01002: Matematik 1b

Uge 1: Funktioner (1): Kontinuitet

Kvadratisk form:

Givet som: $q(x_1, \ldots, x_n) = x^T Ax + x^T b + c$

Vektorfunktioner:

$$f(x) = \begin{matrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_n(x) \end{matrix}, \quad f_i(x) = koordinatfunktionerne\ og\ skalarfunktion$$

Angiv billederummet af en lineær vektorfunktion → Find rangen af matricen

Im(f) = colA = span(søjler i A)

Dim(A) = rangen af A

Visualiseringer:

Kan ikke visualisere højere end 3 dimensioner, $n + m \leq 3$

Niveaukurver:

At fastholde z til en konstant c, f(x,y) = c

Vis at niveaukurven kan beskrives som $g_c(x)$:

→ Opskriv funktion = c

→ Isolerer y:

Eksempel: $x^2 - 2y = c \leftrightarrow y = \frac{x^2 - c}{2}$

Parameterfremstilling → r(u) = (u, funktionsforskrift)

Tangentvektoren → r'(u) = (1, y') (se opg. 3)

Cirklens ligning: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, hvor centrum(a,b) og r = $\sqrt{k}$

Opgaver:

ReLU(x): Returnerer 0, hvis negativt input ellers returnerer x.

Længden af en vektor = $\sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + .. + (v_n)^2}$

Hvilke vektorer er ortogonale på hinanden → Prikproduktet = $a_1 b_1 + a_2 b_2 + .. + a_n b_n = 0$

Hvilke vektorer er tættest på hinanden → Afstand formel = $\sqrt{(a1 - b1)^2 + (a2 - b2)^2 + .. + (an - bn)^2}$

Uge 2: Funktioner (2): Differentiabilitet

Gradient: $\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$

Gradienten giver koordinatsæt som kan tegnes i et vektorfelt.

Retning af vektoren: Funktionen med højst vækst

Modsat retning af vektoren: Funktionen med lavest vækst

Niveaukurven: Ingen vækst

Mængder:

Indre f dom(f) → dom(f) °

Randen f dom(f) → $\partial dom(f)$

Afslutning f dom(f) → $\overline{dom(f)}$ (mængden af indre f + randen f)

≤ = afsluttet mængde

< = hverken lukket eller åben mængde

Kædereglen for skalar funktioner:

Du får givet to funktioner f og g

h(u) = f(g(u)) h'(u) = $< \nabla f(g(u)), g'(u) >$ (prikproduktet af gradienten h(u) og g'(u))

Jacobi matrice (den afledte)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Hessian matrice (den dobbelte afledte)

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Opgaver

Bestem den retningsafledte → prikproduktet af gradient og retningsvektor

Opgave eksempel: Bestem $\nabla g(1,2)$ og retningsafledte P(1,2) mod origo:

For at pege mod origo fås følgende vektor: v = (-1,-2)

Find skalar ved at udnytte enhedsvektor =1: $\sqrt{x(-1)^2 + x(-2)^2} = 1 \leftrightarrow x = \sqrt{1/5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Retningsvektor fås ved at gange vores skalar på vektor: r = $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$

Prikprikproduktet mellem retningsvektor og gradient giver den retningsafledte i P(1,2) mod origo

Hessian matrix kan opskrives med skalar funktioner men ikke vektorfunktioner

Uge 3: Indreproduktrum

Indreproduktrum

Opfylder følgende: 1. $< x, x > \geq 0$

2. $< x, x > = 0$ hvis x = 0

3. $< x, y > = < y, x >$

4. $< cx + dy, z > = c < x, z > + d < y, z >$

Normeret vektorrum

Opfylder følgende: 1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0$ hvis x = 0

3. $\|cx\| = c\|x\|$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Givet et indre produkt → giver det norm: $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$

Ortogonale → Prikproduktet er lig nul dvs. $< x, y > = 0$ → Et ortogonalt sæt af vektorer kaldes indbyrdes ortogonale.

