

⊙ **Exemples – Déterminer le PGCD et le PPCM :**

➤ Voici le début de la liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97...

➤ Tout nombre entier supérieur à 1 peut être décomposé en facteurs premiers : On cherche systématiquement des facteurs premiers, à commencer par les plus petits. Chaque fois qu'on en trouve un, on effectue la division et on reprend la recherche sur le quotient. La procédure se termine lorsqu'on obtient 1.

Les facteurs premiers se trouvent dans la colonne de droite :

180	2	585	3	3003	3
90	2	195	3	1001	7
45	3	65	5	143	11
15	3	13	13	13	13
5	5	1		1	

➤ De ces trois diagrammes, on peut déduire les décompositions en facteurs premiers que voici :

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5 ;$$

$$585 = 3 \times 3 \times 5 \times 13 = 3^2 \times 5 \times 13 ;$$

$$3003 = 3 \times 7 \times 11 \times 13.$$

Il est pratique de regrouper les facteurs premiers qui apparaissent plusieurs fois sous forme de puissances :

$$2^2 = 2 \times 2 \text{ et } 3^2 = 3 \times 3.$$

➤ Voici quelques exemples supplémentaires (utilisez des diagrammes comme ci-dessus) :

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5 ;$$

$$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 ;$$

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3.$$

➤ **Calcul du PGCD par décomposition en facteurs premiers :**

Nous avons effectué les décompositions en facteurs premiers des nombres :

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 ; 585 = 3^2 \times 5 \times 13 ; 3003 = 3 \times 7 \times 11 \times 13.$$

De là, nous obtenons :

$$\text{PGCD}(180;585) = \text{PGCD}(2^2 \times 3^2 \times 5 ; 3^2 \times 5 \times 13) = 3^2 \times 5 = 45$$

$$\text{PGCD}(180;3003) = \text{PGCD}(2^2 \times 3^2 \times 5 ; 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3$$

$$\text{PGCD}(585;3003) = \text{PGCD}(3^2 \times 5 \times 13 ; 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \times 13 = 39.$$

➤ **Calcul du PGCD par l'intermédiaire de leur différence :**

Le PGCD(4352 ; 4342) doit aussi être un facteur de  $4352 - 4342 = 10$ . Or 10 n'a que deux facteurs premiers, 2 et 5.

Il est clair que 5 n'est pas un facteur des deux nombres, par conséquent seul 2 l'est; d'où  $\text{PGCD}(4352 ; 4342) = 2$ .

➤ On peut en pratique distinguer trois cas dans la recherche du PPCM de deux naturels.

a. Un nombre est multiple de l'autre : c'est lui qui sert de PPCM; par exemple :

15 est le PPCM de 15 et 3 :  $\frac{4}{15} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15} + \frac{10}{15} = \frac{14}{15}$ .

b. Les deux nombres sont premiers entre eux : c'est dans ce cas que le PPCM est leur produit; par exemple :

$\frac{3}{8} + \frac{1}{9} = \frac{27}{72} + \frac{8}{72} = \frac{35}{72}$ .

c. Les deux nombres ont un diviseur commun : par exemple, 15 et 12 se trouvent dans la même table, celle des 3; on a en effet :

$15 = 3 \times 5$  et  $12 = 3 \times 4$ .

En mettant ce 3 de côté, on voit que tout se passe comme si on était ramené au cas précédent et qu'il suffit de multiplier 15 par 4 et 12 par 5 pour obtenir le même nombre :

$3 \times 5 \times 4$  ou  $3 \times 4 \times 5$ .