



**ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**  
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ – ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

---

**ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΟΧΙΜΑΤΩΝ ΚΑΙ  
ΕΥΚΑΜΠΤΩΝ ΤΡΟΧΙΩΝ ΜΕΣΩ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ  
ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

---

ΒΟΓΙΑΤΖΗΣ ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ

A.E.M:6490

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΙΑΓΚΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΣΥΝΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΟΣ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑΣ: ΚΑΡΥΟΦΥΛΛΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2023



## Ευχαριστίες

Με την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής ολοκληρώνεται η ακαδημαϊκή μου πορεία στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, επομένως θα ήθελα να εκφράσω την εγκάρδια ευγνωμοσύνη μου σε όσους συνέβαλαν σε αυτήν.

Πρώτα απ' όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Γιαγκόπουλο Δημήτριο, για την αικλόνητη υποστήριξη και την στοχευμένη καθοδήγηση του, καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Η εμπειρία και οι γνώσεις του συνέβαλαν καθοριστικά τόσο στην επιτυχή ολοκλήρωση της, όσο και στην καλλιέργεια των γνώσεων μου, ως μηχανικός, μέσα από την παρακολούθηση των διαλέξεων του. Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον συνεπιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, υποψήφιο διδάκτορα Καρυοφύλλα Γεώργιο, για το αμέριστο ενδιαφέρον και την ανεκτίμητη συμβολή του. Η συνεχής διαθεσιμότητα του, οι εποικοδομητικές μας συζητήσεις και οι ουσιώδεις υποδείξεις του ήταν καταλυτικές για την εξέλιξη και επιτυχή ολοκλήρωση της.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να εκφράσω την ευχαρίστηση μου και στους υπόλοιπους καθηγητές και μέλη του Εργαστηρίου Δυναμικής Μηχανών, διότι η αρχική μου ενασχόληση με τα γνωστικά αντικείμενα του εργαστηρίου και η μετέπειτα αφοσίωση μου σε αυτά εμπνεύστηκαν σε μεγάλο βαθμό και από αυτούς. Ακόμη θα ήθελα να εκφράσω την βαθύτατη εκτίμηση μου στο σύνολο του διδακτικού προσωπικού του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών, για τη συμβολή τους στην ακαδημαϊκή μου ανάπτυξη.

Επιπρόσθετα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου και την αδερφή μου για την αγάπη, την υποστήριξη και την υπομονή τους, καθ' όλη τη πορεία μου μέχρι σήμερα καθώς και στην υπόλοιπη οικογένεια μου για την αγάπη και στήριξη που μου προσφέρουν σε κάθε κεφάλαιο τη ζωής μου. Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους φίλους μου, οι οποίοι ήταν δίπλα μου σε αυτό το ακαδημαϊκό «ταξίδι» και συνεχίζουν να είναι καθημερινά.



## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει την δυναμική ανάλυση της αλληλεπίδρασης του συστήματος οχήματος-γέφυρας (VBI) με τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις. Αρχικά, εφαρμόζεται η μέθοδος EMBS για την απόζευξη και την επίλυση τριών διατάξεων συστημάτων VBI. Η χρησιμοποιούμενη μέθοδος επιλύει τη γέφυρα ανεξάρτητα από το όχημα, προσθέτοντας στο μηχανικό της σύστημα όρους απόσβεσης, ελατηρίου και φόρτισης και επιλέγεται για την ακρίβεια, την απλότητα και την αποδοτικότητα της, σε σχέση με τη επίλυση του συζευγμένου συστήματος και άλλων μεθόδων απόζευξης. Το όχημα προσομοιώνεται ως μοντέλο ελατηρίου μάζας, μοντέλο μισού οχήματος και μοντέλο ολόκληρου οχήματος, ενώ σε όλες τις περιπτώσεις η γέφυρα αποτελείται από στοιχεία δοκού Euler-Bernoulli. Επιπλέον, εξετάζεται για κάθε σύστημα η επίδραση μη γραμμικής συμπεριφοράς των αναρτήσεων. Ακολούθως, διενεργείται και παρουσιάζεται συνοπτικά μία πειραματική ανάλυση για μοντέλα γέφυρας και οχήματος εργαστηριακής κλίμακας, με σκοπό την μέτρηση των αποκρίσεων επιτάχυνσης σε συγκεκριμένα σημεία του δικτυωτού μοντέλου γέφυρας. Αυτές οι μετρήσεις είναι χρήσιμες για την επικύρωση των προσομοιώσεων, συμβάλλοντας έτσι στην αξιοπιστία και την ακρίβεια τους. Η διπλωματική εργασία ολοκληρώνεται με τη μοντελοποίηση και τη δυναμική ανάλυση των πειραματικών μοντέλων οχήματος και γέφυρας, κάνοντας χρήση λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων και πολλαπλών σωμάτων. Αφού παρουσιαστούν τα διακριτοποιημένα μοντέλα γέφυρας και οχήματος, περιγράφεται η διαδικασία της μοντελοποίησης και της προσομοίωσης του συστήματος πολλαπλών σωμάτων και διενεργείται μία διερεύνηση για κάποιες παραμέτρους που χαρακτηρίζουν την επαφή μεταξύ τροχών και γέφυρας. Τελικά, παρουσιάζονται οι χρονοιστορίες των δυνάμεων επαφής καθώς και οι αποκρίσεις των επιταχύνσεων που προέρχονται από τις αναλύσεις στα λογισμικά, συγκρίνοντας τις τελευταίες επίσης με τις πειραματικές τους μετρήσεις.

**Λέξεις κλειδιά:** Αλληλεπίδραση Οχήματος-Γέφυρας, Μέθοδος EMBS, Πειραματική Ανάλυση, Ανάλυση Πεπερασμένων Στοιχείων, Προσομοίωση Πολλαπλών Σωμάτων

# **Dynamic Analysis and Interaction between Vehicles and Flexible Paths with Multibody and FEM Models**

## **Abstract**

This dissertation examines the dynamic analysis of the vehicle-bridge interaction (VBI) system using three different approaches. Firstly, the EMBS method is implemented to decouple and solve three VBI system configurations. The method used solves the bridge independently of the vehicle by adding damping, spring and loading terms to its mechanical system and is chosen for its accuracy, simplicity and efficiency compared to the solution of the fully coupled system and other decoupling methodologies. The vehicle is simulated as a sprung mass model, a half-car model and a full-car model and in each case, the bridge consists of Euler-Bernoulli beam elements. Moreover, the effect of suspensions' non-linear behavior is investigated for each system. Subsequently, an experimental analysis is conducted for laboratory-scaled bridge and vehicle models to measure the acceleration responses at specific points on the truss bridge model. These measurements serve as validation data for the simulations, thus contributing to their reliability and accuracy. The dissertation concludes with the modeling and the dynamic analysis of the experimental vehicle and bridge models, by using finite element and multibody software. After presenting the discretized bridge and vehicle models, the process of modeling and simulation of the multibody system is described and an investigation of some parameters characterizing the contact between wheels and bridge is carried out. Finally, the time histories of the contact forces and the acceleration responses obtained from the software analyses are presented, comparing the latter also with their experimental measurements.

**Keywords:** Vehicle-Bridge Interaction (VBI), EMBS Method, Experimental Analysis, Finite Element Analysis (FEA), Multibody Simulation (MBS)



# **Περιεχόμενα**

<b>1 Εισαγωγή .....</b>	<b>1</b>
<b>2 Θεωρητικό Υπόβαθρο .....</b>	<b>2</b>
2.1 Extended-Modified Bridge System Method (EMBS).....	2
2.1.1 Ορισμός του συστήματος οχήματος-γέφυρας .....	2
2.1.2 Αδιαστατοποίηση του συστήματος .....	6
2.1.3 Μεθοδολογία απόζευξης του συμπλεγμένου συστήματος εξισώσεων κίνησης ....	7
2.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων .....	11
2.2.1 Καμπτικό πεπερασμένο στοιχείο.....	12
2.2.2 Μετασχηματισμός συντεταγμένων .....	13
2.2.3 Κατάστρωση ολικών μητρώων .....	14
2.3 Κλασική απόσβεση - Μέθοδος Caughey .....	16
2.4 Αριθμητικές μέθοδοι.....	17
2.4.1 Μέθοδος Newton-Raphson .....	17
2.4.2 Μέθοδος Newmark .....	18
2.4.3 Μέθοδος κεντρικής διαφοράς (Central-Difference Method) .....	18
2.5 Συστήματα Πολλαπλών Σωμάτων (Multibody Systems) .....	19
2.5.1 Γενικευμένες συντεταγμένες και δεσμοί κίνησης.....	19
2.5.2 Εξισώσεις κίνησης συστήματος στερεών σωμάτων .....	20
<b>3 Εφαρμογές της μεθόδου EMBS και προσομοιώσεις σε περιβάλλον MATLAB .....</b>	<b>22</b>
3.1 Μοντέλο μάζας ελατηρίου (Sprung-mass model).....	22
3.2 Μοντέλο μισού οχήματος (Half-car model) .....	28
3.3 Μοντέλο ολόκληρου οχήματος (Full-car model) .....	32
3.4 Μοντέλα οχήματος με μη γραμμικά χαρακτηριστικά αναρτήσεων.....	36
3.4.1 Μη γραμμικό μοντέλο μάζας ελατηρίου .....	37
3.4.2 Μη γραμμικό μοντέλο μισού οχήματος .....	38
3.4.3 Μη γραμμικό μοντέλο ολόκληρου οχήματος.....	40
<b>4 Πειραματική Διάταξη.....</b>	<b>43</b>
4.1 Περιγραφή πειραματικής διάταξης.....	43
4.2 Αποτελέσματα του πειράματος.....	47
<b>5 Μοντελοποίηση και Ανάλυση της Πειραματικής Διάταξης .....</b>	<b>52</b>
5.1 Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων της γέφυρας.....	52
5.2 Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων του οχήματος.....	53
5.3 Μοντελοποίηση συστήματος με εύκαμπτα σώματα .....	56

5.4	Ανάπτυξη μοντέλου πολλαπλών σωμάτων .....	60
5.4.1	Διερεύνηση συντελεστών στιβαρότητας και απόσβεσης της επαφής.....	65
5.5	Αποτελέσματα ανάλυσης του μοντέλου .....	68
<b>6</b>	<b>Συμπεράσματα .....</b>	<b>75</b>
6.1	Σύνοψη – Συμπεράσματα.....	75
6.2	Προτάσεις για περεταίρω έρευνα.....	76
	<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>78</b>

## Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 2.1: Στοιχείο δοκού Euler-Bernoulli για τον υπολογισμό του $W_{Bel}$ [1].....	4
Σχήμα 2.2: Σχετική μετατόπιση μεταξύ τροχών και γέφυρας.....	5
Σχήμα 2.3: Αδιάστατη μετατόπιση και επιτάχυνση στο μέσο της γέφυρας Skidtrask [1].....	10
Σχήμα 2.4: Σχηματική αναπαράσταση της συζευγμένης ανάλυσης και της EMBS.....	11
Σχήμα 2.5: Συνοριακές συνθήκες καμπτικού πεπερασμένου στοιχείου. ....	13
Σχήμα 2.6: Τοπικό και καθολικό σύστημα αναφοράς [7]. .....	14
Σχήμα 2.7: Δοκός χωρισμένη σε δύο καμπτικά πεπερασμένα στοιχεία.....	15
Σχήμα 3.1: Σχηματική αναπαράσταση μοντέλου μάζας ελατηρίου.....	23
Σχήμα 3.2: Κατακόρυφη μετατόπιση στο μέσο της γέφυρας (sprung-mass model).....	24
Σχήμα 3.3: Κατακόρυφη επιτάχυνση στο μέσο της γέφυρας (sprung-mass model).....	24
Σχήμα 3.4: Κατακόρυφη μετατόπιση της μάζας του οχήματος (sprung-mass model).....	25
Σχήμα 3.5: Κατακόρυφη επιτάχυνση της μάζας του οχήματος (sprung-mass model).....	25
Σχήμα 3.6: Μετατόπιση μέσου της γέφυρας για χρόνο 2 sec (sprung-mass model). .....	26
Σχήμα 3.7: Μετατόπιση της μάζας του οχήματος για χρόνο 2 sec (sprung-mass model). .....	27
Σχήμα 3.8: Δύναμη επαφής μεταξύ του τροχού και της γέφυρας (sprung-mass model). .....	27
Σχήμα 3.9: Μοντέλο μισού οχήματος-γέφυρας. ....	28
Σχήμα 3.10: Κατακόρυφη μετατόπιση στο μέσο της γέφυρας (half-car model). .....	29
Σχήμα 3.11: Κατακόρυφη επιτάχυνση στο μέσο της γέφυρας (half-car model).....	30
Σχήμα 3.12: Κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας του οχήματος (half-car model)...	30
Σχήμα 3.13: Κατακόρυφη επιτάχυνση του κέντρου μάζας του οχήματος (half-car model)...	31
Σχήμα 3.14: Δυνάμεις επαφής μεταξύ των τροχών και της γέφυρας (half-car model).....	31
Σχήμα 3.15: Μοντέλο ολόκληρου οχήματος.....	32
Σχήμα 3.16: Κατακόρυφη μετατόπιση των μέσων των ραγών. ....	34
Σχήμα 3.17: Κατακόρυφη επιτάχυνση των μέσων των ραγών. ....	34
Σχήμα 3.18: Κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας του οχήματος (full-car model).....	35
Σχήμα 3.19: Κατακόρυφη επιτάχυνση του κέντρου μάζας του οχήματος (full-car model).....	35
Σχήμα 3.20: Δυνάμεις επαφής μεταξύ τροχών και ραγών (full-car model). .....	36
Σχήμα 3.21: Μετατόπιση οχήματος ανάλογα με την ανάρτηση (sprung-mass model). .....	37
Σχήμα 3.22: Δύναμη επαφής τροχού-γέφυρας ανάλογα με την ανάρτηση (sprung-mass model). .....	38
Σχήμα 3.23: Μετατόπιση οχήματος ανάλογα με τις αναρτήσεις (half-car model). .....	39
Σχήμα 3.24: Δυνάμεις επαφής στον μπροστά τροχό ανάλογα με τις αναρτήσεις (half-car model). .....	39
Σχήμα 3.25: Δυνάμεις επαφής στον πίσω τροχό ανάλογα με τις αναρτήσεις (half-car model). .....	40
Σχήμα 3.26: Μετατόπιση οχήματος ανάλογα με τις αναρτήσεις (full-car model).....	41

Σχήμα 3.27: Δυνάμεις επαφής μπροστινών τροχών ανάλογα με τις αναρτήσεις (full-car model).....	42
Σχήμα 3.28: Δυνάμεις επαφής πίσω τροχών ανάλογα με τις αναρτήσεις (full-car model).....	42
Σχήμα 4.1: Πειραματική διάταξη γέφυρας.....	43
Σχήμα 4.2: Εσωτερική απεικόνιση του μοντέλου γέφυρας της πειραματικής διάταξης.....	44
Σχήμα 4.3: Εργαστηριακό μοντέλο οχήματος.....	45
Σχήμα 4.4: Μαγνητική επαφή εκτός της γέφυρας. ....	45
Σχήμα 4.5: Απεικόνιση της μαγνητικής επαφής και των πρόσθετων μαζών του οχήματος. ...	46
Σχήμα 4.6: Θέσεις εγκατεστημένων επιταχυνσιομέτρων. ....	46
Σχήμα 4.7: Προφίλ ταχύτητας του οχήματος κατά την εκτέλεση του πειράματος. ....	47
Σχήμα 4.8: Ροή δεδομένων κατά τη πειραματική μέτρηση. ....	48
Σχήμα 4.9: Μετρούμενες επιταχύνσεις στη διεύθυνση X.....	49
Σχήμα 4.10: Μετρούμενες επιταχύνσεις στη διεύθυνση Y.....	50
Σχήμα 4.11: Μετρούμενες επιταχύνσεις στη διεύθυνση Z. ....	51
Σχήμα 5.1: Διακριτοποιημένο μοντέλο γέφυρας-ραγών. ....	53
Σχήμα 5.2: Απλοποιημένη ράγα του μοντέλου της πειραματικής διάταξης. ....	54
Σχήμα 5.3: Μοντελοποίηση επαφής ράγας-γέφυρας. ....	54
Σχήμα 5.4: Διακριτοποιημένο μοντέλο οχήματος. ....	55
Σχήμα 5.5: Διακριτοποιημένο μοντέλο οχήματος (shaded). ....	55
Σχήμα 5.6: Μοντελοποίηση συνολικού συστήματος γέφυρας-οχήματος. ....	56
Σχήμα 5.7: Ορισμένο σώμα γέφυρας-ράγες. ....	57
Σχήμα 5.8: Ορισμένο σώμα εξωτερικών ραγών. ....	58
Σχήμα 5.9: Ορισμένο σώμα άνω μέρους οχήματος. ....	58
Σχήμα 5.10: Ορισμένο σώμα τροχού οχήματος. ....	59
Σχήμα 5.11: Ορισμένο σώμα βάσης του τροχού. ....	59
Σχήμα 5.12: Αλγόριθμος ανάπτυξης και ανάλυσης του μοντέλου πολλαπλών σωμάτων. ....	60
Σχήμα 5.13: Χρησιμοποιούμενες αρθρώσεις στο μοντέλο. ....	61
Σχήμα 5.14: Άρθρωση πάκτωσης σε μία από τις βάσεις του μοντέλου γέφυρας. ....	62
Σχήμα 5.15: Παράμετροι ορισμού δυνάμεων επαφής. ....	63
Σχήμα 5.16: Προφίλ ταχύτητας προσομοίωσης του μοντέλου στο Adams View.....	64
Σχήμα 5.17: Μοντέλο πειραματικής διάταξης στο Adams View.....	64
Σχήμα 5.18: Μοντέλο οχήματος στο Adams View.....	65
Σχήμα 5.19: Τύποι περιορισμών του μοντέλου ενός τετάρτου οχήματος-ράγας. ....	66
Σχήμα 5.20: Μοντέλο ενός τετάρτου οχήματος-ράγας στο Adams View. ....	67
Σχήμα 5.21: Εγκάρσια δύναμη επαφής για διάφορες τιμές των εξεταζόμενων παραμέτρων..	68
Σχήμα 5.22: Δύναμη επαφής τροχού 1-γέφυρας. ....	69
Σχήμα 5.23: Δύναμη επαφής τροχού 2-γέφυρας. ....	69
Σχήμα 5.24: Δύναμη επαφής τροχού 3-γέφυρας. ....	69
Σχήμα 5.25: Δύναμη επαφής τροχού 4-γέφυρας. ....	70

Σχήμα 5.26: Διέγερση γέφυρας ανάλογα με τη θέση του οχήματος (Adams). .....	70
Σχήμα 5.27: Επιταχύνσεις στη διεύθυνση X στις θέσεις των επιταχυνσιομέτρων (Adams)..	71
Σχήμα 5.28: Επιταχύνσεις στη διεύθυνση X (FEA - Experimental Analysis).....	72
Σχήμα 5.29: Μετατοπίσεις στο μοντέλο γέφυρας σε επιλεγμένες χρονικές στιγμές (1). .....	73
Σχήμα 5.30: Μετατοπίσεις στο μοντέλο γέφυρας σε επιλεγμένες χρονικές στιγμές (2). .....	74

## **Κατάλογος Πινάκων**

Πίνακας 2.1:Αδιάστατα μεγέθη του συστήματος οχήματος-γέφυρας. ....	9
Πίνακας 3.1: Δεδομένα για το μοντέλο μάζας ελατηρίου και τη γέφυρα. ....	23
Πίνακας 3.2: Δεδομένα για το μοντέλο μισού οχήματος και τη γέφυρα.....	29
Πίνακας 3.3:Δεδομένα για το μοντέλο ολόκληρου οχήματος με τις ράγες. ....	33
Πίνακας 5.1:Ορισμένα σώματα για τη μοντελοποίηση του συνολικού συστήματος.....	56
Πίνακας 5.2: Λίστα αρθρώσεων του συνολικού μοντέλου. ....	61
Πίνακας 5.3 Λίστα περιορισμών του μοντέλου ενός τετάρτου οχήματος-ράγας.....	66

# 1 Εισαγωγή

Στον τομέα των υποδομών των μεταφορών, η μελέτη της αλληλεπίδρασης οχήματος-γέφυρας (VBI) αποτελεί ένα κρίσιμο ερευνητικό πεδίο, διαδραματίζοντας σπουδαίο ρόλο στην αξιολόγηση της δομικής ακεραιότητας, της δυναμικής απόκρισης και της ασφάλειας των γεφυρών για ποικίλες κυκλοφοριακές συνθήκες. Με τη συνεχή εξέλιξη των υποδομών των μεταφορών, τον συνεχώς αναπτυσσόμενο αριθμό των γεφυρών και την αδιαμφισβήτητη ανάγκη για τη συντήρηση τους, η πλήρης κατανόηση της δυναμικής και η διαχείριση της πολυπλοκότητας του συστήματος VBI είναι ζωτικής σημασίας για την αποφυγή φαινομένων επιταχυνόμενης δομικής φθοράς, μειωμένης διάρκειας ζωής, αυξημένου κόστους συντήρησης και, κυρίως, φαινομένων που θέτουν σε κίνδυνο την ανθρώπινη ζωή. Αυτή η διπλωματική υλοποιεί την ανάλυση του συστήματος VBI, χρησιμοποιώντας τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις, μία υπολογιστική, υλοποιώντας μία συνεπή μέθοδο απόζευξης και επίλυσης του συστήματος, μία πειραματική, στην οποία τα αποτελέσματα προκύπτουν από μετρήσεις κατάλληλων αισθητηρίων και μία προσέγγιση προσομοίωσης, μέσω μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων και πολλαπλών σωμάτων.

Αφού οριστεί το κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο, αρχικά η διπλωματική επικεντρώνεται στην παρουσίαση και εφαρμογή μιας εξαιρετικά απλής και ακριβούς μεθοδολογίας, με κύριο πλεονέκτημα την απόζευξη του συστήματος VBI, επιτρέποντας την ανεξάρτητη εξέταση της δυναμικής συμπεριφοράς της γέφυρας και του οχήματος και έπειτα τον προσδιορισμό των αναπτυσσόμενων δυνάμεων επαφής. Επιπλέον, στη διπλωματική περιλαμβάνεται η εκτέλεση μιας πειραματικής έρευνας, που διεξήχθη για μοντέλα γέφυρας και οχήματος εργαστηριακής κλίμακας σε χώρο του Εργαστηρίου Δυναμικής Μηχανών του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Οι μετρήσεις επιτάχυννης, μέσω εγκατεστημένων επιταχυνσιομέτρων σε συγκεκριμένα σημεία της δομής του μοντέλου γέφυρας, παρέχουν πολύτιμα εμπειρικά δεδομένα, επιτρέποντας την αξιολόγηση των αναπτυσσόμενων ταλαντώσεων στην γέφυρα, λόγω της φόρτισης της από το διερχόμενο μοντέλο οχήματος. Στη συνέχεια, προσομοιώνεται η αλληλεπίδραση των μοντέλων οχήματος και γέφυρας της πειραματικής διάταξης, μέσω λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων και πολλαπλών σωμάτων, θεωρώντας όλα τα μέρη των επιμέρους μοντέλων ως εύκαμπτα (flexible). Τέλος, εξάγονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν με βάση τα αποτελέσματα των παραπάνω αναλύσεων και τη σύγκριση αυτών της προσομοίωσης με της πειραματικής διάταξης, παρουσιάζοντας ταυτόχρονα προτάσεις για τη βελτίωση και την περαιτέρω εξέλιξη των περιεχομένων της παρούσας διπλωματικής.

Στόχος αυτής της διπλωματικής είναι να παρέχει μια ολοκληρωμένη προσέγγιση στην ανάλυση της αλληλεπίδρασης οχήματος-γέφυρας (VBI), για την ενίσχυση της κατανόησης της δυναμικής συμπεριφοράς του, διότι σήμερα υπάρχει ανάγκη για την σωστή συντήρηση των ήδη υπαρχόντων γεφυρών αλλά και για την και αποτελεσματικότερη σχεδίαση νέων, που να εγγυώνται όσο το δυνατόν καλύτερη δομική ακεραιότητα και αξιοπιστία.

## 2 Θεωρητικό Υπόβαθρο

### 2.1 Extended-Modified Bridge System Method (EMBS)

Η παρούσα μεθοδολογία είναι κατάλληλη για την απόζευξη και επίλυση του συστήματος οχήματος-γέφυρας [1]. Είναι βασισμένη σε μία ανάλυση ασυμπτωτικής επέκτασης (asymmetric expansion analysis) του συζευγμένου συστήματος, η οποία αποτελεί μία συνεπή προσέγγιση απόζευξης του προβλήματος. Η εν λόγω μέθοδος τελικά επιλύει το σύστημα της γέφυρας ανεξάρτητα από τον οχήματος, τροποποιώντας την εξίσωση κίνησης της προσθέτοντας επιπλέον όρους απόσβεσης, στιβαρότητας και φόρτισης. Η απλότητα της σε σχέση με την επίλυση του συζευγμένου προβλήματος, σε συνδυασμό με την ακρίβεια της, ακόμα και για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης οποιουδήποτε τύπου γέφυρας, την καθιστούν ιδιαίτερα ελκυστική.

Αρχικά ορίζεται το σύστημα VBI με τρόπο τέτοιο, ώστε να εφαρμοστεί η μέθοδος. Ακολουθεί η αδιάστατη περιγραφή του συστήματος και στη συνέχεια επιτυγχάνεται η απόζευξη του με την ανάλυση ασυμπτωτικής επέκτασης των συμπλεγμένων εξισώσεων κίνησης, καταλήγοντας στην τελική εξίσωσης κίνησης της γέφυρας.

#### 2.1.1 Ορισμός του συστήματος οχήματος-γέφυρας

Το περιεχόμενο της παρούσας υποενότητας είναι η κατάστρωση των εξισώσεων κίνησης ενός μοντέλου οχήματος πολλαπλών βαθμών ελευθερίας και μιας γέφυρας επίσης πολλαπλών βαθμών ελευθερίας. Πρωταρχικός στόχος είναι η δυναμική του συστήματος στο κατακόρυφο επίπεδο και η απόζευξη των μηχανισμών που καθιστούν το σύστημα οχήματος-γέφυρας συζευγμένο [1].

Αρχικά, καταστρώνονται οι εξισώσεις κίνησης του οχήματος σε μητρωϊκή μορφή. Επιπλέον, οι βαθμοί ελευθερίας του οχήματος ( $\mathbf{u}_v(t)$ ) διαχωρίζονται σε αυτούς που είναι σε επαφή με τη γέφυρα ( $\mathbf{u}_w(t)$ ) και σε αυτούς του άνω μέρους του οχήματος που δεν είναι ( $\mathbf{u}_u(t)$ ). Με βάση τα προαναφερθέντα ισχύει ότι:

$$M_v \ddot{\mathbf{u}}_v(t) + C_v \dot{\mathbf{u}}_v(t) + K_v \mathbf{u}_v(t) - W_v \lambda(t) = \mathbf{F}_v(t) \quad (2.1)$$

όπου οι πίνακες  $M_v, C_v, K_v$  αποτελούν τα μητρώα μάζας, απόσβεσης, στιβαρότητας του οχήματος αντίστοιχα και είναι τετραγωνικής διάστασης, ίσης με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του οχήματος ( $n_v$ ). Τα διανύσματα  $\lambda$  και  $\mathbf{F}_v$  αντικατοπτρίζουν τις δυνάμεις επαφής μεταξύ των τροχών και της γέφυρας και τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο όχημα αντίστοιχα. Οι τελευταίες είναι μηδενικές, καθώς αφενός θεωρείται ότι οι εξισώσεις κίνησης έχουν καταστρωθεί γύρω από τη θέση στατικής ισορροπίας, αφετέρου αντικείμενο της μεθόδου

είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ οχήματος και γέφυρας. Θεωρώντας ότι οι τροχοί κινούνται μόνο στην κατακόρυφη διεύθυνση, προφανώς το μήκος του διανύσματος  $\lambda$  είναι ίσο με τον αριθμό των τροχών του οχήματος ( $n_w$ ), ενώ του  $F_v$  ίσο με  $n_v$ . Τέλος, το μητρώο  $W_v$  ορίζεται ως ο πίνακας κατεύθυνσης της επαφής (contact direction matrix) του οχήματος, ο οποίος συνδέει τις δυνάμεις επαφής με τους βαθμούς ελευθερίας του οχήματος. Ο αριθμός γραμμών του είναι ίσος με τους βαθμούς ελευθερίας του οχήματος ( $n_v$ ) και ο αριθμός στηλών ίσος με  $n_w$ , δηλαδή ταυτίζεται με τον αριθμό των δυνάμεων επαφής. Για όλα τα παραπάνω μεγέθη ισχύουν τα εξής:

$$M_v = \begin{bmatrix} m_u & 0_{n_u \times n_w} \\ 0_{n_w \times n_u} & m_w \end{bmatrix}, C_v = \begin{bmatrix} c_u & c_{u,w} \\ c_{w,u} & c_w \end{bmatrix}, K_v = \begin{bmatrix} k_u & k_{u,w} \\ k_{w,u} & k_w \end{bmatrix}, W_v = \begin{bmatrix} 0_{n_u \times n_w} \\ W_w \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$F_v = \begin{bmatrix} f_u \\ f_w \end{bmatrix}, u_v = \begin{pmatrix} u_u \\ u_w \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

όπου ο δείκτης  $u$  υποδηλώνει τους βαθμούς ελευθερίας που δεν είναι σε επαφή με τη γέφυρα, ενώ ο δείκτης  $w$  τους βαθμούς ελευθερίας των τροχών. Οι υποπίνακες που περιλαμβάνουν και τους δύο δείκτες δείχνουν την σύνδεση των τροχών με το άνω μέρος του οχήματος. Για τον πίνακα  $W_v$  ισχύει ότι για τις ελευθερίες του άνω μέρους του οχήματος ( $n_u$ ) λαμβάνεται η μηδενική τιμή, διότι δεν υπάρχει επαφή αυτών με την γέφυρα, ενώ ο  $W_w$  αποτελεί τον μοναδιαίο πίνακα διάστασης  $n_w \times n_w$ .

Στη συνέχεια, η εξίσωση κίνησης της γέφυρας σε μητρωϊκή μορφή δίνεται από τη σχέση:

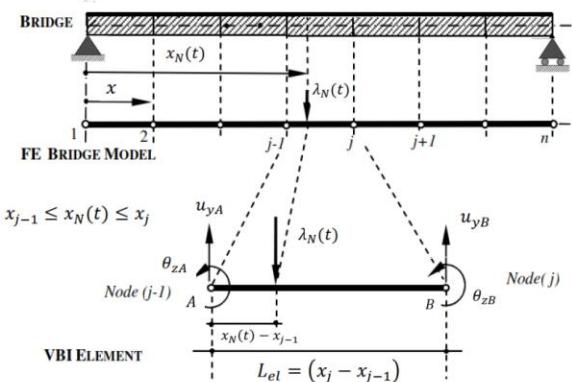
$$M_B \ddot{u}_B(t) + C_B \dot{u}_B(t) + K_B u_B(t) + W_B \lambda(t) = F_B(t) \quad (2.4)$$

όπου  $M_B, C_B, K_B$  συμβολίζουν τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και στιβαρότητας της γέφυρας, τα οποία έχουν τετραγωνική διάσταση ίση με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας της γέφυρας ( $n_B$ ). Το διάνυσμα  $F_B$ , διάστασης ( $n_B \times 1$ ), παριστάνει την εξωτερική διέγερση που ασκείται στη γέφυρα, λόγω του βάρους του οχήματος [1]. Όπως γίνεται αντιληπτό, το μέτρο του διανύσματος της διέγερσης παραμένει σταθερό, όμως αλλάζει η θέση εφαρμογής της κάθε δύναμης, διότι το όχημα κινείται πάνω στη γέφυρα. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του μητρώου  $W_B(x)$ , ο οποίος αποτελεί τον πίνακα κατεύθυνσης της επαφής της γέφυρας, που συνδέει τις δυνάμεις λόγω της επαφής και του βάρους του οχήματος με τους βαθμούς ελευθερίας της γέφυρας ( $u_B(t)$ ). Ουσιαστικά επειδή η θέση του οχήματος πάνω στη γέφυρα αλλάζει με τον χρόνο, έστω  $x = vt$ , όπου  $v$  η ταχύτητα του οχήματος, ο πίνακας  $W_B$  εξαρτάται από τον χρόνο [1]. Συνεπώς  $F_B(t) = W_B f_B$ , όπου  $f_B$  οι δυνάμεις που προέρχονται από το βάρος του οχήματος και μεταφέρονται στη γέφυρα μέσω των τροχών [2]. Ο αριθμός στοιχείων του διανύσματος  $f_B$  ισούται με τον αριθμό των τροχών ( $n_w$ ). Ο υπολογισμός του μητρώου  $W_B$  εξαρτάται από τα πεπερασμένα στοιχεία που χρησιμοποιούμε για τη μοντελοποίηση της γέφυρας. Στο πλαίσιο της διπλωματικής χρησιμοποιούνται καμπτικά πεπερασμένα στοιχεία και πιο συγκεκριμένα δισδιάστα στοιχεία δοκού Euler-Bernoulli με σταθερές γεωμετρικές ιδιότητες. Όπως αναλύεται στην ενότητα 2.2.1, το εν λόγω πεπερασμένο στοιχείο αποτελείται από δύο κόμβους στα άκρα του, με δύο ελευθερίες στον καθέναν, μια κατακόρυφη μετατόπιση

και μία κλίση. Το μητρώο  $W_B$  έχει αριθμό γραμμών ίσο με τις ελευθερίες της γέφυρας ( $n_B$ ) και αριθμό στηλών ίσο με τον αριθμό των δυνάμεων επαφής ( $n_w$ ). Για ένα συγκεκριμένο στοιχείο της γέφυρας και για μια δύναμη επαφής (Σχήμα 2.1), δηλαδή για τέσσερις διαδοχικές γραμμές που αντιπροσωπεύουν τις ελευθερίες του καμπτικού πεπερασμένου στοιχείου και για μία στήλη του πίνακα, ισχύει ότι ο υποπίνακας  $W_{B_{el}}$  του συνολικού μητρώου διαμορφώνεται ως εξής [3]:

$$W_{B_{el}}(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1^*(x_i) \\ \varphi_2^*(x_i) \\ \varphi_3^*(x_i) \\ \varphi_4^*(x_i) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

όπου  $\varphi_i^*(x_i) = \varphi_i(x_i)h(x_i)$  και  $h(x_i) = H\left(\frac{x_i}{v}\right) - H\left(\frac{(x_i-l)}{v}\right)$ , όπου  $l$  το μήκος του στοιχείου και  $x_i$  η θέση του τροχού σε αυτό. Η συνάρτηση  $h(x_i)$  παίρνει την τιμή 1, όταν ο τροχός βρίσκεται πάνω στο συγκεκριμένο στοιχείο και την τιμή 0, όταν δε βρίσκεται σε αυτό [2]. Οι συναρτήσεις  $\varphi_i$  αποτελούν τις συναρτήσεις μορφής του καμπτικού στοιχείου δοκού Euler-Bernoulli και ορίζονται στην υποενότητα 2.2.1 (σχέσεις 2.47). Με αυτό τον τρόπο πολύ εύκολα διαμορφώνεται το συνολικό μητρώο  $W_B$ .



Σχήμα 2.1: Στοιχείο δοκού Euler-Bernoulli για τον υπολογισμό του  $W_{B_{el}}$  [1].

Έχοντας καταστρώσει τις εξισώσεις για τα υποσυστήματα οχήματος και γέφυρας, στη συνέχεια παρουσιάζεται η εξίσωση κίνησης του συζευγμένου συστήματος οχήματος-γέφυρας σε μητρωϊκή μορφή:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) - W\lambda(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.6)$$

για τα μεγέθη της οποίας ισχύουν τα εξής:

$$M = \begin{bmatrix} M_v & 0 \\ 0 & M_B \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_v & 0 \\ 0 & C_B \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_v & 0 \\ 0 & K_B \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} W_v \\ -W_B \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_v \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_v \\ \mathbf{u}_B \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

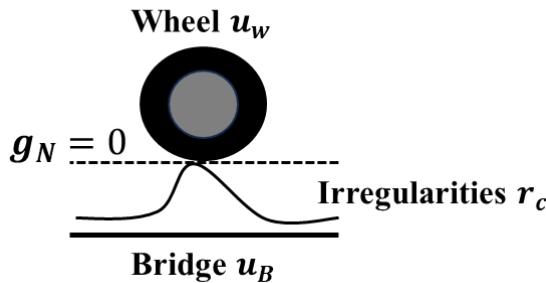
Η θεώρηση άκαμπτης επαφής (rigid contact) μεταξύ των τροχών και της γέφυρας συνεπάγεται σε συνεχή επαφή τους και άρα σε μηδενική σχετική μετατόπιση και αντίστοιχα ταχύτητα και επιτάχυνση μεταξύ των σωμάτων, κάθε χρονική στιγμή [1]. Ορίζοντας λοιπόν με τη μεταβλητή  $\mathbf{g}_N$  την σχετική μετατόπιση μεταξύ των τροχών και του οδοστρώματος, ισχύουν ότι:

$$\mathbf{g}_N = W^T \mathbf{u} - \mathbf{r}_c = \mathbf{u}_w - W_B^T \mathbf{u}_B - \mathbf{r}_c \quad (2.9)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_N = W^T \dot{\mathbf{u}} - \nu W'^T \mathbf{u} - \nu \mathbf{r}'_c = \dot{\mathbf{u}}_w - \nu W_B'^T \mathbf{u}_B - W_B^T \dot{\mathbf{u}}_B - \nu \mathbf{r}'_c \quad (2.10)$$

$$\ddot{\mathbf{g}}_N = W^T \ddot{\mathbf{u}} + 2\nu W'^T \dot{\mathbf{u}} + \nu^2 W''^T \mathbf{u} - \nu^2 \mathbf{r}''_c \quad (2.11)$$

όπου  $\mathbf{r}_c(x)$  είναι το διάνυσμα των ανομοιομορφιών της γέφυρας σε κάθε σημείο επαφής.



Σχήμα 2.2: Σχετική μετατόπιση μεταξύ τροχών και γέφυρας.

