

# Problem

## Ausgangslage

Nehmen sie an, wir haben einen komplexen Ton durch die additive Überlagerung dreier Sinuskomponenten generiert

- $F1=100\text{Hz}$ ,  $F2=300\text{Hz}$ ,  $F3=500\text{Hz}$
- $A1=1$ ,  $A2=1/3$ ,  $A3=1/5$
- $P1=P2=P3=0$

2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

└ Problemstellung

└ Problem

Problem

Ausgangslage

Nehmen sie an, wir haben einen komplexen Ton durch die additive Überlagerung dreier Sinuskomponenten generiert

- ✓  $F1=100\text{Hz}$ ,  $F2=300\text{Hz}$ ,  $F3=500\text{Hz}$
- ✓  $A1=1$ ,  $A2=1/3$ ,  $A3=1/5$
- ✓  $P1=P2=P3=0$

# Das Signal

Phonetik I  
WS1013/2014

Christian Geng

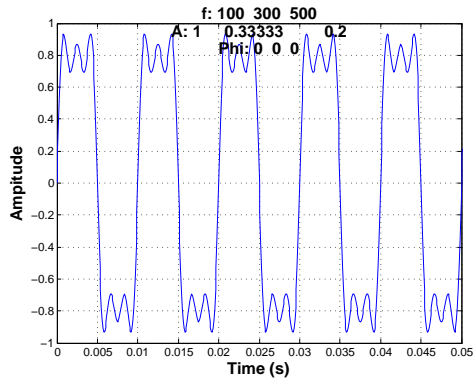
Problemstellung

Beispiel 1

Die Extraktion  
der Phasenlage

Zusammenfassung  
der Methode  
und weiteres  
Beispiel

Ausblick  
Kriminalfall



Wenn wir das nicht bereits wissen, wie finden wir dann heraus,  
welche Komponenten sich im Signal befinden?

Grundidee: Vergleich des gegebenen Signals mit möglichen  
Teilkomponenten

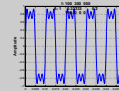
2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

Problemstellung

Das Signal

Das Signal



Wenn wir das nicht bereits wissen, wie finden wir dann heraus,  
welche Komponenten sich im Signal befinden?

Grundidee: Vergleich des gegebenen Signals mit möglichen  
Teilkomponenten

2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014  
└ Problemstellung

Wie kann man diesen Vergleich sinnvoll durchführen?

Für jede Komponente:

- Abtastpunktweise Multiplikation mit der Komponente
- Kumulative Summe des Signals berechnen

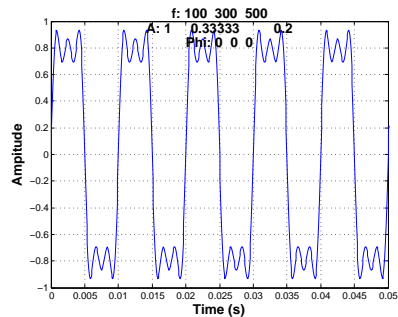
Wie kann man diesen Vergleich sinnvoll durchführen?

Für jede Komponente:

- Abtastpunktweise Multiplikation mit der Komponente
- Kumulative Summe des Signals berechnen

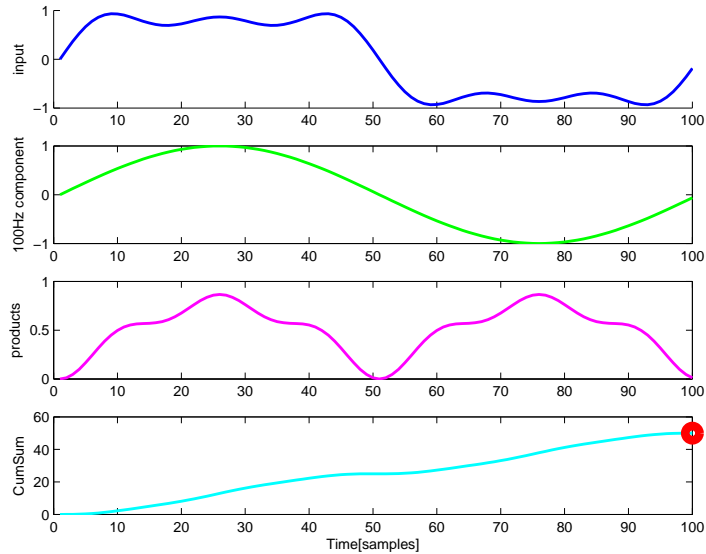


- Für den Moment wollen wir annehmen, dass das Signal periodisch ist - bei 100Hz
- Wir können uns also ein 10ms-Segment aus der Abbildung betrachten:



