1. Θεωρητικό Υπόβαθρο

1.1. Εισαγωγή στη μηχανική επαφής

Η μοντελοποίηση της επαφής μεταξύ σωμάτων αποτελεί ένα από τα πλέον κρίσιμα και σύνθετα ζητήματα στη μηχανική πολυσώματων συστημάτων (multibody dynamics), αλλά και στη μηχανική στερεών γενικότερα, ειδικά σε εφαρμογές υψηλών απαιτήσεων όπως η αλληλεπίδραση τροχού–ράγας σε σιδηροδρομικά συστήματα. Το πρόβλημα της επαφής εδράζεται πρωτίστως στη θεμελιώδη συνθήκη μη διείσδυσης (non-penetration condition), σύμφωνα με την οποία δύο στερεά σώματα δεν μπορούν να καταλάβουν τον ίδιο χώρο. Η συνθήκη αυτή μπορεί να επιβληθεί με διάφορους υπολογιστικούς μηχανισμούς, όπως η μέθοδος ποινής (penalty method), οι πολλαπλασιαστές Lagrange και οι υβριδικές τεχνικές augmented Lagrangian, κάθε μία με διαφορετικό βαθμό ακρίβειας και υπολογιστικού κόστους [1–3].

Πέρα από την επιβολή της γεωμετρικής συνθήκης, η ακριβής περιγραφή της δύναμης επαφής απαιτεί την επιλογή κατάλληλου φυσικού μοντέλου (constitutive law). Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι παράμετροι επαφής, όπως η δυσκαμψία και η απόσβεση, οι οποίες μπορούν να εκτιμηθούν είτε θεωρητικά είτε πειραματικά [4–6].

Επιπλέον, η προσομοίωση επαφής είναι κατ' ουσίαν μια επαναληπτική διαδικασία: ξεκινά με την υφιστάμενη γεωμετρία, ελέγχει για επαφή, υπολογίζει τις αντίστοιχες δυνάμεις, λύνει τις εξισώσεις ελαστικότητας ή δυναμικής και ενημερώνει τη γεωμετρία μέχρι να επιτευχθεί ισορροπία.

Ιδιαίτερη δυσκολία παρουσιάζει η αποτίμηση των μηχανισμών μεταφοράς και απώλειας ενέργειας, όπως η υστέρηση (hysteresis loop) στα διαγράμματα δύναμης–διείσδυσης [7–9]. Ως εκ τούτου, η ακριβής μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωμάτων επαφής είναι καθοριστική για την αξιόπιστη ανάλυση και βελτιστοποίηση της συμπεριφοράς πολυσώματων συστημάτων.

1.1.1. Γεωμετρική Συνθήκη Μη Διείσδυσης

Η φυσική αρχή της μη διείσδυσης μεταφράζεται μαθηματικά στην έννοια του κενώματος (gap function). Θεωρούμε δύο σώματα, Α και Β, και ψάχνουμε να ορίσουμε την απόσταση μεταξύ τους.

Ο πιο κοινός τρόπος για τον ορισμό του g βασίζεται στην έννοια της κοντινότερης απόστασης (minimum distance). Για ένα δοκιμαστικό σημείο x που ανήκει στην επιφάνεια του σώματος Β, ορίζουμε το gap function ως την απόσταση από το x προς την επιφάνεια του σώματος Α:

$$g(x) = (x - \bar{x}) \cdot n(\bar{x})$$

όπου:

- $\bar{x}$ είναι το σημείο στην επιφάνεια του σώματος A που βρίσκεται πλησιέστερα στο x (closest point projection).
- $n(\bar{x})$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του A στο σημείο $\bar{x}$.

Ερμηνεία του g:

- $g > 0$: Τα σώματα δεν βρίσκονται σε επαφή. Η τιμή του g αντιπροσωπεύει το πραγματικό κενό μεταξύ τους.
- $g = 0$: Τα σώματα έρχονται ακριβώς σε επαφή ("just contact").
- $g < 0$: Υπάρχει διείσδυση (penetration) του σημείου x μέσα στο σώμα A. Αυτή είναι η κατάσταση που πρέπει να αντιμετωπιστεί αλγοριθμικά.

Όταν $g \leq 0$, αναπτύσσεται μια δύναμη επαφής που αντιστέκεται στη διείσδυση. Στη μηχανική πολυσώματων συστημάτων, αυτή η δύναμη συχνά αναπαρίσταται ως ένας πολλαπλασιαστής Lagrange, που συμβολίζεται με λ_N.

- λ_N: Αντιπροσωπεύει το μέγεθος της καθέτου αντίδρασης (normal contact force). Είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.
- Φυσική Σημασία: λ_N είναι η πίεση ή η συνολική δύναμη που ασκείται αμοιβαία μεταξύ των σωμάτων στην κατεύθυνση της κάθετης.

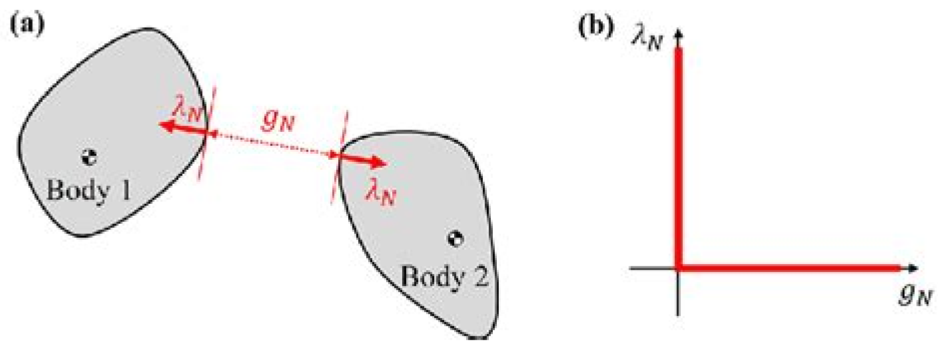
Η σχέση μεταξύ του γεωμετρικού κενώματος g και της δύναμης λ_N δεν είναι απλή γραμμική σχέση, αλλά μια σχέση συμπληρωματικότητας. Αυτές οι συνθήκες για το πρόβλημα επαφής, διατυπώνονται ως εξής:

$$g \geq 0, \quad \lambda_N \geq 0, \quad g \cdot \lambda_N = 0$$

Αναλυτική Ερμηνεία:

1. $g \geq 0$: Το κενό πρέπει να είναι μη αρνητικό (μη διείσδυση).
2. $\lambda_N \geq 0$: Η δύναμη επαφής μπορεί μόνο να απωθεί (δεν υπάρχει "κόλληση" μεταξύ των σωμάτων).
3. $g \cdot \lambda_N = 0$: Αυτή είναι η κρίσιμη συνθήκη. Σημαίνει ότι σε κάθε χρονική στιγμή, το g και το λNλ*N* δεν μπορούν να είναι και τα δύο μη μηδενικά ταυτόχρονα.
   - Αν $g \geq 0$ (δεν υπάρχει επαφή), τότε πρέπει $\lambda_N = 0$ (δεν ασκείται δύναμη).
   - Αν $\lambda_N > 0$ (ασκείται δύναμη επαφής), τότε πρέπει $g = 0$ (τα σώματα είναι σε ακριβή επαφή, χωρίς διείσδυση).

