Problem Solving – Matemáticas

Christian Torres

January 19, 2026

1 Desigualdades

1.1 Problema 1

Sean a, b, c números reales positivos. Probar la desigualdad

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Solución: Usando la notación de sumatorio cíclico la desigualdad se convierte en

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a(b+1)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Ahora por ser $a, b, c > 0$, tenemos que

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a(b+1)} \geq \frac{3}{1+abc} \Leftrightarrow (1+abc) \sum_{cyc} \frac{1}{a(b+1)} = \sum_{cyc} \frac{1+abc}{a(b+1)} \geq 3 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1+abc}{a(b+1)} + 1 \geq 6 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1+abc+ab+a}{a(b+1)} = \sum_{cyc} \frac{1+a+ab(1+c)}{a(b+1)} \geq 6 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1+a}{a(b+1)} + \frac{b(1+c)}{b+1} \geq 6.$$

Basta probar la ultima desigualdad, por la desigualdad entre las media aritmética y geométrica tenemos que

$$\sum_{cyc} \frac{1+a}{a(b+1)} + \frac{b(1+c)}{b+1} \geq 6 \sqrt[6]{\prod_{cyc} \frac{(1+a)b(1+c)}{a(b+1)^2}} = 6 \sqrt[6]{\frac{abc(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2}{abc(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2}} = 6.$$

1.2 Problema 2

Sean a, b, c números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Probar que

$$\left(\frac{1}{a^3(b+c)^5} + \frac{1}{b^3(c+a)^5} + \frac{1}{c^3(a+b)^5} \right)^{1/5} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución: Usando la notación de sumatorio cíclico la desigualdad se convierte en

$$\left(\sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)^5} \right)^{1/5} \geq \frac{3}{2}.$$