- Im folgenden wird eine sample-rate von **10kHz** angenommen
- → 10ms entsprechen 100 Abtastpunkten

# Extraktion der 100Hz-Komponente



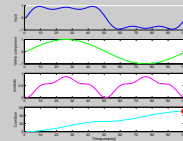
2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

Beispiel 1

Extraktion der 100Hz-Komponente

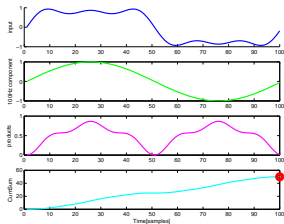
Extraktion der 100Hz-Komponente



# Extraktion der 100Hz-Komponente

## Beobachtung

- Das Ergebnis der abtastpunktweisen Multiplikation des komplexen Signals(1. Panel) mit der 100Hz-Komponente(2. Panel) ist immer  $> 0$  (3.Panel)
- Folge: Die kumulative Summe dieses Signals ist eine monoton wachsende Funktion
- Jetzt interessiert uns der letzte Punkt der kumulativen Summe (ganz rechts): Funktionswert : 50



- Das Ergebnis der abtastpunktweisen Multiplikation des komplexen Signals(1. Panel) mit der 100Hz-Komponente(2. Panel) ist immer  $> 0$  (3.Panel)
- Folge: Die kumulative Summe dieses Signals ist eine monoton wachsende Funktion
- Jetzt interessiert uns der letzte Punkt der kumulativen Summe (ganz rechts): Funktionswert : 50



# Extraktion der 100Hz-Komponente

## Bedeutung dieses Werts

- Division dieses Werts durch die Anzahl Samples welcher der Anzahl der Berechnung der kumulativen Summe zugrundeliegt (das sind 100 Abtastpunkte(samples), da in unserem Beispiel eine Abtastrate von 10kHz (=10000Hz) gewählt worden war).
- $(\text{kumulative Summe}) / (\text{Anzahl Punkte}) = 0.5$
- Bei der Synthese der 100Hz-Komponente haben wir ebenfalls eine Amplitude von 1 angenommen. Diesen Wert nennt man den **Spitzenwert** ("peak amplitude")
- In diesem Fall haben wir faktisch die **Mean Square Amplitude** eines Sinus mit der Maximalamplitude von 1 berechnet
- Der **Root Mean Square** - Wert ist die Quadratwurzel dieses Werts, also 0.7071

2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

Beispiel 1

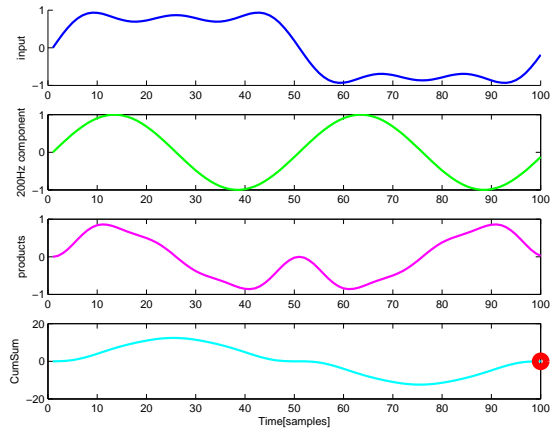
Extraktion der 100Hz-Komponente

### Bedeutung dieses Werts

- Division dieses Werts durch die Anzahl Samples welcher der Anzahl der Berechnung der kumulativen Summe zugrundeliegt (das sind 100 Abtastpunkte(samples), da in unserem Beispiel eine Abtastrate von 10kHz (=10000Hz) gewählt worden war).
- $(\text{kumulative Summe}) / (\text{Anzahl Punkte}) = 0.5$
- Bei der Synthese der 100Hz-Komponente haben wir ebenfalls eine Amplitude von 1 angenommen. Diesen Wert nennt man den **Spitzenwert** ("peak amplitude")
- In diesem Fall haben wir faktisch die **Mean Square Amplitude** eines Sinus mit der Maximalamplitude von 1 berechnet
- Der **Root Mean Square** - Wert ist die Quadratwurzel dieses Werts, also 0.7071



