

Multimediale Signalverarbeitung

Bildverarbeitung: Filter

Thorsten Thormählen

19. Juni 2020

Teil 6, Kapitel 1

Dies ist die Druck-Ansicht.

[Aktiviere Präsentationsansicht](#)

Steuerungstasten

- nächste Folie (auch **Enter** oder **Spacebar**).
- ← vorherige Folie
- d** schaltet das Zeichnen auf Folien ein/aus
- p** wechselt zwischen Druck- und Präsentationsansicht
- CTRL** **+** vergrößert die Folien
- CTRL** **-** verkleinert die Folien
- CTRL** **0** setzt die Größenänderung zurück

Notation

Typ	Schriftart	Beispiele
Variablen (Skalare)	kursiv	a, b, x, y
Funktionen	aufrecht	$f, g(x), \max(x), h[n]$
Vektoren	fett, Elemente zeilenweise	$\mathbf{a}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)^\top,$ $\mathbf{B} = (x, y, z)^\top$
Matrizen	Schreibmaschine	$\mathbf{A}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
Mengen	kalligrafisch	$\mathcal{A}, \mathcal{B} = \{a, b\}, b \in \mathcal{B}$
Zahlenbereiche, Koordinatenräume	doppelt gestrichen	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Von 1D nach 2D

Bei der bisherigen Betrachtung von zeitdiskreten Signalen wurden schon viele Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung kennengelernt: Abtasttheorem, Faltung, Tiefpass, Hochpass, etc.

Im Prinzip handelt es sich bei Bildern auch um diskrete Signale, nur jetzt:

Ortsdiskret statt zeitdiskret

Zwei Dimensionen $f[x, y]$ statt nur einer $f[n]$

Faltung in 2D

Die zeitdiskrete Faltung zweier Signale $a[n]$ und $b[n]$ ist definiert durch:

$$f[n] = a[n] * b[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k] b[n - k]$$

Analog kann die Faltung in 2D definiert werden:

$$f[x, y] = a[x, y] * b[x, y] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[j, k] b[x - j, y - k]$$

Faltung von Bildern

2D Faltung:

$$f[x, y] = a[x, y] * b[x, y] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[j, k] b[x - j, y - k]$$

Als Beispiel soll die Faltung zwischen einem Bild $a[x, y]$ der Größe 4 x 3 Pixel mit einem so genannten Kernel $b[x, y]$ der Größe 3 x 3 Pixel betrachtet werden:

$a[x, y]$					$b[x, y]$			
$y \backslash x$	0	1	2	3	$y \backslash x$	-1	0	1
0	1	2	2	2	-1	1	2	3
1	9	9	8	7	0	0	0	0
2	1	2	1	6	1	-1	-2	-3

Außerhalb des definierten Bereichs sind alle Werte des Kernels $b[x, y]$ gleich null, daher

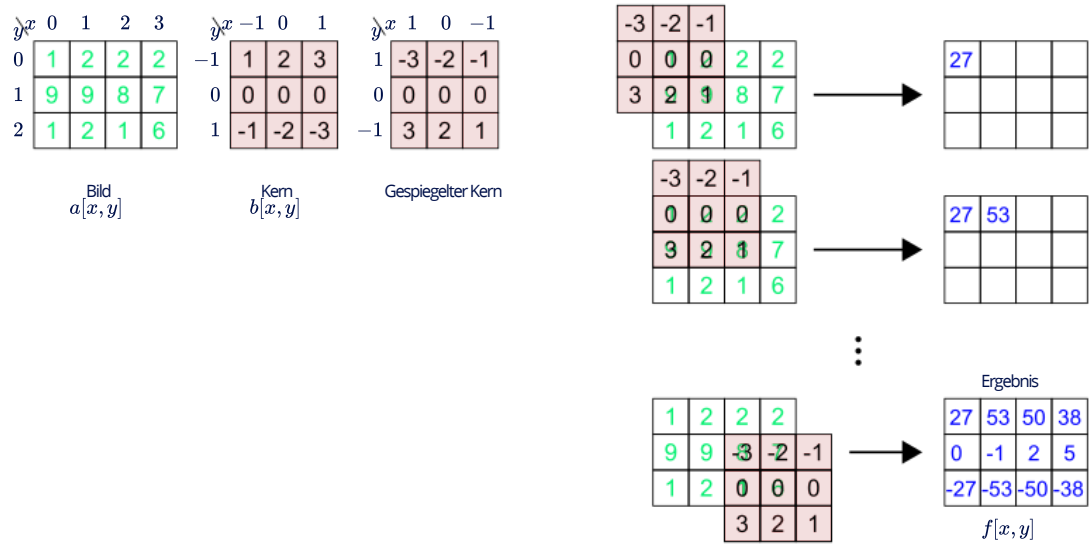
$$f[x, y] = a[x, y] * b[x, y] = \sum_{j=x-1}^{x+1} \sum_{k=y-1}^{y+1} a[j, k] b[x - j, y - k]$$