Αυτό το σύνολο των ανισοτήτων και της εξίσωσης αποτελεί τον πυρήνα του προβλήματος μηχανικής επαφής και είναι γνωστό ως Signorini's problem ή normal contact problem.



Αυτή η διατύπωση είναι ουσιαστικά ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς, όπου το σύστημα "επιλέγει" την τιμή της δύναμης λ_N έτσι ώστε να ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες, με δεδομένη την κινηματική του κατάσταση.

1.1.2. Αλγοριθμικές Μέθοδοι Επίλυσης της Συνθήκης Επαφής

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος Signorini:

$$g \geq 0, \quad \lambda_N \geq 0, \quad g \cdot \lambda_N = 0$$

αποτελεί ένα Πρόβλημα Γραμμικής Συμπληρωματικότητας (Linear Complementarity Problem - LCP). Η επίλυσή του σε ένα ψηφιακό περιβάλλον απαιτεί ειδικούς αλγοριθμικούς μηχανισμούς. Οι πιο κύριες μέθοδοι είναι οι ακόλουθες:

α) Μέθοδος των Πολλαπλασιαστών Lagrange (Lagrange Multipliers Method)

Αυτή η μέθοδος εισάγει τις δυνάμεις επαφής (λ_N) ως πρωταρχικές μεταβλητές του συστήματος, ακριβώς ίσες με τους πολλαπλασιαστές Lagrange που απαιτούνται για την επιβολή του περιορισμού $g \geq 0$.

Μηχανισμός

Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος διατυπώνονται λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς επαφής μέσω της συνάρτησης Lagrangian:

$$\mathcal{L}(u, \lambda_N) = \frac{1}{2}u^T K u - u^T f + \lambda_N g(u)$$

όπου u είναι οι μετατοπίσεις, K η μήτρα δυσκαμψίας, f οι εξωτερικές δυνάμεις και $g(u)$ η συνάρτηση περιορισμού για την επαφή. Η λύση δίνει ταυτόχρονα τις μετατοπίσεις και τις δυνάμεις λ_N.

Πλεονέκτημα

- Επιβάλλει ακριβώς τη συνθήκη $g = 0$ (ή $g \geq 0$), χωρίς γεωμετρική διείσδυση. Είναι μαθηματικά αυστηρή.

Μειονέκτημα

- Αυξάνει το μέγεθος του συστήματος εξισώσεων (περισσότεροι άγνωστοι).
- Μπορεί να οδηγήσει σε ασυνεχή δυνάμεις κατά το “engagement” ή “release” της επαφής.
- Η μήτρα του συστήματος μπορεί να αλλάξει δομή, απαιτώντας ειδικούς επιλύτες.

β) Μέθοδος Ποινής (Penalty Method)

Αυτή είναι μια ευρέως χρησιμοποιούμενη, διαισθητική μέθοδος που επιτρέπει μια μικρή γεωμετρική διείσδυση ($g < 0$) και την “τιμωρεί” με μια ανάλογη δύναμη.

Μηχανισμός

Η κάθετη δύναμη επαφής υπολογίζεται σαν να υπάρχει ένα ελατήριο στο σημείο επαφής:

$$\lambda_N = k_N \cdot \langle -g \rangle$$

όπου:

- k_N είναι ο συντελεστής ποινής (penalty stiffness) — μια πολύ μεγάλη τιμή που προσομοιώνει την ακαμψία του σώματος.
- $\langle -g \rangle$ είναι οι βραχίονες του Macaulay, δηλαδή:

$$\langle -g \rangle = \begin{cases} -g, & g < 0 \\ 0, & g \geq 0 \end{cases}$$

Πλεονέκτημα

- Διατηρεί το μέγεθος του συστήματος εξισώσεων αναλλοίωτο (δεν προσθέτει νέους αγνώστους).
- Υπολογιστικά αποδοτική και εύκολη στην υλοποίηση.
- Παρέχει συνεχείς δυνάμεις.

Μειονέκτημα

- Η ακρίβεια εξαρτάται κρίσιμα από την επιλογή του k_N.
- Πάντα υπάρχει μια μικρή διείσδυση:

$$\delta = -g = \frac{\lambda_N}{k_N}$$

Για μεγάλο k_N μειώνεται η διείσδυση, αλλά το σύστημα εξισώσεων γίνεται δυσκαμπτό (numerically stiff) και ασταθές. - Η επιλογή του βέλτιστου k_N είναι συχνά προβληματική.

γ) Ενισχυμένη Μέθοδος Lagrange (Augmented Lagrangian Method)

Αυτή η μέθοδος είναι ένας υβριδικός αλγόριθμος που συνδυάζει τα πλεονεκτήματα των δύο προηγούμενων. Στόχος είναι να "διορθώσει" τη λύση της μεθόδου ποινής, εξαναγκάζοντας τη διείσδυση να τείνει στο μηδέν μέσω επαναλήψεων.

Μηχανισμός

Χρησιμοποιείται ένας επαναληπτικός βρόχος διόρθωσης. Σε κάθε βήμα (ή επανάληψη) k, η δύναμη επαφής υπολογίζεται ως:

$$\lambda_N^{(k+1)} = \max\left(0,\, \lambda_N^{(k)} + k_N \cdot (-g^{(k+1)})\right)$$

Αρχικά ($k = 0$), $\lambda_N^{(0)} = 0$. Η πρώτη εκτίμηση είναι η μέθοδος ποινής.

Σε κάθε επόμενη επανάληψη, η διείσδυση $(-g)$ "πολλαπλασιάζεται" με το k_N και προστίθεται στην προηγούμενη εκτίμηση της δύναμης. Η λειτουργία $\max(0, \dots)$ εγγυάται ότι η δύναμη παραμένει απωστική.