# Extraktion einer 200Hz-Komponente



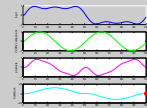
2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

Beispiel 1

Extraktion einer 200Hz-Komponente

Extraktion einer 200Hz-Komponente



# Extraktion einer 200Hz-Komponente

Phonetik I  
WS1013/2014  
Christian Geng

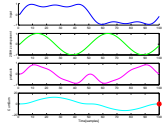
Problemstellung

Beispiel 1

Die Extraktion  
der Phasenlage

Zusammenfassung  
der Methode  
und weiteres  
Beispiel

Ausblick  
Kriminalfall



- Das Ergebnis (roter Punkt im Panel ganz unten) ist sehr nahe bei 0.
- Das entspricht den Erwartungen (gradzahlige Harmonische sind nicht in einer Quadratwelle enthalten)
- mean square amplitude:  $4.7e-17$
- Root mean square (**rms**) amplitude:  $6.851e-09$

Phonetik I WS1013/2014

2013-12-05

Beispiel 1

Extraktion einer 200Hz-Komponente

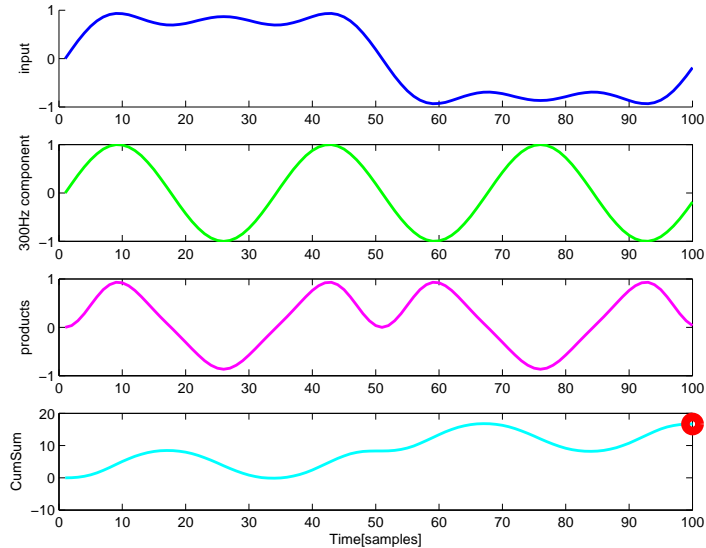
Extraktion einer 200Hz-Komponente



- Das Ergebnis (roter Punkt im Panel ganz unten) ist sehr nahe bei 0.
- Das entspricht den Erwartungen (gradzahlige Harmonische sind nicht in einer Quadratwelle enthalten)
- mean square amplitude:  $4.7e-17$
- Root mean square (**rms**) amplitude:  $6.851e-09$

# Extraktion einer 300Hz-Komponente

Synthetisierte Amplitude:  $\frac{1}{3} \rightarrow (0.5 * 1/3) = 0.16667$



2013-12-05

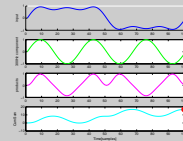
Phonetik I WS1013/2014

Beispiel 1

Extraktion einer 300Hz-Komponente

Extraktion einer 300Hz-Komponente

Synthetisierte Amplitude:  $\frac{1}{3} \rightarrow (0.5 * 1/3) = 0.16667$



## So weit, so gut ...

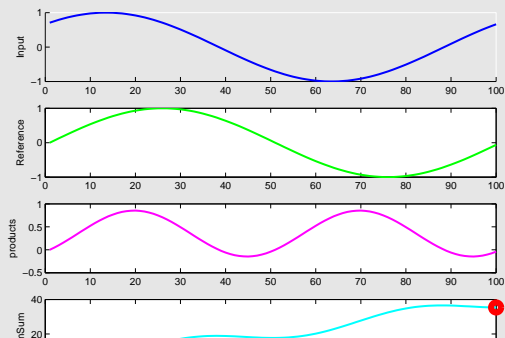
- Wir haben einen Weg gefunden, die Amplitude der individuellen Signalkomponenten zu extrahieren
- Aber in den bisher betrachteten Signalen war die **Phase** aller Komponenten 0
- Nächster Schritt: Analyse der Phase eines aus lediglich einem 100Hz Sinuston bestehenden Signals, welches jedoch mit  $45^\circ$  Phasenversatz synthetisiert wurde

