Álgebra Lineal I

Christian Torres

21 de enero de 2026

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definición

Definición 1.1.

Capítulo 2

Vectores de K^n

2.1. K^n y sus operaciones

Definición 2.1. Sea K un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. K^n es el conjunto de todas las n-tuplas de longitud n de elementos de K:

$$K^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in K, 1 \leq i \leq n\}.$$

Para $(x_1, ..., x_n) \in K^n$ y $i \in \{1, ..., n\}$, decimos que x_i es la i-ésima entrada de $(x_1, ..., x_n)$.

A los elementos de K los llamaremos escalares y a los de K^n vectores n-tuplas. Normalmente escribiremos los elementos de K^n en vertical, hecho del que veremos el porque más adelante.

Definición 2.2. La suma de $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in K^n$ se define por

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n).$$

Definición 2.3. El producto $(x_1, ..., x_n) \in K^n$ y un escalar $t \in K$ se define por

$$t(x_1, ..., x_n) = (tx_1, ..., tx_n).$$

Notación 2.4. Cuando estamos trabajando con n-tuplas 0 denota a la n-tupla $(0, ..., 0)$.

Notación 2.5. Para simplificar $x \in K^n$ denotara a la n-tupla $(x_1, ..., x_n)$.

La siguiente proposición muestra las propiedades más elementales de los elementos de K^n.

Proposición 2.6. *Sean $u, v, w \in K^n$ y $t, s \in K$. Entonces:*

a. $u + v = v + u$.

b. $(u + v) + w = u + (v + w)$.

c. $u + 0 = u$.

d. $u + (-u) = \bar{0}$.

e. $t(u + v) = tu + tv$.

f. $(t + s)u = tu + ts$.

g. $(ts)u = t(su)$.

h. $1u = u$.

Nótese que $(K^n, +)$ es un grupo abeliano con elemento neutro $\bar{0} = (0, ..., 0)$. La siguiente proposición muestra algunas propiedades más, ya no tan triviales, de los elementos de K^n.

Proposición 2.7. *Sean $u, v, w, v_1, ..., v_m \in K^n$ y $t, t_1, ..., t_m \in K^n$. Entonces:*

a. $0u = 0$.

b. *Si $u + v = u + w$, entonces $v = w$.*

c. $t0 = 0$.

d. *Si $tu = 0$, entonces $t = 0$ ó $u = 0$.*

e. $(-t)u = -(tu) = -tu$, *en particular,* $(-1)u = -u$.

f. *En la expresión $t_1v_1 + \cdots + t_mv_m$ no importa el orden en el que sumemos.*

2.2. Subespacios de K^n

Definición 2.8. Sea $S \subseteq K^n$. Decimos que S es un subespacio de K^n si verifica que:

a. S es no vacío.

b. Para todos $u, v \in S$ se tiene que $u + v \in S$.

c. Para todo $t \in K$ y $v \in S$ se tiene que $tv \in S$.

En tal caso escribimos $S \leq K^n$.

Observación 2.9. La condición de que S sea no vacío es equivalente a que $0 \in S$.

Observación 2.10. Es inmediato que $\{0\} \leq K^n$ y $K^n \leq K^n$.

Proposición 2.11. *Si para cada $i \in I$ consideremos un $S_i \leq K^n$, entonces $\bigcap_{i \in I} S_i \leq K^n$.*

Definición 2.12. Sean $S_1, ..., S_m \leq K^n$, definimos la suma de $S_1, ..., S_m$ como

$$S_1 + \cdots + S_m = \{s_1 + \cdots + s_m | s_i \in S_i, 1 \leq i \leq m\}.$$

Proposición 2.13. *Si $S_1, ..., S_m \leq K^n$, entonces $S_1 + \cdots + S_m \leq K^n$.*

2.3. Combinaciones lineales y familias generadoras

Definición 2.14. Un vector $v \in K^n$ es combinación lineal de $v_1, ..., v_m \in K^n$ si existen $t_1, ..., t_m \in K$ tales que $v = t_1v_1 + \cdots + t_mv_m$. Los escalares $t_1, ..., t_m$ se llaman coeficientes de la combinación lineal.