Πλεονέκτημα

- Ακρίβεια: Μπορεί να επιτύχει ικανοποιητική ακρίβεια (μικρή διείσδυση) χωρίς την ανάγκη για εξαιρετικά μεγάλο k_N.
- Σταθερότητα: Είναι πιο αριθμητικά σταθερή από την καθαρή μέθοδο ποινής με υψηλή δυσκαμψία.
- Ευελιξία: Επιτρέπει τον έλεγχο της ακρίβειας μέσω του αριθμού των επαναλήψεων.

Μειονέκτημα

- Απαιτεί επιπλέον υπολογιστικό κόστος λόγω των επαναλήψεων.

1.1.3. Επαφή κατά Hertz (ελαστική μέθοδος)

Το 1882, εισήχθη μία θεωρία μοντελοποίησης της μηχανικής επαφής η οποία λαμβάνει υπόψη το σχήμα των επιφανειών στην περιοχή επαφής. Αυτή η θεωρία, γνωστή ως θεωρία του Hertz [1], είναι θεμελιώδης για την κατανόηση της επαφής τροχού-ράγας και έχει σημαντικές εφαρμογές στη μηχανική και τις μεταφορές.

Βασικές Υποθέσεις

- Συνεχείς και λείες επιφάνειες: Οι επιφάνειες είναι ακριβώς καθορισμένες γεωμετρικά (χωρίς τραχύτητα) και αρχικά εφάπτονται σε ένα σημείο (ή γραμμή για κυλινδρικές γεωμετρίες).
- Μικρές παραμορφώσεις: Η παραμόρφωση λόγω επαφής είναι πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις των σωμάτων.

- Τοπική επίδραση: Η κατανομή τάσεων επηρεάζει μόνο μια μικρή περιοχή γύρω από το σημείο επαφής.
- Απουσία τριβής: Θεωρείται μόνο κανονική (normal) δύναμη, χωρίς διατμητικές τάσεις.
- Γραμμική ελαστικότητα: Τα υλικά υπακούν στο νόμο του Hooke, χωρίς πλαστικές παραμορφώσεις.

Γεωμετρικά και Υλικά Μεγέθη

Για την επαφή, οι δύο εξωτερικές επιφάνειες του τροχού και της ράγας προσεγγίζονται ως δύο ελλειψοειδή με ισοδύναμες ακτίνες, οι οποίες περιγράφονται από τις ακτίνες R_w, R_r. Οι ακτίνες καμπυλότητας στις δύο κάθετες διευθύνσεις (x, y) υπολογίζονται από:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{1x}} + \frac{1}{R_{2x}}, \quad \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{1y}} + \frac{1}{R_{2y}}$$

όπου οι δείκτες 1 και 2 αφορούν τον τροχό και τη ράγα αντίστοιχα.

Ισοδύναμο Μέτρο Ελαστικότητας

Το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας των δύο σωμάτων δίνεται από:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

όπου E_1, E_2 τα μέτρα ελαστικότητας και ν_1, ν_2 οι λόγοι Poisson.

Ελλειπτική Περιοχή Επαφής

Η περιοχή που υπόκειται σε φορτίο θεωρείται ότι αποτελεί μια μικρή ελλειπτική περιοχή. Το εμβαδόν της περιοχής επαφής δίνεται από:

$$A = \pi ab$$

όπου a και b είναι οι ημιάξονες της ελλειπτικής περιοχής επαφής.

Οι ημιάξονες αυτοί υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$a = \left(\frac{3F_N R^*}{2E^*} \cdot \frac{1}{k}\right)^{1/3}$$

$$b = k \cdot a$$

όπου F_N η κανονική δύναμη επαφής, R^* η ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας, k ο λόγος των ημιάξονων, ο οποίος εξαρτάται από τις τοπικές ακτίνες καμπυλότητας.

Στην απλή περίπτωση που οι ακτίνες είναι ίσες ($R_x = R_y$), τότε $a = b$ και η περιοχή επαφής είναι κυκλική.

Μέγιστη Τάση Επαφής

Η μέγιστη πίεση στην περιοχή επαφής δίνεται από:

$$p_0 = \frac{3F_N}{2\pi ab}$$

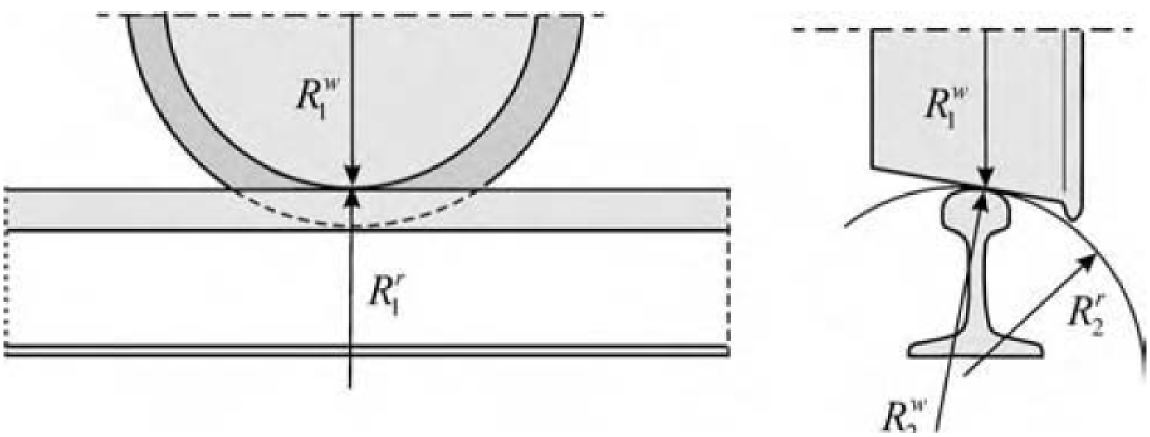
Κατανομή Τάσεων

Η κατανομή της πίεσης μέσα στην περιοχή επαφής είναι ελλειπτική:

$$p(x,y) = p_0\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

Σχήμα 0.1:

Παρακάτω ακολουθεί ένα σχήμα δομής της μοντελοποίησης για την περίπτωση διεπαφής τροχού-ράγας:



Εικόνα 2.1.1.1Ορισμός ακτινών για τη μοντελοποίηση Hertz

Παρότι η μέθοδος Hertz είναι αποτελεσματική για σφαιρικές ή απλές γεωμετρίες, στην επαφή τροχού-ράγας εμφανίζονται σημαντικοί περιορισμοί:

- Δυναμική Μεταβολή Γεωμετρίας: Η κωνικότητα του τροχού και η καμπυλότητα της ράγας οδηγούν σε συνεχή μεταβολή των ισοδύναμων ακτίνων R_w, R_r κατά τη διάρκεια κύλισης. Η επαφή δεν παραμένει σε σταθερό σημείο, αλλά μετακινείται διαρκώς, αλλάζοντας τις συνθήκες επαφής.
- Απλοποιημένες Παραδοχές: Αγνοεί την τριβή και τις διατμητικές τάσεις, που είναι κρίσιμες για την ανάλυση creep. Επίσης, δεν λαμβάνει υπόψη ανωμαλίες επιφάνειας (π.χ. ελαττώματα ράγας ή τροχού).

