrak{B}\,(4;\,0.4)$$

Soluzione: Le p_j sono le probabilità binomiali $\mathfrak{B}\,(4;\,0.4)$

$$p_j = \binom{4}{j} (0.4)^j \, (0.6)^{4-j} \qquad\qquad j = 0, 1, \dots, 4$$

e come si può vedere dalla tabella seguente, con $n = 200$ non c'è bisogno di raggruppare le classi

j	N_j	p_j	np_j	$\frac{(N_j - npj)^2}{np_j}$
0	30	0.130	25.9	0.642
1	72	0.346	69.1	0.120
2	70	0.346	69.1	0.011
3	24	0.154	30.7	1.470
4	4	0.026	5.1	0.245
			$K_0 =$	**2.488**

Siccome il numero di gradi di libertà è $m = 5$, il quantile del *chi-quadro* che definisce l'evento critico (9.42) di livello $\alpha = 0.05$ è

$$\chi^2_{1-\alpha}(m-1) = \chi^2_{0.950}(4) \simeq 9.49$$

Avremo pertanto

$$K_0 \simeq 2.49 < 9.49 \simeq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$$

per cui l'evento critico non si verifica, i dati non sono inn regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.31. *Si lanciano* 5 *dadi* $n = 2\,000$ *volte, e si conta il numero* X *dei* sei *(*X *prende i valori* $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$*) ottenendo le seguenti frequenze*

$$\begin{array}{rcccccc} j = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ N_j = & 822 & 804 & 300 & 67 & 7 & 0 \end{array}$$

Verificare con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0.05$ *se questi dati sono compatibili con l'ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \;:\; \textit{il campione si adatta alla legge binomiale } \mathfrak{B}\left(5; {}^1/_6\right)$$

Soluzione: Le p_j sono le probabilità binomiali $\mathfrak{B}\left(5; {}^1/_6\right)$

$$p_j = \binom{5}{j} \left({}^1/_6\right)^j \left({}^5/_6\right)^{5-j} \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, 5$$

e come si può vedere dalla tabella seguente, con $n = 2\,000$ c'è bisogno di raggruppare le classi estreme 4 e 5

j	N_j	p_j	np_j	j	q_j	nq_j	M_j	$\frac{(M_j - nqj)^2}{nq_j}$
0	822	0.4019	803.8	0	0.4019	803.8	822	0.4141
1	804	0.4019	803.8	1	0.4019	803.8	804	0.0001
2	300	0.1608	321.5	2	0.1608	321.5	300	1.4381
3	67	0.0322	64.3	3	0.0322	64.3	67	0.1133
4	7	0.0032	6.4	4, 5	0.0033	6.7	7	0.0505
5	0	0.0001	0.3					
							$K_0 =$	**2.0161**

Siccome il numero di gradi di libertà ore è $m = 5$, il quantile del *chi-quadro* che definisce l'evento critico (9.42) di livello $\alpha = 0.05$ è

$$\chi^2_{1-\alpha}(m-1) = \chi^2_{0.950}(4) \simeq 9.49$$

Avremo pertanto

$$K_0 \simeq 2.02 < 9.49 \simeq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$$

per cui l'evento critico non si verifica, i dati non sono inn regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.32. *Un apparecchio contiene* 4 *componenti elettronici identici. Dopo aver funzionato per un certo tempo ogni componente ha una probabilità* p *(non nota) di essere ancora funzionante. Un campione di* $n = 50\,000$ *apparecchi viene esaminato, e per ciascuno di essi si conta il numero* $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$ *di componenti ancora funzionanti ottenendo i seguenti risultati*

$$\begin{array}{rcccccc} j &=& 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ N_j &=& 6 & 201 & 2\,400 & 14\,644 & 32\,749 \end{array}$$

Calcolare la stima $\overline{p}$ *del parametro* p*, e poi verificare con un test del chi-quadro di livello* $\alpha = 0.05$ *se questi dati sono compatibili con l'ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \ : \ \textit{il campione si adatta alla legge binomiale } \mathfrak{B}\,(4; \overline{p})$$

