

Tarea 06: Unidad 03-A | Serie de Taylor y Polinomios de Lagrange

Métodos Numéricos

Christopher Criollo

2025-11-25

Tabla de Contenidos

1	CONJUNTO DE EJERCICIOS	1
1.1	1. Determine el orden de la mejor aproximación para las siguientes funciones, usando la Serie de Taylor y el Polinomio de Lagrange:	1
1.2	Comparación de métodos	6

1 CONJUNTO DE EJERCICIOS

1.1 1. Determine el orden de la mejor aproximación para las siguientes funciones, usando la Serie de Taylor y el Polinomio de Lagrange:

1.
$$\frac{1}{25x^2 + 1}, x_0 = 0$$

2.
$$\arctan(x), x_0 = 1$$

- Escriba las fórmulas de los diferentes polinomios
- Grafique las diferentes aproximaciones

1.
$$\frac{1}{25x^2 + 1}, x_0 = 0$$

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import lagrange
from sympy import symbols, diff, lambdify, atan

# Función 1:  $1/(25x^2 + 1)$ 
def f1(x):
    return 1/(25*x**2 + 1)

# Punto de expansión para Taylor
x0 = 0

# Rangos de valores para la gráfica
x_vals = np.linspace(-0.5, 0.5, 400)

```

Aproximacion con Serie de Taylor

```

# Calculos simbólicos para Taylor
x = symbols('x')
f1_sym = 1/(25*x**2 + 1)

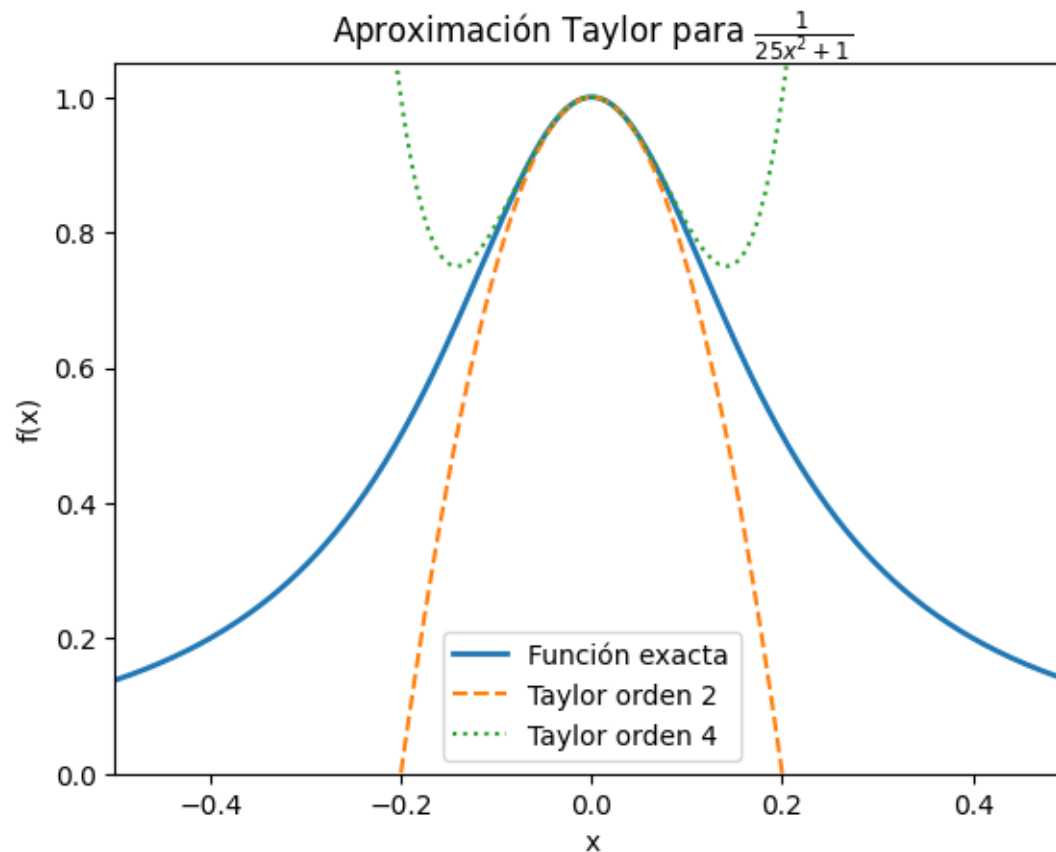
# Taylor de orden 2
f1_prime = diff(f1_sym, x)
f1_double_prime = diff(f1_prime, x)
taylor_2 = f1_sym.subs(x, x0) + f1_prime.subs(x, x0)*(x-x0) + f1_double_prime.subs(x, x0)*(x-x0)**2/2
taylor_2_func = lambdify(x, taylor_2)

