DTU

Uge 13 | Repetition

Repetition

Eksamen

Eksamen i 10060

- Eksamen er en **4-timers digital multiple choice eksamen** med **alle hjælpemidler** tilladt, men uden adgang til internettet (du vil have adgang til afleveringssiden)
- Du skal møde fysisk op til eksamen, med din egen computer
- Alle spørgsmål skal besvares. En forkert besvaret opgave vil ikke give negative point. Delvist rigtige svar kan vægte positivt.
- Tjek: eksamensplan.dtu.dk

Lineær mekanik

Lineær kinematik og dynamik

Koordinater $\vec{x}$ $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

For konstant acceleration $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

For konstant cirkelbevægelse $a_{\mathrm{rad}} = \frac{v^2}{R}$

Newtons tre love

N1: ingen acceleration når $\sum \vec{F} = 0$

N2: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

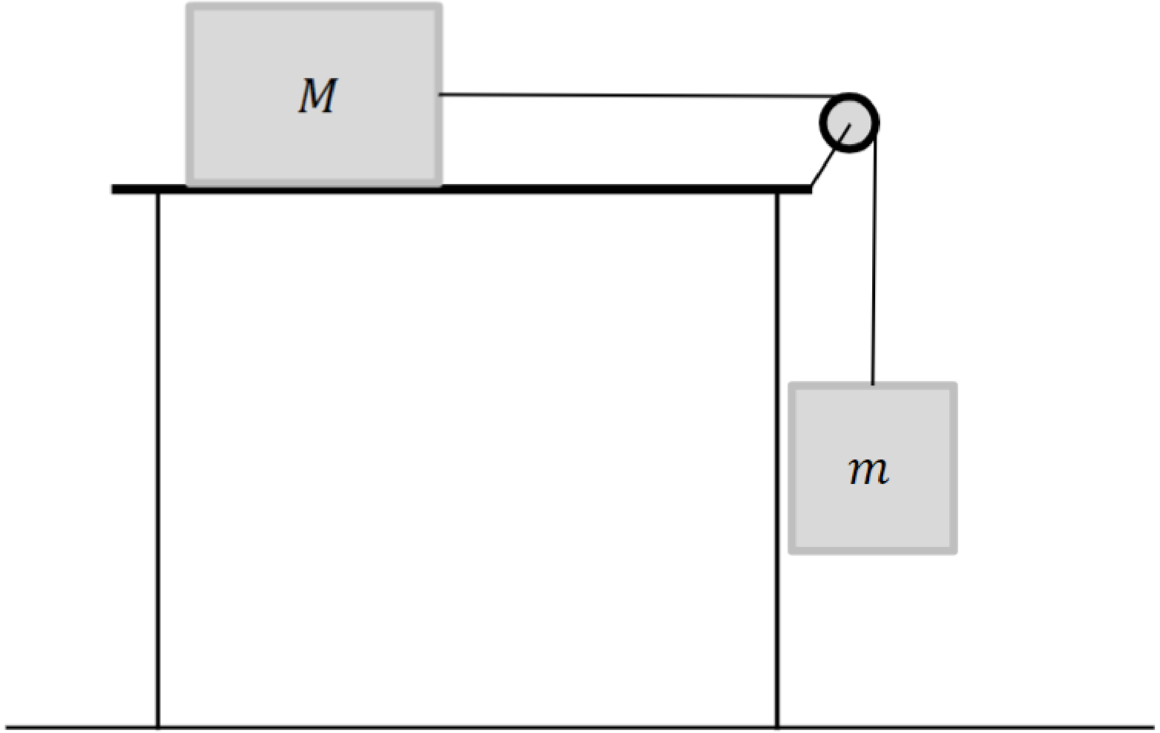
N3: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

Tyngdekraften $F_g = mg$

Statisk friktion $f_s \leq \mu_s n$

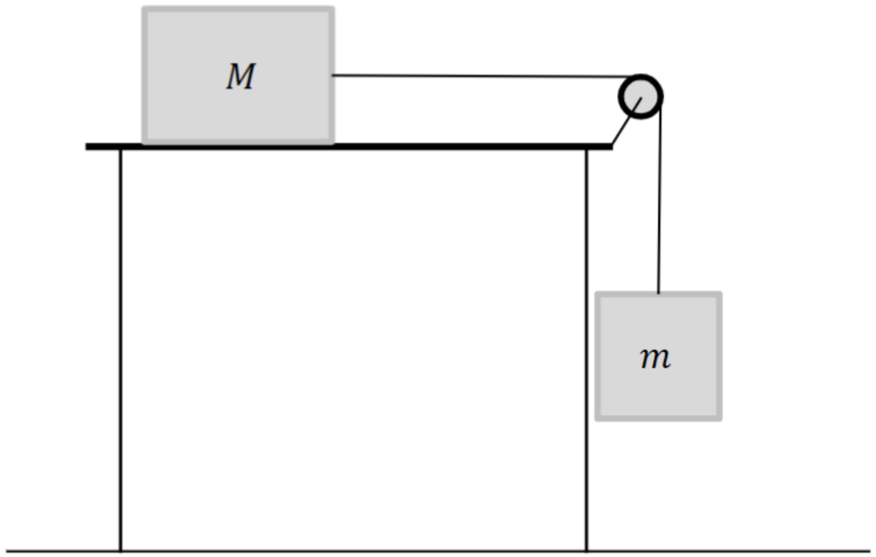
Kinetisk friction $f_k = \mu_k n$

En kasse med massen M er placeret på et vandret bord. En snor går fra kassen over en masseløs, friktionsfri trisse og er i den anden ende fastgjort til en anden kasse med massen m. Systemet slippes fra hvile.