Εφαρμόζοντας τους κινηματικούς περιορισμούς της σχετικής μετατόπισης ( $\mathbf{g}_N = 0$ ), ταχύτητας ( $\dot{\mathbf{g}}_N = 0$ ) και επιτάχυνσης ( $\ddot{\mathbf{g}}_N = 0$ ) καθώς και αντικαθιστώντας τους πίνακες και τα διανύσματα των εξισώσεων (2.2), (2.3), (2.7), (2.8) στην εξίσωση (2.6) προκύπτει, ότι το διάνυσμα των δυνάμεων επαφής δίνεται από τη σχέση [1]:

$$\begin{aligned} \lambda = G^{-1} m_w^{-1} & (c_{w,u} \dot{\mathbf{u}}_u + c_w W_B^T \dot{\mathbf{u}}_B + \nu c_w W_B'^T \mathbf{u}_B + \nu c_w \mathbf{r}'_c) \\ & + G^{-1} m_w^{-1} (k_{w,u} \mathbf{u}_u + k_w W_B^T \mathbf{u}_B + k_w \mathbf{r}_c) \\ & + G^{-1} W_B^T M_B^{-1} (\mathbf{F}_B - C_B \dot{\mathbf{u}}_B - K_B \mathbf{u}_B) \\ & + G^{-1} (2\nu W_B'^T \dot{\mathbf{u}}_B + \nu^2 W_B''^T \mathbf{u}_B + \nu^2 \mathbf{r}''_c) - G^{-1} W_w m_w^{-1} \mathbf{f}_w \end{aligned} \quad (2.12)$$

όπου το μητρώο  $G^{-1}$  αναπαριστάνει τη μάζα που συμμετέχει στην επαφή μεταξύ τροχού και γέφυρας. Ο αντίστροφος πίνακας αυτού είναι [1]:

$$G = W^T m^{-1} W = m_w^{-1} + W_B^T M_B^{-1} W_B \quad (2.13)$$

Τέλος, για να προκύψουν οι εξισώσεις κίνησης του συζευγμένου συστήματος (2.14)-(2.15), αντικαθίστανται οι κινηματικοί περιορισμοί (2.9)-(2.11) και η σχέση που δίνει τις δυνάμεις επαφής (2.12), λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $\mathbf{F}_v = \mathbf{0}$ , στις εξισώσεις (2.1) και (2.4). Παρατηρείται ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν το συμπλεγμένο σύστημα περιέχουν μόνο τις αποκρίσεις του άνω τμήματος του οχήματος και τις αποκρίσεις της γέφυρας, έχοντας απαλείψει τις αποκρίσεις των τροχών [1].

$$\begin{aligned}
M_B \ddot{\mathbf{u}}_B + [C_B + W_B G^{-1} m_w^{-1} c_w W_B^T + W_B G^{-1} (2v W_B'^T - W_B^T M_B^{-1} C_B)] \dot{\mathbf{u}}_B \\
+ [K_B + W_B G^{-1} m_w^{-1} (v c_w W_B'^T + k_w W_B^T) \\
+ W_B G^{-1} (v^2 W_B''^T - W_B^T M_B^{-1} K_B)] \mathbf{u}_B \\
= \mathbf{F}_B - W_B G^{-1} (W_B^T M_B^{-1} \mathbf{F}_B + v^2 \mathbf{r}_c'') \\
- W_B G^{-1} m_w^{-1} (k_{w,u} \mathbf{u}_u + c_{w,u} \dot{\mathbf{u}}_u + k_w \mathbf{r}_c + v c_w \mathbf{r}_c')
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$m_u \ddot{\mathbf{u}}_u + c_u \dot{\mathbf{u}}_u + k_u \mathbf{u}_u = -c_{u,w} (W_B^T \dot{\mathbf{u}}_B + v W_B'^T \mathbf{u}_B + v \mathbf{r}_c') - k_{u,w} (W_B^T \mathbf{u}_B + \mathbf{r}_c) \tag{2.15}$$

## 2.1.2 Αδιαστατοποίηση του συστήματος

Αντικείμενο της υποενότητας είναι η αδιάστατη περιγραφή των εξισώσεων κίνησης του συστήματος, ορίζοντας αδιάστατες μεταβλητές με μεγέθη αναφοράς το μήκος της γέφυρας  $L$ , την θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα της γέφυρας  $\omega_B$  και τη γενικευμένη μάζα της πρώτης ιδιοσυχνότητας της γέφυρας  $m_B^g$ , η οποία υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης (2.16) [4]. Επιπλέον ο αδιάστατος πίνακας  $W^*$ , τάξης  $O(W^*) = 1$ , ορίζεται με τη βοήθεια των υποπινάκων  $k_{u,w}, c_{u,w}$ , όπως διακρίνεται στην εξίσωση (2.17), με σκοπό τη διευκόλυνση της διαδικασίας της απόζευξης της υποενότητας 2.1.3 [1].

$$m_B^g = \frac{\mu L}{2} \tag{2.16}$$

$$k_{u,w} = k_p^V W^*, c_{u,w} = c_p^V W^* \tag{2.17}$$

Η μεταβλητή  $\mu$  συμβολίζει τη μάζα της γέφυρας ανά μονάδα μήκους και οι  $k_p^V, c_p^V$  τις τιμές στιβαρότητας και απόσβεσης της κύριας ανάρτησης του οχήματος αντίστοιχα. Στον πίνακα 2.1 ταξινομούνται όλα τα αδιάστατα μεγέθη που χρειάζονται για τη παρουσίαση της μεθοδολογίας και των εξισώσεων της. Με βάση αυτά, οι αδιάστατες δυνάμεις επαφής δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
\Lambda = \frac{\lambda}{m_B^g \omega_B^2 L} = \frac{C_r}{m_w} G^{-1} (W^* \mathbf{U}_u + W_B^T \dot{\mathbf{U}}_b + S_v W_B'^T \mathbf{U}_b + S_v \mathbf{R}_c') \\
+ \frac{K_r}{m_w} G^{-1} (W^* \mathbf{U}_u + W_B^T \mathbf{U}_b + \mathbf{R}_c) + \frac{1}{m_B^g \omega_B^2 L} G^{-1} W_B^T M_B^{-1} \mathbf{F}_B \\
+ \frac{1}{m_B^g \omega_B} G^{-1} W_B^T M_B^{-1} \left( -C_B \dot{\mathbf{U}}_b - \frac{1}{\omega_B} K_B \mathbf{U}_b \right) \\
+ \frac{1}{m_B^g} G^{-1} (2S_v W_B'^T \dot{\mathbf{U}}_b + S_v^2 W_B''^T \mathbf{U}_b + S_v^2 \mathbf{R}_c'')
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Η αδιάστατη μορφή της εξίσωσης κίνησης της γέφυρας (2.14) είναι:

$$M_b \ddot{\mathbf{U}}_b + (C_b + C_I(x, S_v)) \dot{\mathbf{U}}_b + (K_b + K_I(x, S_v)) \mathbf{U}_b = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_I(\mathbf{U}_u, \dot{\mathbf{U}}_u) \tag{2.19}$$

Τα προστιθέμενα αδιάστατα μητρώα απόσβεσης και στιβαρότητας  $C_I, K_I$ , καθώς και το προστιθέμενο αδιάστατο διάνυσμα διέγερσης  $\mathbf{F}_I$  υπολογίζονται ως εξής:

$$C_I(x, S_v) = CW_{eff}^w + 2S_v W_{eff}^{B,d} - \frac{1}{\omega_B} W_{eff}^B M_B^{-1} C_B \quad (2.20)$$

$$K_I(x, S_v) = CS_v W_{eff}^{w,d} + KW_{eff}^w + S_v^2 W_{eff}^{B,dd} - \frac{1}{\omega_B^2} W_{eff}^B M_B^{-1} K_B \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} F_I(\mathbf{U}_u, \dot{\mathbf{U}}_u) = & -W_B G^{-1} \left( \frac{K_r}{m_w} \mathbf{R}_c + \frac{C_r S_v}{m_w} \mathbf{R}'_c + \frac{S_v^2}{m_B^g} \mathbf{R}''_c \right) - \frac{1}{\omega_B^2 L} W_{eff}^B M_B^{-1} \mathbf{F}_B \\ & - W_{eff}^{w*} (K_r \mathbf{U}_u + C_r \dot{\mathbf{U}}_u) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Για συντομία και μείωση του μεγέθους των εξισώσεων (2.20)-(2.22), εισάγονται οι εξής αδιάστατοι πίνακες:

$$W_{eff}^B = \frac{1}{m_B^g} W_B G^{-1} W_B^T \quad (2.23)$$

$$W_{eff}^{B,d} = \frac{1}{m_B^g} W_B G^{-1} L W_B'^T \quad (2.24)$$

$$W_{eff}^{B,dd} = \frac{1}{m_B^g} W_B G^{-1} L^2 W_B''^T \quad (2.25)$$

$$W_{eff}^w = \frac{1}{m_w} W_B G^{-1} W_B^T \quad (2.26)$$

$$W_{eff}^{w,d} = \frac{1}{m_w} W_B G^{-1} L W_B'^T \quad (2.27)$$

$$W_{eff}^{w*} = \frac{1}{m_w} W_B G^{-1} W^* \quad (2.28)$$

Είναι σημαντικό να επισημανθεί, ότι οι προσθετικοί όροι εξαρτώνται από τον χρόνο και από τους λόγους απόσβεσης και στιβαρότητας της κύριας ανάρτησης του οχήματος, ως προς τα γενικευμένα αντίστοιχα μεγέθη της πρώτης ιδιοσυχνότητας της γέφυρας. Επίσης, ο όρος της διέγερσης εξαρτάται από τις ανομοιομορφίες του οδοστρώματος και την απόκριση του κινούμενου οχήματος.

Η αδιάστατη μορφή της εξίσωσης κίνησης του άνω μέρος του οχήματος (2.15) είναι:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_B^g} m_u \ddot{\mathbf{U}}_u + \frac{1}{m_B^g \omega_B^2} k_u \mathbf{U}_u \\ & = -CW^{*T} (W_B^T \dot{\mathbf{U}}_b + S_v W_B'^T \mathbf{U}_b + S_v \mathbf{R}'_c) - KW^{*T} (W_B^T \mathbf{U}_b + \mathbf{R}_c) \end{aligned} \quad (2.29)$$

### 2.1.3 Μεθοδολογία απόζευξης του συμπλεγμένου συστήματος εξισώσεων κίνησης

Η εξίσωση κίνησης (2.19) περιλαμβάνει όρους απόκρισης του οχήματος ( $\mathbf{U}_u$  και  $\dot{\mathbf{U}}_u$ ) πολλαπλασιαζόμενους με τους λόγους  $K_r, C_r$ . Η μεθοδολογία ασυμπτωτικής επέκτασης γύρω

από μία αδιάστατη παράμετρο  $\epsilon$ , ίση με τον λόγο ιδιοσυχνοτήτων  $\Omega = \frac{\omega_p}{\omega_B}$ , όπου  $\omega_p = \sqrt{\frac{k_V^V}{m_V}}$ ,

επιτρέπει την απόζευξη του συστήματος οχήματος-γέφυρας [1]. Στην πράξη, σχεδόν πάντα ο λόγος συχνοτήτων λαμβάνει μικρές τιμές ( $O(\Omega) = 10^{-1}$ ), επιτρέποντας τη θεώρηση  $\varepsilon = \Omega$  [1]. Επομένως, θεωρώντας ότι οι προσεγγιστικές λύσεις των εξισώσεων κίνησης (2.19), (2.29) μπορούν να έχουν τη παρακάτω μορφή δυναμοσειράς του  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ):

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \varepsilon \mathbf{U}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{U}_2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.30)$$

και επιπλέον οι λόγοι  $K_r, C_r$  μπορούν να εκφραστούν ως:

$$K_r = M_r \Omega^2, C_r = 2M_r \Omega \zeta_p \quad (2.31)$$

αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (2.19), (2.29) τις (2.30), (2.31) και κρατώντας μόνο τους όρους μηδενικής τάξης ως προς  $\varepsilon$ , προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{aligned} M_b \ddot{\mathbf{U}}_0^b + (C_b + 2S_v W_{eff}^{B,d} - \frac{1}{\omega_B} W_{eff}^B M_B^{-1} C_B) \dot{\mathbf{U}}_0^b + (K_b + S_v^2 W_{eff}^{B,dd} \\ - \frac{1}{\omega_B^2} W_{eff}^B M_B^{-1} K_B) \mathbf{U}_0^b = \mathbf{F}_b - \frac{1}{\omega_B^2 L^2} W_{eff}^B M_B^{-1} \mathbf{F}_B - \frac{S_v^2}{m_B^g} W_B G^{-1} \mathbf{R}_c'' \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{m_B^g} m_u \ddot{\mathbf{U}}_0^u + \frac{1}{m_B^g \omega_B} c_u \dot{\mathbf{U}}_0^u + \frac{1}{m_B \omega_B^2} k_u \mathbf{U}_0^u = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

Παρατηρείται, ότι οι μόνες παράμετροι του οχήματος που επηρεάζουν την μηδενικής τάξης απόκριση της γέφυρας (εξίσωση (2.32)) είναι η μάζα του οχήματος ( $\mathbf{F}_b, \mathbf{F}_B, G^{-1}$ ) και η ταχύτητα του ( $S_v$ ). Ακόμη, από την εξίσωση (2.33) διακρίνεται ότι εν απουσίᾳ εξωτερικής διέγερσης, ισχύει ότι  $\mathbf{U}_0^u = \mathbf{0}$ . Επομένως γίνεται εύκολα αντιληπτό, ότι το όχημα συμπεριφέρεται ως ένα κινούμενο στερεό (rigid) σώμα πάνω στη γέφυρα.

Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν διατηρώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης ως προς  $\varepsilon$  για τη γέφυρα και το όχημα είναι:

$$\begin{aligned} M_b \ddot{\mathbf{U}}_1^b + (C_b + 2S_v W_{eff}^{B,d} - \frac{1}{\omega_B} W_{eff}^B M_B^{-1} C_B) \dot{\mathbf{U}}_1^b + (K_b + S_v^2 W_{eff}^{B,dd} \\ - \frac{1}{\omega_B^2} W_{eff}^B M_B^{-1} K_B) \mathbf{U}_1^b \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$= -2M_r \zeta^p (W_{eff}^w \dot{\mathbf{U}}_0^b + S_v W_{eff}^{w,d} \mathbf{U}_0^b + W_{eff}^{w*} \dot{\mathbf{U}}_0^u + \frac{S_v}{m_w} W_B G^{-1} \mathbf{R}_c')$$

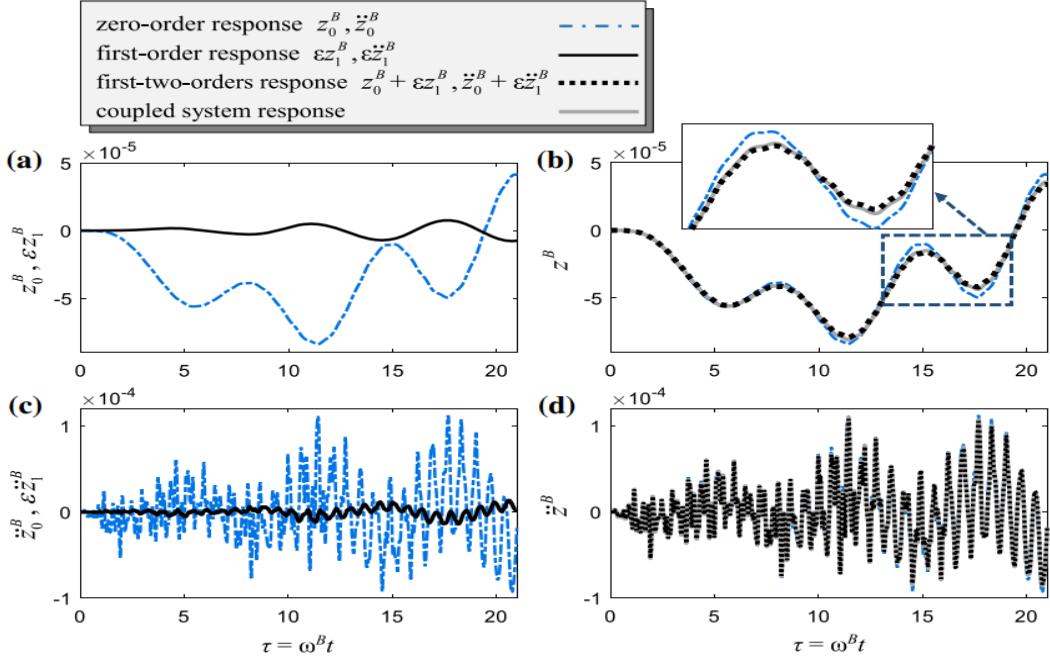
$$\begin{aligned} \frac{1}{m_B^g} m_u \ddot{\mathbf{U}}_1^u + \frac{1}{m_B^g \omega_B} c_u \dot{\mathbf{U}}_1^u + \frac{1}{m_B \omega_B^2} k_u \mathbf{U}_1^u \\ = -2M_r \zeta^p W^{*T} (W_B^T \dot{\mathbf{U}}_0^b + S_v W_B^T \mathbf{U}_0^b + S_v \mathbf{R}_c') \end{aligned} \quad (2.35)$$

Προφανώς ισχύει ότι  $\dot{\mathbf{U}}_0^u = \mathbf{0}$  στην εξίσωση (2.34), όπως προέκυψε από την (2.33). Επομένως, η απόκριση πρώτης τάξης του  $\varepsilon$  για τη γέφυρα παραμένει ανεξάρτητη από την απόκριση του κινούμενου οχήματος και εξαρτάται αποκλειστικά από τη ταχύτητα ( $S_v$ ), το βάρος ( $G^{-1}, m_w, M_r$ ) και τα χαρακτηριστικά της απόσβεσης ( $\zeta_p$ ) της κύριας ανάρτησης του. Από την άλλη, η απόκριση πρώτης τάξης του  $\varepsilon$  του άνω μέρους του οχήματος εξαρτάται αποκλειστικά

από την απόκριση μηδενικής τάξης της γέφυρας. Όπως αποδείχθηκε (Σχήμα 2.3), οι δύο πρώτες τάξεις της απόκρισης της γέφυρας παρέχουν μία πάρα πολύ καλή προσέγγιση της λύσης του συζευγμένου συστήματος [1]. Το σύστημα που ελέγχθηκε περιλαμβάνει ένα επιβατηγό τρένο και τη γέφυρα Skidtrask στη Σουηδία [5, 6]. Για αυτό το λόγο, δε χρειάζεται να αναπτυχθούν οι εξισώσεις που περιλαμβάνουν όρους ανώτερης τάξης του  $\epsilon$ , αφού η επίδραση τους στην απόκριση της γέφυρας είναι πολύ μικρής σημασίας.

Πίνακας 2.1: Αδιάστατα μεγέθη του συστήματος οχήματος-γέφυρας.

Αδιάστατο διάνυσμα μετατόπισης οχήματος $U_u = \frac{\mathbf{u}_u}{L}$	Λόγος μάζας οχήματος-γέφυρας $M_r = \frac{m_v}{m_B^g}$
Αδιάστατο διάνυσμα μετατόπισης γέφυρας $U_b = \frac{\mathbf{u}_B}{L}$	Λόγος στιβαρότητας ανάρτησης-γέφυρας $K_r = \frac{k_p^V}{m_B^g \omega_B^2}$
Αδιάστατο διάνυσμα δυνάμεων επαφής $\Lambda = \frac{1}{m_B^g \omega_B^2 L} \lambda$	Λόγος απόσβεσης ανάρτησης-γέφυρας $C_r = \frac{c_p^V}{m_B^g \omega_B}$
Αδιάστατο μητρώο μάζας γέφυρας $M_b = \frac{1}{m_B^g} M_B$	Λόγος ιδιοσυχνοτήτων $\Omega = \frac{\omega_p}{\omega_B}$
Αδιάστατο μητρώο απόσβεσης γέφυρας $C_b = \frac{1}{m_B^g \omega_B} C_B$	Αδιάστατο μέτρο απόσβεσης ανάρτησης $\zeta_p = \frac{c_p^V}{2m_v \omega_p}$
Αδιάστατο μητρώο στιβαρότητας γέφυρας $K_b = \frac{1}{m_B^g \omega_B^2} K_B$	Λόγος μάζας τροχών-γέφυρας $M_w^r = \frac{m_w}{m_B^g}$
Αδιάστατο διάνυσμα διέγερσης γέφυρας $F_b = \frac{1}{m_B^g \omega_B^2 L} F_B$	Αδιάστατος χρόνος $\tau = \omega_B t$
Αδιάστατο διάνυσμα ανομοιομορφιών $R_c = \frac{1}{L} r_c$	Παράμετρος ταχύτητας $S_v = \frac{v}{\omega_B L}$
Αδιάστατη κλίση των ανομοιομορφιών $R'_c = r'_c$	Αδιάστατη καμπυλότητα των ανομοιομορφιών $R''_c = L r''_c$



Σχήμα 2.3: Αδιάστατη μετατόπιση και επιτάχυνση στο μέσο της γέφυρας Skidtrask [1].

Συνεπώς, με βάση όλα τα παραπάνω, προκύπτει η αποζευγμένη εξίσωση κίνησης της γέφυρας σε αδιάστατη μορφή:

$$M_b \ddot{\mathbf{U}}_b + (C_b + C_{emb}) \dot{\mathbf{U}}_b + (K_b + K_{emb}) \mathbf{U}_b = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{emb} \quad (2.36)$$

με τα προστιθέμενα αδιάστατα μητρώα και αδιάστατο διάνυσμα διέγερσης:

$$C_{emb} = C_r W_{eff}^w + 2S_v W_{eff}^{B,d} - \frac{1}{\omega_B} W_{eff}^B M_B^{-1} C_B \quad (2.37)$$

$$K_{emb} = C_r S_v W_{eff}^{w,d} + S_v^2 W_{eff}^{B,dd} - \frac{1}{\omega_B^2} W_{eff}^B M_B^{-1} K_B \quad (2.38)$$

$$\mathbf{F}_{emb} = -\frac{1}{\omega_B^2 L} W_{eff}^B M_B^{-1} \mathbf{F}_B - W_B G^{-1} \left( \frac{C_r S_v}{m_w} \mathbf{R}'_c + \frac{S_v^2}{m_B^g} \mathbf{R}''_c \right) \quad (2.39)$$

Ισοδύναμα, η αποζευγμένη εξίσωση κίνησης της γέφυρας μπορεί να εκφραστεί και σε διαστατοποιημένη μορφή:

$$M_B \ddot{\mathbf{u}}_B + (C_B + C_{EMBS}) \dot{\mathbf{u}}_B + (K_B + K_{EMBS}) \mathbf{u}_B = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_{EMBS} \quad (2.40)$$

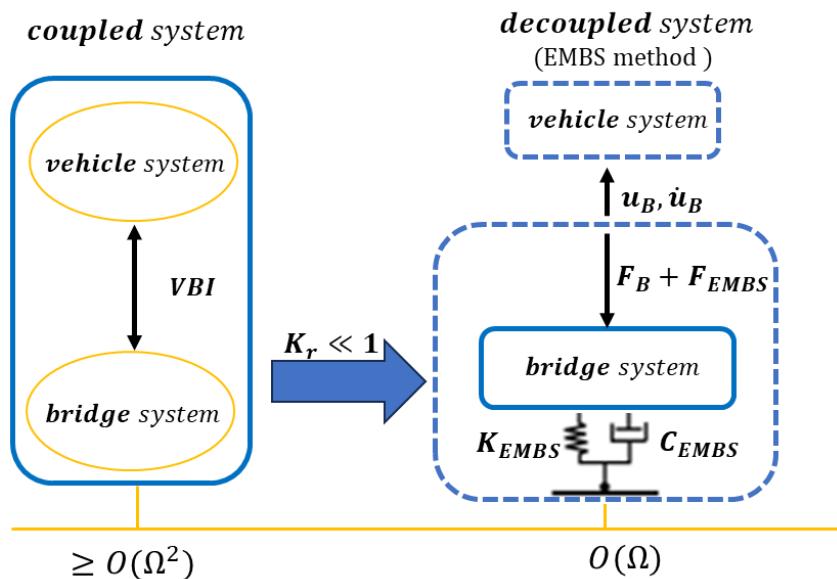
όπου τα προστιθέμενα διαστατοποιημένα μητρώα απόσβεσης, στιβαρότητας της γέφυρας και το προστιθέμενο διαστατοποιημένο διάνυσμα διέγερσης δίνονται από τις σχέσεις:

$$C_{EMBS} = W_B G^{-1} m_w^{-1} c_w W_B^T + W_B G^{-1} (2v W_B'^T - W_B^T M_B^{-1} C_B) \quad (2.41)$$

$$K_{EMBS} = v W_B G^{-1} m_w^{-1} c_w W_B'^T + W_B G^{-1} (v^2 W_B''^T - W_B^T M_B^{-1} K_B) \quad (2.42)$$

$$\mathbf{F}_{EMBS} = -W_B G^{-1} (W_B^T M_B^{-1} \mathbf{F}_B + v^2 \mathbf{r}'_c) - v W_B G^{-1} m_w^{-1} c_w \mathbf{r}'_c \quad (2.43)$$

Είναι αντιληπτό, ότι οι προστιθέμενοι όροι εξαρτώνται από τον χρόνο. Ακόμη, όλες οι παράμετροι, που χρειάζονται για τον υπολογισμό αυτών, είναι γνωστοί κάθε χρονική στιγμή. Για την αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.36) ή (2.40) εφαρμόζεται η μέθοδος Newmark (υποενότητα 2.4.2), με παραμέτρους  $\alpha = 0.25$  και  $\beta = 0.5$ . Η μέθοδος EMBS υπερέχει από άλλες μεθόδους (πχ Moving Load Approximation), διότι επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό της επιτάχυνσης, για την οποία ουσιαστικά χρειάζεται μεγαλύτερος αριθμός ιδιοσυχνοτήτων σε σχέση με την μετατόπιση [1]. Επιπροσθέτως, η μέθοδος είναι απλούστερη από τη συζευγμένη ανάλυση του συστήματος οχήματος-γέφυρα, αφού δε χρειάζεται να μοντελοποιηθεί λεπτομερώς το όχημα, σε περίπτωση που επιθυμείται μόνο η εξέταση της απόκρισης της γέφυρας. Σε περίπτωση που πάντως επιθυμείται, η μέθοδος δίνει την απόκριση του οχήματος με αντικατάσταση της υπολογισμένης αδιάστατης ή διαστατοποιημένης απόκρισης της γέφυρας στην εξίσωση (2.15) ή (2.29) αντίστοιχα (Σχήμα 2.4). Επιπλέον οι δυνάμεις επαφής υπολογίζονται αντικαθιστώντας τις αποκρίσεις του συστήματος στις εξισώσεις (2.12) ή (2.18).



Σχήμα 2.4: Σχηματική αναπαράσταση της συζευγμένης ανάλυσης και της EMBS.

## 2.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έχει ως αφετηρία τη γεωμετρική διακριτοποίηση της εξεταζόμενης κατασκευής, δηλαδή τον χωρισμό της σε μικρότερα τμήματα. Για κάθε ένα από τα στοιχεία που προκύπτουν, η λύση σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο αυτών εκφράζεται συναρτήσει της απόκρισης ορισμένων επιλεγμένων σημείων (κόμβων) και ειδικών συναρτήσεων με γνωστή χωρική εξάρτηση (συναρτήσεις μορφής). Έπειτα, προσδιορίζονται τα μητρώα μάζας, στιβαρότητας και το διάνυσμα διέγερσης του κάθε στοιχείου. Αφού μετασχηματιστούν αυτά, ώστε οι μετατοπίσεις και οι δυνάμεις να αναφέρονται σε ένα κοινό

σύστημα συντεταγμένων, καταστρώνονται οι εξισώσεις κίνησης της συνολικής κατασκευής και άρα τα ολικά μητρώα της, επιβάλλοντας ταυτόχρονα τις συνοριακές συνθήκες. Τελικά, το σύστημα επιλύεται και προσδιορίζεται η απόκριση του, αφού όπως προαναφέρθηκε η απόκριση σε κάθε εσωτερικό σημείο κάποιου πεπερασμένου στοιχείου είναι γνωστή συνάρτηση της απόκρισης των κόμβων του στοιχείου [7]. Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας και ειδικότερα στο κεφάλαιο 3, χρησιμοποιούνται καμπτικά πεπερασμένα στοιχεία για την μοντελοποίηση της γέφυρας, επομένως λοιπόν θα παρουσιαστούν κάποιες πληροφορίες για αυτά. Προφανώς, για τη μοντελοποίηση της πειραματικής κατασκευής μέσω CAE pre-processing λογισμικών (κεφάλαιο 5) χρησιμοποιήθηκαν επιφανειακά στοιχεία (shell elements), όπως τριγωνικά (tria) και τετράπλευρα (quad), καθώς και τρισδιάστατα στοιχεία (solid elements), όπως πεντάεδρα (penta) και εξάεδρα (hexa). Όμως, επειδή δε χρειάστηκε να καταστρωθούν τα μητρώα αυτών και ολόκληρης της κατασκευής χειροκίνητα, δε θα παρουσιαστούν οι πίνακες μάζας, στιβαρότητας και οι συναρτήσεις μορφής τους. Πάντως η υπόλοιπη διαδικασία που συμπληρώνει τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και παρουσιάζεται παρακάτω είναι ίδια και για αυτά τα στοιχεία, απλώς γίνεται αυτοματοποιημένα μέσω των λογισμικών. Σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, οι άγνωστοι είναι οι μετατοπίσεις (μέθοδος στιβαρότητας), ενώ υπάρχουν μεθοδολογίες στις οποίες άγνωστοι μπορεί να είναι οι εσωτερικές τάσεις ή δυνάμεις (μέθοδος ευκαμψίας) ή συνδυασμός δυνάμεων και μετατοπίσεων (υβριδική μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων) [7].

### 2.2.1 Καμπτικό πεπερασμένο στοιχείο

Έστω στοιχείο δοκού Euler-Bernoulli με μήκος  $l$ , σταθερό μέτρο ελαστικότητας  $E$ , πυκνότητα  $\rho$ , επιφανειακή ροπή αδράνειας  $I$  και επιφάνεια διατομής  $A$ . Η εξίσωση κίνησης του δίνεται από τον τύπο:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (2.44)$$

Για μηδενικό εξωτερικό εγκάρσιο φορτίο  $q$  και στατικές συνθήκες, προκύπτει  $EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$  και άρα  $w(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$ , όπου οι όροι  $a_1, a_2, a_3, a_4$  είναι σταθεροί. Επομένως για το δυναμικό πρόβλημα θεωρείται προσεγγιστική λύση της μορφής:

$$w(x, t) = a_1(t) + a_2(t)x + a_3(t)x^2 + a_4(t)x^3 \quad (2.45)$$

όπου οι χρονικές συναρτήσεις  $a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t)$  εκφράζονται με βάση τις τιμές της εγκάρσιας μετατόπισης και της κλίσης στα άκρα (Σχήμα 2.5). Επομένως, η σχέση (2.45) παίρνει την μορφή:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^4 \varphi_n(x) w_n(t) \quad (2.46)$$

με τις συναρτήσεις μορφής  $\varphi_n$  να δίνονται ακολούθως από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
\varphi_2(x) &= l\left[\left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \\
\varphi_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
\varphi_4(x) &= l\left[-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]
\end{aligned} \tag{2.47}$$



Σχήμα 2.5: Συνοριακές συνθήκες καμπτικού πεπερασμένου στοιχείου.

Με εφαρμογή των ορισμών της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του εξεταζόμενου καμπτικού στοιχείου,  $T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{w}^2(x, t) dt$  και  $V = \frac{1}{2} \int_0^l EI[w''(x, t)]^2 dx$  και αντικατάσταση της σχέσης (2.46) σε αυτούς, προκύπτει το μητρώο μάζας του καμπτικού πεπερασμένου στοιχείου:

$$M_e = \frac{1}{420} \rho Al \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}_{sym} \tag{2.48}$$

και το μητρώο στιβαρότητας του:

$$K_e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}_{sym} \tag{2.49}$$

Τέλος, τα στοιχεία του διανύσματος διέγερσης του προσδιορίζονται από τη σχέση:

$$q_{e_n}(t) = \int_0^l q(x, t) \varphi_n(x) dx \tag{2.50}$$

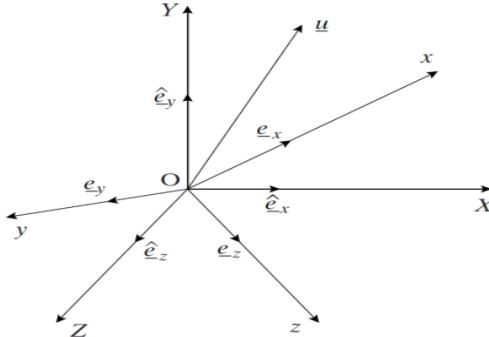
## 2.2.2 Μετασχηματισμός συντεταγμένων

Γενικά οι κατασκευές αποτελούνται από σύνολο φορέων, οι οποίοι έχουν διαφορετικό προσανατολισμό μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να κρίνεται αναγκαίος ο προσανατολισμός των συντεταγμένων κάθε στοιχείου σε ένα κοινό σύστημα συντεταγμένων, πριν την κατάστρωση των εξισώσεων κίνησης του συνολικού συστήματος. Στην προηγούμενη υποενότητα, τα μητρώα μάζας, στιβαρότητας και τα διανύσματα διέγερσης που παρουσιάστηκαν έχουν

αναπτυχθεί με βάση μετατοπίσεις μετρούμενες ως προς άξονες, που έχουν προσανατολισμό εξαρτώμενο από τον προσανατολισμό των εξεταζόμενων στοιχείων.

Έστω ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων  $f: Oxyz$  και ένα καθολικό σύστημα συντεταγμένων  $F: OXYZ$  (Σχήμα 2.6). Με βάση αυτά κάθε διάνυσμα  $\mathbf{u}$  μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z = \hat{u}_x \hat{\mathbf{e}}_x + \hat{u}_y \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{u}_z \hat{\mathbf{e}}_z \quad (2.51)$$



Σχήμα 2.6: Τοπικό και καθολικό σύστημα αναφοράς [7].

Με σχηματισμό του εσωτερικού γινομένου του διανύσματος  $\mathbf{u}$  με τα διανύσματα  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , προκύπτει ότι  $\mathbf{u} = T\hat{\mathbf{u}}$ , όπου ο πίνακας μετασχηματισμού  $T$  δίνεται από τη σχέση:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\widehat{xOX}) & \cos(\widehat{xOY}) & \cos(\widehat{xOZ}) \\ \cos(\widehat{yOX}) & \cos(\widehat{yOY}) & \cos(\widehat{yOZ}) \\ \cos(\widehat{zOX}) & \cos(\widehat{zOY}) & \cos(\widehat{zOZ}) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Εύκολα, με τους ορισμούς κινητικής και δυναμικής ενέργειας του στοιχείου και τη θεώρηση του δυνατού έργου των εξωτερικών φορτίσεων, προκύπτουν τα καθολικά μητρώα μάζας, στιβαρότητας και το καθολικό διάνυσμα διέγερσης ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $OXYZ$ :

$$\begin{aligned} \hat{M} &= T^T M_e T \\ \hat{K} &= T^T K_e T \\ \hat{f} &= T^T q_e \end{aligned} \quad (2.53)$$

Στο κεφάλαιο 3, επειδή τα στοιχεία δοκού έχουν όλα τον ίδιο προσανατολισμό και το τοπικό σύστημα αναφοράς έχει ίδιο προσανατολισμό με το καθολικό, ο πίνακας μετασχηματισμού  $T$  είναι ο μοναδιαίος.

### 2.2.3 Κατάστρωση ολικών μητρώων

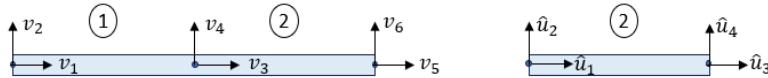
Για να προκύψουν οι εξισώσεις κίνησης της συνολικής κατασκευής χρειάζεται προφανώς να συνδεθούν τα μητρώα όλων των στοιχείων. Για αυτό το λόγο, θα παρουσιασθεί συνοπτικά η

λεγόμενη μέθοδος άμεσης στιβαρότητας [7]. Αφού πρώτα γίνει η αρίθμηση των μετατοπίσεων  $\nu$  όλων των κόμβων της κατασκευής, στη συνέχεια ορίζεται ότι οι μετατοπίσεις που έχουν εκφραστεί ως προς το κοινό σύστημα συντεταγμένων  $\hat{\mathbf{u}}_n$  συνδέονται με το διάνυσμα μετατόπισης  $\nu$ , μέσω της σχέσης:

$$\hat{\mathbf{u}}_n = L_n \nu \quad (2.54)$$

με τον δείκτη  $n$  να εκφράζει τον αριθμό στοιχείων της κατασκευής και το ορθογώνιο μητρώο  $L_n$  να έχει μόλις ένα μοναδιαίο στοιχείο σε κάθε του γραμμή, ενώ τα υπόλοιπα είναι μηδενικά [7]. Για να γίνει περισσότερο αντιληπτό παρουσιάζεται το παράδειγμα του σχήματος 2.7, στο οποίο διακρίνονται ξεκάθαρα οι μετατοπίσεις  $\hat{\mathbf{u}}_n$  και  $\nu$ . Ο λεγόμενος πίνακας εντοπισμού για

$$\text{το δεύτερο στοιχείο του σχήματος 2.7 ισούται με } L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 2.7: Δοκός χωρισμένη σε δύο καμπτικά πεπερασμένα στοιχεία.

Θεωρώντας ότι η δυναμική και η κινητική ενέργεια ολόκληρης της κατασκευής είναι το άθροισμα των αντίστοιχων μεγεθών των επιμέρους στοιχείων της και ότι το δυνατό έργο των εξωτερικών φορτίσεων ισούται με το άθροισμα των δυνατών έργων που εκτελούνται σε κάθε στοιχείο της κατασκευής, προκύπτουν τα ολικά μητρώα μάζας, στιβαρότητας και το ολικό διάνυσμα διέγερσης ως εξής:

$$M = \sum_{n=1}^N M_n, \quad K = \sum_{n=1}^N K_n, \quad f = \sum_{n=1}^N f_n \quad (2.55)$$

με τα μητρώα  $M_n$ ,  $K_n$  και το διάνυσμα  $f_n$  να αναφέρονται στο εκάστοτε στοιχείο  $n$  της διάταξης και να δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} M_n &= L_n^T \hat{M} L_n \\ K_n &= L_n^T \hat{K} L_n \\ f_n &= L_n^T \hat{f} L_n \end{aligned} \quad (2.56)$$

Τελικά, η εξίσωση κίνησης της κατασκευής εκφράζεται ως:

$$M \ddot{\nu} + K \nu = f(t) \quad (2.57)$$

Ο πιο απλός τρόπος εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών είναι η διαγραφή των γραμμών και στηλών των μητρώων και των στοιχείων των διανυσμάτων, για τις μετατοπίσεις των κόμβων που είναι γνωστές εξαρχής.

### 2.3 Κλασική απόσβεση - Μέθοδος Caughey

Στην περίπτωση συστημάτων με απόσβεση, όπως και στις δύο από τις τρεις περιπτώσεις που εξετάζονται στο κεφάλαιο 3, η εξίσωση κίνησης της συνολικής κατασκευής δίνεται από τη σχέση:

$$M\ddot{\boldsymbol{v}} + C\dot{\boldsymbol{v}} + K\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(t) \quad (2.58)$$

Στην πράξη, τις περισσότερες φορές δεν είναι δυνατός ο αναλυτικός υπολογισμός του πίνακα απόσβεσης  $C$ . Η μέθοδος Caughey ουσιαστικά υπολογίζει τον πίνακα απόσβεσης  $C$  με τρόπο, ώστε το σύστημα να διατηρεί τις ιδιομορφές που έχει όταν η απόσβεση είναι αμελητέα [7].

Έστω λοιπόν ο πίνακας ιδιομορφών  $\Phi$  που προκύπτει από την επίλυση του ιδιοπροβλήματος. Επειδή κάθε διάνυσμα σε χώρο  $N$  μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιομορφών, μία λύση των εξισώσεων κίνησης (2.57) μπορεί να έχει την μορφή:

$$\boldsymbol{v}(t) = \Phi\boldsymbol{\tau}(t) \quad (2.59)$$

όπου  $\boldsymbol{\tau}(t)$  συμβολίζει το διάνυσμα των άγνωστων χρονικών τελεστών (κύριες συντεταγμένες) [7]. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψιν και τις ισχύουσες συνθήκες ορθογωνικότητας  $\Phi^T M \Phi = I$

και  $\Phi^T K \Phi = \Lambda = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix}$ , η εξίσωση κίνησης (2.58) μπορεί να τεθεί στη μορφή:

$$\ddot{\boldsymbol{\tau}} + Z\dot{\boldsymbol{\tau}} + \Lambda\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p}(t) \quad (2.60)$$

με διάνυσμα διέγερσης:

$$\boldsymbol{p}(t) = \Phi^T \boldsymbol{f}(t) \quad (2.61)$$

και τον πίνακα:

$$Z = \Phi^T C \Phi \quad (2.62)$$

Αν ο μετασχηματισμός της σχέσης (2.59) προκαλεί τη διαγωνιοποίηση του  $Z$ , ισχύει ότι:

$$Z = \begin{pmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\zeta_n\omega_n \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Από τη σχέση (2.62) και τις συνθήκες ορθογωνικότητας, ο πίνακας απόσβεσης που προκύπτει με τη μέθοδο Caughey δίνεται από τη σχέση:

$$C = M\Phi Z\Phi^T M \quad (2.64)$$

Έτσι αφού επιλεγεί το μέτρο απόσβεσης για κάθε ιδιομορφή (0.005 για μεταλλικές κατασκευές), προσδιορίζεται ο πίνακας απόσβεσης μέσω της σχέσης (2.64).

