**Bài tập 3: Một số thuật toán trên đồ thị và ứng dụng**

**Nội dung 1:** **Hãy trình bày những nội dung tóm lược về một số thuật toán cơ bản: khái niệm,**

**các yếu tố liên quan, ứng dụng**

**- Chu trình/đường Hamilton**

**- Chu trình/đường Euler**

**- Tô màu đồ thị**

**1.1. ĐƯỜNG ĐI EULER VÀ ĐỒ THỊ EULER.**

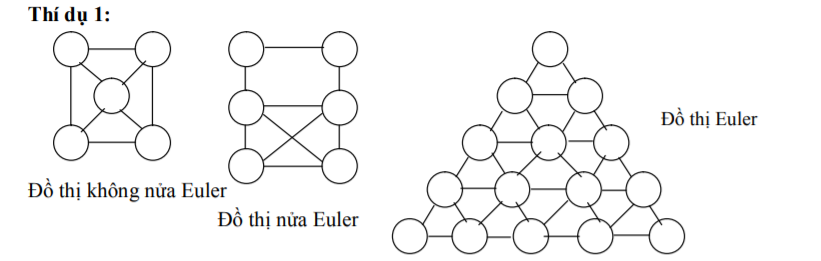
Có thể coi năm 1736 là năm khai sinh lý thuyết đồ thị, với việc công bố lời giải “bài toán về các cầu ở Konigsberg” của nhà toán học lỗi lạc Euler (1707-1783). Thành phố Konigsberg thuộc Phổ (nay gọi là Kaliningrad thuộc Nga) được chia thành bốn vùng bằng các nhánh sông Pregel, các vùng này gồm hai vùng bên bờ sông, đảo Kneiphof và một miền nằm giữa hai nhánh của sông Pregel. Vào thế kỷ 18, người ta xây bảy chiếc cầu nối các vùng này với nhau.

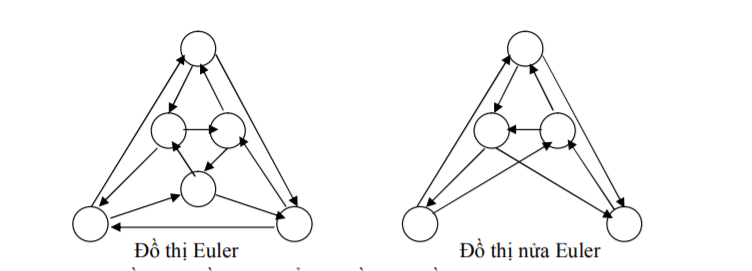
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

            Dân thành phố từng thắc mắc: “Có thể nào đi dạo qua tất cả bảy cầu, mỗi cầu chỉ một lần thôi không?”. Nếu ta coi mỗi khu vực A, B, C, D như một đỉnh và mỗi cầu qua lại hai khu vực là một cạnh nối hai đỉnh thì ta có sơ đồ của Konigsberg là một đa đồ thị G như hình trên.

            Bài toán tìm đường đi qua tất cả các cầu, mỗi cầu chỉ qua một lần có thể được phát biểu lại bằng mô hình này như sau: Có tồn tại chu trình đơn trong đa đồ thị G chứa tất cả các cạnh?

**1.1.1. Định nghĩa:** Chu trình (t.ư. đường đi) đơn chứa tất cả các cạnh (hoặc cung) của đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) G được gọi là chu trình (t.ư. đường đi) Euler. Một đồ thị liên thông (liên thông yếu đối với đồ thị có hướng) có chứa một chu trình (t.ư. đường đi) Euler được gọi là đồ thị Euler (t.ư. nửa Euler).



            Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là đồ thị Euler được Euler tìm ra vào năm 1736 khi ông giải quyết bài toán hóc búa nổi tiếng thời đó về bảy cái cầu ở Konigsberg và đây là định lý đầu tiên của lý thuyết đồ thị.

**1.1.2. Định lý:** Đồ thị (vô hướng) liên thông G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

**Chứng minh:**

***Điều kiện cần*:**Giả sử G là đồ thị Euler, tức là tồn tại chu trình Euler P trong G. Khi đó cứ mỗi lần chu trình P đi qua một đỉnh nào đó của G thì bậc của đỉnh đó tăng lên 2. Mặt khác, mỗi cạnh của đồ thị xuất hiện trong P đúng một lần. Do đó mỗi đỉnh của đồ thị đều có bậc chẵn.

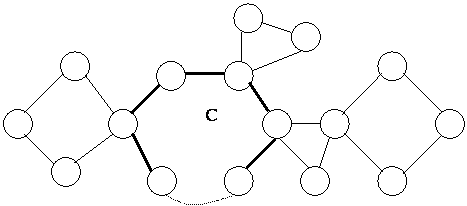
**1.1.3. Bổ đề:** Nếu bậc của mỗi đỉnh của đồ thị G không nhỏ hơn 2 thì G chứa chu trình đơn.

**Chứng minh:** Nếu G có cạnh bội hoặc có khuyên thì khẳng định của bổ đề là hiển nhiên. Vì vậy giả sử G là một đơn đồ thị. Gọi v là một đỉnh nào đó của G. Ta sẽ xây dựng theo quy nạp đường đi

https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image040.gif Oval: v2 https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image042.gif Oval: v1 https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image044.gif Oval: v

trong đó v1 là đỉnh kề với v, còn với i ≠ 1, chọn vi+1 là đỉnh kề với vi và vi+1≠ vi-1 (có thể chọn như vậy vì deg(vi) ≥ 2), v0 = v. Do tập đỉnh của G là hữu hạn, nên sau một số hữu hạn bước ta phải quay lại một đỉnh đã xuất hiện trước đó. Gọi k là số nguyên dương đầu tiên để vk=vi (0≤i<k). Khi đó, đường đi vi, vi+1, ..., vk-1, vk (= vi) là một chu trình đơn cần tìm.