Soluzione: In questo caso bisogna preliminarmente stimare il parametro p con il suo stimatore di MV che in base alla (8.10) del

Teorema 8.15, per $\mathfrak{B}\,(4; p)$ con $n = 50\,000$, nel nostro caso vale

$$\overline{p} = \frac{1}{4\,n}\sum_{j=0}^{4} j N_j \simeq 0.90$$

Le p_j sono quindi le probabilità binomiali $\mathfrak{B}\,(4;\ 0.90)$

$$p_j = \binom{4}{j}\,(0.90)^j\,(0.10)^{4-j} \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, 4$$

e sulla base i queste la seguente tabella indica che non è necessario eseguire nessun raggruppamento di classi, e permette quindi di calcolare il valore della statistica di Pearson K_0

j	N_j	p_j	np_j	$\frac{(N_j - npj)^2}{np_j}$
0	6	0.0001	5.1	0.170
1	201	0.0036	181.9	2.016
2	2 400	0.0489	2 445.4	0.841
3	14 644	0.2923	14 614.5	0.060
4	32 749	0.6551	32 753.3	0.001
			$K_0 =$	**3.088**

Ricordando ora che abbiamo stimato $q = 1$ parametri della distribuzione, l'evento critico di livello $\alpha = 0.05$ assumerà la forma (9.43) e quindi con $m = 5$ possibili valori il quantile del *chi-quadro* necessario è

$$\chi^2_{1-\alpha}(m - q - 1) = \chi^2_{0.950}(3) \simeq 7.81$$

Avremo pertanto

$$K_0 \simeq 3.09 < 7.81 \simeq \chi^2_{1-\alpha}(m - q - 1)$$

per cui l'evento critico non si verifica, i dati non sono in regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.33. $n = 40$ *misure di una quantità aleatoria* X *danno i seguenti risultati:*

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
0.44 & 0.37 & 0.87 & 1.73 & -0.41 & 2.84 & 1.40 & -0.17 & 0.29 & 1.59 \\
0.39 & 2.39 & 1.68 & -0.05 & 1.01 & 1.17 & 0.62 & 2.83 & 0.73 & 0.91 \\
0.31 & -0.92 & 2.28 & 0.74 & 1.02 & 0.70 & 2.06 & 2.56 & 0.94 & 2.56 \\
-0.34 & 1.40 & 1.42 & -0.09 & 2.17 & 1.83 & 1.80 & -0.14 & 1.40 & 0.91
\end{array}$$

Usando le frequenze dei ritrovamenti dei valori del campione nei seguenti $m = 4$ *intervalli*

$$(-\infty, 0] \qquad (0, 1] \qquad (1, 2] \qquad (2, +\infty)$$

stabilire con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0.05$ *quali delle seguenti ipotesi sono accettabili*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &: \text{ il campione si adatta alla legge normale } \mathfrak{N}(1,1) \\
\mathcal{H}_0' &: \text{ il campione si adatta alla legge uniforme } \mathfrak{U}(-1,3)
\end{aligned}$$

Soluzione: La tabella delle frequenze dei ritrovamenti nei quattro intervalli è

intervalli	$(-\infty, 0]$	$(0, 1]$	$(1, 2]$	$(2, +\infty)$
N_j	7	13	12	8

mentre le probabilità assegnate agli stessi quattro intervalli dalla legge $\mathfrak{N}(1,1)$ sono ricavati dalle Tavole E.1 con $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$

$$p_1 = \boldsymbol{P}\{-\infty \leq \mathfrak{N}(1,1) \leq 0\} = \boldsymbol{P}\{-\infty \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq -1\}$$
$$= \Phi(-1) \simeq 0.159$$
$$p_2 = \boldsymbol{P}\{0 \leq \mathfrak{N}(1,1) \leq 1\} = \boldsymbol{P}\{-1 \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq 0\}$$
$$= \Phi(0) - \Phi(-1) \simeq 0.341$$
$$p_3 = \boldsymbol{P}\{1 \leq \mathfrak{N}(1,1) \leq 2\} = \boldsymbol{P}\{0 \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq 1\} = \Phi(1) - \Phi(0) \simeq 0.341$$
$$p_4 = \boldsymbol{P}\{2 \leq \mathfrak{N}(1,1) \leq +\infty\} = \boldsymbol{P}\{1 \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq +\infty\}$$
$$= 1 - \Phi(1) \simeq 0.159$$