## 2.4 Αριθμητικές μέθοδοι

Στο πλαίσιο της διπλωματικής γίνεται χρήση μεθοδολογιών αριθμητικής επίλυσης για τον προσδιορισμό των αποκρίσεων της γέφυρας και του οχήματος (κεφάλαιο 3). Για την αριθμητική ολοκλήρωση της αποζευγμένης εξίσωσης κίνησης της γέφυρας (2.40) εφαρμόζεται η μέθοδος Newmark με παραμέτρους  $\alpha = 0.25$  και  $\beta = 0.5$ . Όταν τα χαρακτηριστικά των αναρτήσεων είναι γραμμικά, τότε και η αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης του άνω μέρους του οχήματος γίνεται με την μέθοδο Newmark και τις ίδιες παραμέτρους. Η μέθοδος Newmark είναι έμμεση, που σημαίνει ότι γενικά η επίλυση σε κάθε χρονικό βήμα απαιτεί εφαρμογή επαναλήψεων [8]. Επειδή όμως εδώ χρησιμοποιείται για την ολοκλήρωση πολυβάθμιου συστήματος γραμμικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, οι νέες τιμές απόκρισης υπολογίζονται άμεσα. Στις περιπτώσεις όμως που εξετάζονται στην ενότητα 3.4, για τα μοντέλα οχήματος με μη γραμμικά χαρακτηριστικά αναρτήσεων, η αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης του οχήματος υλοποιείται με τη μέθοδο κεντρικής διαφοράς (Central-Difference Method), διότι η μέθοδος Newmark δεν είναι ευσταθής, εξαιτίας ίσως των μεγάλων μη γραμμικών όρων και των υψηλών συντελεστών απόσβεσης των αναρτήσεων. Επιπλέον, λόγω των τετραγωνικών όρων ταχύτητας που χαρακτηρίζουν τα μη γραμμικά χαρακτηριστικά της απόσβεσης, είναι αναγκαία η εφαρμογή της μεθόδου Newton-Raphson για την επίλυση του συστήματος μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, που είναι αποτέλεσμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης. Η μέθοδος κεντρικής διαφοράς είναι άμεση, επομένως στην περίπτωση που υπάρχει μόνο μη γραμμικός όρος ελατηρίου (υποενότητα 3.4.1), η λύση του συστήματος προκύπτει και χωρίς την εφαρμογή της μεθόδου Newton-Raphson. Στις επόμενες υποενότητες θα αναπτυχθούν συνοπτικά οι τρεις μέθοδοι που αναφέρθηκαν και εφαρμόζονται στο κεφάλαιο 3, για τις ανάγκες επίλυσης του συστήματος VBI.

### 2.4.1 Μέθοδος Newton-Raphson

Έστω ότι ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων τίθεται στη συμπαγή μορφή  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , όπου  $\mathbf{x}$  το διάνυσμα των  $n$  αγνώστων. Μια από τις μεθόδους επίλυσης αυτού είναι η παρουσιαζόμενη μέθοδος Newton-Raphson. Θεωρώντας μια αρχική εκτίμηση της επιζητούμενης λύσης, έστω  $\mathbf{x}_0$  και έναν μικρό θετικό αριθμό, έστω  $\varepsilon$ , ελέγχεται αν  $|f(\mathbf{x}_0)| \leq \varepsilon$  [8]. Αν ναι, τότε η  $\mathbf{x}_0$  είναι αποδεκτή λύση, αλλιώς αναζητείται μία βελτιωμένη εκτίμηση της λύσης  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0$ . Για τον προσδιορισμό της διόρθωσης  $\Delta\mathbf{x}_0$ , γίνεται αντικατάσταση της  $\mathbf{x}_1$  στην  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  και ανάπτυξη της σειράς Taylor γύρω από την  $\mathbf{x}_0$ , παραλείποντας τους όρους δεύτερης και ανώτερης τάξης. Έτσι, θεωρώντας και ότι πρέπει να ισχύει  $f(\mathbf{x}_1) \approx \mathbf{0}$ , προκύπτει ότι πρέπει να ικανοποιείται το γραμμικό σύστημα:

$$J(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}_0 = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \quad (2.65)$$

όπου  $J(\mathbf{x}_0)$  ο ιακωβιανός πίνακας του συστήματος στο σημείο  $\mathbf{x}_0$ . Αν  $|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)| \leq \varepsilon$ , τότε η εκτίμηση  $\mathbf{x}_1$  είναι αποδεκτή. Σε άλλη περίπτωση, η ίδια διαδικασία βελτίωσης της εκτίμησης επαναλαμβάνεται, μέχρι να προκύψει προσεγγιστική λύση που να ικανοποιεί τις συνθήκες ακρίβειας. Σημειώνεται ότι ως κριτήριο σύγκλισης είναι δυνατόν να ληφθεί το ενεργειακό κριτήριο  $|\mathbf{f}(\mathbf{x}_m)\Delta\mathbf{x}_m| \leq \varepsilon$  ή η σχέση  $|\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_m| \leq \varepsilon$  [8]. Στην παρούσα διπλωματική, επιλέγεται η εξέταση του τελευταίου κριτηρίου για την εφαρμογή της μεθόδου.

#### 2.4.2 Μέθοδος Newmark

Αποτελεί μία πολύ δημοφιλή μέθοδο, λόγω της ικανότητας της να προσφέρει καλές ιδιότητες ευστάθειας και σύγκλισης σε ένα μεγάλο εύρος δυναμικών προβλημάτων. Ουσιαστικά, η μέθοδος βασίζεται στην υπόθεση ότι η επιτάχυνση μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο. Η εφαρμογή της είναι δυνατόν να γίνει με δύο τρόπους: είτε να θεωρηθεί ως άγνωστο το διάνυσμα μετατοπίσεων, είτε το διάνυσμα επιταχύνσεων. Στη δεύτερη περίπτωση χρειάζεται γενικά μικρότερο βήμα ολοκλήρωσης  $h$  από την πρώτη, καθώς απαιτείται ένας μεγαλύτερος αριθμός ιδιοσυχνοτήτων για τον ακριβή υπολογισμό της επιτάχυνσης. Στο πλαίσιο της διπλωματικής εφαρμόζεται η πρώτη περίπτωση (εξισώσεις (2.66)). Όπως προαναφέρθηκε, η μέθοδος Newmark είναι έμμεση και η επίλυση σε κάθε βήμα γενικά απαιτεί εφαρμογή επαναλήψεων. Οι παράμετροι της α και β ρυθμίζονται με βάση την επιζητούμενη ακρίβεια και την ευστάθεια της μεθόδου [8].

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{m+1} &= \frac{\beta}{\alpha h} (\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_m) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \dot{\mathbf{x}}_m + h \left(1 - \frac{\beta}{2\alpha}\right) \ddot{\mathbf{x}}_m \\ \ddot{\mathbf{x}}_{m+1} &= \frac{1}{\alpha h^2} (\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_m) - \frac{1}{\alpha h} \dot{\mathbf{x}}_m + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \ddot{\mathbf{x}}_m\end{aligned} \quad (2.66)$$

#### 2.4.3 Μέθοδος κεντρικής διαφοράς (Central-Difference Method)

Πρόκειται για μία άμεση μέθοδο ολοκλήρωσης διπλού βήματος. Για να προκύψουν οι σχέσεις που δίνουν την ταχύτητα και την επιτάχυνση, σύμφωνα με την εν λόγω μέθοδο, πρέπει αρχικά να αναπτυχθεί η σειρά Taylor γύρω από τη χρονική στιγμή  $t_m$  με υπολογισμό και της δεύτερης παραγώγου του διανύσματος μετατόπισης  $\mathbf{x}$  (σχέσεις 2.67), διότι το σύστημα κανονικών διαφορικών εξισώσεων είναι δεύτερης τάξης.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{m+1} &= \mathbf{x}(t_m + h) = \mathbf{x}(t_m) + h\dot{\mathbf{x}}(t_m) + \frac{1}{2}h^2\ddot{\mathbf{x}}(t_m) + O(h^3) \\ \mathbf{x}_{m-1} &= \mathbf{x}(t_m - h) = \mathbf{x}(t_m) - h\dot{\mathbf{x}}(t_m) + \frac{1}{2}h^2\ddot{\mathbf{x}}(t_m) + O(h^3)\end{aligned} \quad (2.67)$$

Έτσι, εύκολα προκύπτουν η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος του διανύσματος  $x$  ως προς τον χρόνο (εξισώσεις 2.68), οι οποίες αντικαθίστανται στις εξισώσεις κίνησης με τον άγνωστο πλέον να είναι το διάνυσμα μετατόπισης  $x_{m+1}$ .

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= \frac{x_{m+1} - x_{m-1}}{2h} + O(h^2) \\ \ddot{x}_m &= \frac{x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1}}{2h} + O(h^2)\end{aligned}\tag{2.68}$$

Η μόνη επιπλοκή της μεθόδου είναι ότι την χρονική στιγμή  $t_1$ , όπως φαίνεται και από τις σχέσεις (2.68), απαιτείται το διάνυσμα απόκρισης  $x_{-1}$ . Εύκολα όμως, καταστρώνοντας το σύστημα των σχέσεων (2.68) για  $m = 0$ , το πρόβλημα επιλύεται. Το μειονέκτημα της μεθόδου κεντρικής διαφοράς είναι ότι η βελτίωση της ακρίβειας του αποτελέσματος απαιτεί τον υπολογισμό παραγώγων υψηλής τάξης, οι οποίες είναι πιθανό να είναι δύσκολο να υπολογιστούν ή να μην υπάρχουν [8].

## 2.5 Συστήματα Πολλαπλών Σωμάτων (Multibody Systems)

Ένα σύστημα πολλαπλών σωμάτων ορίζεται ως ένα σύνολο διασυνδεδεμένων μεταξύ τους σωμάτων, είτε αυτά είναι άκαμπτα ή στερεά (rigid), είτε εύκαμπτα ή παραμορφώσιμα (flexible). Η κίνηση των σωμάτων είναι κινηματικά περιορισμένη, λόγω διαφόρων τύπων αρθρώσεων που επιβάλλονται ανάμεσα στα σώματα, καθένα από τα οποία μπορεί να υφίσταται μεγάλες μεταφορικές και περιστροφικές μετατοπίσεις [9]. Ο όρος άκαμπτο σώμα χαρακτηρίζει ένα σώμα του οποίου η παραμόρφωση θεωρείται τόσο μικρή, ώστε η απόσταση μεταξύ δύο σημείων του σώματος να παραμένει σταθερή κάθε χρονική στιγμή [9].

Η εξέταση της δυναμικής ενός συστήματος πολλαπλών σωμάτων είναι δυνατό να βασιστεί στις αρχές της Νευτώνειας ή της Αναλυτικής Δυναμικής. Η εφαρμογή των αρχών της αναλυτικής δυναμικής είναι πιο εύκολη σε σχέση με της νευτώνειας για σύνθετα συστήματα, διότι οι κεντρικές έννοιες είναι το έργο και η κινητική ενέργεια, που είναι βαθμωτά μεγέθη και η θεμελίωση των αρχών της γίνεται έτσι, ώστε το δυναμικό σύστημα να εξετάζεται ως σύνολο, χωρίς την ανάγκη προσδιορισμού των δυνάμεων που προκύπτουν από κινηματικούς περιορισμούς [10]. Βασικό ρόλο σε αυτό έχουν οι γενικευμένες συντεταγμένες, οι οποίες ορίζονται παρακάτω. Επιπλέον, ορίζονται οι δεσμοί κίνησης που χαρακτηρίζουν ένα σύστημα και διαμορφώνονται οι εξισώσεις κίνησης του.

### 2.5.1 Γενικευμένες συντεταγμένες και δεσμοί κίνησης

Κάθε σύνολο μεταβλητών, που προσδιορίζει την ακριβή θέση των μελών ενός συστήματος, ονομάζεται σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων και συμβολίζεται συνήθως ως  $q_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ,

όπου  $n$  το σύνολο των γενικευμένων συντεταγμένων) [10]. Κάθε δυναμικό σύστημα είναι πιθανό να περιγράφεται από πολλά διαφορετικά συστήματα γενικευμένων συντεταγμένων.

Αρκετές φορές, η κίνηση ενός δυναμικού συστήματος περιορίζεται από διάφορες κινηματικές συνθήκες ή αλλιώς δεσμούς κίνησης. Ένα σύστημα μπορεί να περιορίζεται από  $k$  δεσμούς της μορφής:

$$\varphi_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad (2.69)$$

Οι δεσμοί αυτής της μορφής λέγονται ολόνομοι. Όταν ο χρόνος εμφανίζεται άμεσα στις εξισώσεις, όπως στην (2.69), ο αντίστοιχος δεσμός λέγεται ρεόνομος. Αν όμως ο δεσμός δεν περιέχει τον χρόνο, τότε ονομάζεται σκληρόνομος. Όταν όλοι οι δεσμοί ενός συστήματος είναι ολόνομοι, το σύστημα λέγεται ολόνομο. Σε αυτή την περίπτωση, ο αριθμός των ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων είναι ίσος με  $n - k$  και ίσος με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του συστήματος [10]. Οι ολόνομοι δεσμοί περιορίζουν τόσο τον γεωμετρικό χώρο, όσο και την ταχύτητα της κίνησης. Γενικότερα, οι δεσμοί κίνησης που εμφανίζονται είναι της μορφής:

$$\varphi_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \geq 0 \quad (2.70)$$

ή της μορφής:

$$\varphi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (2.71)$$

Αυτοί οι δεσμοί, όταν δε μπορούν να ολοκληρωθούν στη μορφή (2.69), ονομάζονται ανολόνομοι (μη ολοκληρώσιμοι). Οι ανολόνομοι δεσμοί περιορίζουν μόνο την ταχύτητα της κίνησης. Ακόμη, στην περίπτωση αυτών δεν είναι δυνατή η μείωση των ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων. Τέλος, οι ανολόνομοι δεσμοί διακρίνονται επίσης σε σκληρόνομους ή ρεόνομους, σε πλήρη αναλογία με τους ολόνομους δεσμούς [10].

Όλες οι συνδέσεις (joints) αποτελούνται από συνδυασμούς των τεσσάρων θεμελιωδών δεσμών κίνησης. Αυτοί είναι ο σφαιρικός (at point), ο επίπεδος (in plane), ο κάθετος (perpendicular) και ο γωνιακός (angular). Γενικά, οι δεσμοί κίνησης επιτρέπουν μερικές σχετικές κινήσεις μεταξύ των σωμάτων και απαγορεύουν άλλες. Ο σφαιρικός δεσμός κίνησης χαρακτηρίζεται από τρεις εξισώσεις περιορισμών, ενώ κάθε ένας από τους υπόλοιπους τρεις θεμελιώδεις χαρακτηρίζεται από μία.

## 2.5.2 Εξισώσεις κίνησης συστήματος στερεών σωμάτων

Για ένα σύστημα με ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες (ολόνομο), με βάση την Αρχή Δυνατών Έργων αναπτύσσονται οι εξισώσεις Lagrange, οι οποίες έχουν την μορφή:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (2.72)$$

όπου  $T$  η κινητική ενέργεια του συστήματος και  $Q_j$  οι γενικευμένες δυνάμεις του συστήματος. Αυτές οδηγούν στις εξισώσεις κίνησης του συστήματος (Greenwood):

$$M(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.73)$$

Με την παρουσία δεσμών κίνησης, οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στην πράξη οι περιορισμοί έχουν πολύ συχνά την μορφή:

$$\varphi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = A(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\alpha}_0(\mathbf{q}, t) \quad (2.74)$$

όπου ο πίνακας  $A$  είναι ο ιακωβιανός των περιορισμών και το διόνυσμα  $\boldsymbol{\alpha}_0$  ονομάζεται αφινικός όρος.

Έτσι, οι εξισώσεις Lagrange του δυναμικού συστήματος είναι:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \quad (2.75)$$

Η ικανοποίηση των δεσμών κίνησης απαιτεί την ανάπτυξη του όρου  $Q'_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}$ , ο οποίος αντιπροσωπεύει την αντίδραση που αναπτύσσεται στη διεύθυνση της γενικευμένης συντεταγμένης  $q_j$  για την ικανοποίηση των δεσμών κίνησης [10]. Σε αυτή τη περίπτωση, οι εξισώσεις Greenwood έχουν τη μορφή:

$$M(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + A^T(\mathbf{q}, t)\boldsymbol{\lambda} \quad (2.76)$$

Όλοι οι όροι του αριστερού μέλους των εξισώσεων Greenwood είναι όροι αδράνειας.

Οι εξισώσεις (2.76) μαζί με τις εξισώσεις των περιορισμών αποτελούν ένα σύστημα  $n + k$  διαφορικών και αλγεβρικών εξισώσεων (DAE) με αγνώστους τις  $n$  γενικευμένες συντεταγμένες  $q_j$  και τους  $k$  πολλαπλασιαστές Lagrange  $\lambda_i$ .

### 3 Εφαρμογές της μεθόδου EMBS και προσομοιώσεις σε περιβάλλον MATLAB

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται παραδείγματα συστημάτων αλληλεπίδρασης οχήματος-γέφυρας (VBI), τα οποία επιλύονται με τη μέθοδο EMBS που αναπτύχθηκε στην ενότητα 2.1. Αρχικά εξετάζεται ένα σύστημα μάζας ελατηρίου δύο βαθμών ελευθερίας, θεωρώντας τη μάζα του τροχού ως μη αμελητέα ποσότητα. Στη συνέχεια, η μέθοδος αναπτύσσεται για μοντέλο μισού οχήματος (half-car model) και τέλος για μοντέλο ολόκληρου οχήματος (full-car model). Σε όλες τις περιπτώσεις η γέφυρα μοντελοποιείται με καμπτικά πεπερασμένα στοιχεία (υπενότητα 2.2.1). Σε πρώτη φάση, για κάθε ένα από τα μοντέλα οχήματος θεωρείται γραμμική η συμπεριφορά της κύριας ανάρτησης. Σε κάθε μία από τις εφαρμογές, αρχικά παρουσιάζονται τα υπομητρώα, με βάση την μέθοδο EMBS, των συνολικών μητρώων των μοντέλων των οχημάτων που απαρτίζουν τις εξισώσεις κίνησης, που προκύπτουν με βάση τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Επιπλέον, επισημαίνονται τα δεδομένα για το σύστημα οχήματος-γέφυρας και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αποκρίσεων του οχήματος και του μέσου της γέφυρας καθώς και η χρονοιστορία των αναπτυσσόμενων δυνάμεων επαφής. Τέλος, για κάθε μοντέλο οχήματος εξετάζεται επίσης και η επίδραση της παρουσίας μη γραμμικών χαρακτηριστικών των αναρτήσεων, συγκρίνοντας τις αποκρίσεις μετατόπισης των οχημάτων και τις δυνάμεις επαφής με τα αντίστοιχα μεγέθη για γραμμικές αναρτήσεις. Να σημειωθεί, ότι σε όλες τις περιπτώσεις η γέφυρα θεωρείται αμφιέρειστη και δεν υπάρχουν ανομοιομορφίες σε αυτή. Οι κώδικες για την υλοποίηση της μεθόδου προγραμματίστηκαν σε περιβάλλον MATLAB.

#### 3.1 Μοντέλο μάζας ελατηρίου (Sprung-mass model)

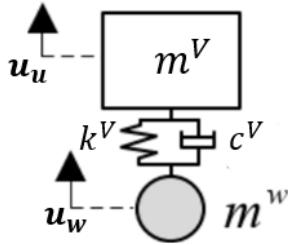
Αρχικά, για την επαλήθευση του κώδικα που αναπτύχθηκε για την υλοποίηση της μεθόδου, επιλέχθηκε ένα απλό μοντέλο μάζας ελατηρίου (Σχήμα 3.1), με δεδομένα ίδια με του βιβλίου [11], ώστε να ελεγχθεί η ταύτιση των αποτελεσμάτων που επίσης παρέχονται σε αυτό. Τα απαραίτητα δεδομένα για το σύστημα οχήματος-γέφυρας παρουσιάζονται για ευκολία στον πίνακα 3.1.

Καταρχάς, πρέπει να ορισθούν τα απαραίτητα μεγέθη για το μοντέλο μάζας ελατηρίου με βαθμούς ελευθερίας  $\mathbf{u}_v = [u_u \ u_w]^T$ , με βάση την ενότητα 2.1. Ισχύουν ότι:

$$m_u = m^V, m_w = m^W, c_u = c_{u,w} = c_w = 0, k_u = -k_{u,w} = k_w = k^V \quad (3.1)$$

Είναι κατανοητό, ότι με βάση το μήκος της γέφυρας και την ταχύτητα του οχήματος (πίνακας 3.1), το όχημα αφήνει τη γέφυρα 0.9 δευτερόλεπτα αφότου εισέλθει σε αυτήν. Στα σχήματα 3.2-3.5 διακρίνονται οι εγκάρσιες μετατοπίσεις και οι επιταχύνσεις του οχήματος και του μέσου

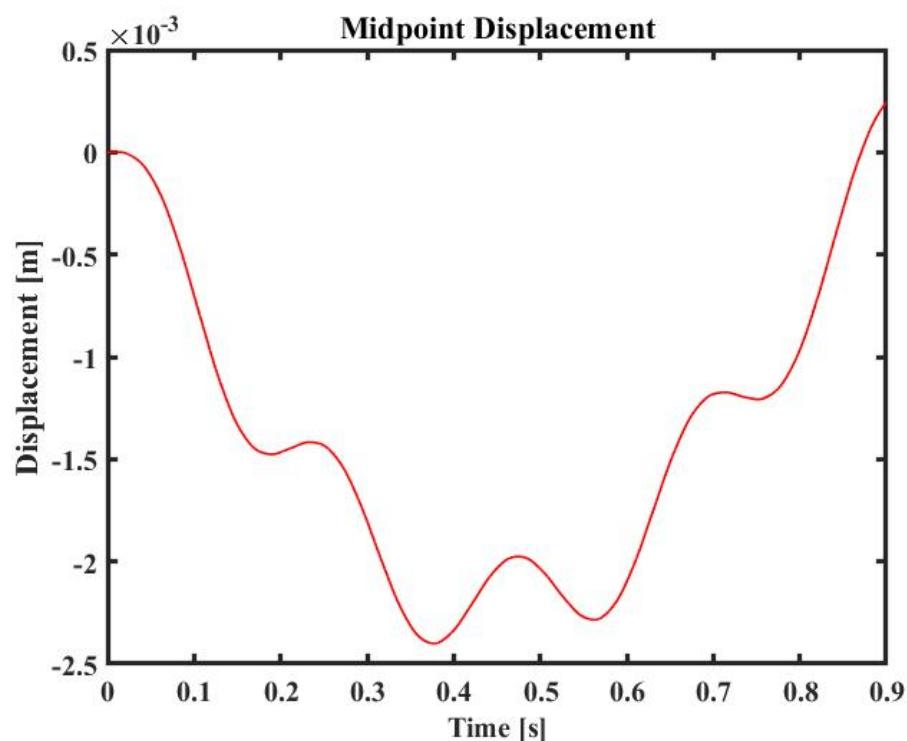
της γέφυρας για το χρονικό διάστημα που το όχημα βρίσκεται πάνω στη γέφυρα. Προκύπτει ότι ταυτίζονται με αυτές στο βιβλίο [11].



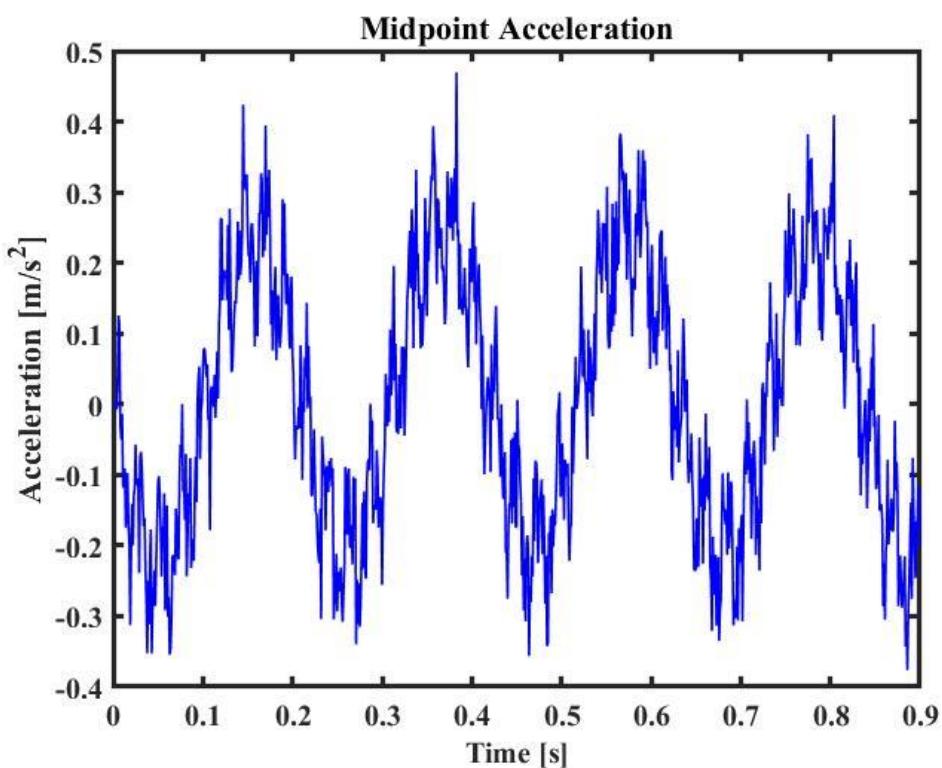
Σχήμα 3.1: Σχηματική αναπαράσταση μοντέλου μάζας ελατηρίου.

Πίνακας 3.1: Δεδομένα για το μοντέλο μάζας ελατηρίου και τη γέφυρα.

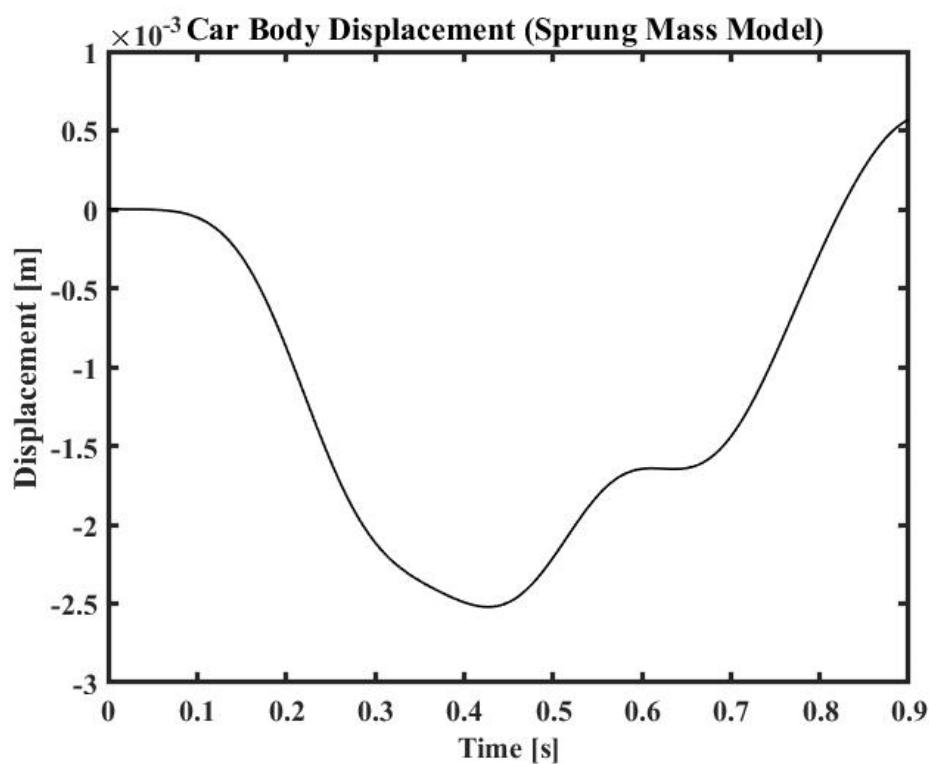
Μάζα οχήματος $m^V$ [kg]	5750
Μάζα τροχού $m^w$ [kg]	10
Συντελεστής στιβαρότητας κύριας ανάρτησης $k^V$ [kN/m]	1595
Ταχύτητα οχήματος $v$ [km/hr]	100
Μήκος γέφυρας $L$ [m]	25
Μέτρο ελαστικότητας υλικού γέφυρας $E$ [GPa]	2.87
Μάζα ανά μονάδα μήκους γέφυρας $\mu$ [kg/m]	2303
Επιφανειακή ροπή αδράνειας γέφυρας $I$ [m <sup>4</sup> ]	2.9



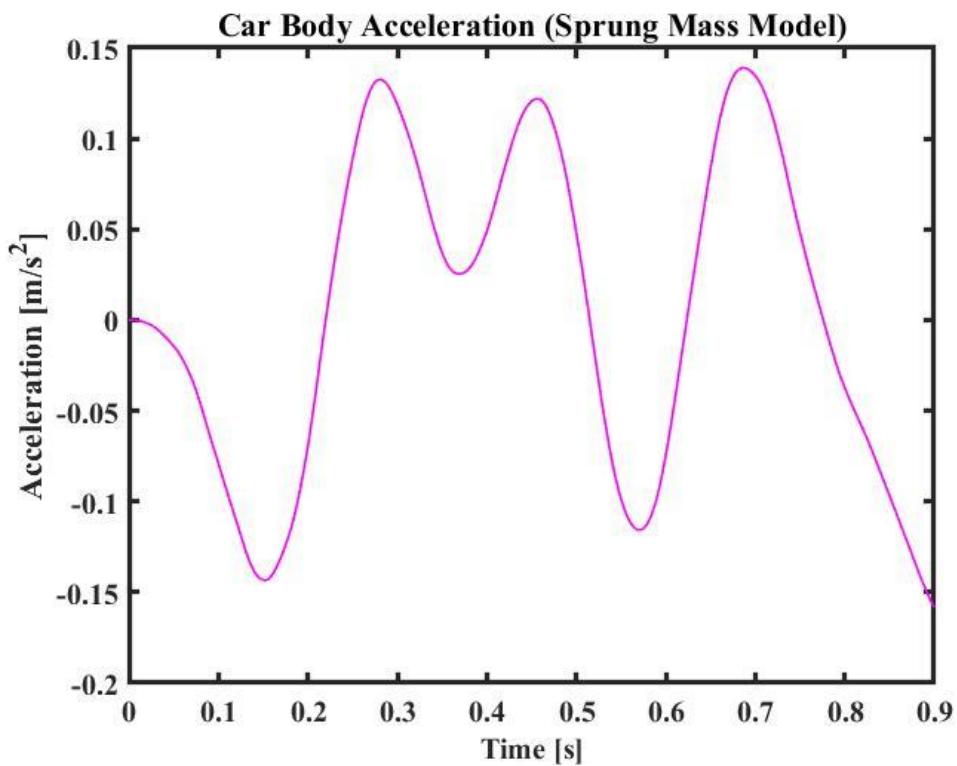
Σχήμα 3.2: Κατακόρυφη μετατόπιση στο μέσο της γέφυρας (sprung-mass model).



Σχήμα 3.3: Κατακόρυφη επιτάχυνση στο μέσο της γέφυρας (sprung-mass model).

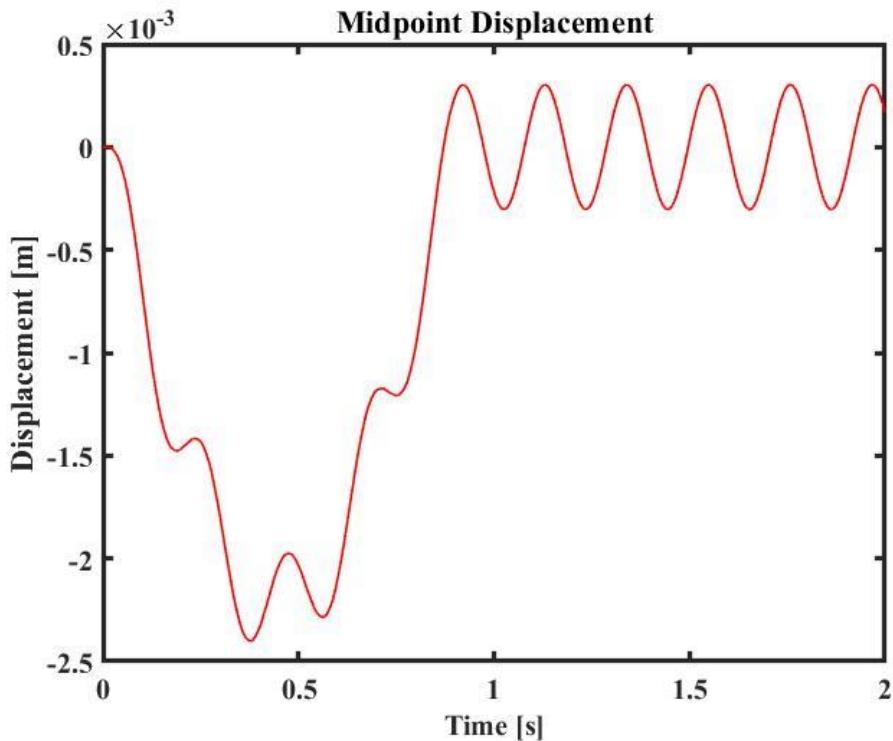


Σχήμα 3.4: Κατακόρυφη μετατόπιση της μάζας του οχήματος (sprung-mass model).



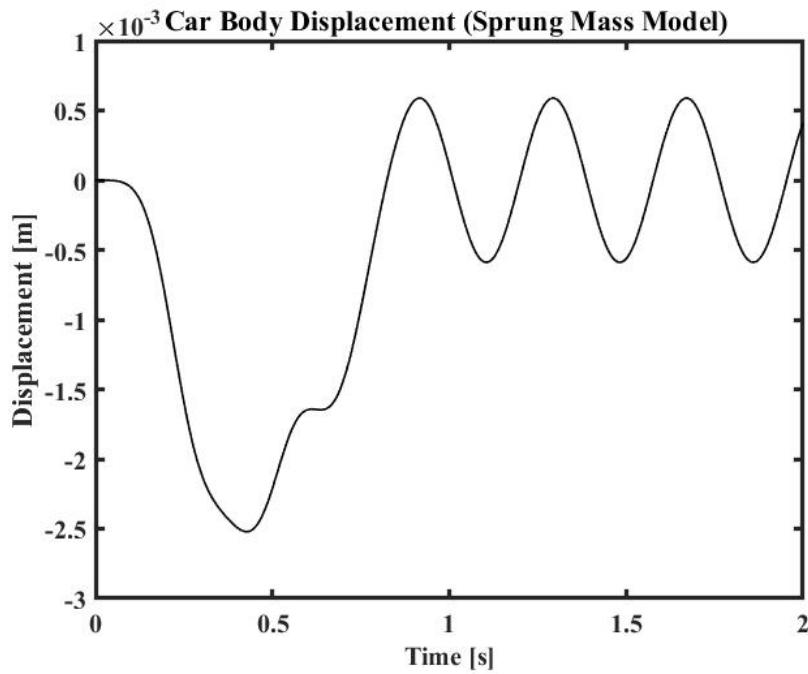
Σχήμα 3.5: Κατακόρυφη επιτάχυνση της μάζας του οχήματος (sprung-mass model).

Επιπλέον είναι αντιληπτό ότι από τη χρονική στιγμή που το όχημα εξέρχεται από τη γέφυρα και έπειτα, επειδή δεν ασκείται πλέον εξωτερική φόρτιση σε κανένα από τα δύο υποσυστήματα, το όχημα και η γέφυρα εκτελούν ελεύθερη ταλάντωση.

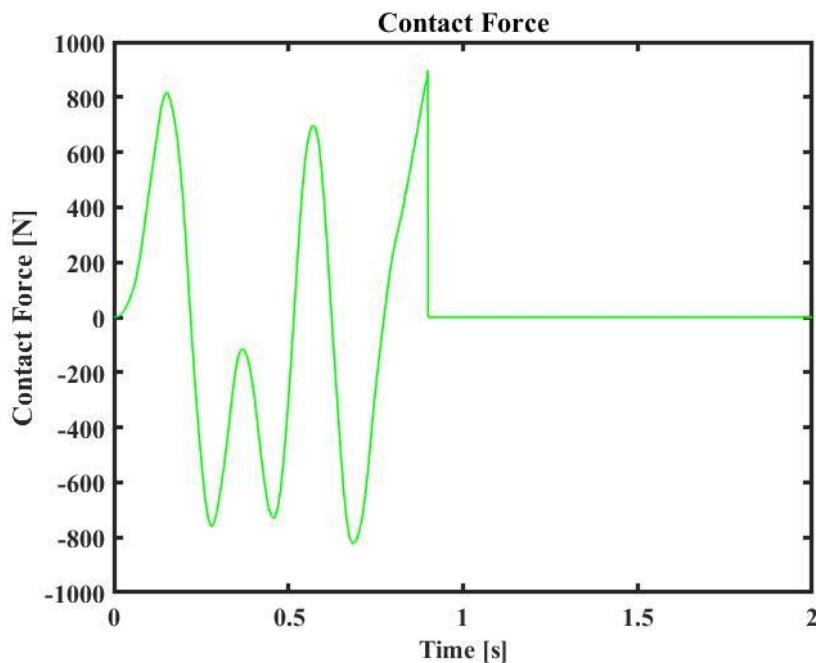


Σχήμα 3.6: Μετατόπιση μέσου της γέφυρας για χρόνο 2 sec (sprung-mass model).

Στη προκειμένη περίπτωση έχει θεωρηθεί μηδενική τιμή για το μέτρο απόσβεσης της γέφυρας και ότι για το όχημα δεν υπάρχει αποσβεστήρας, μόνο και μόνο για την παρατήρηση του σταθερού εύρους ταλάντωσης των αποκρίσεων της γέφυρας (Σχήμα 3.6) και του οχήματος (Σχήμα 3.7), μετά τη χρονική στιγμή των 0.9 δευτερολέπτων.



Σχήμα 3.7: Μετατόπιση της μάζας του οχήματος για χρόνο 2 sec (sprung-mass model).



Σχήμα 3.8: Δύναμη επαφής μεταξύ του τροχού και της γέφυρας (sprung-mass model).

Τέλος, είναι προφανές ότι η δύναμη επαφής μηδενίζεται (Σχήμα 3.8), όταν το οχημα δε βρίσκεται πλέον πάνω στη γέφυρα.

