[Tarea 10.5] Matriz inversa - descomposición LU

Métodos Numéricos

Christopher Criollo

2025-01-08

Tabla de Contenidos

1. Objetivo

Para las matrices dadas A_1, A_2, A_3 y A_4, se realizarán los siguientes cálculos computacionales: 1. Calcular la **Matriz Inversa** (A^{-1}). 2. Calcular la **Descomposición LU** ($A = LU$ o $PA = LU$).

1.1. 1. Matriz A_1

Dada la matriz:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1.1. 1.1 Cálculo de la Inversa (Método Gauss-Jordan)

Construimos la matriz aumentada $[A|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 1: Eliminación hacia abajo (Gauss) * $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ * $R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -15 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 2: Normalización y Eliminación hacia arriba (Jordan) * Dividimos R_2 entre -5 y R_3 entre -5:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0.4 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.4 & -0.2 \end{array}\right]$$

- Eliminamos la columna 3 usando R_3:
  - $R_2 \leftarrow R_2 - R_3$
  - $R_1 \leftarrow R_1 - 4R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & -1.6 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4 & -0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.4 & -0.2 \end{array}\right]$$

- Eliminamos la columna 2 usando R_2:
  - $R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4 & -0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.4 & -0.2 \end{array}\right]$$

Resultado A_1^{-1}:

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & -0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & -0.2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1.1.2. 1.2 Factorización LU

Obtenemos L (multiplicadores usados) y U (matriz resultante de la eliminación gaussiana).

- Multiplicadores Columna 1: $m_{21} = 2, m_{31} = 4$
- Multiplicadores Columna 2: $m_{32} = 2$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

1.2. 2. Matriz A_2

Dada la matriz:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.1. 2.1 Cálculo de la Inversa (Método Gauss-Jordan)

Construimos la matriz aumentada $[A|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 1: Eliminación hacia abajo (Gauss) * El elemento a_{21} ya es 0. * $R_3 \leftarrow R_3 - 5R_1$: $[5, 6, 0] - 5[1, 2, 3] = [0, -4, -15]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- $R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2$: $[0, -4, -15] + 4[0, 1, 4] = [0, 0, 1]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 2: Eliminación hacia arriba (Jordan) * $R_2 \leftarrow R_2 - 4R_3$: $[0, 1, 0 \mid 20, -15, -4]$ * $R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3$: $[1, 2, 0 \mid 16, -12, -3]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

- $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$: $[1, 0, 0 \mid -24, 18, 5]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Resultado A_2^{-1}:

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.2. 2.2 Factorización LU

- Multiplicadores: $m_{21} = 0, m_{31} = 5, m_{32} = -4$.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3. 3. Matriz A_3

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

1.3.1. 3.1 Cálculo de la Inversa (Gauss-Jordan)

Aumentamos $[A|I]$ y normalizamos R_1: $R_1 \leftarrow R_1/4$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 1: Eliminación hacia abajo * $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ y $R_3 \leftarrow R_3 - 1R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 3.75 & -0.25 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- **Pivoteo:** Intercambio $R_2 \leftrightarrow R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 3.75 & -0.25 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2.5 & -0.5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Paso 2: Eliminación hacia arriba * Normalizamos R_2 ($\div 2.5$) y R_3 ($\div 2.5$). * Limpiamos columnas superiores para obtener la Identidad.

Resultado A_3^{-1}:

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.2 & 0.2 \\ -0.2 & 0.6 & -0.4 \\ 0.2 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.2. 3.2 Factorización LU ($PA = LU$)

Debido al intercambio, la matriz de permutación P refleja el swap de las filas 2 y 3.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2.5 & 3.75 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

1.4. 4. Matriz A_4 (4x4)

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & -6 \\ 2 & 5 & 18 & 10 \\ 6 & 12 & 38 & 16 \end{bmatrix}$$

1.4.1. 4.1 Cálculo de la Inversa (Gauss-Jordan)

Operamos sobre la matriz 4x4 aumentada.

Paso 1: Eliminación Gaussiana * $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - 1R_1$, $R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 13 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$ y luego $R_4 \leftarrow R_4 - 4R_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & -4 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Resultado A_4^{-1}:

$$A_4^{-1} \approx \begin{bmatrix} -1.3167 & 0.8 & 0.35 & -0.1583 \\ 0.9667 & -0.6 & -0.2 & 0.1167 \\ 0.2333 & -0.2 & 0.1 & -0.0167 \\ 1.0 & -0.4444 & -0.4444 & 0.1111 \end{bmatrix}$$

1.4.2. 4.2 Factorización LU

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$