DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve, den 9. december 2016

Kursus navn: Diskret Matematik Kursus nr.: 01017

Tilladte hjælpemidler: Alle hjælpemidler er tilladt.

Vægtning af opgaverne:

Opgave 1: 10%
Opgave 2: 20%
Opgave 3: 20%
Opgave 4: 5%
Opgave 5: 15%
Opgave 6: 10%
Opgave 7: 12%
Opgave 8: 8%

Alle opgaver besvares ved at udfylde de dertil indrettede tomme pladser på de følgende sider. Som opgavebesvarelse afleveres blot disse sider i udfyldt stand. Hvis der opstår pladsmangel kan man eventuelt benytte ekstra papir som vedlægges opgavebesvarelsen. Husk bordnummer, navn, studienummer, fødselsdato og arknummer på samtlige afleverede ark.

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 9. december 2016	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ____________________	**Fødselsdato:** ____________	
	Navn: ____		

Opgave 1 (Formalisering og gyldighed i udsagnslogik) 10%

Lad s betegne udsagnet "Peter er sur" og r betegne udsagnet "Peter har en rød sweater på".

1. Formalisér følgende udsagn i udsagnslogik, benyttende de to propositionssymboler s og r:

   Hvis Peter er sur og har en rød sweater på, så er han sur hvis og kun hvis han har en rød sweater på.

2. Brug en sandhedstabel til at afgøre om formlen fra foregående spørgsmål er gyldig.

Opgave 2 (Tableauer og modeller i prædikatlogik) 20%

1. Betragt følgende formel:

$$\forall x \neg \exists y P(x, y) \to \neg \exists y \forall x P(x, y).$$

Brug tableaumetoden til at afgøre om den er gyldig eller ej. Argumentér for dit svar.

Opgaven fortsætter på næste side

2. Betragt følgende formel:

$$\neg\exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \neg\exists y P(x, y).$$

Vis at formlen **ikke** er gyldig ved at bestemme en passende modmodel $\mathcal{F}$. Argumentér for at $\mathcal{F}$ faktisk **er** en modmodel af formlen.

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 9. december 2016	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ______________________	**Fødselsdato:** _____________	
	Navn: ____		

Opgave 3 (Prædikatlogik) 20%

Sæt kryds ved de af nedenstående påstande som er sande. Det er ikke nødvendigt at argumentere for dine svar i denne opgave.

1 ☐ $\models \forall x \forall y P(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y)$.

2 ☐ $\models \exists x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y)$.

3 ☐ $\models \forall x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists y \forall x P(x,y)$.

4 ☐ $\models \forall x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \forall y \exists x P(x,y)$.

5 ☐ $\models \forall x \neg \exists y P(x,y) \leftrightarrow \neg \exists y \forall x P(x,y)$. *Hint*: Se på din besvarelse til Opgave 2.

6 ☐ $\models \forall x \neg \exists y P(x,y) \leftrightarrow \forall y \neg \exists x P(x,y)$.

7 ☐ Formlen $\forall x \forall y P(x,y)$ er logisk ækvivalent med formlen $\forall y \forall x P(x,y)$.

8 ☐ Formlen $\forall x \exists y P(x,y)$ er logisk ækvivalent med formlen $\exists y \forall x P(x,y)$.

9 ☐ Lad $\mathcal{F}$ være fortolkningen med $dom(\mathcal{F}) = \mathbb{R}$ og $P^{\mathcal{F}} = \_$ er større end eller lig $\_$. Domænet er altså de reelle tal, og $P(x,y)$ står for $x \geqslant y$. Da gælder $\mathcal{F} \models \forall x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists y \forall x P(x,y)$.

10 ☐ Lad $\mathcal{F}$ være fortolkningen med $dom(\mathcal{F}) = \mathbb{N}$ og $P^{\mathcal{F}} = \_$ er større end eller lig $\_$. Domænet er altså de naturlige tal, og $P(x,y)$ står for $x \geqslant y$. Da gælder $\mathcal{F} \models \forall x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists y \forall x P(x,y)$.

Opgave 4 (Rekursion) 5%

Funktionen $f(n)$ er for $n \in \mathbb{N}$ rekursivt defineret ved

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0, \\ 2\sum_{k=0}^{n-1} f(k) & \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Bestem $f(4)$.

Opgave 5 (Induktion) 15%

Funktionen $f(n)$ er for $n \in \mathbb{N}$, rekursivt defineret ved

$$f(n) = \begin{cases} 6 & \text{for } n = 0, \\ 4f(n-1) - 3 & \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Bevis ved induktion at der gælder

$$f(n) = 1 + 5 \cdot 4^n$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 6 (Euklids Algoritme) 10%

Håndkør Euklids algoritme og find sfd$(343, 105)$, samt tal s, t således at

$$s \cdot 343 + t \cdot 105 = \text{sfd}(343, 105).$$

Husk at angive facit tydeligt (sfd$(343, 105)$, s og t).

Opgave 7 (Kongruensligninger) 12%

Betragt følgende system af kongruensligninger

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{14} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Find løsningsmængden. Husk at angive passende mellemregninger.

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 9. december 2016	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ____________________	**Fødselsdato:** ______________	
	Navn: ____		

Opgave 8 (Polynomier) 8%

Følgende viser forløbet af Euklids algoritme, brugt på polynomierne

$$N(x) = 8x^3 + 20x + 8$$
$$M(x) = 4x^3 + 8x + 4$$

$r_k(x)$	forklaring
$8x^3 + 20x + 8$	$N(x)$
$4x^3 + 8x + 4$	$M(x)$
$4x$	da $8x^3 + 20x + 8 = 2(4x^3 + 8x + 4) + 4x$
4	da $4x^3 + 8x + 4 = (x^2 + 2)(4x) + 4$
0	da $4x = x \cdot 4$

1. Angiv sfd(N(x), M(x)).

2. Redegør for om $N(x)$ og $M(x)$ har fælles rødder.