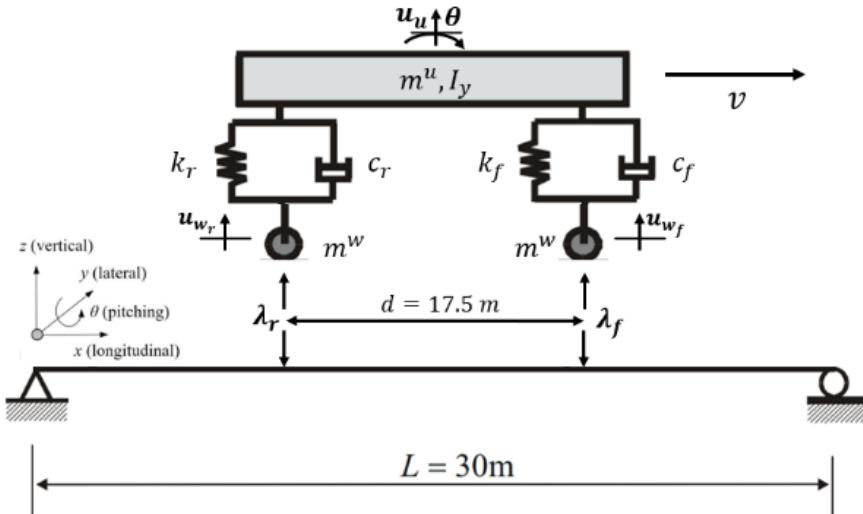
### 3.2 Μοντέλο μισού οχήματος (Half-car model)

Αρχικά, αφού καταστρωθούν οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν τα υπομητρώα που χαρακτηρίζουν το μοντέλο του μισού οχήματος με βαθμούς ελευθερίας  $\mathbf{u}_v = [u_u \ \theta \ u_{w_f} \ u_{w_r}]^T$  (Σχήμα 3.9):

$$m_u = \begin{bmatrix} m^u & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix}, m_w = \begin{bmatrix} m^w & 0 \\ 0 & m^w \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$c_u = \begin{bmatrix} c_r + c_f & \frac{d}{2}(c_r - c_f) \\ \frac{d}{2}(c_r - c_f) & \frac{d^2}{4}(c_r + c_f) \end{bmatrix}, c_{u,w} = \begin{bmatrix} -c_f & -c_r \\ \frac{d}{2}c_f & -\frac{d}{2}c_r \end{bmatrix}, c_w = \begin{bmatrix} c_f & 0 \\ 0 & c_r \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$k_u = \begin{bmatrix} k_r + k_f & \frac{d}{2}(k_r - k_f) \\ \frac{d}{2}(k_r - k_f) & \frac{d^2}{4}(k_r + k_f) \end{bmatrix}, c_{u,w} = \begin{bmatrix} -k_f & -k_r \\ \frac{d}{2}k_f & -\frac{d}{2}k_r \end{bmatrix}, c_w = \begin{bmatrix} k_f & 0 \\ 0 & k_r \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

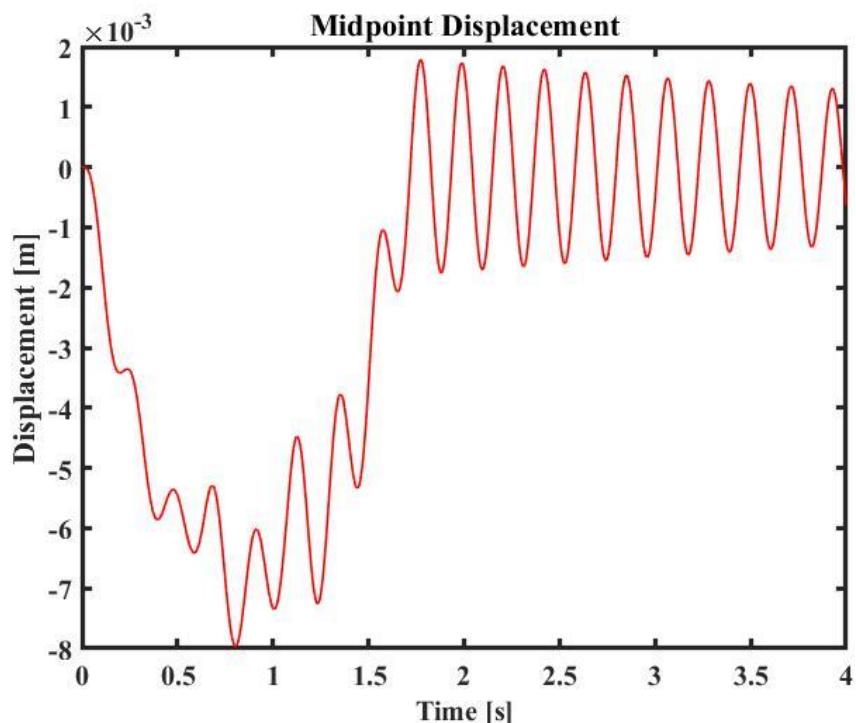


Σχήμα 3.9: Μοντέλο μισού οχήματος-γέφυρας.

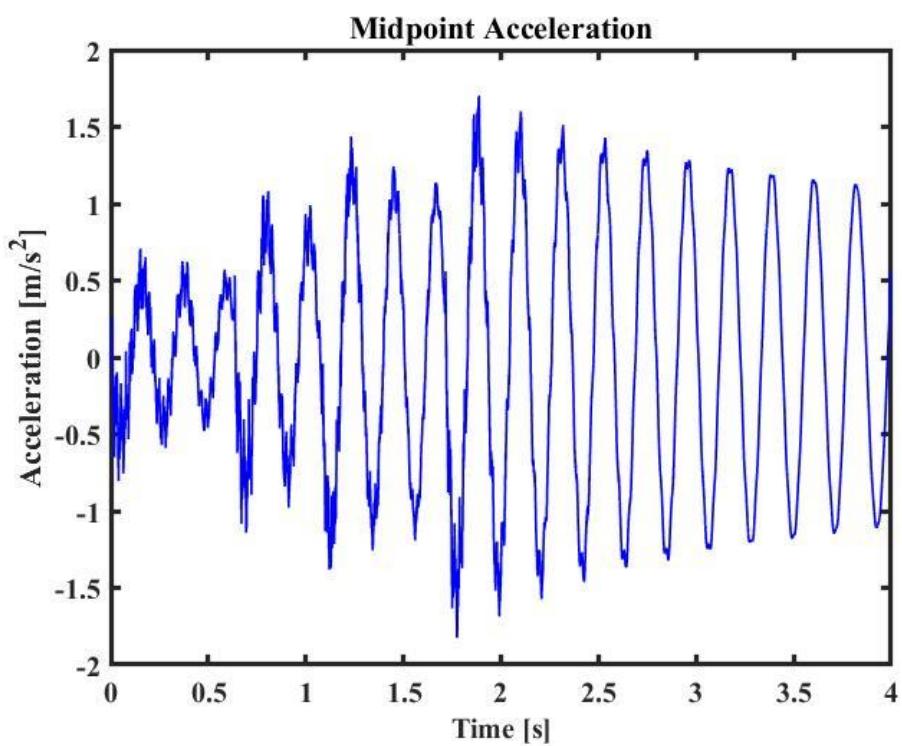
Εδώ επίσης τα δεδομένα προέρχονται από το ίδιο βιβλίο [11]. Το οχημα εξέρχεται εξ ολοκλήρου από τη γέφυρα τη χρονική στιγμή  $t = 1.71$  s, αφού τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ , ο μπροστινός τροχός μόλις εισέρχεται σε αυτήν. Σε αντίθεση με τη γέφυρα του προηγούμενου μοντέλου (ενότητα 3.1), εδώ θεωρείται μέτρο απόσβεσης για κάθε ιδιομορφή ίσο με 0.005. Έτσι είναι κατανοητό ότι μετά το πέρας του οχήματος, το πλάτος της ταλάντωσης της γέφυρας μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο (Σχήμα 3.10). Το ίδιο ισχύει και για το πλάτος ταλάντωσης του άνω μέρους του οχήματος (Σχήμα 3.12), διότι έχουν ληφθεί υπόψιν τα χαρακτηριστικά απόσβεσης των αναρτήσεων. Όσον αφορά τις δυνάμεις επαφής (Σχήμα 3.14) είναι λογικό να διαφέρουν, διότι η γέφυρα έχει ήδη παραμορφωθεί όταν έρχεται σε επαφή με τη πίσω ρόδα.

Πίνακας 3.2: Δεδομένα για το μοντέλο μισού οχήματος και τη γέφυρα.

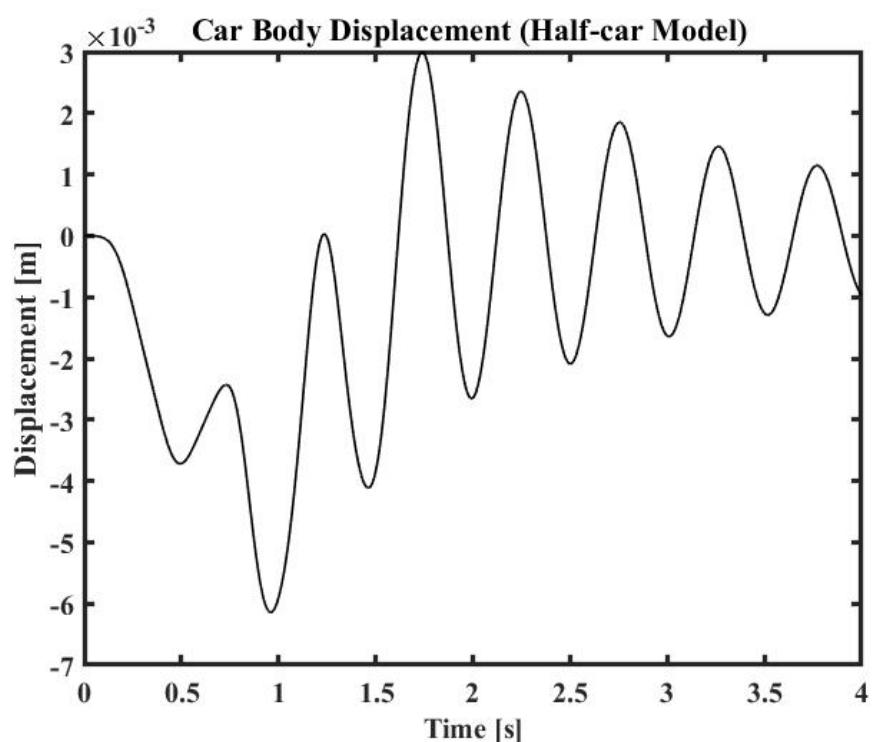
Μάζα οχήματος $m^u$ [t]	180
Μαζική ροπή αδράνειας οχήματος $I_y$ [ $tm^2$ ]	4600
Μάζα τροχού $m^w$ [t]	1
Συντελεστές στιβαρότητας κύριων αναρτήσεων $k_f, k_r$ [ $kN/m$ ]	13783
Συντελεστές απόσβεσης κύριων αναρτήσεων $c_f, c_r$ [ $kNs/m$ ]	85
Ταχύτητα οχήματος $v$ [ $km/hr$ ]	100
Απόσταση μεταξύ των τροχών d [m]	17.5
Μήκος γέφυρας $L$ [m]	30
Μέτρο ελαστικότητας υλικού γέφυρας $E$ [ $GPa$ ]	29.43
Μάζα ανά μονάδα μήκους γέφυρας $\mu$ [t/m]	12
Επιφανειακή ροπή αδράνειας γέφυρας $I$ [ $m^4$ ]	2.88



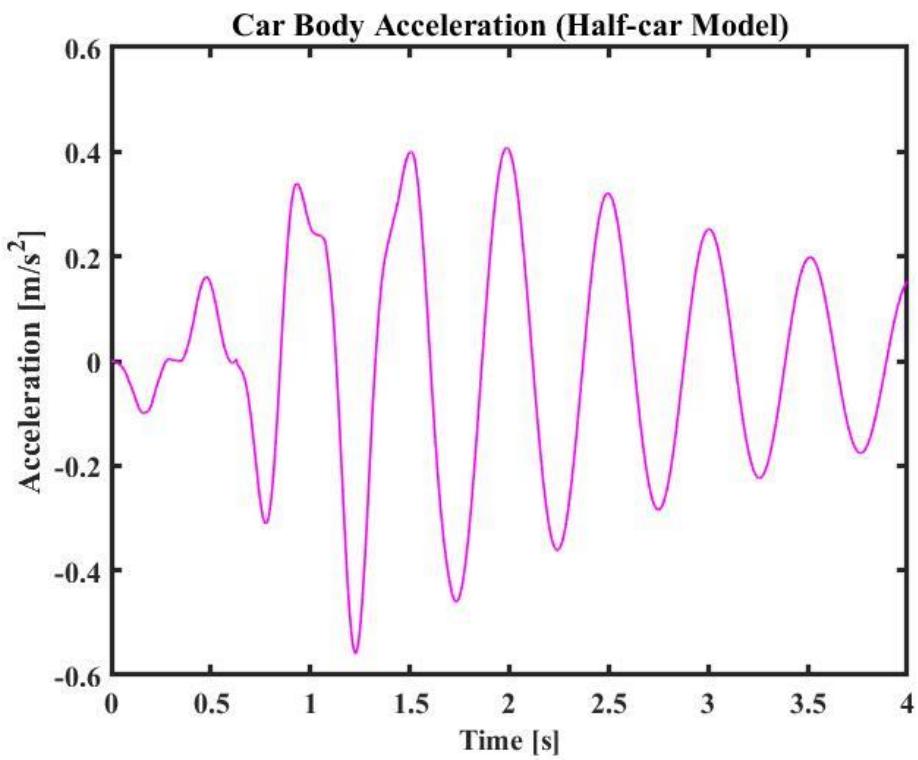
Σχήμα 3.10: Κατακόρυφη μετατόπιση στο μέσο της γέφυρας (half-car model).



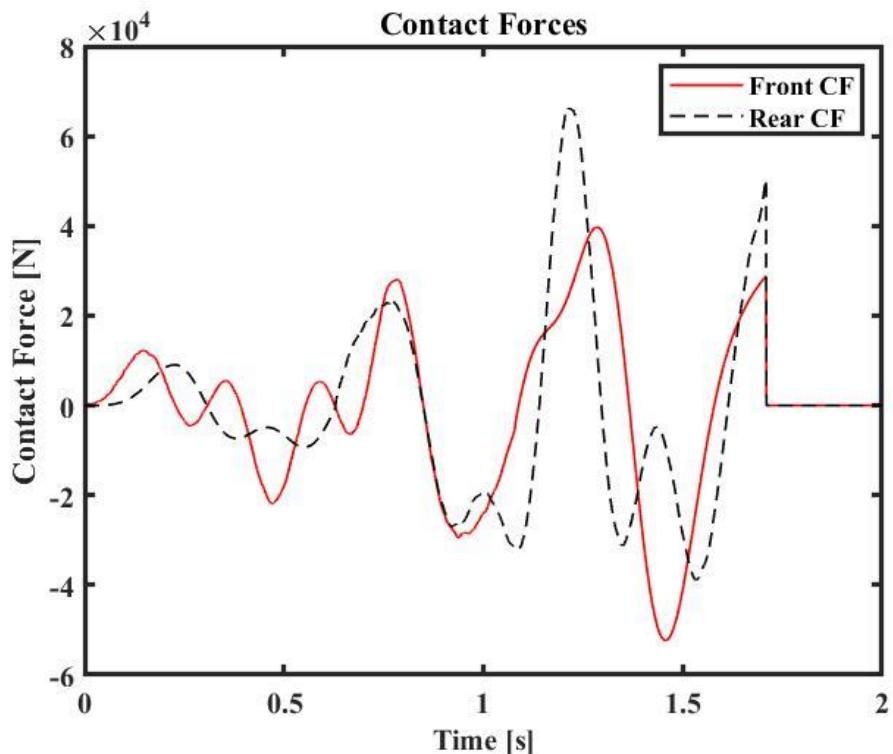
Σχήμα 3.11: Κατακόρυφη επιτάχυνση στο μέσο της γέφυρας (half-car model).



Σχήμα 3.12: Κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας του οχήματος (half-car model).



Σχήμα 3.13: Κατακόρυφη επιτάχυνση του κέντρου μάζας του οχήματος (half-car model).



Σχήμα 3.14: Δυνάμεις επαφής μεταξύ των τροχών και της γέφυρας (half-car model).

### 3.3 Μοντέλο ολόκληρου οχήματος (Full-car model)

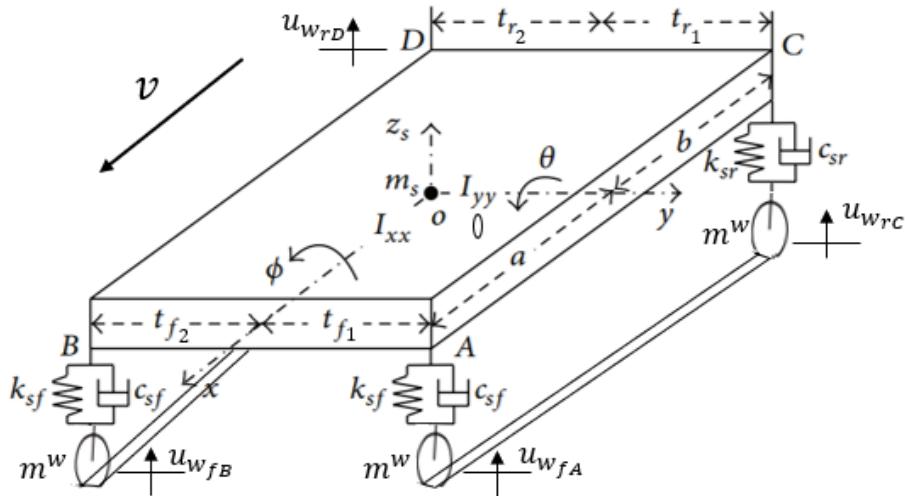
Με βάση τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτουν τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και στιβαρότητας του ολόκληρου οχήματος των επτά βαθμών ελευθερίας (Σχήμα 3.15) και αφού αυτοί χωριστούν σε αυτούς που δεν είναι σε επαφή με τη γέφυρα ( $\mathbf{u}_u = [z_s \theta \varphi]^T$ ) και σε αυτούς που είναι ( $\mathbf{u}_w = [u_{w_{fA}} u_{w_{fB}} u_{w_{rc}} u_{w_{rD}}]^T$ ), προκύπτουν τα εξής για τα μητρώα μάζας:

$$m_u = \begin{bmatrix} m^s & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx} \end{bmatrix}, m_w = \begin{bmatrix} m^w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m^w \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Για τα μητρώα απόσβεσης ισχύει ότι:

$$c_u = \begin{bmatrix} 2(c_{sf} + c_{sr}) & 2(bc_{sr} - ac_{sf}) & 0 \\ 2(bc_{sr} - ac_{sf}) & 2(b^2 c_{sr} + a^2 c_{sf}) & 0 \\ 0 & 0 & c_{sr}(t_{r1}^2 + t_{r2}^2) + c_{sf}(t_{f1}^2 + t_{f2}^2) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$c_{u,w} = \begin{bmatrix} -c_{sf} & -c_{sf} & -c_{sr} & -c_{sr} \\ ac_{sf} & ac_{sf} & -bc_{sr} & -bc_{sr} \\ -t_{f1}c_{sf} & t_{f2}c_{sf} & -t_{r1}c_{sr} & t_{r2}c_{sr} \end{bmatrix}, k_w = \begin{bmatrix} c_{sf} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{sf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{sr} \end{bmatrix}$$



Σχήμα 3.15: Μοντέλο ολόκληρου οχήματος.

Τέλος, τα μητρώα στιβαρότητας είναι:

$$k_u = \begin{bmatrix} 2(k_{sf} + k_{sr}) & 2(bk_{sr} - ak_{sf}) & 0 \\ 2(bk_{sr} - ak_{sf}) & 2(b^2k_{sr} + a^2k_{sf}) & 0 \\ 0 & 0 & k_{sr}(t_{r1}^2 + t_{r2}^2) + k_{sf}(t_{f1}^2 + t_{f2}^2) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

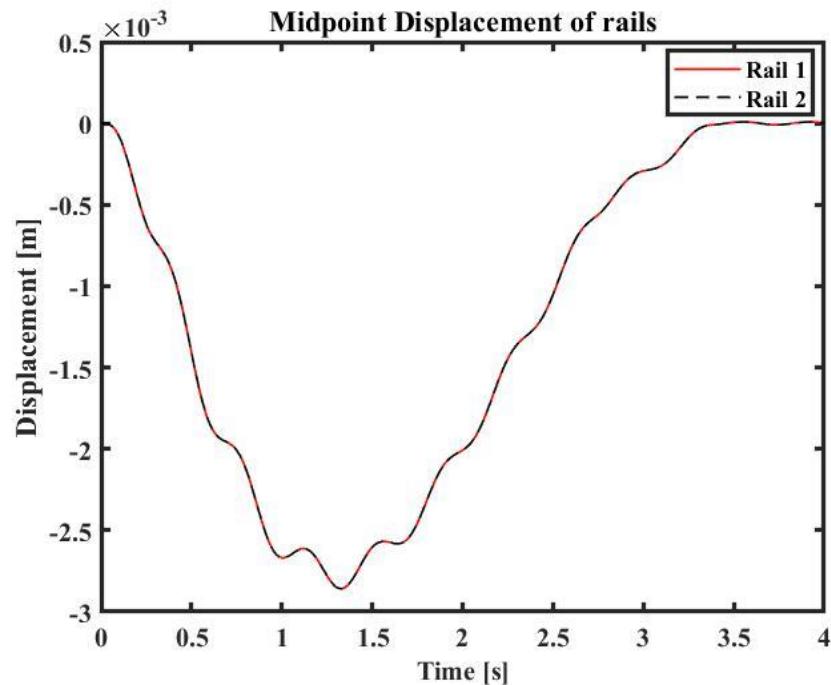
$$k_{u,w} = \begin{bmatrix} -k_{sf} & -k_{sf} & -k_{sr} & -k_{sr} \\ ak_{sf} & ak_{sf} & -bk_{sr} & -bk_{sr} \\ -t_{f1}k_{sf} & t_{f2}k_{sf} & -t_{r1}k_{sr} & t_{r2}k_{sr} \end{bmatrix}, k_w = \begin{bmatrix} k_{sf} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{sf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{sr} \end{bmatrix}$$

Τα δεδομένα για το όχημα (πίνακας 3.3) προκύπτουν με βάση την πειραματική διάταξη (κεφάλαιο 4). Για τις ράγες επιλέχθηκαν, ώστε η πρώτη τους ιδιοσυχνότητα να είναι κοντά στη τιμή της πρώτης ιδιοσυχνότητας της γέφυρας της πειραματικής διάταξης.

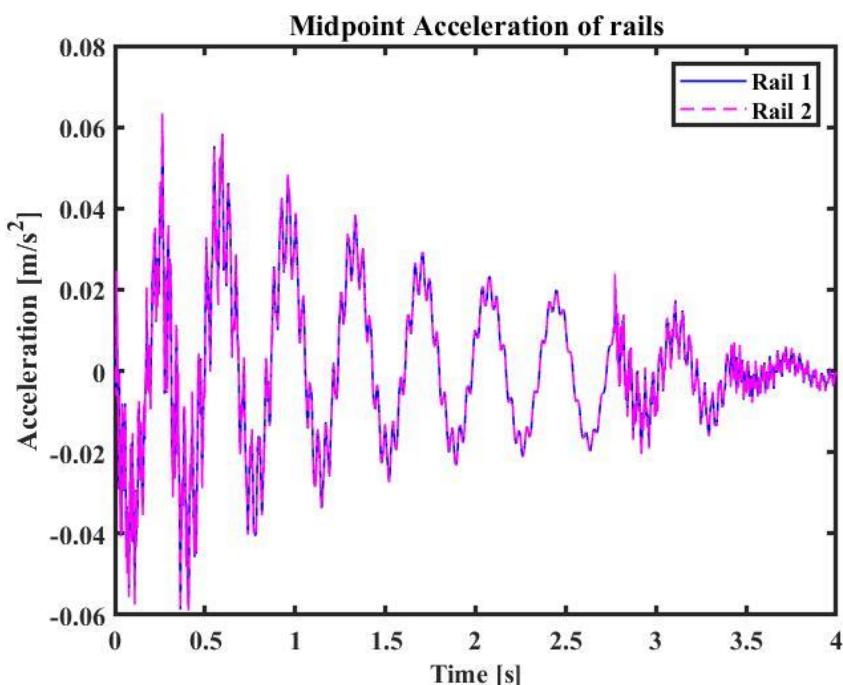
Πίνακας 3.3: Δεδομένα για το μοντέλο ολόκληρου οχήματος με τις ράγες.

Μάζα οχήματος $m_s$ [kg]	89.5
Μαζική ροπή αδράνειας οχήματος $I_{yy}$ [ $\text{kgm}^2$ ]	16.54
Μαζική ροπή αδράνειας οχήματος $I_{xx}$ [ $\text{kgm}^2$ ]	761.1
Μάζα τροχού $m^w$ [kg]	0.36
Συντελεστής στιβαρότητας μπροστά αναρτήσεων $k_{sf}$ [ $\text{kN/m}$ ]	23.5
Συντελεστής στιβαρότητας πίσω αναρτήσεων $k_{sr}$ [ $\text{kN/m}$ ]	23.5
Συντελεστής απόσβεσης μπροστά αναρτήσεων $c_{sf}$ [ $\text{kNs/m}$ ]	0.25
Συντελεστής απόσβεσης πίσω αναρτήσεων $c_{sr}$ [ $\text{kNs/m}$ ]	0.25
Συνάρτηση ταχύτητας οχήματος $v$ [ $\text{m/s}$ ]	1.5 – 0.15 $t$
Απόσταση κέντρου μάζας-μπροστά ανάρτησης $a$ [mm]	185
Απόσταση κέντρου μάζας-πίσω ανάρτησης $b$ [mm]	185
Κατά πλάτος απόσταση κέντρου μάζας- μπροστά ανάρτησεων $t_{f1}, t_{f2}$ [mm]	125
Κατά πλάτος απόσταση κέντρου μάζας- πίσω ανάρτησεων $t_{r1}, t_{r2}$ [m]	125
Μήκος γέφυρας (ράγας) $L$ [m]	3
Μέτρο ελαστικότητας υλικού γέφυρας $E$ [ $\text{GPa}$ ]	210
Μάζα ανά μονάδα μήκους ράγας $\mu$ [ $\text{kg/m}$ ]	373
Επιφανειακή ροπή αδράνειας ράγας $I$ [ $\text{m}^4$ ]	$4.3 \times 10^{-7}$

Επειδή το κέντρο βάρος του οχήματος συμπίπτει με το γεωμετρικό του κέντρο και τα χαρακτηριστικά των μπροστινών αναρτήσεων είναι ίδια μεταξύ τους (όμοια για τις πίσω αναρτήσεις), οι εγκάρσιες αποκρίσεις στα μέσα των ραγών συμπίπτουν (Σχήματα 3.16-3.17).

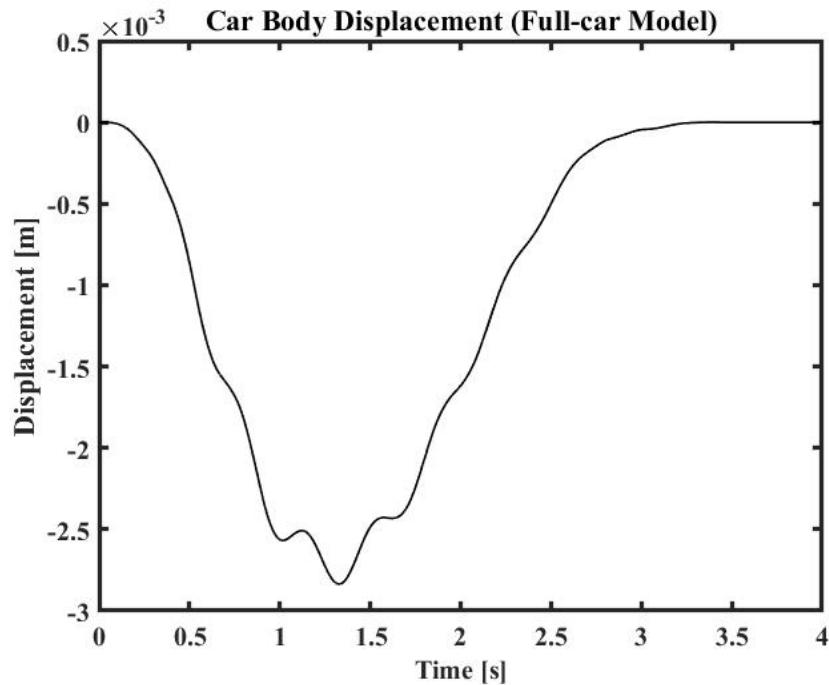


Σχήμα 3.16: Κατακόρυφη μετατόπιση των μέσων των ραγών.

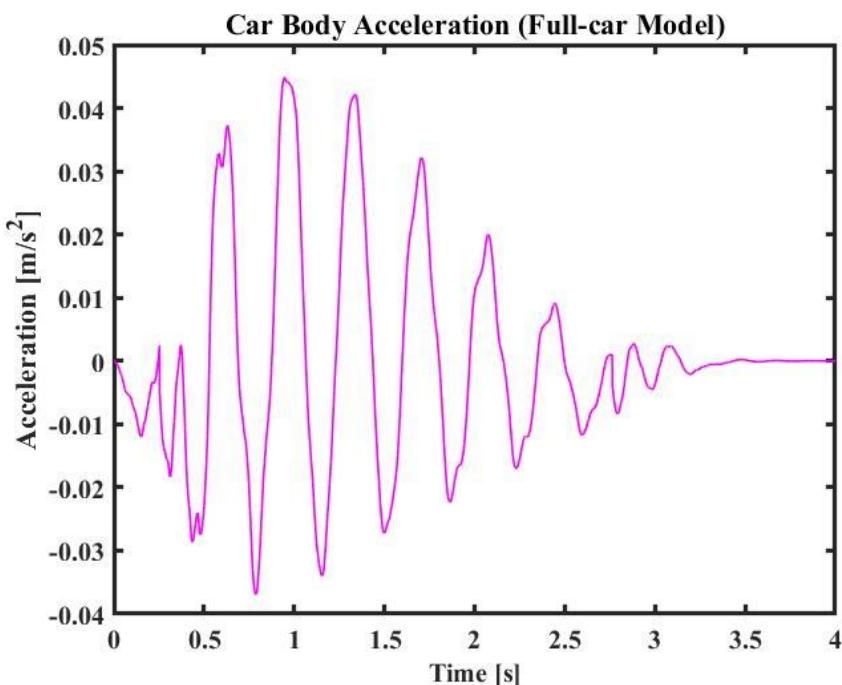


Σχήμα 3.17: Κατακόρυφη επιτάχυνση των μέσων των ραγών.

Στα σχήματα 3.18-3.19 διακρίνονται οι αποκρίσεις της εγκάρσιας μετατόπισης και της εγκάρσιας επιτάχυνσης του οχήματος αντίστοιχα. Το όχημα εξέρχεται από τις ράγες περίπου τη χρονική στιγμή  $t = 3.41\text{ s}$ .

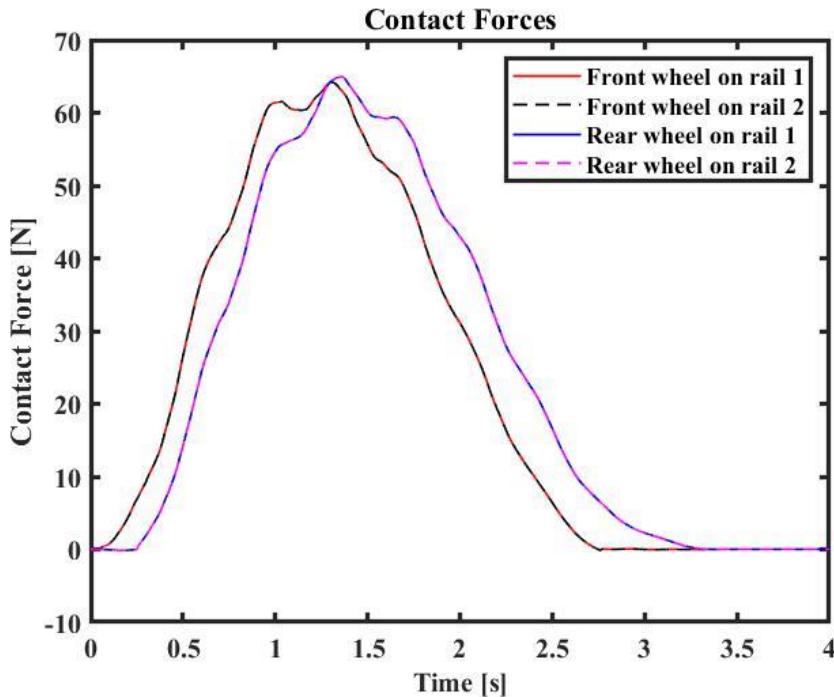


Σχήμα 3.18: Κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας του οχήματος (full-car model).



Σχήμα 3.19: Κατακόρυφη επιτάχυνση του κέντρου μάζας του οχήματος (full-car model).

Επιπλέον οι δυνάμεις επαφής των μπροστά τροχών, όπως και των πίσω, είναι ίδιες μεταξύ τους. Όμως, επειδή οι ράγες έχουν ήδη παραμορφωθεί όταν έρχονται σε επαφή με τους πίσω τροχούς, οι δυνάμεις επαφής μεταξύ των ραγών και αυτών διαφέρουν από αυτές με των μπροστινών τροχών (Σχήμα 3.20).



Σχήμα 3.20: Δυνάμεις επαφής μεταξύ τροχών και ραγών (full-car model).

### 3.4 Μοντέλα οχήματος με μη γραμμικά χαρακτηριστικά αναρτήσεων

Στην παρούσα υποενότητα εξετάζονται οι ίδιες περιπτώσεις συστημάτων οχήματος-γέφυρας, με τα ίδια δεδομένα, με την μόνη διαφορά ότι οι αναρτήσεις παρουσιάζουν μη γραμμική συμπεριφορά. Η αριθμητική ολοκλήρωση για τον προσδιορισμό της απόκρισης του οχήματος γίνεται με τη μέθοδο κεντρικής διαφοράς (υποενότητα 2.4.3) και η επίλυση του συστήματος μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με τη μέθοδο Newton-Raphson (υποενότητα 2.4.1). Η μη γραμμική συμπεριφορά των αναρτήσεων εκφράζεται με όρους ελατηρίου τρίτης τάξης και τετραγωνικούς όρους απόσβεσης. Για την αξιολόγηση της επίδρασης αυτών των όρων θα παρουσιαστούν οι αποκρίσεις της εγκάρσιας μετατόπισης στα κέντρα βάρους των οχημάτων και οι χρονοιστορίες των αναπτυσσόμενων δυνάμεων επαφής. Ο προσδιορισμός των τελευταίων γίνεται μέσω της εξίσωσης (2.12), θεωρώντας τους μη γραμμικούς όρους ως όρους εξωτερικής διέγερσης, με αποτέλεσμα ο όρος  $f_w$  στο δεξί μέλος αυτής της σχέσης να είναι μη μηδενικός. Επιπλέον, η απόκριση του άνω μέρους του οχήματος υπολογίζεται με βάση τη σχέση (2.15), προσθέτοντας σε αυτήν τον μη μηδενικό πλέον όρο  $f_u$ , ο οποίος περιλαμβάνει τις μη γραμμικότητες. Αυτοί οι όροι διέγερσης δίνονται παρακάτω για κάθε περίπτωση

μοντέλου οχήματος. Τέλος, σε κάθε περίπτωση τα διανύσματα κατακόρυφης μετατόπισης και ταχύτητας των τροχών, με βάση τις εξισώσεις (2.9), (2.10) και τους περιορισμούς της σχετικής μετατόπισης ( $\dot{\mathbf{g}}_N = 0$ ) και της σχετικής ταχύτητας ( $\ddot{\mathbf{g}}_N = 0$ ), δίνονται από τις σχέσεις:

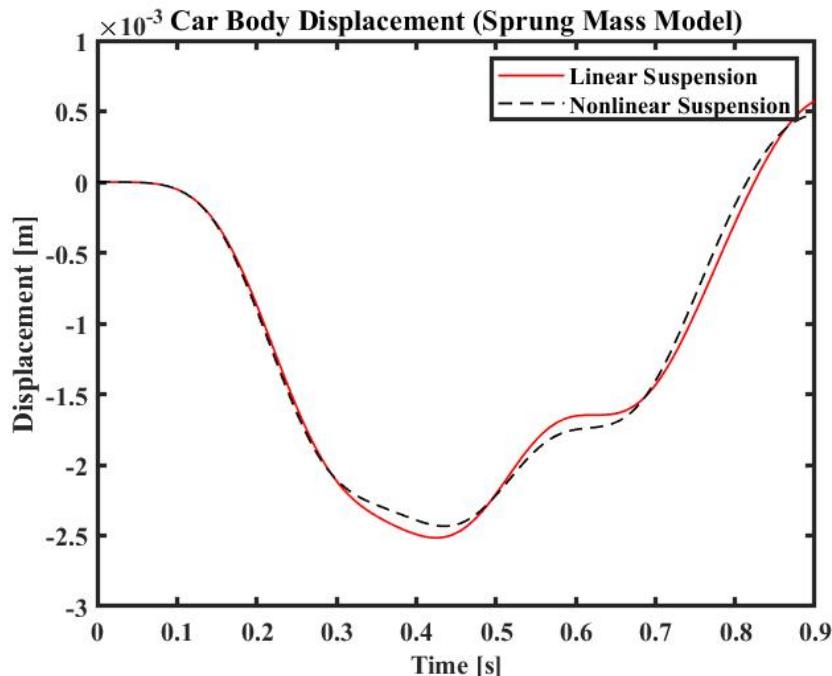
$$\begin{aligned}\mathbf{u}_w &= W_B^T \mathbf{u}_B \\ \dot{\mathbf{u}}_w &= \nu W_B'^T \mathbf{u}_B + W_B^T \ddot{\mathbf{u}}_B\end{aligned}\quad (3.8)$$

### 3.4.1 Μη γραμμικό μοντέλο μάζας ελατηρίου

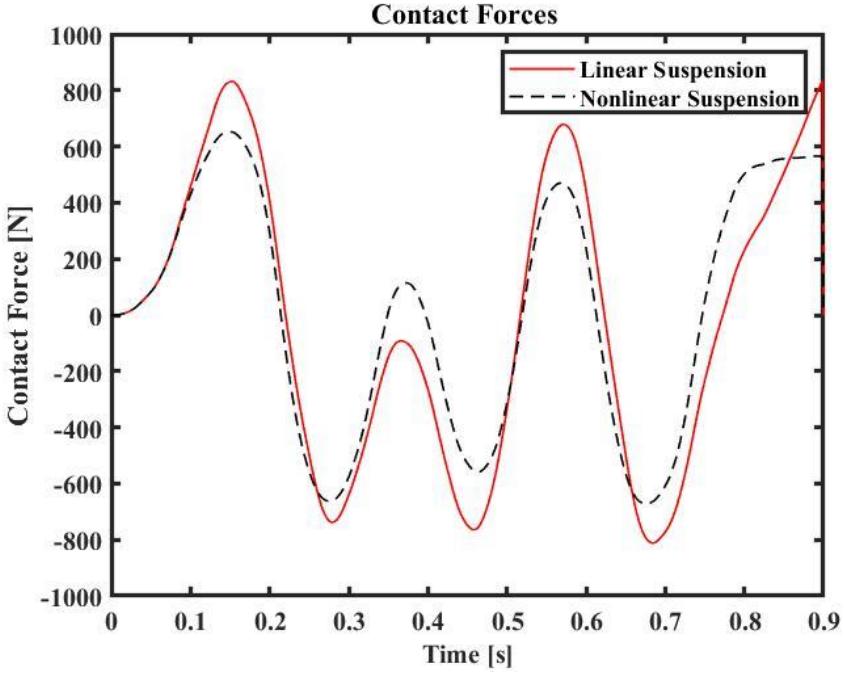
Υπενθυμίζεται ότι στο εν λόγω μοντέλο δεν υπάρχει αποσβεστήρας. Επομένως, ο μη γραμμικός όρος που εισέρχεται στις εξισώσεις (2.12) και (2.15) δίνεται από την σχέση:

$$f_u = -f_w = -k_{nl}(u_u - u_w)^3 \quad (3.9)$$

Είναι αντιληπτό, ότι επειδή οι μετατοπίσεις του οχήματος και του τροχού γύρω από τη θέση ισορροπίας είναι μικρές και αρκετά κοντά μεταξύ τους (απουσία ανομοιομορφιών οδοστρώματος), σε συνδυασμό με το γεγονός ότι ο μη γραμμικός όρος είναι υψηλός στον κύβο, χρειάζεται μία αρκετά μεγάλη σταθερά του μη γραμμικού ελατηρίου σε σχέση με το γραμμικό, ώστε να επηρεαστούν η απόκριση του οχήματος (Σχήμα 3.21) και η δύναμη επαφής (Σχήμα 3.22).



Σχήμα 3.21: Μετατόπιση οχήματος ανάλογα με την ανάρτηση (sprung-mass model).



Σχήμα 3.22: Δύναμη επαφής τροχού-γέφυρας ανάλογα με την ανάρτηση (sprung-mass model).

