DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve, den 13. december 2018

Kursus navn: Diskret Matematik

Kursus nummer: 01017

Hjælpemidler: Alle hjælpemidler er tilladt.

Varighed: 2 timer.

Vægtning:

Opgave 1: 10%
Opgave 2: 25%
Opgave 3: 15%
Opgave 4: 6%
Opgave 5: 14%
Opgave 6: 15%
Opgave 7: 15%

Alle opgaver besvares ved at udfylde de dertil indrettede tomme pladser på de følgende sider.

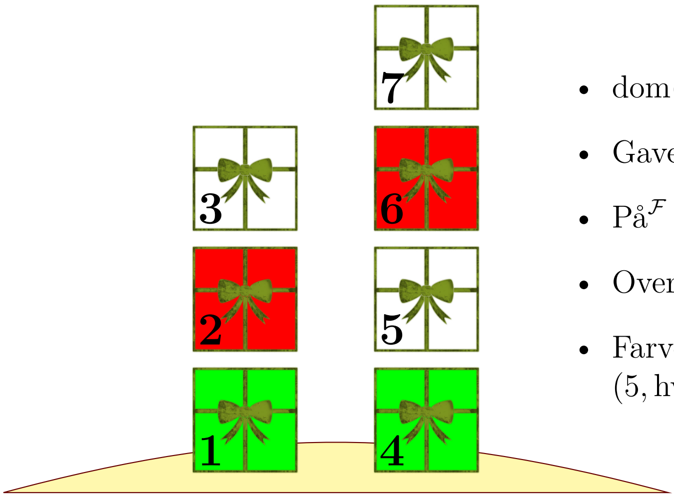
Opgave 1 (Tableau-kalkulen i udsagnslogik) 10%

Brug tableau-metoden til at afgøre om følgende påstand holder. Hvis den **ikke** holder skal du angive en konkret sandhedstilskrivning som gør præmisserne sande og konklusionen falsk.

$$(p \land q) \to r, \neg(p \to r) \models q \to r$$

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 13. december 2018	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ____________	**Fødselsdato:** ____________	
	Navn: ____________		

Opgave 2 (Prædikatlogik) 25%



- $\mathrm{dom}(\mathcal{F}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \text{hvid}, \text{grøn}, \text{rød}, \text{blå}\}$.
- $\text{Gave}^{\mathcal{F}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- $\text{På}^{\mathcal{F}} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4), (6, 5), (7, 6)\}$.
- $\text{Over}^{\mathcal{F}} = \text{På}^{\mathcal{F}} \cup \{(3, 1), (6, 4), (7, 4), (7, 5)\}$.
- $\text{Farve}^{\mathcal{F}} = \{(1, \text{grøn}), (2, \text{rød}), (3, \text{hvid}), (4, \text{grøn}), (5, \text{hvid}), (6, \text{rød}), (7, \text{hvid})\}$.

Betragt julegavestablerne ovenfor. Vi kan beskrive situationen som en fortolkning $\mathcal{F}$ i prædikatlogik som angivet ovenfor til højre. Her betyder: Gave(x) at x er en gave; På(x, y) at gaven x ligger på gaven y; Over(x, y) at x ligger over y; Farve(x, y) at gaven x har farven y.

1. Afgør hvilke af følgende formler der er sande i fortolkningen $\mathcal{F}$. Forkert svar tæller negativt.

	sand	falsk
1. $\forall x(\text{Gave}(x) \to \exists y \text{Farve}(x, y))$	☐	☐
2. $\forall x \exists y \text{Farve}(x, y)$	☐	☐
3. $\forall y(\neg\text{Gave}(y) \to \exists x \text{Farve}(x, y))$	☐	☐
4. $\forall x \forall y(\text{På}(x, y) \to \text{På}(y, x))$	☐	☐
5. $\forall x \forall y(\text{Over}(x, y) \vee \text{Over}(y, x))$	☐	☐
6. $\forall x \forall y(\text{På}(x, y) \to \text{Over}(x, y))$	☐	☐
7. $\forall x \forall y \forall z(\text{Gave}(x) \wedge \text{Gave}(y) \wedge \text{Farve}(x, z) \to \text{Farve}(y, z))$	☐	☐
8. $\forall x(\text{Farve}(x, \text{hvid}) \to \exists y(\text{På}(x, y) \wedge \text{Farve}(y, \text{rød}))$	☐	☐
9. $\forall x(\text{Farve}(x, \text{rød}) \to \exists y(\text{På}(y, x) \wedge \text{Farve}(y, \text{hvid}))$	☐	☐
10. $\forall x \forall y(\text{Over}(x, y) \wedge \text{Over}(y, x) \to \text{Farve}(x, \text{blå}))$	☐	☐
11. $\forall x(\text{Gave}(x) \wedge \neg\exists y \text{På}(x, y) \to \text{Farve}(x, \text{grøn}))$	☐	☐
12. $\forall x(\text{Farve}(x, \text{hvid}) \to \exists y(\text{Farve}(y, \text{rød}) \wedge (\text{På}(x, y) \vee \text{På}(y, x))))$	☐	☐

Opgaven fortsætter på næste side

2. Overstreg herunder de elementer i fortolkning der skal fjernes, hvis man fjerner julegave 7:

   - $\mathrm{dom}(\mathcal{F}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \mathrm{hvid}, \mathrm{grøn}, \mathrm{rød}, \mathrm{blå}\}$.
   - $\mathrm{Gave}^{\mathcal{F}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
   - $\mathrm{På}^{\mathcal{F}} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4), (6, 5), (7, 6)\}$.
   - $\mathrm{Over}^{\mathcal{F}} = \mathrm{På}^{\mathcal{F}} \cup \{(3, 1), (6, 4), (7, 4), (7, 5)\}$.
   - $\mathrm{Farve}^{\mathcal{F}} = \{(1, \mathrm{grøn}), (2, \mathrm{rød}), (3, \mathrm{hvid}), (4, \mathrm{grøn}), (5, \mathrm{hvid}), (6, \mathrm{rød}), (7, \mathrm{hvid})\}$.