- Wir haben einen Weg gefunden, die Amplitude der individuellen Signalkomponenten zu extrahieren
- Aber in den bisher betrachteten Signalen war die **Phase** aller Komponenten 0
- Nächster Schritt: Analyse der Phase eines aus lediglich einem 100Hz Sinuston bestehenden Signals, welches jedoch mit  $45^\circ$  Phasenversatz synthetisiert wurde

# Phase

## 100Hz Sinuston mit 45° Grad Phasenversatz

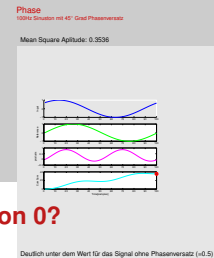
Mean Square Aplitude: 0.3536



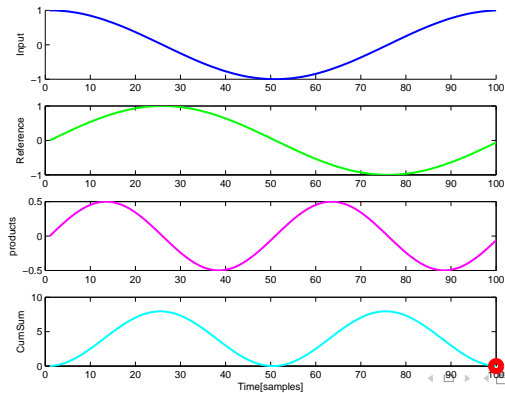
2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014  
Die Extraktion der Phasenlage  
Phase

Frage: Wann bekommt man eine Mean Square Amplitude von 0?



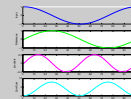
**Lösung: bei  $90^\circ$**   
Mean Square Amplitude  $\approx 0$ :  $1.485e-17$



2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014  
└ Die Extraktion der Phasenlage  
└ Lösung: bei  $90^\circ$

Lösung: bei  $90^\circ$   
Mean Square Amplitude  $\approx 0$ :  $1.485e-17$



# Was ist ein anderer Name für einen Sinus mit 90 Phasenversatz?

## Kosinus

- Die Nutzung von Vergleichssignalen mit 90 Grad Phasenwinkel ist intuitiv praktisch:
- Analogie: Zweidimensionales Koordinatensystem: Abszisse und Ordinate stehen im Winkel von 90 Grad zueinander.
- Bisher haben wir unsere Signale relativ zu einem Sinus mit 0 Grad definiert
- Man kann sich jetzt die Ergebnisse unserer Multiplikations-Summations-Experimente graphisch so vorstellen, daß die Sinuskomponente sich auf der x-Achse und die Kosinus-Komponente sich auf der y-Achse befindet
- **Frage zur Veranschaulichung:** Wie sieht das Plot einer Periode eines 100Hz Sinus auf der x-Achse gegen einen 100Hz-Kosinus auf der y-Achse aus?

2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

└ Die Extraktion der Phasenlage

└ Was ist ein anderer Name für einen Sinus mit 90 Phasenversatz?

**Standardmäßig vertauscht die Fourieranalyse diese Achsenzuordnungen**

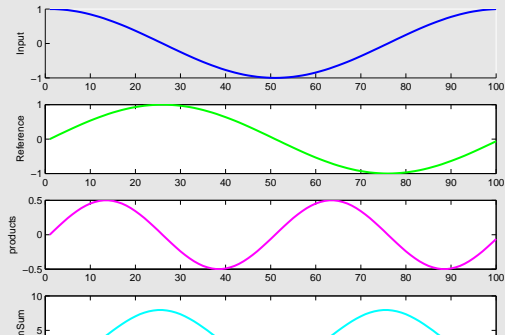
Was ist ein anderer Name für einen Sinus mit 90 Phasenversatz?

Kosinus

- Die Nutzung von Vergleichssignalen mit 90 Grad Phasenwinkel ist intuitiv praktisch:
- Analogie: Zweidimensionales Koordinatensystem: Abszisse und Ordinate stehen im Winkel von 90 Grad zueinander.
- Bisher haben wir unsere Signale relativ zu einem Sinus mit 0 Grad definiert
- Man kann sich jetzt die Ergebnisse unserer Multiplikations-Summations-Experimente graphisch so vorstellen, daß die Sinuskomponente sich auf der x-Achse und die Kosinus-Komponente sich auf der y-Achse befindet
- **Frage zur Veranschaulichung:** Wie sieht das Plot einer Periode eines 100Hz Sinus auf der x-Achse gegen einen 100Hz-Kosinus auf der y-Achse aus?