### 3.4.2 Μη γραμμικό μοντέλο μισού οχήματος

Οι μη γραμμικοί όροι στιβαρότητας και απόσβεσης που εισάγονται ως νέοι όροι στις εξισώσεις κίνησης του άνω μέρους του οχήματος και στη σχέση που δίνει τις δυνάμεις επαφής είναι οι εξής:

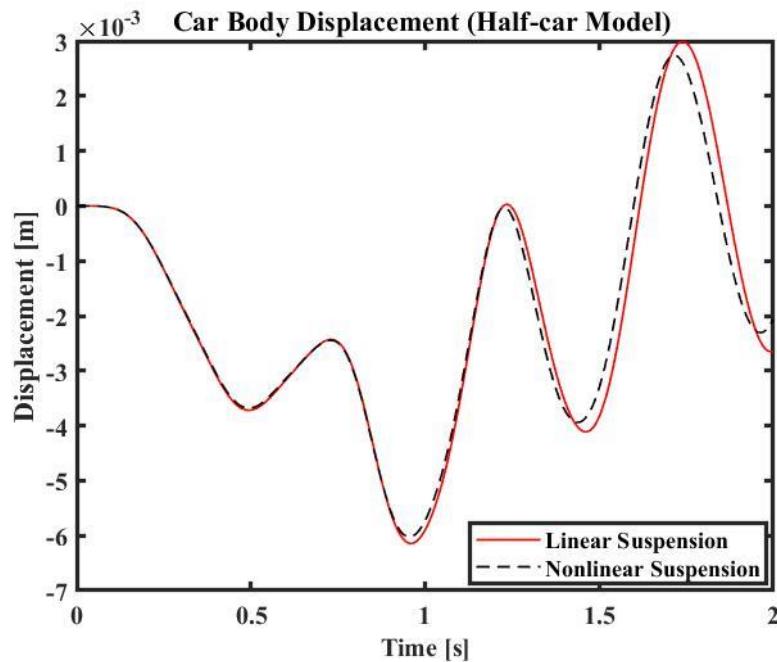
$$\begin{aligned} \mathbf{f}_u &= \left( \frac{-k_{nl}}{\frac{d}{2} k_{nl}} \right) \Delta u_f^3 + \left( \frac{-k_{nl}}{-\frac{d}{2} k_{nl}} \right) \Delta u_r^3 + \left( \frac{-c_{nl}}{\frac{d}{2} c_{nl}} \right) \Delta \dot{u}_f^2 + \left( \frac{-c_{nl}}{-\frac{d}{2} c_{nl}} \right) \Delta \dot{u}_r^2 \\ \mathbf{f}_w &= \begin{pmatrix} f_{w_f} \\ f_{w_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{nl} \Delta u_f^3 + c_{nl} \Delta \dot{u}_f^2 \\ k_{nl} \Delta u_r^3 + c_{nl} \Delta \dot{u}_r^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου οι σχετικές μετατοπίσεις και ταχύτητες μεταξύ του οχήματος και των μπροστά και πίσω τροχών, αντίστοιχα, δίνονται από τις σχέσεις:

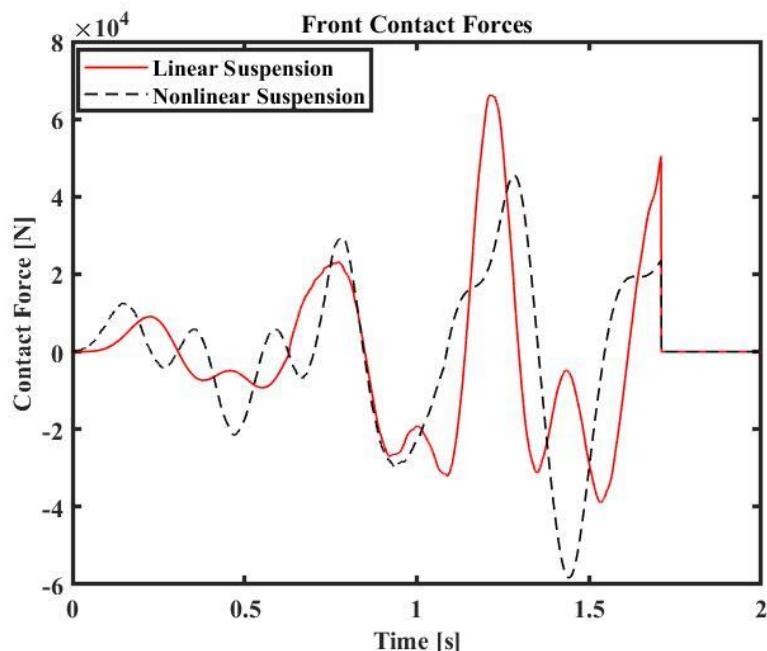
$$\begin{aligned} \Delta u_f &= \left( u_u - \frac{d}{2} \theta \right) - u_{w_f} \\ \Delta \dot{u}_f &= \left( \dot{u}_u - \frac{d}{2} \dot{\theta} \right) - \dot{u}_{w_f} \\ \Delta u_r &= \left( u_u + \frac{d}{2} \theta \right) - u_{w_r} \\ \Delta \dot{u}_r &= \left( \dot{u}_u + \frac{d}{2} \dot{\theta} \right) - \dot{u}_{w_r} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Με βάση τις σχέσεις (3.8) προσδιορίζονται η μετατόπιση και η ταχύτητα των τροχών. Και σε αυτή την περίπτωση χρειάζεται  $k_{nl} \gg k_f, k_r$ , ώστε να παρατηρηθούν αλλαγές στην απόκριση

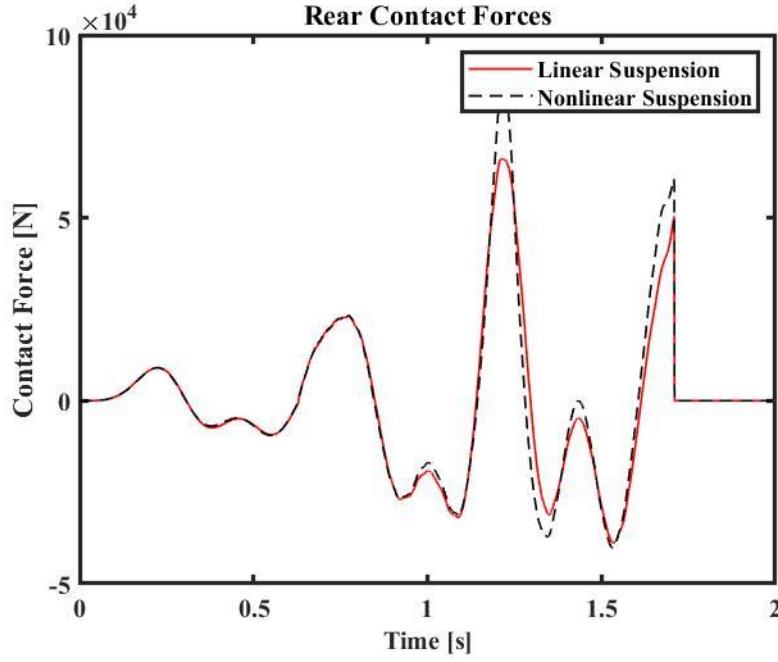
του οχήματος και στις δυνάμεις επαφής. Επειδή ο μη γραμμικός όρος απόσβεσης είναι τετραγωνικός, ένας συντελεστής απόσβεσης των μη γραμμικών όρων μίας τάξης μεγέθους μεγαλύτερος από των γραμμικών επηρεάζει την απόκριση (Σχήμα 3.23) και τις δυνάμεις επαφής (Σχήματα 3.24-3.25).



Σχήμα 3.23: Μετατόπιση οχήματος ανάλογα με τις αναρτήσεις (half-car model).



Σχήμα 3.24: Δυνάμεις επαφής στον μπροστά τροχό ανάλογα με τις αναρτήσεις (half-car model).



Σχήμα 3.25: Δυνάμεις επαφής στον πίσω τροχό ανάλογα με τις αναρτήσεις (half-car model).

### 3.4.3 Μη γραμμικό μοντέλο ολόκληρου οχήματος

Για το όχημα με τους επτά βαθμούς ελευθερίας, οι πρόσθετοι όροι που χαρακτηρίζουν τη μη γραμμική συμπεριφορά των τεσσάρων αναρτήσεων και εισέρχονται στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2.15) είναι:

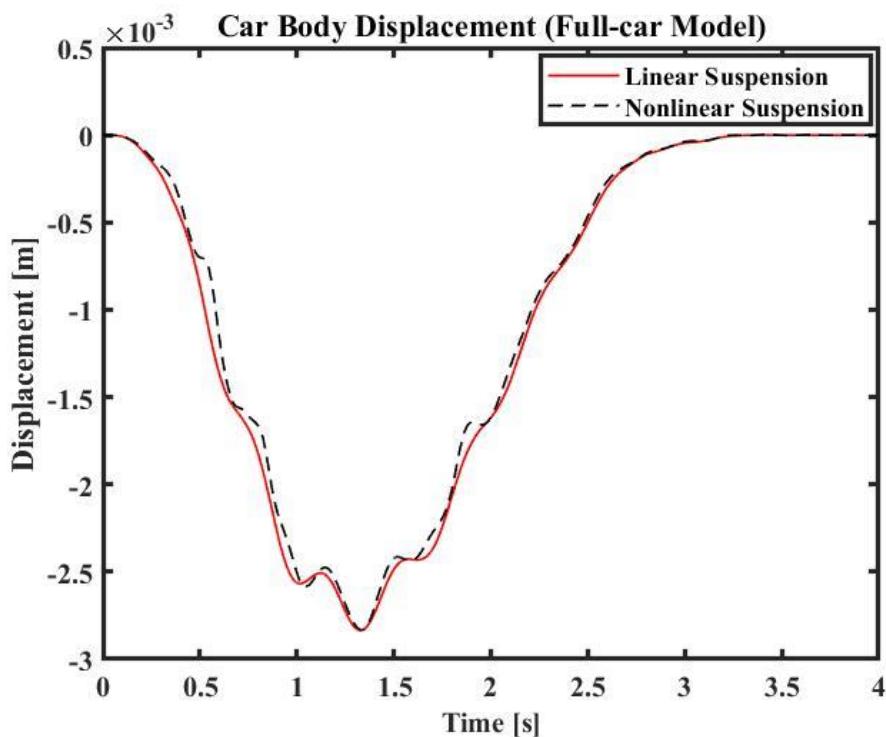
$$\begin{aligned} \mathbf{f}_u = & \begin{pmatrix} -k_{nl} \\ ak_{nl} \\ -t_{f1}k_{nl} \end{pmatrix} \Delta u_{fA}^3 + \begin{pmatrix} -k_{nl} \\ ak_{nl} \\ t_{f2}k_{nl} \end{pmatrix} \Delta u_{fB}^3 + \begin{pmatrix} -k_{nl} \\ -bk_{nl} \\ -t_{r1}k_{nl} \end{pmatrix} \Delta u_{rC}^3 + \begin{pmatrix} -k_{nl} \\ -bk_{nl} \\ t_{r2}k_{nl} \end{pmatrix} \Delta u_{rD}^3 \\ & + \begin{pmatrix} -c_{nl} \\ ac_{nl} \\ -t_{f1}c_{nl} \end{pmatrix} \Delta \dot{u}_{fA}^2 + \begin{pmatrix} -c_{nl} \\ ac_{nl} \\ t_{f2}k_{nl} \end{pmatrix} \Delta \dot{u}_{fB}^2 + \begin{pmatrix} -c_{nl} \\ -bc_{nl} \\ -t_{r1}k_{nl} \end{pmatrix} \Delta \dot{u}_{rC}^2 + \begin{pmatrix} -c_{nl} \\ -bc_{nl} \\ t_{r2}k_{nl} \end{pmatrix} \Delta \dot{u}_{rD}^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Επιπλέον ο μη γραμμικός όρος που αντικαθίσταται στην εξίσωση (2.12) δίνεται από τη σχέση:

$$f_w = \begin{pmatrix} f_{w_{fA}} \\ f_{w_{fB}} \\ f_{w_{rC}} \\ f_{w_{rD}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{nl}\Delta u_{fA}^3 + c_{nl}\Delta \dot{u}_{fA}^2 \\ k_{nl}\Delta u_{fB}^3 + c_{nl}\Delta \dot{u}_{fB}^2 \\ k_{nl}\Delta u_{rC}^3 + c_{nl}\Delta \dot{u}_{rC}^2 \\ k_{nl}\Delta u_{rD}^3 + c_{nl}\Delta \dot{u}_{rD}^2 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

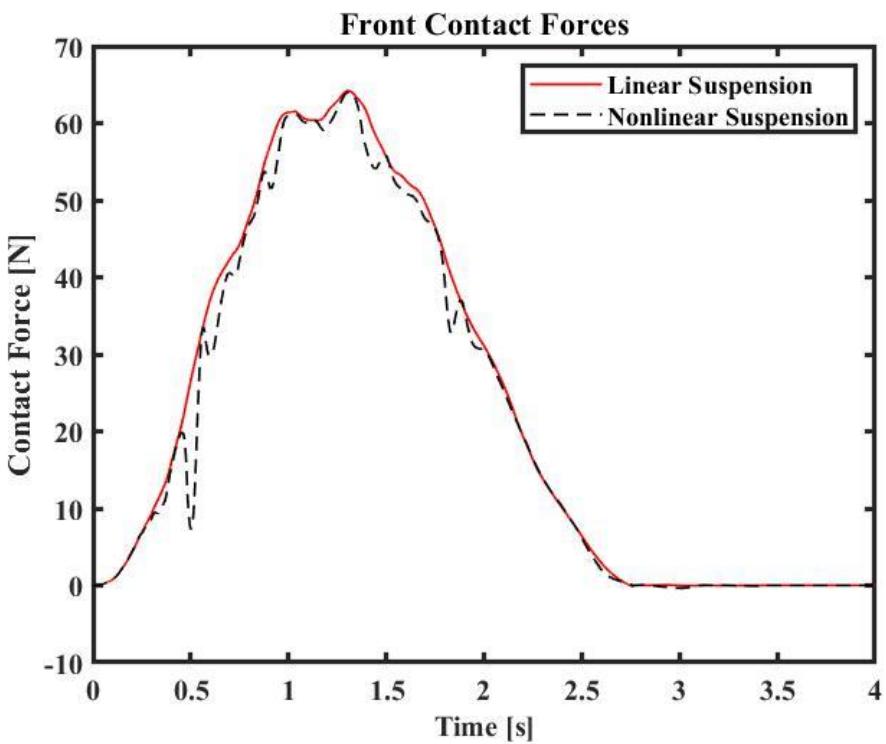
Οι σχέσεις (3.14) ορίζουν τις σχετικές μετατοπίσεις και ταχύτητες του οχήματος με κάθε τροχό. Στην εξεταζόμενη περίπτωση, με τα δεδομένα που παρουσιάστηκαν στον πίνακα 3.3, επισημαίνεται ότι χρειάζεται συντελεστής απόσβεσης των μη γραμμικών όρων δύο τάξεων μεγέθους μεγαλύτερος από των γραμμικών, ώστε να επηρεαστούν η απόκριση του οχήματος και οι δυνάμεις επαφής (Σχήματα 3.26-3.28).

$$\begin{aligned}
\Delta u_{fA} &= (z_s - a\theta + t_{f1}\varphi) - u_{w_{fA}} \\
\Delta \dot{u}_{fA} &= (\dot{z}_s - a\dot{\theta} + t_{f1}\dot{\varphi}) - \dot{u}_{w_{fA}} \\
\Delta u_{fB} &= (z_s - a\theta - t_{f2}\varphi) - u_{w_{fB}} \\
\Delta \dot{u}_{fB} &= (\dot{z}_s - a\dot{\theta} - t_{f2}\dot{\varphi}) - \dot{u}_{w_{fB}} \\
\Delta u_{rC} &= (z_s - a\theta + t_{r1}\varphi) - u_{w_{rC}} \\
\Delta \dot{u}_{rC} &= (\dot{z}_s + b\dot{\theta} + t_{r1}\dot{\varphi}) - \dot{u}_{w_{rC}} \\
\Delta u_{rD} &= (z_s + b\theta - t_{r2}\varphi) - u_{w_{rD}} \\
\Delta \dot{u}_{rD} &= (\dot{z}_s + b\dot{\theta} - t_{r2}\dot{\varphi}) - \dot{u}_{w_{rD}}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

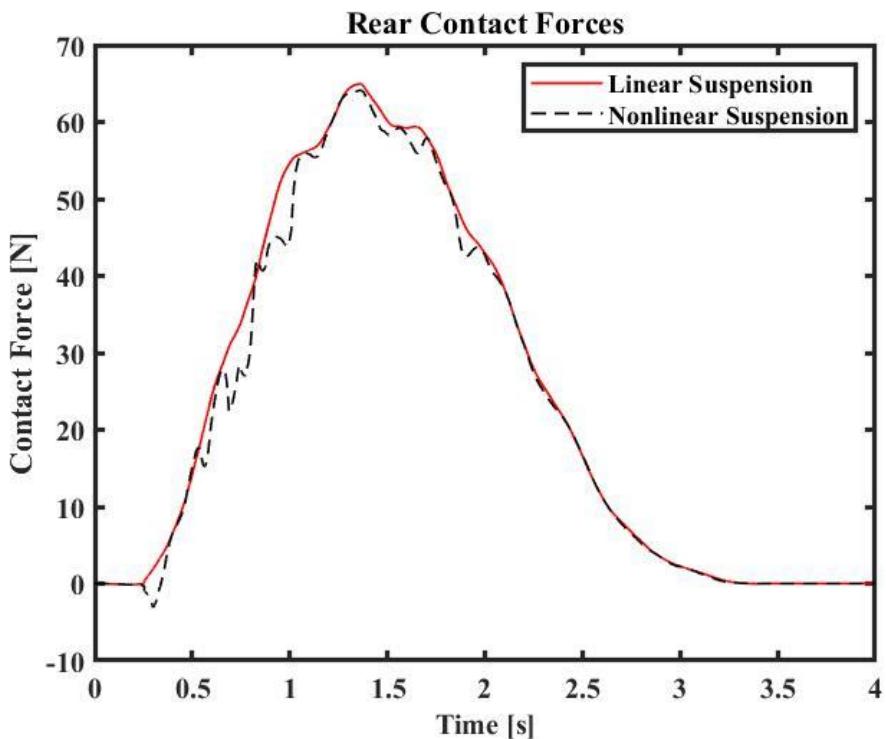


Σχήμα 3.26: Μετατόπιση οχήματος ανάλογα με τις αναρτήσεις (full-car model).

Στα σχήματα 3.27-3.28 διακρίνονται οι δυνάμεις επαφής για γραμμική και μη γραμμική ανάρτηση. Όπως διακρίνεται στο σχήμα 3.20, τα αποτελέσματα για τους εμπρόσθιους τροχούς συμπίπτουν, για δεδομένα ίδιων χαρακτηριστικών ανάρτησης και κέντρο βάρους οχήματος ίδιο με το γεωμετρικό του κέντρο. Το ίδιο ισχύει και για τους πίσω τροχούς. Για αυτό τον λόγο, δε παρουσιάζονται τέσσερα ξεχωριστά διαγράμματα για κάθε τροχό, αλλά μόνο ένα για τους εμπρόσθιους και ένα για τους πίσω.



Σχήμα 3.27: Δυνάμεις επαφής μπροστινών τροχών ανάλογα με τις αναρτήσεις (full-car model).



Σχήμα 3.28: Δυνάμεις επαφής πίσω τροχών ανάλογα με τις αναρτήσεις (full-car model).

## 4 Πειραματική Διάταξη

Στο παρόν κεφάλαιο αρχικά γίνεται η περιγραφή της πειραματικής διάταξης που έχει κατασκευαστεί σε χώρο του Εργαστηρίου Δυναμικής Μηχανών (ΕΔΥΜ). Εκεί, με τον κατάλληλο εξοπλισμό διενεργήθηκε πείραμα, με σκοπό τον προσδιορισμό των επιταχύνσεων σε επιλεγμένα σημεία της διάταξης της γέφυρας. Σε συνέχεια της περιγραφής της διάταξης, περιγράφεται συνοπτικά το χρησιμοποιούμενο λογισμικό και παρουσιάζονται οι αποκρίσεις των επιταχύνσεων στα επιλεγμένα σημεία της γέφυρας.

### 4.1 Περιγραφή πειραματικής διάταξης

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από το μοντέλο γέφυρας του σχήματος 4.1 και το όχημα του σχήματος 4.3. Το μοντέλο γέφυρας έχει τη μορφή ενός δικτυωτού φορέα, αποτελούμενου από κούλες δοκούς ορθωγωνικών διατομών. Ο αριθμός αυτών ανέρχεται στις τριάντα οχτώ, εκ των οποίων οι επτά είναι συνδεδεμένες παράλληλα στο κάτω μέρος της κατασκευής, ώστε να υποστηριχθούν οι τοποθετημένες ράγες πάνω στις οποίες διέρχεται το όχημα. Το συνολικό μήκος της γέφυρας (χωρίς τις προεκτάσεις των ραγών) ισούται με 3 m, το πλάτος της με 565 mm, μετρώντας από τα σημεία των εξωτερικών βάσεων που υποστηρίζουν την κατασκευή και το ύψος της με 540 mm. Οι ράγες απέχουν 370 mm μεταξύ τους και ισαπέχουν από το κέντρο του πλάτους της κατασκευής (Σχήμα 4.2). Κάθε ράγα έχει μήκος 1 m και για να καλυφθεί το μήκος της γέφυρας τοποθετούνται τρεις, από κάθε πλευρά, στη σειρά. Όλες οι ράγες συνδέονται με τις δοκούς υποστήριξης τους, οι οποίες απέχουν 0.5 m μεταξύ τους. Επιπλέον, ράγες έχουν τοποθετηθεί και εκτός της γέφυρας, στις προεκτάσεις του μήκους της, ώστε το όχημα να εισέρχεται με μία αρχική ταχύτητα σε αυτήν, να εξέρχεται πλήρως και να σταματάει σε απόσταση 1 m εκτός της γέφυρας.



Σχήμα 4.1: Πειραματική διάταξη γέφυρας.



Σχήμα 4.2: Εσωτερική απεικόνιση του μοντέλου γέφυρας της πειραματικής διάταξης.

Το όχημα της πειραματικής διάταξης έχει μήκος 345 mm, πλάτος 398 mm και συμπεριλαμβάνοντας την προσθήκη των μαζών (Σχήμα 4.5), ύψος ίσο με 300 mm. Αποτελείται από τέσσερα ροδάκια, γεωμετρίας ικανής να κυλήσουν πάνω στις ράγες, τις βάσεις τους, στις οποίες συνδέονται και οι αναρτήσεις του μοντέλου, μία πλάκα που αποτελεί το κύριο μέρος του οχήματος καθώς και από στοιχεία σύνδεσης των προαναφερθέντων μερών του. Επιπλέον, για την αύξηση της μάζας του οχήματος μπορούν να τοποθετηθούν τεμάχια πάνω στον διαθέσιμο χώρο του, όπως και έγινε για την εκτέλεση του πειράματος. Κάθε ανάρτηση του μοντέλου οχήματος αποτελείται από έναν αποσβεστήρα και ένα ελατήριο, που διακρίνονται στο σχήμα 4.3. Το κόκκινο σωληνάκι, που φαίνεται στο ίδιο σχήμα, λειτουργεί ως ένας οδηγός που επιτρέπει την κατακόρυφη κίνηση με συγκεκριμένη σταθερά ελατηρίου και συγκεκριμένο συντελεστή απόσβεσης.

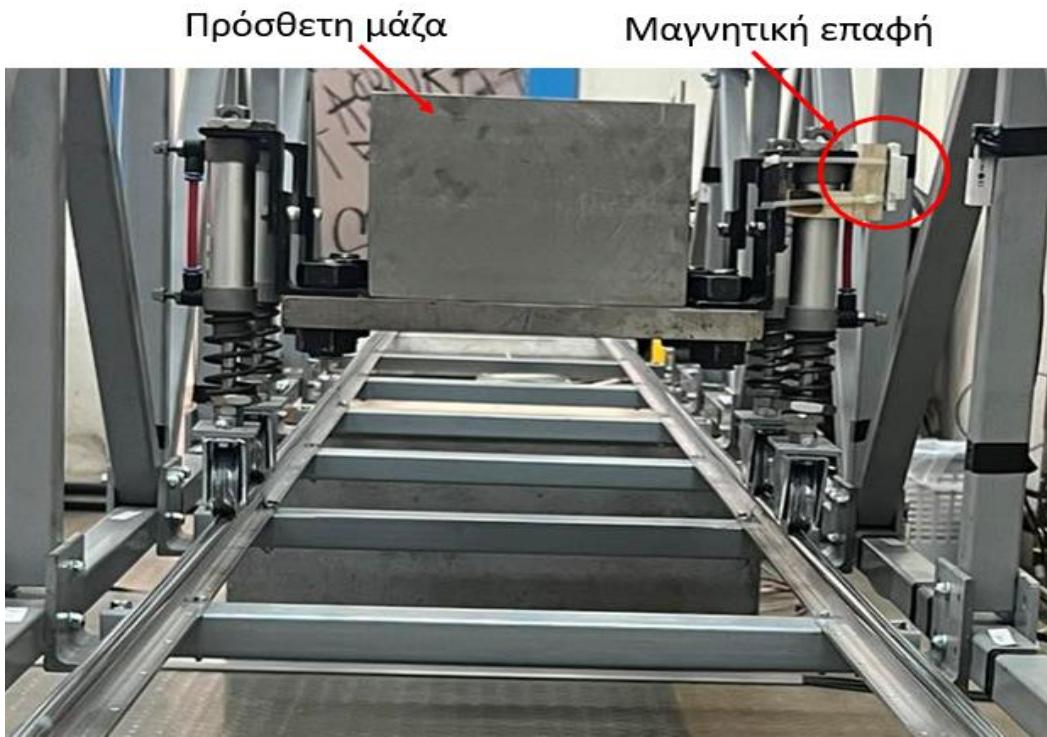
Ακόμη, η πειραματική διάταξη αποτελείται από αισθητήρες, κατάλληλους για τον προσδιορισμό της ταχύτητας διέλευσης του οχήματος και για την παροχή πληροφοριών για τις ταλαντώσεις που εμφανίζονται στη κατασκευή. Για τον προσδιορισμό λοιπόν του προφίλ ταχύτητας του οχήματος, εγκαθίστανται στην πειραματική διάταξη μαγνητικές επαφές. Συνολικά χρησιμοποιούνται εννέα μαγνητικές επαφές, εκ των οποίων οι πέντε είναι εγκατεστημένες σε κατακόρυφες δοκούς της γέφυρας (Σχήμα 4.2), οι τρεις σε σημεία εκτός της γέφυρας (Σχήμα 4.4) και μία προφανώς πάνω στο όχημα (Σχήμα 4.5).



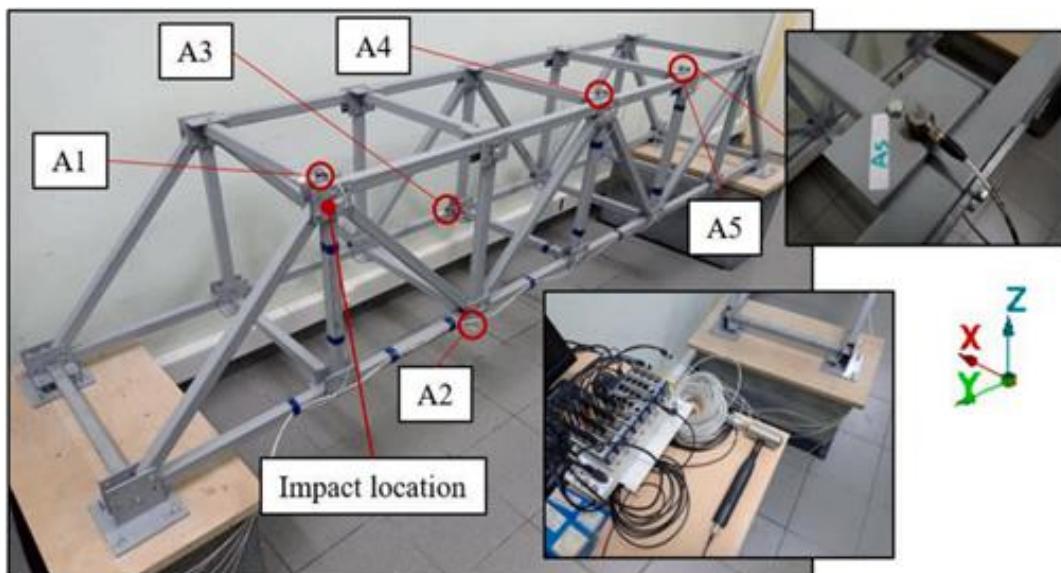
Σχήμα 4.3: Εργαστηριακό μοντέλο οχήματος.



Σχήμα 4.4: Μαγνητική επαφή εκτός της γέφυρας.



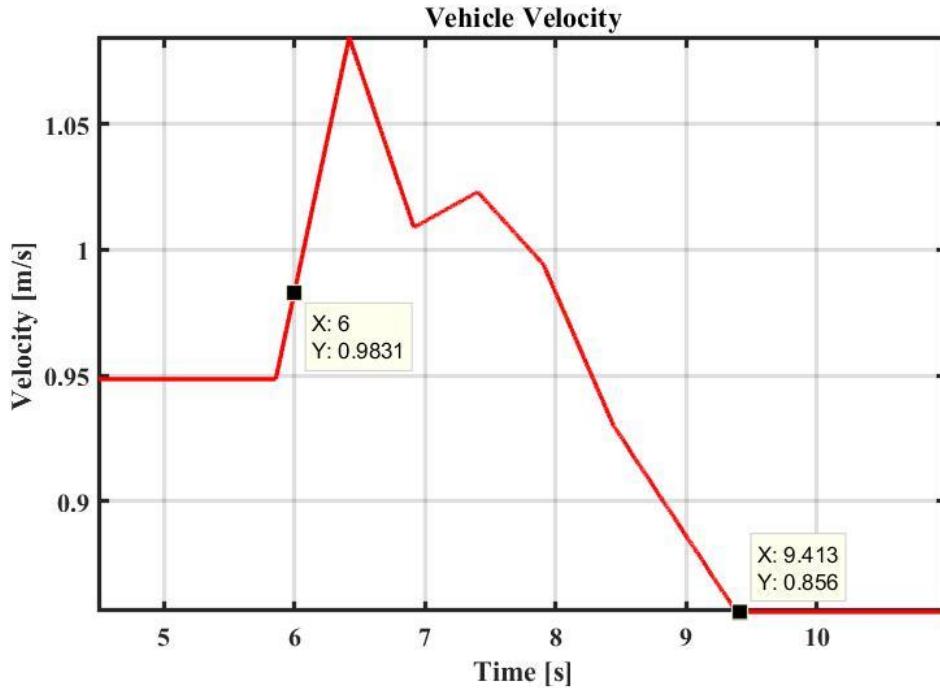
Σχήμα 4.5: Απεικόνιση της μαγνητικής επαφής και των πρόσθετων μαζών του οχήματος.



Σχήμα 4.6: Θέσεις εγκατεστημένων επιταχυνσιομέτρων.

Το δεύτερο είδος αισθητήρων που εγκαθίστανται σε επιλεγμένα σημεία του μοντέλου γέφυρας είναι επιταχυνσιόμετρα. Πιο συγκεκριμένα, πέντε τριαξονικά επιταχυνσιόμετρα, το καθένα από τα οποία μετράει επιταχύνσεις και στις τρεις διευθύνσεις, τοποθετήθηκαν σε σημεία σύνδεσης των δοκών του δικτυώματος (Σχήμα 4.6). Είναι χρήσιμα για μία πληθώρα συμπερασμάτων,

όπως τον προσδιορισμό της δυναμικής απόκρισης της γέφυρας, την αξιολόγηση της κατάστασης της και την ανίχνευση πιθανών ζημιών της.



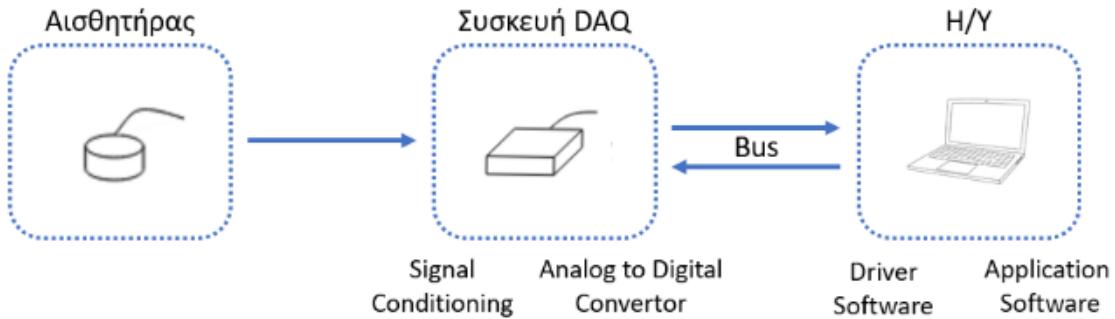
Σχήμα 4.7: Προφίλ ταχύτητας του οχήματος κατά την εκτέλεση του πειράματος.

## 4.2 Αποτελέσματα του πειράματος

Για την συλλογή, επεξεργασία και οπτικοποίηση δεδομένων, τα οποία προέρχονται από μετρήσεις φυσικών ποσοτήτων, χρησιμοποιείται το λογισμικό LabView, ένα γραφικό προγραμματιστικό περιβάλλον. Μέσω αυτού δηλαδή, δημιουργούνται κώδικες μέσω γραφημάτων. Τα αισθητήρια όργανα (μαγνητικές επαφές και επιταχυνσιόμετρα) μετατρέπουν τα φυσικά μεγέθη σε μετρούμενο ηλεκτρικό σήμα. Οι συσκευές DAQ, οι οποίες συνδέονται με τα αισθητήρια και τον υπολογιστή (Σχήμα 4.8), αποθορυβοποιούν, διακριτοποιούν και μεταφέρουν το παραγόμενο σήμα στον υπολογιστή, ο οποίος το καταγράφει σε πραγματικό χρόνο μέσω του λογισμικού LabView. Σε όλες τις περιπτώσεις, ως σήμα ορίζεται η ηλεκτρική τάση, μετρούμενη σε Volt.

Γνωρίζοντας λοιπόν τις αποστάσεις μεταξύ των μαγνητικών επαφών που έχουν τοποθετηθεί εντός και εκτός της γέφυρας και παρατηρώντας τις απότομες αλλαγές του μαγνητικού πεδίου, όταν διέρχεται το όχημα από αυτές, μέσω των παραγόμενων σημάτων και του προαναφερθέντος λογισμικού, εύκολα προκύπτει το προφίλ ταχύτητας του μοντέλου του οχήματος (Σχήμα 4.7). Όπως θα διαπιστωθεί παρακάτω στα αποτελέσματα των επιταχυνσιομέτρων (Σχήματα 4.9-4.11), το όχημα εισέρχεται στη γέφυρα τη χρονική στιγμή  $t = 6 \text{ s}$  και εξέρχεται εξ ολοκλήρου, όταν  $t = 9.41 \text{ s}$ . Επίσης, παρατηρείται ότι το όχημα

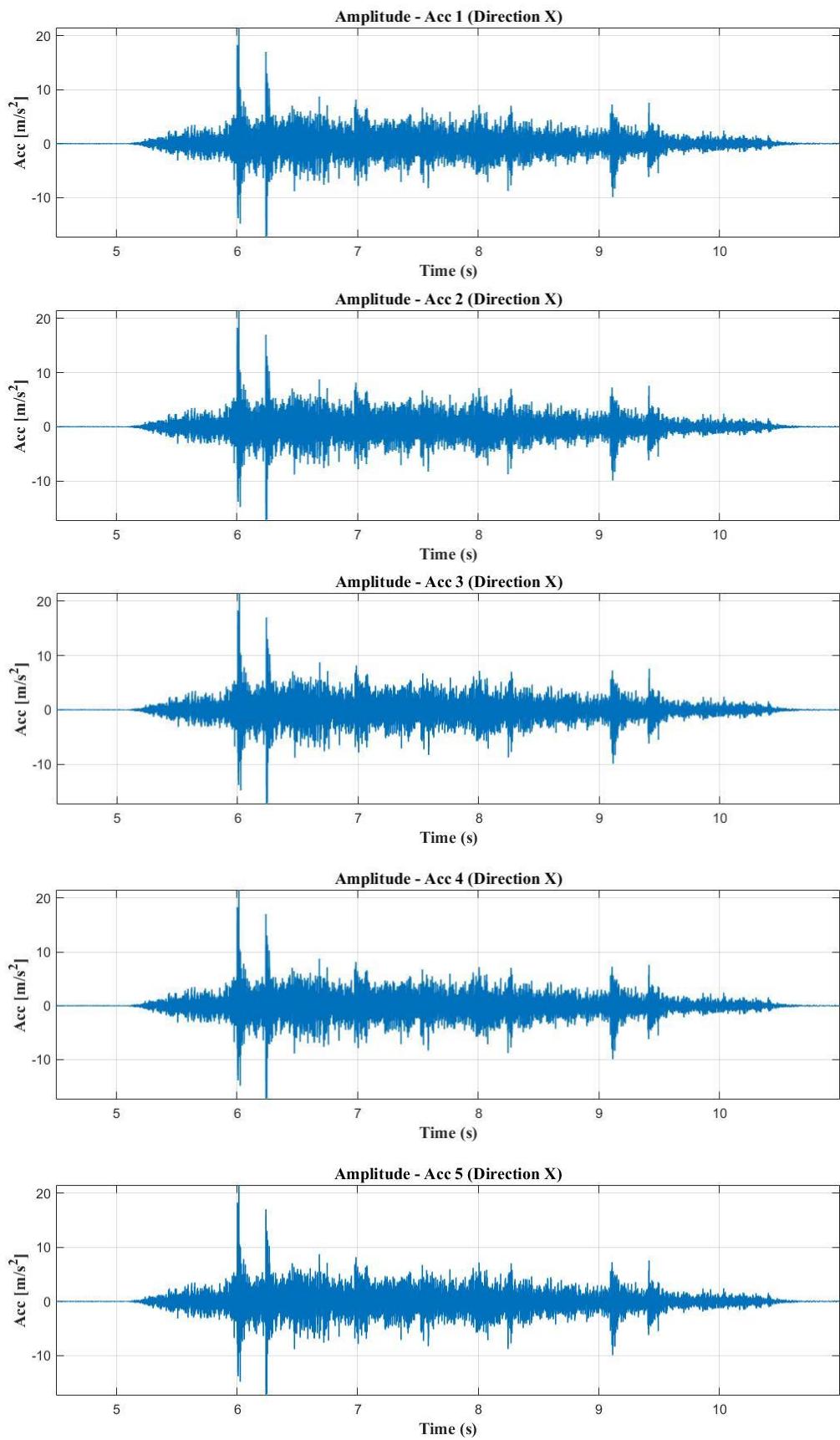
ωθείται περίπου την χρονική στιγμή  $t = 5.2 \text{ s}$ . Η πρώτη μέτρηση ταχύτητας γίνεται 0.15 δευτερόλεπτα πριν το όχημα εισέλθει στη γέφυρα. Αυτό διαπιστώνεται εύκολα, ορίζοντας απλά ότι από την αρχή μέχρι τη στιγμή που περνάει από τη δεύτερη μαγνητική επαφή, η τιμή ταχύτητας είναι σταθερή και ίση με της πρώτης μέτρησης.