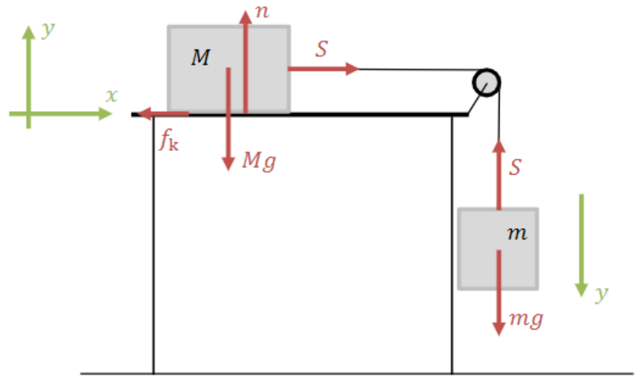
a) Bestem acceleration af kasserne hvis bordet er glat.
b) Bestem accelerationen af kaserne hvis bordet har en ru overflade. Den kinematiske friktionskoefficient mellem kassen og bordet er μ_k.

En kasse med massen M er placeret på et vandret bord. En snor går fra kassen over en masseløs, friktionsfri trisse og er i den anden ende fastgjort til en anden kasse med massen m. Systemet slippes fra hvile.



a) Bestem acceleration af kasserne hvis bordet er glat.
b) Bestem accelerationen af kaserne hvis bordet har en ru overflade. Den kinematiske friktionskoefficient mellem kassen og bordet er μ_k.

Vi tegner kraftdiagrammer for hver kasse med hvert deres koordinatsystem. Vi inkluderer friktionskraften i diagrammet.



a) Her er $f_k = 0$! Vi opskriver Newtons 2. lov i bevægelsesretningen for begge kasser:

N2(M, x): $Ma = S$ (1)

N2(m, y): $ma = mg - S$ (2)

Bemærk at kasserne har samme acceleration, da de er forbundet via en ideel snor. Vi indsætter ligning (1) i ligning (2) og løser for a

$$ma = mg - Ma \Leftrightarrow$$
$$(m + M)a = mg \Leftrightarrow$$
$$a = g\frac{m}{m + M}$$

b) Vi opskriver Newtons love for begge kasser i begge retninger – nu med friktionskraften:

N1(M, y): $M \cdot 0 = n - Mg \Rightarrow n = Mg$

N2(M, x): $Ma = S - f_k$ (3)

N2(m, y): $ma = mg - S$ (4)

Friktionskraften er givet ved $f_k = \mu_k n = \mu_k Mg$. Denne relation indsættes i ligning (3), hvorefter snorkraften S isoleres og indsættes i ligning (4)

$$Ma = S - \mu_k Mg \Rightarrow S = Ma + \mu_k Mg$$

$$ma = mg - (Ma + \mu_k Mg) \Leftrightarrow$$
$$a = g\frac{m - \mu_k M}{m + M}$$

Arbejde, energi og impuls

Arbejde fra en kraft $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Effekt $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Kinetisk energi $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potentiel energi $U = mgh$

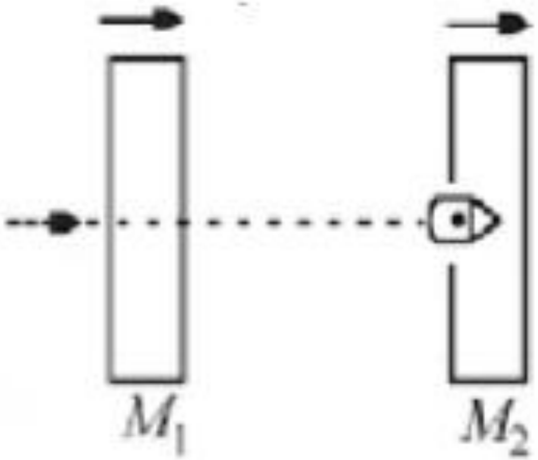
Bevarelse af mekanisk energi $K_1 + U_1 + W = K_2 + U_2$

En partikels impuls er $\vec{p} = m\vec{v}$

og N2 giver $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Er der ingen ydre kræfter er impulsen bevaret (f.eks. kollisioner, stød, …)

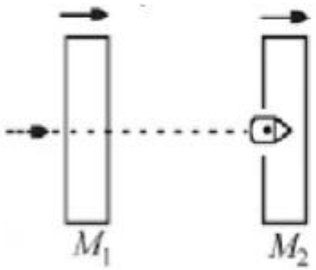
To klodser med masserne M_1 og M_2 ligger på et vandret, glat bord. Et projektil med farten v og massen m borer sig gennem klodsen M_1. Umiddelbart efterfølgende borer projektilet sig ind i klodsen M_2, og projektilet bevæger sig herefter sammen med M_2. Projektilet har efter gennemboringen af M_1 farten v_1. Efter sammenstødene har M_1 og legemet bestående af M_2 og m begge farten v_2.



a) Bestem udtryk for v_1 og v_2.

To klodser med masserne M_1 og M_2 ligger på et vandret, glat bord. Et projektil med farten v og massen m borer sig gennem klodsen M_1. Umiddelbart efterfølgende borer projektilet sig ind i klodsen M_2, og projektilet bevæger sig herefter sammen med M_2. Projektilet har efter gennemboringen af M_1 farten v_1. Efter sammenstødene har M_1 og legemet bestående af M_2 og m begge farten v_2.

a) Bestem udtryk for v_1 og v_2.



Vi deler problemet op i to stødprocesser: Den første proces omhandler stødet med klods 1 som er uelastisk, mens den anden proces omhandler stødet med klods 2 som er fuldstændig uelastisk, da projektil og klods 2 bevæger sig sammen efter stødet. I begge stødprocesser er der impulsbevarelse.

Første stød: Vi betragter projektil og klods 1 som vores system i det første stød. Inden stødet betegnes med indekset 1 og her er det kun projektilet, der har impuls, da klods 1 står stille. Efter stødet betegnes med indekset 2 og her har både projektil og klods 1 impuls, da projektilet har afgivet noget af sin impuls til klods 1. Vi får opgivet at klods 1 bevæger sig med hastigheden v_2 efter stødet.

