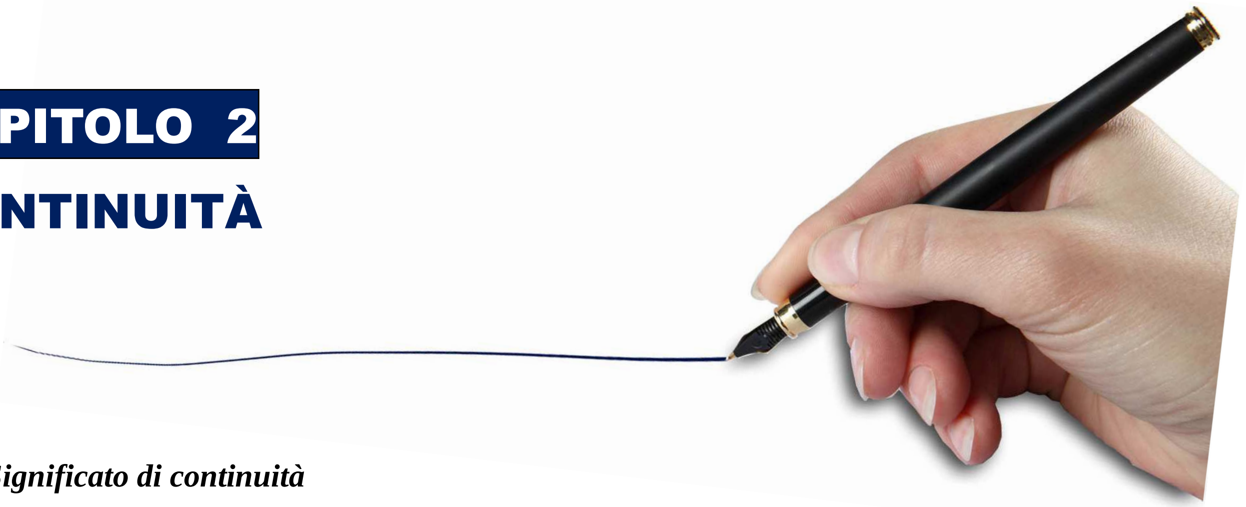
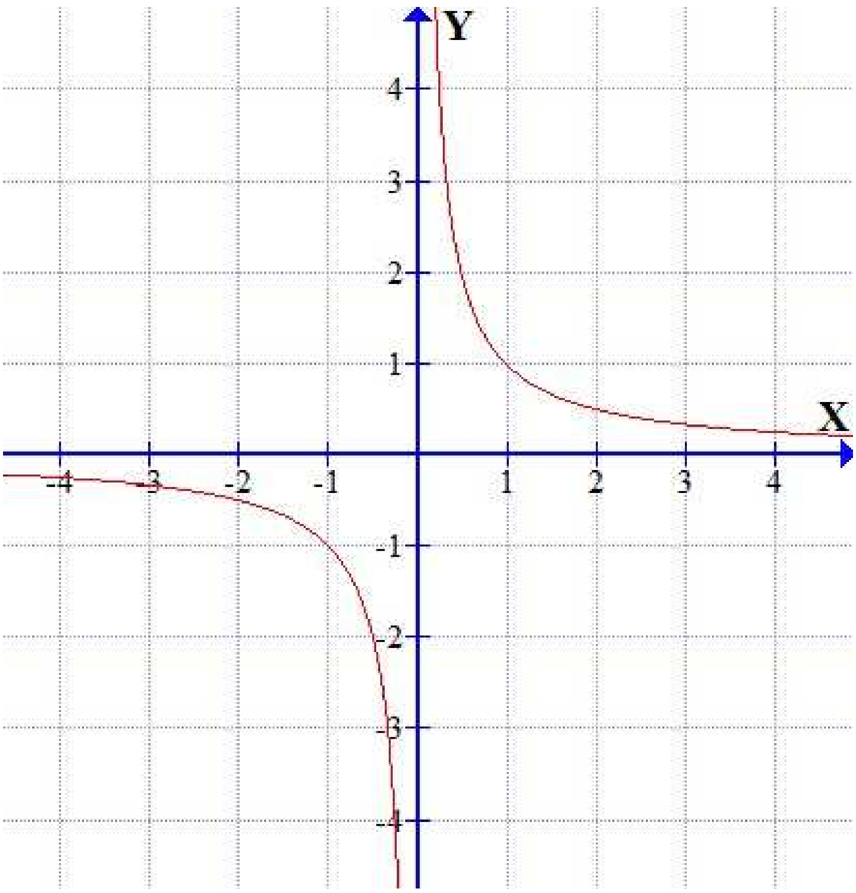
# CAPITOLO 2

# CONTINUITÀ



### *2.1 Significato di continuità*

Prima di dare la definizione rigorosa matematica di continuità, ve ne do una definizione comprensibile: ”*una funzione è continua se puoi disegnarne il grafico senza mai staccare la penna dal foglio*” cioè, lo dice la parola stessa: la funzione è continua se non ha interruzioni, e dunque per l'appunto la puoi disegnare senza mai staccare la penna dal foglio. Beh, per prima cosa vediamo un esempio di funzione <u>dis</u>continua: $y = \frac{1}{x}$




…come vedete il grafico di questa funzione è discontinuo per $x = 0$. Se la volete disegnare dovete per forza staccare la penna dal foglio, in corrispondenza di $x = 0$.

La funzione è formata da due tratti continui, però nel suo complesso è discontinua perché, lo ripeto, c'è una <u>discontinuità</u> per $x = 0$.

…e ora molti di voi staranno pensando:”…*ma come?!?! Tutto qui!?!?!?*”

Ebbene si: tutto qui! La continuità è semplice e banale, intuitiva al massimo… ‘na cagata da capire! Tuttavia per darne una definizione matematica rigorosa bisogna prima definire un altro concetto, fondamentale per tutta l'analisi matematica, e che servirà soprattutto per i limiti: il concetto di **intorno**! Dopo aver definito l'intorno, potrò darvi la definizione rigorosa di continuità.

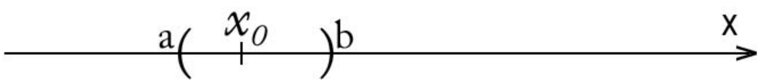
## *2.2 Concetto di intorno… ma è inutile che vi guardiate intorno*

### *2.2.1 Definizione di intorno*

Cos'è sto diavolo di 'intorno'? …ancora una volta è un concetto semplicissimo e apparentemente banale:

*si definisce **INTORNO** di un punto $x_0$, un qualsiasi intervallo aperto contenente il punto $x_0$.*

Quest'ultima è una definizione rigorosa, dunque va bene ai prof se gliela dite così.
Vediamo però di capire meglio cosa significa.
Innanzitutto un intervallo è **aperto** se è privo degli estremi, **chiuso** se sono inclusi gli estremi. Per esempio: $a \le x \le b$ è un intervallo <u>chiuso</u>, mentre $a < x < b$ è un intervallo <u>aperto</u>. Oppure, se proprio vogliamo farci le pippe mentali, $a \le x < b$ è un intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra… vabè, torniamo a bomba, l'intorno è un intervallo aperto, dunque privo degli estremi.



