LØSNINGER

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve, den 13. december 2018

Kursus navn: Diskret Matematik

Kursus nummer: 01017

Hjælpemidler: Alle hjælpemidler er tilladt.

Varighed: 2 timer.

Vægtning:

Opgave 1: 10%
Opgave 2: 25%
Opgave 3: 15%
Opgave 4: 6%
Opgave 5: 14%
Opgave 6: 15%
Opgave 7: 15%

Alle opgaver besvares ved at udfylde de dertil indrettede tomme pladser på de følgende sider.

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 13. december 2018	Ark nr.
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ____________	**Fødselsdato:** ____________	
	Navn: ______________________________		

Opgave 1 (Tableau-kalkulen i udsagnslogik) 10%

Brug tableau-metoden til at afgøre om følgende påstand holder. Hvis den **ikke** holder skal du angive en konkret sandhedstilskrivning som gør præmisserne sande og konklusionen falsk.

$$(p \land q) \to r, \neg(p \to r) \models q \to r$$

LØSNING.

1 $(p \land q) \to r$: T
2 $\neg(p \to r)$: T
3 $q \to r$: F

$\to$F på 3

4 q : T
5 r : F

$\neg$T på 2

6 $p \to r$: F

$\to$F på 6

7 p : T
8 r : F

$\to$T på 1

9 $p \land q$: F | 10 r : T $\times$

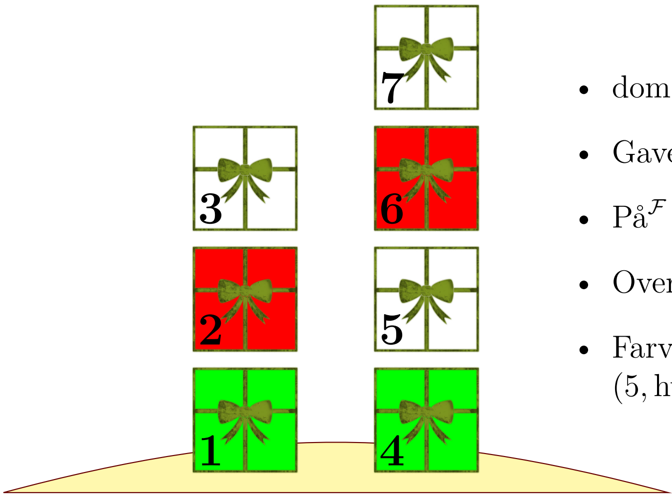
$\land$F på 9

11 p : F $\times$ | 12 q : F $\times$

Alle grene lukker, så den er gyldig.

Bord nr.	Kursus nr.: 01017	Dato: 13. december 2018	Ark nr.
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ____________	Fødselsdato: ____________	
	Navn: ____________		

Opgave 2 (Prædikatlogik) 25%



- $\mathrm{dom}(\mathcal{F}) = \{1,2,3,4,5,6,7,\mathrm{hvid},\mathrm{grøn},\mathrm{rød},\mathrm{blå}\}$.
- $\mathrm{Gave}^{\mathcal{F}} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.
- $\mathrm{På}^{\mathcal{F}} = \{(2,1),(3,2),(5,4),(6,5),(7,6)\}$.
- $\mathrm{Over}^{\mathcal{F}} = \mathrm{På}^{\mathcal{F}} \cup \{(3,1),(6,4),(7,4),(7,5)\}$.
- $\mathrm{Farve}^{\mathcal{F}} = \{(1,\mathrm{grøn}),(2,\mathrm{rød}),(3,\mathrm{hvid}),(4,\mathrm{grøn}),(5,\mathrm{hvid}),(6,\mathrm{rød}),(7,\mathrm{hvid})\}$.

Betragt julegavestablerne ovenfor. Vi kan beskrive situationen som en fortolkning $\mathcal{F}$ i prædikatlogik som angivet ovenfor til højre. Her betyder: $\mathrm{Gave}(x)$ at x er en gave; $\mathrm{På}(x,y)$ at gaven x ligger på gaven y; $\mathrm{Over}(x,y)$ at x ligger over y; $\mathrm{Farve}(x,y)$ at gaven x har farven y.

