SOLUTIONS

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve, 12 December 2019

Kursusnavn: Diskret Matematik

Kursusnummer: 01017

Hjælpemidler: Skriftlige hjælpemidler er tilladt.

Varighed: 2 timer.

Vægtning:

Opgave 1: 40%
Opgave 2: 10%
Opgave 3: 10%
Opgave 4: 15%
Opgave 5: 13%
Opgave 6: 12%

Bedømmelserne af eksamen er delvist automatiseret. Det er derfor afgørende at du nøje overholder følgende retningslinjer:

Alle opgaver besvares ved at udfylde de tomme bokse på de følgende sider. Som opgavebesvarelse afleveres blot hele opgavesættet i udfyldt stand. Tekst og figurer udenfor de tomme bokse vil ikke blive taget i betragtning. Hvis man undtagelsesvis har brug for mere plads, kan man tilføje opgaveløsninger på ekstra ark, som tilføjes til slutningen af afleveringen.

I multiple-choice spørgsmål skal du sætte et kryds i de rigtige firkanter: ☒. Hvis du fortryder et kryds og ikke kan slette det, så overtegn i stedet hele den forkerte box: ■.

Studienummer *Study number*	
Fødselsdato *Date of birth*	
Navn *Name*	
Bordnummer *Table number*	

Opgave 1 (40%)

Afgør om følgende udsagn er sande eller falske. Forkert svar tæller negativt.

	Udsagn	Sand	Falsk
1.	Udtrykket $\forall x(P(L(x), Y(x)))$ er en formel i prædikatlogik når L og Y er unære prædikatsymboler og P er et binært prædikatsymbol.	☐	☒
2.	Udtrykket $\forall x(P(x, y, f(x, y)))$ er en formel i prædikatlogik når P er et ternært (3-ært) prædikatsymbol og f er et binært funktionssymbol.	☒	☐
4.	Lad A, B, C og D være vilkårlige mængder. Da gælder: $(A - B) \cap (C - D) \cap (D - A) = \emptyset$.	☒	☐
5.	Lad A, B, C og D være vilkårlige mængder. Da gælder: $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - D) = A - D$.	☐	☒
6.	Formlen $((p \vee r) \wedge (r \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ er gyldig.	☒	☐
7.	$\forall x P(x, y)$ er en lukket formel.	☐	☒
8.	$\forall x P(x, y)$ er en åben formel.	☐	☒
9.	x er erstattelig med y i følgende formel: $\forall y(Q(y) \rightarrow \forall x P(x, y)) \rightarrow R(f(x), g(y))$.	☒	☐
10.	Lad A være formlen $P(x, y)$. Da gælder $A[y/x] = A[x/y]$.	☐	☒

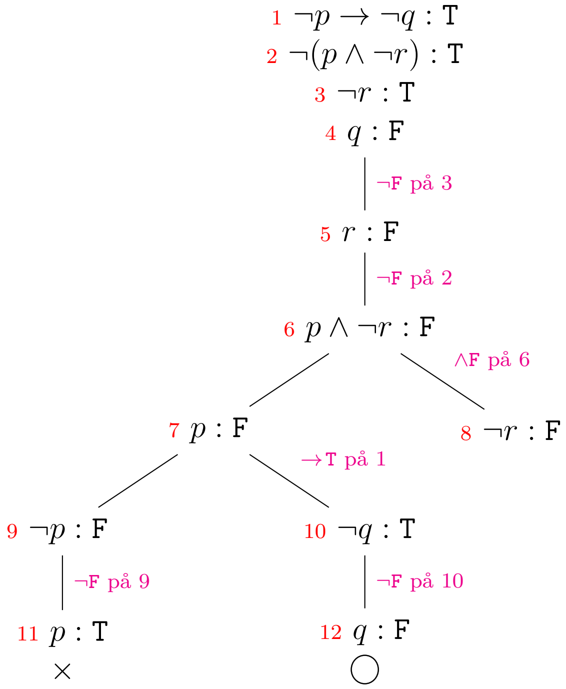
	Udsagn	Sand	Falsk
11.	Lad A og B være formler i udsagnslogik. Antag vi laver et tableau med $A \to B : \mathtt{T}$ i roden. Da gælder at B **ikke** er en logisk konsekvens af A, hvis og kun hvis vi kan få tableauet til at lukke.	☐	☒
12.	På en ø er der to typer af mennesker: sandsigere, som altid taler sandt, og løgnere, som altid lyver. En fremmed møder på øen Paul og Susan. Paul siger: "Enten er vi begge sandsigere eller også er vi begge løgnere." Det følger heraf at Susan er sandsiger.	☒	☐
13.	Betragt en fortolkning hvori $E(x, y)$ betegner egenskaben at x elsker y. Vi kan i denne fortolkning formalisere udsagnet "alle, som elsker nogen, elsker sig selv" som formlen $\forall x \exists y(E(x, y) \to E(x, x))$.	☐	☒

Opgave 2 (10%)

Brug tableau-metoden til at afgøre om følgende påstand er korrekt. Hvis den **ikke** er korrekt, skal du angive en konkret sandhedstildeling som gør præmisserne sande og konklusionen falsk.

$$\neg p \to \neg q, \neg(p \wedge \neg r), \neg r \models q$$

SOLUTION.