***Điều kiện đủ:***Quy nạp theo số cạnh của G. Do G liên thông và bậc của mọi đỉnh là chẵn nên mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn 2. Từ đó theo Bổ đề 1.1.3, G phải chứa một chu trình đơn C. Nếu C đi qua tất cả các cạnh của G thì nó chính là chu trình Euler. Giả sử C không đi qua tất cả các cạnh của G. Khi đó loại bỏ khỏi G các cạnh thuộc C, ta thu được một đồ thị mới H (không nhất thiết là liên thông). Số cạnh trong H nhỏ hơn trong G và rõ ràng mỗi đỉnh của H vẫn có bậc là chẵn. Theo giả thiết quy nạp, trong mỗi thành phần liên thông của H đều tìm được chu trình Euler. Do G liên thông nên mỗi thành phần trong H có ít nhất một đỉnh chung với chu trình C. Vì vậy, ta có thể xây dựng chu trình Euler trong G như sau:



Bắt đầu từ một đỉnh nào đó của chu trình C, đi theo các cạnh của C chừng nào chưa gặp phải đỉnh không cô lập của H. Nếu gặp phải đỉnh như vậy thì ta đi theo chu trình Euler của thành phần liên thông của H chứa đỉnh đó. Sau đó lại tiếp tục đi theo cạnh của C cho đến khi gặp phải đỉnh không cô lập của H thì lại theo chu trình Euler của thành phần liên thông tương ứng trong H, ... Quá trình sẽ kết thúc khi ta trở về đỉnh xuất phát, tức là thu được chu trình đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần.

**1.1.4. Hệ quả:** Đồ thị liên thông G là nửa Euler (mà không là Euler) khi và chỉ khi có đúng hai đỉnh bậc lẻ trong G.

**Chứng minh:** Nếu G là nửa Euler thì tồn tại một đường đi Euler trong G từ đỉnh u đến đỉnh v. Gọi G’ là đồ thị thu được từ G bằng cách thêm vào cạnh (u,v). Khi đó G’ là đồ thị Euler nên mọi đỉnh trong G’ đều có bậc chẵn (kể cả u và v). Vì vậy u và v là hai đỉnh duy nhất trong G có bậc lẻ.

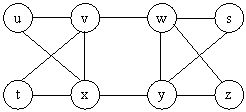
            Đảo lại, nếu có đúng hai đỉnh bậc lẻ là u và v thì gọi G’ là đồ thị thu được từ G bằng cách thêm vào cạnh (u,v). Khi đó mọi đỉnh của G’ đều có bậc chẵn hay G’ là đồ thị Euler. Bỏ cạnh (u,v) đã thêm vào ra khỏi chu trình Euler trong G’ ta có được đường đi Euler từ u đến v trong G hay G là nửa Euler.

**1.1.5. Chú ý:** Ta có thể vạch được một chu trình Euler trong đồ thị liên thông G có bậc của mọi đỉnh là chẵn theo thuật toán Fleury sau đây.

            Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ của G và tuân theo hai quy tắc sau:

1. Mỗi khi đi qua một cạnh nào thì xoá nó đi; sau đó xoá đỉnh cô lập (nếu có);

2. Không bao giờ đi qua một cầu, trừ phi không còn cách đi nào khác.

            Xuất phát từ u, ta có thể đi theo cạnh (u,v) hoặc (u,x), giả sử là (u,v) (xoá (u,v)). Từ v có thể đi qua một trong các cạnh (v,w), (v,x), (v,t), giả sử (v,w) (xoá (v,w)). Tiếp tục, có thể đi theo một trong các cạnh (w,s), (w,y), (w,z), giả sử (w,s) (xoá (w,s)). Đi theo cạnh (s,y) (xoá (s,y) và s). Vì (y,x) là cầu nên có thể đi theo một trong hai cạnh (y,w), (y,z), giả sử (y,w) (xoá (y,w)). Đi theo (w,z) (xoá (w,z) và w) và theo (z,y) (xoá (z,y) và z). Tiếp tục đi theo cạnh (y,x) (xoá (y,x) và y). Vì (x,u) là cầu nên đi theo cạnh (x,v) hoặc (x,t), giả sử (x,v) (xoá (x,v)). Tiếp tục đi theo cạnh (v,t) (xoá (v,t) và v), theo cạnh (t,x) (xoá cạnh (t,x) và t), cuối cung đi theo cạnh (x,u) (xoá (x,u), x và u).

**1.1.6. Bài toán người phát thư Trung Hoa:**

            Một nhân viên đi từ Sở Bưu Điện, qua một số đường phố để phát thư, rồi quay về Sở. Người ấy phải đi qua các đường theo trình tự nào để đường đi là ngắn nhất?

            Bài toán được nhà toán học Trung Hoa Guan nêu lên đầu tiên (1960), vì vậy thường được gọi là “bài toán người phát thư Trung Hoa”. Ta xét bài toán ở một dạng đơn giản như sau.

            Cho đồ thị liên thông G. Một chu trình qua mọi cạnh của G gọi là một hành trình trong G. Trong các hành trình đó, hãy tìm hành trình ngắn nhất, tức là qua ít cạnh nhất.

            Rõ ràng rằng nếu G là đồ thị Euler (mọi đỉnh đều có bậc chẵn) thì chu trình Euler trong G (qua mỗi cạnh của G đúng một lần) là hành trình ngắn nhất cần tìm.

            Chỉ còn phải xét trường hợp G có một số đỉnh bậc lẻ (số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn). Khi đó, mọi hành trình trong G phải đi qua ít nhất hai lần một số cạnh nào đó.

            Dễ thấy rằng một hành trình qua một cạnh (u,v) nào đó quá hai lần thì không phải là hành trình ngắn nhất trong G. Vì vậy, ta chỉ cần xét những hành trình T đi qua hai lần một số cạnh nào đó của G.

            Ta quy ước xem mỗi hành trình T trong G là một hành trình trong đồ thị Euler GT, có được từ G bằng cách vẽ thêm một cạnh song song đối với những cạnh mà T đi qua hai lần. Bài toán đặt ra được đưa về bài toán sau:

            Trong các đồ thị Euler GT, tìm đồ thị có số cạnh ít nhất (khi đó chu trình Euler trong đồ thị này là hành trình ngắn nhất).

**Định lý (Gooodman và Hedetniemi, 1973)**. Nếu G là một đồ thị liên thông có q cạnh thì hành trình ngắn nhất trong G có chiều dài

q + m(G),

trong đó m(G) là số cạnh mà hành trình đi qua hai lần và được xác định như sau:

            Gọi V0(G) là tập hợp các đỉnh bậc lẻ (2k đỉnh) của G. Ta phân 2k phần tử của G thành k cặp, mỗi tập hợp k cặp gọi là một phân hoạch cặp của V0(G).

            Ta gọi độ dài đường đi ngắn nhất từ u đến v là khoảng cách d(u,v). Đối với mọi phân hoạch cặp Pi, ta tính khoảng cách giữa hai đỉnh trong từng cặp, rồi tính tổng d(Pi). Số m(G) bằng cực tiểu của các d(Pi):

m(G)=min d(Pi).