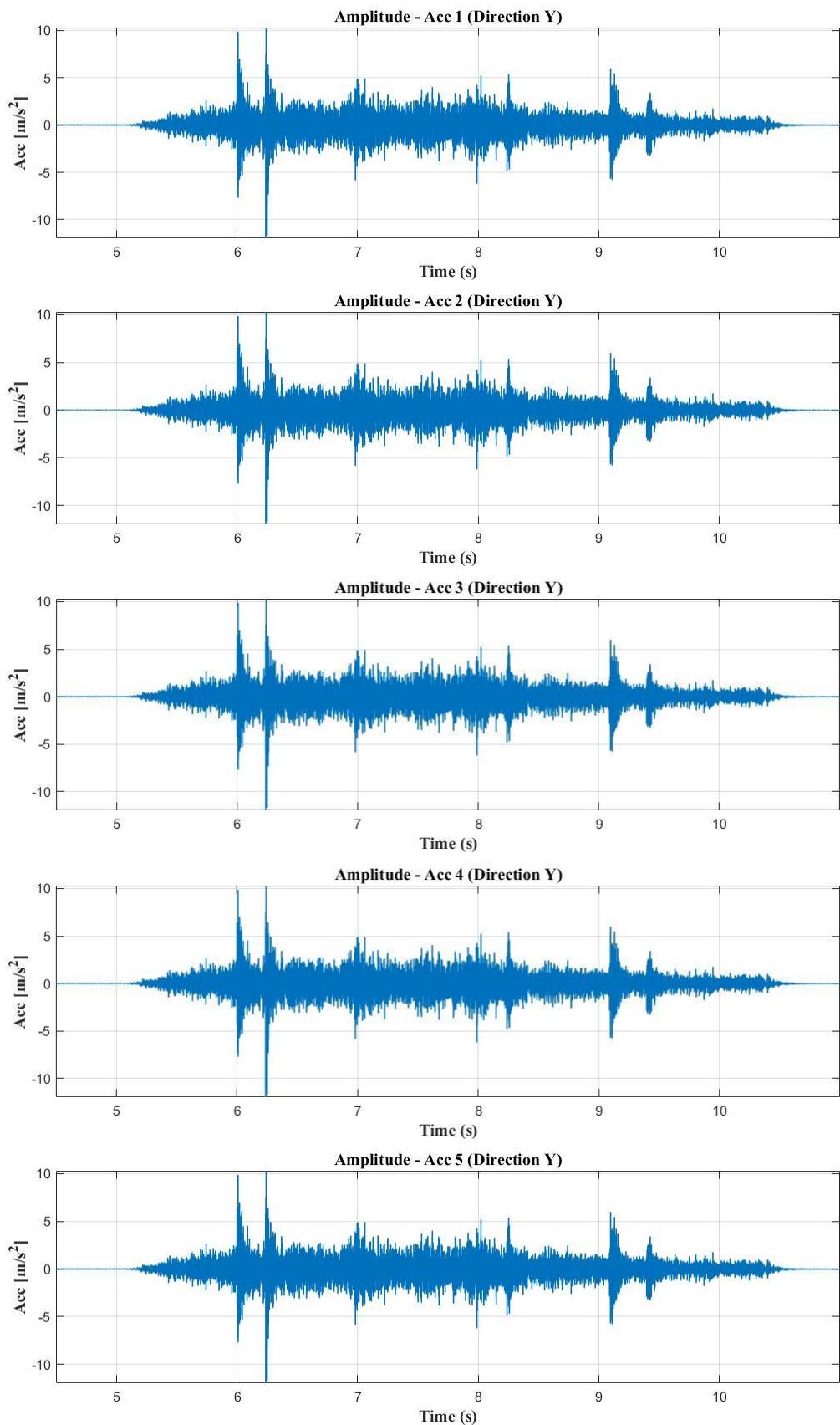
Σχήμα 4.8: Ροή δεδομένων κατά τη πειραματική μέτρηση.

Για την εξαγωγή των μετρήσεων των επιταχυνσιομέτρων, που παρουσιάζονται παρακάτω (Σχήματα 4.9-4.11), συλλέχθηκαν τα καταγεγραμμένα δεδομένα των μετρήσεων σε αρχείο κειμένου (.txt) και εισήχθησαν στο λογισμικό MATLAB. Στην συνέχεια, θεωρώντας ως επιτρεπτές συχνότητες αυτές μέχρι τη τιμή 120 Hz, πραγματοποιήθηκε η γραφική αναπαράσταση των φιλτραρισμένων δεδομένων.

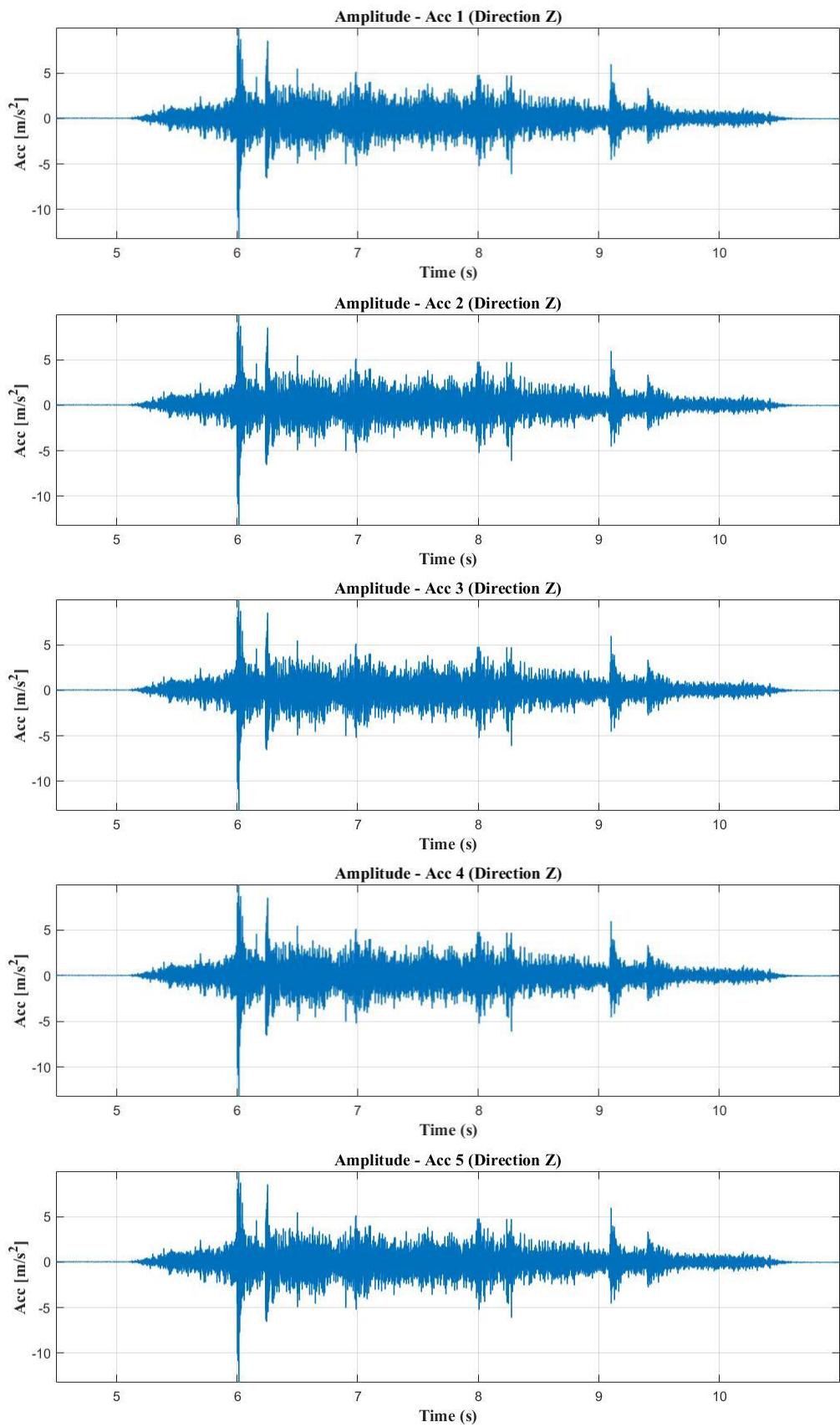
Από τις μετρήσεις των επιταχυνσιομέτρων σε κάθε κατεύθυνση, καταρχάς είναι προφανείς οι στιγμές που το όχημα εισέρχεται και εξέρχεται από τη γέφυρα, διότι στα σημεία εισόδου και εξόδου που συνδέονται δύο διαφορετικές ράγες με τις δοκούς υποστήριξης έχουν δημιουργηθεί εγκοπές, έτσι ώστε να προκληθούν τα peaks στα σχήματα 4.9-4.11, που υποδεικνύουν τις χρονικές στιγμές εισόδου και εξόδου του οχήματος. Αυτές οι κορυφές εμφανίζονται ανά δύο, καθώς πρώτα περνάνε από τα σημεία των εγκοπών οι μπροστά και έπειτα οι πίσω τροχοί. Οι διευθύνσεις των αξόνων X, Y, Z είναι ίδιες με αυτές που παριστάνονται στο σχήμα 4.6. Διακρίνεται ότι οι μετρήσεις των επιταχυνσιομέτρων εμφανίζουν μεγαλύτερα εύρη τιμών στη διεύθυνση X. Μία εξήγηση για αυτό είναι, ότι το σύνολο των ιδιομορφών που ενεργοποιούνται κατά την εκτέλεση του πειράματος, μέχρι την τιμή 120 Hz, έχουν κυρίως καμπτική συμπεριφορά ως προς τον άξονα X. Έτσι, η κάμψη ως προς αυτόν τον άξονα είναι εντονότερη και αυτό αποτυπώνεται στις τιμές των μετρήσεων των εγκατεστημένων επιταχυνσιομέτρων.



Σχήμα 4.9: Μετρούμενες επιταχύνσεις στη διεύθυνση X.



Σχήμα 4.10: Μετρούμενες επιταχύνσεις στη διεύθυνση Y.



Σχήμα 4.11: Μετρούμενες επιταχύνσεις στη διεύθυνση Z.

## 5 Μοντελοποίηση και Ανάλυση της Πειραματικής Διάταξης

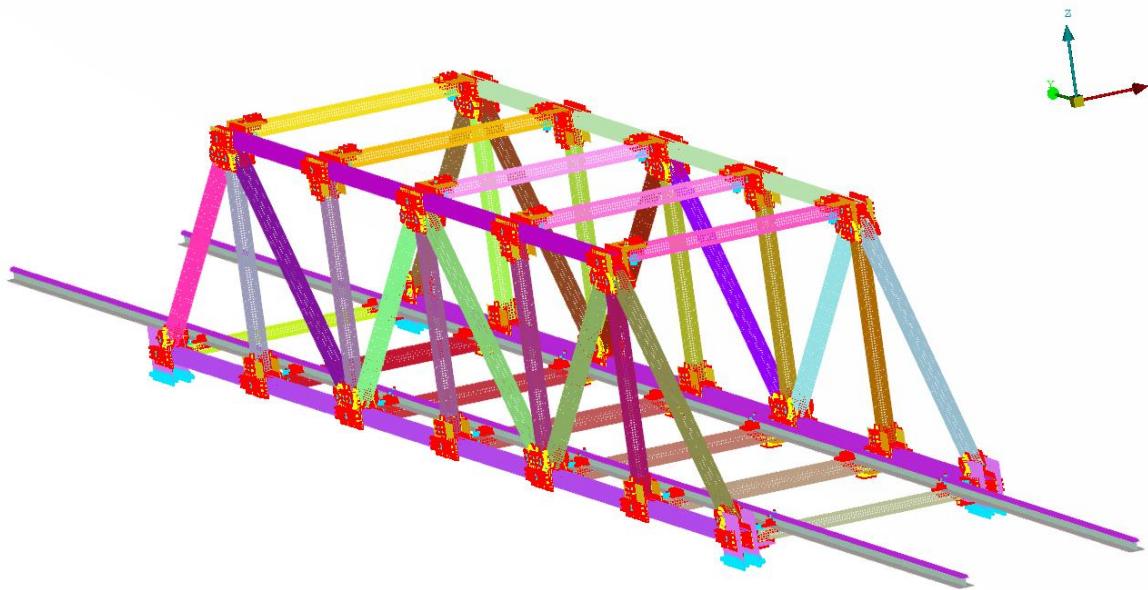
Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η μοντελοποίηση και η ανάλυση των μοντέλων οχήματος και γέφυρας που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 4, μέσω λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων και λογισμικού πολλαπλών σωμάτων. Σημειώνεται ότι η γεωμετρία ολόκληρου του συστήματος είχε ήδη αναπτυχθεί. Στο πλαίσιο της διπλωματικής, για την ανάπτυξη των μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιούνται τα λογισμικά HyperMesh και ANSA pre processor των εταιριών Altair και BETA CAE Systems αντίστοιχα. Για την ανάλυση της δυναμικής του συστήματος οχήματος-γέφυρας, που αποτελεί ένα σύστημα πολλαπλών σωμάτων, γίνεται χρήση του λογισμικού Adams View της εταιρίας MSC Software Corporation. Αφού πρώτα παρουσιαστούν τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων της γέφυρας και του οχήματος, στη συνέχεια αναλύεται συνοπτικά ο τρόπος με τον οποίο η γεωμετρία ολόκληρου του συστήματος μετατράπηκε σε παραμορφώσιμη (flexible), για να ληφθεί υπόψιν στο λογισμικό προσομοίωσης της δυναμικής πολλαπλών σωμάτων. Έπειτα, παρουσιάζεται η ανάπτυξη του συστήματος πολλαπλών σωμάτων με τον ορισμό των σωμάτων (bodies), την προσθήκη των κατάλληλων δεσμών κίνησης (joints), των δυνάμεων ελατηρίου, αποσβεστήρα (bushings), την προσομοίωση της επαφής του οχήματος με τις ράγες (contacts) και την επιβολή της κίνησης του οχήματος (motions). Όσον αφορά κάποιες από τις παραμέτρους των ορισμένων δυνάμεων επαφής, υλοποιείται μία διερεύνηση για την τιμή τους. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης που προκύπτουν από τα λογισμικά και συγκρίνονται με αυτά της πειραματικής ανάλυσης.

### 5.1 Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων της γέφυρας

Η πλειονότητα του μοντέλου γέφυρας χωρίς τις ράγες είχε ήδη πραγματοποιηθεί από το ΕΔΥΜ. Για την τοποθέτηση των ραγών ήταν απαραίτητη η αλλαγή των δοκών υποστήριξης τους. Επομένως, πραγματοποιήθηκε ανακατασκευή του μοντέλου που προϋπήρχε, με αλλαγές κυρίως στη γεωμετρία των δοκών υποστήριξης των ραγών και εκ νέου διακριτοποίηση τους. Ακολούθησε η σχεδίαση, η διακριτοποίηση και η τοποθέτηση των ραγών στη γέφυρα και στη προέκταση του μήκους της. Για τα προαναφερθέντα χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό HyperMesh.

Το συνολικό διακριτοποιημένο μοντέλο της γέφυρας με τις ράγες διακρίνεται στο σχήμα 5.1. Οι διαστάσεις του αντιπροσωπεύουν το μοντέλο της πειραματικής διάταξης. Το μοντέλο συνολικά αποτελείται από 409,386 στοιχεία. Γενικά, για ολόκληρη την κατασκευή στην πλειονότητα της έχουν χρησιμοποιηθεί επιφανειακά στοιχεία (quads και trias), διότι οι δοκοί που αποτελούν τον δικτυωτό φορέα είναι κούλες. Επιπλέον, επιφανειακά στοιχεία αποτελούν τη βάση και το εγκάρσιο τμήμα της ράγας, έτσι ώστε να υπάρχει βέλτιστη σχέση ποιότητας

αποτελεσμάτων-υπολογιστικού χρόνου (Σχήμα 5.2). Τρισδιάστατα στοιχεία (penta και hexa elements) έχουν χρησιμοποιηθεί για το επάνω μέρος της ράγας, που έρχεται σε επαφή με το όχημα, για την μοντελοποίηση των συνδέσεων των ραγών με τις δοκούς υποστήριξης τους (Σχήμα 5.3) και για τις συνδέσεις των δοκών του δικτυωτού φορέα μεταξύ τους. Επιπλέον, για την προσομοίωση αυτών των συνδέσεων χρησιμοποιούνται στοιχεία RBE2 και RBE3. Στοιχεία RBE2 έχουν επίσης εισαχθεί στις βάσεις που πατάει η γέφυρα, ώστε σε αυτά να οριστούν οι περιορισμοί πάκτωσης (ενότητα 5.4). Η μοντελοποίηση της επαφής ράγας-γέφυρας γίνεται αυτόματα μέσω της εντολής “Adhesive” στον ANSA pre processor. Τέλος αναφέρεται ότι τα στοιχεία CONM2 αντιπροσωπεύουν τη μάζα των κοχλιών που χρησιμοποιούνται στα προαναφερθέντα σημεία σύνδεσης.

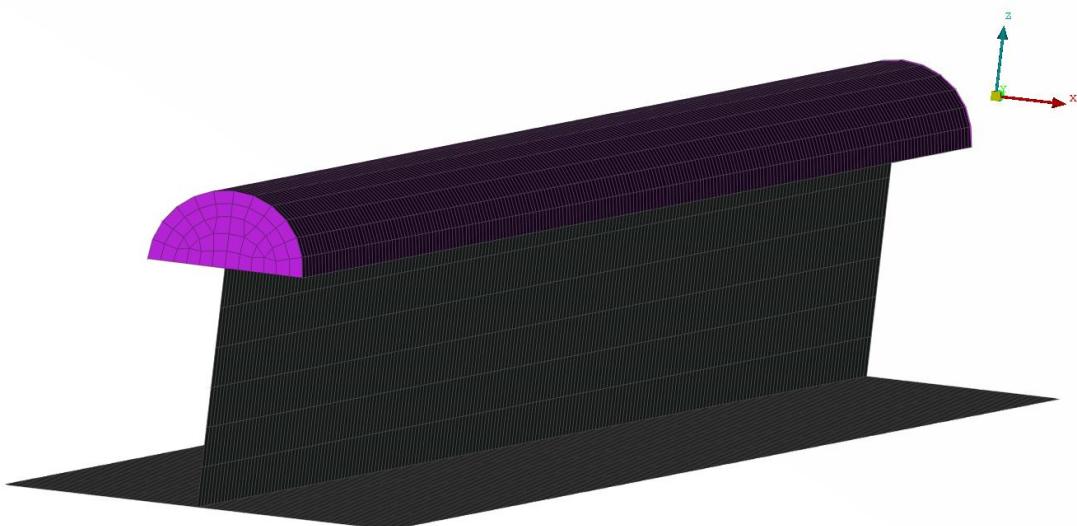


Σχήμα 5.1: Διακριτοποιημένο μοντέλο γέφυρας-ραγών.

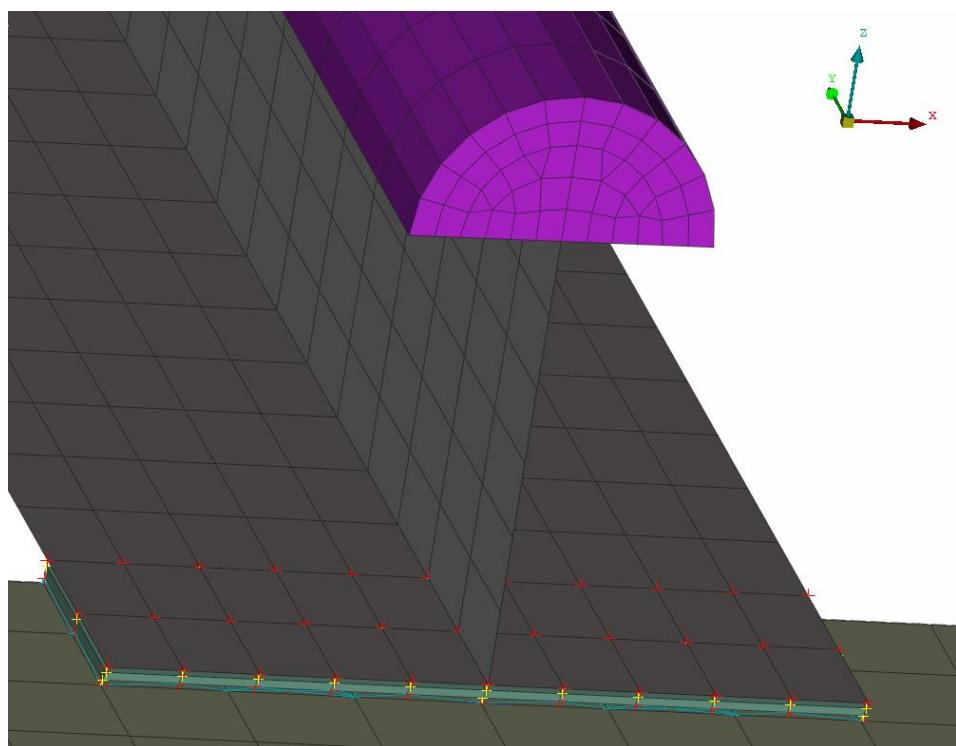
## 5.2 Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων του οχήματος

Το διακριτοποιημένο μοντέλο οχήματος της πειραματικής διάταξης διακρίνεται στα σχήματα 5.4-5.5. Οι διαστάσεις του αντιπροσωπεύουν το πειραματικό μοντέλο οχήματος. Το μοντέλο συνολικά αποτελείται από 51,424 στοιχεία. Όλα τα μέρη του μοντελοποιούνται με τρισδιάστατα στοιχεία (penta και hexa elements), διότι θεωρούνται στερεά (solid). Στα σημεία σύνδεσης των επιμέρους τεμαχίων του οχήματος μεταξύ τους, δηλαδή στην σύνδεση της βάσης του οχήματος με τις γωνίες που χρησιμοποιούνται για τη στήριξη των αποσβεστήρων και στη σύνδεση της βάσης των τροχών με τα αμορτισέρ, χρησιμοποιούνται στοιχεία RBE2. Θεωρείται ότι τα τεμάχια δεν παραμορφώνονται σημαντικά και κινούνται μαζί, με αποτέλεσμα η προστιθέμενη ακαμψία μέσω των στοιχείων RBE2, να παριστάνει καλύτερα τη πειραματική

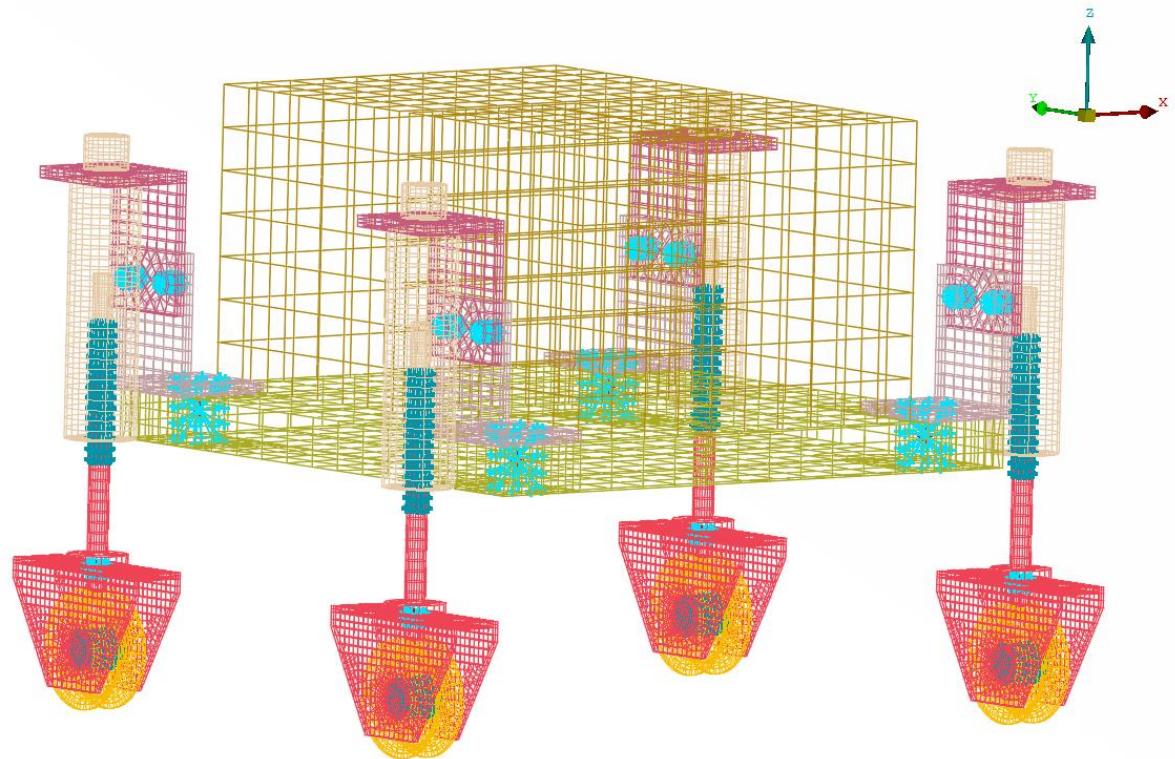
κατασκευή. Οι μάζες των κοχλιών που χρησιμοποιούνται για τις συνδέσεις μοντελοποιούνται με στοιχεία CONM2. Ακόμη, επειδή υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των βάσεων και των τροχών και μεταξύ των μελών του κάθε αμορτισέρ, η προσομοίωση της σύνδεσης γίνεται με στοιχεία RBE3, τα οποία παρέχουν μία κατανεμημένη σύνδεση και δεν επηρεάζουν την ακαμψία του μοντέλου. Για όλα τα παραπάνω χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό HyperMesh.



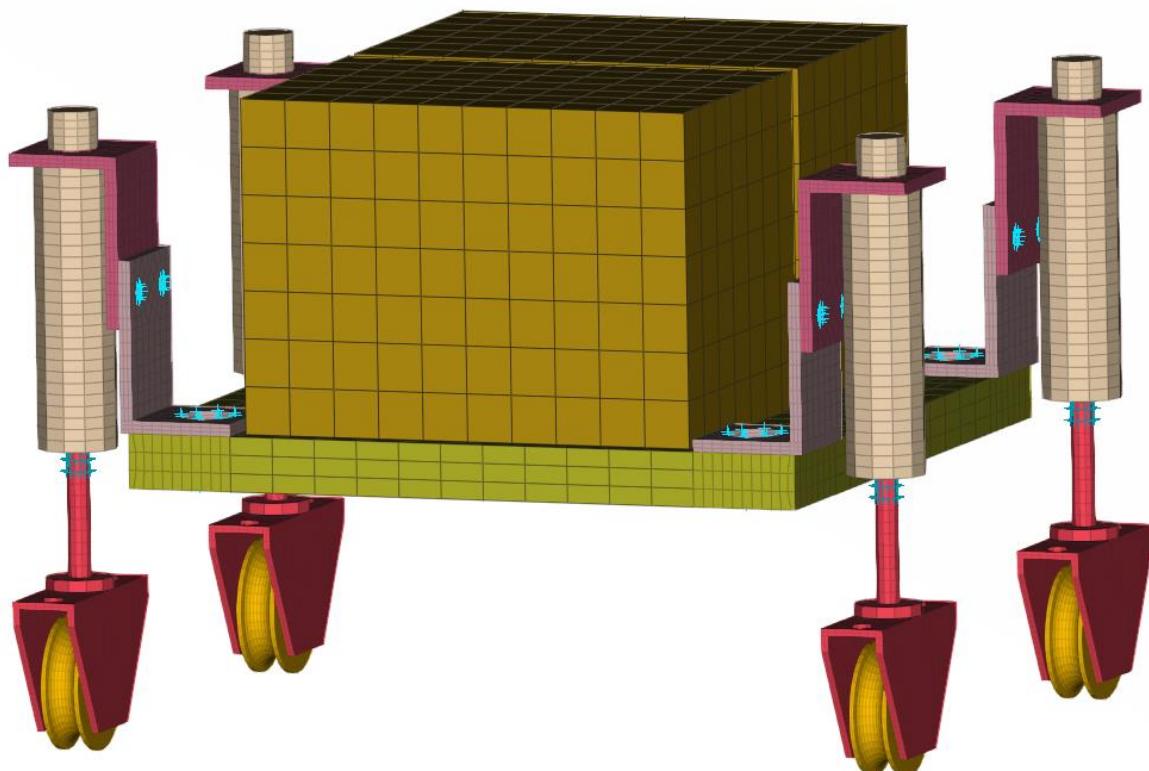
Σχήμα 5.2: Απλοποιημένη ράγα του μοντέλου της πειραματικής διάταξης.



Σχήμα 5.3: Μοντελοποίηση επαφής ράγας-γέφυρας.



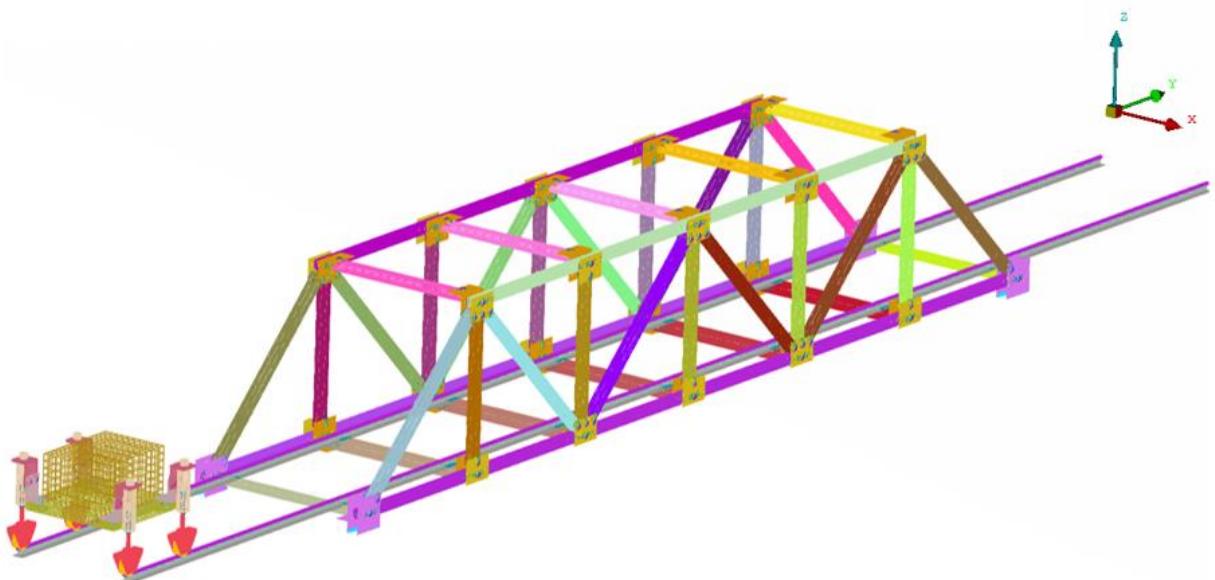
Σχήμα 5.4: Διακριτοποιημένο μοντέλο οχήματος.



Σχήμα 5.5: Διακριτοποιημένο μοντέλο οχήματος (shaded).

### 5.3 Μοντελοποίηση συστήματος με εύκαμπτα σώματα

Έχοντας αναπτύξει τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων για τη γέφυρα με τις ράγες και το όχημα, εύκολα στήνεται το συνολικό σύστημα που περιγράφει την πειραματική διάταξη (Σχήμα 5.6) στο λογισμικό ANSA pre processor. Πριν την εξαγωγή κατάλληλου αρχείου (.cmd) από το λογισμικό, ώστε να υλοποιηθεί η δυναμική ανάλυση του συστήματος πολλαπλών σωμάτων στο Adams View, πρέπει να οριστούν τα σώματα που χαρακτηρίζουν το σύστημα. Πρώτα χρειάζεται να δημιουργηθούν τα άκαμπτα (rigid) σώματα. Εύκολα, από τη καρτέλα “Kinetics” του ANSA pre processor δημιουργούνται τα σώματα των σχημάτων 5.7-5.11. Συνολικά το σύστημα περιλαμβάνει τα δώδεκα σώματα του πίνακα 5.1.



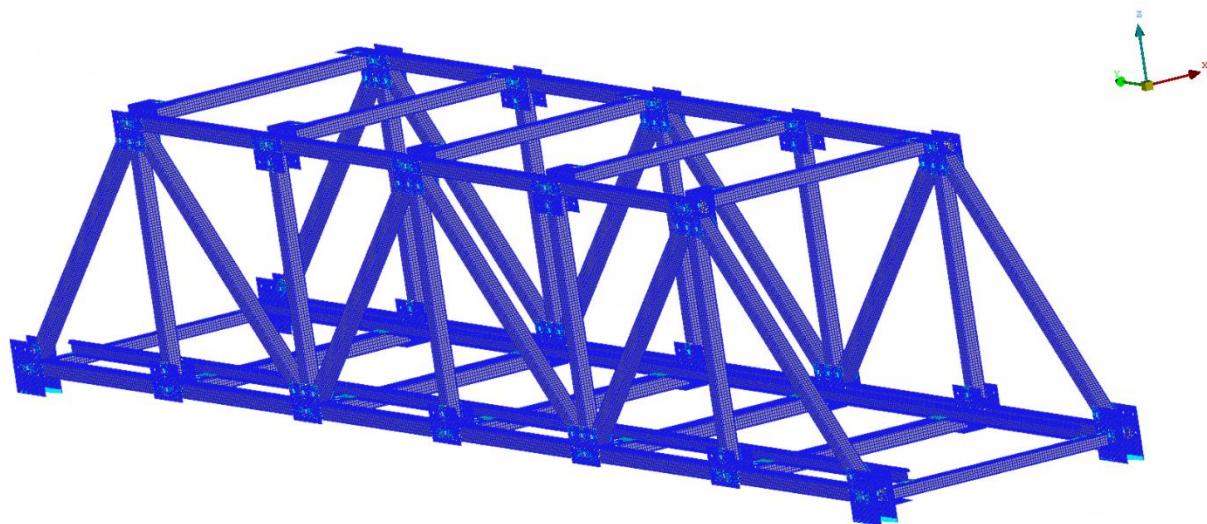
Σχήμα 5.6: Μοντελοποίηση συνολικού συστήματος γέφυρας-οχήματος.

Πίνακας 5.1: Ορισμένα σώματα για τη μοντελοποίηση του συνολικού συστήματος.

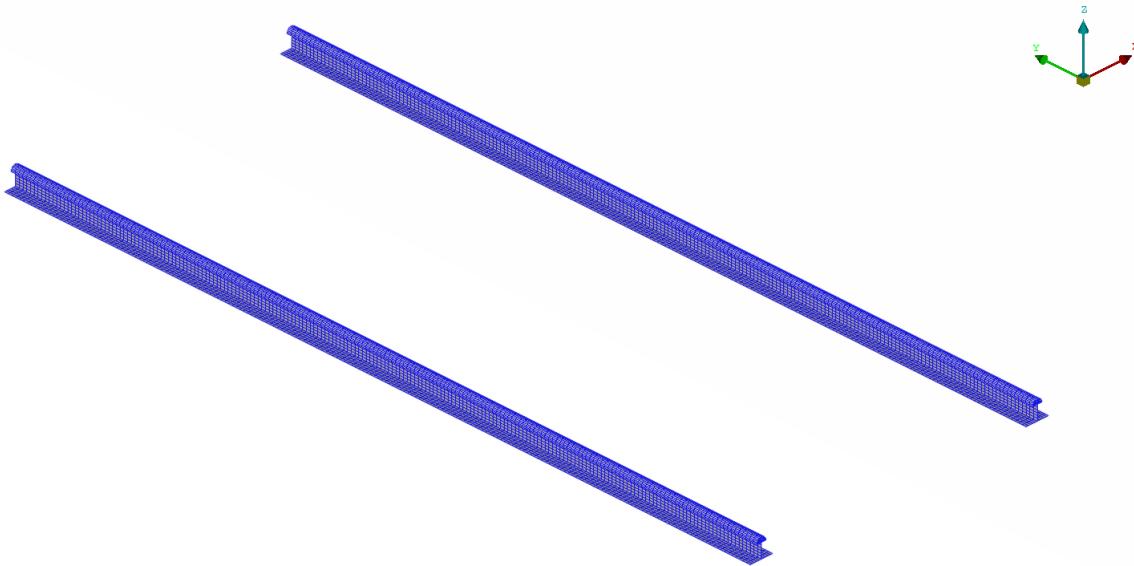
Σώματα	Αριθμός κάθε Σώματος
Γέφυρα	1
Εξωτερικές ράγες	2
Άνω μέρος οχήματος	1
Τροχός	4
Βάση τροχού	4

Από αυτά, όλα πλην των ραγών εκτός γέφυρας θα εξεταστούν ως εύκαμπτα (flexible) σώματα. Επειδή το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στο σύστημα VBI και οι εξωτερικές ράγες έχουν τοποθετηθεί μόνο και μόνο για να εισέλθει το όχημα στη γέφυρα με αρχική ταχύτητα και να έχει το περιθώριο να σταματήσει σε εύλογη απόσταση έξω από αυτή, δεν έχει ουσία να θεωρηθούν οι εν λόγω ράγες εύκαμπτες.

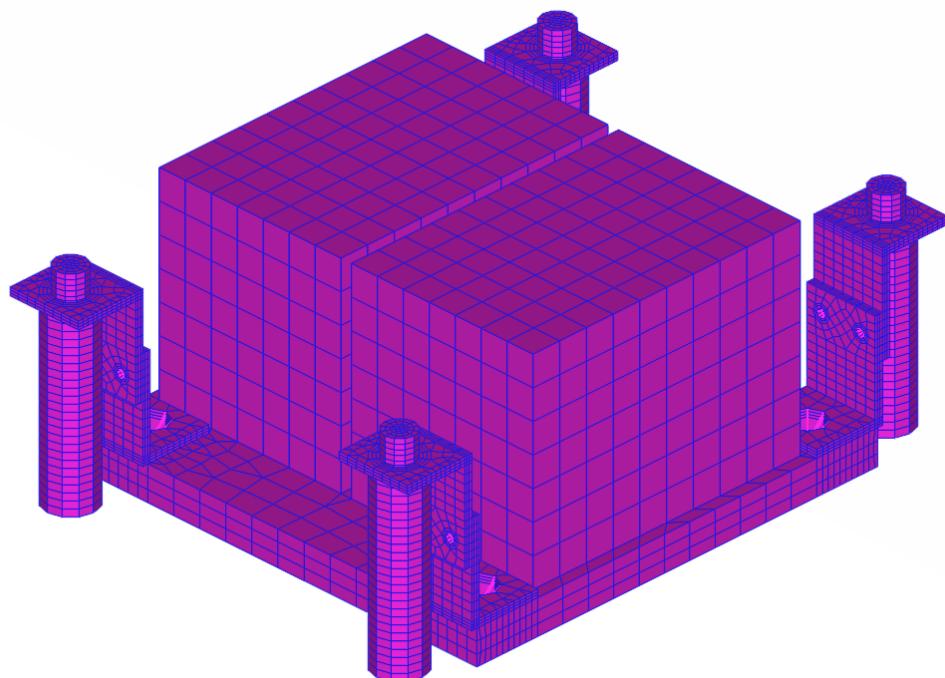
Η διαδικασία μετατροπής των άκαμπτων σωμάτων σε εύκαμπτα γίνεται μέσω του λογισμικού ANSA pre processor. Για να επιτευχθεί η μετατροπή χρειάζεται να δημιουργηθούν αρχεία MNF (Modal Neutral Files) για κάθε σώμα. Αυτά περιγράφουν την μορφική συμπεριφορά του κάθε σώματος και περιλαμβάνουν στοιχεία για τη γεωμετρία, τη μάζα, την αδράνεια και τις ιδιομορφές του. Στο πλαίσιο της διπλωματικής, τα αρχεία που δημιουργήθηκαν περιλαμβάνουν πληροφορίες για τις πρώτες 10 ελαστικές ιδιομορφές κάθε σώματος. Από τη καρτέλα “Kinetics” και την εντολή Flex, επιλέγεται το άκαμπτο σώμα, για το οποίο επιθυμείται να εξαχθεί αρχείο MNF και πραγματοποιείται μορφική ανάλυση μέχρι τον αριθμό των ιδιομορφών που καθορίζεται. Έχοντας πλέον δημιουργηθεί το αρχείο MNF, επιλέγεται το άκαμπτο σώμα που επιθυμείται να μετατραπεί σε εύκαμπτο και εισάγεται το αντίστοιχο αρχείο MNF για την παροχή όλων των απαραίτητων πληροφοριών. Έχοντας ολοκληρώσει τη διαδικασία για όλο το σύστημα, πλην των ραγών εκτός γέφυρας που παραμένουν άκαμπτες, εξάγεται αρχείο CMD, το οποίο αποτελεί είσοδο στο λογισμικό Adams View για την ανάπτυξη και τη δυναμική ανάλυση του συστήματος πολλαπλών σωμάτων.