Impulsbevarelse $(1 \rightarrow 2)$: $p_1 = p_2 \Leftrightarrow$

$$p_{1,\text{projektil}} = p_{2,\text{projektil}} + p_{2,\text{klods1}} \Leftrightarrow$$

$$mv = mv_1 + M_1 v_2 \qquad (1)$$

Andet stød: I det andet stød betragter vi projektil (nu med impulsen $p_{2,\text{projektil}}$) og klods 2 som vores system. Inden stødet betegnes med indekset 3, og her er det kun projektil, der har impuls, da klods 2 står stille. Efter stødet betegnes med indekset 4, og her bevæger projektil og klods 2 som et samlet legeme med en fælles hastighed v_2.

Impulsbevarelse $(3 \rightarrow 4)$: $p_3 = p_4$

$$p_{2,\text{projektil}} = p_{4,\text{projektil+klods2}}$$

$$mv_1 = (m + M_2)v_2 \qquad (2)$$

Vi har nu to ligninger (1) og (2) med to ubekendte v_1 og v_2. Vi løser de to ligninger

$$v_1 = \frac{M_2 + m}{M_1 + M_2 + m} v$$

$$v_2 = \frac{m}{M_1 + M_2 + m} v$$

Rotationel mekanik

Rotationel kinematik

Rotationelle koordinater θ $\omega_z = \frac{d\theta}{dt}$ $\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt}$

For konstant vinkelacceleration $\theta = \theta_0 + \omega_z t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$

Sammenhæng mellem lineær og rotational kinematik

$v = r\omega$ $a_{\text{rad}} = \omega^2 r$ $a_{\tan} = r\alpha$

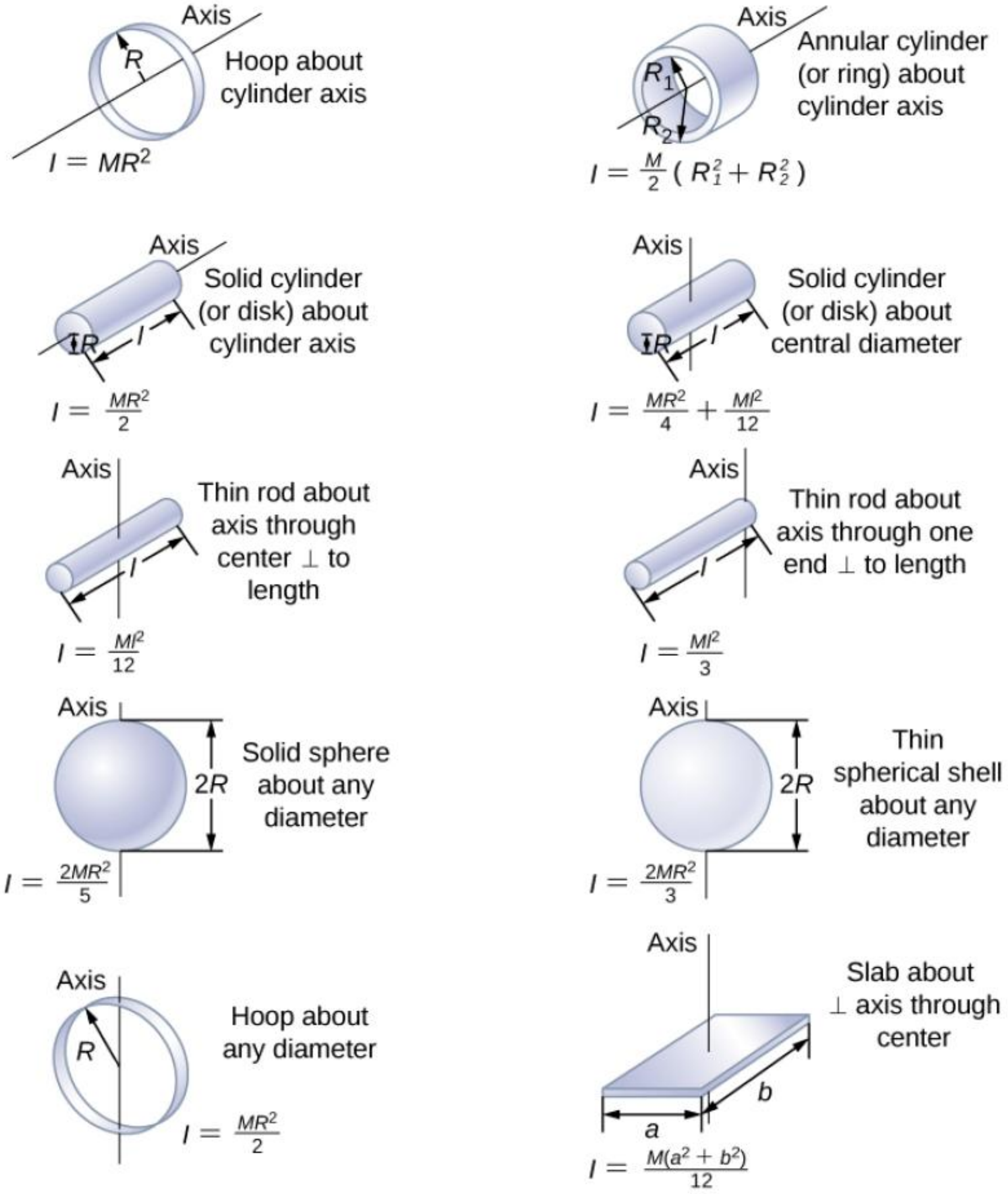
Inertimoment $I = \sum_i m_i r_i^2$ $I = \int r^2 \, \mathrm{d}m$

sammensatte legemer $I = \sum_j I_j$

parallelakseteoremet $I = I_{\text{cm}} + Md^2$

Kinetisk energi for rotation $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

Inertimomenter for udstrakte legemer



En tynd, homogen cylinder har masse M og radius $6R$. Der bores nu et hul med radius R i højre side af cylinderen.

