

Problem Solving – Matemáticas

Christian Torres

January 19, 2026

1 Problema 1

Sean a, b, c números reales positivos. Probar la desigualdad

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Solución: Usando la notación de sumatorio cíclico la desigualdad se convierte en

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a(b+1)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Ahora por ser $a, b, c > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{1}{a(b+1)} \geq \frac{3}{1+abc} &\Leftrightarrow (1+abc) \sum_{cyc} \frac{1}{a(b+1)} = \sum_{cyc} \frac{1+abc}{a(b+1)} \geq 3 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1+abc}{a(b+1)} + 1 \geq \\ 6 &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1+abc+ab+a}{a(b+1)} = \sum_{cyc} \frac{1+a+ab(1+c)}{a(b+1)} \geq 6 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1+a}{a(b+1)} + \frac{b(1+c)}{b+1} \geq 6. \end{aligned}$$

Basta probar la ultima desigualdad, por la desigualdad entre las media aritmética y geométrica tenemos que

$$\sum_{cyc} \frac{1+a}{a(b+1)} + \frac{b(1+c)}{b+1} \geq 6 \sqrt[6]{\prod_{cyc} \frac{(1+a)b(1+c)}{a(b+1)^2}} = 6 \sqrt[6]{\frac{abc(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2}{abc(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2}} = 6.$$