Ortonormal → Vektorer er ortogonale med længde 1 → Et ortonormalt sæt af vektorer kaldes indbyrdes ortonormal.

Projektion af vektor på en linje

ProjY(x) = $< x, u > \cdot u$, hvor u = $\frac{y}{\|y\|}$

Gram-Schmidt

Trin 1: $w_1 = v_1$ $\qquad u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$

Trin 2: $w_2 = v_2 - < v_2, u_1 > u_1$ $\qquad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$

Trin 3: $w_3 = v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2$ $\qquad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$

Trin n: $w_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} < v_n, u_i > u_i$ $\qquad u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}$

Gram-Schmidt giver en ortonormalbasis

Unitær matrix

Opfylder betingelsen: $U^{*}U = I$

Den unitære matrice ganget med sin kompleks-konjugerede transponerede skal give identitetsmatricen. Altså U* betegner den hermitiske konjugerede (kompleks-konjugerede transponerede) af F, og I er identitetsmatricen. Dette betyder, at søjlerne i F danner en ortonormal basis.

Undersøg om en given matrice er:

Unitær: Det skal gælde at: $U^*U = I$

Invertibel: Det skal gælde at determinanten er forskellig fra 0

Ortogonal: Ortogonalitet gælder kun for reelle matricer (prikproduktet lig 0, for matricens søjler)

Symmetrisk: Det skal gælde at: $A = A^T$

Hermitisk: Det skal gælde at: $A = \overline{A^T} = A*$ (Transponer og konjuger matricen)

Matricens søjler er en ortonormal basis for $\mathbb{C}^4$ eller R^4?

Det skal gælde: $U^*U = I$ (for komplekse matricer, $\mathbb{C}^n$)

$U^TU = I$ (for reelle matricer, R^n)

Hvilket rum ortonormalbasis befinder sig i afgøres af elementerne i matricen, hvorvidt de er komplekse eller ej.

Matricens søjler udspændes af vektorer der er en ortonormalbasis. Her skal det gælde at prikproduktet er lig 0 og længden lig 1. Man kan anvende Gram-Schmidt metoden til at få en ortonormal basis for sine vektorer.

Ortogonale komplementer

Betegnet som $V^\perp$, er mængden af alle vektorer, der er ortogonale på alle vektorer i V.

Opgaver:

Hvordan udregnes det ortogonale komplement? → Skriv ortonormalbasis vektorerne op efter rækker i en matrix A og løs Ax = 0

Find koordinatvektor v_4 mht basis Y = (v_1, v_2, v_3) → Opstil vektorerne som søjler i en matrix → løs: $\underline{\underline{V}}$ x = v_4

Angiv ortogonalbasis for Y → Anvend Gram-Schmidt

Angiv koordinatvektor v_4 mht ortonormalbasis Y→ løs: $\underline{\underline{Y^*}}$ v_4= $\underline{x}$ (x giver koordinatvektoren for v_4)

L^2 - indreprodukt

Udregnes som følgende: $< f, g > = \int_b^a f(x)\overline{g(x)}\,dx = F(b) - F(a)$, hvis g er reel, så udregnes blot som g(x)

Opgaver

Udgør vektorerne ortonormalbasis? → Undersøg ortogonalitet, prikproduktet = 0 → Undersøg længden = 1

Angiv koordinatvektoren βx → Prikproduktet <β , x_i>

Vis at proj(x) tilhører $Y^\perp$ → proj(x) = Px (P = UU*) og y = x - proj(x) → Vis at y er ortogonal på alle vektorer i Y

Begreber

- Adjungerede matrix = $\overline{A^T}$ (Transponer og konjuger matricen) (Python kommando: A.H)
- Hermitisk: Det skal gælde at: $A = \overline{A^T}$
- Symmetrisk matrix: Det skal gælde at: $A = A^T$

