



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LÉON
FACULTAD DE INGENIERIA MÉCANICA Y ELÉCTRICA

Formulario de Matemáticas

Autores: M.C Santiago Neira Rosales
M.A. Claudia Moreno Rodriguez
Dr.Ricardo Jesus Villareal Lozano

ISBN:

U

#SOMOSUNI

Juntos por
FIME
Con identidad y orgullo
#SOMOSLOQUEHACEMOS



Indice

Álgebra: conceptos básicos

Trigonometría: Conceptos básicos

Geometría Analítica

Álgebra

Cálculo Diferencia

Cálculo Integral

Ecuaciones Diferenciales

Series de Fourier

Transformadas de Laplace



Leyes de los Exponentes:

- I. $a^m a^n = a^{m+n}$
- II. $(a^m)^n = a^{mn}$
- III. $(ab)^m = a^m b^m$
- IV. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$
- V. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^n} \quad (a \neq 0)$

Exponentes negativos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

Exponentes fraccionarios

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

Si q es par: $a > 0$

Exponentes nulos

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Productos notables

- 1) Monomio por Polinomio

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

- 2) Producto de binomios conjugados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

- 3) Binomio al cuadrado

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

- 4) Binomio al cubo

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

- 5) Polinomio al cuadrado

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

- 6) Producto de binomios con términos semejantes

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

- 7) Binomio por Trinomio

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

U

Función logaritmo con base “a”:

$$f(u) = \log_a(u)$$

Función logaritmo natural

$$f(u) = \log_e(u) = \ln(u)$$

u = argumento ($u > 0$)

a = cualquier constante ($a > 0$)

e = Constante de Euler
 ≈ 2.718

Leyes de los Logaritmos:

$p > 0$ y $q > 0$

$$\ln(pq) = \ln p + \ln q$$

$$\ln\left(\frac{p}{q}\right) = \ln p - \ln q$$

$$\ln(p)^r = r \ln p$$

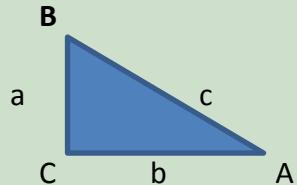
Propiedad de la función exponencial

$$e^{\ln(u)} = u \quad u > 0 \quad \ln e^u = u$$

U



Funciones trigonométricas



$$\begin{aligned}\operatorname{Sen} A &= \frac{a}{c}; \operatorname{Cos} A = \frac{b}{c}; \operatorname{Tan} A = \frac{a}{b} \\ \operatorname{Cot} A &= \frac{b}{a}; \operatorname{Sec} A = \frac{c}{b}; \operatorname{Csc} A = \frac{c}{a}\end{aligned}$$

Identidades trigonométricas:

$$\operatorname{Sen} u \operatorname{Csc} u = 1$$

$$\operatorname{Cos} u \operatorname{Sec} u = 1$$

$$\operatorname{Tan} u \operatorname{Cot} u = 1$$

$$\operatorname{Sen}^2 u + \operatorname{Cos}^2 u = 1$$

$$\operatorname{Sec}^2 u = 1 + \operatorname{Tan}^2 u$$

$$\operatorname{Csc}^2 u = 1 + \operatorname{Cot}^2 u$$

$$\operatorname{Tan} u = \frac{\operatorname{Sen} u}{\operatorname{Cos} u}; \operatorname{Cot} u = \frac{\operatorname{Cos} u}{\operatorname{Sen} u}$$

$$\operatorname{Sen}(-A) = -\operatorname{Sen} A$$

$$\operatorname{Cos}(-A) = \operatorname{Cos} A$$



Angulo doble:

$$\operatorname{Sen} 2u = 2 \operatorname{Sen} u \operatorname{Cos} u$$

$$\operatorname{Cos} 2u = \operatorname{Cos}^2 u - \operatorname{Sen}^2 u$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Sen}^2 u &= \frac{1 - \operatorname{Cos} 2u}{2} \\ \operatorname{Cos}^2 u &= \frac{1 + \operatorname{Cos} 2u}{2}\end{aligned}$$

