

# DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve, 12 December 2019

Side 1 af 10

Kursusnavn: Diskret Matematik

Kursusnummer: 01017

Hjælpe midler: Skriftlige hjælpemidler er tilladt.

Varighed: 2 timer.

Vægtning:

Opgave 1: 40%

Opgave 2: 10%

Opgave 3: 10%

Opgave 4: 15%

Opgave 5: 13%

Opgave 6: 12%

**Bedømmelserne af eksamen er delvist automatiseret. Det er derfor afgørende at du nøje overholder følgende retningslinjer:**

Alle opgaver besvares ved at udfylde de tomme bokse på de følgende sider. Som opgavebesvarelse afleveres blot hele opgavesættet i udfyldt stand. Tekst og figurer udenfor de tomme bokse vil ikke blive taget i betragtning. Hvis man undtagelsesvis har brug for mere plads, kan man tilføje opgaveløsninger på ekstra ark, som tilføjes til slutningen af afleveringen.

I multiple-choice spørgsmål skal du sætte et kryds i de rigtige firkanter: ☒. Hvis du fortryder et kryds og ikke kan slette det, så overtegn i stedet hele den forkerte box: ☐.

**Studienummer**  
*Study number*

**Fødselsdato**  
*Date of birth*

**Navn**  
*Name*

**Bordnummer**  
*Table number*

# Opgave 1 (40%)

Afgør om følgende udsagn er sande eller falske. Forkert svar tæller negativt.

	Udsagn	Sand	Falsk
1.	Udtrykket $\forall x(P(L(x), Y(x)))$ er en formel i prædikatlogik når $L$ og $Y$ er unære prædikatsymboler og $P$ er et binært prædikatsymbol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2.	Udtrykket $\forall x(P(x, y, f(x, y)))$ er en formel i prædikatlogik når $P$ er et ternært (3-ært) prædikatsymbol og $f$ er et binært funktionssymbol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4.	Lad $A, B, C$ og $D$ være vilkårlige mængder. Da gælder: $(A - B) \cap (C - D) \cap (D - A) = \emptyset$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5.	Lad $A, B, C$ og $D$ være vilkårlige mængder. Da gælder: $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - D) = A - D$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6.	Formlen $((p \vee r) \wedge (r \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ er gyldig.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7.	$\forall xP(x, y)$ er en lukket formel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8.	$\forall xP(x, y)$ er en åben formel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9.	$x$ er erstattelig med $y$ i følgende formel: $\forall y(Q(y) \rightarrow \forall xP(x, y)) \rightarrow R(f(x), g(y))$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10.	Lad $A$ være formlen $P(x, y)$ . Da gælder $A[y/x] = A[x/y]$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgaven fortsætter på næste side

	Udsagn	Sand	Falsk
11.	Lad $A$ og $B$ være formler i udsagnslogik. Antag vi laver et tableau med $A \rightarrow B : \mathbf{T}$ i roden. Da gælder at $B$ <b>ikke</b> er en logisk konsekvens af $A$ , hvis og kun hvis vi kan få tableauet til at lukke.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
12.	På en ø er der to typer af mennesker: sandsigere, som altid taler sandt, og løgnere, som altid lyver. En fremmed møder på øen Paul og Susan. Paul siger: "Enten er vi begge sandsigere eller også er vi begge løgnere." Det følger heraf at Susan er sandsiger.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
13.	Betragt en fortolkning hvori $E(x, y)$ betegner egenskaben at $x$ elsker $y$ . Vi kan i denne fortolkning formalisere udsagnet "alle, som elsker nogen, elsker sig selv" som formelen $\forall x \exists y (E(x, y) \rightarrow E(x, x))$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Opgave 2 (10%)

Brug tableau-metoden til at afgøre om følgende påstand er korrekt. Hvis den **ikke** er korrekt, skal du angive en konkret sandhedstildeling som gør præmisserne sande og konklusionen falsk.

$$\neg p \rightarrow \neg q, \neg(p \wedge \neg r), \neg r \models q$$

### Opgave 3 (10%)

Vi betragter et sædvanligt kortspil med 52 kort fordelt ligeligt på de 4 kulører spar, hjerter, ruder og klør.

1. Hvor mange forskellige hænder med 3 kort er der, hvor der er 2 hjerter og 1 klør. Der skelnes ikke mellem rækkefølge af de tre kort på hånden. Angiv løsningen med en formel, og husk at argumentere kort for dit svar.

2. Lad  $M = \{1, 2, \dots, 180\}$  angive de positive heltal mellem 1 og 180. Beregn hvor mange af elementerne der er delelige med 6 eller 9 (eller begge dele). Retfærdiggør dit svar.

## Opgave 4 (15%)

En funktion  $f(n)$  er for  $n = 1, 2, 3, \dots$  defineret ved

$$f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

1. Udregn værdierne af  $f(1)$ ,  $f(2)$  og  $f(3)$ .

2. Vis at for  $n = 1, 2, 3, \dots$  gælder

$$f(n+1) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + f(n)$$

Opgaven fortsætter på næste side

3. Før et induktionsbevis for at

$$f(n) = \frac{n}{n+1}, \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots$$

## Opgave 5 (13%)

1. Forbind med en streg hvert tal i venstre kolonne med sin multiplikative invers (mod 5) i højre kolonne. Tegn ikke andre linjer.

$a$	$b$
1	1
2	2
3	3
4	4

Opgaven fortsætter på næste side



2. Angiv løsningsmængden til

$$34x \equiv 4 \pmod{44}.$$

## Opgave 6 (12%)

Vi er givet følgende to polynomier

$$N(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

$$M(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

En kørsel af Euklids algoritme giver følgende

$k$	$R_k$
0	$x^3 - 2x^2 - 4x + 8$
1	$3x^2 - 4x - 4$
2	$-\frac{32}{9}x + \frac{64}{9}$
3	0

Afgør om følgende udsagn er sande eller falske. Forkert svar tæller negativt.

Udsagn	Sand	Falsk
$N(x)$ og $M(x)$ har ingen fælles rødder	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$M(x)$ går op i $N(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$R_2(x)$ går op i $R_1(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$R_2(x)$ er en største fælles divisor for $N(x), M(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$D(x) = x - 2$ er en største fælles divisor for $N(x), M(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$N(x)$ har en dobbeltrod	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>