Antwort: 100Hz, Phasenversatz 90Grad

mean square amplitude: 1.485e-17, ein sehr kleiner Wert



2013-12-05

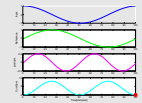
Phonetik I WS1013/2014

Die Extraktion der Phasenlage

Antwort: 100Hz, Phasenversatz 90Grad

Antwort: 100Hz, Phasenversatz 90Grad

mean square amplitude: 1.485e-17, ein sehr kleiner Wert







## Ein Kosinus

Analogie: Ein zweidimensionales Koordinatensystem  
x- und y-Achse stehen senkrecht aufeinander  
(d.h x- und y-Achse stehen senkrecht, im Winkel von  $90^\circ$   
aufeinander)

2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

└ Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

**Ein Kosinus**  
Analogie: Ein zweidimensionales Koordinatensystem  
x- und y-Achse stehen senkrecht aufeinander  
(d.h x- und y-Achse stehen senkrecht, im Winkel von  $90^\circ$   
aufeinander)

- Bisher haben wir unsere Signale relativ zu einem **Sinus mit einer Phase von  $0^\circ$**  definiert
- Jetzt fügen wir als **zweites Referenzsignal** einen Kosinus - einen um  $90^\circ$  gedrehten Sinus - hinzu
- Entsprechend können wir uns die Darstellung der Multiplikation- Summationsergebnisse auch graphisch anders vorstellen: das auf dem Sinus basierende Ergebnis auf der x-Achse und das auf dem Kosinus fussende Ergebnis auf der y-Achse
- In der Standardfourieranalyse ist die Achsenzuordnung vertauscht - aus gutem Grund (Erklärung kommt später)

2013-12-05

- Bisher haben wir unsere Signale relativ zu einem **Sinus mit einer Phase von  $0^\circ$**  definiert
- Jetzt fügen wir als **zweites Referenzsignal** einen Kosinus - einen um  $90^\circ$  gedrehten Sinus - hinzu
- Entsprechend können wir uns die Darstellung der Multiplikation- Summationsergebnisse auch graphisch anders vorstellen: das auf dem Sinus basierende Ergebnis auf der x-Achse und das auf dem Kosinus fussende Ergebnis auf der y-Achse
- In der Standardfourieranalyse ist die Achsenzuordnung vertauscht - aus gutem Grund (Erklärung kommt später)

Wie sieht das Plot eines (z.B.) 100Hz Kosinus versus einem 100Hz Sinus aus?

2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

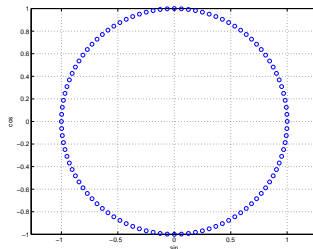
└ Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

└ Verständnisfrage

Verständnisfrage

Wie sieht das Plot eines (z.B.) 100Hz Kosinus versus einem 100Hz Sinus aus?

**Diese soll den Aspekt, dass ein Sinus und ein Kosinus zusammen eine vernünftige Basis für die Signalanalyse darstellen, herausstreichen ...**



- Bedeutung: Sinus- und Kosinuskomponente sind voneinander unabhängig
- → Der Korrelationskoeffizient zwischen den beiden Signalen wäre = 0
- “Spherical Covariance”, Ellipsoide
- Weitere Evidenz dafür, daß man auf diese Art und Weise ein Koordinatensystem aufsetzt, welches alle Information über ein Signal beinhaltet und so Redundanz vermeidet

2013-12-05

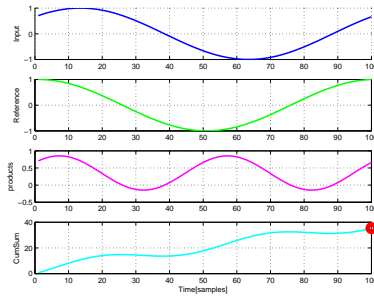


◦ Weitere Evidenz dafür, daß man auf diese Art und Weise ein Koordinatensystem aufsetzt, welches alle Information über ein Signal beinhaltet und so Redundanz vermeidet