Hvad er inertimomentet af cylinderen med hul i, med hensyn til en akse vinkelret på papirets plan der går gennem centrum af cylinderen?

A) $I = \frac{1295}{72} MR^2$
B) $I = \frac{415}{24} MR^2$
C) $I = \frac{415}{24} MR^2$
D) $I = 18MR^2$
E) $I = 9MR^2$
F) Ved ikke

En tynd, homogen cylinder har masse M og radius $6R$. Der bores nu et hul med radius R i højre side af cylinderen.

Hvad er inertimomentet af cylinderen med hul i, med hensyn til en akse vinkelret på papirets plan der går gennem centrum af cylinderen?

A) $I = \frac{1295}{72} MR^2$
B) $I = \frac{415}{24} MR^2$
C) $I = \frac{415}{24} MR^2$
D) $I = 18MR^2$
E) $I = 9MR^2$
F) Ved ikke

Det korrekte svar er C. Udregn inertimoment af cylinder uden hul. Udregn inertimoment af ”hul” og brug parallelakseteoremet på dette. Træk de to værdier fra hinanden.

restart;

$I1 := \frac{1}{2} \cdot M \cdot (6 \cdot R)^2$

$$I1 := 18\, MR^2$$

$I2 := \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{36} \cdot R^2;$

$$I2 := \frac{MR^2}{72}$$

$I3 := I2 + \frac{M}{36} \cdot (5 \cdot R)^2;$

$$I3 := \frac{17\, MR^2}{24}$$

$I1 - I3;$

$$\frac{415\, MR^2}{24}$$

Energi i rotation, rulning u. glidning

- Kinetisk energi i kombineret system

$$K = K_{\mathrm{trans}} + K_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{cm}}\omega^2$$

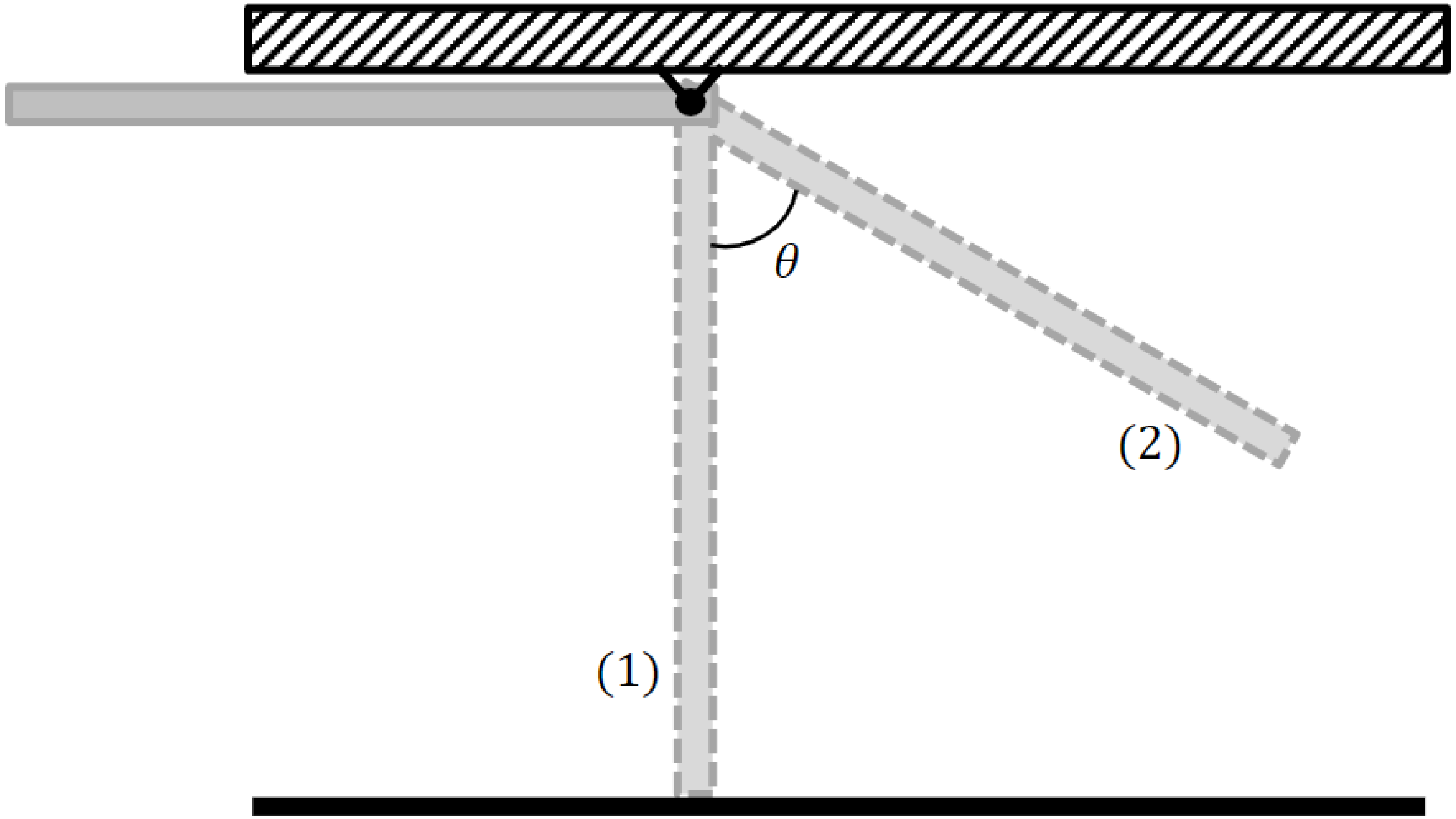
- Potentiel energi

$$U = Mgy_{\mathrm{cm}}$$

- Rulning uden at glide

$$s_{\mathrm{cm}} = R\theta \qquad v_{\mathrm{cm}} = R\omega \qquad a_{\mathrm{cm}} = R\alpha$$