# Taylor de orden 4
f1_triple_prime = diff(f1_double_prime, x)
f1_quad_prime = diff(f1_triple_prime, x)
taylor_4 = taylor_2 + f1_triple_prime.subs(x, x0)*(x-x0)**3/6 + f1_quad_prime.subs(x, x0)*(x-x0)**4/24
taylor_4_func = lambdify(x, taylor_4)

# Gráfico de las funciones
plt.plot(x_vals, f1(x_vals), label='Función exacta', linewidth=2)
plt.plot(x_vals, taylor_2_func(x_vals), '--', label='Taylor orden 2')
plt.plot(x_vals, taylor_4_func(x_vals), ':', label='Taylor orden 4')
plt.title('Aproximación Taylor para  $\frac{1}{25x^2+1}$ ')
plt.xlim(-0.5, 0.5)
plt.ylim(0, 1.05)
plt.legend()
plt.xlabel('x')

```

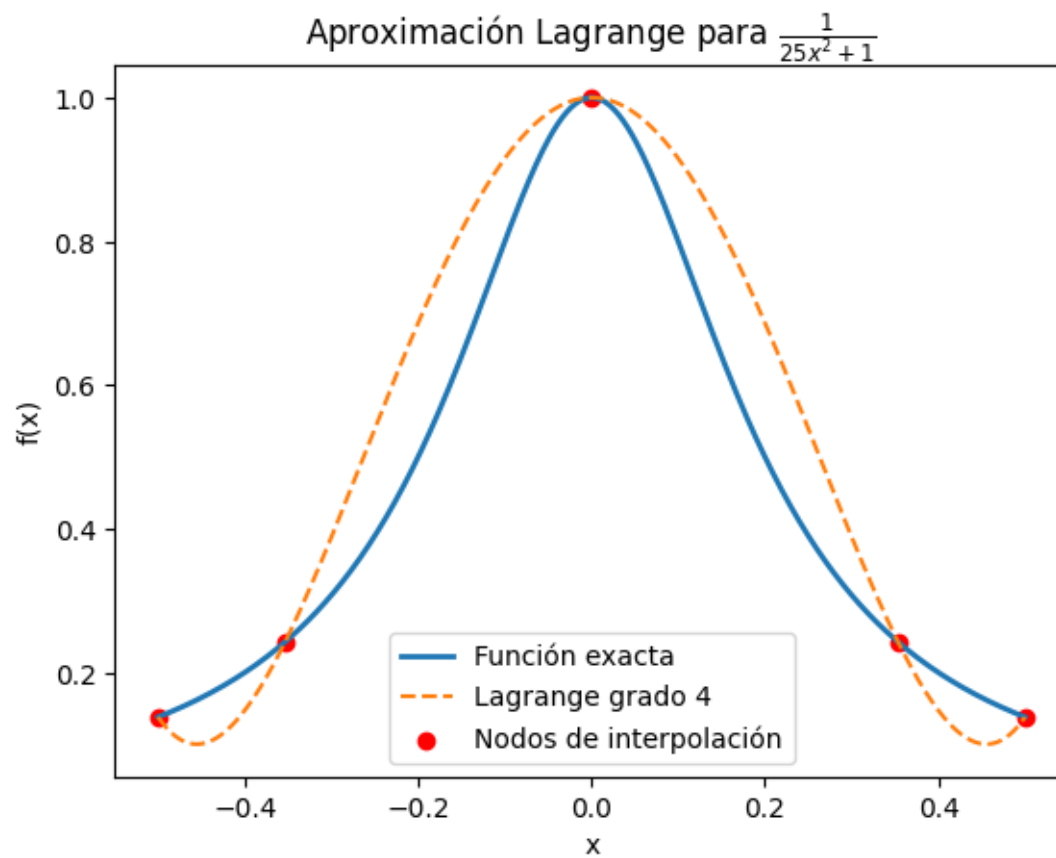
```
plt.ylabel('f(x)')
plt.show()
```



Aproximación con Polinomio de Lagrange