Thorsten Thormählen 6 / 48

Faltung von Bildern

2D Faltung für das Beispiel:

$$f[x,y] = a[x,y] * b[x,y] = \sum_{j=x-1}^{x+1} \sum_{k=y-1}^{y+1} a[j,k] b[x-j,y-k]$$



Filterkerne

Im Folgenden soll zunächst mit verschiedenen Filterkernen $b[x, y]$ experimentiert werden

Später wird genauer auf die Theorie eingegangen

Hinweis: Oft wird in der Literatur direkt der gespiegelte Kern angegeben. Im Folgenden wird hier immer der mathematisch korrekte Faltungsoperator $b[x, y]$ dargestellt (für symmetrische Kerne ist es natürlich egal)

Filterkerne

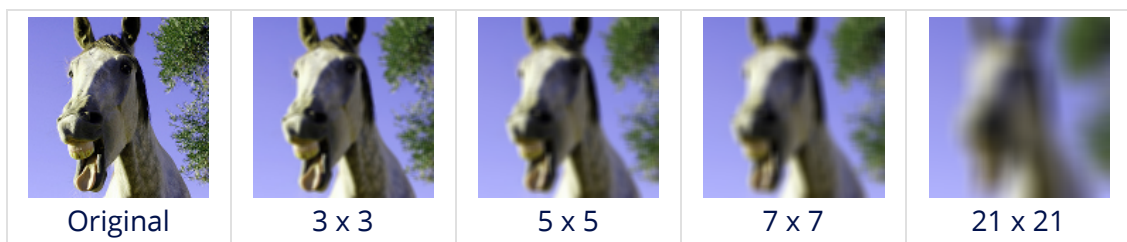
Welchen Effekt hat der Filterkern?

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Antwort:

Gleitender Mittelwert (Mittelwertfilter)

Auch eine Art Tiefpass (aber lässt auch hohe Frequenzen durch, da Sinc-Funktion im Frequenzbereich)



Thorsten Thormählen 9 / 48

Filterkerne

Welchen Effekt hat der Filterkern?

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Antwort:

Mittelwertfilter in y -Richtung

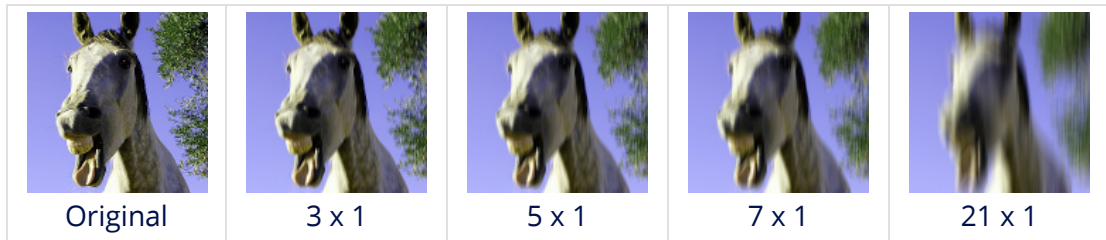
Mittelwertfilter in x -Richtung entsprechend:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigentlich reicht ein Filter mit der Größe 1 x 3 Pixel bzw. 3 x 1 Pixel aus

Filterkerne

Mittelwertfilter in y -Richtung



Mittelwertfilter in x -Richtung



Thorsten Thormählen 11 / 48

Filterkerne

Welchen Effekt hat der Filterkern?

$$\frac{1}{256} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Antwort:

Gaußscher Glättungsfilter:

$$b[x, y] = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

und Normierung der Werte, so dass die Summe gleich 1 ist

Tiefpass (auch Gauss-Funktion im Frequenzbereich)