1. Afgør hvilke af følgende formler der er sande i fortolkningen $\mathcal{F}$. Forkert svar tæller negativt.

	sand	falsk
1. $\forall x(\mathrm{Gave}(x) \to \exists y \mathrm{Farve}(x,y))$	☒	☐
2. $\forall x \exists y \mathrm{Farve}(x,y)$	☐	☒
3. $\forall y(\neg \mathrm{Gave}(y) \to \exists x \mathrm{Farve}(x,y))$	☐	☒
4. $\forall x \forall y(\mathrm{På}(x,y) \to \mathrm{På}(y,x))$	☐	☒
5. $\forall x \forall y(\mathrm{Over}(x,y) \lor \mathrm{Over}(y,x))$	☐	☒
6. $\forall x \forall y(\mathrm{På}(x,y) \to \mathrm{Over}(x,y))$	☒	☐
7. $\forall x \forall y \forall z(\mathrm{Gave}(x) \land \mathrm{Gave}(y) \land \mathrm{Farve}(x,z) \to \mathrm{Farve}(y,z))$	☐	☒
8. $\forall x(\mathrm{Farve}(x,\mathrm{hvid}) \to \exists y(\mathrm{På}(x,y) \land \mathrm{Farve}(y,\mathrm{rød}))$	☐	☒
9. $\forall x(\mathrm{Farve}(x,\mathrm{rød}) \to \exists y(\mathrm{På}(y,x) \land \mathrm{Farve}(y,\mathrm{hvid}))$	☒	☐
10. $\forall x \forall y(\mathrm{Over}(x,y) \land \mathrm{Over}(y,x) \to \mathrm{Farve}(x,\mathrm{blå}))$	☒	☐
11. $\forall x(\mathrm{Gave}(x) \land \neg \exists y \mathrm{På}(x,y) \to \mathrm{Farve}(x,\mathrm{grøn}))$	☒	☐
12. $\forall x(\mathrm{Farve}(x,\mathrm{hvid}) \to \exists y(\mathrm{Farve}(y,\mathrm{rød}) \land (\mathrm{På}(x,y) \lor \mathrm{På}(y,x))))$	☒	☐

2. Overstreg herunder de elementer i fortolkning der skal fjernes, hvis man fjerner julegave 7:
   - $\text{dom}(\mathcal{F}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cancel{7}, \text{hvid}, \text{grøn}, \text{rød}, \text{blå}\}$.
   - $\text{Gave}^{\mathcal{F}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cancel{7}\}$.
   - $\text{På}^{\mathcal{F}} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4), (6, 5), \cancel{(7, 6)}\}$.
   - $\text{Over}^{\mathcal{F}} = \text{På}^{\mathcal{F}} \cup \{(3, 1), (6, 4), \cancel{(7, 4)}, \cancel{(7, 5)}\}$.
   - $\text{Farve}^{\mathcal{F}} = \{(1, \text{grøn}), (2, \text{rød}), (3, \text{hvid}), (4, \text{grøn}), (5, \text{hvid}), (6, \text{rød}), \cancel{(7, \text{hvid})}\}$.

Opgave 3 (Prædikatlogik) 15%

Betragt formlen A givet ved

$$A = \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$$

1. Angiv virkefeltet for kvantoren $\forall y$ i A ved at sætte en ring om virkefeltet i formlen ovenfor.

   LØSNING. Der skal en ring om hele formlen.

2. Kryds det rigtige svar af i to nedenstående spørgsmål. Forkert svar tæller negativt.

	åben	lukket	hverken åben eller lukket
Formlen A er	☐	☐	☒
Formlen $\forall x A$ er	☐	☒	☐

3. Angiv herunder resultatet af substitutionen $A[z/y]$.

   LØSNING. $A[z/y] = A$, eftersom alle forekomster af y i A er bundet.

4. Angiv herunder resultatet af substitutionen $A[y/x]$.

   LØSNING. $A[y/x] = \forall y (P(y, y) \rightarrow P(y, y))$.

5. Betragt de to formler $\forall x A$ og $\forall x A[y/x]$. Angiv herunder en fortolkning hvori den ene af de to formler er falsk, mens den anden er sand—og argumentér for dit svar.