e le corrispondenti quattro probabilità assegnate dalla legge uniforme

$\mathfrak{U}(-1,3)$ sono banalmente tutte uguali

$$p'_1 = p'_2 = p'_3 = p'_4 = {}^1/_4$$

Le nostre tabelle saranno allora

intervalli	j	N_j	p_j	np_j	$\frac{(N_j - npj)^2}{np_j}$	p'_j	np'_j	$\frac{(N_j - np'j)^2}{np'_j}$
$(-\infty, 0]$	1	7	0.159	6.3	0.067	0.250	10	0.900
$(0, 1]$	2	13	0.341	13.7	0.031	0.250	10	0.900
$(1, 2]$	3	12	0.341	13.7	0.200	0.250	10	0.400
$(2, +\infty)$	4	8	0.159	6.3	0.431	0.250	10	0.400
				$K_0 =$	**0.730**		$K'_0 =$	**2.600**

e l'evento critico di livello $\alpha = 0.05$ è lo stesso per ambedue i test con $m = 4$ classi e

$$\chi^2_{1-\alpha}(m-1) = \chi^2_{0.950}(3) \simeq 7.81$$

Avremo pertanto

$$K_0 \simeq 0.73 < 7.81 \simeq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$$
$$K_0' \simeq 2.60 < 7.81 \simeq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$$

per cui l'evento critico non si verifica in nessun caso, e quindi accetteremo sia l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ che l'ipotesi $\mathcal{H}_0'$: in pratica i dati sono compatibili con ambedue le distribuzioni nel senso che la loro informazione non permette di distinguere i due casi $\square$

Esercizio A.3.34. $n = 20$ *misure di una quantità aleatoria* X *danno i seguenti risultati:*

$$\begin{array}{rrrrr} -3.601 & 1.064 & 3.370 & 1.535 & 1.017 \\ 1.933 & 3.100 & -0.569 & 1.141 & 1.815 \\ 2.267 & 0.195 & -0.506 & -0.167 & -2.936 \\ -0.211 & -0.659 & -0.375 & 0.024 & 2.765 \end{array}$$

Usando le frequenze dei ritrovamenti dei valori del campione nei seguenti $m = 3$ *intervalli*

$$(-\infty, 0] \qquad (0, 2] \qquad (2, +\infty)$$

stabilire con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0.05$ *se è accettabile la seguente ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \ : \ \textit{il campione si adatta alla legge normale } \mathfrak{N}(1, 4)$$

Soluzione: La tabella delle frequenze dei ritrovamenti nei quattro intervalli è

$$\begin{array}{cccc} \text{intervalli} & (-\infty, 0] & (0, 2] & (2, +\infty) \\ N_j & 8 & 8 & 4 \end{array}$$

mentre le probabilità assegnate agli stessi tre intervalli dalla legge $\mathfrak{N}(1, 4)$ sono ricavati dalle Tavole E.1 e dalla solita procedura di standardizzazione del Teorema 4.11

$$\begin{aligned} p_1 &= \boldsymbol{P}\{-\infty \leq \mathfrak{N}(1,4) \leq 0\} = \boldsymbol{P}\left\{-\infty \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq -\,{}^1\!/_2\right\} \\ &= \Phi(-0.5) \simeq 0.309 \\ p_2 &= \boldsymbol{P}\{0 \leq \mathfrak{N}(1,4) \leq 2\} = \boldsymbol{P}\left\{-\,{}^1\!/_2 \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq \,{}^1\!/_2\right\} \\ &= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) \simeq 0.383 \\ p_3 &= \boldsymbol{P}\{2 \leq \mathfrak{N}(1,4) \leq +\infty\} = \boldsymbol{P}\left\{\,{}^1\!/_2 \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq +\infty\right\} \\ &= 1 - \Phi(0.5) \simeq 0.309 \end{aligned}$$