Uge 4: Spektralsætningen

Spektralsætningen (Reelle tilfælde)

Det gælder at:

1) A er reel symmetrisk (A = A^T)
2) A er ortogonal diagonalsabel, altså $\Lambda = Q^T A\, Q$, hvor Q er ortogonal (Prikproduktet lig 0 for matricens søjler)
3) R^n har en ortonormalbasis af egenvektorer for A

Lemma 2.8.6) Matricen betegnes reel og symmetrisk når: $A \;=\; Q\,\Lambda\, Q^T$

Bestem ortogonalmatricen Q:

1) Find egenværdier → $det(\underline{\underline{A}} \;-\; \lambda\, I)$ → Opstil det karakteriske polynomium p(z) og bestem rødderne
2) Find egenvektorer → $Ker(\underline{\underline{A}} \;-\; \lambda\, I)$ → Løs ker(M) = 0 ved gauss
3) Udfør Gram-Schmidt på egenvektorerne, derved fås en ortogonalmatrice Q

Obs. Egenvektorer tilhørende forskellige egenværdier er ortogonale

Bestem diagonalmatricen, Λ:

1) Denne matrice består af de fundne egenværdier opskrevet i diagonalen.

   Obs. Egenværdierne i diagonalmatricen placeres efter den søjle, hvis tilhørende egenvektor er placeret i Q.

Spektralsætningen (Komplekse tilfælde)

Det gælder at:

1) A er normal matrix (AA* = A*A)
2) A er unitær diagonaliseret, altså $\Lambda = U\;A\;I$, hvor U er unitær matrice og I er identitetsmatricen
3) Søjlerne i U udgør en ortonormalbasis (søjler med længde 1 og prikprodukt lig 0)

Matricen A kan skrive som: $A \;=\; U\,\Lambda\, U\,*$ (Spektral dekomposition af A)

Reduktion af kvadratisk form

Givet på formen: $q(x) = x^T A x + x^T b + c$ (Genkend fra uge 1)

Obs: Se uge 4 opgave 6 - store dag

Ellipser og hyperbler

Ellipsen: $(\frac{x}{a})^2 \;+\; (\frac{y}{b})^2 \;=\; 1$ forskudt med et punkt: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \;=\; 1$

Halvakser a og b

Symmetriakser x og y

Centrum (x0,y0)

Hyperbler: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Opgaver

Find en spektral dekomposition af A:

→ Find egenværdier og egenvektor

→ Bestem ortonormalbasis, anvend Gram-Schmidt

→ Opskriv diagonalmatricen, Λ og ortogonalmatricen Q - opgaven er hermed løst

Uge 5: Taylor-approksimationer

Taylor i en variable

Bestem approksimation for et n'te gradspolynomium:

$$P_n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + 1/2f''(x_0)(x - x_0)^2 + 1/6f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \ldots .$$

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ hvor $\mathrm{R_n(x) = \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)^n}$ og $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

Epsilonfunktion er gående mod 0 når x er gående mod 0

Taylor i flere variable (2. orden)

$$P_n(x, y) = f(x_0, y) + \nabla f(x_0, y)(x - x_0) + 1/2(x - x_0)H_f(x_0)(x - x_0)$$

Kan også skrives som:

$$\mathrm{P_n(x) = f(x, y) + f'x(x - x_0) + f'y(y - y_0) + 1/2(f''x(x - x_0)^2 + 2f''xy(xy) + f''y(y - y_0)^2)}$$

Undersøg grænseværdi

1) Opskriv en funktion for f ved brug af Taylor-approksimation:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{hvor} \quad \mathrm{R_n(x) = \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)^n}$$

2) Opskriv brøk og lad x være gående mod 0:

$$\frac{P_n(x) + R_n(x)}{g(x)}$$

Bemærk: Vi ønsker en brøk af to polynomier af samme grad. Hvis g(x) er et polynomium, så udfør Taylor efter denne grad. Hvis ingen af funktionerne er polynomier, så udfør Taylor af anden grad på begge.

