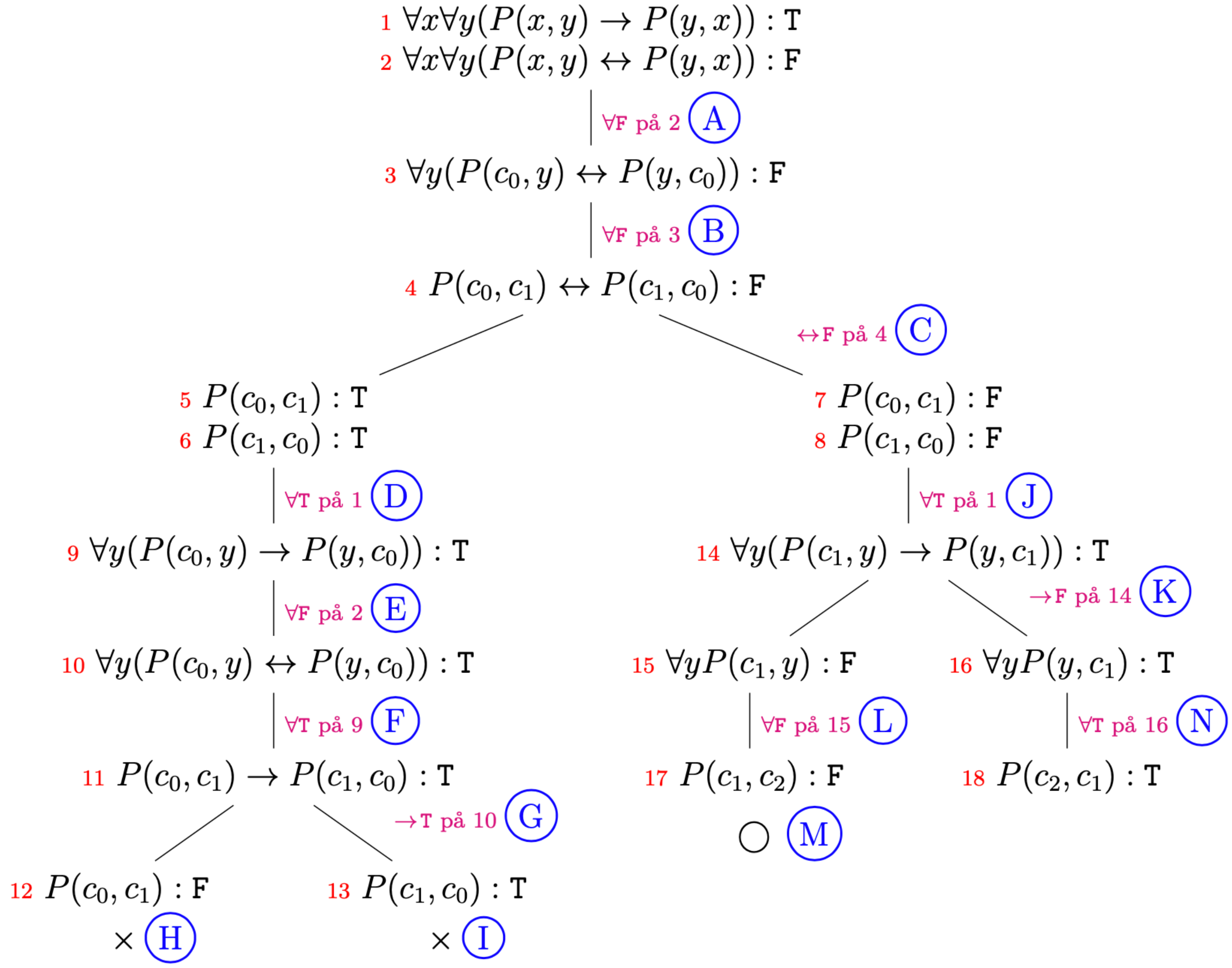
01017 E20 Eksamen

(20%) Betragt følgende tableau:



Alle regler og markeringer af grene er angivet med et bogstav i en cirkel. For hver regel og markering, skal du afgøre om den er korrekt udført.

Eksempler.

- Reglen markeret med A er en anvendelse af $\forall F$-reglen på linje 2. Hvis reglen er anvendt korrekt, dvs hvis linje 3 svarer til en korrekt anvendelse af $\forall F$-reglen på linje 2, skal du svare ja til spørgsmålet "A er korrekt" herunder, ellers nej.
- Krydset efter linje 12 er markeret med H. Hvis det er korrekt at sætte et kryds på den gren, skal du svare ja til spørgsmålet "H er korrekt", ellers nej.