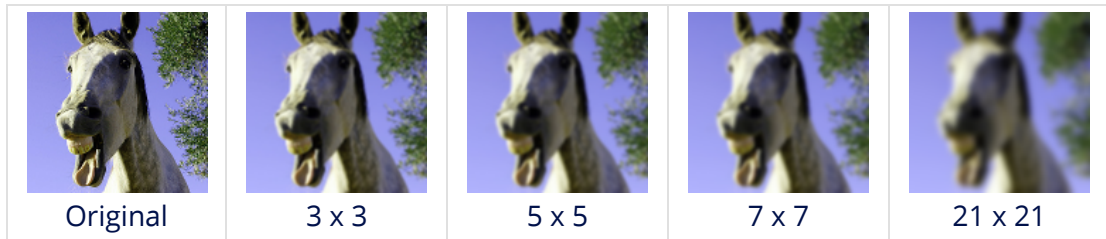
Hier verwendet: Integer-Approximation durch Binomial-Koeffizienten

$$\text{Kleine Version: } \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Thorsten Thormählen 12/48

Filterkerne

Filterung mit Binomial-Filterkernen verschiedener Größe:



Thorsten Thormählen 13 / 48

Filterkerne

Welchen Effekt hat der Filterkern?

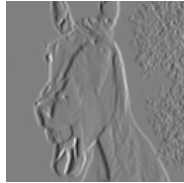
$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Antwort:

Kantenverstärkung in x -Richtung

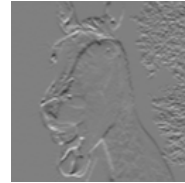


Original



x -Richtung

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



y -Richtung

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Filterkerne

Welchen Effekt hat der Filterkern?

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Antwort:

Laplace-Filter (Ableitung 2. Ordnung)

Kantenverstärkung in x -Richtung und y -Richtung

Separierbare Filter

Thorsten Thormählen 16 / 48

Separierbare Filter

Bei einem separierbaren Filterkern kann die Faltung in mehrere Faltungen aufgeteilt werden, d.h.

$$f[x, y] = a[x, y] * b[x, y] = (a[x, y] * b_1[x, y]) * b_2[x, y]$$

Dabei sind die separierten Filterkerne $b_1[x, y]$ und $b_2[x, y]$ kleiner und daher schneller ausführbar

Die meisten der bisher betrachteten Filterkerne sind x/y-separierbar, beispielsweise

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} [1 \quad 1 \quad 1]$$

Für einen $K \times K$ großen Filterkern reduziert sich der Rechenaufwand durch die Separation von K^2 auf $2K$

Separierbare Filter

Im Allgemeinen ergibt sich der kombinierte Filterkern der Größe $K \times K$ aus den x/y-separierten Kernen der Größe K durch

$$\frac{1}{w_y} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix} * \frac{1}{w_x} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \end{bmatrix} = \frac{1}{w_y w_x} \begin{bmatrix} y_1 x_1 & y_1 x_2 & \dots & y_1 x_K \\ y_2 x_1 & y_2 x_2 & \dots & y_2 x_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_K x_1 & y_K x_2 & \dots & y_K x_K \end{bmatrix}$$

Wie kann dieser Gauss-Filter separiert werden?

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Antwort:

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Separierbare Filter

Wie kann dieser Filter, der auf Kanten in x -Richtung anspricht, separiert werden?

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Antwort:

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{2} [1 \quad 0 \quad -1]$$

Interessant. Es handelt sich offenbar um eine Kombination aus einem Gauss-Filter in y -Richtung und einem Kantenfilter in x -Richtung

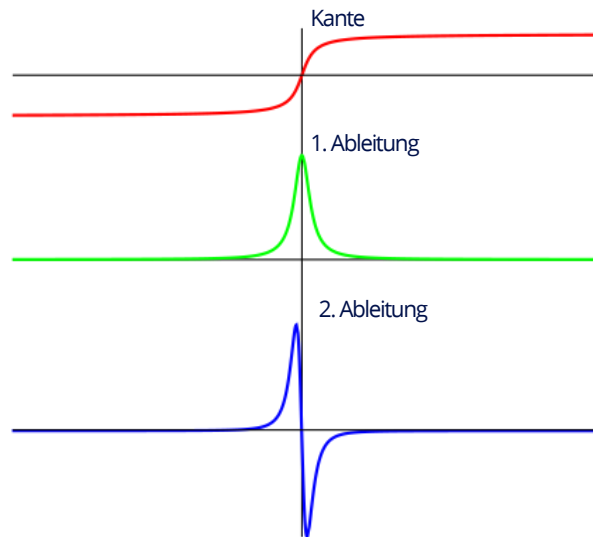
Kantenfilter

Thorsten Thormählen 20 / 48

Kantenfilter

Zur Kantendetektion gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Ableitung berechnen: Je höher die Absolutwerte, desto steiler die Kante
2. Ableitung berechnen: Nulldurchgang bei Kante