Funciones hiperbólicas:

$$\operatorname{Senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \operatorname{Cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Identidades hiperbólicas:

$$\operatorname{Senh} u \operatorname{Csch} u = 1$$

$$\operatorname{Cosh} u \operatorname{Sech} u = 1$$

$$\operatorname{Tanh} u \operatorname{Coth} u = 1$$

$$\operatorname{Cosh}^2 u - \operatorname{Senh}^2 u = 1$$

$$\operatorname{Sech}^2 u = 1 - \operatorname{Tanh}^2 u$$

$$\operatorname{Coth}^2 u = 1 + \operatorname{Csch}^2 u$$

$$\operatorname{Tanh} u = \frac{\operatorname{Senh} u}{\operatorname{Cosh} u}; \operatorname{Coth} u = \frac{\operatorname{Cosh} u}{\operatorname{Senh} u}$$

$$\operatorname{Senh} 2u = 2 \operatorname{Senh} u \operatorname{Cosh} u$$

$$\operatorname{Cosh} 2u = \operatorname{Cosh}^2 u + \operatorname{Senh}^2 u$$





Funciones hiperbólicas inversas:

$$\operatorname{Senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right)$$

$$\operatorname{Cosh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right)$$

$$\operatorname{Csch}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{|u|}\right)$$

$$\operatorname{Sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{|u|}\right)$$

$$\operatorname{Tanh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right|$$



Números Complejos:

Forma rectangular: $x + y i$

Forma Polar: $r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$r = \text{Módulo}$ ($r > 0$)

$\theta = \text{Argumento}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)

Transformación de forma rectangular a forma polar:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Transformación de forma polar a forma rectangular:

$$x = r \cos \theta ; y = r \sin \theta$$

Teorema de De Moivre

Potencias: $n \in \mathbb{N}$

$$(x + yi)^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

Raíces: $n \in \mathbb{N}$

$$(x + yi)^{1/n} = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^{1/n} = r^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\theta + K * 360}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + K * 360}{n} \right) \right]$$

$$K = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$





Vectores:

Sean:

$$\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle = w_1 \mathbf{i} + w_2 \mathbf{j} + w_3 \mathbf{k}$$

Magnitud de \mathbf{u}

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}$$

Vector unitario (\mathbf{U}) en la dirección de \mathbf{u}

$$\mathbf{U}_\mathbf{u} = \left\langle \frac{u_1}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{u_2}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{u_3}{\|\mathbf{u}\|} \right\rangle$$

Producto punto o Producto escalar

$$\mathbf{u} * \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\mathbf{u} * \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$



Producto cruz o Producto vectorial

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Producto Mixto:

$$\mathbf{u} * (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) * \mathbf{w}$$

Vectores paralelos:

\mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos si existe un escalar "c" tal que $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$

Vectores ortogonales:

\mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales si $\mathbf{u} * \mathbf{v} = 0$

Área de un paralelogramo con lados adyacentes los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} :

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \text{ unidades cuadradas}$$



Volumen de un paralelepípedo con aristas adyacentes los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} :

$$V = \|\mathbf{u} * (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\| u^3$$

Ecuaciones paramétricas de una línea recta en el espacio:

Una recta L paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$

Y que pasa por el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ está dada

Por las ecuaciones paramétricas:

$$x = x_1 + at; \quad y = y_1 + bt; \quad z = z_1 + ct$$

Ecuación canónica del plano en el espacio:

El plano que contiene el punto $P(x_1, y_1, z_1)$

Y tiene un vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$

Puede representarse en forma canónica por la

Ecuación: $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

Ecuación general de un plano en el espacio:

$$ax + by + cz + d = 0$$



Definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Reglas básicas de derivación:

$$D_x[c] = 0 \text{ en donde } c \text{ es una constante}$$

$$D_x[x] = 1$$

$$D_x[x^n] = nx^{n-1}$$

$$D_x[c f(x)] = c D_x[f(x)]$$

$$D_x[f(x) \pm g(x)] = D_x[f(x)] \pm D_x[g(x)]$$

$$D_x[u * v] = u D_x[v] + v D_x[u]$$

$$D_x \left[\frac{u}{v} \right] = \frac{v D_x[u] - u D_x[v]}{v^2}$$



Si $u = f(x)$

Derivadas de Funciones exponenciales:

Natural: $D_x[e^u] = e^u D_x u$

Con base "a":

$$D_x[a^u] = a^u \ln a D_x u \quad a > 0$$

Derivadas de funciones logarítmicas:

Natural: $D_x[\ln u] = \frac{D_x u}{u}$

Con base "a":

$$D_x[\log_a u] = \frac{D_x u}{u \ln a} \quad a > 0$$



Derivadas de funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} D_x[\Sen u] &= \Cos u D_x u \\ D_x[\Cos u] &= -\Sen u D_x u \\ D_x[\Tan u] &= \Sec^2 u D_x u \\ D_x[\Cot u] &= -\Csc^2 u D_x u \\ D_x[\Sec u] &= \Sec u \Tan u D_x u \\ D_x[\Csc u] &= -\Csc u \Cot u D_x u \end{aligned}$$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas:

$$\begin{aligned} D_x[\Sen^{-1} u] &= \frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}} & D_x[\Cot^{-1} u] &= \frac{-D_x u}{1+u^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x[\Cos^{-1} u] &= \frac{-D_x u}{\sqrt{1-u^2}} & D_x[\Sec^{-1} u] &= \frac{D_x u}{|u|\sqrt{u^2-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x[\Tan^{-1} u] &= \frac{D_x u}{1+u^2} & D_x[\Csc^{-1} u] &= \frac{-D_x u}{|u|\sqrt{u^2-1}} \end{aligned}$$

Nota: $\Sen^{-1} u = \Arc \Sen u$





Derivadas de funciones hiperbólicas:

$$D_x[\operatorname{Senh} u] = \operatorname{Cosh} u D_x u$$

$$D_x[\operatorname{Cosh} u] = \operatorname{Senh} u D_x u$$

$$D_x[\operatorname{Tanh} u] = \operatorname{Sech}^2 u D_x u$$

$$D_x[\operatorname{Coth} u] = -\operatorname{Csch}^2 u D_x u$$

$$D_x[\operatorname{Sech} u] = -\operatorname{Sech} u \operatorname{Tanh} u D_x u$$

$$D_x[\operatorname{Csch} u] = -\operatorname{Csch} u \operatorname{Coth} u D_x u$$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas:

$$D_x[\operatorname{Senh}^{-1} u] = \frac{D_x u}{\sqrt{1+u^2}} \quad D_x[\operatorname{Coth}^{-1} u] = \frac{D_x u}{1-u^2}$$

$$D_x[\operatorname{Cosh}^{-1} u] = \frac{D_x u}{\sqrt{u^2-1}} \quad D_x[\operatorname{Sech}^{-1} u] = \frac{-D_x u}{|u|\sqrt{1-u^2}}$$

$$D_x[\operatorname{Tanh}^{-1} u] = \frac{D_x u}{1-u^2} \quad D_x[\operatorname{Csch}^{-1} u] = \frac{-D_x u}{|u|\sqrt{u^2+1}}$$



Gradiente:

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Derivada direccional:

La derivada direccional de f en la dirección del vector unitario \mathbf{U} está dado por:

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \nabla f(x, y) * \mathbf{U}$$

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) * \mathbf{U}$$





Reglas básicas de integración:

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int K f(x) dx = K \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Cambio de variable:

$$\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

Función logarítmica:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

U



Funciones exponenciales:

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

Funciones trigonométricas

$$\int \operatorname{Sen} u du = -\operatorname{Cos} u + C$$

$$\int \operatorname{Cos} u du = \operatorname{Sen} u + C$$

$$\int \operatorname{Tan} u du = \ln|\operatorname{Sec} u| + C$$

$$\int \operatorname{Cot} u du = \ln|\operatorname{Sen} u| + C$$

$$\int \operatorname{Sec} u du = \ln |\operatorname{Sec} u + \operatorname{Tan} u| + C$$

$$\int \operatorname{Csc} u du = \ln|\operatorname{Csc} u - \operatorname{Cot} u| + C$$

