# LØSNINGER

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve, den 9. december 2016 Side 1

**Kursus navn:** Diskret Matematik Kursus nr.: 01017

**Tilladte hjælpemidler:** Alle hjælpemidler er tilladt.

**Vægtning af opgaverne:**

Opgave 1: 10%
Opgave 2: 20%
Opgave 3: 20%
Opgave 4: 5%
Opgave 5: 15%
Opgave 6: 10%
Opgave 7: 12%
Opgave 8: 8%

**Alle opgaver besvares ved at udfylde de dertil indrettede tomme pladser på de følgende sider. Som opgavebesvarelse afleveres blot disse sider i udfyldt stand. Hvis der opstår pladsmangel kan man eventuelt benytte ekstra papir som vedlægges opgavebesvarelsen. Husk bordnummer, navn, studienummer, fødselsdato og arknummer på samtlige afleverede ark.**

| Bord nr. | **Kursus nr.:** 01017 | **Dato:** 9. december 2016 | **Ark nr.** |
|---|---|---|---|
| | **Kursusnavn:** Diskret Matematik | | |
| | **Studienr.:** ____________________ | **Fødselsdato:** ____________ | |
| | **Navn:** ________________________________________________ | | |

# Opgave 1 (Formalisering og gyldighed i udsagnslogik) 10%

Lad $s$ betegne udsagnet "Peter er sur" og $r$ betegne udsagnet "Peter har en rød sweater på".

1. Formalisér følgende udsagn i udsagnslogik, benyttede de to propositionssymboler $s$ og $r$:

   *Hvis Peter er sur og har en rød sweater på, så er han sur hvis og kun hvis han har en rød sweater på.*

   **LØSNING.**

$$s \wedge r \to (s \leftrightarrow r)$$

2. Brug en sandhedstabel til at afgøre om formlen fra foregående spørgsmål er gyldig.

   **LØSNING.**

| $s$ | $r$ | $s \wedge r$ | $s \leftrightarrow r$ | $s \wedge r \to (s \leftrightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T |
| F | T | F | F | T |
| F | F | F | T | T |

Formlen er sand i alle rækker, altså gyldig.

# Opgave 2 (Tableauer og modeller i prædikatlogik) 20%

1. Betragt følgende formel:

$$\forall x \neg \exists y P(x,y) \to \neg \exists y \forall x P(x,y).$$

   Brug tableaumetoden til at afgøre om den er gyldig eller ej. Argumentér for dit svar.

   **LØSNING.**

1 $\forall x \neg \exists y P(x,y) \rightarrow \neg \exists y \forall x P(x,y)$ : F

$\rightarrow$F på 1

2 $\forall x \neg \exists y P(x,y)$ : T

3 $\neg \exists y \forall x P(x,y)$ : F

$\neg$F på 3

4 $\exists y \forall x P(x,y)$ : T

$\exists$T på 4

5 $\forall x P(x, c_0)$ : T

$\forall$T på 5

6 $P(c_0, c_0)$ : T

$\forall$T på 2

7 $\neg \exists y P(c_0, y)$ : T

$\neg$T på 7

8 $\exists y P(c_0, y)$ : F

$\exists$F på 8

9 $P(c_0, c_0)$ : F

$\times$

2. Betragt følgende formel:

$$\neg \exists y \forall x P(x,y) \rightarrow \forall x \neg \exists y P(x,y).$$

Vis at formlen **ikke** er gyldig ved at bestemme en passende modmodel $\mathcal{F}$. Argumentér for at $\mathcal{F}$ faktisk **er** en modmodel af formlen.

**LØSNING.**

$$dom(\mathcal{F}) = \mathbb{R}$$
$$P^{\mathcal{F}} = \_ \text{ er større end } \_$$

Da gælder at antecedenten er sand: Der findes ikke et $y$ så alle $x$ er større (der findes ikke et mindste reelle tal). Samtidig er konsekventen falsk: Det er falsk at der for alle $x$ ikke findes et $y$ som er mindre (for $x = 1$ findes f.eks. $y = 0$).