**Thí dụ 2:** Giải bài toán người phát thư Trung Hoa cho trong đồ thị sau:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |

Tập hợp các đỉnh bậc lẻ VO(G)={B, G, H, K} và tập hợp các phân hoạch cặp là P={P1, P2, P3}, trong đó

            P1= {(B, G), (H, K)} → d(P1) = d(B, G)+d(H, K) = 4+1 = 5,

            P2= {(B, H), (G, K)} → d(P2) = d(B, H)+d(G, K) = 2+1 = 3,

            P3= {(B, K), (G, H)} → d(P3) = d(B, K)+d(G, H) = 3+2 = 5.

            m(G) = min(d(P1), d(P2), d(P3)) = 3.

            Do đó GT có được từ G bằng cách thêm vào 3 cạnh: (B, I), (I, H), (G, K) và GT là đồ thị Euler. Vậy hành trình ngắn nhất cần tìm là đi theo chu trình Euler trong GT:

A, B, C, D, E, F, K, G, K, E, C, J, K, H, J, I, H, I, B, I, A.

**1.1.7. Định lý:** Đồ thị có hướng liên thông yếu G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc vào bằng bậc ra.

**Chứng minh:** Chứng minh tương tự như chứng minh của Định lý 1.1.2 và điều kiện đủ cũng cần có bổ đề dưới đây tương tự như ở Bổ đề 1.1.3.

**1.1.8. Bổ đề:** Nếu bậc vào và bậc ra của mỗi đỉnh của đồ thị có hướng G không nhỏ hơn 1 thì G chứa chu trình đơn.

**1.1.9. Hệ quả:** Đồ thị có hướng liên thông yếu G là nửa Euler (mà không là Euler) khi và chỉ khi tồn tại hai đỉnh x và y sao cho:

deg­o(x) = degt(x)+1, degt(y) = dego(y)+1, degt(v) = dego(v),  với mọi v∈V, v ≠x, v ≠y.

**Chứng minh:** Chứng minh tương tự như ở Hệ quả 1.1.4.

**1.2. ĐƯỜNG ĐI HAMILTON VÀ ĐỒ THỊ HAMILTON .**

            Năm 1857, nhà toán học người Ailen là Hamilton (1805-1865) đưa ra trò chơi “đi vòng quanh thế giới” như sau.

            Cho một hình thập nhị diện đều (đa diện đều có 12 mặt, 20 đỉnh và 30 cạnh), mỗi đỉnh của hình mang tên một thành phố nổi tiếng, mỗi cạnh của hình (nối hai đỉnh) là đường đi lại giữa hai thành phố tương ứng. Xuất phát từ một thành phố, hãy tìm đường đi thăm tất cả các thành phố khác, mỗi thành phố chỉ một lần, rồi trở về chỗ cũ.

            Trước Hamilton, có thể là từ thời Euler, người ta đã biết đến một câu đố hóc búa về “đường đi của con mã trên bàn cờ”. Trên bàn cờ, con mã chỉ có thể đi theo đường chéo của hình chữ nhật 2 x 3 hoặc 3 x 2 ô vuông. Giả sử bàn cờ có 8 x 8 ô vuông. Hãy tìm đường đi của con mã qua được tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô chỉ một lần rồi trở lại ô xuất phát.

            Bài toán này được nhiều nhà toán học chú ý, đặc biệt là Euler, De Moivre, Vandermonde, ...

            Hiện nay đã có nhiều lời giải và phương pháp giải cũng có rất nhiều, trong đó có quy tắc: mỗi lần bố trí con mã ta chọn vị trí mà tại vị trí này số ô chưa dùng tới do nó khống chế là ít nhất.

            Một phương pháp khác dựa trên tính đối xứng của hai nửa bàn cờ. Ta tìm hành trình của con mã trên một nửa bàn cờ, rồi lấy đối xứng cho nửa bàn cờ còn lại, sau đó nối hành trình của hai nửa đã tìm lại với nhau.

            Trò chơi và câu đố trên dẫn tới việc khảo sát một lớp đồ thị đặc biệt, đó là đồ thị Hamilton .

**1.2.1. Định nghĩa:** Chu trình (t.ư. đường đi) sơ cấp chứa tất cả các đỉnh của đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) G được gọi là chu trình (t.ư. đường đi) Hamilton . Một đồ thị có chứa một chu trình (t.ư. đường đi) Hamilton được gọi là đồ thị Hamilton (t.ư. nửa Hamilton ).

**Thí dụ 3:**

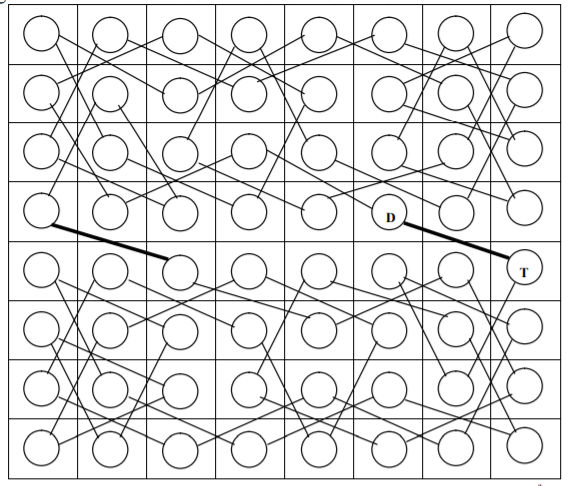
|  |
| --- |
|  |
|  |  |

**1)** Đồ thị Hamilton (hình thập nhị diện đều biểu diẽn trong mặt phẳng) với chu trình Hamilton A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, A (đường tô đậm).

**2)** Trong một đợt thi đấu bóng bàn có n (n ≥ 2) đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ gặp từng đấu thủ khác đúng một lần. Trong thi đấu bóng bàn chỉ có khả năng thắng hoặc thua. Chứng minh rằng sau đợt thi đấu có thể xếp tất cả các đấu thủ đứng thành một hàng dọc, để người đứng sau thắng người đứng ngay trước anh (chị) ta.

            Xét đồ thị có hướng G gồm n đỉnh sao cho mỗi đỉnh ứng với một đấu thủ và có một cung nối từ đỉnh u đến đỉnh v nếu đấu thủ ứng với u thắng đấu thủ ứng với v. Như vậy, đồ thị G có tính chất là với hai đỉnh phân biệt bất kỳ u và v, có một và chỉ một trong hai cung (u,v) hoặc (v,u), đồ thị như thế được gọi là đồ thị có hướng đầy đủ. Từ Mệnh đề 1.2.2 dưới đây, G là một đồ thị nửa Hamilton . Khi đó đường đi Hamilton trong G cho ta sự sắp xếp cần tìm.