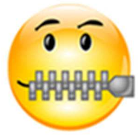

In questo caso qui a fianco, l'intervallo $a < x < b$ è un intorno di $x_0$.

Dato un punto, per esempio $x_0=3$, un suo intorno è $1 < x < 4$ oppure $2{,}9 < x < 3{,}0001$ oppure un <u>qualsiasi</u> altro intervallo <u>aperto</u> contenente il 3 e non è detto che il 3 sia centrato rispetto all'intorno. Comunque da ora in poi considererò l'$x_0$ sempre centrato rispetto al suo intorno, giusto per semplicità. IMPORTANTISSIMO: <u>ogni punto ha infiniti intorni</u> .

**NOTA:** e l'intorno di " + infinito" $(+\infty)$ com'è fatto? Applicando la definizione dovremmo dire che l'intorno di $+\infty$ è dato da un intervallo aperto contenente $+\infty$, però il $+\infty$ è un numero grandissimo, oltre il quale non ne esiste uno maggiore! Come si fa dunque a definirne un intorno? …ancora una volta la risposta è banale: un intorno di $+\infty$ è dato da un intervallo tipo $x > 4$, oppure $x > 103$ oppure $x > 1003228\ldots$ insomma, diciamo che sarà un intervallo tipo $x > k$, con $k$ = *numero qualsiasi (positivo).*

Analogamente l'intorno di $-\infty$ sarà un intervallo tipo $x < h$, con $h$ = *numero qualsiasi (negativo).*

Immagino le vostre espressioni sempre più perplesse:"*ma 'sta roba a checcazzo mi serve?!?!*" …state calmi, sono solo definizioni, non c'è nulla da capire. L'unica cosa che dovete capire è che il prof vi può sempre bocciare se gli fate girare le $\infty$, quindi state zitti e continuate la lettura!!!



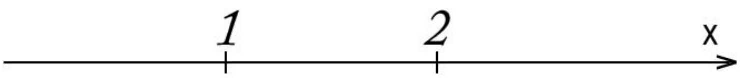
### *2.2.2 Proprietà di intorno*

Ok, ora che abbiamo definito l'intorno ("*si definisce **intorno** di un punto $x_0$, un qualsiasi intervallo aperto contenente il punto $x_0$*"), che apparentemente sembra una cosa banale, vediamo di capirne bene il significato con qualche esempio:

**ES.201** Dati 2 punti, anche vicinissimi, è possibile trovare 2 intorni dei due punti che siano disgiunti?

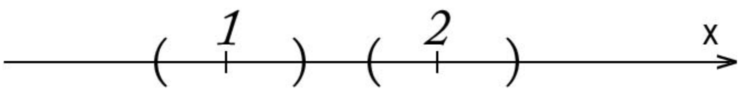
…la domanda è sibillina, molti di voi non ci avranno capito una mazza. Beh, quando non ci capite una mazza, prendete carta e penna e scrivete quel poco che avete capito.

Vengono dati 2 punti, bene, disegnamo 2 punti:



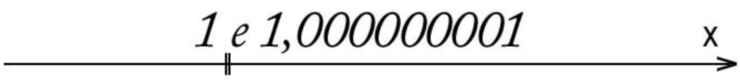

…non sapendo cosa significa "vicinissimi" ho preso 2 punti a caso: l'1 e il 2.

Ok, ho i 2 punti. Mi viene chiesto se posso trovare 2 intorni dei due punti che siano disgiunti, ovvero che non si intersechino. Beh, che ci vuole, ecco qua:




i due intorni che ho disegnato non si intersecano.

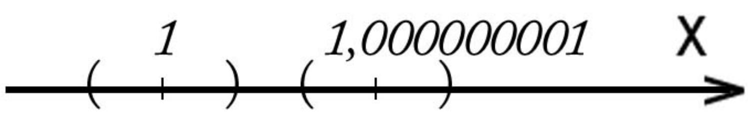
Ok, però il testo mi diceva:"*dati 2 punti, <u>anche vicinissimi</u>, …*" dunque provo a prendere 2 punti vicinissimissimi, tipo l'1 e l'1,000000001, vediamo:




beh, ora i 2 punti sono vicinissimi, ma così vicini che quasi sembrano sovrapposti, dunque non posso trovare 2 intorni che siano disgiunti...

…mmm… ma siamo sicuri?

Proviamo a zoommare con un microscopio e vediamo:




OCCAVOLO?!?! …ora che ho zoommato effettivamente i due punti risultano abbastanza "lontani" da poter disegnare 2 loro intorni disgiunti!!!

…e se provo a prendere 2 punti ancora più vicini? …tipo l'1 e l'1,00000000000000000000000000000001 che succederà?!

Beh, oramai avete capito che comunque prendiate vicini 2 punti, voi zoommate con un microscopio a scansione e riuscirete a vedere i due punti abbastanza "lontani", e dunque a disegnare 2 loro intorni disgiunti.

Risposta alla domanda: si, dati 2 punti distinti (anche vicinissimi),
è sempre possibile trovare 2 intorni <u>disgiunti</u> dei 2 punti.

Cosa ci ha insegnato l'esercizio precedente?

Molte cose direi, ovvero:

- tra 2 punti distinti ci sono sempre infiniti punti, e infatti per vederli basta zoommare sempre più (zoommare con l'occhio dell'immaginazione, ovvio, non è che vi dico di usare veramente un microscopio!!!) e ci si accorge che ce ne sono infiniti;

- dato un intervallo tipo $1 < x \leq 4$, allora: il 4 è incluso nell'intervallo (e diciamo che è l'ultimo elemento dell'intervallo) mentre l' 1 è fuori dall'intervallo, giusto? E allora vi faccio una domandina: qual è il "primo elemento" dell'intervallo $1 < x \leq 4$? L'1 no, perché è escluso. L' 1,00001? NO, perché tra 1 e 1,00001 ci sono altri punti… infiniti punti, tant'è vero che di 1 e 1,00001 esistono 2 loro intorni che sono disgiunti (vedi es. precedente). Morale, non è possibile individuare il primo punto! Un modo che si usa per dare un nome a questo "primo punto" è $1^+$. Quel piùino in alto a destra dell' 1 significa che si tratta di un valore molto prossimo a 1 <u>da destra</u> (tipo 1,00002 o 1,0000000005 o simili), invece se scrivessi $1^-$ si intenderebbe un punto molto prossimo a 1 ma <u>da sinistra</u> (cioè tipo 0,99998 o 0,99999999994). Questa notazione dei "piùini" e dei "menini" sarà pesantemente utilizzata per i limiti.

