01017 E21 Eksamen Diskret Matematik

Der anvendes en scoringsalgoritme, som er baseret på "One best answer"

Dette betyder følgende:
Der er altid netop ét svar som er mere rigtigt end de andre
Studerende kan kun vælge ét svar per spørgsmål
Hvert rigtigt svar giver 1 point
Hvert forkert svar giver 0 point (der benyttes IKKE negative point)

Angiv for hvert af de følgende udsagn om det er sandt eller falsk.

Vælg de rigtige svarmuligheder

	Sandt	Falsk
Lad A_1, A_2 og B være formler i udsagnslogik. Da er B en logisk konsekvens af A_1 og A_2, hvis og kun hvis $A_1 \wedge A_2 \rightarrow B$ er gyldig.	○	○
Lad A og B være formler i udsagnslogik. Antag vi laver et tableau med $A \leftrightarrow B : F$ som rodformel, korrekt anvender dekompositionsreglerne og får en åben og mættet gren. Da er $A \equiv B$.	○	○
Udtrykket $\forall x \exists y (P(P(x,y), f(x,y)))$ er en syntaktisk korrekt formel i prædikatlogik, når P er et binært prædikatsymbol og f et binært funktionssymbol.	○	○
Mængdeligheden $A \cap B = A - (A - B)$ gælder, hvis og kun hvis $p \wedge q \leftrightarrow p \wedge (p \rightarrow q)$ er en gyldig formel.	○	○
Betragt en fortolkning hvori $M(x)$ betegner egenskaben at x er menneske, og $E(x,y)$ egenskaben at x elsker y. I denne fortolkning kan vi formalisere udsagnet "Ingen mennesker elsker alle mennesker" som $\forall x (M(x) \rightarrow \neg \exists y (M(y) \wedge E(x,y)))$.	○	○

Betragt fortolkningen F givet ved

- $dom(F) =$ alle mennesker
- $P^F = \{x \mid x \text{ følger kursus 01017}\}$
- $Q^F = \{x \mid x \text{ studerer på DTU}\}$

Vi ønsker at finde korrekte formaliseringer af følgende sætning:

"Alle som følger kursus 01017 studerer på DTU".

Hvilke af følgende formler er korrekte formaliseringer af sætningen?

Bemærk: Hvis en formel A er en korrekt formalisering, og A og B er logisk ækvivalente, så tæller vi også B som en korrekt formalisering, for så udtrykker de to formler logisk set det samme. Eksempelvis tæller $p \to q$ og $\neg q \to \neg p$ derfor begge som korrekte formaliseringer af sætningen "Hvis Peter er glad, er Line glad", hvor p står for at Peter er glad og q for at Line er glad.

Vælg de rigtige svarmuligheder

	Korrekt formalisering	Ikke korrekt formalisering
$\forall x(\neg P(x) \lor Q(x))$	○	○
$\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$	○	○
$\forall x \forall y(P(x) \to Q(x))$	○	○
$\forall x \forall y(P(x) \to Q(y))$	○	○
$\neg\exists x(P(x) \land Q(x))$	○	○

Hvis nedenstående sætninger sættes i rigtig rækkefølge, vil de udgøre et sprogligt bevis for følgende påstand:

$$(B - A) \cap C \subseteq B \cap (C - A).$$

For hver af sætningerne skal du angive hvad nummer den skal være i rækkefølgen i beviset. Den sætning som skal stå først skal markeres med 1, den næste skal markeres med 2, osv.

Eksempel. Hvis du skulle gøre det samme for teksten til Mester Jakob, ville det korrekte svar se således ud:

Vælg en svarmulighed på hver linje	1	2	3	4
Hører du ej klokken? Hører du ej klokken?	○	○	✓	○
Sover du? Sover du?	○	✓	○	○
Bim bam bum. Bim bam bum.	○	○	○	✓
Mester Jakob, Mester Jakob	✓	○	○	○

Vælg de rigtige svarmuligheder

	1	2	3	4	5	6
Det betyder at $x \in B$ og $x \notin A$.	○	○	○	○	○	○
Da gælder $x \in B \cap (C - A)$.	○	○	○	○	○	○
Da $x \in (B - A) \cap C$ var valgt vilkårligt viser dette, at mængden på venstresiden af inklusionstegnet er en delmængde af mængden på højresiden.	○	○	○	○	○	○
Lad $x \in (B - A) \cap C$ være valgt vilkårligt.	○	○	○	○	○	○
Så fås $x \in C - A$.	○	○	○	○	○	○
Dermed gælder $x \in B - A$ og $x \in C$.	○	○	○	○	○	○