   LØSNING. $\forall x A[y/x]$ er gyldig eftersom $P(y, y) \rightarrow P(y, y)$ er en første-ordens instans af en gyldig formel i udsangslogik. Det er derfor nok at finde en fortolkning som gør $\forall x A$ falsk. Betragt fortolkningen over de reelle tal, hvor P fortolkes som "større end". Da udtrykker $\forall x A$ at der for alle reelle tal x, y gælder, at hvis x er større end y, så er y større end x. Det er åbenlyst falsk.

Bord nr.	Kursus nr.: 01017	Dato: 13. december 2018	Ark nr.
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ______	Fødselsdato: ______	
	Navn: ______		

6. Kryds det rigtige svar af i nedenstående spørgsmål. Forkert svar tæller negativt.

	sand	falsk
$\forall x A[y/x]$ og $\forall x A$ er logisk ækvivalente	☐	☒
x er erstattelige med y i A	☐	☒
y er erstattelig med z i A	☒	☐

Opgave 4 (Kombinatorik) 6%

Afgør om hvert af følgende udsagn er sandt eller falsk. Forkert svar tæller negativt.

		sandt	falsk
1.	Der er 12 forskellige måder at udvælge 4 forskellige elementer fra en mængde med 6 elementer.	☐	☒
2.	For alle $n \geq 1$ gælder at $n! \leq 2^n$.	☐	☒
3.	Der er 120 forskellige måder at arrangere 5 forskellige elementer på en række.	☒	☐
4.	For alle $n \geq 1$ gælder at $\binom{n}{3} \leq \binom{n}{4}$.	☐	☒
5.	For alle $n \geq 1$ og alle k med $0 \leq k \leq n$ gælder at $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.	☒	☐
6.	En mængde med n elementer har $\binom{n}{k}$ forskellige delmængder med k elementer.	☒	☐

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 13. december 2018	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ____________________	**Fødselsdato:** ____________	
	Navn: ____		

Opgave 5 (Heltals-aritmetik) 14%

1. Find mindst én heltallig løsning til følgende Diophantiske ligning, hvis der findes sådan en løsning. Argumentér for dit svar.
$$8x + 12y = 44$$

2. Find mindst én heltallig løsning til følgende Diophantiske ligning, hvis der findes sådan en løsning. Argumentér for dit svar.
$$33x + 18y = 52$$

Solution.

1. $8x + 12y = 44$

   As $\gcd(8, 12) = 4$ divides 44, there are solutions. One solution is $(-2, 5)$. A systematic way to find a solution is to run the Extended Euclidean algorithm to find s, t such that $8s + 12t = 4$. This would yield $s = -1$ and $t = 1$. Then a solution to the Diophantine equation is simply to multiply this by 11, i.e. $-11 \cdot 8 + 11 \cdot 12 = 44$.

2. $33x + 18y = 52$.

   As $\gcd(33, 18) = 3$ and $3 \nmid 52$, no solutions exist.

Opgave 6 (Kongruenser) 15%

1. Tegn i tabellen alle linjer mellem et a og et b, hvor der gælder at $a \equiv b \pmod{11}$.

a	b
-7	15
1	4
84	7

   Solution. One needs to draw a line between the pairs $(-7, 15)$, $(-7, 4)$, $(84, 7)$.

2. Brug Euklids udvidede algoritme til at beregne $\text{sfd}(12, 21)$ ved at udfylde nedenstående tabel med mellem-regningerne.

k	q	r_k	s_k	t_k
0				
1				
2				
3				
4				
5				

$\text{sfd}(12, 21) = 3$.

3. Markér en multiplikativ invers til 4 modulo 7:

☐: 0 ☐: 1 ☒: 2 ☐: 3 ☐: 4 ☐: 5 ☐: 6

4. Bestem løsningsmængden til

$$12x \equiv 15 \pmod{21}.$$

ved at udfylde nedenstående ligning:

Løsningsmængde: $x \in 10 + 7\mathbb{Z}$

Solution.

We find $\text{sfd}(12, 21)$ by using the extended Euclidean algorithm

k	q	r_k	s_k	t_k	
-1		12	1	0	initial value
0		21	0	1	intial value
1	0	12	1	0	since $12 = 0 \cdot 21 + 12$
2	1	9	-1	1	since $21 = 1 \cdot 12 + 9$
3	1	3	2	-1	since $12 = 1 \cdot 9 + 3$
4	3	0	-7	4	since $9 = 3 \cdot 3 + 0$

So $d = \text{sfd}(12, 21) = 3 = 2 \cdot 12 - 1 \cdot 21$.

