Álgebra Lineal I

Christian Torres

23 de enero de 2026

Índice general

1. Preliminares **1**
1.1. Definición 1

2. Vectores de K^n **3**
2.1. K^n y sus operaciones 3
2.2. Subespacios de K^n 4
2.3. Combinaciones lineales y familias generadoras 4
2.4. Independencia lineal en K^n 6
2.5. Bases y dimensión de subespacios de K^n 6

3. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices **7**
3.1. Sistemas de ecuaciones lineales 7
3.2. Matrices 7
3.3. Subespacios asociados a una matriz 9
3.4. Rango de una matriz 9
3.5. Operaciones con matrices 9
3.6. Matriz inversa 9
3.7. Factorización LU 9

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definición

Definición 1.1.

Capítulo 2

Vectores de K^n

2.1. K^n y sus operaciones

Definición 2.1. Sea K un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. K^n es el conjunto de todas las n-tuplas de longitud n de elementos de K:

$$K^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in K, 1 \leq i \leq n\}.$$

Para $(x_1, ..., x_n) \in K^n$ y $i \in \{1, ..., n\}$, decimos que x_i es la i-ésima entrada de $(x_1, ..., x_n)$.

A los elementos de K los llamaremos escalares y a los de K^n vectores n-tuplas. Normalmente escribiremos los elementos de K^n en vertical, hecho del que veremos el porque más adelante.

Definición 2.2. La suma de $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in K^n$ se define por

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n).$$

Definición 2.3. El producto $(x_1, ..., x_n) \in K^n$ y un escalar $t \in K$ se define por

$$t(x_1, ..., x_n) = (tx_1, ..., tx_n).$$

Notación 2.4. Cuando estamos trabajando con n-tuplas 0 denota a la n-tupla $(0, ..., 0)$.

Notación 2.5. Para simplificar $x \in K^n$ denotara a la n-tupla $(x_1, ..., x_n)$.

La siguiente proposición muestra las propiedades más elementales de los elementos de K^n.

Proposición 2.6. *Sean $u, v, w \in K^n$ y $t, s \in K$. Entonces:*

a. $u + v = v + u$.

b. $(u + v) + w = u + (v + w)$.

c. $u + 0 = u$.

d. $u + (-u) = 0$.

e. $t(u + v) = tu + tv$.

f. $(t + s)u = tu + ts$.

g. $(ts)u = t(su)$.

h. $1u = u$.

Nótese que $(K^n, +)$ es un grupo abeliano con elemento neutro $0 = (0, ..., 0)$. La siguiente proposición muestra algunas propiedades más, ya no tan triviales, de los elementos de K^n.

Proposición 2.7. *Sean $u, v, w, v_1, ..., v_m \in K^n$ y $t, t_1, ..., t_m \in K^n$. Entonces:*

a. $0u = 0$.

b. *Si $u + v = u + w$, entonces $v = w$.*

c. $t0 = 0$.

d. *Si $tu = 0$, entonces $t = 0$ ó $u = 0$.*

e. $(-t)u = -(tu) = -tu$, *en particular,* $(-1)u = -u$.

f. *En la expresión $t_1v_1 + \cdots + t_mv_m$ no importa el orden en el que sumemos.*

2.2. Subespacios de K^n

Definición 2.8. Sea $S \subseteq K^n$. Decimos que S es un subespacio de K^n si verifica que:

a. S es no vacío.

b. Para todos $u, v \in S$ se tiene que $u + v \in S$.

c. Para todo $t \in K$ y $v \in S$ se tiene que $tv \in S$.

En tal caso escribimos $S \leq K^n$.

Observación 2.9. La condición de que S sea no vacío es equivalente a que $0 \in S$.

Observación 2.10. Es inmediato que $\{0\} \leq K^n$ y $K^n \leq K^n$.

Proposición 2.11. *Si para cada $i \in I$ consideremos un $S_i \leq K^n$, entonces* $\bigcap_{i \in I} S_i \leq K^n$.

Definición 2.12. Sean $S_1, ..., S_m \leq K^n$, definimos la suma de $S_1, ..., S_m$ como

$$S_1 + \cdots + S_m = \{s_1 + \cdots + s_m | s_i \in S_i, 1 \leq i \leq m\}.$$

Proposición 2.13. *Si $S_1, ..., S_m \leq K^n$, entonces $S_1 + \cdots + S_m \leq K^n$.*

2.3. Combinaciones lineales y familias generadoras

Definición 2.14. Un vector $v \in K^n$ es combinación lineal de $v_1, ..., v_m \in K^n$ si existen $t_1, ..., t_m \in K$ tales que $v = t_1v_1 + \cdots + t_mv_m$. Los escalares $t_1, ..., t_m$ se llaman coeficientes de la combinación lineal.