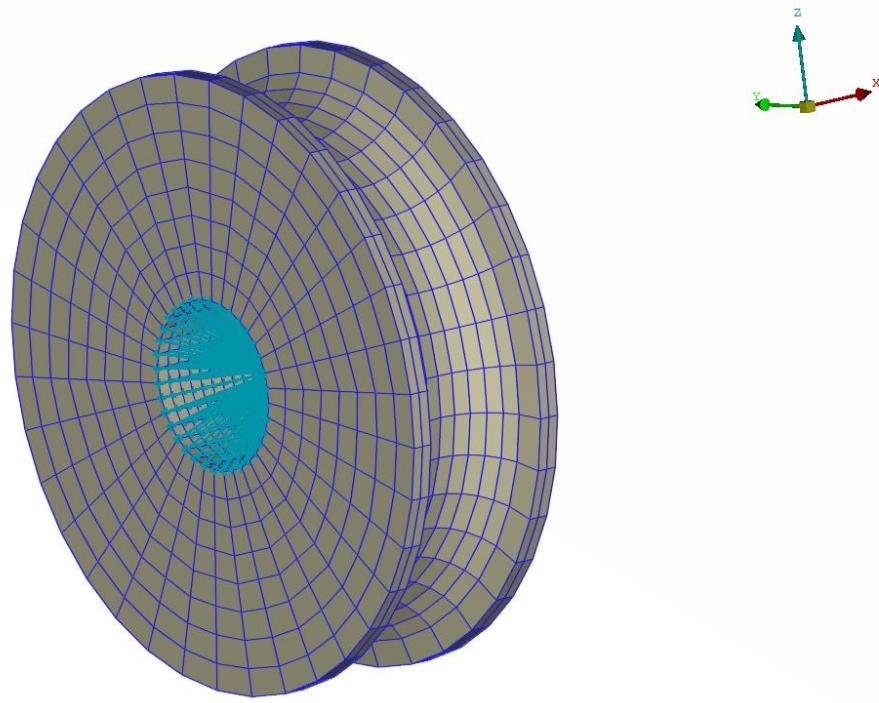
Σχήμα 5.7: Ορισμένο σώμα γέφυρας-ράγες.



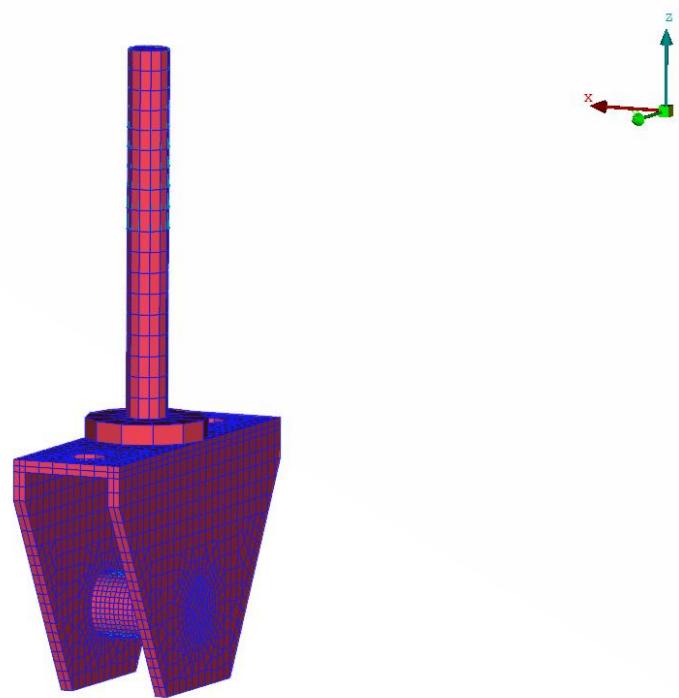
Σχήμα 5.8: Ορισμένο σώμα εξωτερικών ραγών.



Σχήμα 5.9: Ορισμένο σώμα άνω μέρους οχήματος.



Σχήμα 5.10: Ορισμένο σώμα τροχού οχήματος.

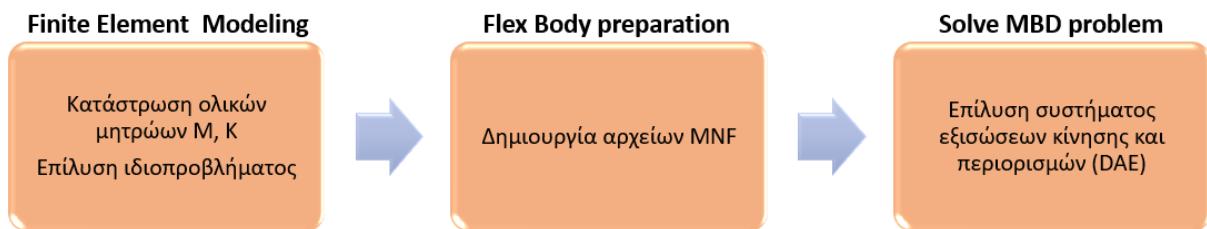


Σχήμα 5.11: Ορισμένο σώμα βάσης του τροχού.

## 5.4 Ανάπτυξη μοντέλου πολλαπλών σωμάτων

Έχοντας ολοκληρώσει όλα τα παραπάνω βήματα, δηλαδή την κατάστρωση των ολικών μητρώων μέσω των μοντέλων των πεπερασμένων στοιχείων για το σύστημα, την επίλυση του ιδιοπροβλήματος και την εξαγωγή αρχείων MNF για τη δημιουργία παραμορφώσιμων σωμάτων, το τελικό βήμα είναι η επίλυση των εξισώσεων κίνησης, αφού πραγματοποιηθεί η κατάστρωση των περιορισμών.

Εισάγοντας το αρχείο CMD στο λογισμικό Adams View, διακρίνεται ολόκληρο το μοντέλο στο περιβάλλον του λογισμικού. Αφού πρώτα επιλεχθούν οι προτιμητέες μονάδες μέτρησης και οριστεί η κατεύθυνση της βαρύτητας, ακολουθεί η διαδικασία που περιγράφεται στη συνέχεια για την ανάπτυξη του μοντέλου του συστήματος (Σχήμα 5.17).



Σχήμα 5.12: Αλγόριθμος ανάπτυξης και ανάλυσης του μοντέλου πολλαπλών σωμάτων.

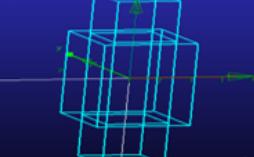
Αρχικά πρέπει πάντα να ορίζονται τα επιμέρους σώματα, που περιγράφουν το μοντέλο πολλαπλών σωμάτων. Στο πλαίσιο της διπλωματικής, αυτό έγινε στο λογισμικό ANSA pre processor, όπως αναπτύχθηκε στην ενότητα 5.3 και τα σώματα είχαν ήδη οριστεί όπως στον πίνακα 5.1. Πάντα, επιπλέον στο Adams View υπάρχει ορισμένο ως σώμα το έδαφος (ground).

Ακολουθεί η κατάστρωση των περιορισμών, ορίζοντας τους κατάλληλους δεσμούς κίνησης (joints), έτσι ώστε να επιτραπούν ορισμένες σχετικές κινήσεις ανάμεσα σε δύο σώματα και να απαγορευτούν άλλες. Οι περιορισμοί που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη του μοντέλου διακρίνονται στο σχήμα 5.13, όπου περιγράφεται επίσης η λειτουργία τους. Συνολικά έχουν οριστεί δεκατέσσερις αρθρώσεις για την ορθή μοντελοποίηση του συστήματος. Στον πίνακα 5.2 διακρίνεται ο τύπος σύνδεσης και τα σώματα που συνδέονται σε κάθε περίπτωση. Σημειώνεται ότι συνολικά έχουν οριστεί τέσσερις πακτώσεις ανάμεσα στη γέφυρα και το έδαφος. Η γέφυρα είναι παραμορφώσιμη, επομένως δεν αρκεί μία άρθρωση ώστε να θεωρηθεί πακτωμένη. Ουσιαστικά οι τέσσερις βάσεις της είναι συνδεδεμένες στο έδαφος, επομένως, όπως επισημάνθηκε στην ενότητα 5.1, δημιουργήθηκαν τέσσερα στοιχεία RBE2 αποτελούμενα από τους κόμβους των βάσεων που συνδέονται στο έδαφος και στους "master nodes" αυτών ορίζονται οι αρθρώσεις πάκτωσης (Σχήμα 5.14). Όσον αφορά τις εξωτερικές ράγες, επειδή είναι άκαμπτες αρκεί μία άρθρωση πάκτωσης σε οποιοδήποτε σημείο. Οι περιστροφικές αρθρώσεις ορίζονται ως προς τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο της κίνησης και

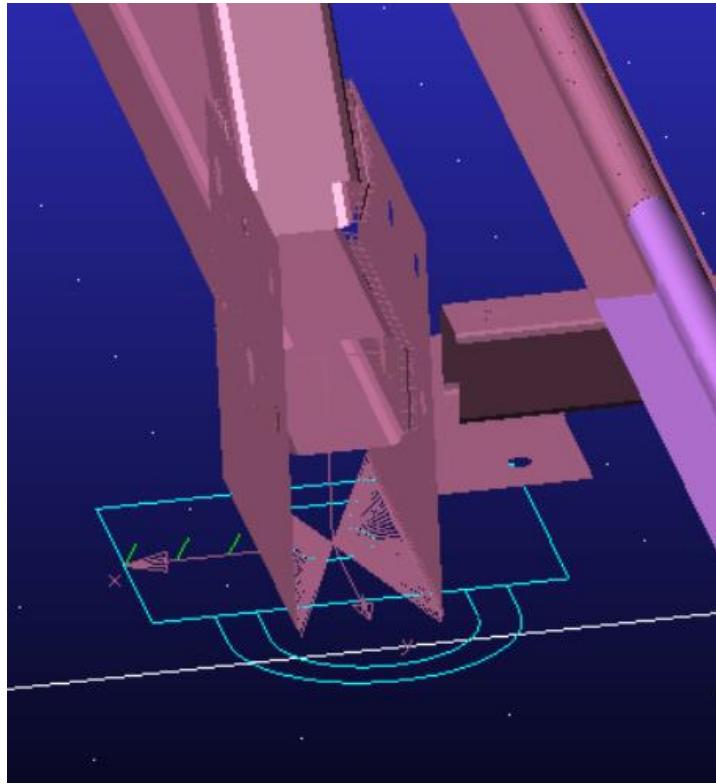
χαρακτηρίζουν την σχετική κίνηση μεταξύ των τροχών με των βάσεων τους, ενώ οι πρισματικές κατά μήκος του εγκάρσιου άξονα του οχήματος, ώστε να επιτραπεί η κατακόρυφη σχετική κίνηση του άνω μέρους του οχήματος και των βάσεων των τροχών, λόγω των αναρτήσεων.

Πίνακας 5.2: Λίστα αρθρώσεων του συνολικού μοντέλου.

Άρθρωση	Σώμα 1	Σώμα 2
Fixed	Γέφυρα	Έδαφος
Fixed	Εξωτερικές ράγες 1	Έδαφος
Fixed	Εξωτερικές ράγες 2	Έδαφος
Revolute	Βάση τροχού 1	Τροχός 1
Revolute	Βάση τροχού 2	Τροχός 2
Revolute	Βάση τροχού 3	Τροχός 3
Revolute	Βάση τροχού 4	Τροχός 4
Prismatic	Βάση τροχού 1	Άνω μέρος οχήματος
Prismatic	Βάση τροχού 2	Άνω μέρος οχήματος
Prismatic	Βάση τροχού 3	Άνω μέρος οχήματος
Prismatic	Βάση τροχού 4	Άνω μέρος οχήματος

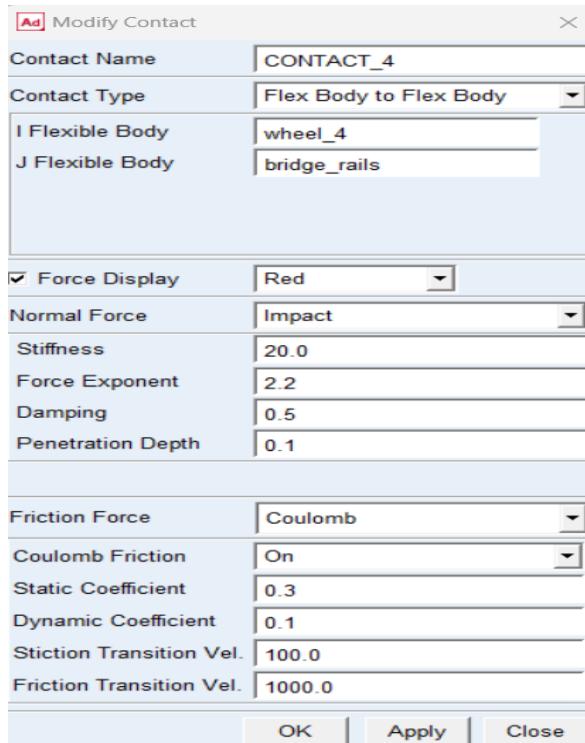
Τύπος σύνδεσης	Περιγραφή
	<b>Πάκτωση (fixed)</b> Περιορίζονται όλες οι σχετικές κινήσεις
	<b>Περιστροφή (Revolute)</b> Περιορίζονται όλες οι σχετικές κινήσεις εκτός της περιστροφής γύρω από έναν άξονα
	<b>Πρισματική (Prismatic or Translational)</b> Περιορίζονται όλες οι σχετικές κινήσεις εκτός της μεταφοράς κατά μήκος ενός άξονα

Σχήμα 5.13: Χρησιμοποιούμενες αρθρώσεις στο μοντέλο.



Σχήμα 5.14: Άρθρωση πάκτωσης σε μία από τις βάσεις του μοντέλου γέφυρας.

Στη συνέχεια πρέπει να οριστούν οι δυνάμεις που αντικατοπτρίζουν την ανάρτηση, δηλαδή αυτές λόγω του ελατηρίου και του αποσβεστήρα. Ορίζονται, λοιπόν, από το περιβάλλον του Adams View τέσσερα bushings ανάμεσα στη βάση κάθε τροχού και το άνω μέρος του οχήματος. Για τον πλήρη ορισμό τους χρειάζονται επιπλέον οι τιμές των συντελεστών στιβαρότητας και απόσβεσης των αναρτήσεων, οι οποίες θεωρούνται ίσες με τις πειραματικές, με τιμές  $23.5 \frac{kN}{m}$  και  $0.25 \frac{kNs}{m}$  αντίστοιχα. Ακόμη, πρέπει να προσομοιωθεί η επαφή μεταξύ των τροχών και των ραγών. Αυτό γίνεται με τον ορισμό των δυνάμεων επαφής (contacts), από την καρτέλα “Forces”. Ο ορισμός της δύναμης επαφής είναι ένα πολύπλοκο πρόβλημα, διότι χαρακτηρίζεται από ασυνέχειες και μη γραμμικότητες. Όπως διακρίνεται στο σχήμα 5.15, καταρχάς επιλέγονται τα σώματα ανάμεσα στα οποία αναπτύσσεται η δύναμη επαφής και καθορίζεται ο τύπος επαφής. Στην περίπτωση του εν λόγω μοντέλου αυτός είναι είτε “Flex Body to Flex Body” ή “Flex Body to Solid”. Ακολούθως, επιλέγεται η μέθοδος με την οποία υπολογίζονται οι δυνάμεις επαφής στην προσομοίωση. Στο πλαίσιο της διπλωματικής επιλέγεται η μέθοδος Impact, κατά την οποία η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων προσομοιώνεται με ένα ελατήριο και έναν αποσβεστήρα [12]. Ο καθορισμός των αντίστοιχων συντελεστών στιβαρότητας και απόσβεσης εξαρτάται από το υλικό που επιλέγεται για να προσομοιώσει την επαφή. Όσο μεγαλύτερη η τιμή του συντελεστή στιβαρότητας, τόσο πιο άκαμπτη είναι η συμπεριφορά επαφής [12].



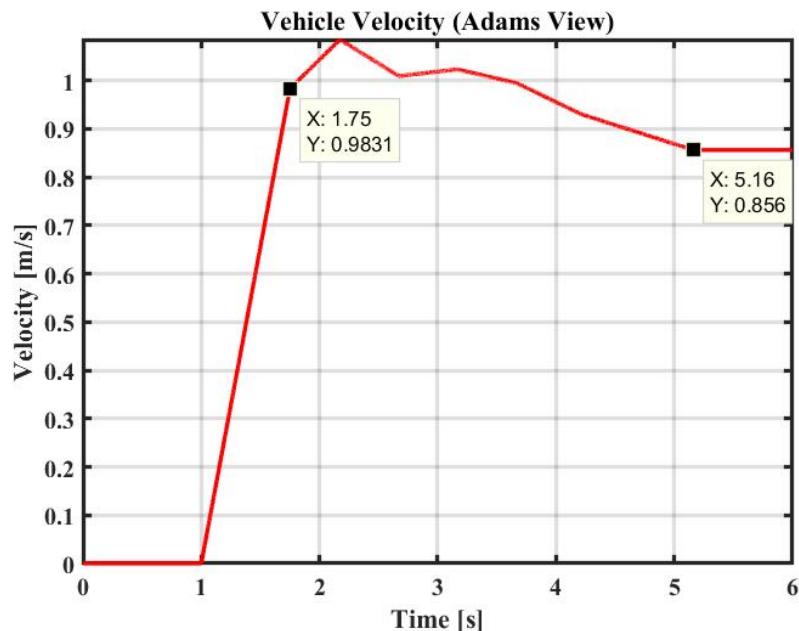
Σχήμα 5.15: Παράμετροι ορισμού δυνάμεων επαφής.

Για τον καθορισμό αυτών των συντελεστών διενεργείται διερεύνηση (υποενότητα 5.4.1) , διότι γενικά εμφανίζονται peaks που δεν είναι αντιπροσωπευτικά των πραγματικών δυνάμεων επαφής που αναπτύσσονται. Οι τιμές, τελικά, των συντελεστών στιβαρότητας και απόσβεσης της επαφής που επιλέγονται, είναι ίσες με  $20 \frac{kN}{m}$  και  $0.5 \frac{kNs}{m}$  αντίστοιχα. Ο εκθέτης δύναμης επαφής (Force Exponent) και το βάθος διείσδυσης (Penetration Depth) εκφράζουν τη μη γραμμικότητα της επαφής και το βάθος διείσδυσης, στο οποίο ο συντελεστής απόσβεσης είναι μέγιστος, αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές θεωρούνται ίδιες με τις προεπιλεγμένες του λογισμικού. Τέλος, προφανώς υπάρχει τριβή μεταξύ των τροχών και των ραγών, επομένως θεωρείται ένα μοντέλο τριβής Coulomb. Οι παράμετροι που την χαρακτηρίζουν (συντελεστής στατικής τριβής, συντελεστής τριβής ολίσθησης, ταχύτητα μετάβασης στατικής τριβής, ταχύτητα μετάβασης τριβής ολίσθησης) θεωρούνται ίσες με τις προεπιλεγμένες τιμές του λογισμικού.

Έπειτα, πρέπει να οριστεί η κίνηση (motion) του οχήματος. Αυτή ορίζεται επιλέγοντας τα δύο σώματα (όχημα και έδαφος) ανάμεσα στα οποία θα εμφανιστεί η σχετική κίνηση, το σημείο εφαρμογής και τη κατεύθυνση της. Η συνάρτηση που χαρακτηρίζει την κίνηση μπορεί να είναι μετατόπισης, ταχύτητας ή επιτάχυνσης. Στην προκειμένη περίπτωση, επειδή είναι ήδη γνωστό το προφίλ ταχύτητας του πειράματος (Σχήμα 4.7), εισάγεται αυτούσιο από τη χρονική στιγμή που το σώμα εισέρχεται στη γέφυρα μέχρι τη στιγμή που εξέρχεται. Αρχικά θεωρείται ένα δευτερόλεπτο στο οποίο το όχημα δε κινείται, ώστε να πάρουν τα ελατήρια τις παραμορφώσεις, λόγω του βάρους του οχήματος. Στη συνέχεια κινείται με τρόπο, ώστε μετά από 0.75 δευτερόλεπτα να εισέλθει στη γέφυρα με την ταχύτητα που εισέρχεται κατά την εκτέλεση του

πειράματος. Όταν εξέλθει από τη γέφυρα, θεωρείται ότι κινείται με σταθερή ταχύτητα ίση με αυτή που εξέρχεται για περίπου ακόμη ένα δευτερόλεπτο. Το προφίλ ταχύτητας, λοιπόν, για τη προσομοίωση του πειράματος στο λογισμικό Adams View διακρίνεται στο σχήμα 5.16 και το ολοκληρωμένο μοντέλο οχήματος στο σχήμα 5.18.

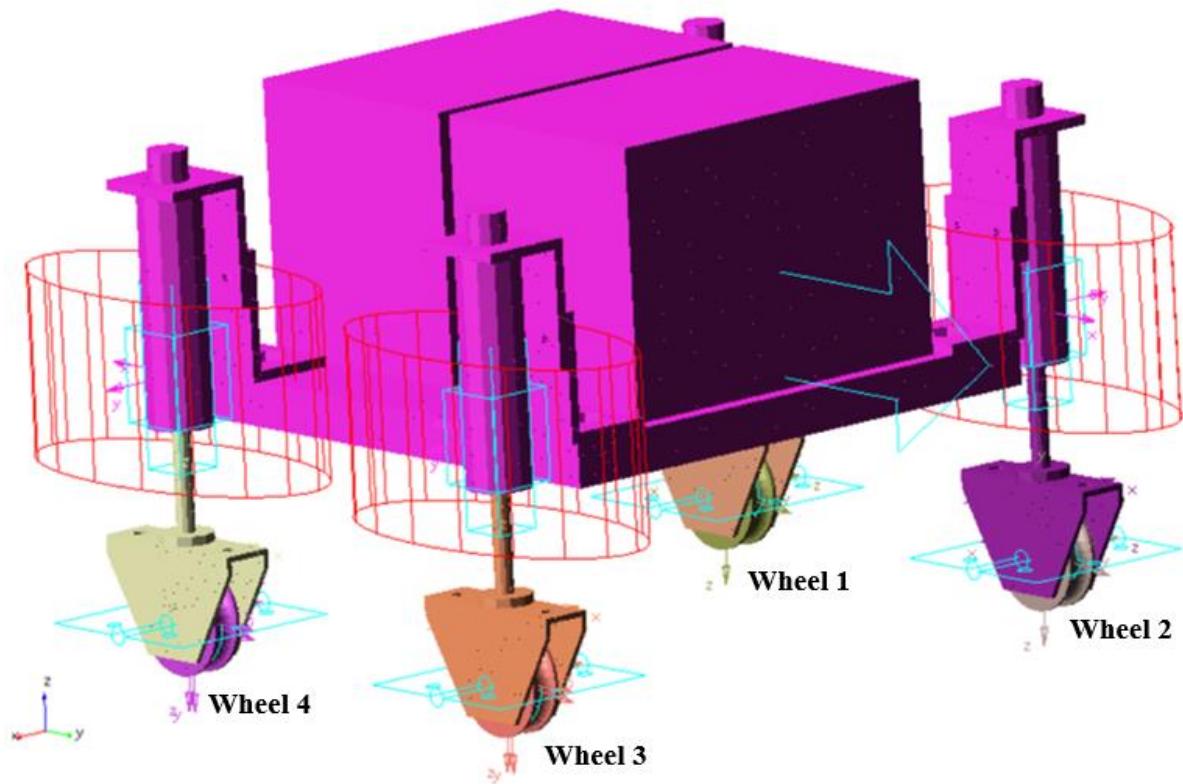
Ακολουθεί, η εισαγωγή μετρητών (request) επιτάχυνσης στις θέσεις που έχουν εγκατασταθεί τα επιταχυνσιόμετρα, για την σχεδίαση των αποκρίσεων επιτάχυνσης στα σημεία αυτά. Τέλος, αφού ελέγχεται το μοντέλο, ώστε να μη εμφανίζεται κάποιο σφάλμα, εκτελείται η προσομοίωση για έξι δευτερόλεπτα με βήμα ολοκλήρωσης 0.001.



Σχήμα 5.16: Προφίλ ταχύτητας προσομοίωσης του μοντέλου στο Adams View.



Σχήμα 5.17: Μοντέλο πειραματικής διάταξης στο Adams View.



Σχήμα 5.18: Μοντέλο οχήματος στο Adams View.

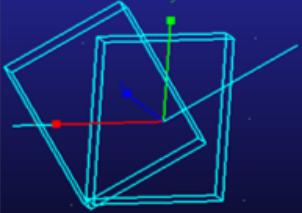
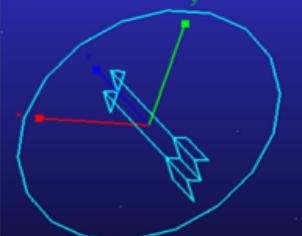
#### 5.4.1 Διερεύνηση συντελεστών στιβαρότητας και απόσβεσης της επαφής

Όπως προαναφέρθηκε η επαφή δύο σωμάτων με τη μέθοδο Impact προσομοιώνεται ένα ελατήριο και έναν αποσβεστήρα. Επειδή γενικά εμφανίζονται κορυφές (peaks) που δεν είναι αντιπροσωπευτικές των πραγματικών δυνάμεων επαφής, διεξάγεται διερεύνηση για τις τιμές των παραμέτρων στιβαρότητας και απόσβεσης που χαρακτηρίζουν την επαφή. Οι υπόλοιπες τιμές των παραμέτρων της δύναμης επαφής παραμένουν ίσες με τις προεπιλεγμένες.

Το μοντέλο που χρησιμοποιείται για τη διερεύνηση αποτελείται από το μοντέλο ενός τετάρτου του οχήματος της πειραματικής διάταξης και μία ράγα 0.5 m (Σχήμα 5.20). Προφανώς, το βάρος του μοντέλου οχήματος είναι τέσσερις φορές μικρότερο σε σχέση με το μοντέλο οχήματος του σχήματος 5.18. Τα σώματα από τα οποία αποτελείται το σύστημα είναι μία ράγα, ένας τροχός, η βάση του, το αμορτισέρ και ένα σφαιρικό σώμα που απλά έχει βάρος τέσσερις φορές μικρότερο του άνω μέρος του οχήματος. Όλα τα προαναφερθέντα σώματα, εκτός της σφαίρας, θεωρούνται παραμορφώσιμα και αναπτύσσονται με τη διαδικασία που περιγράφεται στην ενότητα 5.3.

Επειδή το μοντέλο ενός τετάρτου οχήματος δεν ισορροπεί, κάτι που δε συμβαίνει για το ολόκληρο όχημα, ορίζονται διαφορετικά οι αρθρώσεις για τη σωστή προσομοίωση της κίνησης. Εδώ, πέραν των τύπων των αρθρώσεων του σχήματος 5.13 ορίζονται επίσης ένας επίπεδος

δεσμός κίνησης (planar joint) και ένας παράλληλος περιορισμός κίνησης (parallel joint primitive), οι οποίοι διακρίνονται στο σχήμα 5.19.

Τύπος περιορισμού	Περιγραφή
	<b>Επίπεδος (Planar joint)</b> Επιτρέπει την κίνηση και περιστροφή ενός επιπέδου του πρώτου σώματος στο επίπεδο του δεύτερου σώματος
	<b>Παράλληλος (Parallel joint primitive)</b> Περιορίζει τη κίνηση, έτσι ώστε το ένα σώμα να κινείται παράλληλα ως προς το άλλο

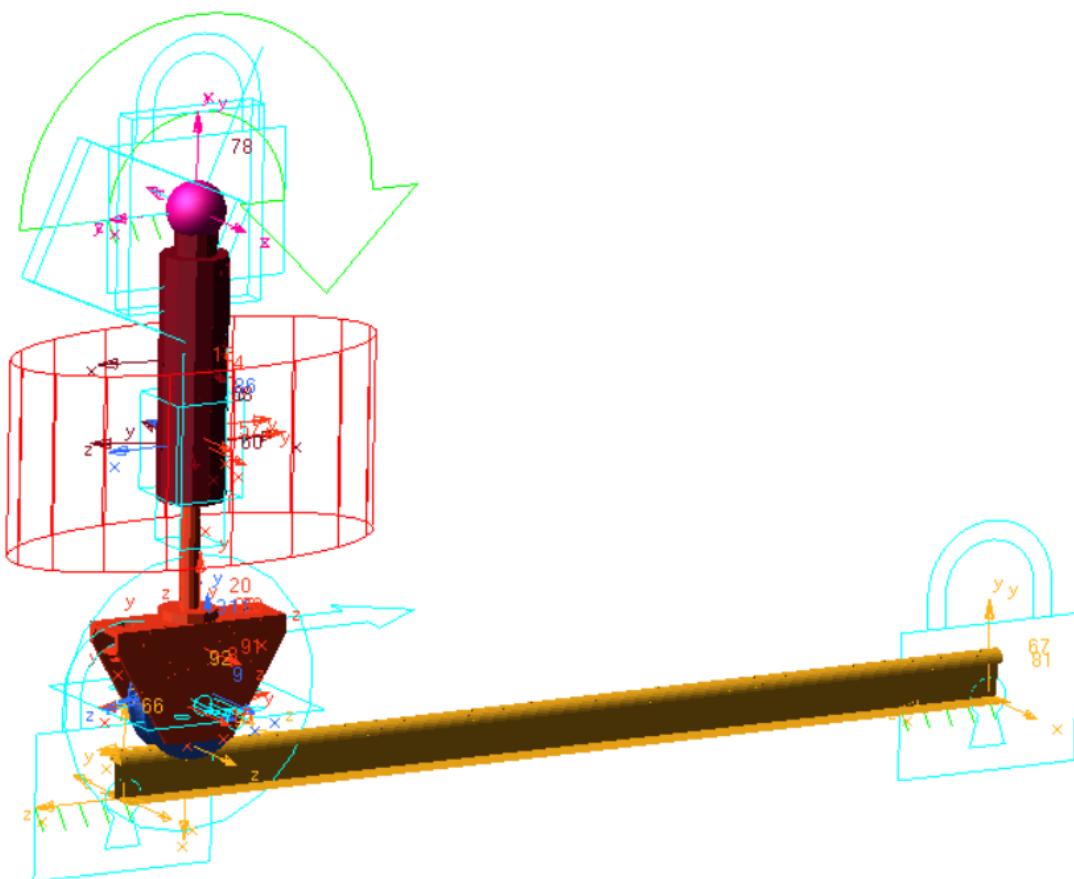
Σχήμα 5.19: Τύποι περιορισμών του μοντέλου ενός τετάρτου οχήματος-ράγας.

Συνολικά ορίζονται επτά δεσμοί κίνησης. Τα σώματα, ανάμεσα στα οποία ορίζονται οι περιορισμοί, διακρίνονται στον πίνακα 5.3. Η ράγα είναι εύκαμπτη, επομένως δεν αρκεί μία άρθρωση για να θεωρηθεί πακτωμένη. Θεωρείται ότι τα άκρα της είναι συνδεδεμένα στο έδαφος, επομένως δημιουργήθηκαν δύο στοιχεία RBE2 αποτελούμενα από δύο σειρές κόμβων στα άκρα των βάσεων των ραγών. Στους “master nodes” αυτών ορίζονται οι αρθρώσεις πάκτωσης.

Πίνακας 5.3 Λίστα περιορισμών του μοντέλου ενός τετάρτου οχήματος-ράγας.

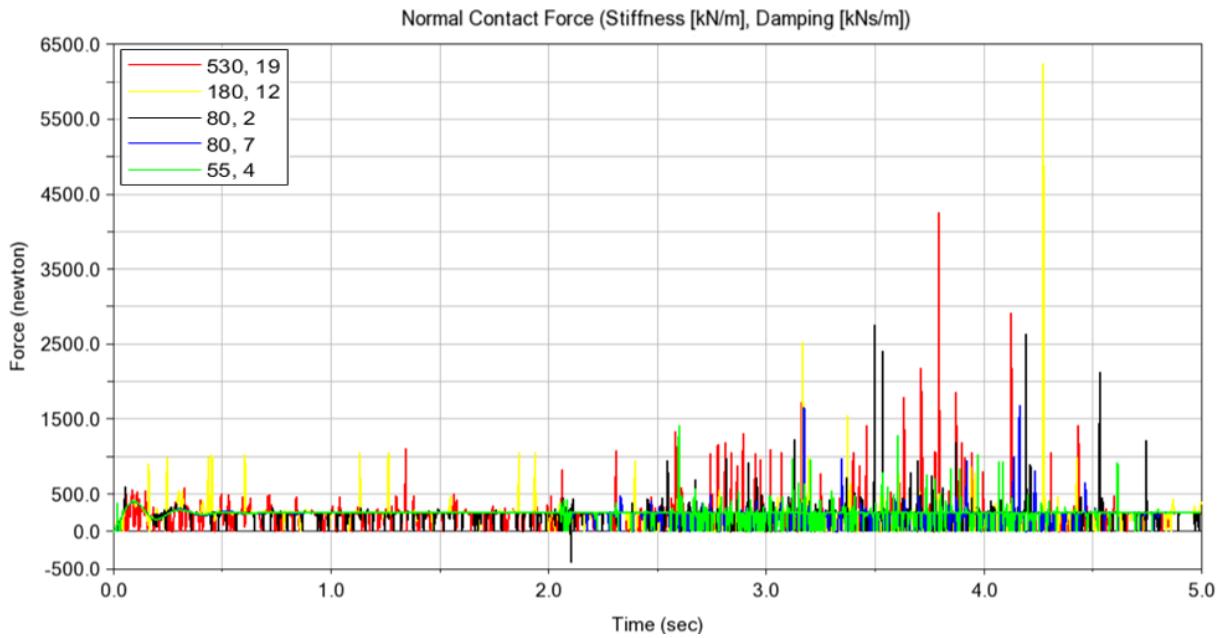
Δεσμός κίνησης	Σώμα 1	Σώμα 2
Fixed	Ράγα	Έδαφος
Fixed	Σφαίρα	Αμορτισέρ
Revolute	Βάση τροχού	Τροχός
Planar	Σφαίρα	Έδαφος
Parallel	Βάση τροχού	Ράγα
Prismatic	Βάση τροχού	Αμορτισέρ

Στη συνέχεια, ορίζονται οι δυνάμεις επαφής και οι δυνάμεις ελατηρίου και αποσβεστήρα, όπως αναλύθηκε στην ενότητα 5.3. Ακόμη, ορίζονται δύο motions για την προσομοίωση της κίνησης του μοντέλου ενός τετάρτου οχήματος πάνω στη ράγα. Το ένα ορίζεται μεταξύ της βάσης του οχήματος και της ράγας, στη διεύθυνση κατά μήκος της ράγας. Για αυτή την κίνηση ορίζεται συνάρτηση μετατόπισης τέτοια, ώστε το μοντέλο οχήματος να μένει ακίνητο για τα πρώτα δύο δευτερόλεπτα, για να παραμορφωθεί το ελατήριο λόγω του βάρους του μοντέλου και στη συνέχεια να διανύσει τη ράγα σε τρία δευτερόλεπτα. Επιπλέον, είναι αναγκαίο να οριστεί ακόμη μία κίνηση, η οποία να μην αφήνει το όχημα να χάνει την ισορροπία του. Αυτό επιτυγχάνεται θέτοντας ως μηδενική την περιστροφή της μάζας ως προς τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο της κίνησης. Ουσιαστικά, έτσι απαγορεύεται η αντίστοιχη περιστροφική κίνηση της μάζας που δεν είχε περιοριστεί από την επίπεδη άρθρωση και τελικά επιτρέπεται να κινηθεί μόνο κατακόρυφα (λόγω της επίδρασης της βαρύτητας) και κατά μήκος του άξονα της ράγας.



Σχήμα 5.20: Μοντέλο ενός τετάρτου οχήματος-ράγας στο Adams View.

Στο σχήμα 5.21 διακρίνεται η χρονοιστορία της εγκάρσιας δύναμης επαφής για διάφορες τιμές των παραμέτρων στιβαρότητας και απόσβεσης της επαφής.



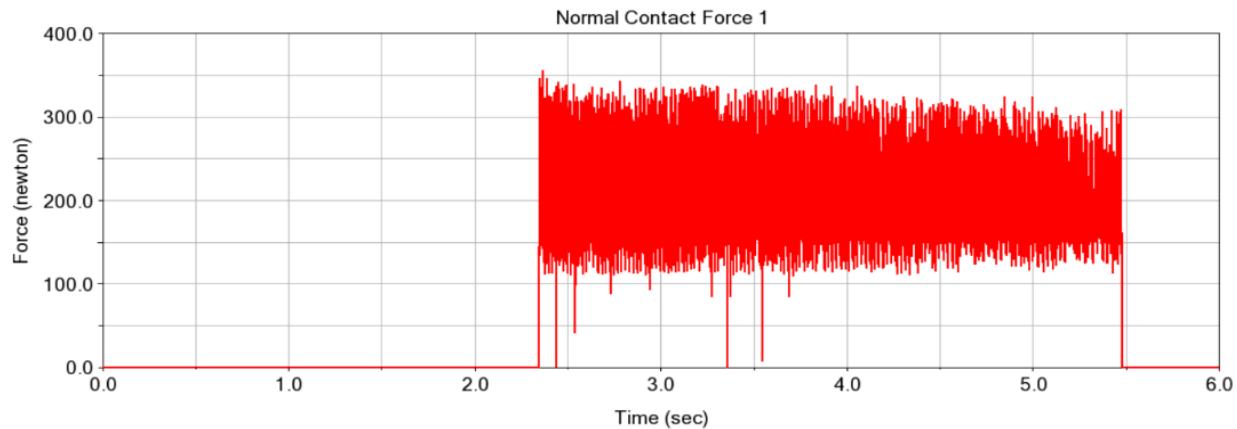
Σχήμα 5.21: Εγκάρσια δύναμη επαφής για διάφορες τιμές των εξεταζόμενων παραμέτρων.

Παρατηρείται ότι οι υψηλότερες τιμές του συντελεστή στιβαρότητας, έχοντας ως αποτέλεσμα μια πιο άκαμπτη συμπεριφορά επαφής, οδηγούν γενικά σε υψηλότερες δυνάμεις και σε πιο έντονα peaks. Έτσι, χαμηλώνοντας την τιμή αυτής της παραμέτρου προκύπτουν καλύτερα αποτελέσματα. Όσον αφορά τον συντελεστή απόσβεσης, παρατηρήθηκε ότι οι υψηλότερες τιμές του μειώνουν το μέγεθος των εμφανιζόμενων μη αντιροσωπευτικών κορυφών (peaks). Όμως, πρέπει πάντα να ισχύει ένας λόγος  $\frac{\text{Stiffness}}{\text{Damping}} > 10$ , διότι σε διαφορετική περίπτωση δεν εμφανίζονταν «καλά» αποτελέσματα.