Multi-Hertzian Μέθοδος

Για την αντιμετώπιση των περιορισμών της κλασικής θεωρίας του Hertz, χρησιμοποιείται η Multi-Hertzian μέθοδος (ή Discrete Multi-Hertzian approach), η οποία αποτελεί μια οργανωμένη προσέγγιση για τη μοντελοποίηση της διεπαφής τροχού-ράγας. Αυτή η μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις όπου οι γεωμετρίες των τροχών και των ραγών δεν είναι ομοιόμορφες ή παρουσιάζουν πολύπλοκες καμπυλότητες.

Δομή και Λειτουργία

Η Multi-Hertzian μέθοδος χωρίζει την περιοχή επαφής σε πολλές υπο-περιοχές, καθεμία από τις οποίες έχει δικές της ακτίνες καμπυλότητας και τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Σε κάθε υπο-περιοχή εφαρμόζεται ξεχωριστά η θεωρία του Hertz:

Για κάθε υποπεριοχή:

- Υπολογίζονται τοπικές ακτίνες R_{xi}, R_{yi}
- Υπολογίζεται τοπικό E_i
- Εφαρμόζονται οι τύποι Hertz για $a_i, b_i, p_{0,i}$

Η συνολική κατανομή πίεσης και η συνολική δύναμη προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους συμβολών:

$$F_{N,\text{συνολική}} = \sum_{i=1}^{n} F_{N,i}$$

Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει τη λεπτομερή ανάλυση της επαφής και την προσαρμογή σε πολύπλοκες γεωμετρίες.

Απόδοση και Πλεονεκτήματα

- Βελτιωμένη Ακρίβεια: Η Multi-Hertzian μέθοδος επιτρέπει την ακριβή μοντελοποίηση των μη-ομοιόμορφων γεωμετριών που εμφανίζονται στους τροχούς και στις ράγες.
- Δυνατότητα Ανάλυσης Πολυάριθμων Σημείων Επαφής
- Αξιολόγηση Φθοράς και Απόδοσης
- Προσαρμοστικότητα

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Η Multi-Hertzian μέθοδος έχει μεγαλύτερες υπολογιστικές απαιτήσεις λόγω της διακριτοποίησης των δύο επιφανειών. Αυτό σημαίνει ότι απαιτεί περισσότερους υπολογιστικούς πόρους και χρόνο για την ανάλυση, γεγονός που μπορεί να περιορίσει τη χρήση της σε πραγματικό χρόνο ή σε εφαρμογές που απαιτούν γρήγορες αποφάσεις.

1.1.4. Μοντελοποίηση επαφής με τη μέθοδο Lagrange

Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange (Lagrange multiplier method) εισήχθη για τη μοντελοποίηση της μηχανικής επαφής ως πρόβλημα περιορισμών. Αποτελεί θεμελιώδη αριθμητική προσέγγιση για την ανάλυση της επαφής μεταξύ σωμάτων, ιδίως σε εφαρμογές που απαιτούν υψηλή ακρίβεια, όπως η προσομοίωση της διεπαφής τροχού-ράγας με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (FEM).

Περιγραφή

Η βασική ιδέα είναι η επιβολή περιορισμών που διασφαλίζουν ότι τα σώματα δεν αλληλοδιεισδύουν, μέσω της εισαγωγής επιπρόσθετων αγνώστων (πολλαπλασιαστών Lagrange) στο σύστημα εξισώσεων. Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στην επαφή υπολογίζονται δυναμικά κατά τη λύση του συστήματος, και μπορούν να αφορούν τόσο κανονικές όσο και διατμητικές συνιστώσες.

Μαθηματικό Υπόβαθρο

Επιβολή Περιορισμών Επαφής

Έστω ότι δύο σώματα A και B έρχονται σε επαφή. Για κάθε πιθανό σημείο επαφής i, ο περιορισμός μη διείσδυσης (non-penetration) εκφράζεται ως:

$$g_i(\mathbf{u}) \geq 0$$

όπου $g_i(\mathbf{u})$ είναι το κενό (gap) μεταξύ των επιφανειών, ως συνάρτηση των μετατοπίσεων.

Η επιβολή του περιορισμού γίνεται με την εισαγωγή πολλαπλασιαστή Lagrange λ_i, που φυσικά αντιπροσωπεύει τη δύναμη επαφής:

$$L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \Pi(\mathbf{u}) + \sum_i \lambda_i \, g_i(\mathbf{u})$$

όπου L: η επαυξημένη συνάρτηση Lagrange, $\Pi(\mathbf{u})$: το δυναμικό ενέργειας του συστήματος, λ_i: πολλαπλασιαστής Lagrange (δύναμη επαφής).

Η λύση προκύπτει από την απαίτηση στάσιμης τιμής της L:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0$$

Αυτό οδηγεί στο επαυξημένο (augmented) σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

όπου K: πίνακας ακαμψίας (stiffness matrix), u: διάνυσμα μετατοπίσεων, C: πίνακας περιορισμών επαφής, λ: διανύσμα πολλαπλασιαστών Lagrange (δυνάμεων επαφής), F: διανύσμα φορτίων, g: διανύσμα κενωμάτων.

Γενίκευση

Η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί για την ταυτόχρονη επιβολή περιορισμών κανονικής και διατμητικής επαφής, επιτρέποντας την ανάλυση τριβής, micro-slip και creep.

Πλεονεκτήματα της Μεθόδου Lagrange για Μοντελοποίηση Επαφής

- Υψηλή Ακρίβεια
- Γενίκευση σε Σύνθετες Γεωμετρίες
- Ευελιξία στη Μοντελοποίηση
- Αναλυτική Θεμελίωση

Μειονεκτήματα της Μεθόδου Lagrange για Μοντελοποίηση Επαφής

- Υψηλότερη Υπολογιστική Πολυπλοκότητα
- Αυξημένες Απαιτήσεις Μνήμης
- Πιθανή Δυσκολία Σύγκλισης

1.1.5. Μοντελοποίηση επαφής με τη χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM)

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method, FEM) αποτελεί μια αριθμητική τεχνική που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση της συμπεριφοράς ελαστικών και πλαστικών σωμάτων υπό μηχανικές φορτίσεις. Στο πλαίσιο της μοντελοποίησης επαφής τροχού-ράγας, η FEM επιτρέπει την ανάλυση των δυνάμεων και των τάσεων που αναπτύσσονται τοπικά στην περιοχή επαφής, ακόμα και σε περιπτώσεις πολύπλοκων γεωμετριών ή ανομοιομορφιών στις επιφάνειες.