Avremo pertanto

intervalli	j	N_j	p_j	np_j	$\frac{(N_j-npj)^2}{np_j}$
$(-\infty, 0]$	1	8	0.309	6.2	0.542
$(0, 2]$	2	8	0.383	7.7	0.015
$(2, +\infty)$	3	4	0.309	6.2	0.764
				$K_0 =$	**1.321**

mentre l'evento critico di livello $\alpha = 0.05$ con $m = 3$ classi sarà definito dal quantile

$$\chi^2_{1-\alpha}(m-1) = \chi^2_{0.950}(2) \simeq 5.99$$

Avremo così

$$K_0 \simeq 1.32 < 5.99 \simeq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$$

per cui l'evento critico non si verifica, i dati non sono in regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.35. *Le misure della larghezza del cranio (in mm) effettuate su un campione di* $n = 84$ *scheletri etruschi hanno una media* $\overline{x} = 143.8$ *e una varianza* $s^2 = 36.0$. *La tabella delle frequenze assolute negli intervalli indicati è*

larghezza (mm)	frequenza
$(-\infty, 135]$	5
$[135, 140]$	10
$[140, 145]$	33
$[145, 150]$	24
$[150, +\infty)$	12

Decidere con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0.05$ *se è accettabile la seguente ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \textit{ il campione si adatta alla legge normale } \mathfrak{N}(143.8\,,\,36.0)$$

Soluzione: Le probabilità assegnate ai $m = 5$ intervalli dalla legge $\mathfrak{N}(\overline{x}, s^2) = \mathfrak{N}(143.8\,,\, 36.0)$ sono ricavati dalle Tavole E.1 e dalla procedura di standardizzazione del Teorema 4.11

$$p_1 = \boldsymbol{P}\left\{-\infty \leq \mathfrak{N}(\overline{x}, s^2) \leq 135\right\} = \boldsymbol{P}\{-\infty \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq -1.47\} \simeq 0.071$$

$$p_2 = \boldsymbol{P}\left\{135 \leq \mathfrak{N}(\overline{x}, s^2) \leq 140\right\} = \boldsymbol{P}\{-1.47 \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq -0.63\} \simeq 0.192$$

$$p_3 = \boldsymbol{P}\left\{140 \leq \mathfrak{N}(\overline{x}, s^2) \leq 145\right\} = \boldsymbol{P}\{-0.63 \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq 0.20\} \simeq 0.316$$

$$p_4 = \boldsymbol{P}\left\{145 \leq \mathfrak{N}(\overline{x}, s^2) \leq 150\right\} = \boldsymbol{P}\{0.20 \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq 1.03\} \simeq 0.270$$

$$p_5 = \boldsymbol{P}\left\{150 \leq \mathfrak{N}(\overline{x}, s^2) \leq +\infty\right\} = \boldsymbol{P}\{1.03 \leq \mathfrak{N}(0,1) \leq +\infty\} \simeq 0.151$$

Avremo pertanto

intervalli	j	N_j	p_j	np_j	$\frac{(N_j-npj)^2}{np_j}$
$(-\infty, 135]$	1	5	0.071	6.0	0.162
$[135, 140]$	2	10	0.192	16.1	2.330
$[140, 145)$	3	33	0.316	26.5	1.570
$[145, 150]$	4	24	0.270	22.7	0.077
$[150, +\infty)$	5	12	0.151	12.7	0.034
				$K_0 =$	**4.173**

mentre l'evento critico di livello $\alpha = 0.05$ con $m = 5$ classi sarà definito dal quantile

$$\chi^2_{1-\alpha}(m-1) = \chi^2_{0.950}(4) \simeq 5.99$$

Avremo così

$$K_0 \simeq 4.17 < 5.99 \simeq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$$

per cui l'evento critico non si verifica, i dati non sono in regione critica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.36. *Con* $n = 300$ *misure di una v-a* X *che prende solo valori interi si ottiene la seguente tabella di frequenze*

$$\begin{array}{rccccccc} j = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ N_j = & 40 & 81 & 83 & 52 & 27 & 13 & 4 \end{array}$$

