Regresión

Tarea 1

Christian Badillo

Tabla de contenidos

1 Ejercicio 0 (clase).

Encuentra los Estimadores de Mínimos Cuadrados de los parámetros β_0 y β_1 minimizamdp la función:

$$f\left(\beta_0, \beta_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right)^2$$

1.1 Solución.

Derivamos la función $f\left(\beta_0, \beta_1\right)$ con respecto a β_0 y β_1 e igualamos a cero:

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right) x_i = 0 \tag{2}$$

Se divide entre -2 y se distribuyen las sumatorias en 1:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_0 - \sum_{i=1}^{n} \beta_1 x_i &= 0 \\
n\bar{y} - n\beta_0 - \beta_1 n\bar{x} &= 0 && \text{Utilizando } \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \text{ y } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\
\bar{y} - \beta_0 - \beta_1 \bar{x} &= 0 && \text{Factorizando } n
\end{aligned}$$

Realizamos el mismo procedimiento con 2:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_1 x_i^2 &= 0 && \text{Distribuyendo la sumatoria y } x_i \\
\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\beta_0\bar{x} - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= 0 && \text{Utilizando } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i
\end{aligned}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\bar{y} - \beta_0 - \beta_1 \bar{x} = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\beta_0\bar{x} - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \tag{4}$$

Despejamos β_0 de 3:

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

Sustituimos β_0 en 4 y resolvemos para β_1:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\left(\bar{y} - \beta_1 \bar{x}\right)\bar{x} - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 & \\
\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\bar{y}\bar{x} + n\beta_1 \bar{x}^2 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 & \qquad \text{Distribuyendo } n \\
n\beta_1 \bar{x}^2 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= -\sum_{i=1}^{n} y_i x_i + n\bar{y}\bar{x} \\
-\beta_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) &= -\sum_{i=1}^{n} y_i x_i + n\bar{y}\bar{x} \quad \text{Factorizando } \beta_1 \\
-\beta_1 s_X^2 &= n\bar{x}\bar{y} - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \qquad \text{Se usa la relación } s_X^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \\
\beta_1 s_X^2 &= s_{XY} \qquad \text{Donde } s_{XY} = n\bar{x}\bar{y} - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\
\beta_1 &= \frac{s_{XY}}{s_X^2}
\end{aligned}$$

Por último, sustituimos β_1 en 3 y despejamos β_0:

$$\beta_0 = \bar{y} - \frac{s_{XY}}{s_X^2}\bar{x}$$

Por lo tanto, los estimadores de mínimos cuadrados de los parámetros β_0 y β_1 son:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \frac{s_{XY}}{s_X^2}\bar{x} \\
\hat{\beta}_1 &= \frac{s_{XY}}{s_X^2}
\end{aligned}$$