Sui libri di testo di matematica vengono tipicamente date 4 proprietà dell'intorno e grazie all'esempio qua sopra potrete facilmente capirli. Non mi dilungo…

Vediamo invece alcune definizioni che nascono proprio dal concetto di intorno e dalle quali i prof possono inventarsi una miriade di esercizi.

### *2.2.3 Topologia: punti di accumulazione, isolati, di frontiera, interni ed esterni…*

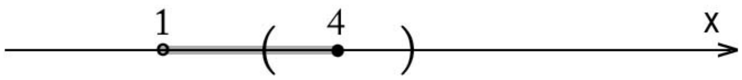
Adesso vi darò le definizioni di questi punti, seguite subito da esempi, senza perdere troppe parole… è roba un po' pallosa, ve lo dico già da ora. Se non l'avete in programma, saltate pure.

***Punto interno:*** *dato un insieme E, un punto $x_0$ si definisce punto interno di E se appartiene ad E e se esiste almeno un suo intorno totalmente contenuto in E.*

**ES.202** Dato l'insieme $E:\{1<x\leq 4\}$, definire quali sono i suoi punti **interni**.

Ok, risposta a bruciapelo: i punti interni di E sono tutti quelli contenuti in $1<x<4$, infatti per ognuno di questi punti è possibile definire un intorno <u>tutto</u> contenuto in E. Ragionateci sopra (tenendo sempre in mente l'esercizio precedente, che è molto istruttivo)…

Vediamo invece perché il punto 4 non è un punto interno, pur appartenendo ad E. Guardando attentamente la definizione di punto interno, ci accorgiamo che non esiste un intorno di 4 tutto dentro E, in quando ogni intorno del punto 4 casca mezzo dentro e mezzo fuori da E e, anche considerando un intorno microscopicamente piccolo, capiterà sempre mezzo dentro e mezzo fuori, e dunque NON tutto dentro a E, e dunque non è un punto interno di E.




***Punto Esterno**: dato un insieme E, un punto $x_0$ si definisce punto esterno di E se non appartiene ad E e se esiste <u>almeno un suo intorno</u> totalmente disgiunto (cioè fuori) da E.*

**ES.203** Dato l'insieme $E:\{1<x\leq 4\}$, definire quali sono i punti esterni.

I punti esterni di E sono questi: $x<1$ e $x>4$, mentre l'1 non è punto esterno, infatti ogni suo intorno cade mezzo fuori e mezzo dentro all'insieme E, mentre la definizione di punto esterno accetta solo i punti di cui esiste almeno un intorno tutto fuori. Il 4, visto che appartiene ad E, non è ovviamente esterno.

**NOTA:** impariamo un termine nuovo per il vostro vocabolario: l'insieme "**complementare**" di E è quell'insieme che sta tutto fuori da E, e si indica tipicamente con una "barretta" sopra la E, così $\overline{E}$. Dunque dato l'insieme $E:\{1<x\leq 4\}$ si ha che il suo complementare è $\overline{E}:\{x\leq 1; x>4\}$. Ebbene, l'osservazione che volevo fare è che i punti esterni dell'insieme E corrispondono ai punti interni dell'insieme $\overline{E}$ (cioè il complementare di E)…

È inutile che fate quella faccia, queste osservazioni conviene farle adesso, piuttosto che fare una figura dimmerda davanti al prof, quando ve lo chiederà all'orale!

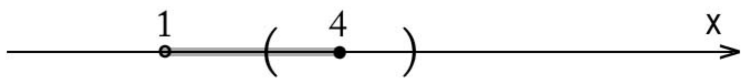
Se andate in Svizzera vi chiedono il passaporto quando oltrepassate la frontiera, giusto?! …beh, questo non c'entra un cazzo col punto di frontiera!

***Punto di Frontiera:*** *dato un insieme E, un punto $x_0$ si definisce punto di frontiera di E se ogni suo intorno appartiene sia ad E, sia al complementare di E.*

(il COMPLEMENTARE di un insieme è ciò che sta fuori dall'insieme, vedi la NOTA precedente, appena fatta)

**ES.204** Dato l'insieme $E:\{1<x\leq 4\}$, definire quali sono i suoi punti di frontiera.

I punti di frontiera di E sono questi: $x=1$ e $x=4$, infatti guardiamo il disegno:




ogni intorno del 4 casca mezzo dentro e mezzo fuori, ovvero appartiene sia ad E, sia al complementare di E. Per il punto 1 vale esattamente lo stesso discorso. Come vedete non c'entra se il punto appartenga o no all'insieme, altrimenti la definizione lo avrebbe specificato.

***Punto di Accumulazione*** *(occhio, questo è importante!!!): dato un insieme E, un punto $x_0$ si definisce punto di accumulazione di E se ogni suo intorno contiene, oltre a se stesso, almeno un punto di E.*

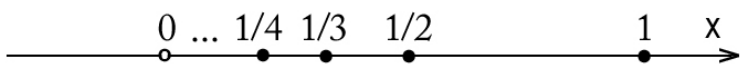
**ES.205** Dato l'insieme $E:\{1<x\leq 4\}$, definire quali sono i suoi punti di accumulazione.

I punti di accumulazione di E sono questi: $\{1\leq x\leq 4\}$, infatti ognuno di questi punti ha degli intorni contenenti almeno un punto dell'insieme E.

**ES.206** Dato l'insieme $E:\{1/k,\ con\ k\in N\}$, definire quali sono i suoi punti di accumulazione.

Ok, innanzitutto vediamo di capire come è fatto questo insieme. Questo esercizio è importante e c'è in praticamente tutti i libri di matematica!!!

Allora, i punti dell'insieme sono quelli tipo 1, 1/2, 1/3, 1/4, …1/100, 1/101, … 1/11328293, … (per chi non l'avesse capito ***N*** è l'insieme dei numeri Naturali, ovvero 1, 2, 3, 4…). Mettiamo su un asse questi punti, così vediamo meglio com'è fatto l'insieme:

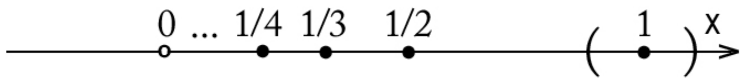



…questi qua sopra sono i punti dell'insieme (sono infiniti, io ne ho disegnati solo un po').