Decidere con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0.01$ *se è accettabile la seguente ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \ : \ \textit{il campione si adatta alla legge binomiale } \mathfrak{B}\left(6; {}^1/_3\right)$$

Risposta: Siccome $n\,\boldsymbol{P}\{X = 6\} \simeq 0.42$ e $n\,\boldsymbol{P}\{X = 5\} \simeq 4.94$, è necessario prima raggruppare i valori $j = 5$ e $j = 6$ riducendo le classi da 7 a 6. Con i nuovi dati si ottiene

$$K_0 \simeq 38.15 > 15.09 \simeq \chi^2_{0.990}(5)$$

per cui l'evento critico si verifica e quindi rifiuteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.37. *Le misure in cm dell'altezza X di $n = 100$ persone si distribuiscono con le seguenti frequenze assolute*

altezza	N_j
≤ 168	*10*
$[168\,, 169]$	*17*
$[169\,, 170]$	*24*
$[170\,, 171]$	*27*
$[171\,, 172]$	*17*
≥ 172	*5*

Supponendo note la media $\mu = 170$ e la varianza $\sigma^2 = 2$, decidere con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0.05$ se è accettabile la seguente ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \text{ il campione si adatta alla legge normale } \mathfrak{N}(\mu, \sigma^2) = \mathfrak{N}(170,\, 2)$$

Risposta: Non c'è bisogno di raggruppamenti di classi: si trova

$$K_0 \simeq 1.92 < 11.07 \simeq \chi^2_{0.950}(5)$$

per cui l'evento critico non si verifica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.38. *Quattro dadi vengono lanciati assieme per* $n = 10\,000$ *volte, e in ogni lancio si osserva quante volte esce "6". I valori* $j = 0, 1, 2, 3, 4$ *del* numero dei "6" in ogni lancio *si presentano con le seguenti frequenze empiriche assolute*

$$\begin{array}{rccccc} j = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ N_j = & 4\,775 & 3\,919 & 1\,143 & 156 & 7 \end{array}$$

Decidere con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0.05$ *se è accettabile la seguente ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \textit{ il campione si adatta alla legge binomiale } \mathfrak{B}\left(4; {}^1/_6\right)$$

Risposta: Non c'è bisogno di raggruppamenti di classi: si trova

$$K_0 \simeq 1.70 < 9.49 \simeq \chi^2_{0.950}(4)$$

per cui l'evento critico non si verifica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.39. *Tre dadi vengono lanciati assieme per* $n = 8\,000$ *volte, e in ogni lancio si osserva quante volte esce "6". I quattro valori* $j = 0, 1, 2, 3$ *del* numero dei "6" in ogni lancio *si presentano con le seguenti frequenze empiriche assolute*

$$\begin{array}{rcccc} j = & 0 & 1 & 2 & 3 \\ N_j = & 4\,481 & 2\,868 & 603 & 48 \end{array}$$

Decidere con un test del chi-quadro di livello $\alpha = 0.05$ *se è accettabile la seguente ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \textit{ il campione si adatta alla legge binomiale } \mathfrak{B}\left(3;\, {}^1\!/_6\right)$$

Risposta: Non c'è bisogno di raggruppamenti di classi: si trova

$$K_0 \simeq 14.00 > 7.81 \simeq \chi^2_{0.950}(3)$$

per cui l'evento critico si verifica e quindi rifiuteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.40. *Si misurano la lunghezza X e il peso Y di $n = 600$ pezzi prodotti da una fabbrica per controllare se sono:* troppo lunghi, giusti, *o* troppo corti *in X;* troppo pesanti, giusti, troppo leggeri *in Y. I risultati della verifica sono riassunti nella seguente tabella di contingenza*

	corti	giusti	lunghi
leggeri	6	48	8
giusti	52	402	36
pesanti	6	38	4

Stabilire con un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.05$ se è accettabile l'ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \textit{ le quantià misurate } X \textit{ e } Y \textit{ sono indipendenti}$$