Bemærk at du for hver regel kun skal forholde dig til om den pågældende regel er anvendt korrekt som påstået. Eksempelvis vil en regel som ud fra $p \wedge q : T$ tilføjer $p : T$ og $q : T$ altid være anvendt korrekt, også selv hvis $p \wedge q : T$ er opstået ved en fejl der er lavet tidligere på grenen.

Hint: Det kan være lidt besværligt at skulle scrolle op og ned i browseren for at besvare hver regel og markering én efter én. Det anbefales at man starter med kun at kigge på tableauet og på et stykke papir ved siden af markerer hvilke regler/markeringer der er korrekte, og så først bagefter udfylder svarene herunder. Man kan justere bredden af sit browser-vindue, så man kan se hele tableauet på én gang.

Select the correct answers

	Ja	Nej
A er korrekt	○	○
B er korrekt	○	○
C er korrekt	○	○
D er korrekt	○	○
E er korrekt	○	○

F er korrekt

G er korrekt

H er korrekt

I er korrekt

J er korrekt

K er korrekt

L er korrekt

M er korrekt

N er korrekt

(10%) Betragt fortolkningen F givet ved

- $dom(F) =$ alle mennesker
- $P^F = \{x \mid x \text{ følger kursus 01017}\}$
- $Q^F = \{x \mid x \text{ studerer på DTU}\}$

Vi ønsker at finde korrekte formaliseringer af følgende sætning:

"Alle som følger kursus 01017 studerer på DTU".

Hvilke af følgende formler er korrekte formaliseringer af sætningen?

Hint: Hvis en formel A er en korrekt formalisering, og A og B er logisk ækvivalente, så tæller vi også B som en korrekt formalisering, for så udtrykker de to formler logisk set det samme. Eksempelvis tæller $p \to q$ og $\neg q \to \neg p$ derfor begge som korrekte formaliseringer af sætningen "Hvis Peter er glad, er Line glad", hvor p står for at Peter er glad og q for at Line er glad.

Select the correct answers

	korrekt formalisering	ikke korrekt formalisering
$\forall x(P(x) \to Q(x))$	○	○
$\forall x(Q(x) \to P(x))$	○	○
$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$	○	○
$\forall x(P(x) \land Q(x))$	○	○
$\exists x(P(x) \to Q(x))$	○	○
$\neg\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$	○	○

(10%) Hvis nedenstående sætninger sættes i rigtig rækkefølge, vil de udgøre et sprogligt bevis for følgende påstand:

$$A \cap (B - C) \subseteq (A \cap B) - (A \cap C).$$

For hver af sætningerne skal du angive hvad nummer den skal være i rækkefølgen i beviset. Den sætning som skal stå først skal markeres med 1, den næste skal markeres med 2, osv.

Eksempel. Hvis du skulle gøre det samme for teksten til Mester Jakob, ville det korrekte svar se således ud:

Vælg en svarmulighed på hver linje	1	2	3	4
Hører du ej klokken? Hører du ej klokken?	○	○	✔	○
Sover du? Sover du?	○	✔	○	○
Bim bam bum. Bim bam bum.	○	○	○	✔
Mester Jakob, Mester Jakob	✔	○	○	○

Select the correct answers

	1	2	3	4	5	6
Lad $x \in A \cap (B - C)$ være valgt vilkårligt.	○	○	○	○	○	○
Så fås $x \in A, x \in B$ og $x \notin C$.	○	○	○	○	○	○
Så gælder $x \in A \cap B$ og $x \notin A \cap C$.	○	○	○	○	○	○
Det betyder at $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$.	○	○	○	○	○	○
Da $x \in A \cap (B - C)$ var valgt vilkårligt, viser dette at mængden på venstresiden af inklusionstegnet er en delmængde af mængden på højre.	○	○	○	○	○	○
Da gælder $x \in A$ og $x \in B - C$.	○	○	○	○	○	○

(10%) Lad F være fortolkningen givet ved

- $dom(F) =$ alle mennesker
- $P^F = \{x \mid x \text{ følger kursus 01017}\}$
- $Q^F = \{x \mid x \text{ er studerende på DTU}\}$
- $K^F = \{(x, y) \mid x \text{ kender } y\}$

Betragt følgende formel:

$$\forall x(\forall y(Q(y) \rightarrow K(x, y)) \rightarrow \forall y(P(y) \rightarrow K(x, y)))$$

Hvilken af følgende sætninger kan formlen oversættes til under fortolkningen F?