U



Continuación de funciones trigonométricas

$$\int \operatorname{Sec}^2 u \, du = \operatorname{Tan} u + C$$

$$\int \operatorname{Csc}^2 u \, du = -\operatorname{Cot} u + C$$

$$\int \operatorname{Sec} u \operatorname{Tan} u \, du = \operatorname{Sec} u + C$$

$$\int \operatorname{Csc} u \operatorname{Cot} u \, du = -\operatorname{Csc} u + C$$



Funciones hiperbólicas

$$\int \operatorname{Senh} u \, du = \operatorname{Cosh} u + C$$

$$\int \operatorname{Cosh} u \, du = \operatorname{Senh} u + C$$

$$\int \operatorname{Tanh} u \, du = \ln|\operatorname{Cosh} u| + C$$

$$\int \operatorname{Coth} u \, du = \ln|\operatorname{Senh} u| + C$$

$$\int \operatorname{Sech}^2 u \, du = \operatorname{Tanh} u + C$$

$$\int \operatorname{Csch}^2 u \, du = -\operatorname{Coth} u + C$$

$$\int \operatorname{Sech} u \operatorname{Tanh} u \, du = -\operatorname{Sech} u + C$$

$$\int \operatorname{Csch} u \operatorname{Coth} u \, du = -\operatorname{Csch} u + C$$





Funciones trigonométricas inversas

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Tan}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{Sec}^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \operatorname{Senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \operatorname{Cosh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{-1}{a} \operatorname{Csch}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{-1}{a} \operatorname{Sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Tanh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$



Integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

En donde: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\Delta x$

Teoremas de sumatorias:

Sean n y c constantes

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

$$\sum_{i=1}^n c f(i) = c \sum_{i=1}^n f(i)$$

$$\sum_{i=1}^n [f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=1}^n f(i) \pm \sum_{i=1}^n g(i)$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$





Teorema fundamental del Cálculo:

Si

$F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{en donde:}$$

u y v son funciones de x

Sustitución trigonométrica:

Forma	Sustitución	La raíz se sustituye por:
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a \operatorname{Sen} \theta$	$a \operatorname{Cos} \theta$
$\sqrt{a^2 + u^2}$	$u = a \operatorname{Tan} \theta$	$a \operatorname{Cos} \theta$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = a \operatorname{Sec} \theta$	$a \operatorname{Tan} \theta$



Casos trigonométricos:

Caso 1: $\int \operatorname{Sen}^n u du$; $\int \operatorname{Cos}^n u du$; en donde

"n" es entero impar positivo. Expresar:

$$\operatorname{Sen}^n u = \operatorname{Sen}^{n-1} u \operatorname{Sen} u$$

$$\text{Usar: } \operatorname{Sen}^2 u = 1 - \operatorname{Cos}^2 u$$

$$\operatorname{Cos}^n u = \operatorname{Cos}^{n-1} u \operatorname{Cos} u$$

$$\text{Usar: } \operatorname{Cos}^2 u = 1 - \operatorname{Sen}^2 u$$

Caso 2: $\int \operatorname{Sen}^n u \operatorname{Cos}^m u du$; en donde al

menos un exponente es entero impar positivo.

Utilizar: $\operatorname{Sen}^2 u + \operatorname{Cos}^2 u = 1$ de manera similar al Caso 1.

Nota: Si los dos exponentes son enteros impares positivos se cambia el impar menor.