- Bedeutung: Sinus- und Kosinuskomponente sind voneinander unabhängig
- → Der Korrelationskoeffizient zwischen den beiden Signalen wäre = 0
- “Spherical Covariance”, Ellipsoide

# Zurück: Input Signal 100Hz, mit 45Hz Phasenversatz

- Gleiches Vorgehen,  
Multiplizieren und  
Aufsummieren, aber  
dieses Mal mit einem  
Kosinus als  
Vergleichssignal



Also: Referenzsignal Kosinus, Input Signal Sinus mit  $45^\circ$  Phase.  
Kosinus: Der Punkt ganz links auf dem Referenzsignal (Panel 2)  
hat eine Amplitude von 1- bei  $0^\circ$

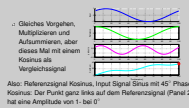
2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

└ Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

└ Zurück: Input Signal 100Hz, mit 45Hz Phasenversatz

Zurück: Input Signal 100Hz, mit 45Hz  
Phasenversatz



## Vergleich der Mean-Square Amplitude-Werte des Kosinussignals mit denen die wir vorher für den Sinus gefunden hatten:

- Sinuskomponente = 0.35355
- Kosinuskomponente = 0.35355

Sie sind identisch - vielleicht nicht so überraschend, da  $45^\circ$  genau in der Mitte zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegt

## Frage

wie können diese Werte kombiniert werden, um den erwarteten Wert von 0.5 zu bekommen?

Vergleich der Mean-Square Amplitude-Werte des Kosinussignals mit denen die wir vorher für den Sinus gefunden hatten:

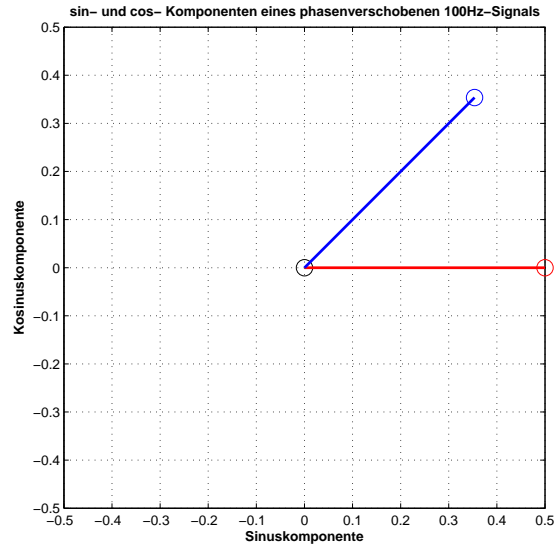
- Sinuskomponente = 0.35355
- Kosinuskomponente = 0.35355

Sie sind identisch - vielleicht nicht so überraschend, da  $45^\circ$  genau in der Mitte zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegt

Frage

wie können diese Werte kombiniert werden, um den erwarteten Wert von 0.5 zu bekommen?

# Plotten der Daten in einem 2D-Koordinatensystem



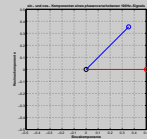
2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

└ Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

└ Plotten der Daten in einem 2D-Koordinatensystem

Plotten der Daten in einem 2D-Koordinatensystem



Vielleicht die Längr derjenigen Linie, welche den Datenpunkt mit dem Ursprung verbindet?



# Berechnung über den Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{0.35355^2 + 0.35355^2} \\ &= \sqrt{0.125 + 0.125} \\ &= \sqrt{0.25} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

└ Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

└ Berechnung über den Satz des Pythagoras

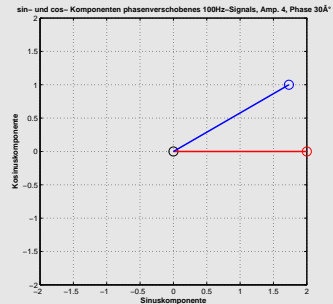
Berechnung über den Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{0.35355^2 + 0.35355^2} \\ &= \sqrt{0.125 + 0.125} \\ &= \sqrt{0.25} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

- Der Winkel ist ebenfalls repräsentiert! Er muss 45° sein, **da die beiden Amplituden gleich sind**
- Dieser Ansatz gibt uns also Amplituden **UND** Phase!