```
# Puntos para Lagrange (interpolación en nodos de Chebyshev)
n_points = 5
cheb_nodes = np.cos(np.linspace(0, np.pi, n_points)) * 0.5 # Escalado a [-0.5, 0.5]
lagrange_poly = lagrange(cheb_nodes, f1(cheb_nodes))

# Gráfico de Lagrange
plt.plot(x_vals, f1(x_vals), label='Función exacta', linewidth=2)
plt.plot(x_vals, lagrange_poly(x_vals), '--', label=f'Lagrange grado {n_points-1}')
plt.scatter(cheb_nodes, f1(cheb_nodes), color='red', label='Nodos de interpolación')
plt.title('Aproximación Lagrange para  $\frac{1}{25x^2+1}$ ')
plt.legend()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.show()
```



2.

$$\arctan(x), x_0 = 1$$

```
# Función 2: arctan(x)
def f2(x):
    return np.arctan(x)

# Punto de expansión para Taylor
x0 = 1

# Rangos de valores para la gráfica
x_vals_arctan = np.linspace(0, 2, 400)
```

Aproximación con Serie de Taylor

```
# Calculos simbólicos para Taylor
f2_sym = atan(x)

# Taylor de orden 2
f2_prime = diff(f2_sym, x)
```

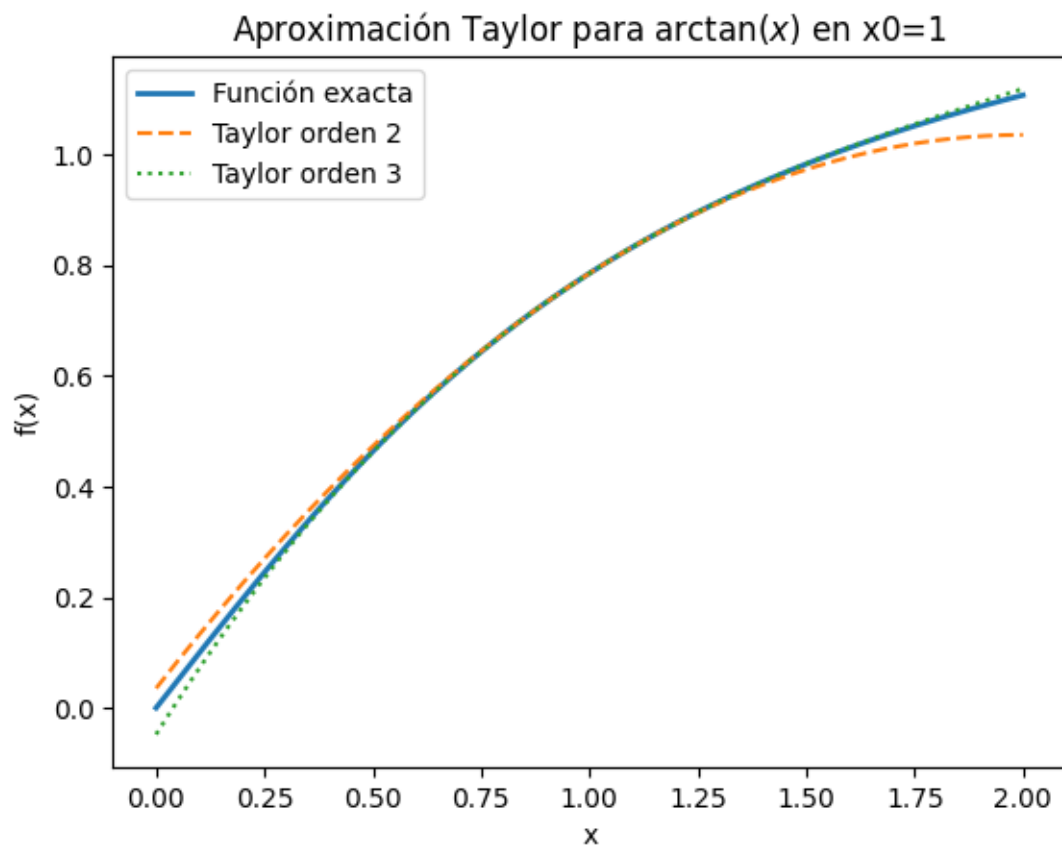
```

f2_double_prime = diff(f2_prime, x)
taylor_2_arctan = f2_sym.subs(x, x0) + f2_prime.subs(x, x0)*(x-x0) + f2_double_prime.subs(x, x0)*(x-x0)**2/2
taylor_2_arctan_func = lambdify(x, taylor_2_arctan)

# Taylor de orden 3
f2_triple_prime = diff(f2_double_prime, x)
taylor_3_arctan = taylor_2_arctan + f2_triple_prime.subs(x, x0)/6*(x-x0)**3
taylor_3_arctan_func = lambdify(x, taylor_3_arctan)

# Gráfico de Taylor
plt.plot(x_vals_arctan, f2(x_vals_arctan), label='Función exacta', linewidth=2)
plt.plot(x_vals_arctan, taylor_2_arctan_func(x_vals_arctan), '--', label='Taylor orden 2')
plt.plot(x_vals_arctan, taylor_3_arctan_func(x_vals_arctan), ':', label='Taylor orden 3')
plt.title('Aproximación Taylor para  $\arctan(x)$  en  $x_0=1$ ')
plt.legend()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.show()

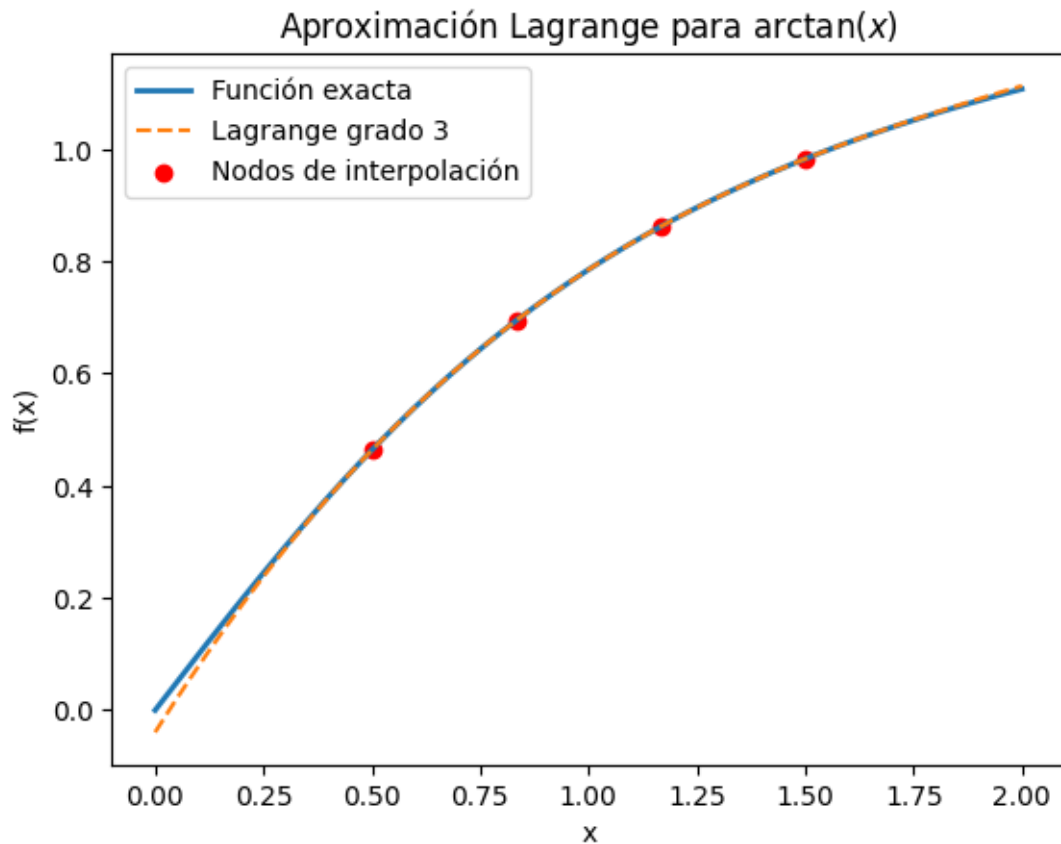
```



Aproximación con Polinomio de Lagrange