Betragt følgende tableau:

1 $\forall x \forall y (P(x,y) \vee Q(y)) : \mathtt{T}$
2 $\exists x \forall y (P(x,y) \wedge Q(y)) : \mathtt{F}$

$\exists$F på 2 (A)

3 $\forall y (P(y,y) \wedge Q(y)) : \mathtt{F}$

$\forall$F på 3 (B)

4 $P(c_0, c_0) \wedge Q(c_0) : \mathtt{F}$

$\wedge$F på 4 (C)

Venstre gren:

5 $P(c_0, c_0) : \mathtt{F}$

$\forall$T på 1 (D)

9 $\forall y (P(c_0, y) \vee Q(y)) : \mathtt{T}$

$\forall$T på 9 (E)

10 $P(c_0, c_0) \vee Q(c_0) : \mathtt{T}$

$\vee$T på 10 (F)

11 $P(c_0, c_0) : \mathtt{T}$
12 $Q(c_0) : \mathtt{T}$

$\bigcirc$ (G)

Højre gren:

6 $Q(c_0) : \mathtt{F}$

$\exists$F på 2 (H)

7 $\forall y (P(c_0, y) \wedge Q(y)) : \mathtt{F}$

$\forall$F på 7 (I)

8 $P(c_0, c_0) \wedge Q(c_0) : \mathtt{F}$

Alle regler og markeringer af grene er angivet med et bogstav i en cirkel. For hver regel og markering, skal du afgøre om den er korrekt udført.

Eksempler:

- Reglen markeret med A er en anvendelse af $\exists F$-reglen på linje 2. Hvis reglen er anvendt korrekt, dvs hvis linje 3 svarer til en korrekt anvendelse af $\exists F$-reglen på linje 2, skal du svare ja til spørgsmålet "A er korrekt" herunder, ellers nej.
- Cirklen efter linje 12 er markeret med G. Hvis det er korrekt at sætte en cirkel på den gren, skal du svare ja til spørgsmålet "G er korrekt", ellers nej.

Bemærk, at du for hver regel kun skal forholde dig til om den pågældende regel er anvendt korrekt som påstået. Eksempelvis vil en regel som ud fra $p \rightarrow q : F$ tilføjer $p : T$ og $q : F$ altid være anvendt korrekt, også selv hvis $p \rightarrow q : F$ er opstået ved en fejl, der er lavet tidligere på grenen.

Hint: Det kan være lidt besværligt at skulle scrolle op og ned i browseren for at besvare hver regel og markering én efter én. Det anbefales at man starter med kun at kigge på tableauet og på et stykke papir ved siden af markerer hvilke regler/markeringer der er korrekte, og så først bagefter udfylder svarene herunder. Man kan justere bredden af sit browser-vindue, så man kan se hele tableauet på én gang.

Vælg de rigtige svarmuligheder

	Ja	Nej
A er korrekt.	○	○
B er korrekt.	○	○
C er korrekt.	○	○
D er korrekt.	○	○
E er korrekt.	○	○

F er korrekt.

G er korrekt.

H er korrekt.

I er korrekt.

Lad $A = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq 150\}, B = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq 200\}$ og $D = \{C \mid A \subseteq C \subseteq B\}$.
Angiv sandhedsværdien af følgende udsagn

Vælg de rigtige svarmuligheder

	sand	falsk
$\lvert A \cup B \rvert = 200$	○	○
$\lvert A \times B \rvert = 350$	○	○
$\lvert D \rvert < 10^{15}$	○	○

Betragt de udsagnslogiske formler der kan skrives $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_4)$, hvor x_k er en af $P, \neg P, Q, \neg Q$, for $k = 1, 2, 3, 4$.
Så en af disse formler er $(P \vee P) \wedge (\neg Q \vee P)$ og en anden er $(\neg Q \vee P) \wedge (P \vee P)$.

Vælg de rigtige svarmuligheder	2	4^2	$4!$	$\binom{4}{2}^2$	4^4	$\binom{16}{4}$
Hvor mange af sådanne formler findes i alt						
Hvor mange af disse formler er gyldige						

Definer $f(n)$ ved

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n = 1 \\ 1 & \text{hvis } n \text{ er et primtal} \\ f(d_1) + f(d_2) & \text{hvis } n = d_1 d_2 \text{ med } d_1, d_2 > 1 \end{cases}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Lad N betegne de positive heltal. Man kan vise at $f(n)$ er veldefineret for $n \in N$.

Afgør sandhedsværdien af følgende udsagn.