Soluzione: Conviene riprodurre innanzitutto la tabella di contingenza completandola con le marginali e il numero totale degli oggetti misurati che viene riportato nell'angolo in basso a destra. Successivamente sotto ognuna delle frequenze della tabella (numeri in grassetto) conviene riportare il relativo valore delle quantità

$$n\overline{p}_j\overline{q}_k = \frac{N_{j\,\cdot}\,N_{\cdot\,k}}{n}$$

necessarie per calcolare poi gli addendi della statistica di Pearson (9.44)

$$\frac{(N_{jk} - n\overline{p}_j\overline{q}_k)^2}{n\overline{p}_j\overline{q}_k}$$

i cui valori sono registrati nella seconda riga sotto ciascuna frequenza

	corti	*giusti*	*lunghi*	marg
leggeri	***6*** 6.61 0.057	***48*** 50.43 0.117	***8*** 4.96 1.863	***62***
giusti	***52*** 52.27 0.001	***402*** 398.53 0.030	***36*** 39.20 0.261	***490***
pesanti	***6*** 5.12 0.151	***38*** 39.04 0.028	***4*** 3.84 0.007	***48***
marg	***64***	***488***	***48***	***600***

A questo punto la statistica di Pearson si ottiene sommando tutti i termini riportati nella seconda riga sotto le frequenze

$$K_0 = \sum_{j,k} \frac{(N_{jk} - n\overline{p}_j\overline{q}_k)^2}{n\overline{p}_j\overline{q}_k} \simeq 2.515$$

L'evento critico (9.45) di livello $\alpha = 0.05$ con $r = s = 3$ classi di possibili valori di X e Y è d'altra parte definito dal quantile del *chi-quadro*

$$\chi^2_{1-\alpha}[(r-1)(s-1)] = \chi^2_{0.950}(4) \simeq 9.488$$

e siccome risulta

$$K_0 \simeq 2.515 < 9.488 \simeq \chi^2_{1-\alpha}[(r-1)(s-1)]$$

l'evento critico non si verifica e quindi accetteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ di indipendenza $\square$

Esercizio A.3.41. *Si sceglie un campione di* $n = 250$ *individui che usano quotidianamente un automezzo privato per raggiungere il posto di lavoro: ogni soggetto è classificato in base alla potenza* X *della propria vettura e alla distanza* Y *in Km che percorre ogni giorno ottenendo i dati della seguente tabella di contingenza*

	$0/10\ Km$	$10/20\ Km$	$> 20\ Km$
molto potente	6	27	19
potente	8	36	17
normale	21	45	33
piccola	14	18	6

Stabilire con un test del χ^2 *di livello* $\alpha = 0.05$ *se è accettabile l'ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \textit{ le quantià misurate } X \textit{ e } Y \textit{ sono indipendenti}$$

Soluzione: La tabella di contingenza completata come nel caso precedente è

	$0/10\ Km$	$10/20\ Km$	$> 20\ Km$	marg
molto potente	***6*** 10.19 1.724	***27*** 26.21 0.024	***19*** 15.60 0.741	***52***
potente	***8*** 11.96 1.309	***36*** 30.74 0.899	***17*** 18.30 0.092	***61***
normale	***21*** 19.40 0.131	***45*** 49.90 0.480	***33*** 29.70 0.367	***99***
piccola	***14*** 7.45 5.764	***18*** 19.15 0.069	***6*** 11.40 2.558	***38***
marg	***49***	***126***	***75***	***250***

e quindi la statistica di Pearson (9.44) vale

$$K_0 \simeq 14.158$$

Siccome il quantile del *chi-quadro* che definisce l'evento critico di livello $\alpha = 0.05$ con $r = 4, s = 3$ è

$$\chi^2_{1-\alpha}[(r-1)(s-1)] = \chi^2_{0.950}(6) \simeq 12.592$$

avremo

$$K_0 \simeq 14.16 > 12.59 \simeq \chi^2_{1-\alpha}[(r-1)(s-1)]$$

sicché l'evento critico si verifica, i dati sono in regione critica e quindi rifiuteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ di indipendenza $\square$