Since $d = 3$ divides 15, we the congruence is equivalent to

$$4x \equiv 5 \pmod{7}.$$

Now $\gcd(4, 7) = 1$. From $3 = 2 \cdot 12 + -1 \cdot 21$ we conclude (dividing by 3) $1 = 2 \cdot 4 + -1 \cdot 5$ so $2 = 4^{-1} \pmod{7}$

The solution set then is $2 \cdot 5 + 7\mathbb{Z} = 10 + 7\mathbb{Z}$.

Opgave 7 (Polynomier og Induktion) 15%

Lad $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ være følgende rekursivt definerede række af polynomier:

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{for } n = 0 \\ 2 \cdot (f_{n-1}(x))^2 - 1 & \text{for } n > 0 \end{cases}$$

Bord nr.	**Kursus nr.:** 01017	**Dato:** 13. december 2018	**Ark nr.**
	Kursusnavn: Diskret Matematik		
	Studienr.: ______________________	**Fødselsdato:** _____________	
	Navn: ____		

1. Angiv udtrykket for $f_n(x)$ for $n \in \{0, 1, 2\}$:

$$f_0(x) = \underline{\hspace{8cm}}$$

$$f_1(x) = \underline{\hspace{8cm}}$$

$$f_2(x) = \underline{\hspace{8cm}}$$

   Solution.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x \\ f_1(x) &= 2x^2 - 1 \\ f_2(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

2. Bevis at $\deg f_n(x) = 2^n$ for $n \in \mathbb{N}$. **Solution.**
   Med induktion:
   Basis-tilfældet $n = 0$ har $f_0(x) = x$ så $\deg f_0(x) = 1 = 2^0$.
   Til induktions-trinnet antages $\deg f_n(x) = 2^n$ for vilkårligt $n \in \mathbb{N}$, og vi skal bevise $\deg f_{n+1}(x) = 2^{n+1}$. Men $f_{n+1}(x) = 2f_n(x)^2 - 1$, så $\deg f_{n+1}(x) = 2 \deg f_n(x) = 2^{n+1}$, sidste led pr. induktionsantagelsen.

3. Lad $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ for $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
   Bevis at $(x - 1) \mid g_n(x)$ for $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

   Solution 1.
   Vi beviser først med induktion, at $f_n(1) = 1$ for $n \in \mathbb{N}$.
   Basis-tilfældet $n = 0$ har $f_0(x) = x$, så $f_0(1) = 1$.
   Til induktions-trinnet antages $f_n(1) = 1$ for vilkårligt $n \in \mathbb{N}$, og vi skal bevise $f_{n+1}(1) = 1$.
   Men $f_{n+1}(1) = 2f_n(1) - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, næst-sidste lighed pr. induktionsantagelsen.
   Derfor er $f_n(1) = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Og dermed $g_n(1) = f_n(1) - f_{n-1}(1) = 0$ for $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
   Men $g_n(1) = 0 \iff (x - 1) \mid g_n(x)$.
   Solution 2.
   Vi beviser $g_n(1) = 0$ med induktion, og da $g_n(1) = 0 \iff (x - 1) \mid g_n(x)$ løser det opgaven.
   Basis-tilfældet $n = 1$ har

$$g_1(x) = f_1(x) - f_0(x) = (2x^2 - 1) - 1 = 2x^2 - 2$$

   Så derfor $g_1(1) = 0$, og dermed $(x - 1) \mid g(x)$.
   Til induktions-trinnet antages $g_k(1) = 0$ for $1 \le k \le n$ for et vilkårligt n, og vi skal vise

$g_{n+1}(1) = 0$. Vi har:

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(x) &= f_{n+1}(x) - f_n(x) \\
&= (2f_n(x)^2 - 1) - (2f_{n-1}(x)^2 - 1) \\
&= 2(f_n(x)^2 - f_{n-1}(x)^2) \\
&= 2(f_n(x) + f_{n-1}(x))(f_n(x) - f_{n-1}(x)) \\
&= 2(f_n(x) + f_{n-1}(x))g_n(x)
\end{aligned}$$

Så da $g_n(1) = 0$ må også $g_{n+1}(1) = 0$, som vi skulle bevise.