# Opgave 3 (Prædikatlogik) 20%

Sæt kryds ved de af nedenstående påstande som er sande. Det er ikke nødvendigt at argumentere for dine svar i denne opgave.

| **Bord nr.** | **Kursus nr.:** 01017 **Dato:** 9. december 2016 | **Ark nr.** |
|---|---|---|
| | **Kursusnavn:** Diskret Matematik | |
| | **Studienr.:** ____________________ **Fødselsdato:** ____________ | |
| | **Navn:** ________________________________________________ | |

**LØSNING.**

1 $\boxtimes$ $\models \forall x \forall y P(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)$.

2 $\boxtimes$ $\models \exists x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$.

3 $\square$ $\models \forall x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \forall x P(x, y)$.

4 $\square$ $\models \forall x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \forall y \exists x P(x, y)$.

5 $\square$ $\models \forall x \neg \exists y P(x, y) \leftrightarrow \neg \exists y \forall x P(x, y)$. *Hint*: Se på din besvarelse til Opgave 2.

6 $\boxtimes$ $\models \forall x \neg \exists y P(x, y) \leftrightarrow \forall y \neg \exists x P(x, y)$.

7 $\boxtimes$ Formlen $\forall x \forall y P(x, y)$ er logisk ækvivalent med formlen $\forall y \forall x P(x, y)$.

8 $\square$ Formlen $\forall x \exists y P(x, y)$ er logisk ækvivalent med formlen $\exists y \forall x P(x, y)$.

9 $\square$ Lad $\mathcal{F}$ være fortolkningen med $dom(\mathcal{F}) = \mathbb{R}$ og $P^{\mathcal{F}} =$ _ er større end eller lig _. Domænet er altså de reelle tal, og $P(x, y)$ står for $x \geqslant y$. Da gælder $\mathcal{F} \models \forall x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \forall x P(x, y)$.

10 $\boxtimes$ Lad $\mathcal{F}$ være fortolkningen med $dom(\mathcal{F}) = \mathbb{N}$ og $P^{\mathcal{F}} =$ _ er større end eller lig _. Domænet er altså de naturlige tal, og $P(x, y)$ står for $x \geqslant y$. Da gælder $\mathcal{F} \models \forall x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \forall x P(x, y)$.

# Opgave 4 (Rekursion) 5%

Funktionen $f(n)$ er for $n \in \mathbb{N}$ rekursivt defineret ved

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0, \\ \sum_{k=0}^{n-1} f(k) & \text{for } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Bestem $f(4)$.

**LØSNING.** Der gælder $f(0) = 1$, og for de øvrige $n$ er $f(n)$ to gange summen af de foregående funktionsværdier. Vi kan derfor lave en tabel:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 1 | 2 | 6 | 18 | 54 |

Det fremgår af tabellen, at $f(4) = 54$.

# Opgave 5 (Induktion) 15%

Funktionen $f(n)$ er for $n \in \mathbb{N}$, rekursivt defineret ved

$$f(n) = \begin{cases} 6 & \text{for } n = 0, \\ 4f(n-1) - 3 & \text{for } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Bevis ved induktion at der gælder

$$f(n) = 1 + 5 \cdot 4^n$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

**LØSNING.** Vi viser at ligningen gælder for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induktion.
*Basistilfældet* er for $n = 0$. Ifølge den rekursive definition er $f(0) = 6$. Samtidig er $1 + 5 \cdot 4^0 = 1 + 5 = 6$. Så ligningen er opfyldt for $n = 0$.
*Induktionstrin.* Vi antager, at der for et vist $n \in \mathbb{N}$ gælder at

$$f(n) = 1 + 5 \cdot 4^n,$$

dette er vores induktionsantagelse. Vi skal vise at

$$f(n+1) = 1 + 5 \cdot 4^{n+1}.$$

Ifølge den rekursive definition er

$$f(n+1) = 4f(n) - 3.$$

Induktionsantagelsen fortæller os nu at

$$f(n+1) = 4(1 + 5 \cdot 4^n) - 3 = 4 - 3 + 5 \cdot 4 \cdot 4^n = 1 + 5 \cdot 4^{n+1}.$$

Det var det vi skulle vise, så hermed er induktionstrinnet gennemført.
Ifølge induktionsprincippet gælder ligningen altså for alle $n \in \mathbb{N}$. QED.