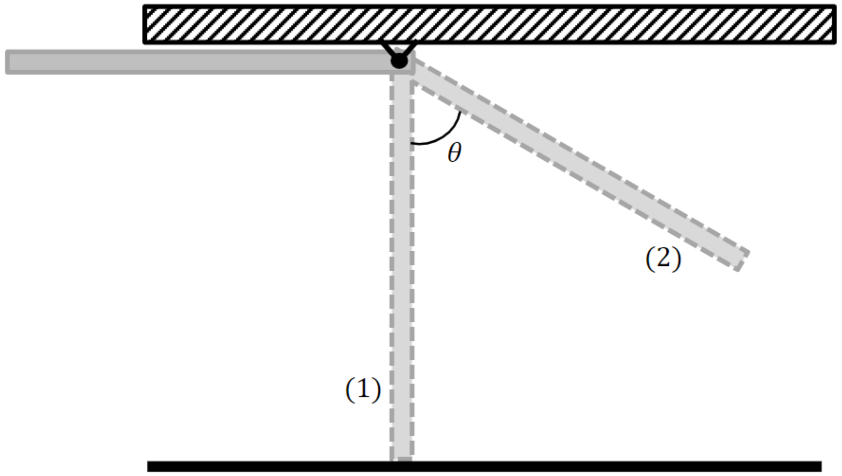
En smal, homogen stang med massen $6M$ og længden $2L$ kan rotere frit om en vandret rotationsakse gennem den ene ende af stangen. Stangen slippes hvile i fra vandret position. Under den efterfølgende rotation står stangen på et tidspunkt lodret (position 1) og lidt senere danner den vinklen θ med lodret (situation 2).



a) Bestem vinkelhastigheden, ω_1, når stangen står lodret (1).

b) Bestem massemidtpunktets fart, v_{cm}, når stangen danner vinklen θ med lodret (2)

En smal, homogen stang med massen $6M$ og længden $2L$ kan rotere frit om en vandret rotationsakse gennem den ene ende af stangen. Stangen slippes hvile i fra vandret position. Under den efterfølgende rotation står stangen på et tidspunkt lodret (position 1) og lidt senere danner den vinklen θ med lodret (situation 2).



a) Bestem vinkelhastigheden, ω_1, når stangen står lodret (1).
b) Bestem massemidtpunktets fart, v_{cm}, når stangen danner vinklen θ med lodret (2)

Bestem inertimoment og brug rotationel energibevarelse

a)

$$I_1 = \frac{1}{3} 6M(2L)^2 = 8ML^2$$

$$0 + 6MgL = \frac{1}{2} 8ML^2 \omega_1^2 + 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}}$$

b)

$$6Mg\frac{2L}{2} + 0 = 6Mg\frac{2L}{2}(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} 8ML^2 \omega_2^2$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\cos\theta \frac{g}{L}}$$

$$v_{\text{cm}} = L\omega_2$$

$$v_{\text{cm}} = L\omega_2 = \sqrt{\tfrac{3}{2}\cos\theta\, gL}$$

Kraftmoment

Definition:

$$\tau = rF_{\text{tan}} = rF\sin\phi \qquad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Newtons 2. lov (nu også for rotation):

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}} \qquad \sum \tau_z = I\alpha_z$$

Arbejde fra et kraftmoment:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

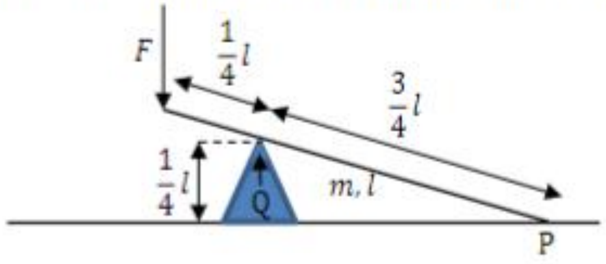
For konstant τ_z findes desuden arbejde og effekt:

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) \qquad P = \tau_z\omega_z$$

Statisk ligevægt

Ligevægt = ingen acceleration: $\sum \vec{F} = 0$ og $\sum \vec{\tau} = 0$

En tynd, homogen stang har massen m og længden l. Stangen har kontakt med underlaget i et punkt, P, og med en blå trekant i punktet Q. Afstanden fra punktet P til punktet Q langs stangen er $\frac{3}{4}l$. I den modsatte ende skubbes lodret ned ad med en kraft, F. Trekanten har højden $\frac{1}{4}l$. Hvis kraften, F, er til strækkelig stor, vil stangen begynde at rotere omkring kontaktpunktet Q.



a) Hvad gælder om den mindste værdi af F der skal til for at normalkraften på stangen i P er nul?

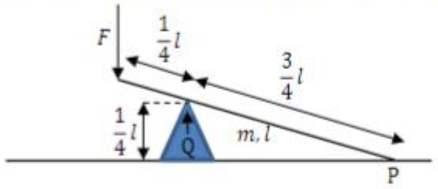
A) $F > mg$
B) $F = mg$
C) $F < mg$
D) Ved ikke

Der skubbes nu med kraften, $F = 100$ N. De øvrige parametre er $m = 8.0$ kg og $l = 2.0$ m.

b) Hvad er størrelsen af bjælkens vinkelaccelerationen, α, lige efter kraften begynder at virke?

A) $\alpha = 0\ \mathrm{s}^{-2}$ (kraften er ikke tilstrækkelig stor til at bjælken roterer)
B) $\alpha = 0.34\ \mathrm{s}^{-2}$
C) $\alpha = 0.95\ \mathrm{s}^{-2}$
D) $\alpha = 2.2\ \mathrm{s}^{-2}$
E) $\alpha = 2.3\ \mathrm{s}^{-2}$
F) $\alpha = 3.8\ \mathrm{s}^{-2}$
G) Ved ikke

En tynd, homogen stang har massen m og længden l. Stangen har kontakt med underlaget i et punkt, P, og med en blå trekant i punktet Q. Afstanden fra punktet P til punktet Q langs stangen er $\frac{3}{4}l$. I den modsatte ende skubbes lodret ned ad med en kraft, F. Trekanten har højden $\frac{1}{4}l$. Hvis kraften, F, er til strækkelig stor, vil stangen begynde at rotere omkring kontaktpunktet Q.



a) Hvad gælder om den mindste værdi af F der skal til for at normalkraften på stangen i P er nul?