**3)** Một lời giải về hành trình của con mã trên bàn cờ 8 x 8:



Đường đi Hamilton tương tự đường đi Euler trong cách phát biểu: Đường đi Euler qua mọi cạnh (cung) của đồ thị đúng một lần, đường đi Hamilton qua mọi đỉnh của đồ thị đúng một lần. Tuy nhiên, nếu như bài toán tìm đường đi Euler trong một đồ thị đã được giải quyết trọn vẹn, dấu hiệu nhận biết một đồ thị Euler là khá đơn giản và dễ sử dụng, thì các bài toán về tìm đường đi Hamilton và xác định đồ thị Hamilton lại khó hơn rất nhiều. Đường đi Hamilton và đồ thị Hamilton có nhiều ý nghĩa thực tiễn và đã được nghiên cứu nhiều, nhưng vẫn còn những khó khăn lớn chưa ai vượt qua được.

Người ta chỉ mới tìm được một vài điều kiện đủ để nhận biết một lớp rất nhỏ các đồ thị Hamilton và đồ thị nửa Hamilton . Sau đây là một vài kết quả.

**1.2.2. Định lý (Rédei):** Nếu G là một đồ thị có hướng đầy đủ thì G là đồ thị nửa Hamilton .

**Chứng minh:** Giả sử G=(V,E) là đồ thị có hướng đầy đủ và a=(v1,v2, ..., vk-1, vk) là đường đi sơ cấp bất kỳ trong đồ thị G.

Nếu a đã đi qua tất cả các đỉnh của G thì nó là một đường đi Hamilton của G.

Nếu trong G còn có đỉnh nằm ngoài a, thì ta có thể bổ sung dần các đỉnh này vào a và cuối cùng nhận được đường đi Hamilton .

       Thật vậy, giả sử v là đỉnh tuỳ ý không nằm trên a.

a) Nếu có cung nối v với v­1 thì bổ sung v vào đầu của đường đi a để được a1=(v, v1, v2, ..., vk-1, vk).

b) Nếu tồn tại chỉ số i (1 ≤ i ≤ k-1) mà từ vi có cung nối tới v và từ v có cung nối tới vi+1 thì ta chen v vào giữa vi và vi+1 để được đường đi sơ cấp a2=(v1, v2, ..., vi, v, vi+1, ..., vk).

c) Nếu cả hai khả năng trên đều không xảy ra nghĩa là với mọi i (1 ≤ i ≤ k) vi đều có cung đi tới v. Khi đó bổ sung v vào cuối của đường đi a và được đường đi a3=(v1, v2, ..., vk-1, vk, v).

            Nếu đồ thị G có n đỉnh thì sau n-k bổ sung ta sẽ nhận được đường đi Hamilton .

**1.2.3. Định lý (Dirac, 1952):** Nếu G là một đơn đồ thị có n đỉnh và mọi đỉnh của G đều có bậc không nhỏ hơn   thì G là một đồ thị Hamilton .

**Chứng minh:** Định lý được chứng minh bằng phản chứng. Giả sử G không có chu trình Hamilton . Ta thêm vào G một số đỉnh mới và nối mỗi đỉnh mới này với mọi đỉnh của G, ta được đồ thị G’. Giả sử k (>0) là số tối thiểu các đỉnh cần thiết để G’ chứa một chu trình Hamilton . Như vậy, G’ có n+k đỉnh.

|  |
| --- |
|  |
|  | https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image108.gif |

            Gọi P là chu trình Hamilton ayb ...a trong G’, trong đó a và b là các đỉnh của G, còn y là một trong các đỉnh mới. Khi đó b không kề với a, vì nếu trái lại thì ta có thể bỏ đỉnh y và được chu trình ab ...a, mâu thuẩn với giả thiết về tính chất nhỏ nhất của k.

            Ngoài ra, nếu a’ là một đỉnh kề nào đó của a (khác với y) và b’ là đỉnh nối tiếp ngay a’ trong chu trình P thì b’ không thể là đỉnh kề với b, vì nếu trái lại thì ta có thể thay P bởi chu trình aa’ ...bb’ ... a, trong đó không có y, mâu thuẩn với giả thiết về tính chất nhỏ nhất của k.

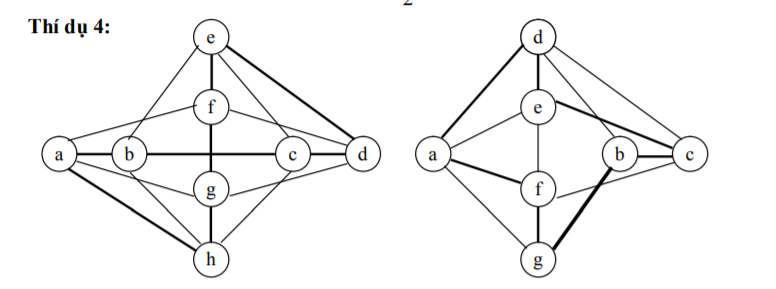
            Như vậy, với mỗi đỉnh kề với a, ta có một đỉnh không kề với b, tức là số đỉnh không kề với b không thể ít hơn số đỉnh kề với a (số đỉnh kề với a không nhỏ hơn    +k). Mặt khác, theo giả thiết số đỉnh kề với b cũng không nhỏ hơn    +k. Vì không có đỉnh nào vừa kề với b lại vừa không kề với b, nên số đỉnh của G’ không ít hơn 2(  +k)=n+2k, mâu thuẩn với giả thiết là số đỉnh của G’ bằng n+k (k>0). Định lý được chứng minh.

**1.2.4. Hệ quả:** Nếu G là đơn đồ thị có n đỉnh và mọi đỉnh của G đều có bậc không nhỏ hơn   thì G là đồ thị nửa Hamilton .

**Chứng minh:** Thêm vào G một đỉnh x và nối x với mọi đỉnh của G thì ta nhận được đơn đồ thị G’ có n+1 đỉnh và mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn . Do đó theo Định lý 1.2.3, trong G’ có một chu trình Hamilton. Bỏ x ra khỏi chu trình này, ta nhận được đường đi Hamilton trong G.

**1.2.5. Định lý ( Ore , 1960):**Nếu G là một đơn đồ thị có n đỉnh và bất kỳ hai đỉnh nào không kề nhau cũng có tổng số bậc không nhỏ hơn n thì G là một đồ thị Hamilton .