# Opgave 6 (Euklids Algoritme) 10%

Håndkør Euklids algoritme og find sfd(343, 105), samt tal $s, t$ således at

$$s \cdot 343 + t \cdot 105 = \text{sfd}(343, 105).$$

Husk at tydeligt at angive facit (sfd(343, 105), $s$ og $t$).

**LØSNING.** Euklids algoritme giver anledning til følgende skema.

| $k$ | $r_k$ | $s_k$ | $t_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 343 | 1 | 0 |
| 1 | 105 | 0 | 1 |
| 2 | 28 | 1 | $-3$ |
| 3 | 21 | $-3$ | 10 |
| 4 | 7 | 4 | $-13$ |
| 5 | 0 | $*$ | $*$ |

Af skemaet kan vi aflæse at $\mathrm{sfd}(343, 105) = 7$, og at

$$4 \cdot 343 - 13 \cdot 105 = 7.$$

Vi kan altså tage $s = 4$ og $t = -13$.

# Opgave 7 (Kongruensligninger) 12%

Betragt følgende system af kongruensligninger

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{14} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Find løsningsmængden. Husk at angive passende mellemregninger.

**LØSNING.** Vi bruger Euklids udvidede algoritme

| $k$ | $r_k$ | $s_k$ | $t_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 14 | 1 | 0 |
| 1 | 3 | 0 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | $-4$ |
| 3 | 1 | $-1$ | 5 |
| 4 | 0 | $*$ | $*$ |

Vi kan aflæse at

$$\mathrm{sfd}(14, 3) = 1 = -1 \cdot 14 + 5 \cdot 3.$$

Vi kan derfor bruge den Kinesiske Restklassesætning, og får at løsningsmængden er

$$L = (-1 \cdot 14 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 4) + (14 \cdot 3)\mathbb{Z} = 32 + 42\mathbb{Z}.$$

# Opgave 8 (Polynomier) 8%

Følgende viser forløbet af Euklids algoritme, brugt på polynomierne

$$N(x) = 8x^3 + 20x + 8$$
$$M(x) = 4x^3 + 8x + 4$$

| $r_k(x)$ | forklaring |
|---|---|
| $8x^3 + 20x + 8$ | $N(x)$ |
| $4x^3 + 8x + 4$ | $M(x)$ |
| $4x$ | da $8x^3 + 20x + 8 = 2(4x^3 + 8x + 4) + 4x$ |
| $4$ | da $4x^3 + 8x + 4 = (x^2 + 2)(4x) + 4$ |
| $0$ | da $4x = x \cdot 4$ |

| **Bord nr.** | **Kursus nr.:** 01017 | **Dato:** 9. december 2016 | **Ark nr.** |
|---|---|---|---|
| | **Kursusnavn:** Diskret Matematik | | |
| | **Studienr.:** ____________________ | **Fødselsdato:** ____________ | |
| | **Navn:** ________________________________________ | | |

1. Angiv sfd(N(x), M(x)).

2. Redegør for om $N(x)$ og $M(x)$ har fælles rødder.

**LØSNING.**

1. Vi kan aflæse af næstnederste linje, at sfd$(N(x), M(x)) = 4$.
2. Da polynomiet $D(x) = 4$ ikke har nogen rødder, følger det af Sætning 6.3, at $N(x)$ og $M(x)$ ikke har fælles rødder.