Ora rileggiamo la definizione di "punto di accumulazione": è un punto tale che **ogni** suo intorno contiene sempre **almeno** un punto dell'insieme, oltre a se stesso. Dunque, passiamo un po' di punti in rassegna:

l'1 è un punto di accumulazione per l'insieme E? Evidentemente no, infatti è possibile costruire intorni di 1 che non contengono neanche un altro punto di E.

Eccone uno ad esempio:

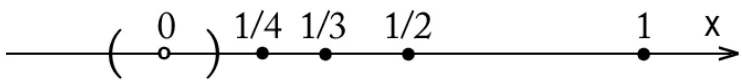



E il punto 1/2 è di accumulazione? …idem come il punto 1, non è di accumulazione (non fatemi fare un disegnino pure per l'1/2, anzi, provate voi a verificare che esistono intorni di 1/2 che NON contengono alcun punto di E).

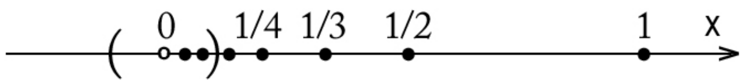
L'1/4? …neanche lui è di accumulazione.

Ecc…

Ok, qualcuno di voi, quelli che soffrono di *eiaculatio precox*, sicuramente diranno:"*AAH, ok, ho capito, nessun punto è di accumulazione!*" invece quelli che si sono fermati un attimo a pensare avranno notato che con il punto 0 succede qualcosa di strano, vediamo:




…mmm, dal disegnino qui sopra sembra che nessun punto di E entri nell'intorno che ho disegnato, però se proviamo a disegnare altri punti dell'insieme E ci accorgiamo che invece quell'intorno contiene dei punti di E,




infatti altri punti di E possono essere ad esempio 1/10, 1/11, 1/12, …1/100, ... 1/14323, … che sono sempre più vicini allo 0, e dunque anche disegnando intorni più piccoli, ci cascherà dentro sempre almeno un punto di E. Morale, lo 0 è un punto di accumulazione per E!!!

**NOTA:** Si noti che lo 0 non è un punto di E, perchè per avere lo 0 dovremmo avere 1/k con $k = +\infty$ ma il $+\infty$ come ho già detto un sacco di volte non lo si può considerare un punto "reale", ma solo un punto a cui si può "tendere"... La definizione infatti non dice che il punto deve appartenere per forza ad E.

Alla fine, lo 0 è l'unico punto di accumulazione!

L'esercizio appena svolto è molto istruttivo perché vi da un esempio di come si deve ragionare quando vi vengono dati esercizi *topologici* (ovvero esercizi che riguardano il concetto di intorno). Questi esercizi sono semplici da risolvere, ma SOLO se sapete le definizioni esatte dei punti e soprattutto se le avete capite (!!!!).

Acc… quasi dimenticavo, c'è un ultimo punto: il punto isolato.

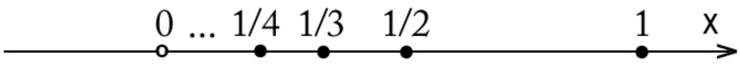
***Punto isolato:*** *dato un insieme E, un punto $x_0$ si definisce punto isolato di E, se appartiene ad E e non è di accumulazione.*

**ES.207** Dato l'insieme $E:\{1<x\leq 4\}$, definire quali sono i suoi punti isolati.

Nell'**ES.205** avevamo trovato che i punti di accumulazione di E sono questi: $\{1\leq x\leq 4\}$, ovvero tutti i punti dell'insieme E, più l'1. Non ci sono dunque punti isolati.

**ES.208** Dato l'insieme $E:\{1/k, k\in N\}$, definire quali sono i suoi punti di isolati.

Dall'**ES.206** avevamo visto che i punti di E sono questi:



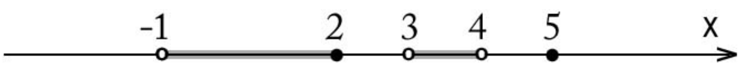

e avevamo visto che l'unico punto di accumulazione di E è il punto 0 (che neanche appartiene ad E) e dunque i punti dell'insieme E sono tutti isolati.

**NOTA:** In pratica, senza star lì a impazzire con la definizione, un punto isolato lo vedete subito perché è proprio "isolato" nel vero senso della parola, è lì da solo. Meglio fare un altro esempio, sento che la vostra già scarsa lucidità mentale sta iniziando a vacillare ulteriormente.

**ES.209** Dato l'insieme $E:\{(-1;2]\cup(3;4)\cup 5\}$, definire quali sono i suoi punti isolati.

Innanzitutto ho appositamente utilizzato una modalità diversa dal solito per definire l'insieme, avrei potuto scrivere anche $E:\left\{-1<x\leq 2,\ \ 3<x<4,\ \ x=5,\ \ x\in\Re\right\}$ che era esattamente lo stesso.

Beh, comunquesia, per prima cosa disegnamo l'insieme:




Dobbiamo essere furbi: così al volo si vede subito che di punto isolato ce n'è solo uno, ed è il punto 5, che per l'appunto se ne sta lì da solo, è "isolato" dagli altri.

Comunque proviamo a usare la definizione, come controprova: cerchiamo i punti di accumulazione, dopodichè troveremo i punti isolati escludendo i punti di accumulazione da E.

I punti di accumulazione di E sono quelli per i quali ogni loro intorno contiene almeno un punto di E. Lascio a voi i ragionamenti, vi dico subito il risultato: i punti di accumulazione di E sono $\{[-1;2]\cup[3;4]\}$ dunque si vede benissimo che togliendo questi punti da E, resta solo il 5. Il 5 non è di accumulazione infatti non è vero che ogni suo intorno contiene almeno un altro punto di E.

E se ora vi chiedo di trovare anche i punti interni, esterni e di frontiera, voi dove mi mandate?

Beh, fingerò di non aver intuito la vostra risposta e vi do le soluzioni:

punti interni di E: $\{(-1;2)\cup(3;4)\}$ (ovvero $-1<x<2$ $e$ $3<x<4$ )

punti esterni: $\{(-\infty;-1)\cup(2;3)\cup(4;5)\cup(5;+\infty)\}$ (ovvero $x<-1,\ \ 2<x<3\ \ ,4<x<5\ \ e\ \ x>5$ )

punti di frontiera di E: punti 1, 2, 3 e 4.

(**NOTA:** il 5 non è di frontiera, vedi la definizione di punto di frontiera).