**1.2.6. Định lý:** Nếu G là đồ thị phân đôi với hai tập đỉnh là V1, V2 có số đỉnh cùng bằng n (n ≥ 2) và bậc của mỗi đỉnh lớn hơn  thì G là một đồ thị Hamilton .



Đồ thị G này có 8 đỉnh, đỉnh nào cũng           Đồ thị G’ này có 5 đỉnh bậc 4 và 2 đỉnh

có bậc 4, nên theo Định lý 1.2.3, G là            bậc 2 kề nhau nên tổng số bậc của hai đỉnh

đồ thị Hamilton .                                               không kề nhau bất kỳ bằng 7 hoặc 8, nên

                                                                        theo Định lý 1.2.5, G’ là đồ thị Hamilton .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image119.gif |  |  |
|  |  | |  | | --- | | Đồ thị phân đôi này có bậc của mỗi đỉnh bằng 2 hoặc 3 (> 3/2), nên theo Định lý 1.2.6, nó là đồ thị Hamilton . | |
|  |  |  |

**1.2.7. Bài toán sắp xếp chỗ ngồi:**

            Có n đại biểu từ n nước đến dự hội nghị quốc tế. Mỗi ngày họp một lần ngồi quanh một bàn tròn. Hỏi phải bố trí bao nhiêu ngày và bố trí như thế nào sao cho trong mỗi ngày, mỗi người có hai người kế bên là bạn mới. Lưu ý rằng n người đều muốn làm quen với nhau.

            Xét đồ thị gồm n đỉnh, mỗi đỉnh ứng với mỗi người dự hội nghị, hai đỉnh kề nhau khi hai đại biểu tương ứng muốn làm quen với nhau. Như vậy, ta có đồ thị đầy đủ Kn. Đồ thị này là Hamilton và rõ ràng mỗi chu trình Hamilton là một cách sắp xếp như yêu cầu của bài toán. Bái toán trở thành tìm các chu trình Hamilton phân biệt của đồ thị đầy đủ Kn (hai chu trình Hamilton gọi là phân biệt nếu chúng không có cạnh chung).

**Định lý:** Đồ thị đầy đủ Kn với n lẻ và n ≥ 3 có đúng     chu trình Hamilton phân biệt.

**Chứng minh:** Kn có     cạnh và mỗi chu trình Hamilton có n cạnh, nên số chu trình Hamilton phân biệt nhiều nhất là    .

|  |
| --- |
|  |
|  | https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image122.gif |

Giả sử các đỉnh của Kn là 1, 2, ..., n.  Đặt đỉnh 1 tại tâm của một đường tròn và các đỉnh 2, ..., n đặt cách đều nhau trên đường tròn (mỗi cung là 3600/(n-1) sao cho đỉnh lẻ nằm ở nửa đường tròn trên và đỉnh chẵn nằm ở nửa đường tròn dưới. Ta có ngay chu trình Hamilton đầu tiên là 1,2, ..., n,1. Các đỉnh được giữ cố định, xoay khung theo chiều kim đồng hồ với các góc quay:

https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image124.gif , 2. https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image124.gif , 3. https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image124.gif , ..., https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image126.gif . https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image124.gif ,

ta nhận được     khung phân biệt với khung đầu tiên. Do đó ta có     chu trình Hamilton phân biệt.

**Thí dụ 5:**Giải bài toán sắp xếp chỗ ngồi với n=11.

            Có (11-1)/2=5 cách sắp xếp chỗ ngồi phân biệt như sau:

1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  1

1  3  5  2  7  4  9  6  11  8  10  1

1  5  7  3  9  2  11  4  10  6  8  1

1  7  9  5  11  3  10  2  8  4  6  1

1  9  11  7  10  5  8  3  6  2  4  1

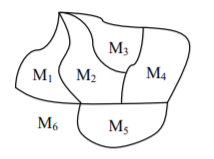
|  |
| --- |
|  |
|  | https://cuuduongthancong.com/d-img/giao-trinh-toan-roi-rac/giao-trinh-toan-roi-rac-ch4-do-thi-euler-va-do-thi-hamilton.html/image127.gif |

**1.3. Tô màu đồ thị**

1.3.1. Tô màu bản đồ:

Mỗi bản đồ có thể coi là một đồ thị phẳng. Trong một bản đồ, ta coi hai miền có chung nhau một đường biên là hai miền kề nhau (hai miền chỉ có chung nhau một điểm biên không được coi là kề nhau). Một bản đồ thường được tô màu, sao cho hai miền kề nhau được tô hai màu khác nhau. Ta gọi một cách tô màu bản đồ như vậy là một cách tô màu đúng. Để đảm bảo chắc chắn hai miền kề nhau không bao giờ có màu trùng nhau, chúng ta tô mỗi miền bằng một màu khác nhau. Tuy nhiên việc làm đó nói chung là không hợp lý. Nếu bản đồ có nhiều miền thì sẽ rất khó phân biệt những màu gần giống nhau. Do vậy người ta chỉ dùng một số màu cần thiết để tô bản đồ. Một bài toán được đặt ra là: xác định số màu tối thiểu cần có để tô màu đúng một bản đồ.

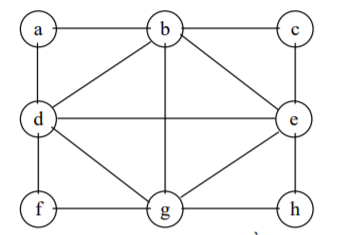
Thí dụ 6: Bản đồ trong hình bên có 6 miền, nhưng chỉ cần có 3 màu (vàng, đỏ, xanh) để tô đúng bản đồ này. Chẳng hạn, màu vàng được tô cho M1 và M4, màu đỏ được tô cho M2 và M6, màu xanh được tô cho M3 và M5.



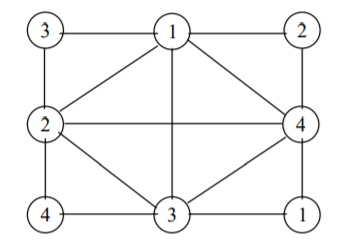
**1.3.2. Tô màu đồ thị:**

Mỗi bản đồ trên mặt phẳng có thể biểu diễn bằng một đồ thị, trong đó mỗi miền của bản đồ được biểu diễn bằng một đỉnh; các cạnh nối hai đỉnh, nếu các miền được biểu diễn bằng hai đỉnh này là kề nhau. Đồ thị nhận được bằng cách này gọi là đồ thị đối ngẫu của bản đồ đang xét. Rõ ràng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có đồ thị đối ngẫu phẳng. Bài toán tô màu các miền của bản đồ là tương đương với bài toán tô màu các đỉnh của đồ thị đối ngẫu sao cho không có hai đỉnh liền kề nhau có cùng một màu, mà ta gọi là tô màu đúng các đỉnh của đồ thị. Số màu ít nhất cần dùng để tô màu đúng đồ thị G được gọi là sắc số của đồ thị G và ký hiệu là χ(G).