Definición 2.15. Una lista o familia de vectores de longitud m en K^n es una m-tupla $(v_1, ..., v_m)$ donde $v_1, ..., v_m \in K^n$.

Definición 2.16. Sean $v_1, ..., v_m \in K^n$, entonces el conjunto

$$\text{gen}(v_1, ..., v_m) = \{t_1v_1 + \cdots + t_mv_m | t_1, ..., t_m \in K\}$$

se llama generador de $v_1, ..., v_m$. Si $S = \text{gen}(v_1, ..., v_m)$ se dice que la lista $(v_1, ..., v_m)$ genera S, o que $(v_1, ..., v_m)$ es una lista generadora de S.

Proposición 2.17. *Si $v_1, ..., v_m \in K^n$, entonces $\text{gen}(v_1, ..., v_m) \leq K^n$. Además, $\text{gen}(v_1, ..., v_m)$ es el subespacio más pequeño que contiene a $v_1, ..., v_m$, es decir, si $S \leq K^n$ y $v_1, ..., v_m \in S$, entonces $\text{gen}(v_1, ..., v_m) \subseteq S$.*

Lema 2.18. *Sean $v_1, ..., v_m \in K^n$ y $u_1, ..., u_k \in K^n$. Si $v_1, ..., v_m \in \text{gen}(u_1, ..., u_k)$, entonces $\text{gen}(v_1, ..., v_m) \subseteq \text{gen}(u_1, ..., u_k)$. En particular, $\text{gen}(v_1, ..., v_m) = \text{gen}(u_1, ..., u_k)$ si y solo si $v_1, ..., v_m \in \text{gen}(u_1, ..., u_k)$ y $u_1, ..., u_k \in \text{gen}(v_1, ..., v_m)$.*

Demostración. Como $v_1, ..., v_m \in \text{gen}(u_1, ..., u_k)$, dado $i \in \{1, ..., m\}$ existen $t_{i1}, ..., t_{ik} \in K$ tales que $v_i = t_{i1}u_1 + \cdots + t_{ik}u_k$. Sea $v \in \text{gen}(v_1, ..., v_m)$, entonces existen $c_1, ..., c_m \in K$ tales que $v = c_1v_1 + \cdots + c_mv_m$, luego

$$v = \sum_{i=1}^{m} c_i v_i = \sum_{i=1}^{m} c_i(t_{i1}u_1 + \cdots + t_{ik}u_k) = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{k} t_{ij}u_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} c_i t_{ij} u_j \in \text{gen}(u_1, ..., u_k).$$

Ahora supongamos que $v_1, ..., v_m \in \text{gen}(u_1, ..., u_k)$ y $u_1, ..., u_k \in \text{gen}(v_1, ..., v_m)$, por lo que acabamos de ver $\text{gen}(v_1, ..., v_m) \subseteq \text{gen}(u_1, ..., u_k)$ y $\text{gen}(u_1, ..., u_k) \subseteq \text{gen}(v_1, ..., v_m)$, luego $\text{gen}(v_1, ..., v_m) = \text{gen}(u_1, ..., u_k)$. Recíprocamente supongamos que $\text{gen}(v_1, ..., v_m) = \text{gen}(u_1, ..., u_k)$, dado $i \in \{1, ..., m\}$ como $v_i = 0v_1 + \cdots + v_i + \cdots + 0v_m \in \text{gen}(v_1, ..., v_m) = \text{gen}(u_1, ..., u_k)$ tenemos que $v_i \in \text{gen}(u_1, ..., u_k)$, por lo tanto, $v_1, ..., v_m \in \text{gen}(u_1, ..., u_k)$. Análogamente $u_1, ..., u_k \in \text{gen}(v_1, ..., v_m)$. □

Teorema 2.19. *$K^n = \text{gen}(e_1, ..., e_n)$ donde $e_i \in K^n$ es la n-tupla que tiene 0 en todas sus entradas, salvo en la i, donde tienen un 1.*

Proposición 2.20. *Si $v_1, ..., v_m \in K^n$, entonces*

$$\text{gen}(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_m) = \text{gen}(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_m)$$

para todos los $i, j \in \{1, ..., m\}$ con $i \neq j$.

Proposición 2.21. *Si $v_1, ..., v_m \in K^n$ y $t \in K, t \neq 0$, entonces*

$$\text{gen}(v_1, ..., v_i, ..., v_m) = \text{gen}(v_1, ..., tv_i, ..., v_m)$$

para todo $i \in \{1, ..., m\}$.