Ci avete capito qualcosa di più su ‘sta topologia? Spero di si, perché io non ho intenzione di perdere altro tempo con queste cagate, muoviamoci che voglio arrivare al capitolo sui limiti! …siete d’accordo?

## *2.3 Definizione di continuità*

### *2.3.1 Definizione di continuità*

Molti di voi avranno saltato a piè pari il paragrafo **2.2** riguardante il concetto di intorno e saranno passati direttamente a questo paragrafo, anche perché non tutti i prof mettono in programma la parte di topologia. In ogni caso il concetto dei “piùini” e dei “menini” bisogna saperlo, e anche il concetto di intorno (che servirà necessariamente per i limiti) dunque riguardatevi i paragrafi 2.2.1 e 2.2.2 e l’esercizio 201, e saltate pure le definizioni di punti di accumulazione, punti interni, esterni, isolati, e di frontiera se proprio volete.

Ok, allora, a inizio capitolo avevamo detto che ”*una funzione è <u>continua</u> se puoi disegnarne il grafico senza mai staccare la penna dal foglio*” e come discorso mi pare abbastanza chiaro. Ovviamente però ai prof dovete rivolgervi in gergo matematico, quindi: come si definisce la continuità in gergo matematico?

Ecco qui di seguito la definizione di continuità:

> *Data una funzione $f(x):A\rightarrow B$, e dato un punto $x_0\in A$, la funzione f(x) si definisce **continua** in un intorno di $x_0$ se capita che: $f(x_0^-)=f(x_0)=f(x_0^+)$.*

Quando avremo fatto i limiti diremo che la funzione è continua se capita che $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, che è una maniera più elegante per definire la continuità.

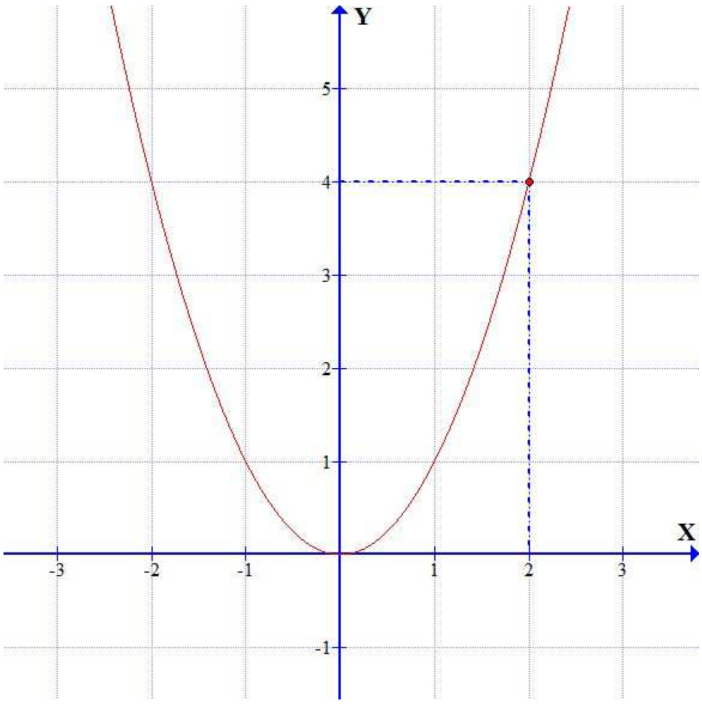
Quest'uguaglianza in parole semplici significa che la funzione calcolata nel punto $x_0$ è uguale alla funzione calcolata nel punto $x_0^-$, ed anche uguale alla funzione calcolata nel punto $x_0^+$.

Come vedete i concetti dei "piùini" e dei "menini" bisogna averli acquisiti.

Faccio un esempio semplice semplice:

consideriamo la buona e vecchia e semplice parabola $y = x^2$ che disegno qui a fianco.

Naturalmente si vede che la funzione è continua per ogni $\boldsymbol{x}$, però verifichiamolo con la definizione appena data.




Per esempio consideriamo il punto $x_0 = 2$ e vediamo se succede che $f(2^-) = f(2) = f(2^+)$.

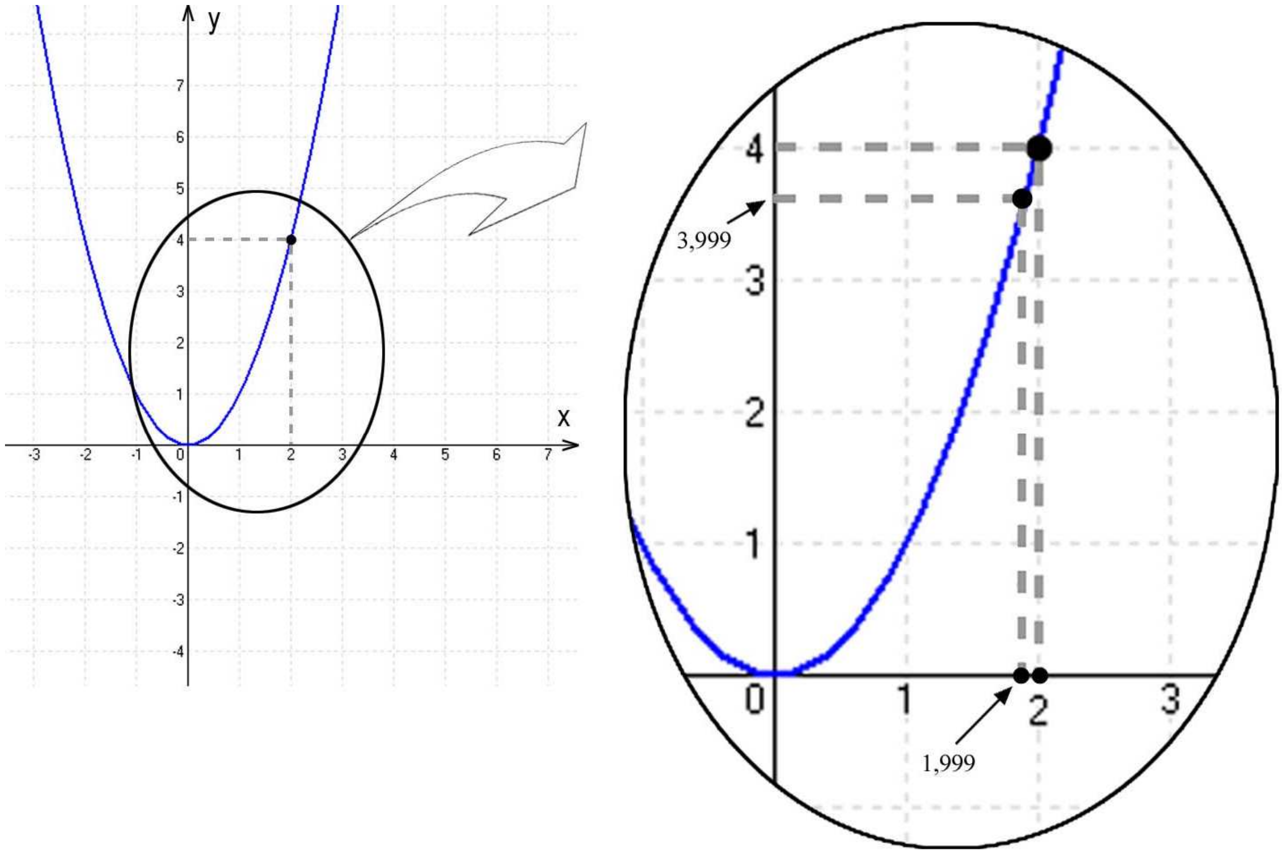
$f(2) = 4$ e vabè, fin qui ci siamo.

