## ⊙ Exemple

**⊖ Les diviseurs de 48 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48. Les diviseurs de 72 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.**

**a. Donner la liste des diviseurs communs de 48 et 72.**

**b. En déduire le PGCD de 48 et 42.**

a. Les diviseurs communs de 48 et 72 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12.
b. Le PGCD de 48 et 72 est 12. ► On a repéré le plus grand nombre de la liste.

## ⊙ Exemple

**Déterminer le PGCD de 2016 et 1632 par l'algorithme des soustractions.**

$2016 - 1632 = 384$ d'où $\mathrm{PGCD}(2016; 1632) = \mathrm{PGCD}(1632; 384)$
$1632 - 384 = 1248$ d'où $\mathrm{PGCD}(1632; 384) = \mathrm{PGCD}(1248; 384)$
$1248 - 384 = 864$ d'où $\mathrm{PGCD}(1248; 384) = \mathrm{PGCD}(864; 384)$
$864 - 384 = 480$ d'où $\mathrm{PGCD}(864; 384) = \mathrm{PGCD}(480; 384)$
$480 - 384 = 96$ d'où $\mathrm{PGCD}(480; 384) = \mathrm{PGCD}(384; 96)$
$384 - 96 = 288$ d'où $\mathrm{PGCD}(384; 96) = \mathrm{PGCD}(288; 96)$
$288 - 96 = 192$ d'où $\mathrm{PGCD}(288; 96) = \mathrm{PGCD}(192; 196)$
$192 - 96 = 96$ d'où $\mathrm{PGCD}(192; 96) = \mathrm{PGCD}(96; 96)$ or $\mathrm{PGCD}(96; 96) = 96$ ► On est arrivé à deux nombres égaux.
Donc $\mathrm{PGCD}(2016; 1632) = 96$.

## ⊙ Exemples

**a. Déterminer le PGCD de 2016 et 1632 par l'algorithme d'Euclide.**

**b. Comparer la détermination du PGCD de 2016 et 1632 par l'algorithme d'Euclide et par celui des soustractions (méthode 5).**

a. 2016 = 1632 × 1 + 384 d'où PGCD(2016 ; 1632) = PGCD(1632 ; 384)
1632 = 384 × 4 + 96 d'où PGCD(1632 ; 384) = PGCD(384 ; 96)
384 = 96 + 4 + 0 d'où PGCD(384 ; 96) = 96 ► On est arrivé à un résultat nul.
Donc PGDC(2016 ; 1632) = 96.

b. Pour déterminer le PGCD de 2016 et 1632 par l'algorithme d'Euclide il faut trois opérations tandis que par l'algorithme des soustractions il en faut 8. La recherche du PGCD de 2016 et 1632 est plus courte par l'algorithme d'Euclide.

## ⊙ Exemples – Déterminer le PGCD et le PPCM :

**➢ Voici le début de la liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97...**

**➢ Tout nombre entier supérieur à 1 peut être décomposé en facteurs premiers : On cherche systématiquement des facteurs premiers, à commencer par les plus petits. Chaque fois qu'on en trouve un, on effectue la division et on reprend la recherche sur le quotient. La procédure se termine lorsqu'on obtient 1.**

**Les facteurs premiers se trouvent dans la colonne de droite :**

| | |
|---|---|
| 180 | 2 |
| 90 | 2 |
| 45 | 3 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |

| | |
|---|---|
| 585 | 3 |
| 195 | 3 |
| 65 | 5 |
| 13 | 13 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 3003 | 3 |
| 1001 | 7 |
| 143 | 11 |
| 13 | 13 |
| 1 | |

**➢ De ces trois diagrammes, on peut déduire les décompositions en facteurs premiers que voici :**

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ ;
$585 = 3 \times 3 \times 5 \times 13 = 3^2 \times 5 \times 13$ ;
$3003 = 3 \times 7 \times 11 \times 13$.

Il est pratique de regrouper les facteurs premiers qui apparaissent plusieurs fois sous forme de puissances :
$2^2 = 2 \times 2$ et $3^2 = 3 \times 3$.

**➢ Voici quelques exemples supplémentaires (utilisez des diagrammes comme ci-dessus) :**

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$ ;
$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ ;
$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$.

**➢ Calcul du PGCD par décomposition en facteurs premiers :**

Nous avons effectué les décompositions en facteurs premiers des nombres :
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ ; $585 = 3^2 \times 5 \times 13$ ; $3003 = 3 \times 7 \times 11 \times 13$.
De là, nous obtenons :
$\text{PGCD}(180;585) = \text{PGCD}(2^2 \times 3^2\ 5 ; 3^2 \times 5 \times 13) = 3^2 \times 5 = 45$
$\text{PGCD}(180;3003) = \text{PGCD}(2^2 \times 3^2 \times 5 ; 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3$
$\text{PGCD}(585;3003) = \text{PGCD}(3^2 \times 5 \times 13 ; 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \times 13 = 39$.

**➢ Calcul du PGCD par l'intermédiaire de leur différence :**

Le PGCD(4352 ; 4342) doit aussi être un facteur de $4352 - 4342 = 10$. Or 10 n'a que deux facteurs premiers, 2 et 5.
Il est clair que 5 n'est pas un facteur des deux nombres, par conséquent seul 2 l'est; d'ou PGCD(4352 ; 4342) = 2.

➢ **On peut en pratique distinguer trois cas dans la recherche du PPCM de deux naturels.**

a. Un nombre est multiple de l'autre : c'est lui qui sert de PPCM; par exemple :
15 est le PPCM de 15 et 3 : $4/15 + 2/3 = 4/15 + 10/15 = 14/15$.
b. Les deux nombres sont premiers entre eux : c'est dans ce cas que le PPCM est leur produit; par exemple :
$3/8 + 1/9 = 27/72 + 8/72 = 35/72$.
c. Les deux nombres ont un diviseur commun : par exemple, 15 et 12 se trouvent dans la même table, celle des 3; on a en effet :
$15 = 3 \times 5$ et $12 = 3 \times 4$.
En mettant ce 3 de côté, on voit que tout se passe comme si on était ramené au cas précédent et qu'il suffit de multiplier 15 par 4 et 12 par 5 pour obtenir le même nombre :
$3 \times 5 \times 4$ ou $3 \times 4 \times 5$.