# Probe des bisherigen Vorgehens

Ergebnis eines Input 100Hz Signals, welches mit einer **Phase von 30°** und einer **Amplitude von 4** synthetisiert wird.



2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

└ Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

└ Probe des bisherigen Vorgehens

Probe des bisherigen Vorgehens

Ergebnis eines Input 100Hz Signals, welches mit einer Phase von 30° und einer Amplitude von 4 synthetisiert wird.



# Anwendung der obigen Prozedur

Phonetik I  
WS1013/2014  
Christian Geng

Problemstellung

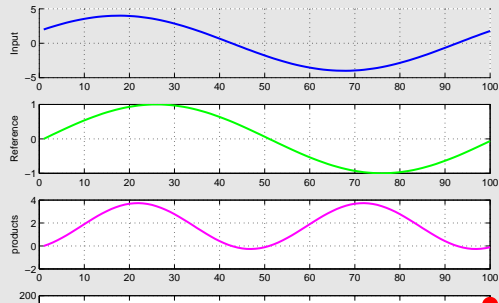
Beispiel 1

Die Extraktion  
der Phasenlage

Zusammenfassung  
der Methode  
und weiteres  
Beispiel

Ausblick  
Kriminalfall

## Multiplikation und Aufsummieren - Sinuskomponente, MSQ; 1.7321



2013-12-05

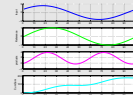
Phonetik I WS1013/2014

└ Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

└ Anwendung der obigen Prozedur

Anwendung der obigen Prozedur

Multiplikation und Aufsummieren - Sinuskomponente, MSQ;  
1.7321



- Der Gesamt wert ist für die Sinuskomponente 173.2051, auf 100 Samples bezogen 1.7321
- Für die Kosinuskomponente erhält man den Wert 1.0

# Anwendung der obigen Prozedur

## Kombination zur Berechnung der Amplitude

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{1.732^2 + 1.0^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

└ Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

└ Anwendung der obigen Prozedur

Anwendung der obigen Prozedur

Kombination zur Berechnung der Amplitude

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{1.732^2 + 1.0^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

- Wir brauchen dazu die Definition des Sinus:
- $\rightarrow \sin(\alpha) = \text{gemessene Sinuskomponente} / \text{Gesamtamplitude}$
- Um auf den Winkel (in Radianen) zu kommen brauchen wir dessen inversen Cosinus:  $\arccos(1.732/2) = 0.5236$
- Um den Winkel in  $^\circ$  umzurechnen:  $(180/\pi) \cdot 0.5236 = 30$

### Messen des Winkels in der Ebene:

- Wir brauchen dazu die Definition des Sinus:
- $\rightarrow \sin(\alpha) = \text{gemessene Sinuskomponente} / \text{Gesamtamplitude}$
- Um auf den Winkel (in Radianen) zu kommen brauchen wir dessen inversen Cosinus:  $\text{acos}(1.7321/2) = 0.5236$
- Um den Winkel in  $^\circ$  umzurechnen:  $(180/\pi) \cdot 0.5236 = 30$

# Kosinuskomponente auf der x-Achse

Warum denn?

Phonetik I  
WS1013/2014  
Christian Geng

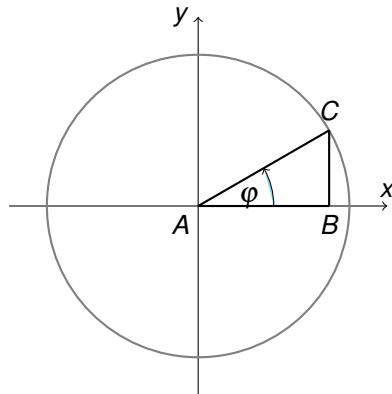
Problemstellung

Beispiel 1

Die Extraktion  
der Phasenlage

Zusammenfassung  
der Methode  
und weiteres  
Beispiel

Ausblick  
Kriminalfall



## Begründung

Passt besser zur konventionellen  
Definition trigonometrischer  
Funktionen:

$$\cos(\varphi) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

2013-12-05

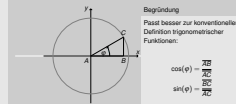
Phonetik I WS1013/2014

└ Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

└ Kosinuskomponente auf der x-Achse

x

Kosinuskomponente auf der x-Achse  
Warum denn?