$f(2^-) = ?$ beh, il punto $2^-$ è un punto tipo 1,999999… che è vicinissimo al 2. Dal grafico che vi ho disegnato vediamo che $f(2^-) = 4^-$, ovvero un valore tipo 3,999999… Guardate che non sto dicendo niente di strano, basta guardare il grafico e vi accorgerete che sto dicendo il vero. Ripeto: dire $2^-$ vuol dire prendere un punto vicinissimissimo al 2, da sinistra, ricordate?

$f(2^+) = ?$ beh, il punto $2^+$ è un punto tipo 2,00001… che è vicinissimo al 2 ma da destra. E quindi si può intuire che $f(2^+) = 4^+$, ovvero un valore tipo 4,00001…

…uff… mi sembra di vedere le vostre facce…

Vabè dai, vedo che vi siete persi, quindi rifacciamo tutto il ragionamento, ma facendo un bello zoom.




Dalla figura qua sopra vedete che prendendo un numero tipo 1,99999999… (ovvero $2^-$) si ottiene una $f(2^-)$ pari a circa 3,99999999… ehm, il disegno che vi ho fatto qui sopra non è proprio in scala, lo so, era solo per farvi capire il concetto: voi con l'occhio della mente dovete considerare un punto vicinissimissimo al 2 da sinistra, la cui immagine è vicinissimissima al 4.

Ecco, praticamente siamo giunti all'idea di limite: facendo avvicinare tantissimo la ***x*** al 2 da sinistra (cioè $x \to 2^-$, che si legge "*x tendente a 2 meno*") la funzione praticamente "tende" (ovvero si avvicina tantissimo) a 4.

Morale: $f(2^-) = f(2) = 4$.

Per il $2^+$ vale lo stesso identico discorso.

Dunque si ha: $f(2^-) = f(2) = f(2^+)$ quindi la funzione è continua in un intorno del punto 2.

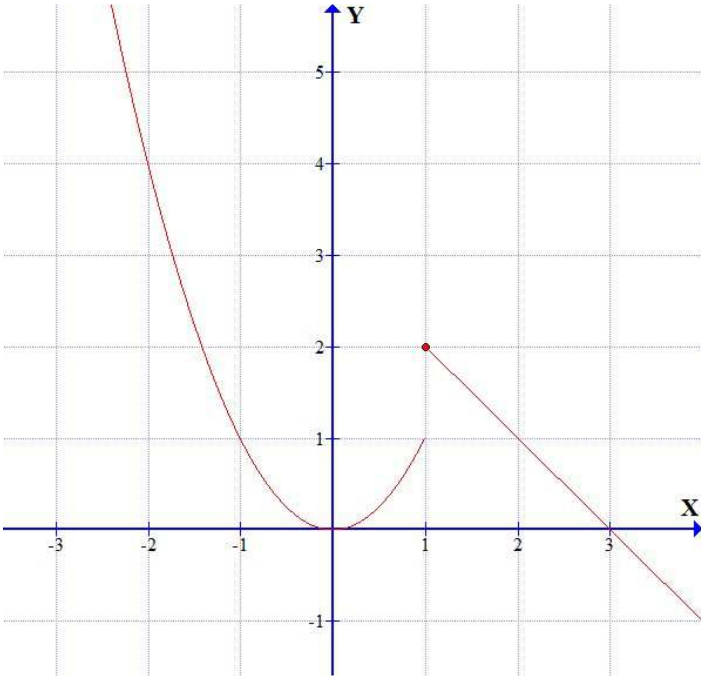
Ok ragazzi, state calmi: tutta sta pappardella qua sopra serviva giusto per farvi capire la definizione di funzione continua <u>con gergo matematico</u>, ma in parole semplici, come già detto inizialmente, una funzione è continua se si può disegnare il suo grafico senza mai staccare la penna dal foglio.

Tranquilli, fra qualche esercizietto sono sicuro che tutto vi sembrerà più chiaro, infatti nelle pagine seguenti ho intenzione di usare meno inchiostro nella stampa… *ehm…* dunque tutto vi sembrerà più chiaro, AAAAH AH AH …*ahm…*era una piccola battutina, giusto per farvi rilassare un po'… uff… neanche capite le mie battutine, figuriamoci se capite 'sta roba… vabè, non vi incazzate, continuiamo va.

*2.3.2 I tre tipi di discontinuità: prima, seconda e terza specie.*

Un esercizio classico è quello di darvi una funzione, chiedervi se c'è qualche punto di discontinuità, e soprattutto di che TIPO di discontinuità si tratta. Infatti ci sono 3 tipi di discontinuità, nulla di difficile, si tratta di 3 semplici definizioni, tutto qui… sapete che i matematici amano definire tutto.

Vediamo subito la **discontinuità di I specie** (o **discontinuità a "salto"**):




beh, si vede benissimo che la discontinuità si ha per *x=1*.

Ecco, questa discontinuità si chiama "a salto" perché si ha un vero e proprio salto tra un pezzo e l'altro della curva.

In matematica si dice che:

$f(1^-) \neq f(1^+)$,

infatti $f(1^-) = 1$, mentre $f(1^+) = 2$.

Siamo d'accordo?! Si vede benissimo dal grafico, giusto?

**NOTA:** volendo usare la notazione dei limiti, che vi sto facendo assaporare piano piano, possiamo anche dire che $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, cioè che il limite della funzione a sinistra di 1 è diverso dal limite della funzione a destra di 1.