Μαθηματικό Υπόβαθρο

Διακριτοποίηση του Σώματος

Το συνεχές σώμα διαχωρίζεται σε N μικρά στοιχεία, καθένα από τα οποία ορίζεται από κόμβους (nodes). Για κάθε στοιχείο e, η μετατόπιση u_e περιγράφεται μέσω συναρτήσεων σχήματος N_i:

$$u_e(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i\,(x) u_i$$

όπου $N_i(x)$ είναι η συνάρτηση σχήματος για τον κόμβο i και u_i η μετατόπιση του κόμβου i.

Εξίσωση Ισορροπίας

Η γενική εξίσωση ισορροπίας για το σύστημα, αγνοώντας δυναμικά φαινόμενα (quasi-static ανάλυση), δίνεται από:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$$

όπου $\mathbf{K}$: παγκόσμιος πίνακας ακαμψίας (stiffness matrix), $\mathbf{u}$: διάνυσμα μετατοπίσεων όλων των κόμβων, $\mathbf{F}$: διάνυσμα εξωτερικών φορτίων.

Επαφή στο FEM

Η επαφή μεταξύ δύο σωμάτων (τροχός-ράγα) εισάγεται ως ειδικός περιορισμός (contact constraint) στις συνοριακές συνθήκες. Μια συχνά χρησιμοποιούμενη προσέγγιση είναι η μέθοδος penalty ή η μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange. Για τη μέθοδο penalty, ο περιορισμός μη διείσδυσης (non-penetration) περιγράφεται από:

$$p_n = \kappa\, g_n^-$$

όπου p_n: κανονική δύναμη επαφής, κ: σταθερά penalty (μεγάλος αριθμός), g_n^-: αρνητικό μέρος του κενώματος (gap) μεταξύ των επιφανειών.

Στη γενική περίπτωση, η εξίσωση του συστήματος με συνθήκες επαφής γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{C}$: πίνακας περιορισμών επαφής, $\boldsymbol{\lambda}$: διάνυσμα δυνάμεων αντίδρασης επαφής, $\mathbf{g}$: διάνυσμα κενωμάτων στις περιοχές επαφής.

Υπολογισμός Τάσεων

Μετά τη λύση του συστήματος, οι τάσεις στα στοιχεία υπολογίζονται μέσω της παραγώγου των συναρτήσεων σχήματος και των μετατοπίσεων των κόμβων:

$$\sigma = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}_e$$

όπου $\mathbf{D}$: πίνακας ιδιοτήτων υλικού (π.χ. για ισοτροπικά υλικά περιλαμβάνει το E και το ν), $\mathbf{B}$: πίνακας παραγώγων συναρτήσεων σχήματος, $\mathbf{u}_e$: διάνυσμα μετατοπίσεων του στοιχείου.

Πλεονεκτήματα της FEM για Μοντελοποίηση Επαφής

- Ανάλυση ανωμαλιών και πολύπλοκων γεωμετριών.
- Διαχειρίζεται εύκολα πολλαπλές περιοχές επαφής ή πολύπλοκες συνθήκες φόρτισης.
- Παρέχει λεπτομερή κατανομή τάσεων σε όλο το σώμα.
- Μειώνει την ανάγκη για πειραματικές διαδικασίες.

Μειονεκτήματα της FEM για Μοντελοποίηση Επαφής

- Υψηλές υπολογιστικές απαιτήσεις.
- Χρονοβόρα προετοιμασία (πλέγμα, συνθήκες επαφής).
- Προβλήματα σύγκλισης σε μεγάλες παραμορφώσεις.
- Περιορισμένη εφαρμογή σε πραγματικό χρόνο.

1.1.6. Μοντελοποίηση επαφής με τη χρήση Στοιχείων Συνόρων (BEM)

Η Μέθοδος των Στοιχείων Συνόρων (Boundary Element Method, BEM) αποτελεί ισχυρή αριθμητική τεχνική για την επίλυση προβλημάτων μηχανικής επαφής, εστιάζοντας στη διακριτοποίηση μόνο των ορίων (επιφανειών) των σωμάτων, αντί για ολόκληρο τον όγκο.

Αυτό επιτρέπει σημαντική μείωση του πλήθους των βαθμών ελευθερίας όταν το πρόβλημα αφορά άπειρους ή ημι-άπειρους ελαστικούς χώρους, όπως οι ράγες.

Η BEM χρησιμοποιεί ολοκληρωτικές εξισώσεις για να περιγράψει την κατανομή των δυνάμεων και τάσεων μόνο πάνω στις επιφάνειες επαφής. Αυτή η προσέγγιση είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για προβλήματα όπου οι δυνάμεις επαφής θεωρούνται επιφανειακές και τα σώματα μπορούν να θεωρηθούν ως ημιχώροι.

Μαθηματικό Υπόβαθρο

Η βασική εξίσωση της BEM για ελαστική επαφή προέρχεται από τη θεμελιώδη λύση της ελαστικότητας (Green’s function) και δίνεται ως ολοκληρωτική σχέση μεταξύ μετατοπίσεων και τάσεων στην επιφάνεια:

$$c(\boldsymbol{\xi})u_j(\boldsymbol{\xi}) + \int_\Gamma T_{ij}\,(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})u_j(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_\Gamma U_{ij}\,(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})t_j(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x})$$

όπου $u_j(\mathbf{x})$: μετατόπιση στο σημείο $\mathbf{x}$ σε διεύθυνση j, $t_j(\mathbf{x})$: επιφανειακή τάση, U_{ij}, T_{ij}: πυρηνικές (θεμελιώδεις) λύσεις για το πρόβλημα ελαστικότητας, Γ: το σύνορο (επιφάνεια) του σώματος, $c(\boldsymbol{\xi})$: συντελεστής που εξαρτάται από τη γεωμετρία.

Για την επαφή τροχού-ράγας, το πρόβλημα περιορίζεται στην επιφάνεια επαφής, όπου εφαρμόζονται συνθήκες μη διείσδυσης (non-penetration) και ισορροπίας των δυνάμεων. Η BEM επιτρέπει την απευθείας εκτίμηση των επιφανειακών δυνάμεων και μετατοπίσεων χωρίς την ανάγκη διακριτοποίησης του εσωτερικού του σώματος.