**Thí dụ 7:**



Ta thấy rằng 4 đỉnh b, d, g, e đôi một kề nhau nên phải được tô bằng 4 màu khác nhau. Do đó χ(G) ≥ 4. Ngoài ra, có thể dùng 4 màu đánh số 1, 2, 3, 4 để tô màu G như sau:



Như vậy χ(G) = 4.

**1.3.3. Mệnh đề**

Nếu đồ thị G chứa một đồ thị con đồng phôi với đồ thị đầy đủ Kn thì χ(G) ≥ n. Chứng minh: Gọi H là đồ thị con của G đồng phôi với Kn thì χ(H) ≥ n. Do đó χ(G) ≥ n.

**1.3.4. Mệnh đề**

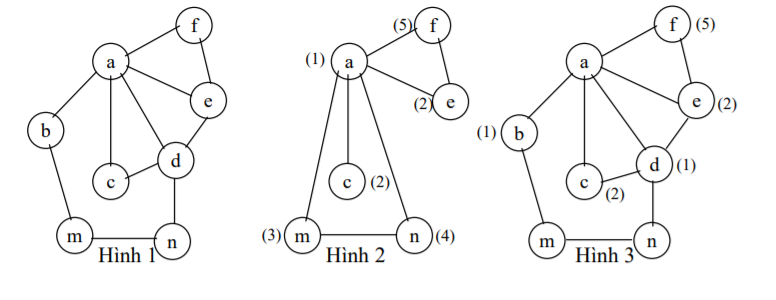
Nếu đơn đồ thị G không chứa chu trình độ dài lẻ thì χ(G) =2. Chứng minh: Không mất tính chất tổng quát có thể giả sử G liên thông. Cố định đỉnh u của G và tô nó bằng màu 0 trong hai màu 0 và 1. Với mỗi đỉnh v của G, tồn tại một đường đi từ u đến v, nếu đường này có độ dài chẵn thì tô màu 0 cho v, nếu đường này có độ dài lẻ thì tô màu 1 cho v. Nếu có hai đường đi mang tính chẵn lẻ khác nhau cùng nối u với v thì dễ thấy rằng G phải chứa ít nhất một chu trình độ dài lẻ. Điều mâu thuẫn này cho biết hai màu 0 và 1 tô đúng đồ thị G.

**1.3.5. Mệnh đề**

Với mỗi số nguyên dương n, tồn tại một đồ thị không chứa K3 và có sắc số bằng n. Chứng minh: Ta chứng minh mệnh đề bằng quy nạp theo n. Trường hợp n=1 là hiển nhiên. Giả sử ta có đồ thị Gn với kn đỉnh, không chứa K3 và có sắc số là n. Ta xây dựng đồ thị Gn+1 gồm n bản sao của Gn và thêm kn n đỉnh mới theo cách sau: mỗi bộ thứ tự (v1, v2, …, vn), với vi thuộc bản sao Gn thứ i, sẽ tương ứng với một đỉnh mới, đỉnh mới này được nối bằng n cạnh mới đến các đỉnh v1, v2, …, vn. Dễ thấy rằng Gn+1 không chứa K3 và có sắc số là n+1.

**1.3.6. Định lý (Định lý 5 màu của Kempe-Heawood)**

Mọi đồ thị phẳng đều có thể tô đúng bằng 5 màu. Chứng minh: Cho G là một đồ thị phẳng. Không mất tính chất tổng quát có thể xem G là liên thông và có số đỉnh n ≥ 5. Ta chứng minh G được tô đúng bởi 5 màu bằng quy nạp theo n. Trường hợp n=5 là hiển nhiên. Giả sử định lý đúng cho tất cả các đồ thị phẳng có số đỉnh nhỏ hơn n. Xét G là đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh. Theo Hệ quả 1.1.4, trong G tồn tại đỉnh a với deg(a) ≤ 5. Xoá đỉnh a và các cạnh liên thuộc với nó, ta nhận được đồ thị phẳng G’ có n−1 đỉnh. Theo giả thiết quy nạp, có thể tô đúng các đỉnh của G’ bằng 5 màu. Sau khi tô đúng G’ rồi, ta tìm cách tô đỉnh a bằng một màu khác với màu của các đỉnh kề nó, nhưng vẫn là một trong 5 màu đã dùng. Điều này luôn thực hiện được khi deg(a) < 5 hoặc khi deg(a)=5 nhưng 5 đỉnh kề a đã được tô bằng 4 màu trở xuống. Chỉ còn phải xét trường hợp deg(a)=5 mà 5 đỉnh kề a là b, c, d, e ,f đã được tô bằng 5 màu rồi. Khi đó trong 5 đỉnh b, c, d, e ,f phải có 2 đỉnh không kề nhau, vì nếu 5 đỉnh đó đôi một kề nhau thì b c d e f là đồ thị đầy đủ K5 và đây là một đồ thị không phẳng, do đó G không phẳng, trái với giả thiết. Giả sử b và d không kề nhau (Hình 1).

..

Xoá 2 đỉnh b và d và cho kề a những đỉnh trước đó kề b hoặc kề d mà không kề a (Hình 2), ta được đồ thị mới G’’ có n−2 đỉnh. Theo giả thiết quy nạp, ta có thể tô đúng G’’ bằng 5 màu. Sau khi các đỉnh của G’’ được tô đúng rồi (Hình 2), ta dựng lại 2 đỉnh b và d, rồi tô b và d bằng màu đã tô cho a (màu 1, Hình 3), còn a thì được tô lại bằng màu khác với màu của b, c, d, e, f. Vì b và d không kề nhau đã được tô bằng cùng màu 1, nên với 5 đỉnh này chỉ mới dùng hết nhiều lắm 4 màu.. Do đó G được tô đúng bằng 5 màu.

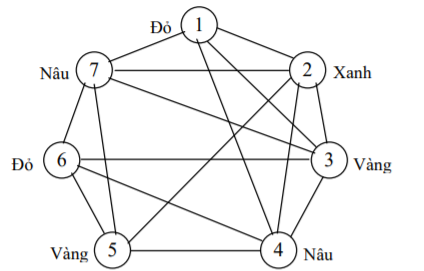
**1.3.7. Định lý (Định lý 4 màu của Appel-Haken)**

Mọi đồ thị phẳng đều có thể tô đúng bằng 4 màu.