Caso 3: $\int \operatorname{Sen}^n u du$; $\int \operatorname{Cos}^m u du$;

$\int \operatorname{Sen}^n u \operatorname{Cos}^m u du$; Donde n y m son enteros pares positivos. Utilizar:

$$\operatorname{Sen}^2 u = \frac{1 - \operatorname{Cos} 2u}{2}; \operatorname{Cos}^2 u = \frac{1 + \operatorname{Cos} 2u}{2}$$





Caso 4: $\int \operatorname{Sen}(ax)\operatorname{Cos}(bx)du;$

$\int \operatorname{Sen}(ax)\operatorname{Sen}(bx)du;$

$\int \operatorname{Cos}(ax)\operatorname{Cos}(bx)du;$ En donde a y b son números cualesquiera, $a \neq b$. Utilizar:

$$\operatorname{Sen}A \operatorname{Cos}B = \frac{1}{2}[\operatorname{Sen}(A - B) + \operatorname{Sen}(A + B)]$$

$$\operatorname{Sen}A \operatorname{Sen}B = \frac{1}{2}[\operatorname{Cos}(A - B) - \operatorname{Cos}(A + B)]$$

$$\operatorname{Cos}A \operatorname{Cos}B = \frac{1}{2}[\operatorname{Cos}(A - B) + \operatorname{Cos}(A + B)]$$

Caso 5: $\int \operatorname{Tan}^n u du;$ $\int \operatorname{Cot}^n u du;$ en donde n es cualquier número entero positivo. ($n \geq 2$)

Expresar:

$$\operatorname{Tan}^n u = \operatorname{Tan}^{n-2} u (\operatorname{Sec}^2 u - 1)$$

$$\operatorname{Cot}^n u = \operatorname{Cot}^{n-2} u (\operatorname{Csc}^2 u - 1)$$

Caso 6: $\int \operatorname{Sec}^n u du;$ $\int \operatorname{Csc}^n u du;$ en donde n es entero par positivo ($n > 2$). Expresar:

$$\operatorname{Sec}^n u = (\operatorname{Tan}^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \operatorname{Sec}^2 u$$

$$\operatorname{Csc}^n u = (\operatorname{Cot}^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \operatorname{Csc}^2 u$$

Nota: Si n es impar integrar por partes.



Caso 7: $\int \operatorname{Tan}^m u \operatorname{Sec}^n u du;$

$\int \operatorname{Cot}^m u \operatorname{Csc}^n u du$ en donde n es entero par positivo, mayor a 2. Escribir: $\operatorname{Sec}^n u$ o $\operatorname{Csc}^n u$ como en el caso 6.

Caso 8: $\int \operatorname{Tan}^m u \operatorname{Sec}^n u du;$

$\int \operatorname{Cot}^m u \operatorname{Csc}^n u du$ en donde m es entero impar positivo. Expresar:

$$\operatorname{Tan}^m u \operatorname{Sec}^n u = \operatorname{Tan}^{m-1} u \operatorname{Sec}^{n-1} u \operatorname{Tan} u \operatorname{Sec} u$$

$$\text{Usar: } \operatorname{Tan}^2 u = \operatorname{Sec}^2 u - 1$$

$$\operatorname{Cot}^m u \operatorname{Csc}^n u = \operatorname{Cot}^{m-1} u \operatorname{Csc}^{n-1} u \operatorname{Cot} u \operatorname{Csc} u$$

$$\text{Usar: } \operatorname{Cot}^2 u = \operatorname{Csc}^2 u - 1$$

Nota: Si m es par y n es impar integrar por partes





Fracciones parciales:

Caso I. Factores lineales distintos:

A cada factor lineal $(ax + b)$, del denominador, le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{A}{ax + b}$$

Caso II. Factores lineales repetidos:

A cada factor lineal repetido $(ax + b)^k$, ($k > 1$), le corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$



Caso III. Factores cuadráticos distintos:

A cada factor cuadrático $(ax^2 + bx + c)$ corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Caso IV: Factores cuadráticos repetidos:

A cada factor cuadrático repetido $(ax^2 + bx + c)^k$ le corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

Aplicaciones de la integral definida:

Área entre dos curvas:

Utilizando dx se genera un rectángulo vertical:

$$A = \int_a^b \left[\left(\begin{matrix} \text{función} \\ \text{arriba} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \text{función} \\ \text{abajo} \end{matrix} \right) \right] dx$$

Utilizando dy se genera un rectángulo horizontal:

$$A = \int_a^b \left[\left(\begin{matrix} \text{función} \\ \text{derecha} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \text{función} \\ \text{izquierda} \end{matrix} \right) \right] dy$$





Aplicaciones de la integral definida:

Volumen de sólidos de revolución:

Método del Disco o de la Arandela

Cuando el eje de revolución es horizontal:

$$V = \pi \int_a^b [(R_e)^2 - (R_i)^2] dx$$

En donde R_e y R_i son funciones de x

Cuando el eje de revolución es vertical:

$$V = \pi \int_a^b [(R_e)^2 - (R_i)^2] dy$$

En donde R_e y R_i son funciones de y

Método de la corteza cilíndrica.