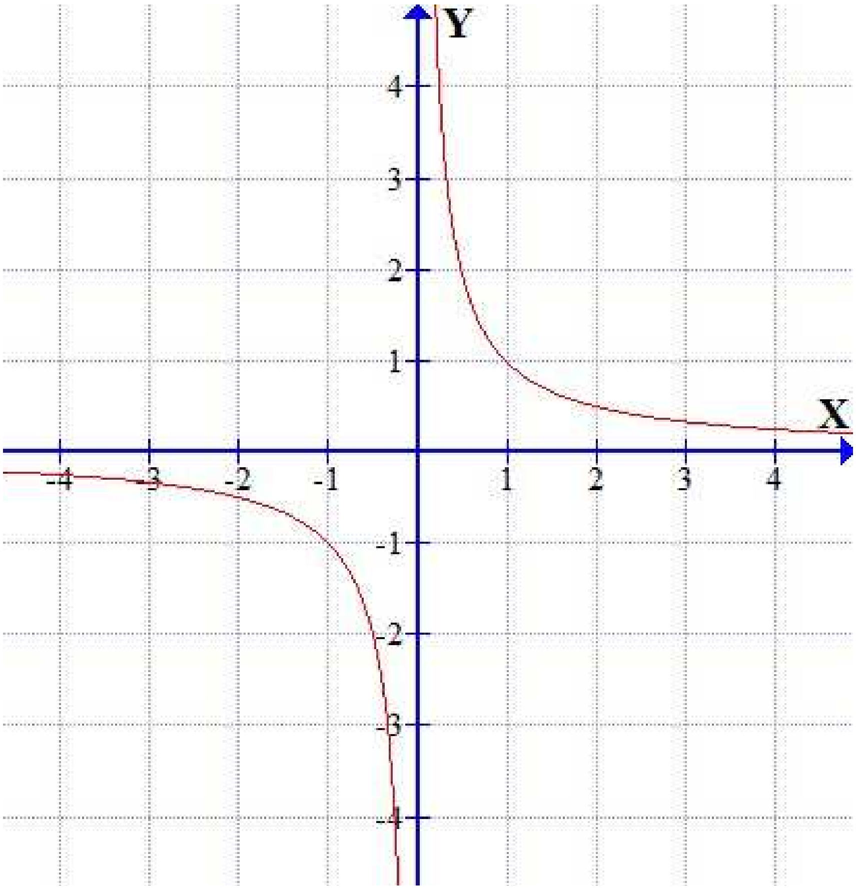
Domanda: vedete la funzione che vi ho disegnato qui sopra? Ecco, sapreste scriverne l'equazione? …questa domandina non c'entra con la continuità, lo so, è giusto per spezzare un attimo... dovete essere pronti a tutto!!! Provate a fare questo esercizietto, senza guardare la mia soluzione.

Soluzione: l'equazione corrispondente a quel grafico è questa: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ -x+3, & x \geq 1 \end{cases}$

…quanti di voi hanno risposto correttamente? …nessuno… lo immaginavo…

Beh, bando alle ciance, passiamo alla **discontinuità di II specie** (o **discontinuità d'infinito**): questa discontinuità si ha se $f(x_0^-)$ oppure $f(x_0^+)$ (ho detto "OPPURE", non ho detto "E") tendono a infinito (positivo o negativo).

Per esempio, l'iperbole vista a inizio capitolo $y=\dfrac{1}{x}$ ha una discontinuità di 2° specie per $x=0$ :



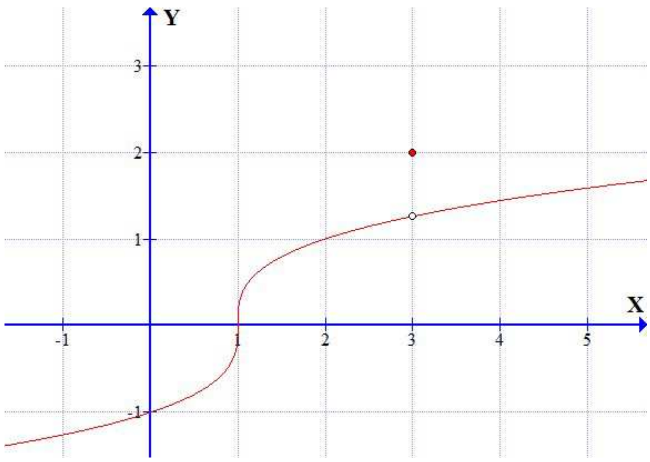

infatti per $x \to 0^-$ la funzione tende a $-\infty$ (e questo già basterebbe per dire che in 0 si ha una discontinuità di seconda specie), inoltre si ha pure che per $x \to 0^+$ la funzione tende a $+\infty$.

Qualcuno di voi potrebbe dire:"*però in questo caso* $f(0^-) \neq f(0^+)$ *e dunque questa è la definizione di discontinuità di PRIMA specie!!!*" eh vabè oh, ragazzi, non le ho mica inventate io le definizioni! L'obiezione che mi fate è sensata, però la definizione parla chiaro: se a destra o a sinistra del punto la funzione tende a infinito, in quel punto si ha una discontinuità di seconda specie, punto e basta! *(…ma poi pensandoci bene: figuriamoci se uno di voi potrebbe mai farmi un'osservazione tanto azzeccata!!!!)*

E infine la **<u>discontinuità di III specie</u>** (detta anche **discontinuità "eliminabile"**), che già ve lo dico: è la più stupida di tutte e tre!

Vi disegnamo qui a fianco questa funzione:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^{1/3}, & x<3 \;\; e \;\; x>3\\ 2, & x=3\end{cases}$$



In pratica la funzione è formata da $(x-1)^{1/3}$ per ogni $\boldsymbol{x}$ tranne che per $x$ = 3, in cui la funzione è uguale a 2. Dunque si ha che $f(3^-)=f(3^+)\neq f(3)$ (anche per un solo punto di merda sono costretto ad alzare la penna dal foglio, e vabè, la funzione è discontinua).

A parole dunque si ha che una funzione ha una discontinuità di terza specie in un certo punto $x_0$ se il limite destro e il limite sinistro di $x_0$ esistono finiti e sono uguali tra loro, però diversi dalla $f(x_0)$, oppure con $f(x_0)$ non esistente.