Vælg de rigtige svarmuligheder

	sand	falsk
$f(8) = 3$	○	○
$\forall a \in N \, \forall b \in N (f(ab) = f(a) + f(b))$	○	○
$\forall a \in N \, \forall b \in N (f(a+b) \geq f(a) + f(b))$	○	○

Definer $f(n) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$ for $n \in \mathbb{N}$.
Man kan føre et induktionsbevis for at der gælder
$f(n) = (n+1)^2$
for alle $n \in \mathbb{N}$.

Ved at udvælge 5 af følgende 8 tekststykker og sætte dem i rigtig rækkefølge fås et induktionsbevis.

A) For at gennemføre induktionstrinnet antager vi at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder $f(n) = (n+1)^2$. Vi skal vise at $f(n+1) = (n+2)^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
B) For $n = n_0$ er $f(n)$ givet ved den tomme sum. Samtidig er $(n_0+1)^2 = 1$ så det viser basistilfældet.
C) For $n = n_0$ er $(n+1)^2 = 1^2 = 1$. Samtidig er $f(n_0) = \sum_{k=0}^{n_0}(2k+1) = 1$. Dette viser basistilfældet.
D) Vi fører beviset ved induktion. Basistilfældet er $n_0 = 0$.
E) Vi har

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) \\ &= f(n) + (2(n+1)+1) \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \qquad \text{ifølge induktions antagelsen} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2 \end{aligned}$$

hvilket var det vi skulle vise, så hermed er induktionstrinnnet gennemført.
F) For at gennemføre induktionstrinnet antager vi at for et vilkårligt $n \in \mathbb{N}$ gælder $f(n) = (n+1)^2$. Vi skal vise at $f(n+1) = (n+2)^2$.
G) Resultatet følger nu af induktionsprincippet.
H) Vi fører bevises ved induktion. Basistilfældet er $n_0 = 1$.

Vælg de rigtige svarmuligheder	A	B	C	D	E	F	G	H
Første tekststykke i beviset er	○	○	○	○	○	○	○	○
Andet stykke er	○	○	○	○	○	○	○	○
Tredje stykke er	○	○	○	○	○	○	○	○
Fjerde stykke er	○	○	○	○	○	○	○	○
Femte og sidste tekststykke er	○	○	○	○	○	○	○	○

Angiv en multiplikativ invers $\pmod 8$ når den findes.

Vælg de rigtige svarmuligheder	findes ikke	1	2	3	4	5	6	7
Angiv en multiplikativ invers til 3 $\pmod 8$	○	○	○	○	○	○	○	○
Angiv en multiplikativ invers til 4 $\pmod 8$	○	○	○	○	○	○	○	○
Angiv en multiplikativ invers til 5 $\pmod 8$	○	○	○	○	○	○	○	○

Gælder der for alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ hvor a går op i både b og i c, at

Vælg de rigtige svarmuligheder

	ja	nej
$(b \mid c) \vee (c \mid b)$ (altså b går op i c eller c går op i b)	○	○
$a \mid \mathrm{sfd}(b, c)$	○	○
$a^2 \mid \mathrm{mfm}(b, c)$	○	○

Betragt kongruensligningen
$14x \equiv c \pmod{91}$.

Vælg de rigtige svarmuligheder

	$\emptyset$	$\mathbb{Z}$	$7\mathbb{Z}$	$14\mathbb{Z}$	$9+13\mathbb{Z}$	$35+91\mathbb{Z}$	$9+91\mathbb{Z}$
Angiv løsningsmængden når $c=2$	○	○	○	○	○	○	○
Angiv løsningsmængden når $c=35$	○	○	○	○	○	○	○
Angiv mængden af værdier af $c \in \mathbb{Z}$, hvor kongruensligningen har løsninger	○	○	○	○	○	○	○

Alice beslutter sig for at holde en fest hver 1000. dag startende med i dag, der er mandag. Hvor mange dag går der, før Alices fest falder på en torsdag?

Vælg en svarmulighed

- 0
- 1000
- 2000
- 3000
- 4000
- 5000
- 6000
- aldrig

Her følger resultatet af at køre Euklids algoritme for to polynomier $N(x) = 8x^3 - 8x^2 - 4x + 4$ og $M(x)$.

k	$R_k(x)$
0	$8x^3 - 8x^2 - 4x + 4$
1	$M(x)$
2	$-2x^2 - 6x + 8$
3	$62x - 62$
4	0

Vælg de rigtige svarmuligheder

	0	1	2	3	4
Angiv graden af $R_1(x)$	○	○	○	○	○
Angiv hvor mange fælles rødder $M(x)$ og $N(x)$ har	○	○	○	○	○