Thorsten Thormählen 21 / 48

1. Ableitung berechnen

Die partiellen Ableitung $\partial f / \partial x$ und $\partial f / \partial y$ können bei Bildern im Allgemeinen nicht über den Differentialquotient bestimmt werden, da die Funktion f nicht analytisch vorliegt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y_1 \rightarrow y_0} \frac{f(y_1) - f(y_0)}{y_1 - y_0}$$

Stattdessen wird der Differenzenquotient zur Approximation der Ableitung verwendet:

$$\frac{f}{\partial x} \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f(y_1) - f(y_0)}{y_1 - y_0}$$

Bespielsweise

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx f[x + 1, y] - f[x, y] \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx f[x, y + 1] - f[x, y]$$

oder auch beliebt, weil ohne Phasenverschiebung

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{2} (f[x + 1, y] - f[x - 1, y]) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{1}{2} (f[x, y + 1] - f[x, y - 1])$$

1. Ableitung berechnen

Diese Berechnungsvorschriften

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{2} (f[x+1, y] - f[x-1, y]) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{1}{2} (f[x, y+1] - f[x, y-1])$$

können durch Faltungen mit den entsprechenden Filterkernen realisiert werden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx f[x, y] * \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx f[x, y] * \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dies erklärt warum der Filterkern bei dem gezeigten Beispiel für Kantenfilterung so gewählt wurde

Unterdrücken von Rauschen



Das Bilden der Ableitung verstärkt hohe Frequenzen

Bildrauschen ist typischerweise hoch-frequent und wird daher durch die Kantenfilterung besonders verstärkt

Daher kann die Kantenfilterung mit einer rauschunterdrückenden Tiefpassfilterung (Gauss-Filter) in orthogonaler Richtung kombiniert werden:

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{2} [1 \quad 0 \quad -1]$$

Sobel-Filter

Diese Kombination eines Tiefpass und der Ableitung in x- und y-Richtung wurden 1968 von Irwin Sobel vorgeschlagen und wird daher Sobel-Filter genannt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx g_x = f[x, y] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx g_y = f[x, y] * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Aus den Ableitung in x- und y-Richtung kann die Stärke der Kante ermittelt werden:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

Die Richtung der Kante ergibt sich durch:

$$\theta = \text{atan2}(g_x, g_y)$$

2. Ableitung berechnen

Die zweite partiellen Ableitung kann durch Anwendung des Differenzenquotient auf zwei benachbarte Pixel (1. Ableitung) und anschließendes Bilden des Differenzenquotient auf dem Ergebnis (2. Ableitung) erzeugt werden

Beispielsweise für die x-Richtung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx (f[x+1, y] - f[x, y]) - (f[x, y] - f[x-1, y]) \\ &= f[x+1, y] - 2f[x, y] + f[x-1, y]\end{aligned}$$

Ausgedrückt als Faltungskern:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx f[x, y] * \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Entsprechend in y-Richtung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx f[x, y] * \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Laplace-Operator

Sei ∇f ein 2-Vektor der die 1. Ableitungen als Elemente enthält:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\nabla} f$$

Dann ist der Laplace-Operator definiert als das Skalar-Produkt von ∇ mit sich selbst:

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla^\top \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Das heisst Δf ist die Summe der zweiten Ableitungen von f :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Laplace-Filter

Entsprechend dem Laplace-Operator ist der Laplace-Filter definiert als die Summe der 2. Ableitungen in x- und y-Richtung

Mit dem vorherigen Ergebnis für den Filterkern der 2. Ableitung, ergibt sich für den Laplace-Filter:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Laplacian of Gaussian (LoG)

Der Laplace-Filter verstärkt aufgrund der 2. Ableitung Rauschen besonders stark

Daher wird er in der Regel immer mit einem Gauss-Filter kombiniert

Da die Reihenfolge der Faltung egal ist, kann das Eingabebild auch direkt mit der Kombination aus Gauss-Filter und Laplace-Filter gefaltet werden

Bzw. es kann auch direkt die analytische 2. Ableitung einer 2D Gauss-Funktion verwendet werden:

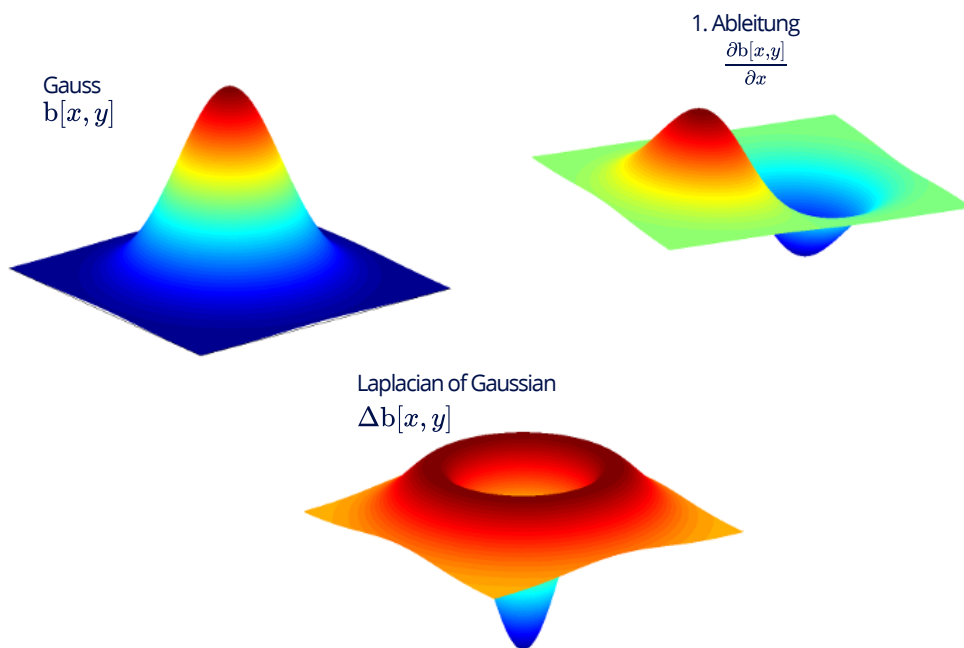
$$b[x, y] = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = \frac{x^2}{\sigma^4} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{x^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Delta b = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Laplacian of Gaussian (LoG)



Thorsten Thormählen 30 / 48

Difference of Gaussian

Der Difference-of-Gaussian-Filter entsteht durch Subtraktion der Ergebnisse von Faltungen mit unterschiedlich starken Gauß-Filtern

$$f[x, y] = a[x, y] * \frac{1}{\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_1^2}\right) - a[x, y] * \frac{1}{\sigma_2^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

wobei gilt $\sigma_1 > \sigma_2$

Dies liefert sehr ähnliche Ergebnisse wie der Laplacian of Gaussian. Warum?

Morphologische Operationen

Thorsten Thormählen 32 / 48

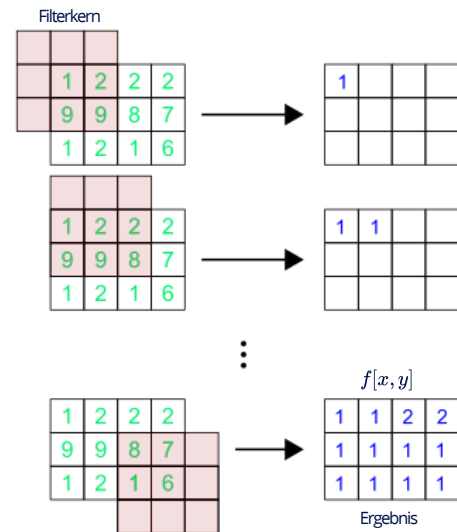
Erode

Erode ist ein Beispiel für ein Filter, das nicht mit einer Faltungsoperation implementiert werden kann

Trotzdem wird mit einem Filterkern (Kernel) einer bestimmten Größe über das Bild gelaufen, z.B. 3 x 3, 5 x 5 usw.

Der Wert im gefilterten Bild $f[x, y]$ entspricht dem Minimum aller Pixel innerhalb des Filterkerns \mathcal{K} im Eingangsbild $a[x, y]$:

$$f[x, y] = \min_{i, k \in \mathcal{K}} (a[j, k])$$



Thorsten Thormählen 33 / 48

Erode



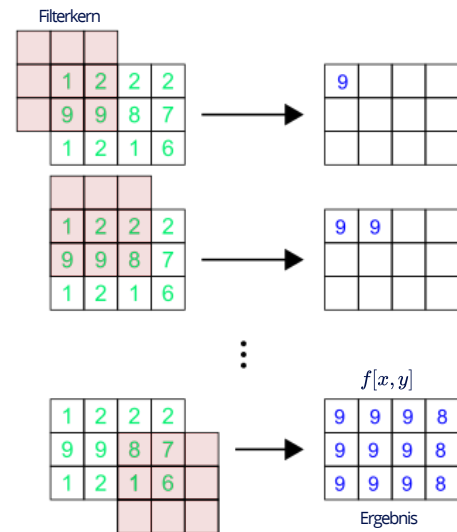
Thorsten Thormählen 34 / 48

Dilate

Beim Dilate-Filter wird statt des Minimums das Maximum verwendet

Der Wert im gefilterten Bild $f[x, y]$ entspricht dem Maximum aller Pixel innerhalb des Filterkerns \mathcal{K} im Eingangsbild $a[x, y]$:

$$f[x, y] = \max_{i, k \in \mathcal{K}} (a[j, k])$$



Thorsten Thormählen 35 / 48

Dilate

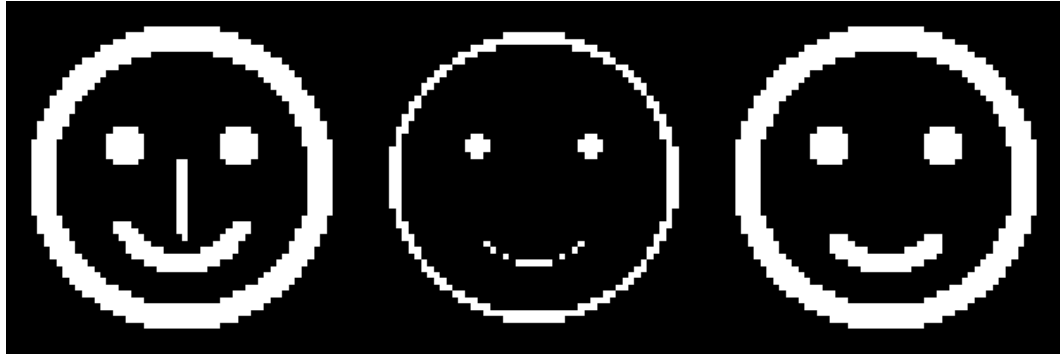


Thorsten Thormählen 36 / 48

Open

Open wird zum Öffnen von Strukturen verwendet

Erst Erode anwenden, dann Dilate



Close

Close wird zum Verbinden von Strukturen verwendet

Erst Dilate anwenden, dann Erode



Thorsten Thormählen 38 / 48

Histogramme

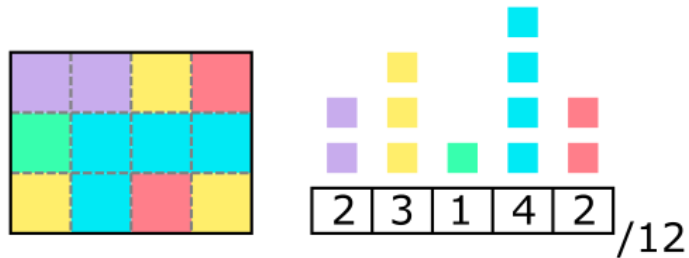
Thorsten Thormählen 39 / 48

Histogramme

Ein Histogramm enthält die Anzahl der Pixel für jeden Intensitätswert geteilt durch die Gesamtzahl der Pixel

Mit anderen Worten, ein Histogramm beschreibt die relative Häufigkeit von Intensitätswerten eines Bildes

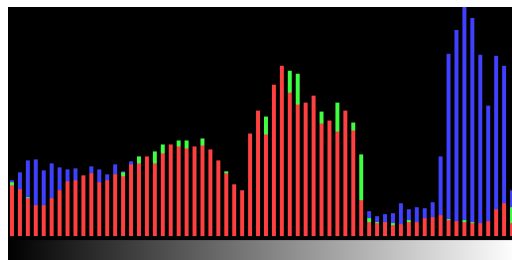
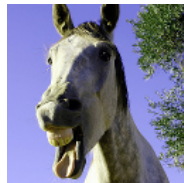
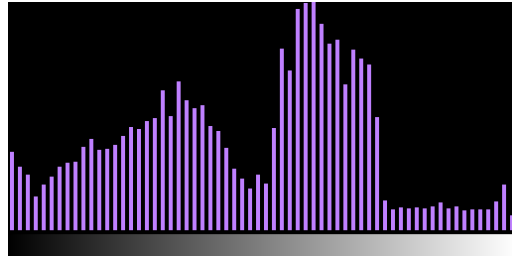
Für ein Bild mit 4 x 3 Pixeln und 5 verschiedenen Intensitätswerten ergibt sich beispielsweise:



Thorsten Thormählen 40 / 48

Histogramme

Das Histogramm kann auf den Grau- oder den Farbwerten berechnet werden:

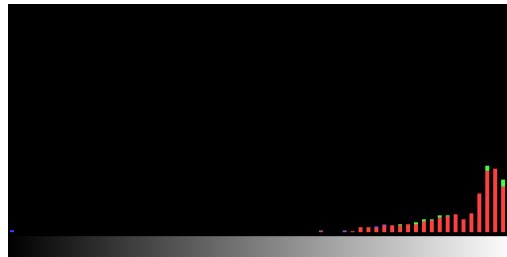


Thorsten Thormählen 41 / 48

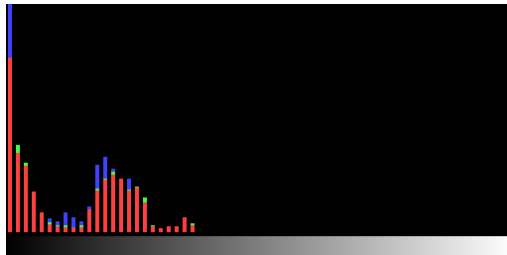
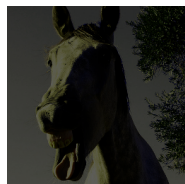
Histogramme

Ein Histogramm kann z.B. bei der Aufnahme eines Bildes hilfreich sein, um zu kontrollieren, ob der zur Verfügung stehende Wertebereich gut abgedeckt ist.

Überbelichtet:



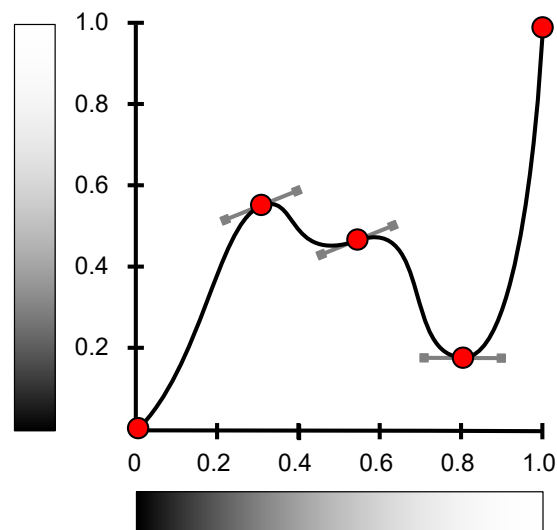
Unterbelichtet:



Thorsten Thormählen 42 / 48

Manipulation von Farbwerten

Viele Bildverarbeitungsprogramme bieten die Möglichkeit, eine beliebige Kurve zu definieren, die von Eingangs- auf Ausgangsintensitäten abbildet

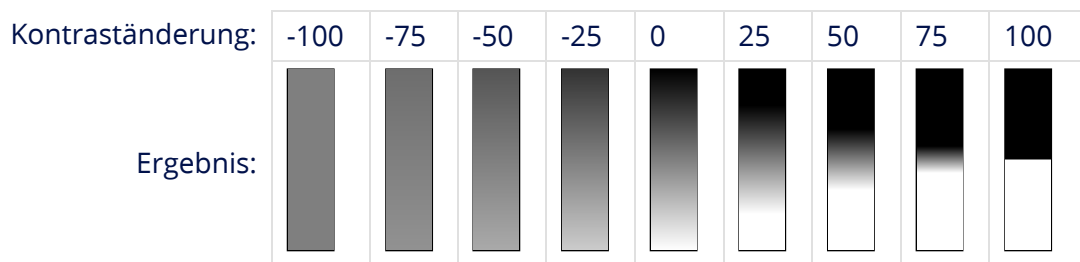
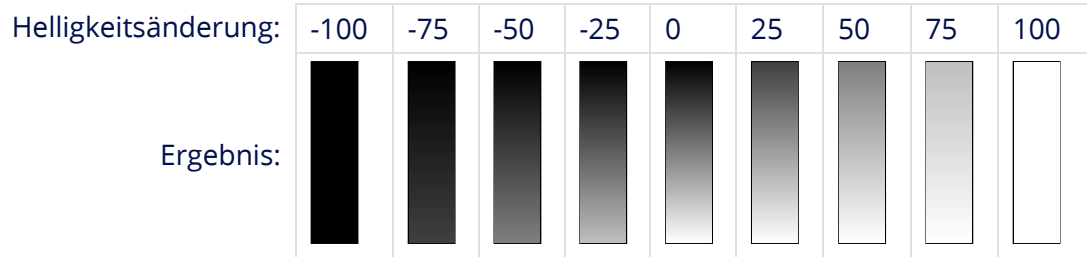