Proposición 2.22. *Si $v_1, ..., v_m \in K^n$ y $t \in K$, entonces*

$$\text{gen}(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_m) = \text{gen}(v_1, ..., v_i, ..., v_j + tv_i, ..., v_m)$$

para todos los $i, j \in \{1, ..., m\}$.

Definición 2.23. Un subespacio de K^n se dice finitamente generado si existe una familia finita de vectores que lo genere.

2.4. Independencia lineal en K^n

Definición 2.24. Una lista $(v_1, ..., v_m)$ de vectores de K^n es linealmente dependiente (o ligada) si existen $t_1, ..., t_m \in K$ con algún $t_i \neq 0$, tales que

$$t_1 v_1 + \cdots + t_m v_m = 0.$$

Una lista $(v_1, ..., v_m)$ de vectores de K^n es linealmente independiente (o libre) si no es linealmente dependiente, es decir, si para todos los $t_1, ..., t_m \in K$ tales que

$$t_1 v_1 + \cdots + t_m v_m = 0$$

necesariamente $t_1 = \cdots = t_m = 0$.

Observación 2.25. a. La lista vacía es linealmente independiente por vacuidad.

b. Toda lista que contiene a otra linealmente dependiente es linealmente dependiente.

c. Toda lista contenida en otra linealmente independiente es linealmente independiente.

d. En una lista linealmente independiente no puede estar el vector nulo, ni pueden haber vectores repetidos.

Proposición 2.26. *La lista* $(e_1, ..., e_n)$ *de vectores de* K^n *es libre.*

Proposición 2.27. *Una lista* $(v_1, ..., v_m)$ *de vectores de* K^n *es linealmente dependiente si y solo si existe* $i \in \{1, ..., m\}$ *tal que* v_i *es combinación lineal de los anteriores.*

Observación 2.28. Si una lista de vectores genera un espacio y está familia es linealmente dependiente, entonces hay un vector que es combinación lineal de los anteriores, si lo suprimimos la lista que resulta genera el mismo espacio.

Lema 2.29. *Una lista* $v_1, ..., v_m$ *de vectores de* K^n *es linealmente independiente si y solo si todo vector* $v \in \mathrm{gen}(v_1, ..., v_m)$ *se puede escribir de manera única como combinación lineal de* $v_1, ..., v_m$.

Teorema 2.30. *Toda familia* $v_1, ..., v_m$ *de vectores en* K^n *con* $m > n$ *es linealmente dependiente.*

2.5. Bases y dimensión de subespacios de K^n

Definición 2.31. Una base de un subespacio S de K^n es una familia de vectores que genera S y es linealmente independiente.

Proposición 2.32. *Todas la bases de un subespacio finitamente generado de* K^n *tienen la misma longitud.*

Definición 2.33. Sea $S \leq K^n$ finitamente generado, la longitud de todas las bases de S se llama dimensión de S y se denota por $\dim S$.

Proposición 2.34. *Sea* $S \leq K^n$*, entonces* S *es finitamente generado y* $\dim S \leq n$*. Además,* $\dim S = n$ *si y solo si* $S = K^n$.

Proposición 2.35. *Sea* $S \leq K^n$ *con* $\dim S = m$*, y sea* $\mathcal{F}$ *una familia de vectores de* S *de longitud* m*, entonces* $\mathcal{F}$ *es libre si y solo si es generadora. En particular, si* $\mathcal{F}$ *es libre o generadora, entonces es base de* S.

Capítulo 3

Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

3.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 3.1.
- Una ecuación lineal de n incógnitas $x_1, ..., x_n$ en un cuerpo K es una ecuación que puede escribirse en la forma $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ donde los coeficientes $a_1, ..., a_n$ y el termino independiente (o constante) b son elementos de K.
- Una solución de una ecuación lineal $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ es una n-tupla $(s_1, ..., s_n)$ cuyos componentes satisfacen la ecuación cuando se sustituye $x_1 = s_1, ..., x_n = s_n$.
- Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto finito de ecuaciones lineales, cada una con las mismas variables. Una solución de un sistema de ecuaciones lineales es un vector que simultáneamente es una solución de cada ecuación en el sistema.
- El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales es el conjunto de todas las soluciones del sistema. Al proceso de encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales se le conocerá como "resolver el sistema".
- Un sistema de ecuaciones lineales se llama compatible (o consistente) si tiene al menos una solución. Un sistema sin soluciones se llama incompatible (o inconsistente).

Definición 3.2. Las operaciones elementales para un sistema de ecuaciones lineales son:

- Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo.
- Intercambiar dos ecuaciones.
- Sumar a una ecuación otra multiplicada por un escalar.

Definición 3.3. Un sistema de ecuaciones lineales se denomina homogéneo si el término constante en cada ecuación es cero.