Esercizio A.3.42. *Viene effettuata un'indagine per sapere quale mezzo di comunicazione è considerato più affidabile: ad ogni individuo viene richiesta età, sesso, titolo di studio e mezzo di comunicazione ritenuto più affidabile. I risultati sono riassunti nelle seguenti tre tabelle di contingenza*

	giornale	televisione	radio
< 35 anni	30	68	10
35/54 anni	61	78	21
> 54 anni	98	43	21

	giornale	televisione	radio
maschio	92	108	20
femmina	97	81	32

	giornale	televisione	radio
media inferiore	45	22	6
media superiore	95	115	33
università	49	52	13

Stabilire con un test del χ^2 *di livello* $\alpha = 0.05$ *se sono separatamente accettabili le tre ipotesi*

$\mathcal{H}_0$: *il giudizio è indipendente da età, sesso o titolo di studio*

Soluzione: Le tre tabelle completate sono le seguenti

	giornale	*televisione*	*radio*	marg
< 35 *anni*	***30*** 47.47 6.429	***68*** 47.47 8.879	***10*** 13.06 0.717	***108***
$35/54$ *anni*	***61*** 70.33 1.237	***78*** 70.33 0.837	***21*** 19.35 0.141	***160***
> 54 *anni*	***98*** 71.20 10.083	***43*** 71.20 11.172	***21*** 19.59 0.101	***162***
marg	***189***	***189***	***52***	***430***

	giornale	*televisione*	*radio*	marg
maschio	***92*** 96.70 0.228	***108*** 96.70 1.321	***20*** 26.60 1.640	***220***
femmina	***97*** 92.30 0.239	***81*** 92.30 1.384	***32*** 25.40 1.718	***210***
marg	***189***	***189***	***52***	***430***

	giornale	*televisione*	*radio*	marg
media inferiore	***45*** 32.09 5.198	***22*** 32.09 3.170	***6*** 8.83 0.906	***73***
media superiore	***95*** 106.81 1.305	***115*** 106.81 0.628	***33*** 29.39 0.444	***243***
università	***49*** 50.11 0.024	***52*** 50.11 0.072	***13*** 13.79 0.045	***114***
marg	***189***	***189***	***52***	***430***

I valori della statistica di Pearson e dei quantili del *chi-quadro* per eventi critici di livello $\alpha = 0.05$ sono per le tre tabelle

$$K_0 \simeq \begin{cases} 39.60 > 9.49 \simeq \chi^2_{0.95}(4) & (r=3, s=3) & \text{età} \\ 6.53 > 5.99 \simeq \chi^2_{0.95}(2) & (r=3, s=2) & \text{sesso} \\ 11.79 > 9.49 \simeq \chi^2_{0.95}(4) & (r=3, s=3) & \text{titolo} \end{cases}$$

per cui gli eventi critici si verificano in tutti e tre i casi e quindi rifiuteremo tutte e tre le ipotesi $\mathcal{H}_0$ di indipendenza dei giudizi da età, sesso e titolo di studio $\square$

Esercizio A.3.43. *Un'azienda vuole verificare l'affidabilità di tre diverse configurazioni (A, B e C) di una macchina industriale esaminando i guasti a cui essa è soggetta: sapendo che ci sono quattro possibili tipi di guasti (1, 2, 3 e 4) e che i dati sono quelli della seguente tabella*

	1	*2*	*3*	*4*
A	20	44	17	9
B	4	17	7	12
C	10	31	14	5

Stabilire con un test del χ^2 *di livello* $\alpha = 0.05$ *se è accettabile l'ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \textit{ il tipo di guasti indipendente dalla configurazione della macchina}$$