Riassumiamo:

*Data una funzione $f(x): A \rightarrow B$, e dato un punto $x_0 \in A$, la funzione f(x) si definisce continua in un intorno di $x_0$ se capita che: $f(x_0^-)=f(x_0)=f(x_0^+)$ . Se questa uguaglianza non è verificata, la funzione si dice discontinua in $x_0$. A tal punto si possono avere tre tipi di discontinuità:*

- *discontinuità di prima specie, se $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$ e finiti;*
- *discontinuità di seconda specie, se $f(x_0^-)$ oppure $f(x_0^+)$ sono infiniti;*
- *discontinuità di terza specie, se $f(x_0^-)=f(x_0^+)$ e finiti ma diversi da $f(x_0)$, oppure se $f(x_0^-)=f(x_0^+)$ e finiti ma $f(x_0)$ non esiste ("non esiste" significa che l'$x_0$ è fuori dal CE della funzione).*

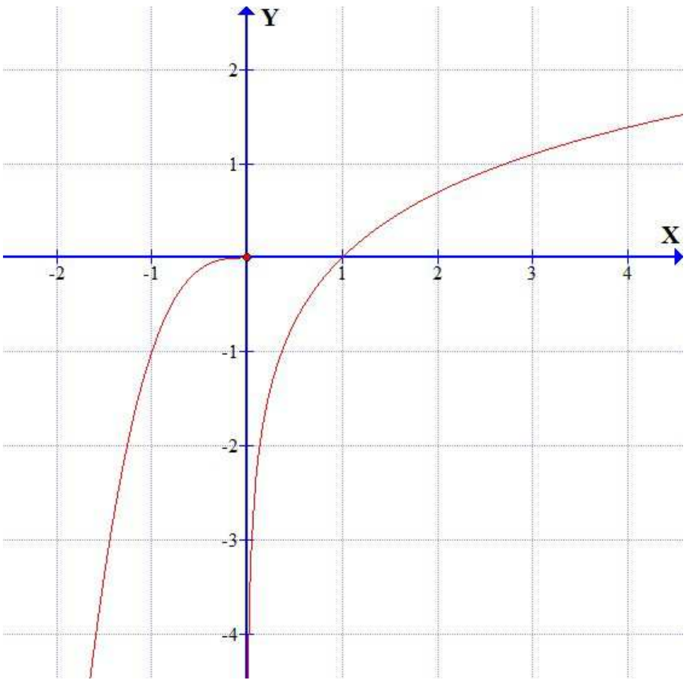
**NOTA:** la discontinuità di terza specie di dice "eliminabile" perché visto che c'è un solo punto che rende la funzione discontinua, uno può eliminare la discontinuità. Nell'esempio precedente uno potrebbe dire:"*vabè dai, considero* $f(x)=(x-1)^{1/3}$, $\forall x$ *e via!*" eliminando così la discontinuità. Naturalmente non vi sto dicendo che se incontrate un esercizio del genere voi dovete eliminate arbitrariamente il punto di discontinuità, era solo per farvi capire il significato del nome strano che è stato dato alla discontinuità di terza specie, tutto qua.

Dai, non guardatemi male, non è colpa mia, io vi sto solo spiegando le cose, non le ho inventate io… però pare che ai prof piaccia fare domande tipo "*che tipi di discontinuità ha questa funzione?*" e dunque mi devo adeguare. Ok, facciamo un po' di esercizietti su 'sta roba, e vedrete che saranno un insulto alla vostra intelligenza!

**ES.210**

Data la funzione $f(x)=\begin{cases}\log(x), & x>0\\ x^3, & x\leq 0\end{cases}$, definire se ci sono punti di discontinuità, e in caso affermativo specificare di che tipo di discontinuità si tratta.

Vabè và, la disegno (questa funzione è da saper disegnare al volo, ok?!!!)




Beh, naturalmente si vede bene che la discontinuità si ha per $x = 0$, d'accordo, ma che tipo di discontinuità è?
mmm… di <u>seconda specie</u>, visto che per $x \to 0^+$ la funzione tende a $-\infty$ (credevate che fosse di prima specie, eh?!?!).

Comunque non c'era bisogno di fare il grafico della funzione, bastava solo applicare la definizione, vedere cioè i valori che la funzione assume per $x = 0^+$ e $x = 0^-$ e ci saremmo accorti subito che è di seconda specie. Infatti:
$f(0^-) = (0^-)^3 \to 0$ e $f(0^+) = \log(0^+) \to -\infty$ dunque, ripeto, la discontinuità è di seconda specie.

**ES.211**

Data la funzione $f(x) = \begin{cases} \log(x), & x \geq 1 \\ x^3 - 1, & x < 1 \end{cases}$, definire se ci sono punti di discontinuità, e in caso affermativo specificare di che tipo di discontinuità si tratta.

Sta volta non la disegno, tanto per trovare le discontinuità non è necessario disegnare la funzione. Allora, ovviamente il punto critico sarà evidentemente l'1, ovvero il punto di contatto tra i 2 pezzi di curva. Bene, vediamo un po':

$$f(1^-) = (1)^3 - 1 = 0$$

$$f(1^+) = \log(1) = 0$$

$$f(1) = \log(1) = 0$$

*ehm…* ma guarda, è accaduto che $f(1^-) = f(1^+) = f(1)$ ! Beh, allora in $x = 1$ la funzione è continua.

**ES.212**

Data la funzione $f(x) = \begin{cases} \log(x), & x > 1 \\ x^3 - 1, & x < 1 \end{cases}$, definire se ci sono punti di discontinuità, e in caso affermativo specificare di che tipo di discontinuità si tratta.

MMM… sembra l'esercizio di prima… mmm… sentite puzza di trappola, eh?
Facciamo due calcoli:

$f(1^-) = (1)^3 - 1 = 0$

$f(1^+) = \log(1) = 0$

$f(1) = ?$ …ecco l'inghippo: per *x = 1* la funzione non esiste! (infatti i due pezzi di curva sono definiti, l'uno per *x > 1* e l'altro per *x < 1*, ma nessuno dei due per *x = 1*. Dunque la funzione in *x = 1* non esiste).

Ma dai, non ci credo, sono riuscito a fregarvi ancora?! AH AH AH, non c'è niente da ridere, dovete stare attenti: la funzione è discontinua per *x = 1*, e per l'esattezza si ha una discontinuità di terza specie, rileggetevi la definizione!

Allora la pronta domanda del prof potrebbe essere:"*ok, il punto di discontinuità si ha per x = 1… mmm, va bene, e come potrebbe eliminare questa discontinuità?*" e la vostra risposta sarebbe:"*beh, semplice, prendo un po' di scolorina ed elimino il punto!*" e il prof vi boccerebbe! Uff… la risposta giusta è che, volendo eliminare la discontinuità, dovreste ridefinire la funzione aggiungendovi il punto che la renda continua, ovvero:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x), & x > 1 \\ x^3 - 1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

in questo caso infatti si ha che $f(1) = 0$, che è uguale a $f(1^-)$ e $f(1^+)$.

Beh, basta con la continuità, direi che altro da dire non c'è, passiamo ai limiti, che sarà un argomento più difficile e quindi vi voglio belli sobri.