Πλεονεκτήματα της BEM για Μοντελοποίηση Επαφής

- Υψηλή ακρίβεια για επιφανειακές δυνάμεις.
- Μειωμένος υπολογιστικός όγκος (μόνο επιφάνειες).
- Εφαρμογή σε άπειρους ή ημι-άπειρους χώρους (όπως ράγες).
- Ταχύτερη επίλυση σε απλές γεωμετρίες.

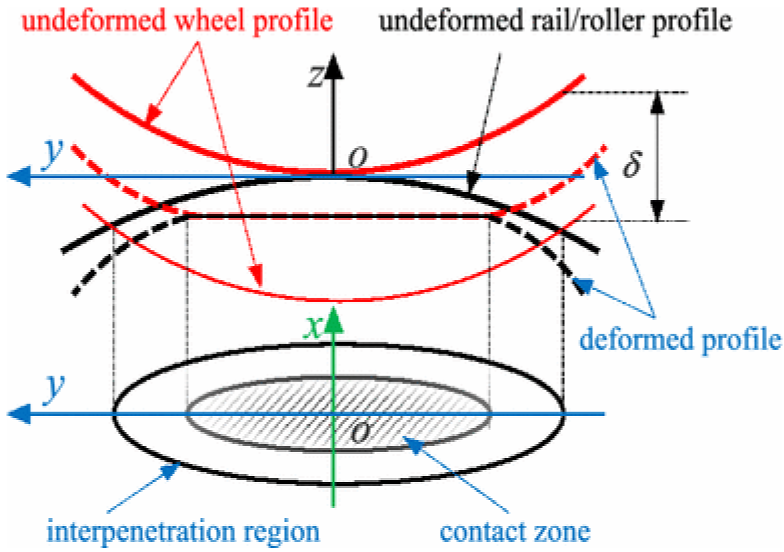
Μειονεκτήματα της BEM για Μοντελοποίηση Επαφής

- Περιορισμός σε επιφανειακά προβλήματα (όχι όγκος).
- Δυσκολία σε μη-γραμμικά ή ανισοτροπικά συστήματα.
- Μεγάλη υπολογιστική απαίτηση για πολύπλοκες επιφάνειες.
- Περιορισμένη εφαρμογή σε προβλήματα με έντονη τριβή.

1.1.7. Μοντελοποίηση επαφής με τη χρήση εικονικής διείσδυσης

Η ανάγκη για ταχύτατους και αποδοτικούς υπολογισμούς δυνάμεων επαφής, ειδικά σε δυναμικά συστήματα πολλαπλής επαφής (multi-body dynamics), οδήγησε στην ανάπτυξη μεθόδων που βασίζονται στην εικονική διείσδυση (penetration depth). Σε αυτήν την προσέγγιση, η δύναμη επαφής εκτιμάται ως συνάρτηση του βάθους επικάλυψης μεταξύ των δύο σωμάτων που αλληλεπιδρούν. Το penetration depth ορίζεται ως το ελάχιστο διάνυσμα μετατόπισης που απαιτείται ώστε τα σώματα να μην επικαλύπτονται.

Η προσέγγιση αυτή μετατρέπει το πρόβλημα της επαφής σε γεωμετρικό έλεγχο, επιτρέποντας πολύ γρήγορους και σταθερούς υπολογισμούς, ιδιαίτερα όταν απαιτείται η αξιολόγηση πολλαπλών σημείων επαφής ταυτόχρονα.



Εικόνα 2.1.5.1Προσέγγιση περιοχής επαφής με εικονική διείσδυση

Μαθηματικό Υπόβαθρο

Υπολογισμός Διείσδυσης

Για δύο σώματα A και B, το penetration depth d_p ορίζεται ως:

$$d_p = \min_{\delta \mathbf{x}} \{ \| \delta \mathbf{x} \| : (A + \delta \mathbf{x}) \cap B = \varnothing \}$$

Δηλαδή, το ελάχιστο μέτρο μετατόπισης που απαιτείται ώστε οι επιφάνειες να μην επικαλύπτονται.

Υπολογισμός Δύναμης Επαφής

Η δύναμη επαφής F_c συχνά υπολογίζεται ως συνάρτηση του penetration depth με μια απλή γραμμική ή μη γραμμική σχέση τύπου ελατηρίου (spring law):

$$F_c = k_p \cdot d_p^n$$

όπου k_p: συντελεστής “σκληρότητας” επαφής (contact stiffness), n: εκθετικός παράγοντας (συνήθως $n = 1$ για γραμμική, $n = 1.5$ για ημι-Hertz κλπ).

Σε δυναμικές προσομοιώσεις συχνά προστίθεται και αποσβεστική δύναμη (damping):

$$F_{tot} = k_p \cdot d_p^n + c_p \cdot \dot{d}_p$$

όπου c_p είναι ο συντελεστής απόσβεσης και $\dot{d}_p$ η ταχύτητα διείσδυσης.

Non-Hertz & Semi-Hertz Προσέγγιση

Στις non-Hertz μεθόδους, οι υπολογισμοί γίνονται με εμπειρικούς ή αριθμητικούς τρόπους, λαμβάνοντας υπόψη πολύπλοκες γεωμετρίες, μη γραμμικές ιδιότητες υλικών ή ανομοιομορφίες επιφανειών. Η γενική μορφή της δύναμης επαφής μπορεί να παραμένει παρόμοια με τη σχέση παραπάνω, αλλά τα k_p και n προσαρμόζονται ώστε να ταιριάζουν με μετρημένα ή προσομοιωμένα δεδομένα.

Η semi-Hertz μέθοδος διατηρεί τη βασική φόρμουλα του Hertz αλλά επιτρέπει τροποποιήσεις στους παραμέτρους ώστε να λαμβάνονται υπόψη πραγματικές συνθήκες:

$$F_c = k_{Hertz,mod} \cdot d_p^{3/2}$$

όπου ο $k_{Hertz,mod}$ προσαρμόζεται ανάλογα με τη γεωμετρία ή τις τοπικές ιδιότητες των επιφανειών.

Πλεονεκτήματα

- Ταχύτητα υπολογισμών
- Ευελιξία σε γεωμετρία και υλικά
- Εφαρμογή σε πολλαπλά σημεία επαφής
- Προσαρμοστικότητα (non-Hertz, semi-Hertz)

Μειονεκτήματα

- Έλλειψη φυσικής θεμελίωσης
- Ανάγκη βαθμονόμησης παραμέτρων
- Περιορισμένη ακρίβεια σε σύνθετες συνθήκες
- Δεν παρέχει κατανομή εσωτερικών τάσεων

1.2. Μαθηματική και Πρακτική Θεμελίωση Αλγορίθμων Ανίχνευσης Επαφής

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται οι βασικές κατηγορίες αλγορίθμων ανίχνευσης επαφής (contact detection) που χρησιμοποιούνται στη μηχανική, τη δυναμική πολλαπλών σωμάτων (MBS), FEM, BEM και στη βιομηχανία. Για κάθε αλγόριθμο παρατίθεται η λογική λειτουργίας του, η αντίστοιχη μαθηματική διατύπωση ή τυπικός υπολογισμός, καθώς και τα βασικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά του.