Cuando el eje de revolución es horizontal:

$$V = 2\pi \int_a^b r(y) h(y) dy$$

Cuando el eje de revolución es vertical:

$$V = 2\pi \int_a^b r(x) h(x) dx$$



Distancia entre dos puntos

$P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$dP_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio (P) de un segmento P_1P_2

cuyos extremos están dados por

$P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Pendiente (m) de una recta:

Dado su ángulo de inclinación (α):

$$m = \tan \alpha$$

Dados dos puntos de la recta

$P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$





Ecuación de la recta:

Forma punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma ordenada en el origen

$$y = mx + b$$

Forma General u Ordinaria

$$Ax + By + C = 0$$

Forma simétrica

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Donde:

" m " es la pendiente de la recta.

" x_1 " y " y_1 " son las coordenadas de un punto que pertenece a la recta.

($a, 0$) es el punto de intersección con el eje X

($0, b$) es el punto de intersección con el eje Y



Circunferencia

Centro en $C(0,0)$: $x^2 + y^2 = r^2$

Centro en $C(h,k)$: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
 $r = \text{radio}$

Parábola

$p = \text{distancia del Vértice al Foco}$
 $V = \text{Vértice}; F = \text{Foco}$

$V(0,0)$ y eje sobre el eje X
 $y^2 = 4px$

$V(0,0)$ y eje sobre el eje Y
 $x^2 = 4py$

$V(h,k)$ y eje paralelo o sobre el eje X
 $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

$V(h,k)$ y eje paralelo o sobre el eje Y
 $(x - h)^2 = 4p(y - k)$





Elipse

$C(0,0)$ y eje focal sobre el eje X

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$C(0,0)$ y eje focal sobre el eje Y

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$C(h,k)$ y eje focal paralelo o sobre el eje X

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$C(h,k)$ y eje focal paralelo o sobre el eje Y

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$2a =$ longitud de eje mayor

$2b =$ longitud de eje menor



Hipérbola

$C(0,0)$ y eje focal sobre el eje X

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$C(0,0)$ y eje focal sobre el eje Y

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$C(h,k)$ y eje focal paralelo o sobre el eje X

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$C(h,k)$ y eje focal paralelo o sobre el eje Y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$2a =$ longitud de eje transverso

$2b =$ longitud de eje conjugado





Ecuaciones diferenciales de primer orden

1) Ecuación diferencial separable

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Se integra en ambos lados y se obtiene la solución general.

2) Ecuación diferencial exacta

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Es exacta si: $M_y(x, y) = N_x(x, y)$

3) Ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} + h(x)y = g(x)$$

$$\text{factor integrante} = e^{\int h(x)dx}$$



4) Ecuación diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + h(x)y = g(x)y^n \quad ; n \neq 0, n \neq 1$$

Se hace la sustitución $y = ve^{-\int h(x)dx}$

5) Ecuación diferencial homogénea

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Es homogénea si:

$$M(tx, ty) = t^\beta M(x, y) \quad y \quad N(tx, ty) = t^\beta N(x, y)$$

Se hace la sustitución: $y = vx \quad ó \quad x = vy$





Ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes:

$$Ec.1 \quad (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)y = 0$$

Su ecuación característica es:

$$a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0 = 0$$

i) Para cada raíz real distinta P , le corresponde un término en la solución general de la forma:

$$C_i e^{Px}$$

ii) Cada raíz real P repetida "n" veces, le corresponden "n" términos en la solución general de la forma:

$$C_1 e^{Px} + C_2 x e^{Px} + C_3 x^2 e^{Px} + \dots + C_n x^{n-1} e^{Px}$$

iii) Para cada par de raíces complejas, $a \pm bj$, le corresponden 2 términos en la solución general de la forma:

$$C_i e^{ax} \cos bx + C_{i+1} e^{ax} \sin bx$$

iv) Para raíces complejas repetidas aplicar ii) y

iii)