A) $F > mg$
B) $F = mg$
C) $F < mg$
D) Ved ikke

Der skubbes nu med kraften, $F = 100$ N. De øvrige parametre er $m = 8.0$ kg og $l = 2.0$ m.

b) Hvad er størrelsen af bjælkens vinkelaccelerationen, α, lige efter kraften begynder at virke?

A) $\alpha = 0\ \mathrm{s}^{-2}$ (kraften er ikke tilstrækkelig stor til at bjælken roterer)
B) $\alpha = 0.34\ \mathrm{s}^{-2}$
C) $\alpha = 0.95\ \mathrm{s}^{-2}$
D) $\alpha = 2.2\ \mathrm{s}^{-2}$
E) $\alpha = 2.3\ \mathrm{s}^{-2}$
F) $\alpha = 3.8\ \mathrm{s}^{-2}$
G) Ved ikke

Løsning

a) Kraftmomenterne fra kraften F og tyngdekraften er ens, da de har samme arm.

Det korrekte svar er B.

b) Regn rotation mod uret for positiv. Opskriv impulsmomensætningen; husk at det skal være inertimomentet mht. rotationspunktet.

Geometri: $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{8}}{3}$ (θ er vinklen er mellem stangen og lodret)

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right)ml^2 = \frac{7}{48}ml^2$$

$$I\alpha = (F-mg)\frac{l}{4}\cos\theta = (F-mg)\frac{l}{4}\frac{\sqrt{8}}{3} = (F-mg)\frac{\sqrt{8}l}{12}$$

$$\frac{7}{48}ml^2\alpha = (F-mg)\frac{\sqrt{8}l}{12}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{8}\cdot 48}{7\cdot 12}\frac{F-mg}{ml} = 2.166\ \mathrm{s}^{-2}$$

Det korrekte svar er D.

Impulsmoment

Definition:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad L = mvr\sin\phi = mvl$$

Sammenhæng med inertimoment

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad L = I\omega$$

Impulsmomentbevarelse

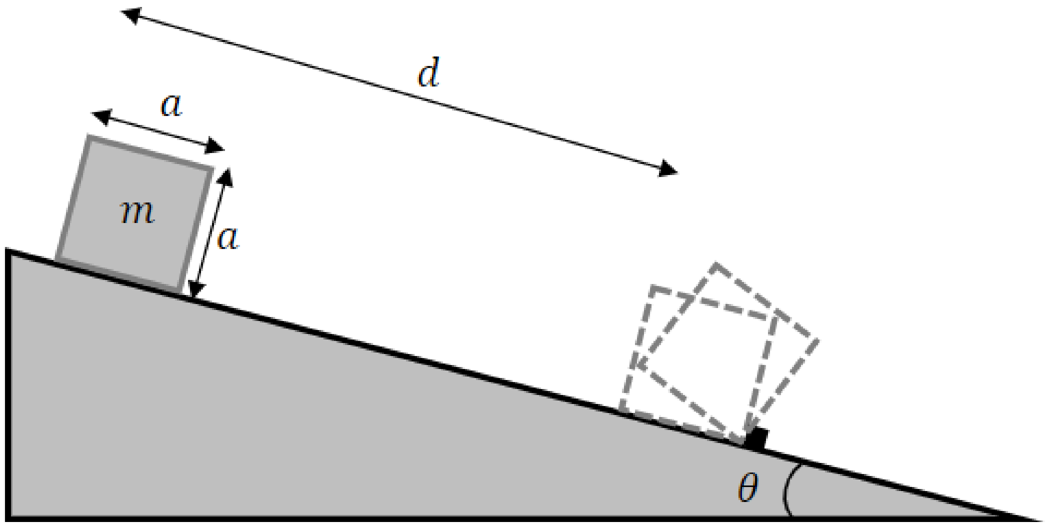
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum\vec{\tau} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

(for intet ydre totalt kraftmoment)

Præcession (gr. kraftmoment fra tyngdekraften)

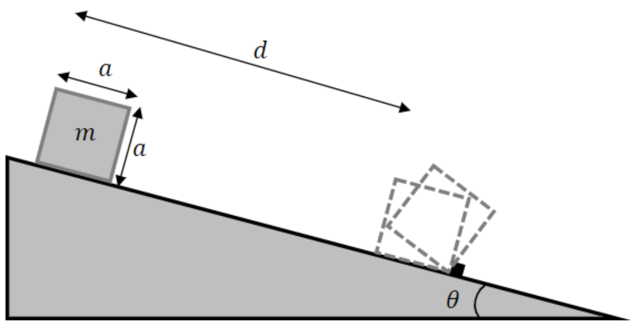
$$\Omega = \frac{\tau}{L} = \frac{mgr}{I\omega}$$

En kvadratisk, homogen kasse med massen m og sidelængden a befinder sig på et fastholdt, glat skråplan. Skråplanet danner vinklen θ med vandret. Kassen slippes fra hvile og glider strækningen d ned ad skråplanet før den rammer en lille, fastholdt forhindring (den lille sorte kvadrat på skråplanet). Umiddelbart efter sammenstødet med forhindringen begynder kassen at rotere omkring en vandret aksen gennem forhindringen (rotationen er illustreret af de hvide kasser). Under stødet er stødkraften meget større end tyngdekraften. Opstillingen er vist i figuren herunder.



a) Hvad er kassens hastighed v umiddelbart før den rammer forhindringen?
b) Hvad er inertimomentet I af kassen med hensyn til rotationsaksen når kassen roterer omkring forhindringen?
c) Hvad er kassens vinkelhastighed ω umiddelbart efter den har ramt forhindringen?