Soluzione: La tabella di contingenza completata è

	1	2	3	4	marg
A	***20*** 16.11 0.942	***44*** 43.58 0.004	***17*** 18.00 0.056	***9*** 12.32 0.893	***90***
B	***4*** 7.16 1.393	***17*** 19.37 0.290	***7*** 0.00 0.125	***12*** 5.47 7.781	***40***
C	***10*** 10.74 0.051	***31*** 29.05 0.131	***14*** 12.00 0.333	***5*** 8.21 1.255	***60***
marg	***34***	***92***	***38***	***26***	***190***

e quindi la statistica di Pearson (9.44) vale

$$K_0 \simeq 12.739$$

Siccome il quantile del *chi-quadro* che definisce l'evento critico di livello $\alpha = 0.05$ con $r = 3, s = 4$ è

$$\chi^2_{1-\alpha}[(r-1)(s-1)] = \chi^2_{0.950}(6) \simeq 12.592$$

avremo

$$K_0 \simeq 12.74 > 12.59 \simeq \chi^2_{1-\alpha}[(r-1)(s-1)]$$

sicché l'evento critico si verifica, i dati sono in regione critica e quindi rifiuteremo l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ di indipendenza. Data la ristrettezza del margine, però, l'esito del test appare poco significativo $\square$

Esercizio A.3.44. *Il direttore di una scuola vuol sapere se l'opinione delle famiglie su un certo cambiamento di orario scolastico dipende dal fatto che la loro abitazione è situata in una zona urbana o in una zona rurale. Si chiede pertanto il parere di $n = 500$ famiglie ottenendo i risultati riportati nella seguente tabella*

	favorevoli	*contrari*	*indifferenti*
urbana	123	36	41
rurale	145	85	70

Stabilire con un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.01$ se è accettabile l'ipotesi

$\mathcal{H}_0$: *l'opinione è indipendente dalla collocazione dell'abitazione*

Risposta: Si verifica l'evento critico: $K_0 \simeq 9.610 > 9.210 \simeq \chi^2_{0.990}(2)$, per cui si rifiuta l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.45. *In un paese si vuol sapere se le risposte (favorevole o contrario) dei cittadini ad una determinata questione sono o meno influenzate dall'età . Si chiede pertanto il parere di* $n = 600$ *persone ottenendo i risultati riportati nella seguente tabella*

	giovani	*maturi*	*anziani*
favorevoli	100	150	30
contrari	126	120	74

Stabilire con un test del χ^2 *di livello* $\alpha = 0.05$ *se è accettabile l'ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 \, : \; \textit{l'opinione dei cittadini è indipendente dall'età}$$

Risposta: Si verifica l'evento critico: $K_0 \simeq 22.37 > 5.99 \simeq \chi^2_{0.950}(2)$, per cui si rifiuta l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.46. *Una ditta che vende automobili vuol sapere se l'età degli acquirenti (giovani, maturi e anziani) influenza la scelta del colore (bianco, rosso o nero) delle vetture vendute. Si esaminano i dati relativi a* $n = 500$ *contratti di vendita ottenendo i risultati riportati nella seguente tabella*

	giovani	*maturi*	*anziani*
bianco	56	60	40
rosso	47	87	38
nero	23	64	85

Stabilire con un test del χ^2 *di livello* $\alpha = 0.05$ *se è accettabile l'ipotesi*

$$\mathcal{H}_0 : \textit{ il colore scelto è indipendente dall'età degli acquirenti}$$

Risposta: Si verifica l'evento critico: $K_0 \simeq 44.40 > 9.49 \simeq \chi^2_{0.950}(4)$, per cui si rifiuta l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$

Esercizio A.3.47. *Un professore vuol sapere se i voti (in trentesimi) registrati per il suo esame dipendono o meno dall'anno di immatricolazione degli studenti. Egli esamina i voti $n = 378$ studenti immatricolati in diversi anni accademici e ottiene i risultati riportati nella seguente tabella*

	18-20	*21-23*	*24-26*	*27-30*
2000/01	17	30	50	15
2001/02	15	26	34	10
2002/03	11	25	38	19
2003/04	9	40	29	10

Stabilire con un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.01$ se è accettabile l'ipotesi

$$\mathcal{H}_0 : \textit{ il voto è indipendente dall'anno di immatricolazione}$$

Risposta: Non si verifica l'evento critico: $K_0 \simeq 14.03 < 21.67 \simeq \chi^2_{0.990}(9)$, per cui si accetta l'ipotesi $\mathcal{H}_0$ $\square$