Solución general de la Ec. 1

$y = \text{suma de todos los términos generados por } i, ii, iii, iv$



Ecuación diferencial lineal No homogénea con coeficientes constantes:

$$Ec. 2 \quad (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)y = f(x)$$

La solución general es: $y = Y_c + Y_p$

y_c = solución general de la ecuación homogénea asociada a la **Ec. 2**

$$y_c = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n$$

Método de variación de parámetros para obtener y_p

$$y_p = u_1 Y_1 + u_2 Y_2 + \dots + u_n Y_n$$

$$u_i'(x) = \frac{W_i}{W}$$

$$W = \text{Wronskiano de } y_1, y_2, \dots, y_n$$





Continuación del Método de variación de parámetros

$$W = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & & Y_n \\ Y'_1 & Y'_2 & Y'_3 & \dots & Y'_n \\ Y''_1 & Y''_2 & Y''_3 & & Y''_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & Y_3^{(n-1)} & \dots & Y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$W_i = W$ pero se cambia la columna "i"
de W por la columna:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(x)}{a_n} \end{pmatrix}$$



Modelos Matemáticos:

Material Radiactivo

$$\frac{dm}{dt} = km$$

Donde:

t = tiempo.

m = masa

dm / dt = rapidez con la que cambia la magnitud de la masa con respecto al tiempo.

k = constante de proporcionalidad para la rapidez con la que se desintegra la masa

Vida media = se refiere a cuánto tiempo transcurre para que se desintegre la mitad de la masa por sí misma.





Modelos Matemáticos:

Círculo Eléctrico RL

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon$$

Donde:

I = Corriente Electrica

t = tiempo.

L = Inductancia de la bobina .

dI / dt = rapidez con la que cambia la magnitud de la corriente eléctrica.

ε = voltaje de la batería. Fuente de baja potencia y de corriente continua.

R= Resistencia eléctrica, limitación a el paso de la corriente eléctrica.



Modelos Matemáticos:

Ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Donde:

t = tiempo.

T = Temperatura.

dT / dt =rapidez con la que cambia la magnitud de la Temperatura.

k = constante de proporcionalidad para la rapidez con la que se enfriá un cuerpo o masa

T_m = temperatura del medio donde se levanta el objeto





Modelos Matemáticos:

Crecimiento poblacional

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

Donde:

t = tiempo.

p = población.

dp / dt = rapidez con la que cambia la cantidad de población.

k = constante de proporcionalidad

Sistemas Masa Resorte

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Donde:

X= longitud

t = tiempo.

k = constante de elasticidad.

m = masa.



Modelos Matemáticos:

Círcuito Eléctrico RLC

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \left(\frac{1}{C}\right) q = E(t).$$

Donde:

t = tiempo.

L = Inductancia de la bobina

i = corriente

C = capacitancia

q = carga

di / dt = derivada de la corriente con respecto al tiempo.

E = voltaje

R = Resistencia eléctrica, limitación a el paso de la corriente eléctrica.





Forma General. $f(t)$ tiene periodo T

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



$f(t)$ es Par

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t)]$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = 0$$

$f(t)$ es Impar

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$$a_0 = 0 ; a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$





$f(t)$ tiene Simetría de Media Onda

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1} \cos[(2n-1)\omega_0 t] + b_{2n-1} \sin[(2n-1)\omega_0 t]]$$

$$a_{2n-1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos[(2n-1)(\omega_0 t)] dt$$

$$b_{2n-1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin[(2n-1)(\omega_0 t)] dt$$

$$a_0 = 0; \quad a_{2n} = 0; \quad b_{2n} = 0$$



**$f(t)$ tiene Simetría de un Cuarto de Onda
Par**

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1} \cos[(2n-1)\omega_0 t]]$$

$$a_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos[(2n-1)(\omega_0 t)] dt$$

$$a_0 = 0; \quad b_n = 0; \quad a_{2n} = 0$$

**$f(t)$ tiene Simetría de un Cuarto de Onda
Impar**

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_{2n-1} \sin[(2n-1)\omega_0 t]]$$