**Định lý Bốn màu** đầu tiên được đưa ra như một phỏng đoán vào năm 1850 bởi một sinh viên người Anh tên là F. Guthrie và cuối cùng đã được hai nhà toán học Mỹ là Kenneth Appel và Wolfgang Haken chứng minh vào năm 1976. Trước năm 1976 cũng đã có nhiều chứng minh sai, mà thông thường rất khó tìm thấy chỗ sai, đã được công bố. Hơn thế nữa đã có nhiều cố gắng một cách vô ích để tìm phản thí dụ bằng cách cố vẽ bản đồ cần hơn bốn màu để tô nó. Có lẽ một trong những chứng minh sai nổi tiếng nhất trong toán học là chứng minh sai “bài toán bốn màu” được công bố năm 1879 bởi luật sư, nhà toán học nghiệp dư Luân Đôn tên là Alfred Kempe. Nhờ công bố lời giải của “bài toán bốn màu”, Kempe được công nhận là hội viên Hội Khoa học Hoàng gia Anh. Các nhà toán học chấp nhận cách chứng minh của ông ta cho tới 1890, khi Percy Heawood phát hiện ra sai lầm trong chứng minh của Kempe. Mặt khác, dùng phương pháp của Kempe, Heawood đã chứng minh được “bài toán năm màu” (tức là mọi bản đồ có thể tô đúng bằng 5 màu). Như vậy, Heawood mới giải được “bài toán năm màu”, còn “bài toán bốn màu” vẫn còn đó và là một thách đố đối với các nhà toán học trong suốt gần một thế kỷ. Việc tìm lời giải của “bài toán bốn màu” đã ảnh hưởng đến sự phát triển theo chiều hướng khác nhau của lý thuyết đồ thị. Mãi đến năm 1976, khai thác phương pháp của Kempe và nhờ công cụ máy tính điện tử, Appel và Haken đã tìm ra lời giải của “bài toán bốn màu”. Chứng minh của họ dựa trên sự phân tích từng trường hợp một cách cẩn thận nhờ máy tính. Họ đã chỉ ra rằng nếu “bài toán bốn màu” là sai thì sẽ có một phản thí dụ thuộc một trong gần 2000 loại khác nhau và đã chỉ ra không có loại nào dẫn tới phản thí dụ cả. Trong chứng minh của mình họ đã dùng hơn 1000 giờ máy. Cách chứng minh này đã gây ra nhiều cuộc tranh cãi vì máy tính đã đóng vai trò quan trọng biết bao. Chẳng hạn, liệu có thể có sai lầm trong chương trình và điều đó dẫn tới kết quả sai không? Lý luận của họ có thực sự là một chứng minh hay không, nếu nó phụ thuộc vào thông tin ra từ một máy tính không đáng tin cậy?

**1.3.8. Những ứng dụng của bài toán tô màu đồ thị**

*1) Lập lịch thi:* Hãy lập lịch thi trong trường đại học sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng một lúc. Có thể giải bài toán lập lịch thi bằng mô hình đồ thị, với các đỉnh là các môn thi, có một cạnh nối hai đỉnh nếu có sinh viên phải thi cả hai môn được biểu diễn bằng hai đỉnh này. Thời gian thi của mỗi môn được biểu thị bằng các màu khác nhau. Như vậy việc lập lịch thi sẽ tương ứng với việc tô màu đồ thị này. Chẳng hạn, có 7 môn thi cần xếp lịch. Giả sử các môn học đuợc đánh số từ 1 tới 7 và các cặp môn thi sau có chung sinh viên: 1 và 2, 1 và 3, 1 và 4, 1 và 7, 2 và 3, 2 và 4, 2 và 5, 2 và 7, 3 và 4, 3 và 6, 3 và 7, 4 và 5, 4 và 6, 5 và 6, 5 và 7, 6 và 7. Hình dưới đây biểu diễn đồ thị tương ứng. Việc lập lịch thi chính là việc tô màu đồ thị này. Vì số màu của đồ thị này là 4 nên cần có 4 đợt thi.



*2) Phân chia tần số*: Các kênh truyền hình từ số 1 tới số 12 được phân chia cho các đài truyền hình sao cho không có đài phát nào cách nhau không quá 240 km lại dùng cùng một kênh. Có thể chia kênh truyền hình như thế nào bằng mô hình tô màu đồ thị. Ta xây dựng đồ thị bằng cách coi mỗi đài phát là một đỉnh. Hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh nếu chúng ở cách nhau không quá 240 km. Việc phân chia kênh tương ứng với việc tô màu đồ thị, trong đó mỗi màu biểu thị một kênh.

*3) Các thanh ghi chỉ số:* Trong các bộ dịch hiệu quả cao việc thực hiện các vòng lặp được tăng tốc khi các biến dùng thường xuyên được lưu tạm thời trong các thanh ghi chỉ số của bộ xử lý trung tâm (CPU) mà không phải ở trong bộ nhớ thông thường. Với một vòng lặp cho trước cần bao nhiêu thanh ghi chỉ số? Bài toán này có thể giải bằng mô hình tô màu đồ thị. Để xây dựng mô hình ta coi mỗi đỉnh của đồ thị là một biến trong vòng lặp. Giũa hai đỉnh có một cạnh nếu các biến biểu thị bằng các đỉnh này phải được lưu trong các thanh ghi chỉ số tại cùng thời điểm khi thực hiện vòng lặp. Như vậy số màu của đồ thị chính là số thanh ghi cần có vì những thanh ghi khác nhau được phân cho các biến khi các đỉnh biểu thị các biến này là liền kề trong đồ thị.

Nội dung 2: ứng dụng

Trình bày bài toán: BÀI TOÁN NGƯỜI ĐƯA THƯ VÀ ỨNG DỤNG TÌM LỘ TRÌNH XE THU GOM RÁC TỐI ƯU

Tóm tắt. Bài toán người đưa thư là một trong số những bài toán tối ưu trên đồ thị được ứng dụng rộng rãi trong thực tế. Các bài toán đặt ra trong các ứng dụng như vậy thường có cơ sở dữ liệu lớn nên việc rút ngắn thời gian tính toán để trả lời một câu truy vấn có ý nghĩa thực tiễn cao. Kết quả chính của bài báo là tìm hiểu thuật toán giải bài toán người đưa thư và công nghệ số hóa bản đồ, từ đó xây dựng ứng dụng tìm kiếm lộ trình thu gom rác tối ưu trên bản đồ số.