Hvis det ikke fungerer for 2. gradspolynomium, så prøv med et højere gradspolynomium.

Uge 6: Extremum og optimering

Sæt 5.1.1) Værdimængden $f([a,b]) = [m, M]$

Sæt 5.1.2) Funktionens ekstremumsværdier findes i følgende:

1. x0 = a
2. x0 = b
3. Punkter x0 hvor f ikke er differentiabel (Undtagelsespunkter)
4. Punkter hvor f er differentiabel og f' = 0 (Stationære punkter)

   Bemærk: Fås et imaginært tal som løsning for gradienten, så kan intet afgøres mht. max. og min.

Derudover:

f ''(x) > 0 f er lokalt min.

f ''(x) < 0 f er lokalt max.

Undersøg min. og max. for en funktion f

1) Bestem $\nabla f(x,y) = 0$ $f'x\ (x,y) = 0$ og $f'y\ (x,y) = 0$

2) Bestem stationære punkter for ligningen

3) Opstil en Hesse-matrice med indsættelse af stationære punkter

4) Egenværdierne er opskrevet i diagonalen, hvis ikke så bestem determinanten af matricen og find derved egenværdierne.

Egenværdierne i Hesse-matricen:

1. Egenværdierne er positive $\Longrightarrow$ **egentligt lokalt min**. i x
2. Egenværdierne er negative $\Longrightarrow$ **egentligt lokalt max.** i x
3. Både positive og negative egenværdier $\Longrightarrow$ **saddelpunkt** i x
4. Hvis en eller flere egenværdier er 0 mens resten har samme fortegn $\Longrightarrow$ monotoni undersøgelse i f(0,y)

Obs, bliv klogere til dette til eksamen + kvadratkompl.

Kvadratisk form q(x) = $\boldsymbol{x^T A x + b^T x}$

Bemærk følgende for denne type opgave:

- Egenværdierne aflæses i diagonalen, Λ og matricen A er symmetrisk derved invertibel
- Formlen for gradienten på kvadratisk form: 2Ax + b
- Sammenhæng for matricen A og Hessematricen: $H_q = 2A$

Uge 7: <u>Integration i en dimension</u>

Riemann Integral i en variable

Intervallet [a,b] opdeles i n-intervaller.

Riemann sum: $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{f}(\zeta_{\mathrm{i}})\Delta x_i$ hvor $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ Obs, lav opg med dette

f kaldes Riemann Integralet hvis:

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ \rightarrow I$ (har en grænseværdi)

1) Hvis f er Riemann integral, så er f begrænset

2) Hvis f er kontinuert, så er f Riemann Integral

Integralregning fundamental sætning (6.1.2)

$$F(x) = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En stamfunktion til f er differentiabel dvs. F'(x) = f(x)

Uegentlige integraler (Ikke Riemann Integral)

Kendetegner integraler, der ikke umiddelbart kan beregnes ved almindelige integrationsmetoder fordi:

1) Ubegrænsede grænser dvs. integralet strækker sig mod uendeligheden
2) Singularitet dvs. integranden har en lodret asymptote inden for intervallet

Hvad kan man gøre? Undersøge grænseovergangen 0 < a < 1

Riemann Integral af 2 variable

$$\int_c^d \int_a^b f(x)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x)\,dy\ dx$$

Integration ved substitution:

$$\int f(t)\,dt = \int f(g(x))g'(x)\,dx$$

Du får givet en sammensat funktion

→ Opskriv variablen t efter den indre funktion, g(x)

→ Differentier: $\frac{dt}{dx} = g'(x)$

→ Omskriv: $dt = dx \cdot g'(x) \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{g'(x)}$

→ Indsæt udtrykket for dx og udfør integration

Partiel integration (delvis integration)