1.2.1. Hertzian Contact Detection (Σημειακή/Ελλειπτική Επαφή)

Λογική:
Υπολογίζεται το σημείο που οι δύο επιφάνειες (τροχός–ράγα) εφάπτονται. Το contact patch είναι ελλειψοειδές.

Μαθηματικός Ορισμός: 1. Εύρεση πλησιέστερων σημείων:

$$(\mathrm{x}_A^*, \mathrm{x}_B^*) = \arg \min_{\mathrm{x}_A \in S_A, \mathrm{x}_B \in S_B} \| \mathrm{x}_A - \mathrm{x}_B \|$$

2. Οι τοπικές ακτίνες καμπυλότητας R_x, R_y υπολογίζονται στη θέση επαφής. 3. Το contact patch:

$$A = \pi ab$$

Πλεονεκτήματα: - Πολύ γρήγορος και αποδοτικός υπολογισμός για απλές (σφαιρικές/ελλειπτικές) γεωμετρίες. - Παρέχει αναλυτική λύση για το μέγεθος και τη θέση της περιοχής επαφής. - Χρησιμοποιείται ευρέως ως βάση για θεωρητικές και πρακτικές εφαρμογές τροχού-ράγας.

Μειονεκτήματα: - Δεν εφαρμόζεται σε πολύπλοκες/ακανόνιστες γεωμετρίες. - Αγνοεί επιφανειακές ανωμαλίες και πολλαπλά σημεία επαφής. - Δεν λαμβάνει υπόψη τριβή ή διατμητικές τάσεις.

1.2.2. Penalty/Penetration Detection (Εικονική Διείσδυση)

Λογική:
Βρίσκεις το overlap (διείσδυση) μεταξύ δύο σωμάτων. Η δύναμη επαφής εξαρτάται από το βάθος διείσδυσης.

Μαθηματική Διατύπωση: 1. Για κάθε σημείο i του σώματος A, υπολογίζεις:

$$d_i = \min_{\mathrm{y} \in S_B} \| \mathrm{x}_i - \mathrm{y} \|$$

2. Αν $d_i < 0$ (αρνητικό gap), υπάρχει επαφή στο x_i. 3. Η δύναμη επαφής:

$$F_i = k_p \cdot |d_i|^n$$

όπου k_p σταθερά penalty, n εκθέτης (συνήθως $1 \leq n \leq 1.5$).

Πλεονεκτήματα: - Εύκολη υλοποίηση και ταχύτατος υπολογισμός, κατάλληλος για real-time εφαρμογές. - Εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε γεωμετρία και πλήθος σημείων επαφής. - Παρέχει ευελιξία στη διαχείριση πολύπλοκων φαινομένων και πολλαπλών επαφών.

Μειονεκτήματα: - Απαιτεί επιλογή παραμέτρων penalty που επηρεάζουν τη σταθερότητα και φυσικότητα των δυνάμεων. - Δεν παρέχει κατανομή εσωτερικών τάσεων (μόνο συνολική δύναμη). - Μπορεί να εμφανίσει αριθμητικά artefacts (π.χ. stickiness, spikes).

1.2.3. Node-to-Surface και Surface-to-Surface Methods

Λογική:
Για κάθε κόμβο (ή σημείο) του σώματος A, βρίσκεις το κοντινότερο σημείο στην επιφάνεια B.

Μαθηματικός Τύπος: - Για κάθε κόμβο i:

$$g_i = \min_{\mathrm{y} \in S_B} \| \mathrm{x}_i - \mathrm{y} \|$$

- Επαφή αν $g_i < \varepsilon$ (tolerance).

Surface-to-surface:
Ψάχνεις για το ελάχιστο ζεύγος σημείων (x, y) με:

$$g = \min_{\mathrm{x} \in S_A, \mathrm{y} \in S_B} \| \mathrm{x} - \mathrm{y} \|$$

Πλεονεκτήματα: - Πολύ ακριβής ανίχνευση σημείου και βάθους επαφής, ανεξάρτητα από τη γεωμετρία. - Κατάλληλη για FEM/BEM και high-fidelity μοντελοποίηση. - Επιτρέπει εντοπισμό πολλαπλών επαφών σε πολύπλοκα σχήματα.

Μειονεκτήματα: - Υπολογιστικά απαιτητική, ειδικά για μεγάλα πλέγματα/πολλά σώματα. - Απαιτεί καλό αλγόριθμο ελαχιστοποίησης απόστασης. - Μπορεί να δημιουργήσει αριθμητικές δυσκολίες σε πολύπλοκες/σύνθετες επιφάνειες.

1.2.4. Bounding Volume Hierarchies (AABB, OBB)

Λογική:
Κάθε σώμα περικλείεται σε απλό σχήμα (box ή sphere). Επαφή αν τα volumes τέμνονται.

Μαθηματικός Έλεγχος: - Για δύο AABB A, B με όρια $[x^A_{min}, x^A_{max}]$ κτλ:

$$\text{Επαφή} \Leftrightarrow \begin{cases} x^A_{min} \leq x^B_{max} \ \wedge \ x^A_{max} \geq x^B_{min} \\ y^A_{min} \leq y^B_{max} \ \wedge \ y^A_{max} \geq y^B_{min} \\ z^A_{min} \leq z^B_{max} \ \wedge \ z^A_{max} \geq z^B_{min} \end{cases}$$

- Αν οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν για όλους τους άξονες, τα boxes τέμνονται.

OBB (Oriented Bounding Box):
Ο έλεγχος γίνεται σε περιστρεφόμενο σύστημα αξόνων – πιο περίπλοκος αλλά ίδια ιδέα.

Πλεονεκτήματα: - Εξαιρετικά γρήγορη ανίχνευση επαφής σε μεγάλα συστήματα (ιδανικό για broad phase). - Πολύ αποδοτική με λίγους ψευδώς θετικούς ελέγχους αν οριστεί σωστά η γεωμετρία. - Κλιμακώνεται εύκολα με αύξηση των σωμάτων.