Thorsten Thormählen 43 / 48

Helligkeit / Kontrast

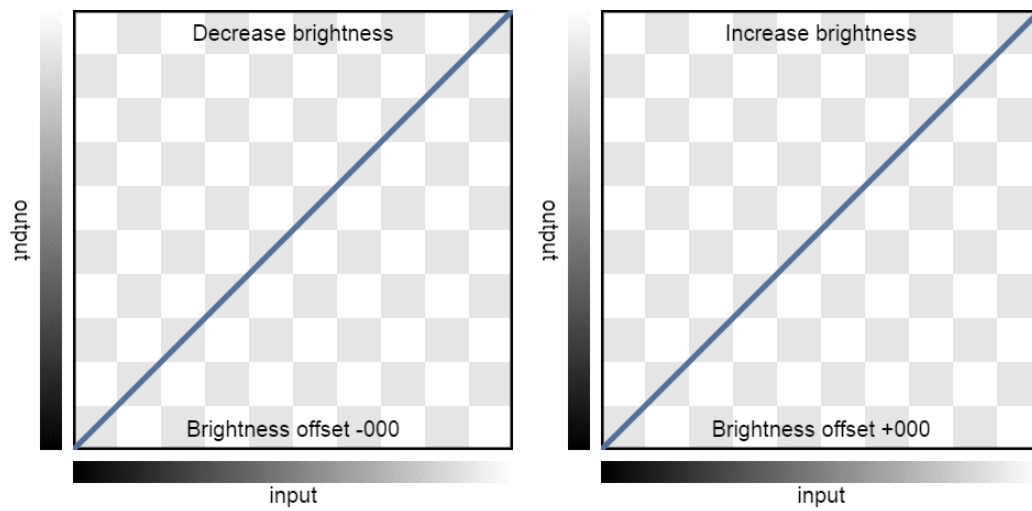
Thorsten Thormählen 44 / 48

Helligkeit / Kontrast



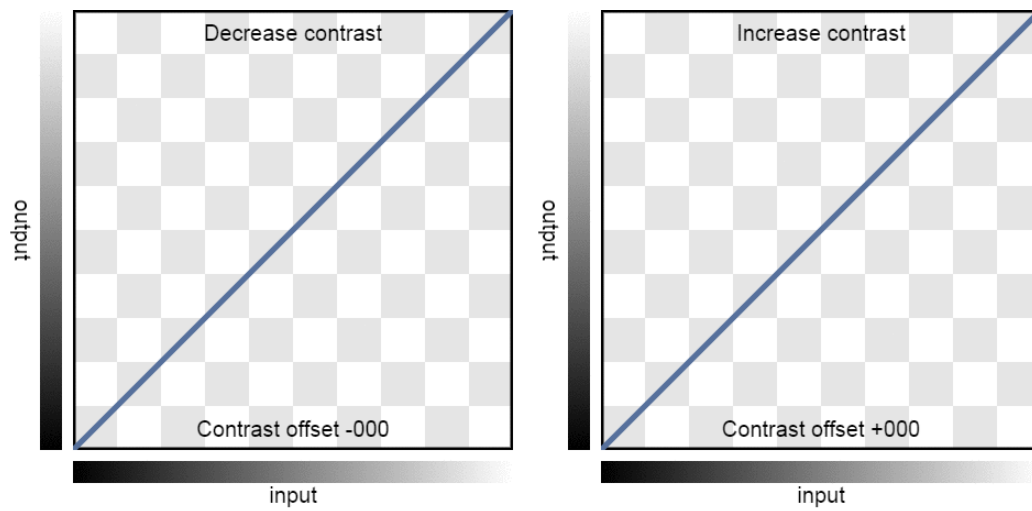
Thorsten Thormählen 45 / 48

Helligkeit



Eine negative Helligkeitsänderung konzentriert alle Farben in Richtung Schwarz
Eine positive Helligkeitsänderung konzentriert alle Farben in Richtung Weiß

Kontrast



Eine negative Kontraständerung verändert alle Farben hin zu Mittelgrau

Eine positive Kontraständerung verändert alle Farben weg von Mittelgrau

Gibt es Fragen?



Anregungen oder Verbesserungsvorschläge können auch gerne per E-mail an mich gesendet werden: [Kontakt](#)

[Weitere Vorlesungsfolien](#)

[Impressum](#) [Datenschutz](#) .)

Thorsten Thormählen 48 / 48