Choose one answer

- "Enhver som kender alle studerende på DTU, kender alle som følger kursus 01017"
- "Enhver som kender alle der følger kursus 01017, kender alle studerende på DTU"
- "Enhver som kun kender studerende på DTU, kender kun personer der følger 01017"
- "Enhver som kun kender personer der følger 01017, kender kun studerende på DTU"
- "Enhver som kender nogen der studerer på DTU, kender nogen som følger kursus 01017"
- "Enhver som kender nogen der følger kursus 01017, kender nogen der studerer på DTU"
- Formlen kan ikke oversættes til nogen af de angivne sætninger

(4%) Vi betragter et kvadratisk skema med 4 gange 4 felter. På hvor mange måder kan vi udfylde skemaet med tal fra mængden$\{1, 2, 3, 4\}$, når vi kræver at det samme tal ikke må stå to (eller flere) gange i samme række?

Choose one answer

- 4^4
- 4^{16}
- $(4!)^4$
- $\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}$

(5%) Lad $R_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $R_2 = \{1, 2, 5, 6\}$ og $M = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$. Afgør hvor mange delmængder $K \subseteq M$ der findes så

- $|K| = 6$,
- $(R_1 \subseteq K) \vee (R_2 \subseteq K)$.

Et anden måde at stille samme spørgsmål er: Antag vi i et banko spil har pladerne R_1 og R_2. På hvor mange måder kan vi trække 6 forskellige tal fra M, når vi ikke skelner mellem rækkefølge, så vi får banko på mindst en af pladerne?

Choose one answer

- $\binom{100}{4} + \binom{100}{4} - \binom{100}{2}$
- $2 \cdot 96 \cdot 95$
- $\binom{96}{2} + \binom{96}{2} - 1$
- $\binom{96}{2}^2$
- $\binom{100}{4} + \binom{100}{4}$
- $\binom{100}{6}$
- $2\binom{98}{2}$

(12%) Lad $M = \mathbb{N} - \{0\}$, og definer $f(n)$ for $n \in M$ ved

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n \text{ ulige,} \\ 2\, f(\frac{n}{2}) & \text{for } n \text{ lige.} \end{cases}$$

Afgør om følgende udsagn er sande -

Select the correct answers

	Sand	Falsk
$f(4) = 4$	○	○
$\forall n \in M (f(n) = n)$	○	○
$\forall a \in M\ \forall b \in M\ \ (f(ab) = f(a)f(b))$	○	○
$\forall n \in M\ (f(n) \leq n)$	○	○
$\forall a \in M\ \forall b \in M\ \ (f(a+b) = f(a) + f(b))$	○	○
$\exists k \in M\ (f(k) = 17)$	○	○

(4%) Her er en kørsel af Euklids algoritme, hvor dog nogle af tallene er erstattet af symboler (*a, b, c*):

q	r	s	t
$-$	720	1	0
$-$	300	0	a
2	b	1	-2
2	60	-2	c
2	0	5	-12

Angiv værdierne af *a, b* og *c* samt $\mathrm{sfd}(720, 300)$

Select the correct answers	-5	-4	0	1	2	4	5	60	120
a	○	○	○	○	○	○	○	○	○
b	○	○	○	○	○	○	○	○	○
c	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$\mathrm{sfd}(720, 300)$	○	○	○	○	○	○	○	○	○

(12%) Betragt systemet af kongruensligninger:

$$\begin{cases} 2x \equiv a \pmod{6} \\ x \equiv 7 \pmod{14} \end{cases}$$

Angiv løsningsmængden for hver af de følgende værdier af *a*.

Select the correct answers

	$\emptyset$	$7+42\mathbb{Z}$	$21+42\mathbb{Z}$	$7+84\mathbb{Z}$	$63+84\mathbb{Z}$
$a=0$	○	○	○	○	○
$a=1$	○	○	○	○	○
$a=2$	○	○	○	○	○

(8%) Angiv en multiplikativ invers $\pmod{17}$ til tallene 3, 6, 7 og 8.

Select the correct answers

	-7	-6	-2	2	3	4	5	6
3	○	○	○	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○	○	○	○

(5%) Lad
$N(x) = 32x^3 - 60x^2 + 44x - 11$, og
$M(x) = 8x^3 - 16x^2 + 12x - 3$.

Kører vi Euklids algoritme får vi

k	$r_k(x)$
0	$32x^3 - 60x^2 + 44x - 11$
1	$8x^3 - 16x^2 + 12x - 3$
2	$4x^2 - 4x + 1$
3	$2x - 1$
4	0

Afgør sandhedsværdien af følgende udsagn.

Select the correct answers

	Sand	Falsk
$N(x)$ og $M(x)$ har ingen fælles rødder	○	○
$x_0 = -\frac{1}{2}$ er en fælles rod for $N(x)$ og $M(x)$	○	○
$\mathrm{sfd}(N(x), M(x)) = 0$	○	○
$\deg(\mathrm{sfd}(N(x), M(x))) = 1$	○	○
Rest ved division af $N(x)$ med $M(x)$ er $4x^2 - 4x + 1$	○	○