Cuộc sống con người ngày càng được cải thiện và nâng cao chất lượng, cùng với sự phát triển đó thì lượng rác thải hàng ngày mà chúng ta thải ra môi trường cũng ngày càng nhiều hơn. Một trong các cách để thu gom rác hiệu quả là sử dụng xe chở rác. Tuy nhiên với mạng lưới giao thông phức tạp và chằng chéo nhau t thì việc di chuyển qua lại quá nhiều sẽ ảnh hưởng đến giao thông cũng như các lợi ích kinh tế. Vấn đề đặt ra là tìm hành trình tối ưu sao cho đường đi của xe rác là ngắn nhất. Các bài toán đặt ra trong các ứng dụng như vậy thường có cơ sở dữ liệu lớn nên việc rút ngắn thời gian tính toán để trả lời một câu truy vấn có ý nghĩa thực tiễn cao. Ngoài ra, trong thực tế, các đồ thị được sử dụng trong các bài toán có thể liên tục thay đổi theo thời gian. Mỗi lần có một thay đổi như vậy cấu trúc dữ liệu của bài toán, thông tin về các đỉnh cũng như các cạnh cũng bị thay đổi theo. Một cách tiếp cận để giải quyết các bài toán trên đồ thị động là sử dụng các cấu trúc dữ liệu và thuật toán truyền thống trong đồ thị tĩnh và chạy lại chúng mỗi khi có sự thay đổi trong đồ thị.

Bài toán: Nhân viên bưu điện nhận thư ở bưu cục, sau đó đi qua tất cả tuyến phố thuộc khối phố của mình phát thư rồi quay lại bưu cục. Tìm lộ trình ngắn nhất cho người đưa thư. Bài toán đường đi xe thu gom rác cũng có thể phát biểu tương tự: Xe rác xuất phát từ bãi đỗ phải đi thu gom rác qua các tuyến phố mà nó phụ trách, chở rác đến bãi rác, sau đó quay về bãi đỗ. Tìm lộ trình ngắn nhất cho xe rác.

Ý tưởng thuật toán Cho G=(V,E,w) là đồ thị biểu diễn bản đồ đường phố. Nếu các đỉnh của G đều có bậc chẵn, thì tồn tại chu trình Euler, và đó là lộ trình tối ưu [1]. Ngược lại ta phân tích như sau: - Ký hiệu U là tập tất cả đỉnh bậc lẻ. Số đỉnh của U là số chẵn, |U| = 2k. Ký hiệu s là tập các phân hoạch k cặp phần tử của U. - Với mỗi phân hoạch s gồm k cặp phần tử của U, ta nối mỗi cặp đỉnh bằng một cạnh phụ với trọng số là độ dài đường đi ngắn nhất của chúng [1]. Đồ thị nhận được sau khi nối cạnh phụ là G’. Các đỉnh trong G’ có bậc chẵn nên G’ có chu trình Euler. Thay các cạnh phụ bằng đường đi ngắn nhất ta nhận được lộ trình ứng với phân hoạch s. So sánh độ dài các lộ trình, ta tìm được lộ trình tối ưu.

**Thuật toán**

• Đầu vào: Đồ thị có trọng số G=(V,E,w).

• Đầu ra: Lộ trình tối ưu.

• Thuật toán:

*Bước 1.* Khởi tạo. Tìm tập đỉnh bậc lẻ U. Giả sử |U| = 2k. Tính khoảng cách d(u,v) cho từng cặp phần tử (u,v) của U (sử dụng thuật toán Floyd-Warshall hoặc Dijkstra) [1]. Đặt min = ∞.

*Bước 2*. Tìm phân hoạch smin có tổng khoảng cách nhỏ nhất. Với mỗi phân hoạch s gồm k cặp phần tử của U thực hiện: {Tính tổng T(s) = ∑∈svuvud),(),( Nếu T(s) < min, thì đặt min:= T(s) và smin:= s;}

*Bước 3.* Lập đồ thị G’ = (V, E’), trong đó E’ = E∪smin. Các đỉnh trong G’ có bậc chẵn, suy ra đồ thị G’ có chu trình Euler [1]. Tìm chu trình Euler C’ của G’.

*Bước 4.* Thay mỗi cạnh (u,v) ∈ smin bằng đường đi ngắn nhất trong G, ta nhận được lộ trình đưa thư ngắn nhất.

**Source\_code**

Lời giải là một quy trình gồm ba bước:

1. Xác định xem biểu đồ có Đường Eularian hay không
2. Tạo đồ thị phi Eularian với chi phí tối thiểu
3. Tìm con đường Eularian giả mạo

**Giải quyết chi phí tối thiểu**

Để chuyển đổi một biểu đồ không phải hoặc bán Eularian thành một đồ thị Eularian, bạn phải loại bỏ các nút lẻ (các nút có số cạnh lẻ).

Để loại bỏ một nút lẻ, bạn cần phải thêm một cạnh khác vào đó (về cơ bản là thực hiện lại các bước của bạn.) Tuy nhiên, điều này đi kèm với chi phí! Mục tiêu sau đó là tìm ra các cạnh lặp lại, loại bỏ tất cả các nút lẻ, với chi phí tối thiểu.

1. Tìm tất cả các kết hợp có thể có của các cặp nút lẻ
2. Sử dụng Thuật toán Dijkstra, tìm chi phí của đường đi nhỏ nhất giữa các cặp đó
3. Tìm tập hợp các đường dẫn (tùy thuộc vào số lượng nút lẻ bạn có) dẫn đến tổng chi phí ít nhất
4. Sửa đổi biểu đồ của bạn với các cạnh song song mới này

Bây giờ bạn có một đồ thị Eularian chỉ với các nút chẵn, mà có thể tìm thấy một chu trình Euler.

**Giải chu trình Eularian**

Lúc đầu, ta chỉ đơn giản là đi theo các cạnh một cách ngẫu nhiên cho đến khi ta tình cờ tìm thấy một tuyến đường cụt hoặc dẫn đến một chu trinhg. Sau đó, ta thực hiện Thuật toán Fleury nói rằng luôn chọn một cây cầu không qua một cây cầu (vì những lý do rõ ràng). Bây giờ cần rất ít nỗ lực để giải quyết hầu hết các chu trình.

Sau đó, ta sẽ triển khai một phương pháp tìm mạch thay thế (của Hierholzer?)