3.2. Matrices

Definición 3.4.
- Una matriz en un cuerpo K es un arreglo rectangular de elementos de K llamados entradas, o elementos, de la matriz.
- El tamaño de una matriz es una descripción de los números de filas y columnas que tiene. Una matriz se llama $m \times n$ (dígase "m por n") si tiene m filas y n columnas.

- Una matriz de $1 \times m$ se llama matriz fila (o vector fila), y una matriz de $n \times 1$ se llama matriz columna (o vector columna).
- La entrada de una matriz A en la fila i y la columna j se denota mediante a_{ij}. De manera compacta una matriz A se puede denotar mediante (a_{ij}).
- El conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ en un cuerpo K se denota como $M_{mn}(K)$.

Notación 3.5. Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$ tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si las columnas de A son los vectores $a_1, ..., a_n \in K^m$, entonces A se puede representar como $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. Si las filas de A son $A_1, ..., A_m \in K^n$, entonces A se puede representar como

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Definición 3.6.

- Las entradas diagonales de $A = (a_{ij})$ son $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ...$, y si $m = n$ (esto es, si A tiene el mismo número de filas que de columnas), entonces A es una matriz cuadrada. Una matriz cuadrada cuyas entradas no diagonales sean todas cero es una matriz diagonal. Una matriz diagonal cuyas entradas diagonales sean todas iguales es una matriz escalar. Si el escalar en la diagonal es 1, la matriz escalar es una matriz identidad.
- El conjunto de todas las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ (o de orden n) en un cuerpo K se denota como $M_n(K)$.
- Dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y si sus entradas correspondientes son iguales.

Definición 3.7. Para un sistema de m ecuaciones y n incógnitas en un cuerpo K

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

decimos que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

es la matriz de coeficientes del sistema, y que la matriz

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

es la matriz ampliada del sistema.

Definición 3.8. Una matriz está en forma escalonada por filas si satisface las siguientes propiedades:

a. Cualquier fila formada enteramente de ceros está en la parte de abajo.

b. En cada fila distinta de cero, la primera entrada no nula (llamado elemento pivote) está en una columna a la izquierda de cualquier elemento pivote debajo de ella.

Definición 3.9. Una matriz está en forma escalonada reducida por filas si satisface las siguientes propiedades:

a. Está en forma escalonada por filas.

b. El elemento pivote en cada fila no nula es 1 (llamado 1 pivote).

c. Cada columna que contiene un 1 pivote tiene ceros en todos los otros lugares.

3.3. Subespacios asociados a una matriz

3.4. Rango de una matriz

Definición 3.10. El rango de filas de una matriz A es la dimensión del subespacio que generan sus filas, y el rango de columnas de una matriz A

Nota que el rango de filas de una matriz coincide con el número de filas no nulas de su forma escalonada reducida.

Teorema 3.11. *El rango de filas de una matriz coincide con su rango de columnas.*

Demostración. Sea A una matriz cualquiera, y sea R su forma escalonada reducida, tenemos que ver que $\dim(\operatorname{Fil} A) = \dim(\operatorname{Col} A)$. Como las operaciones elementales de filas no cambian el subespacio que generan estas, tenemos que $\operatorname{Fil} A = \operatorname{Fil} R$, llamemos $r = \dim(\operatorname{Fil} A)$, como $\dim(\operatorname{Fil} A) = \dim(\operatorname{Fil} R) = r$ tenemos que R tiene r filas no nulas, luego tiene r 1-pivotes. Las columnas de A que tiene 1-pivotes en su forma escalonada reducida son linealmente independientes, pues los sistemas $Ax = \bar{0}$ y $Rx = \bar{0}$ tienen las mismas soluciones, luego como las columnas de R que no tienen pivote se pueden despejar como combinación lineal de las que tienen pivote tenemos que las columnas correspondientes a estas en A se pueden despejar en las correspondientes a las columnas que tiene pivote, así pues, $\dim(\operatorname{Col} A) = \dim(\operatorname{Col} R)$. Finalmente, tenemos que

$$\dim(\operatorname{Fil} A) = \dim(\operatorname{Fil} R) = r = \dim(\operatorname{Col} R) = \dim(\operatorname{Col} A).$$

□

Definición 3.12. El rango de una matriz A es la dimensión del subespacio que generan sus columnas, y se denota como $\operatorname{rango}(A)$.

Proposición 3.13. *Sea A una matriz,* $\operatorname{rango}(A^t) = \operatorname{rango}(A)$.

Demostración. Se tiene que $\operatorname{rango}(A^t) = \dim(\operatorname{Col} A^t) = \dim(\operatorname{Fil} A) = \operatorname{rango}(A)$. □

3.5. Operaciones con matrices

3.6. Matriz inversa

3.7. Factorización LU