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin[(2n-1)(\omega_0 t)] dt$$

$$a_0 = 0; \quad a_n = 0; \quad b_{2n} = 0$$





Forma Compleja $f(t)$ tiene periodo T

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Si se conoce a_n , a_0 y b_n se obtiene:

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$C_0 = \frac{1}{2} a_0$$

Si se conoce C_n , C_0 se obtiene:

$$a_n = 2Re[C_n]$$

$$b_n = -2Im[C_n]$$

$$a_0 = 2C_0$$



Impulsos

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$$\alpha^{(n)}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(n)}(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$\beta^{(n)}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(n)}(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$a_n = \frac{-\beta'_n}{nw_0} \quad b_n = \frac{\alpha'_n}{nw_0}$$

$$a_n = \frac{-\alpha''_n}{n^2 w_0^2} \quad b_n = \frac{-\beta''_n}{n^2 w_0^2}$$

$$a_n = \frac{\beta'''_n}{n^3 w_0^3} \quad b_n = \frac{-\alpha'''_n}{n^3 w_0^3}$$





Valores importantes del Seno

$$\sen(0) = 0$$

$$\sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sen(\pi) = 0$$

$$\sen\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$$

$$\sen(2\pi) = 0$$

$$\sen(n\pi) = 0$$

$$\sen\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

$$\sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$



Valores importantes del Coseno

$$\cos(0) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(\pi) = -1$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$

$$\cos(2\pi) = 1$$

$$\cos(2n\pi) = 1$$

$$\cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[(1-2n)\frac{\pi}{2}\right] = 0$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\cos[(2n-1)\pi] = -1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$





TABLA DE TRANSFORMADAS ELEMENTALES		
	$f(t)$	$F(s)$
1	C	$\frac{C}{s}, s > 0$
2	t	$\frac{1}{s^2}, s > 0$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
5	$\operatorname{Sen} at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
6	$\operatorname{Cos} at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
7	$\operatorname{Senh} at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s > a $
8	$\operatorname{Cosh} at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > a $



TABLA DE TRANSFORMADAS INVERSAS ELEMENTALES		
	$F(s)$	$f(t)$
1	$\frac{C}{s}$	C
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^{n+1}}$	t^n
4	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\operatorname{Sen} at$
6	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\operatorname{Cos} at$
7	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{Senh} at$





NOTACIÓN:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

Propiedad de Linealidad

$$\mathcal{L}\{C_1f_1(t) + C_2f_2(t)\} = C_1F_1(s) + C_2F_2(s)$$

Primera Propiedad de Traslación

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$$

Segunda Propiedad de Traslación

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}F(s)$$

Multiplicación por t^n

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^n(s)$$

Transformada de la Integral

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$



Transformada de la derivada

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \\ &\quad - \dots - sf^{(n-2)}(0) \\ &\quad - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

Transformada de una función periódica

Si $f(t)$ es una función periódica con período T , entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$





NOTACIÓN:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Propiedad de Linealidad

$$\mathcal{L}^{-1}\{C_1F_1(s) + C_2F_2(s)\} = C_1f_1(t) + C_2f_2(t)$$

Primera Propiedad de Traslación

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

Segunda Propiedad de Traslación

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

Transformada Inversa de la Derivada

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$$

División por s

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^n}\right\} = \int_0^t \dots \int_0^t f(t)(dt)^n$$

Teorema de Convolución

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} &= \int_0^t f(u)g(t-u)du \\ &= \int_0^t f(t-u)g(u)du\end{aligned}$$



Juntos por

FIME
Con identidad y orgullo

#SOMOSLOQUEHACEMOS

Nombre: _____

Matricula: _____

Carrera: _____