En kvadratisk, homogen kasse med massen m og sidelængden a befinder sig på et fastholdt, glat skråplan. Skråplanet danner vinklen θ med vandret. Kassen slippes fra hvile og glider strækningen d ned ad skråplanet før den rammer en lille, fastholdt forhindring (den lille sorte kvadrat på skråplanet). Umiddelbart efter sammenstødet med forhindringen begynder kassen at rotere omkring en vandret aksen gennem forhindringen (rotationen er illustreret af de hvide kasser). Under stødet er stødkraften meget større end tyngdekraften. Opstillingen er vist i figuren herunder.



a) Hvad er kassens hastighed v umiddelbart før den rammer forhindringen?
b) Hvad er inertimomentet I af kassen med hensyn til rotationsaksen når kassen roterer omkring forhindringen?
c) Hvad er kassens vinkelhastighed ω umiddelbart efter den har ramt forhindringen?

Løsning

a) Energibevarelse. Nulpunkt for potentiel energi i slutsituation. Vi har

$$mgd\sin\theta + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

der leder til resultatet

$$v = \sqrt{2gd\sin\theta}.$$

b) Anvend parallelakseteoremet for at finde inertimomentet. $I_{cm} = \frac{1}{12}m(a^2 + a^2) = \frac{1}{6}ma^2$. $I = I_{cm} + m\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{2}ma^2 = \frac{2}{3}ma^2$.

c) Da tyngdekraften kan ignoreres under kollisionen er der impulsmomentbevarelse med hensyn til rotationsaksen. Umiddelbart efter kollisionen er $L = I\omega$. Energibevarelse giver at farten er $v = \sqrt{2gd\sin\theta}$, derfor bliver impulsmomentet $L = \frac{ma}{2}\sqrt{2gd\sin\theta}$. Impulsmomentbevarelse giver så $\frac{ma}{2}\sqrt{2gd\sin\theta} = \frac{2}{3}ma^2\omega$ hvilket giver $\omega = \frac{3}{4a}\sqrt{2gd\sin\theta}$.

Termodynamik

Temperatur

- Temperaturen måles i enheden Kelvin (K)

$$T_{\mathrm{K}} = T_{\mathrm{C}} + 273.15$$

med absolut nulpunkt ved $T = 0\ \mathrm{K}$.

- Termisk ekspansion

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \qquad \Delta A = 2\alpha A_0 \Delta T \qquad \Delta V = \underbrace{3\alpha}_{\beta} V_0 \Delta T$$

- Termodynamikkens 0. lov

Hvis et legeme A er i termisk ligevægt med legeme C, og legeme B er i termisk ligevægt med legeme C, da vil legeme A og B være i termisk ligevægt.

Varme

- Opvarmning/afkøling uden faseovergang

$$Q = mc\Delta T = nC\Delta \mathrm{T}$$

- Opvarmning/afkøling ved faseovergang

$$Q = \pm mL$$

- Varme kan overføres på 3 måder
  - Varmeledning (conduction)

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_L}{L}$$

  - Varmekonvektion (convection)

(fluiddynamik…)

  - Varmestråling (radiation)

$$\frac{dQ}{dt} = Ae\sigma T^4$$

Stofs Termiske Egenskaber

- Idealgasligningen

$$pV = nRT \qquad \text{eller} \qquad pV = NkT$$

- Temperaturen beskriver den gennemsnitlige translatoriske energi af molekylerne i en gas

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{\text{av}} = \frac{3}{2}kT$$

- Molekylerne i en gas følger en Maxwell-Boltzmann fordeling og har gennemsnitsfarten

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \qquad v_{\text{mp}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \qquad v_{\text{av}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

- Varmekapaciteten af en gas er bestemt ved molekylernes frihedsgrader d

$$C_V = \frac{d}{2}R$$

monoatomar gas: $d = 3$

diatomar gas: $d = 5$

Termodynamiske processer

- Arbejde udført af systemet på omgivelserne afhænger af processen

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV$$

- Den indre energi E for en idealgas afhænger kun af temperaturen (start/slut) og ikke af processen

$$\Delta E = nC_V \Delta T$$

- Termodynamikkens første lov (energibevarelse)

$$\Delta E = Q - W$$

- For en cyklisk proces er

$$\Delta E = 0 \quad \text{og} \qquad Q = W$$

Termodynamiske processer

- 4 vigtige processer
  - Isobar (konstant tryk): $\Delta E = Q - W$ med $W = p(V_2 - V_1)$
  - Isochor (konstant volumen): $\Delta E = Q$ da $W = 0$
  - Isorterm (konstant temperatur): $\Delta E = 0$ så $W = Q$ (for en idealgas)
  - Adiabatisk (ingen varmeudv.): $\Delta E = -W$ og for en idealgas:

$$W = nC_V(T_1 - T_2) = \frac{1}{1-\gamma}(p_1V_1 - p_2V_2)$$

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1} \quad \text{og} \quad p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma}$$

- Sammenhæng mellem isobar (C_P) og isochor (C_V) varmekapacitet

$$C_P = C_V + R$$

- Varmekapacitetsforholdet

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

Termodynamikkens Anden Lov

- Cyklisk proces med varmeudveksling

$$\Delta E = 0 \quad \text{så} \qquad W = Q = Q_\mathrm{H} + Q_\mathrm{C}$$

- Varmemaskiner

$$e = \frac{W}{Q_\mathrm{H}} = \frac{Q_\mathrm{H}+Q_\mathrm{C}}{Q_\mathrm{H}} = 1 + \frac{Q_\mathrm{C}}{Q_\mathrm{H}}$$