Μειονεκτήματα: - Δεν ανιχνεύει το πραγματικό σημείο ή βάθος επαφής — απαιτεί narrow phase. - Δημιουργεί ψευδώς θετικά (false positives) που πρέπει να φιλτραριστούν. - Πιο σύνθετη υλοποίηση για OBB, ειδικά με μεταβαλλόμενη γεωμετρία.

1.2.5. Spatial Hashing / Voxelization

Λογική:
Ο χώρος χωρίζεται σε “κουτιά” (voxels). Κάθε αντικείμενο αντιστοιχίζεται σε voxels και ελέγχεις επαφή μόνο με άλλα αντικείμενα στα ίδια ή γειτονικά voxels.

Μαθηματική Περιγραφή: - Για κάθε σημείο x:

$$\text{Voxel index:} \quad i_x = \left\lfloor \frac{x - x_{min}}{\Delta x} \right\rfloor$$

όπου Δx το μέγεθος του voxel. - Κάθε αντικείμενο "ανήκει" στους voxels όπου βρίσκεται. - Επαφή αν δύο αντικείμενα ανήκουν στον ίδιο voxel.

Πλεονεκτήματα: - Εξαιρετικά γρήγορη αναζήτηση γειτονικών σωμάτων (neighbor search). - Κατάλληλη για πολύπλοκα ή πολυπληθή συστήματα (granular, crowd, κ.λπ.). - Ευέλικτη για δυναμικές σκηνές με συνεχείς κινήσεις.

Μειονεκτήματα: - Εξαρτάται από το μέγεθος voxel — μπορεί να χαθεί ακρίβεια ή να αυξηθούν ψευδώς θετικά. - Μειωμένη αποτελεσματικότητα σε αντικείμενα με μεγάλο εύρος διαστάσεων. - Απαιτεί σωστή παραμετροποίηση και tuning για βέλτιστη επίδοση.

1.2.6. FEM/BEM Contact Detection

Λογική:
Σε κάθε βήμα της ανάλυσης, για κάθε κόμβο/επιφάνεια ελέγχεται αν υπάρχει διείσδυση ή ελάχιστη απόσταση.

Μαθηματική Εφαρμογή: - Για κάθε κόμβο i:

$$g_i = (\mathrm{x}_i - \mathrm{y}_i) \cdot \mathrm{n}_i$$

όπου y_i το πλησιέστερο σημείο στην αντίθετη επιφάνεια, n_i η τοπική κατεύθυνση. - Επαφή αν $g_i < 0$.

Πλεονεκτήματα: - Πολύ υψηλή ακρίβεια και δυνατότητα ανάλυσης πολύπλοκων γεωμετριών. - Υποστηρίζει πολλαπλές ταυτόχρονες επαφές και μη-γραμμικές καταστάσεις. - Ιδανική για αναλυτική διερεύνηση και ανάλυση τάσεων.

Μειονεκτήματα: - Πολύ μεγάλες υπολογιστικές απαιτήσεις (CPU, μνήμη). - Απαιτεί σύνθετο pre-processing (πλέγμα, επιφάνειες, κ.λπ.). - Δεν είναι κατάλληλη για real-time εφαρμογές ή προσομοίωση μεγάλων συστημάτων.

1.2.7. GJK (Gilbert-Johnson-Keerthi) Algorithm (για κυρτά σχήματα)

Λογική:
Έλεγχος τομής και ελάχιστης απόστασης μεταξύ δύο κυρτών πολυέδρων με χρήση υποστηρικτικών σημείων.

Μαθηματική Ιδέα: - Δομείται το Minkowski difference $A \ominus B$. - Επαφή αν το origin βρίσκεται εντός του $A \ominus B$. - Αν όχι, η ελάχιστη απόσταση του origin από το σύνορο αντιστοιχεί στην ελάχιστη απόσταση μεταξύ A και B.

Πλεονεκτήματα: - Γενικός αλγόριθμος για κυρτά πολύεδρα. - Ταχύτατος και αξιόπιστος για real-time προσομοιώσεις. - Κλιμακώνεται καλά σε δυναμικές σκηνές με πολλά σώματα.

Μειονεκτήματα: - Περιορίζεται σε κυρτές γεωμετρίες (convex only). - Πιο περίπλοκη υλοποίηση από απλά bounding volumes. - Για μη-κυρτά αντικείμενα απαιτεί decomposition σε κυρτά τμήματα.

Συνοψίζοντας:
Κάθε αλγόριθμος ανίχνευσης επαφής βασίζεται σε μια θεμελιώδη μαθηματική πράξη:
- Ελάχιστη απόσταση,
- Έλεγχος τομής περιβλημάτων,
- Υπολογισμός overlap/penetration,
- ή gap function.

Η επιλογή εξαρτάται από τον τύπο γεωμετρίας, την ακρίβεια και τις απαιτήσεις της εφαρμογής. Τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα κάθε μεθόδου πρέπει να σταθμίζονται κατά την επιλογή του κατάλληλου αλγορίθμου για την εκάστοτε εφαρμογή.

Μαθηματικό Υπόβαθρο: Linear Complementarity Problem (LCP)

Το πρόβλημα Signorini μπορεί να διατυπωθεί ως Πρόβλημα Γραμμικής Συμπληρωματικότητας (LCP):

$$\text{Βρείτε } \lambda_N \geq 0, \quad g \geq 0 \text{ τέτοια ώστε } \lambda_N \cdot g = 0$$

Το LCP μπορεί να επιλυθεί με διάφορους αλγορίθμους, όπως:

- **Simplex-based methods**
- **Projected Gradient methods**
- **Lemke's Algorithm**

Στο πλαίσιο της μηχανικής, οι παραπάνω μέθοδοι μεταφράζονται σε αλγορίθμους επίλυσης επαφών, επιτρέποντας την επιβολή των μη διεισδυτικών περιορισμών μεταξύ σωμάτων.

Παράδειγμα σε μητρώα:

Ας θεωρήσουμε το σύστημα:

$$Ku + B^T \lambda_N = f$$

$$g(u) \geq 0, \quad \lambda_N \geq 0, \quad g(u) \cdot \lambda_N = 0$$

όπου B είναι ο πίνακας περιορισμών επαφής. Η επίλυση των παραπάνω συνεπάγεται την εύρεση των u και λ_N που ικανοποιούν τις εξισώσεις και τις συμπληρωματικές συνθήκες.

Ανακεφαλαίωση

- Η ένταξη της συνθήκης επαφής απαιτεί ειδικούς αλγοριθμικούς χειρισμούς.
- Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εξαρτάται από την ακρίβεια, αποδοτικότητα και αριθμητική σταθερότητα που απαιτείται από το πρόβλημα.