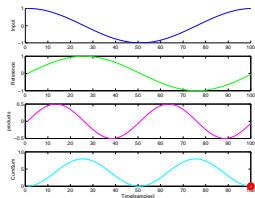


Begründung  
Passt besser zur konventionellen  
Definition trigonometrischer  
Funktionen:

$$\cos(\varphi) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

- Entsprechend ist ein Signal ohne Phasenversatz zum Kosinussignal als Signal mit einem Phasenwert von 0 zu verstehen
- **Frage: Welche Phase hat dann ein Sinus relativ zu einem Kosinus?**



2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

└ Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

└ Implikationen

Implikationen

- Entsprechend ist ein Signal ohne Phasenversatz zum Kosinussignal als Signal mit einem Phasenwert von 0 zu verstehen
- Frage: Welche Phase hat dann ein Sinus relativ zu einem Kosinus?



Antwort: Da der Kosinus relativ zum Sinus eine Phasenlage von  $+90^\circ$  hat, liegt der Sinus  $-90^\circ$  (**oder**  $+270^\circ$ ) relativ zum Kosinus.  
(falls unklar, zurück zur Abbildung mit Kosinusreferenzsignal, und angucken wo ein Sinus im Kosinuszyklus anfängt!)

Zur Abb.: 90 Grad entsprechen 25 Samples, dem viertel eines Kreises!

# Standard FFT-Prozedur

- Frequenzen: 100, 200, 300 und 400 Hz
- Amplituden von 4,3,2,1
- Phasen von 0, 30,60 und 90°

## Bemerkung:

Von jetzt an werden die Amplituden automatisch so skaliert, daß eine Input-Amplitude als 1 und nicht als 0.5 herauskommt

2013-12-05

Phonetik I WS1013/2014

└ Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

└ Standard FFT-Prozedur

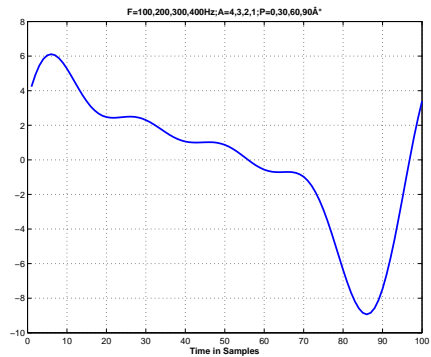
Standard FFT-Prozedur

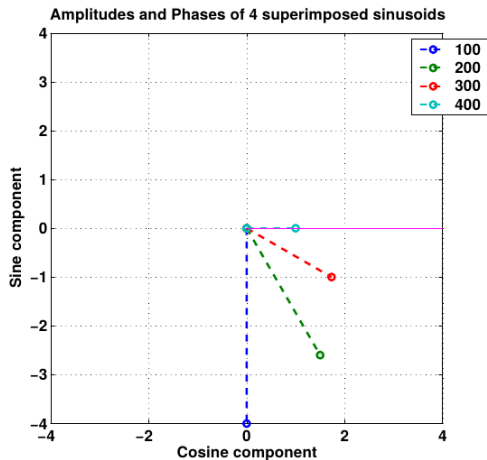
- ✓ Frequenzen: 100, 200, 300 und 400 Hz
- ✓ Amplituden von 4,3,2,1
- ✓ Phasen von 0, 30,60 und 90°

Bemerkung:

Von jetzt an werden die Amplituden automatisch so skaliert, daß eine Input-Amplitude als 1 und nicht als 0.5 herauskommt







2013-12-05

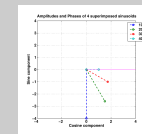
Phonetik I WS1013/2014

— Zusammenfassung der Methode und weiteres Beispiel

— Standard FFT-Prozedur

Standard FFT-Prozedur

Spektrum



- Es handelt sich um einen Sinus, deshalb
  - findet sich die 100Hz-Komponente mit  $P = 0$  bei  $-90^\circ = 270^\circ$
  - findet sich die 200Hz-Komponente mit  $P = 30$  bei  $-60^\circ = 300^\circ$   
( $=360-90+30$ )
  - findet sich die 300Hz-Komponente mit  $P = 60$  bei  $-30^\circ = 330^\circ$   
( $=360-90+60$ )
  - findet sich die 300Hz-Komponente mit  $P = 90$  bei  $0^\circ = 360^\circ$   
( $=360-90+90$ )