Definición 2.15. Una familia de vectores de longitud m en K^n es una m-tupla $(v_1, ..., v_m)$ donde $v_1, ..., v_m \in K^n$.

Notación 2.16. Escribiremos $v_1, ..., v_m$ en lugar de $(v_1, ..., v_m)$.

Definición 2.17. Sean $v_1, ..., v_m \in K^n$, entonces el conjunto

$$\text{gen}(v_1, ..., v_m) = \{t_1v_1 + \cdots + t_mv_m | t_1, ..., t_m \in K\}$$

se llama generador de $v_1, ..., v_m$. Si $S = \mathrm{gen}(v_1, ..., v_m)$ se dice que la familia $v_1, ..., v_m$ genera S, o que $v_1, ..., v_m$ es una familia generadora de S.

Proposición 2.18. *Si $v_1, ..., v_m \in K^n$, entonces $\mathrm{gen}(v_1, ..., v_m) \leq K^n$. Además, $\mathrm{gen}(v_1, ..., v_m)$ es el subespacio más pequeño que contiene a $v_1, ..., v_m$, es decir, si $S \leq K^n$ y $v_1, ..., v_m \in S$, entonces $\mathrm{gen}(v_1, ..., v_m) \subseteq S$.*

Lema 2.19. *Sean $v_1, ..., v_m \in K^n$ y $u_1, ..., u_k \in K^n$. Si $v_1, ..., v_m \in \mathrm{gen}(u_1, ..., u_k)$, entonces $\mathrm{gen}(v_1, ..., v_m) \subseteq \mathrm{gen}(u_1, ..., u_k)$. En particular, $\mathrm{gen}(v_1, ..., v_m) = \mathrm{gen}(u_1, ..., u_k)$ si y solo si $v_1, ..., v_m \in \mathrm{gen}(u_1, ..., u_k)$ y $u_1, ..., u_k \in \mathrm{gen}(v_1, ..., v_m)$.*

Teorema 2.20. *$K^n = \mathrm{gen}(e_1, ..., e_n)$ donde $e_i \in K^n$ es la n-tupla que tiene 0 en todas sus entradas, salvo en la i, donde tienen un 1.*

Proposición 2.21. *Si $v_1, ..., v_m \in K^n$, entonces*

$$\mathrm{gen}(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_m) = \mathrm{gen}(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_m)$$

para todos los $i, j \in \{1, ..., m\}$ con $i \neq j$.

Proposición 2.22. *Si $v_1, ..., v_m \in K^n$ y $t \in K, t \neq 0$, entonces*

$$\mathrm{gen}(v_1, ..., v_i, ..., v_m) = \mathrm{gen}(v_1, ..., tv_i, ..., v_m)$$

para todo $i \in \{1, ..., m\}$.

Proposición 2.23. *Si $v_1, ..., v_m \in K^n$ y $t \in K$, entonces*

$$\mathrm{gen}(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_m) = \mathrm{gen}(v_1, ..., v_i, ..., v_j + tv_i, ..., v_m)$$

para todos los $i, j \in \{1, ..., m\}$.

Definición 2.24. Un subespacio de K^n se dice finitamente generado si existe una familia finita de vectores que lo genere.

2.4. Independencia lineal en K^n

Definición 2.25. Una familia $v_1, ..., v_m$ de vectores en K^n es linealmente dependiente (o ligada) si existen $t_1, ..., t_m \in K$ con algún $t_i \neq 0$, tales que

$$t_1v_1 + \cdots + t_mv_m = 0.$$

Una familia $v_1, ..., v_m$ de vectores en K^n es linealmente independiente (o libre) si no es linealmente dependiente, es decir, si para todos los $t_1, ..., t_m \in K$ tales que

$$t_1v_1 + \cdots + t_mv_m = 0$$

necesariamente $t_1 = \cdots = t_m = 0$.

Observación 2.26.

a. La familia vacía es libre por vacuidad.

b. Toda familia que contiene a una familia ligada es ligada.

c. Toda familia contenida en una familia libre es libre.

d. En una familia libre no puede estar el vector nulo, ni pueden haber vectores repetidos.

