DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve, den 14. december 2017

Kursus navn: Diskret Matematik

Kursus nummer: 01017

Hjælpemidler: Alle hjælpemidler er tilladt.

Varighed: 2 timer.

Vægtning:

Opgave 1: 10%
Opgave 2: 20%
Opgave 3: 10%
Opgave 4: 10%
Opgave 5: 10%
Opgave 6: 15%
Opgave 7: 15%
Opgave 8: 10%

Alle opgaver besvares ved at udfylde de dertil indrettede tomme pladser på de følgende sider.

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 14. december 2017	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ____________________	**Fødselsdato:** ____________	
	Navn: ____		

Opgave 1 (Logik og bevissystemer) 10%

Brug herunder tableau-metoden til at afgøre om følgende påstand holder. Hvis den **ikke** holder, skal du angive en konkret sandhedstilskrivning, som gør præmisserne sande og konklusionen falsk.

$$p \to q,\ r \vee (s \wedge \neg q),\ \neg r \models \neg p$$

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 14. december 2017	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ____________________	**Fødselsdato:** ____________	
	Navn: ____		

Opgave 2 (Formalisering i prædikatlogik) 20%

Betragt en fortolkning $\mathcal{F}$, hvor domænet er alle mennesker, film og filmserier. Vi har to konstantsymboler m og s og to prædikatsymboler M og K, hvor

- $m^{\mathcal{F}}$ = Mark Hamill
- $s^{\mathcal{F}}$ = Star Wars
- $M^{\mathcal{F}}$ = _ er et menneske
- $K^{\mathcal{F}}$ = _ kender _

Vi har således i fortolkningen $\mathcal{F}$ at $M(m)$ udtrykker at Mark Hamill er et menneske, og $K(m, s)$ udtrykker at Mark Hamill kender Star Wars.

Oversæt følgende sætninger til formler i prædikatlogik under fortolkningen $\mathcal{F}$. Bemærk at når der herunder benyttes "alle" eller "nogen", så refererer dette altid til mennesker (og kun mennesker).

1. *Alle som kender Mark Hamill kender Star Wars.*

2. *Nogen kender Star Wars uden at kende Mark Hamill.*

3. *Hvis to mennesker kender hinanden, så kender den ene Star Wars hvis og kun hvis den anden gør.*

4. *Alle kender nogen som kender Star Wars.*

Opgaven fortsætter på næste side

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 14. december 2017	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ____________________	**Fødselsdato:** ____________	
	Navn: ____		

Besvar nedenstående spørgsmål ved at krydse af i den rigtige boks. Forkerte delsvar tæller negativt.

	ja	nej
1. Mindst én af formlerne du skrev på foregående side er opfyldelig?	☐	☐
2. Mindst én af formlerne du skrev på foregående side er gyldig?	☐	☐
3. Vi kan afgøre om formlerne på foregående side er gyldige ved at bruge tableau-metoden?	☐	☐
4. Vi kan afgøre om formlerne på foregående side er opfyldelige ved at bruge tableau-metoden?	☐	☐
5. Vi kan afgøre om formlerne på foregående side er sande under fortolkningen $\mathcal{F}$ ved at bruge tableau-metoden?	☐	☐

Opgave 3 (Prædikatlogik) 10%

Betragt fortolkningen $\mathcal{R}$ givet ved $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}$ (de reelle tal) og

- $\cdot^{\mathcal{R}}$ = sædvanlig multiplikation.
- $=, <, >, \leq, \geq$ og $\neq$ har de sædvanlige betydninger.
- $\mathbf{0}^{\mathcal{N}} = 0$; $\mathbf{1}^{\mathcal{N}} = 1$.

Afgør hvilke af følgende formler der er sande i fortolkningen $\mathcal{R}$. Forkerte delsvar tæller negativt.

	sand	falsk
1. $\forall x \exists y (x \cdot y = \mathbf{1})$	☐	☐
2. $\forall x \exists y (x \cdot y = \mathbf{1} \rightarrow y > \mathbf{0})$	☐	☐
3. $\forall x \exists y (x \cdot y = \mathbf{1} \wedge y > \mathbf{0})$	☐	☐
4. $\forall x \exists y (x \cdot y = \mathbf{1} \vee y > \mathbf{0})$	☐	☐
5. $\forall x \exists y (x \cdot y = \mathbf{1} \leftrightarrow y > \mathbf{0})$	☐	☐
6. $\forall x \, (x > \mathbf{0} \rightarrow \exists y \, (y > \mathbf{0} \wedge x \cdot y = \mathbf{1}))$	☐	☐

Opgave 4 (Mængder og relationer) 10%

Vis at der for alle mængder A, B og C gælder $A \times B \subseteq A \times (B \cup C)$.

Opgave 5 (Kombinatorik) 10%

En almindelig terning har seks sider, der er nummerede fra 1 til 6. Vi betragter slag med to almindelige terninger T_1 og T_2.

1. Forklar hvorfor der er 36 forskellige slag.

2. Bestem antal udfald af slag med to terninger, hvor mindst en af terningerne er en sekser eller begge terningerne viser det samme. Husk at argumentere for dit svar.

Opgave 6 (Rekursion og induktion) 15%

En funktion $f(n)$ er for $n = 0, 1, 2, \ldots$ rekursivt defineret ved

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0, 1 \\ 1 + f(n/2) & \text{for } n > 0 \text{ og } n \text{ lige} \\ f(n+1) & \text{for } n > 1 \text{ og } n \text{ ulige .} \end{cases}$$

1. Angiv $f(5)$.

2. Før et induktionsbevis for at

$$f(2^n) = n + 1, \text{ for } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Opgave 7 (Kongruenser) 15%

1. Tegn en streg mellem de par a, b hvor $a \equiv b \pmod{13}$ i følgende skema.

a	b
-7	0
1	2
132	6
13^9	27

2. Angiv løsningsmængden til

$$9x \equiv 102 \pmod{30}.$$

   Husk mellemregninger.

Opgaven fortsætter på næste side

3. Angiv en værdi af b så kongruensligningen

$$9x \equiv b \pmod{30}$$

ikke har nogen løsninger. Husk at forklare hvorfor der ikke er nogen løsninger for denne værdi af b.

Opgave 8 (Euklids algoritme og polynomier) 10%

Lad der være givet to polynomier

$$N(x) = 2x^5 - 3x^4 + 3x^2 - 2x$$
$$M(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x$$

En kørsel af Euklids algoritme giver følgende

k	R_k
0	$2x^5 - 3x^4 + 3x^2 - 2x$
1	$x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x$
2	$x^4 - 2x^3 + x^2$
3	$R_3(x)$
4	0

Her er forskriften for polynomiet $R_3(x)$ dog ikke skrevet.

1. Beregn $R_3(x)$.

Opgaven fortsætter på næste side

2. Angiv $\text{sfd}(N(x), M(x))$.

3. Om to andre polynomier $P(x)$ og $Q(x)$ vides det at

$$\text{sfd}(P(x), Q(x)) = x^2.$$

Angiv om $P(x)$ og $Q(x)$ har fælles rod/rødder.