```
# Puntos para Lagrange
n_points_arctan = 4
x_nodes = np.linspace(0.5, 1.5, n_points_arctan)
lagrange_poly_arctan = lagrange(x_nodes, f2(x_nodes))

# Gráfico de Lagrange
plt.plot(x_vals_arctan, f2(x_vals_arctan), label='Función exacta', linewidth=2)
plt.plot(x_vals_arctan, lagrange_poly_arctan(x_vals_arctan), '--', label=f'Lagrange grado 3')
plt.scatter(x_nodes, f2(x_nodes), color='red', label='Nodos de interpolación')
plt.title('Aproximación Lagrange para  $\arctan(x)$ ')
plt.legend()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.show()
```



1.2 Comparación de métodos

Se calcula el error cuadrático medio para saber cual método es mejor de la siguiente manera:

```

# Primera función
error_taylor2 = np.mean((f1(x_vals) - taylor_2_func(x_vals))**2)
error_taylor4 = np.mean((f1(x_vals) - taylor_4_func(x_vals))**2)
error_lagrange = np.mean((f1(x_vals) - lagrange_poly(x_vals))**2)

print(f"Errores para 1/(25x^2+1):")
print(f"Taylor orden 2: {error_taylor2:.2e}")
print(f"Taylor orden 4: {error_taylor4:.2e}")
print(f"Lagrange grado {n_points-1}: {error_lagrange:.2e}")

# Segunda función
error_taylor2_arctan = np.mean((f2(x_vals_arctan) - taylor_2_arctan_func(x_vals_arctan))
error_taylor3_arctan = np.mean((f2(x_vals_arctan) - taylor_3_arctan_func(x_vals_arctan))
error_lagrange_arctan = np.mean((f2(x_vals_arctan) - lagrange_poly_arctan(x_vals_arctan))

print(f"\nErrores para arctan(x):")
print(f"Taylor orden 2: {error_taylor2_arctan:.2e}")
print(f"Taylor orden 3: {error_taylor3_arctan:.2e}")
print(f"Lagrange grado {n_points_arctan-1}: {error_lagrange_arctan:.2e}")

```

Errores para $1/(25x^2+1)$:
 Taylor orden 2: $5.11e+00$
 Taylor orden 4: $1.20e+02$
 Lagrange grado 4: $1.16e-02$

Errores para $\arctan(x)$:
 Taylor orden 2: $5.60e-04$
 Taylor orden 3: $1.09e-04$
 Lagrange grado 3: $6.25e-05$