- Kølemaskiner (ydelsesfaktoren K benævnes også COP)
  - Køleskab: $K_\mathrm{R} = \frac{Q_\mathrm{C}}{-W} = -\frac{Q_\mathrm{C}}{Q_\mathrm{H}+Q_\mathrm{C}} = -\frac{1}{1+\frac{Q_H}{Q_C}}$
  - Varmepumpe: $K_\mathrm{P} = \frac{Q_\mathrm{H}}{-W} = -\frac{Q_\mathrm{H}}{Q_\mathrm{H}+Q_\mathrm{C}} = -\frac{1}{1+\frac{Q_C}{Q_H}} = K_\mathrm{R} + 1$

- Termodynamikkens Anden Lov
  – Varmemaskineversionen: $e < 1$
  – Kølemaskineversionen: $K < \infty$

Termodynamikkens Anden Lov

Carnot-maskine (mest muligt effektiv)

- Varmemaskine: $e_{\text{carnot}} = \frac{T_\text{h} - T_\text{c}}{T_\text{h}}$
- Kølemaskine/Varmepumpe: $K_{\text{R,carnot}} = \frac{T_\text{c}}{T_\text{h} - T_\text{c}}$ $K_{\text{P,carnot}} = \frac{T_\text{h}}{T_\text{h} - T_\text{c}}$

Entropiforskel for

- Isoterm proces: $\Delta S = \frac{Q}{T}$
- Generel proces: $\Delta S = \int_{\text{start}}^{\text{slut}} \frac{1}{T}\,\mathrm{d}Q$

Termodynamikkens anden hovedsætning

Når der tages højde for alle dele i et system, vil entropien aldrig aftage

Gravitation

Gravitation

Tyngdekraften mellem to objekter med massen m_1 og m_2 er $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

Den gravitationelle potentielle energi (med nulpunkt ueldeligt langt væk) $U = -G\frac{Mm}{r}$

Undvigelseshastigheden er $v = \sqrt{2GM/R}$

og for et sort hul giver dette anledning til Schwarzschild radius $R_S = 2\mathrm{GM}/\mathrm{c}^2$

For cirkulært kredsløb er tyngdekraften lig centripetalkraften $G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$

hvilket giver farten for cirkulært kredsløb i en afstand r fra centrum $v = \sqrt{GM/r}$

og omløbstid $T = \frac{2\pi r^{3/2}}{(GM)^{1/2}}$

Elektromagnetisme

Elektrostatik

Elektrisk potential fra punktladning
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Elektrisk potentiel energi mellem to punktladninger
$$U = qV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

Elektrisk felt peger mod retningen af største potentialgradient
$$\vec{E} = -\nabla V$$

Elektrisk felt fra punktladning
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r}$$

Coulomb kraften på elektriske punktladninger
$$\vec{F}_\mathrm{E} = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\,\hat{r}$$

Elektrisk felt fra uendelig lang, tynd ledning
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{z}\hat{k}$$

Elektrisk felt fra uendeligt plan
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Elektrisk strøm og Ohms lov

Elektrisk strøm $I = \frac{dQ}{dt}$

Ladninger i leder bevæger sig i gennemsnit med drifthastighed $v_{\mathrm{d}} = \frac{I}{nqA}$

Ohms lov relaterer strøm og spænding (potentialforskel) $V = IR$

Modstanden (resistiviteten) i en leder er $R = \frac{\rho L}{A}$

Resistansen for materialet afhænger af temperaturen $\rho = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0))$

Den afsatte elektriske effekt $P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R}$

Magnetiske felter og kræfter

Magnetisk kraft (Lorentzkraften) på en ladet partikel $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

Ladet partikel i magnetfelt udfører cirkelbevægelse

$$r = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Magnetisk kraft på strømførende ledning $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$

Magnetisk dipol moment $\vec{\mu} = NIA\hat{n}$

Kraftmoment på magnetisk dipol i magnetfelt $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

Energi af magnetisk dipol i magnetfelt $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

Magnetfelter fra elektriske strømme

Magnetfelt fra elektrisk strøm (Biot-Savart's lov) $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\text{ledning}} I\,\frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

Magnetfeltstyrke fra lang, tynd ledning $$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Magnetfeltstyrke langs aksen fra loop $$B = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+y^2)^{3/2}}$$

Magnetfeltstyrke i lang, tynd spole $$B = \frac{N}{L}\mu_0 I = n\mu_0 I$$

Kraft mellem to parallelle strømførende ledninger $$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$

Magnetisme i materialer

Magnetfeltstyrke i lang, tynd spole med kerne $B = \frac{N}{L}\mu I = n\mu I$

Kernematerialets permeabilitet $\mu = (1+\chi)\mu_0$

Materialer klassificeres i tre kategorier baseret på deres reaktion på et magnetfelt:

- Paramagnetisme $(\chi > 0)$: midlertidig ensretning af magnetiske momenter
- Diamagnetisme $(\chi < 0)$: midlertidig modretning af magnetiske momenter
- Ferromagnetisme $(\chi \gg 0)$: permanent ensretning af magnetiske momenter

Induktion

Elektromotorisk kraft (emf) $\varepsilon = \frac{W}{q}$

Magnetisk flux $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}\, dA$

Induceret elektromotorisk kraft (Faradays lov) $\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}$

Induceret strøm (Ohms lov) $I = \frac{\varepsilon}{R}$

Retning af induceret strøm (Lenz's lov):

Den inducerede strøm vil danne et magnetfelt, der modsætter sig ændringen i det eksterne magnetfelt

Samling af højrehåndsregler

- Krydsprodukt $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$
  Tommelfingeren i A's retning, pegefingeren i B's retning, da er C i langefingerens retning

- Magnetfelt omkring strømførende ledning (Biot-Savart's lov)
  – Tommelfingeren i strømmens retning, da er magnetfeltet i de øvrige fingres retning

- Magnetfelt i centrum af strømførende spole (Biot-Savart's lov for spoler)
  – De øvrige fingre i strømmens retning, da er magnetfeltet i tommelfingerens retning

Held og lykke med eksamen!