1 $\neg p \to \neg q$: T
2 $\neg(p \land \neg r)$: T
3 $\neg r$: T
4 q : F
$\neg$F på 3
5 r : F
$\neg$F på 2
6 $p \land \neg r$: F
$\land$F på 6
7 p : F
8 $\neg r$: F
$\to$T på 1
9 $\neg p$: F
10 $\neg q$: T
$\neg$F på 9
$\neg$F på 10
11 p : T
12 q : F

Opgave 3 (10%)

Vi betragter et sædvanligt kortspil med 52 kort fordelt ligeligt på de 4 kulører spar, hjerter, ruder og klør.

1. Hvor mange forskellige hænder med 3 kort er der, hvor der er 2 hjerter og 1 klør. Der skelnes ikke mellem rækkefølge af de tre kort på hånden. Angiv løsningen med en formel, og husk at argumentere kort for dit svar.

   SOLUTION. There are $\binom{13}{2}$ ways to select the 2 Hearts (disregarding order) and $\binom{13}{1}$ ways to choose a Club. By the rule of the product this amounts to $\binom{13}{2}\binom{13}{1} = 1014$ possibilities.

2. Lad $M = \{1, 2, \ldots, 180\}$ angive de positive heltal mellem 1 og 180. Beregn hvor mange af elementerne der er delelige med 6 eller 9 (eller begge dele). Retfærdiggør dit svar.

   SOLUTION. Let A be the set of elements of M which are divisible by 6 and let B be the set of elements of M which are divisible by 9. By the inclusion-exclusion principle, we have to find $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

   Obviously $|A| = 30$ and $|B| = 20$. What about $|A \cap B|$, i.e., those elements of M which are divisible by both 6 and 9.

   The set of integers which are divisible by both 6 and 9 can be written as $6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$, where $m = \text{mfm}(6, 9) = \frac{6 \cdot 9}{\gcd(6,9)} = \frac{6 \cdot 9}{3} = 18$. Therefore $|A \cap B| = 10$.

   All together $30 + 20 - 10 = 40$.

Opgave 4 (15%)

En funktion $f(n)$ er for $n = 1, 2, 3, \ldots$ defineret ved

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

1. Udregn værdierne af $f(1), f(2)$ og $f(3)$.

SOLUTION. By definition:

$$f(1) = \frac{1}{2}$$
$$f(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$
$$f(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

2. Vis at for $n = 1, 2, 3, \ldots$ gælder

$$f(n+1) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + f(n)$$

SOLUTION. Using the definition of f twice, we get

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + f(n) \end{aligned}$$

3. Før et induktionsbevis for at

$$f(n) = \frac{n}{n+1}, \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUTION. The base case is $n = 1$ and we have to show $f(1) = \frac{1}{2}$. This has been shown in the first part of the problem.

For the induction step we assume that the formula is true for some $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, i.e., that $f(n) = \frac{n}{n+1}$. We have to show that $f(n+1) = \frac{n+1}{n+2}$ holds. We have

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + f(n) \qquad \text{so by induction hypothesis we get} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

as required. This completes the induction proof.

Opgave 5 (13%)

1. Forbind med en streg hvert tal i venstre kolonne med sin multiplikative invers $\pmod 5$ i højre kolonne. Tegn ikke andre linjer.

a	b
1	1
2	2
3	3
4	4

SOLUTION. The lines to be drawn are $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$, and $(4,4)$.

2. Angiv løsningsmængden til

$$34x \equiv 4 \pmod{44}.$$

SOLUTION. We find $\gcd(44, 34)$ by using Euclid's extended algorithm

k	q_k	r_k	s_k	t_k	
0	-	44	1	0	start value
1	-	34	0	1	start value
2	1	10	1	-1	since $44 = 1 \cdot 34 + 10$
3	3	4	-3	4	since $34 = 3 \cdot 10 + 4$
4	2	2	7	-9	since $10 = 2 \cdot 4 + 2$
5	2	0	*	*	since $2 \mid 4$.

Thus $\gcd(44, 34) = 2 = 7 \cdot 44 - 9 \cdot 34$. As $d = 2$ divides 4, the congruence equation is equivalent to

$$17x \equiv 2 \pmod{22}.$$

We already saw $2 = 7 \cdot 44 - 9 \cdot 34$ and, dividing by 2, we get

$$1 = 7 \cdot 22 - 9 \cdot 17.$$

This shows

$$-9 \cdot 17 \equiv 1 \pmod{22}.$$

Thus we can choose $c = -9$ in Theorem 5.8 and arrive at

$$x \equiv -9 \cdot 2 \pmod{22}.$$

Therefore the solution set is $L = -18 + 22\mathbb{Z}$, which can be rewritten as

$$L = 4 + 22\mathbb{Z}.$$

Opgave 6 (12%)

Vi er givet følgende to polynomier

$$N(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$
$$M(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

En kørsel af Euklids algoritme giver følgende

k	R_k
0	$x^3 - 2x^2 - 4x + 8$
1	$3x^2 - 4x - 4$
2	$-\frac{32}{9}x + \frac{64}{9}$
3	0

Afgør om følgende udsagn er sande eller falske. Forkert svar tæller negativt.

Udsagn	Sand	Falsk
$N(x)$ og $M(x)$ har ingen fælles rødder	☐	☒
$M(x)$ går op i $N(x)$	☐	☒
$R_2(x)$ går op i $R_1(x)$	☒	☐
$R_2(x)$ er en største fælles divisor for $N(x), M(x)$	☒	☐
$D(x) = x - 2$ er en største fælles divisor for $N(x), M(x)$	☒	☐
$N(x)$ har en dobbeltrod	☒	☐