Álgebra Lineal I

Christian Torres

21 de enero de 2026

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definición

Definición 1.1.

Capítulo 2

Vectores de K^n

2.1. K^n y sus operaciones

Definición 2.1. Sea K un cuerpo, $t \in K$ y $n \in \mathbb{N}$, se definen

$$K^n = \{(x_1, ..., x_n) | x_i \in K, 1 \leq i \leq n\},$$
$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n),$$
$$t(x_1, ..., x_n) = (tx_1, ..., tx_n).$$

A los elementos de K los llamaremos escalares y a los de K^n vectores n-tuplas. Normalmente escribiremos los elementos de K^n en vertical, hecho que justificaremos más adelante.

Notación 2.2. $\bar{0} = (0, ..., 0)$.

Entenderemos que si estamos trabajando con n-tuplas $\bar{0}$ es también una n-tupla. La siguiente proposición muestra las propiedades más elementales de los elementos de K^n.

Proposición 2.3. *Sean $u, v, w \in K^n$ y $t, s \in K$. Entonces:*

- $u + v = v + u$.
- $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- $u + \bar{0} = u$.
- $u + (-u) = \bar{0}$.
- $t(u + v) = tu + tv$.
- $(t + s)u = tu + ts$.
- $(ts)u = t(su)$.
- $1u = u$.

Nótese que $(K^n, +)$ es un grupo abeliano con elemento neutro $\bar{0} = (0, ..., 0)$. La siguiente proposición muestra algunas propiedades más, ya no tan triviales, de los elementos de K^n.

Proposición 2.4. *Sean $u, v, w, v_1, ..., v_m \in K^n$ y $t, t_1, ..., t_m \in K^n$. Entonces:*

- $0u = \bar{0}$.
- *Si* $u + v = u + w$, *entonces* $v = w$.

- $t\bar{0} = \bar{0}$.
- *Si* $tu = \bar{0}$, *entonces* $t = 0$ *ó* $u = \bar{0}$.
- $(-t)u = -(tu) = -tu$, *en particular,* $(-1)u = -u$.
- *En la expresión* $t_1v_1 + \cdots + t_mv_m$ *no importa el orden en el que sumemos.*

2.2. Subespacios de K^n

2.3. Combinaciones lineales y familias generadoras

2.4. Independencia lineal en K^n

2.5. Bases y dimensión de subespacios de K^n

Capítulo 3

Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

3.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 3.1.

3.2. Matrices

3.3. Forma escalonada reducida de una matriz

3.4. Subespacios asociados a una matriz

3.5. Rango de una matriz

Definición 3.2. El rango de filas de una matriz A es la dimensión del subespacio que generan sus filas, y el rango de columnas de una matriz A

Nota que el rango de filas de una matriz coincide con el número de filas no nulas de su forma escalonada reducida.

Teorema 3.3. *El rango de filas de una matriz coincide con su rango de columnas.*

Demostración. Sea A una matriz cualquiera, y sea R su forma escalonada reducida, tenemos que ver que $\dim(\operatorname{Fil} A) = \dim(\operatorname{Col} A)$. Como las operaciones elementales de filas no cambian el subespacio que generan estas, tenemos que $\operatorname{Fil} A = \operatorname{Fil} R$, llamemos $r = \dim(\operatorname{Fil} A)$, como $\dim(\operatorname{Fil} A) = \dim(\operatorname{Fil} R) = r$ tenemos que R tiene r filas no nulas, luego tiene r 1-pivotes. Las columnas de A que tiene 1-pivotes en su forma escalonada reducida son linealmente independientes, pues los sistemas $Ax = \bar{0}$ y $Rx = \bar{0}$ tienen las mismas soluciones, luego como las columnas de R que no tienen pivote se pueden despejar como combinación lineal de las que tienen pivote tenemos que las columnas correspondientes a estas en A se pueden despejar en las correspondientes a las columnas que tiene pivote, así pues, $\dim(\operatorname{Col} A) = \dim(\operatorname{Col} R)$. Finalmente, tenemos que

$$\dim(\operatorname{Fil} A) = \dim(\operatorname{Fil} R) = r = \dim(\operatorname{Col} R) = \dim(\operatorname{Col} A).$$

□

Definición 3.4. El rango de una matriz A es la dimensión del subespacio que generan sus columnas, y se denota como $\operatorname{rango}(A)$.

Proposición 3.5. *Sea A una matriz,* $\operatorname{rango}(A^t) = \operatorname{rango}(A)$.

Demostración. Se tiene que $\operatorname{rango}(A^t) = \dim(\operatorname{Col} A^t) = \dim(\operatorname{Fil} A) = \operatorname{rango}(A)$. $\square$

3.6. Operaciones con matrices

3.7. Matrices elementales

3.8. Matriz inversa

3.9. Factorización LU