Proposición 2.27. *La familia $e_1, ..., e_n$ de vectores en K^n es libre.*

Proposición 2.28. *Una familia $v_1, ..., v_m$ de vectores en K^n es linealmente dependiente si y solo si existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que v_i es combinación lineal de los anteriores.*

Observación 2.29. Si una familia de vectores genera un espacio y está familia es ligada, entonces hay un vector que es combinación lineal de los anteriores, si lo suprimimos la familia que resulta genera el mismo espacio.

Lema 2.30. *Una familia $v_1, ..., v_m$ de vectores en K^n es linealmente independiente si y solo si todo vector $v \in \mathrm{gen}(v_1, ..., v_m)$ se puede escribir de manera única como combinación lineal de $v_1, ..., v_m$.*

Teorema 2.31. *Toda familia $v_1, ..., v_m$ de vectores en K^n con $m > n$ es linealmente dependiente.*

2.5. Bases y dimensión de subespacios de K^n

Definición 2.32. Una base de un subespacio S de K^n es una familia de vectores que genera S y es linealmente independiente.

Proposición 2.33. *Todas la bases de un subespacio finitamente generado de K^n tienen la misma longitud.*

Definición 2.34. Sea $S \leq K^n$ finitamente generado, la longitud de todas las bases de S se llama dimensión de S y se denota por $\dim S$.

Proposición 2.35. *Sea $S \leq K^n$, entonces S es finitamente generado y $\dim S \leq n$. Además, $\dim S = n$ si y solo si $S = K^n$.*

Proposición 2.36. *Sea $S \leq K^n$ con $\dim S = m$, y sea $\mathcal{F}$ una familia de vectores de S de longitud m, entonces $\mathcal{F}$ es libre si y solo si es generadora. En particular, si $\mathcal{F}$ es libre o generadora, entonces es base de S.*

Capítulo 3

Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

3.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 3.1.

3.2. Matrices

3.3. Forma escalonada reducida de una matriz

3.4. Subespacios asociados a una matriz

3.5. Rango de una matriz

Definición 3.2. El rango de filas de una matriz A es la dimensión del subespacio que generan sus filas, y el rango de columnas de una matriz A

Nota que el rango de filas de una matriz coincide con el número de filas no nulas de su forma escalonada reducida.

Teorema 3.3. *El rango de filas de una matriz coincide con su rango de columnas.*

Demostración. Sea A una matriz cualquiera, y sea R su forma escalonada reducida, tenemos que ver que $\dim(\operatorname{Fil} A) = \dim(\operatorname{Col} A)$. Como las operaciones elementales de filas no cambian el subespacio que generan estas, tenemos que $\operatorname{Fil} A = \operatorname{Fil} R$, llamemos $r = \dim(\operatorname{Fil} A)$, como $\dim(\operatorname{Fil} A) = \dim(\operatorname{Fil} R) = r$ tenemos que R tiene r filas no nulas, luego tiene r 1-pivotes. Las columnas de A que tiene 1-pivotes en su forma escalonada reducida son linealmente independientes, pues los sistemas $Ax = \bar{0}$ y $Rx = \bar{0}$ tienen las mismas soluciones, luego como las columnas de R que no tienen pivote se pueden despejar como combinación lineal de las que tienen pivote tenemos que las columnas correspondientes a estas en A se pueden despejar en las correspondientes a las columnas que tiene pivote, así pues, $\dim(\operatorname{Col} A) = \dim(\operatorname{Col} R)$. Finalmente, tenemos que

$$\dim(\operatorname{Fil} A) = \dim(\operatorname{Fil} R) = r = \dim(\operatorname{Col} R) = \dim(\operatorname{Col} A).$$

□

Definición 3.4. El rango de una matriz A es la dimensión del subespacio que generan sus columnas, y se denota como $\operatorname{rango}(A)$.

Proposición 3.5. *Sea A una matriz,* $\operatorname{rango}(A^t) = \operatorname{rango}(A)$.

Demostración. Se tiene que $\operatorname{rango}(A^t) = \dim(\operatorname{Col} A^t) = \dim(\operatorname{Fil} A) = \operatorname{rango}(A)$. □

3.6. Operaciones con matrices

3.7. Matrices elementales

3.8. Matriz inversa

3.9. Factorización LU