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 13. december 2018	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ______________________	**Fødselsdato:** _____________	
	Navn: ____		

Opgave 3 (Prædikatlogik) 15%

Betragt formlen A givet ved

$$A = \forall y(P(x, y) \rightarrow P(y, x))$$

1. Angiv virkefeltet for kvantoren $\forall y$ i A ved at sætte en ring om virkefeltet i formlen ovenfor.
2. Kryds det rigtige svar af i to nedenstående spørgsmål. Forkert svar tæller negativt.

	åben	lukket	hverken åben eller lukket
Formlen A er	☐	☐	☐
Formlen $\forall x A$ er	☐	☐	☐

3. Angiv herunder resultatet af substitutionen $A[z/y]$.

$$A[z/y] =$$

4. Angiv herunder resultatet af substitutionen $A[y/x]$.

$$A[y/x] =$$

Opgaven fortsætter på næste side

5. Betragt de to formler $\forall x A$ og $\forall x A[y/x]$. Angiv herunder en fortolkning hvori den ene af de to formler er falsk, mens den anden er sand—og argumentér for dit svar.

6. Kryds det rigtige svar af i nedenstående spørgsmål. Forkert svar tæller negativt.

	sand	falsk
$\forall x A[y/x]$ og $\forall x A$ er logisk ækvivalente	☐	☐
x er erstattelige med y i A	☐	☐
y er erstattelig med z i A	☐	☐

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 13. december 2018	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ____________	**Fødselsdato:** ____________	
	Navn: ____________		

Opgave 4 (Kombinatorik) 6%

Afgør om hvert af følgende udsagn er sandt eller falsk. Forkert svar tæller negativt.

		sandt	falsk
1.	Der er 12 forskellige måder at udvælge 4 forskellige elementer fra en mængde med 6 elementer.	☐	☐
2.	For alle $n \geq 1$ gælder at $n! \leq 2^n$.	☐	☐
3.	Der er 120 forskellige måder at arrangere 5 forskellige elementer på en række.	☐	☐
4.	For alle $n \geq 1$ gælder at $\binom{n}{3} \leq \binom{n}{4}$.	☐	☐
5.	For alle $n \geq 1$ og alle k med $0 \leq k \leq n$ gælder at $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.	☐	☐
6.	En mængde med n elementer har $\binom{n}{k}$ forskellige delmængder med k elementer.	☐	☐

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 13. december 2018	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ____________	**Fødselsdato:** ____________	
	Navn: ____________		

Opgave 5 (Heltals-aritmetik) 14%

1. Find mindst én heltallig løsning til følgende Diophantiske ligning, hvis der findes sådan en løsning. Argumentér for dit svar.

$$8x + 12y = 44$$

2. Find mindst én heltallig løsning til følgende Diophantiske ligning, hvis der findes sådan en løsning. Argumentér for dit svar.

$$33x + 18y = 52$$

Opgave 6 (Kongruenser) 15%

1. Tegn i tabellen alle linjer mellem et a og et b, hvor der gælder at $a \equiv b \pmod{11}$.

a	b
-7	15
1	4
84	7

2. Brug Euklids udvidede algoritme til at beregne $\text{sfd}(12, 21)$ ved at udfylde nedenstående tabel med mellem-regningerne.

k	q	r_k	s_k	t_k
0				
1				
2				
3				
4				
5				

$\text{sfd}(12, 21) =$ ________________.

3. Markér en multiplikativ invers til 4 modulo 7:

☐: 0 ☐: 1 ☐: 2 ☐: 3 ☐: 4 ☐: 5 ☐: 6

4. Bestem løsningsmængden til

$$12x \equiv 15 \pmod{21}.$$

ved at udfylde nedenstående ligning:

Løsningsmængde: $x \in$ _____ + _____$\mathbb{Z}$.

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 13. december 2018	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ________________	**Fødselsdato:** __________	
	Navn: ________________________________		

Opgave 7 (Polynomier og Induktion) 15%

Lad $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ være følgende rekursivt definerede række af polynomier:

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{for } n = 0 \\ 2 \cdot (f_{n-1}(x))^2 - 1 & \text{for } n > 0 \end{cases}$$

1. Angiv udtrykket for $f_n(x)$ for $n \in \{0, 1, 2\}$:

$f_0(x) =$ ______________________________

$f_1(x) =$ ______________________________

$f_2(x) =$ ______________________________

Opgaven fortsætter på næste side

2. Bevis at $\deg f_n(x) = 2^n$ for $n \in \mathbb{N}$.

Opgaven fortsætter på næste side

3. Lad $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ for $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
   Bevis at $(x-1) \mid g_n(x)$ for $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.