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Standard integral:

$$F = \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = tan^{-1}(x) + C$$

Uge 8: Integration i højere dimension

Transformationssætning

$$\int_{r(\Gamma)} f(x,y)\, d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(r(u,v)) \cdot |det(J_r(u,v))|\, du\, dv$$

Polære koordinater

Polære koordinater: (r, θ)

$$(x,y) = (r \cdot cos\theta, r \cdot sin\theta)$$
$$r \in [0,a] \;\wedge\; \theta \in [0,2\pi]$$

$$r(u,v,w) = (u \cdot cos(v), u \cdot sin(v))$$
$$det(J_r(u,v)) = u$$

Cylinder koordinater

Cylinder koordinater: (r, θ, z)

$$(x,y,z) = (r \cdot cos\theta, r \cdot sin\theta, z)$$
$$r \in [0,a] \;\wedge\; \theta \in [0,2\pi] \;\wedge\; z \in [0,h]$$

$$r(u,v,w) = (u \cdot cos(v), u \cdot sin(v), w)$$
$$det(J_r(u,v,w)) = u$$

Kugle koordinater

Sfæriske koordinater: (r, θ, φ)

$$(x,y,z) = (r \cdot sin\varphi \cdot cos\theta, r \cdot sin\varphi \cdot sin\theta, r \cdot cos\varphi)$$
$$r = u \in [0,a] \;\wedge\; \varphi = v \in [0,\pi] \;\wedge\; \theta = w \in [0,2\pi]$$

$$r(u,v,w) = (u \cdot sin(v)cos(w), u \cdot sin(v)sin(w), u \cdot cos(v))$$
$$det(J_r(u,v,w)) = u^2 sin(w)$$

Massen og Massemidtpunkt

$$M = \int_B 1 \cdot |det(J_r)|\, d(x,y)$$

Koordinaterne for massemidtpunktet:

$$x = \frac{1}{M}\int_B x \cdot f \cdot |det(J_r)|\, d(x,y)$$

$$y = \frac{1}{M}\int_B y \cdot f \cdot |det(J_r)|\, d(x,y)$$

Opgaver

Geometriske regler:

$$\cos(v)^2 + \sin(v)^2 = 1$$

$$\cos(v)^2 - \sin(v)^2 = \cos(2v)$$

$$\sin\left({}^{\pi}/_{2} + v\right) = \cos(v)$$

$$\cos\left({}^{\pi}/_{2} + v\right) = -\sin(v)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(u)^2 + \sin(u)^2 = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(u)^2 = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(u) = 0$$

Arealet/Volumen udregnes som:

$\int_B f(x,y) \cdot |det(J_r)|\, d(x,y)$ (Volumen for punktmængden)

$f(x,y) = 1$

$vol_n(P) = |det(J_r)|$ (Volumen for et givent punkt)

Uge 9: Vektorfelter og integration

Kurveintegralet for en skalar funktion

$$\int_K f\, ds = \int_a^b f(r(u))\, |r'(u)|\, du$$

Kurveintegralet er uafhængig af den valgte parametrisering.

Kurveintegralet er afhængig af cirklens beliggenhed. Det må forventes når f ikke er konstant.

Valg af parametrisering for cirklen:

$(x, y, z) = (a + r \cdot \cos(u),\ b + r \cdot \sin(u),\ k)$ med centrum (a, b, z)

Tangentielle kurveintegral

Kurveintegral af vektorfelt:

Parametrisering langs den rette linje x_0 til x

$$\int_K V(r(u)) \cdot e\, ds = \int_a^b V(r(u)) \cdot r'(u)\, du \qquad \text{(prikproduktet)}$$

Også kendt som arbejdssætningen.