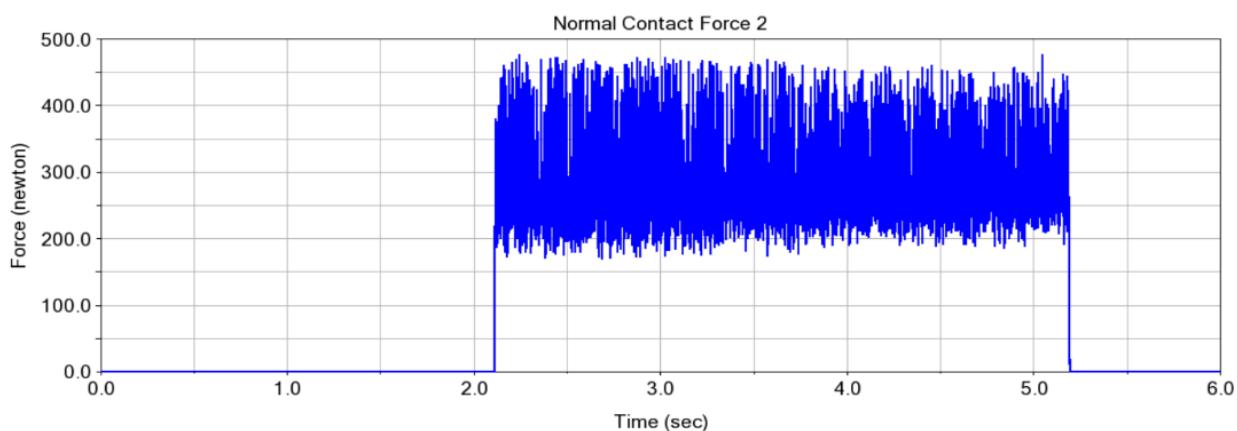
## 5.5 Αποτελέσματα ανάλυσης του μοντέλου

Αρχικά, στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται οι χρονοιστορίες των κάθετων δυνάμεων επαφής μεταξύ των τροχών και των ραγών της γέφυρας, που προκύπτουν από τη προσομοίωση στο Adams View (Σχήματα 5.22–5.25). Ακόμη, στο σχήμα 5.27 διακρίνονται οι αποκρίσεις των επιταχύνσεων, στα σημεία που είναι εγκατεστημένα τα επιταχυνσιόμετρα (Σχήμα 4.6), μόνο στη διεύθυνση X, διότι όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 4.2, το σύνολο των ιδιομορφών της γέφυρας, μέχρι την τιμή 120 Hz, έχουν κυρίως καμπτική συμπεριφορά ως προς τον άξονα X. Όλα αυτά σχεδιάστηκαν στο λογισμικό Adams Post Processor, το οποίο επιτρέπει την παρουσίαση των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων που υλοποιήθηκαν στο Adams View. Παρατηρείται ότι το εύρος των δυνάμεων επαφής, με βάση και το βάρος του οχήματος, είναι λογικό. Όμως, διακρίνεται ότι η τάξη μεγέθους των επιταχύνσεων που προέκυψαν από τη προσομοίωση δεν είναι αντιροσωπευτική της τάξης μεγέθους του πειράματος (Σχήματα 4.9–4.11), αλλά είναι πολύ μικρότερη. Επιπλέον και από το σχήμα 5.26, είναι φανερό ότι η γέφυρα

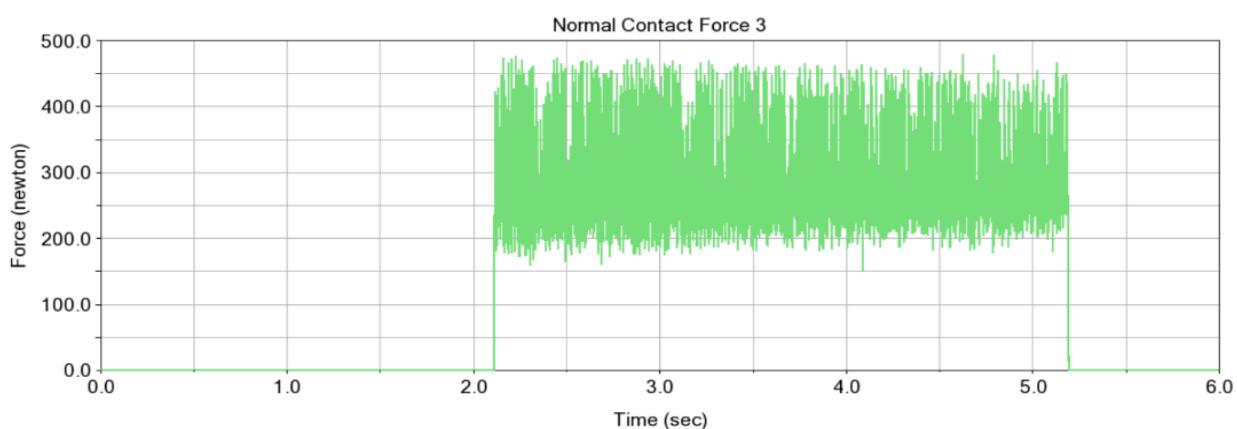
δε διεγείρεται σωστά από την κίνηση του οχήματος σε αυτήν, με αποτέλεσμα να κρίνεται ότι ο επιλύτης του Adams δε λύνει σωστά το κατασκευαστικό πρόβλημα της γέφυρας.



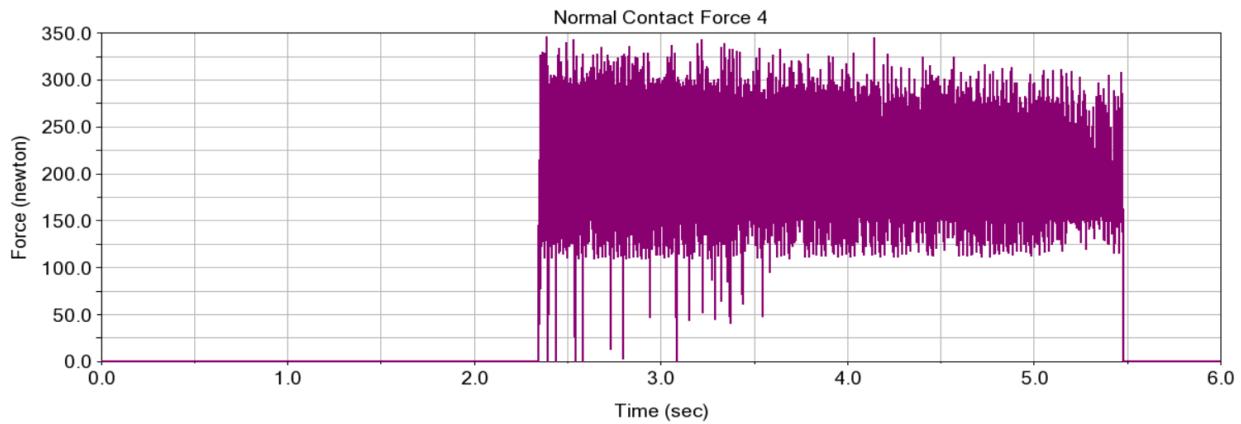
Σχήμα 5.22: Δύναμη επαφής τροχού 1-γέφυρας.



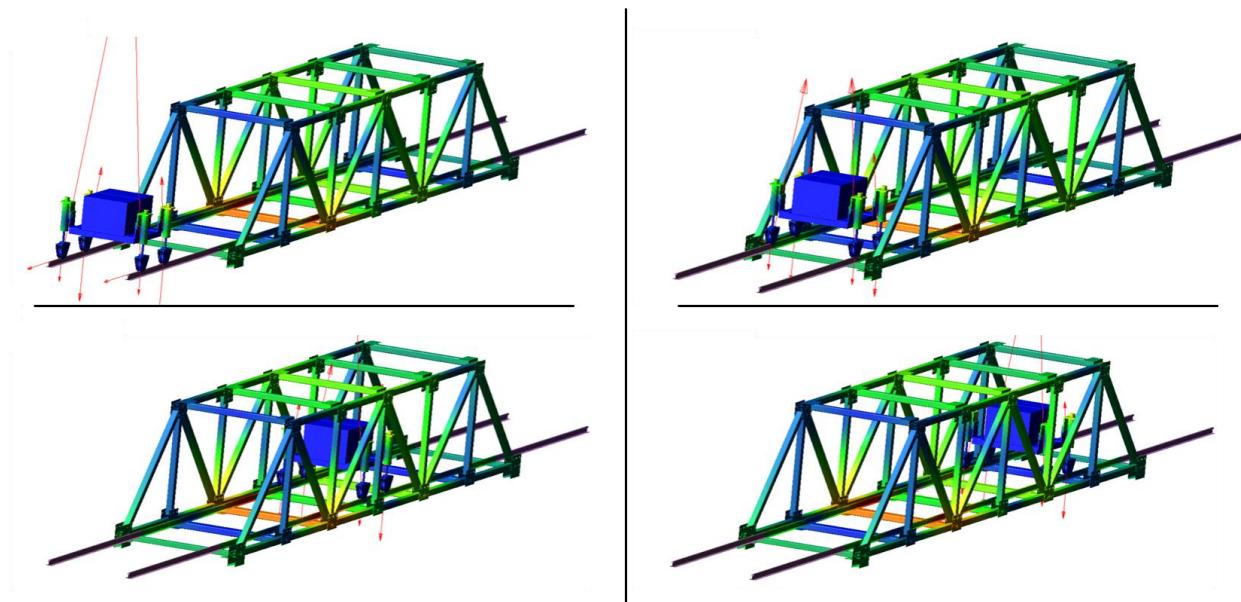
Σχήμα 5.23: Δύναμη επαφής τροχού 2-γέφυρας.



Σχήμα 5.24: Δύναμη επαφής τροχού 3-γέφυρας.



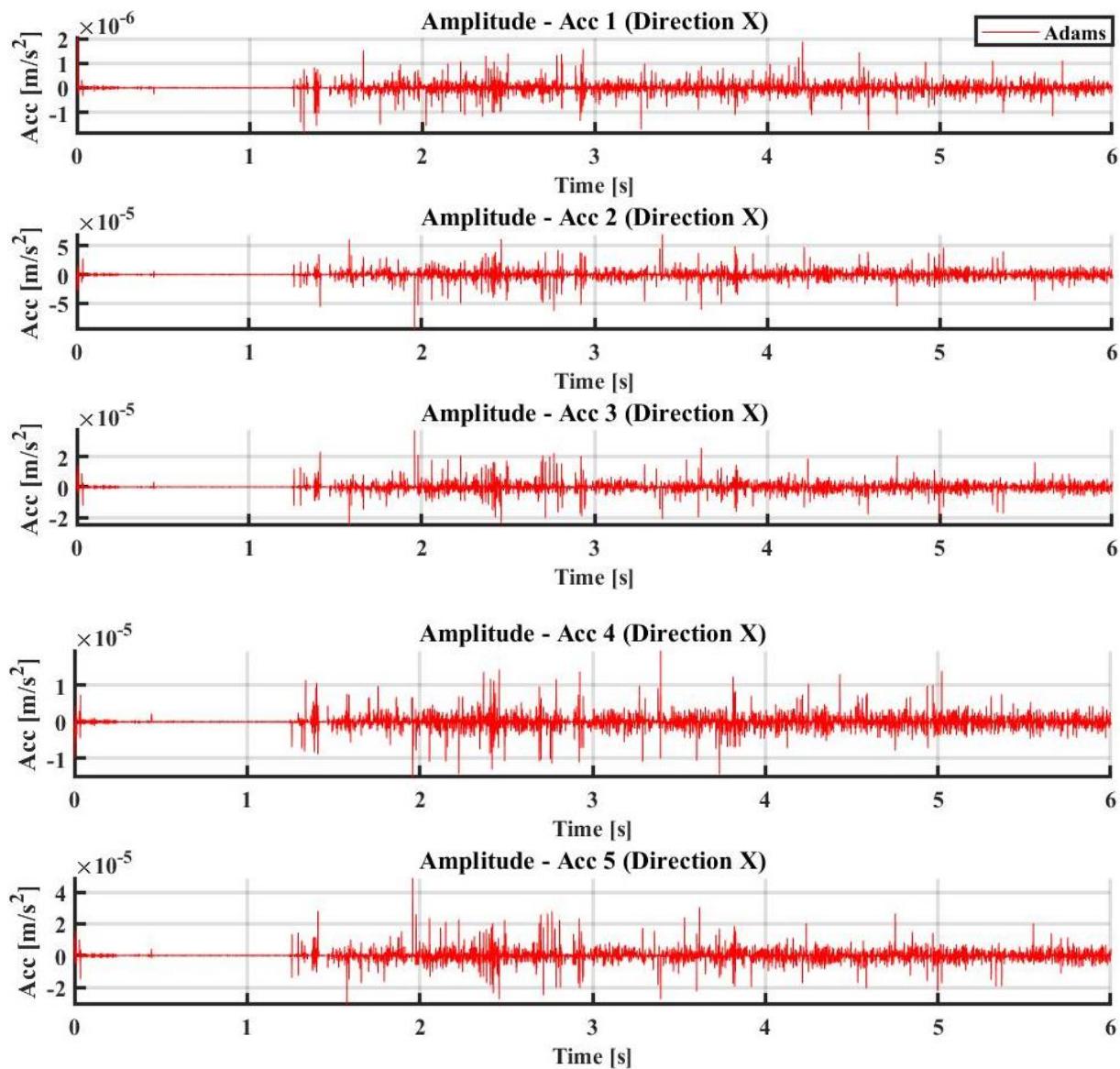
Σχήμα 5.25: Δύναμη επαφής τροχού 4-γέφυρας.



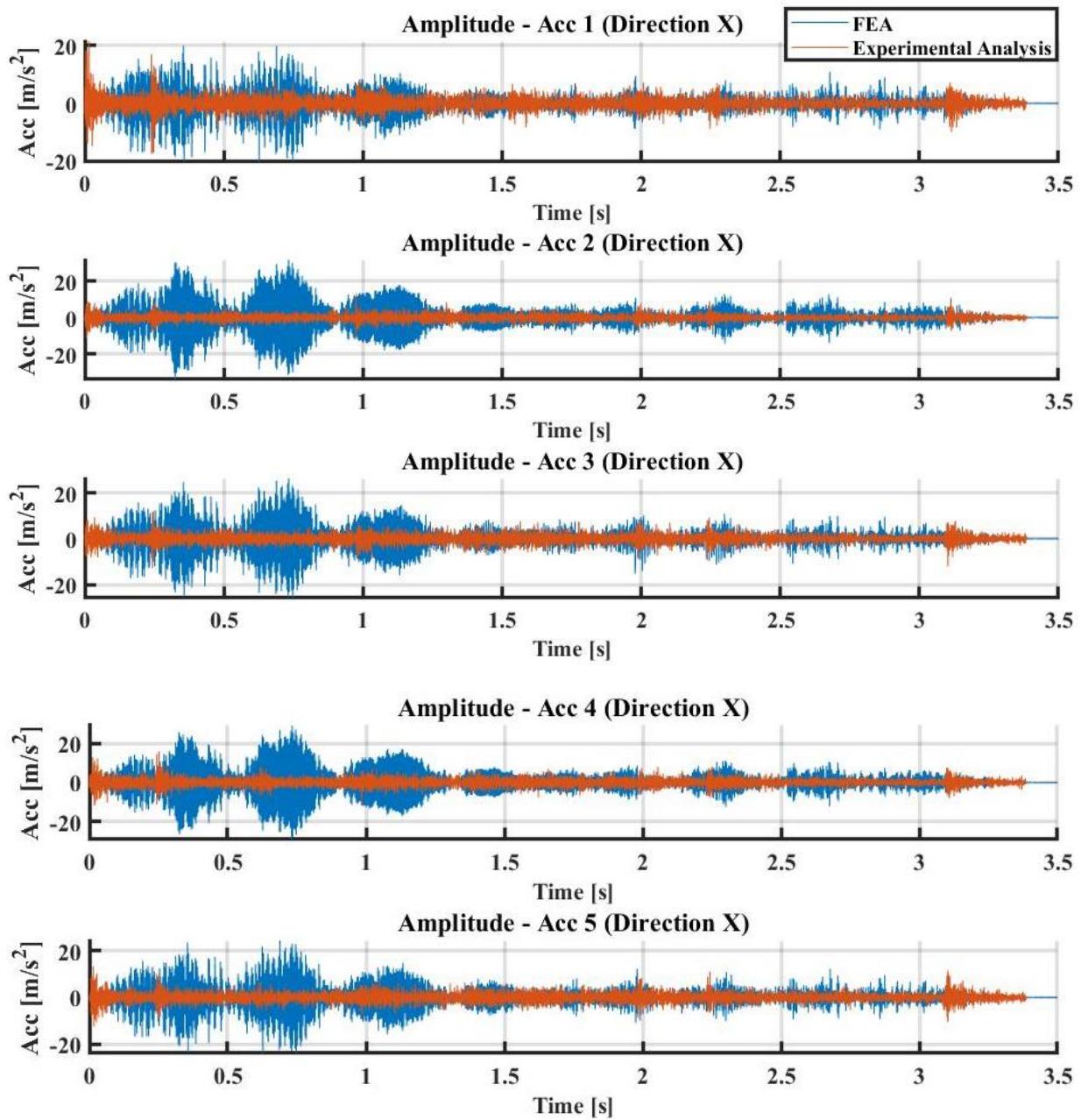
Σχήμα 5.26: Διέγερση γέφυρας ανάλογα με τη θέση του οχήματος (Adams).

Επομένως, εξαιτίας της αδυναμίας του επιλύτη του Adams να ανταποκριθεί στην επιτυχή αντιμετώπιση του κατασκευαστικού προβλήματος της γέφυρας, επιλέγεται μία διαφορετική προσέγγιση. Ουσιαστικά, εξάγονται οι κάθετες δυνάμεις επαφής από το λογισμικό Adams Post Processor και με την κατάλληλη διαδικασία στο MATLAB δημιουργούνται μεμονωμένες δυνάμεις για κάθε κόμβο των ραγών της γέφυρας που έρχεται σε επαφή με το όχημα, κατά τη προσομοίωση της κίνησης του. Αυτές εισάγονται ως μεμονωμένες εξωτερικές διεγέρσεις στους αντίστοιχους κόμβους των ραγών στο λογισμικό ANSA pre processor και αφού οριστούν οι κατάλληλοι περιορισμοί, υλοποιείται η ανάλυση με τον επιλύτη Nastran. Τελικά, μέσω του λογισμικού META post-processor, στο οποίο σχεδιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων που υλοποιούνται σε λογισμικά της εταιρείας BETA CAE Systems, προκύπτουν οι αποκρίσεις επιτάχυνσης στη διεύθυνση X (Σχήμα 5.28), στα σημεία του μοντέλου γέφυρας που είναι

εγκατεστημένα τα επιταχυνσιόμετρα. Στο σχήμα 5.28 παρουσιάζονται επίσης οι μετρήσεις των επιταχυνσιομέτρων κατά την εκτέλεση της πειραματικής ανάλυσης, από τη χρονική στιγμή που το όχημα εισέρχεται στη γέφυρα μέχρι τη στιγμή που εξέρχεται, για την σύγκριση των αποτελεσμάτων.

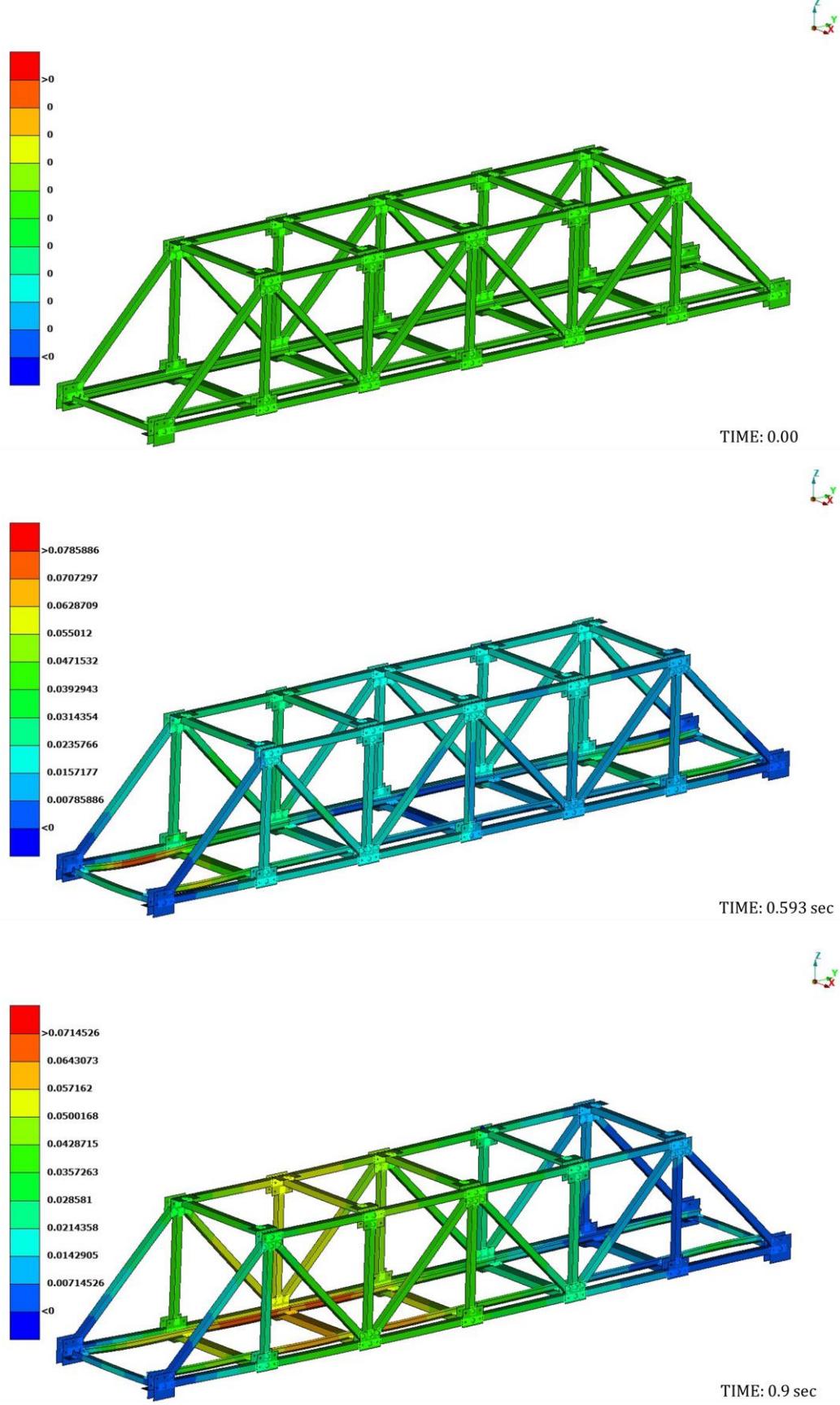


Σχήμα 5.27: Επιταχύνσεις στη διεύθυνση X στις θέσεις των επιταχυνσιομέτρων (Adams).

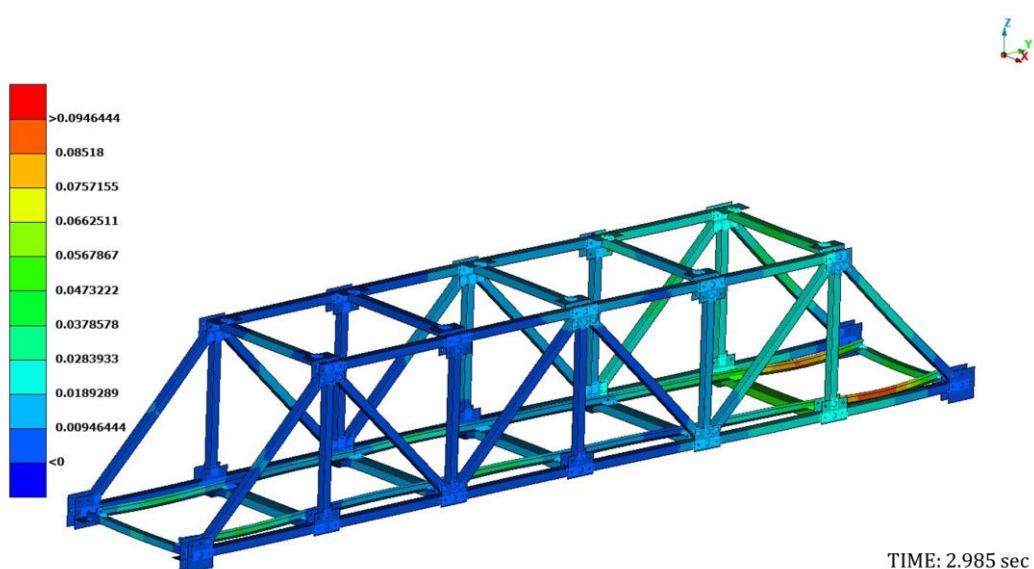
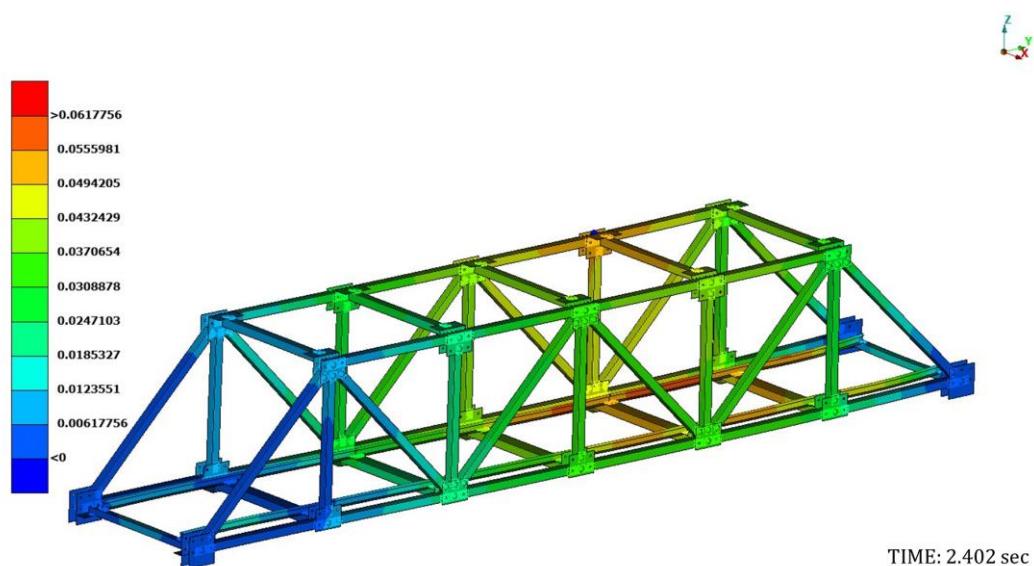
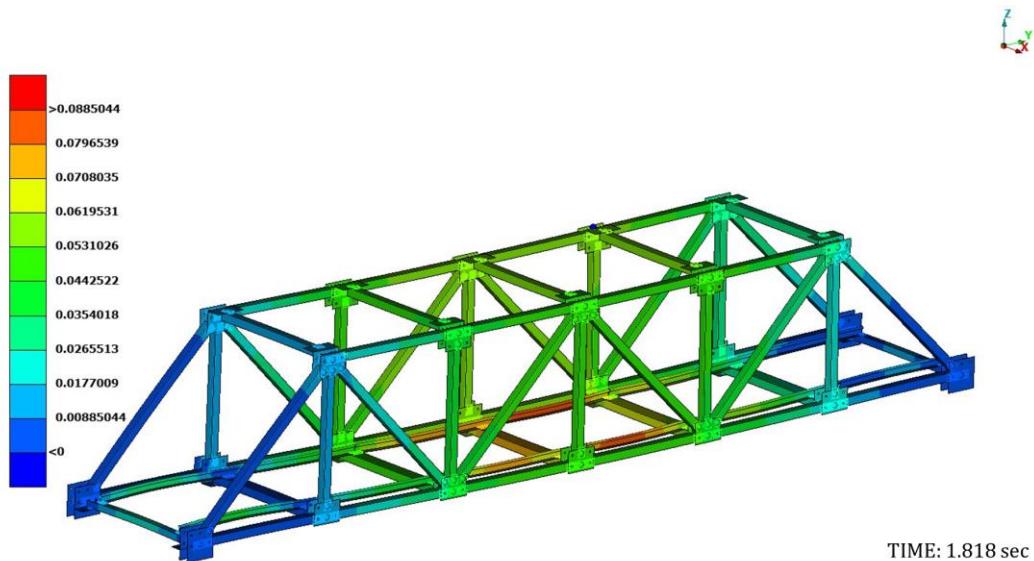


Σχήμα 5.28: Επιταχύνσεις στη διεύθυνση X (FEA - Experimental Analysis).

Παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα είναι αρκετά κοντά και οι μεγαλύτερες διαφορές στο χρονικό διάστημα 0-1 s οφείλονται στις μη αντιπροσωπευτικές κορυφές των δυνάμεων επαφής κατά την είσοδο του οχήματος στη γέφυρα (Σχήματα 5.22-5.25). Στα σχήματα 5.29-5.30 διακρίνονται οι μετατοπίσεις του μοντέλου γέφυρας (σε mm) και παρατηρείται ότι με βάση τα χρώματα που προκύπτουν κάθε χρονική στιγμή, προσομοιώνεται σωστά η κίνηση του οχήματος, μέσω των εξωτερικών μεμονωμένων δυνάμεων.



Σχήμα 5.29: Μετατοπίσεις στο μοντέλο γέφυρας σε επιλεγμένες χρονικές στιγμές (1).



Σχήμα 5.30: Μετατοπίσεις στο μοντέλο γέφυρας σε επιλεγμένες χρονικές στιγμές (2).

## 6 Συμπεράσματα

### 6.1 Σύνοψη – Συμπεράσματα

Στη παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε η δυναμική ανάλυση του συστήματος οχήματος-γέφυρας (VBI), εφαρμόζοντας μία υπολογιστική μέθοδο με την ανάπτυξη κώδικα στο MATLAB, διενεργώντας μία πειραματική ανάλυση σε μοντέλα δικτυωτού φορέα γέφυρας και οχήματος σε χώρο του Εργαστηρίου Δυναμικής Μηχανών και προσομοιώνοντας την αλληλεπίδραση των μοντέλων οχήματος και γέφυρας της πειραματικής διάταξης, μέσω λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων και πολλαπλών σωμάτων.

Αρχικά λοιπόν, η μέθοδος που επιλέγεται για την επίλυση του συστήματος VBI ονομάζεται Extended-Modified Bridge System Method (EMBS). Κύριο πλεονέκτημα της είναι η απόζευξη του συστήματος οχήματος-γέφυρας, που δίνει τη δυνατότητα εξέτασης των δύο υποσυστημάτων ανεξάρτητα το ένα με το άλλο. Η μέθοδος επιλύει το υποσύστημα της γέφυρας, τροποποιώντας την εξίσωση κίνησης της με τη προσθήκη επιπλέον όρων απόσβεσης, στιβαρότητας και φόρτισης. Σημαντικά κριτήρια της επιλογής της είναι η απλότητα και η ακρίβεια της ακόμη και για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης σε οποιοδήποτε σημείο της γέφυρας, σε σχέση με τη επίλυση του συζευγμένου συστήματος και άλλων μεθόδων. Η μέθοδος εφαρμόστηκε αρχικά σε ένα σύστημα με όχημα δύο βαθμών ελευθερίας (sprung-mass model) για την σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα διαθέσιμα στη βιβλιογραφία, ώστε να διαπιστωθεί ότι ο κώδικας που αναπτύχθηκε παράγει σωστά αποτελέσματα. Στη συνέχεια, εξετάστηκε όχημα τεσσάρων βαθμών ελευθερίας (half-car model) για τον ίδιο σκοπό. Ακόμη, η μέθοδος εφαρμόστηκε για όχημα επτά βαθμών ελευθερίας (full-car model) με τα χαρακτηριστικά του οχήματος να είναι κοντά στου μοντέλου οχήματος της πειραματικής διάταξης και οι δύο ράγες που χαρακτηρίζουν τη γέφυρα να εμφανίζουν πρώτη ιδιοσυχνότητα ίση με του μοντέλου γέφυρας της πειραματικής διάταξης. Σε όλες τις περιπτώσεις η γέφυρα μοντελοποιείται με καμπτικά πεπερασμένα στοιχεία δοκού Euler-Bernoulli. Επιπρόσθετα, εξετάστηκε η επίδραση μη γραμμικής συμπεριφοράς της ανάρτησης για όλα τα μοντέλα οχήματος, η οποία προσομοιώνεται με μη γραμμικούς όρους ελατηρίου τρίτης τάξης και μη γραμμικούς όρους απόσβεσης τετραγωνικής τάξης. Παρατηρείται ότι οι αποκρίσεις του οχήματος για γραμμικές και μη γραμμικές αναρτήσεις δεν εμφανίζουν σημαντική διαφορά για τα δεδομένα μοντέλα οχήματος, εξαιτίας της απουσίας ανομοιομορφών στο υποσύστημα της γέφυρας και συνεπώς των μικρών και κοντινών αποκρίσεων των τροχών και του άνω μέρους του οχήματος.

Ακολούθως, περιγράφεται η πειραματική διάταξη του δικτυωτού φορέα γέφυρας και του οχήματος. Με τα κατάλληλα αισθητήρια, δηλαδή με τις τοποθετημένες μαγνητικές επαφές στις εγκάρσιες δοκούς της μίας πλευράς της γέφυρας, σε σημεία εκτός γέφυρας και στο όχημα, προκύπτει το προφύλ ταχύτητας του οχήματος, κατά τη διέλευση του από τη γέφυρα. Ακόμη, με τα εγκατεστημένα τριαξονικά επιταχυνσιόμετρα σε συγκεκριμένα σημεία του μοντέλου της

γέφυρας, προσδιορίζονται οι αποκρίσεις των επιταχύνσεων στα σημεία αυτά. Οι επιταχύνσεις στη διεύθυνση X είναι εντονότερες, διότι το σύνολο των ιδιομορφών, μέχρι την τιμή 120 Hz, εμφανίζει καμπτική συμπεριφορά ως προς τον άξονα X.

Επιπλέον, εξετάζεται η δυναμική ανάλυση της πειραματικής διάταξης με τη χρήση λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων και πολλαπλών σωμάτων. Αφού αναπτυχθούν τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων για το σύστημα και προτού στηθεί η προσομοίωση στο πρόγραμμα πολλαπλών σωμάτων, όλα τα σώματα εκτός των εξωτερικών ραγών θεωρούνται εύκαμπτα, γιατί προφανώς επιδέχονται παραμορφώσεις. Οι εξωτερικές ράγες μοντελοποιούνται ως στερεές, διότι δεν αποτελούν μέρος του μοντέλου γέφυρας και απλά τοποθετούνται για τη κίνηση του οχήματος πριν και μετά από αυτήν. Κρίσιμο σημείο στην μοντελοποίηση του συστήματος αποτελούν οι δυνάμεις επαφής, για των οποίων τις παραμέτρους στιβαρότητας και απόσβεσης διεξάγεται διερεύνηση για μοντέλο ενός τετάρτου οχήματος πάνω σε μία ράγα, για να περιοριστούν, όσο το δυνατόν καλύτερα, από τις χρονοιστορίες τους, οι μεγάλες μη αντιπροσωπευτικές κορυφές (peaks) των πραγματικών δυνάμεων επαφής. Συμπεραίνεται, ότι οι υψηλότερες τιμές του συντελεστή στιβαρότητας οδηγούν γενικά σε υψηλότερες δυνάμεις και σε πιο έντονα peaks ενώ οι υψηλότερες τιμές του συντελεστή απόσβεσης, μειώνουν το μέγεθος αυτών. Επομένως, με βάση αυτά προσδιορίστηκε η τάξη μεγέθους των συντελεστών γύρω από την οποία επιλέχθηκαν οι τιμές τους. Τέλος, όσον αφορά τα αποτελέσματα της δυναμικής ανάλυσης παρατηρήθηκε, ότι στο λογισμικό πολλαπλών σωμάτων ενώ προκύπτουν λογικές, με βάση το βάρος του οχήματος, χρονοιστορίες των δυνάμεων επαφής, οι υπολογισμένες επιταχύνσεις είναι πολύ μικρότερες από αυτές της πειραματικής ανάλυσης, με αποτέλεσμα να συμπεραίνεται ότι η ανάλυση του μοντέλου γέφυρας με τον επιλύτη Adams Solver δεν είναι σωστή. Επομένως, ακολουθείται μία διαφορετική προσέγγιση για αυτήν. Εξάγοντας τις κάθετες δυνάμεις επαφής από το λογισμικό πολλαπλών σωμάτων, με τη κατάλληλη διαδικασία αυτές ορίζονται ως εξωτερικές μεμονωμένες δυνάμεις στους κόμβους των ραγών της γέφυρας που έρχονται σε επαφή με το όχημα, στο λογισμικό ANSA pre-processor. Πραγματοποιώντας την συγκεκριμένη ανάλυση, προκύπτει ότι οι επιταχύνσεις στα σημεία που έχουν εγκατασταθεί τα επιταχυνσιόμετρα είναι κοντά στις μετρήσεις αυτών. Οι μεγαλύτερες διαφορές διαπιστώνονται μόνο κατά την είσοδο του οχήματος στη γέφυρα, εξαιτίας των μη αντιπροσωπευτικών κορυφών δυνάμεων επαφής που εμφανίζονται. Γενικότερα όμως, τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης κρίνονται άκρως ικανοποιητικά, διότι δεν έχει γίνει κάποια βελτιστοποίηση για τις παραμέτρους των δυνάμεων επαφής και παρά το γεγονός αυτό, οι αποκλίσεις των επιταχύνσεων παραμένουν μικρές.

## 6.2 Προτάσεις για περεταίρω έρευνα

Η παρούσα διπλωματική εμφανίζει προοπτικές εξέλιξης, επομένως κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστούν κάποιες προτάσεις για πιθανή μελλοντική έρευνα. Αρχικά μία πιθανή μελέτη

μπορεί να είναι η εφαρμογή της μεθόδου EMBS για μοντέλο γέφυρας ,στο οποίο υπάρχουν ανομοιομορφίες, είτε καλής είτε κακής ποιότητας αλλά και για πιο σύνθετα μοντέλα αποτελούμενα από επιφανειακά ή τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία. Ακόμη, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί και μοντέλο οχήματος με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας για την προσομοίωση ενός τραίνου. Επιπλέον, μία επέκταση μπορεί να περιλαμβάνει την εφαρμογή και άλλων μεθόδων για την επίλυση του συστήματος VBI. Επίσης, η προσομοίωση του συστήματος πολλαπλών σωμάτων σε άλλο αντίστοιχο λογισμικό για την εξέταση της ακρίβειας των παραγόμενων αποτελεσμάτων και η αυτοματοποίηση της διαδικασίας εφαρμογής των εξαγόμενων δυνάμεων επαφής σε λογισμικά πεπερασμένων σωμάτων για την ανάλυση του μοντέλου γέφυρας αποτελούν βελτιώσεις που αξίζουν να εξεταστούν. Επιπλέον η προσομοίωση των δυνάμεων επαφής με μέθοδο διαφορετικής της Impact, θα προσφέρει την δυνατότητα σύγκρισης και επομένως επιλογής της βέλτιστης μεθόδου για τον προσδιορισμό τους. Τέλος, η βελτιστοποίηση παραμέτρων του συνολικού συστήματος οχήματος-γέφυρας και των παραμέτρων των δυνάμεων επαφής είναι βέβαιο, ότι θα μειώσει ακόμη περισσότερο τις αποκλίσεις μεταξύ των επιταχύνσεων της πειραματικής ανάλυσης και των δυναμικών αναλύσεων μέσω των λογισμικών.

## Βιβλιογραφία

- [1] C. D. Stoura and E. G. Dimitrakopoulos, “MDOF extension of the Modified Bridge System method for Vehicle–Bridge Interaction.”, Springer, 2020.
- [2] C. D. Stoura and E. G. Dimitrakopoulos, “A Modified Bridge System method to Characterize and Decouple Vehicle–Bridge Interaction.”, Springer, 2020.
- [3] H. Homaei and E. G. Dimitrakopoulos, “Extended Modified Bridge System method for Vehicle-Bridge Interaction: Treatment of Rotational Degrees of Freedom.”, ResearchGate, 2023.
- [4] C. D. Stoura, “Analytical and Numerical Examination of the Vehicle-Bridge Interaction Problem in Railway Bridges.”, Hong Kong University of Science and Technology, 2021.
- [5] T. Arvidsson, R. Karoumi, C. Pacoste, “Statistical Screening of Modelling Alternatives in Train-Bridge Interaction Systems.”, ScienceDirect, 2014.
- [6] P. Antolín, N. Zhang, J. M. Goicolea, H. Xia, M. A. Astiz, J. Oliva, “Consideration of Nonlinear Wheel-Rail Contact Forces for Dynamic Vehicle-Bridge Interaction in High-Speed Railways.”, ScienceDirect, 2013.
- [7] Σ. Νατσιάβας, «Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων», Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2001.
- [8] Σ. Νατσιάβας, «Ταλαντώσεις Δυναμικών Συστημάτων με Μη Γραμμικά Χαρακτηριστικά», Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000.
- [9] A. A. Shabana, “Dynamics of Multibody Systems”, third ed. Cambridge University Press, NY, 2005.
- [10] Σ. Νατσιάβας, «Εφαρμοσμένη Δυναμική», Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1999.
- [11] Y. B. Yang, J. D. Yau, Y. S. Wu, “Vehicle-Bridge Interaction Dynamics”, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Taipei, Taiwan, Republic of China, 2004.
- [12] MSC Software Corporation, “Adams View User's Guide”, USA, 2020.