Regulær

Hvis en parametrisering er regulær skal det gælde at:

$$r'(u) \neq 0$$

Integration langs trappelinje

Parametrisering langs trappelinje x_0 til x

En metode til at finde en funktion f (stamfunktionproblemet)

Opdeler parametrisering efter variabler:

$r_1(u) = (u, 0,0) \qquad u \in [0, x]$

$r_2(u) = (x, u, 0) \qquad u \in [0, y]$

$r_3(u) = (x, y, u) \qquad u \in [0, z]$

Integralet bliver:

$$f(x, y, z) = \int_0^x V_1(u, 0,0)\, du + \int_0^y V_2(x, u, 0)\, du + \int_0^z V_3(x, y, u)\, du$$

Gradientvektorfelt:

- Et vektorfelt V er gradientvektorfelt hvis der findes en skalar funktion: $V = \nabla f$
- For et gradientvektorfelt vil kurveintegralet kun afhænge af startpunkt, x_0 og slutpunkt, x.

Afgør om V er et gradientvektorfelt:

1) Udfør integration ved det tangentielle kurveintegral og integration langs trappelinje. Herved fås integration langs den rette linje og trappelinjen, er resultatet forskelligt, så er kurveintegralet afhængig af stien, dermed ikke gradientvektorfelt. Fås det samme resultat, så viser man at kurveintegralet kun er afhængig af start-slutpunkt, dermed er V et gradientvektorfelt.

2) Bestem Jacobianten. Er denne symmetrisk, så er V et gradientvektorfelt.

Flade integral

$$\int_F f\,ds = \int_c^d \int_a^b f(r(u)) \cdot \sqrt{det({J_r}^T \cdot J_r)}\,du\,dv$$

$$\sqrt{det({J_r}^T \cdot J_r)} = |r'_u(u) \times r'_v(u)|$$

Flux af vektorfelt

$$\int_F V \cdot \underline{n}\,ds = \int_c^d \int_a^b V(r(u)) \cdot (r'_u(u) \times r'_v(u))\,du\,dv \qquad \text{(prikproduktet)}$$

Formelsamling

Fremhævede formler

Norm: $||x|| = \sqrt{< x, x >}$

Længden af en vektor: $\sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + .. + (v_n)^2}$

Prikproduktet: $a_1 b_1 + a_2 b_2 + .. + a_n b_n$

Geometriske regler:

$$cos(v)^2 + sin(v)^2 = 1$$

$$cos(v)^2 - sin(v)^2 = cos(2v)$$

$$sin(\pi/2 + v) = cos(v)$$

$$cos(\pi/2 + v) = -sin(v)$$

$$\int_0^{2\pi} cos(v)^2 + sin(v)^2 = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} cos(v)^2 = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} sin(v) = 0$$

Parametrisering vha. trigonomiske funktioner:

$$(x, y, z) = (a + r \cdot cos(u), b + r \cdot sin(u), k) \quad \text{med centrum (a, b, z)}$$

Kvadratsætninger

(15) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b$

(16) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b$

(17) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Potensregneregler

(18) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

(19) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

(20) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

(21) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

(22) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

(23) $a^0 = 1$

(24) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

(25) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

(26) $\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$

(27) $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$

(28) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

(29) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(30) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Brøkregler

(10) $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

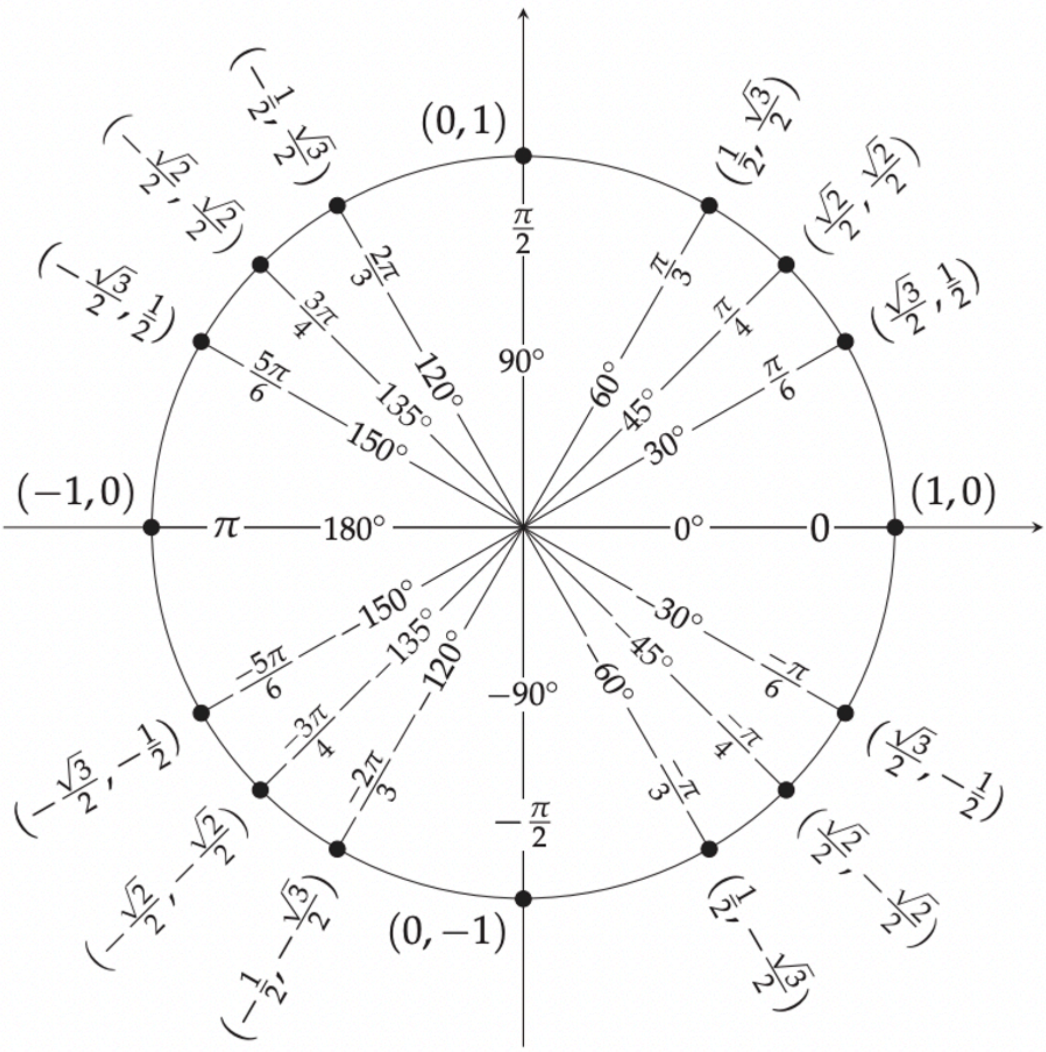
(11) $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}$

(12) $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$

(13) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

(14) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$
0	a	$a \cdot x$
$n \cdot x^{n-1}$	x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
e^x	e^x	e^x
$k \cdot e^{k \cdot x}$	$e^{k \cdot x}$	$\frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}$
$\ln(a) \cdot a^x$	a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$



$(0,1)$
$(-1,0)$
$(1,0)$
$(0,-1)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$
90°
$\frac{\pi}{3}$
60°
$\frac{\pi}{4}$
45°
$\frac{\pi}{6}$
30°
0°
0
$\frac{2\pi}{3}$
120°
$\frac{3\pi}{4}$
135°
$\frac{5\pi}{6}$
150°
π
180°
$\frac{-5\pi}{6}$
150°
$\frac{-3\pi}{4}$
135°
$\frac{-2\pi}{3}$
120°
-90°
$-\frac{\pi}{2}$
60°
$\frac{-\pi}{3}$
45°
$\frac{-\pi}{4}$
30°
$\frac{-\pi}{6}$