Ligningen for en tangent.

Hvordan vi finder ligningen for tangenten i et punkt

Hvis vi har en differentiabel funktion f, så kan vi bestemme hældningen af funktionen i punktet x_0 ved at bestemme $f'(x_0)$. Vi vil gerne kunne bestemme ikke blot tangentens hældning i dette punkt, men hele ligningen for tangenten. Vi betragter følgende algoritme:

i) Vi skal finde en ligning for tangenten på formen $y = ax + b$.

ii) Vi ved, at hældningen skal være $a = f'(x_0)$, så vi bestemmer f' og evaluerer den i x_0.

iii) Vi ved, at ligningen for tangenten skal gå igennem punktet $(x_0, f(x_0))$, så vi bestemmer $f(x_0)$ og løser ligningen

$$\underbrace{f(x_0)}_{=y_0} = \underbrace{f'(x_0)}_{=a} x_0 + b \;\Leftrightarrow\; b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

iv) Vi har nu bestemt tangentens ligning $y = ax + b$.

Vi kan samle denne algoritme til en sætning:

Sætning 1.1 (Tangentens ligning)**.** *Lad f være en differentiabel funktion i x_0. Så er ligningen for tangenten til f i punktet $(x_0, f(x_0))$ givet ved*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Bevis. Da $a = f'(x_0)$ og $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$ fås

$$y = ax + b = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

■

Eksempel 1.2. Vi ønsker at finde ligningen for tangenten til funktionen x^2 i punktet $(1, 1)$. Vi finder først den afledede til x^2:

$$(x^2)' = 2x.$$

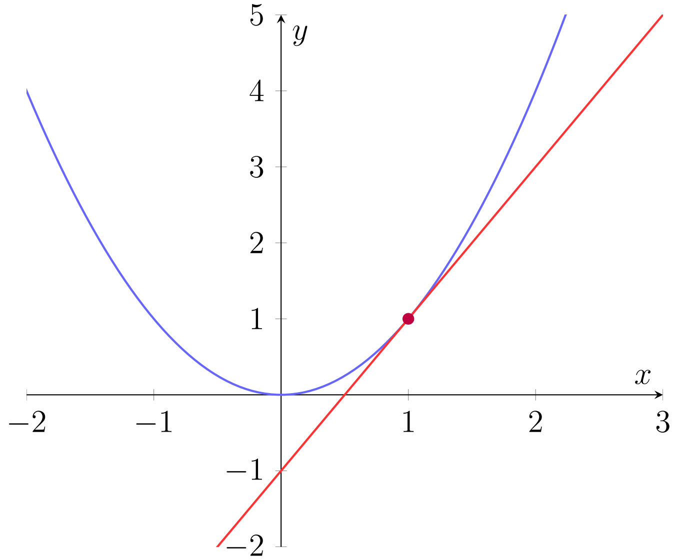
Derfor må hældningen af tangenten i punktet $(1, 1)$ være $a = f'(1) = 2$. Vi skal nu finde b i ligningen $y = 2x + b$, så vi indsætter vores kendte punkt:

$$y = 2x + b \Leftrightarrow 1 = 2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -1,$$

og derfor må tangentens ligning i punktet $(1, 1)$ være givet som

$$y = 2x - 1.$$

Funktionen x^2 og tangenten i punktet $(1, 1)$ til x^2 fremgår af Fig. 1.



Figur 1: Funktion $f(x) = x^2$ og tangentlinjen $g(x) = 2x - 1$.

Sætning 1.3. *Funktionen $f(x) = x^3$ er overalt differentiabel med differentialkvotient*

$$\frac{d}{dx}x^3 = (x^3)' = 3x^2.$$

Bevis. Vi anvender definitionen af differentialkvotienten:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

hvilket i tilfældet $f(x) = x^2$ giver

$$\begin{aligned}
(x^3)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+h^2+2xh)(x+h) - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + xh^2 + 2x^2h + x^2h + h^3 + 2xh^2 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{xh^2 + 2x^2h + x^2h + h^3 + 2xh^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} xh + 2x^2 + x^2 + h^2 + 2xh \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \\
&= 3x^2.
\end{aligned}$$

■

Opgave 1

Find ligningen for tangenten til følgende funktioner i de tilhørende punkter. Tegn desuden funktionerne og tangentlinjerne i Maple for at undersøge, om du har fundet de rigtige tangentlinjer.

1) $f(x) = x^2,\ P(-1, f(-1))$	2) $f(x) = 2x^2 - 1x + 3,\ P(0, f(0))$
3) $f(x) = \frac{1}{x} - x^3,\ P(2, f(2))$	4) $f(x) = \sqrt{x},\ P(4, f(4))$
5) $f(x) = 7x + 3,\ P(3, f(3))$	6) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1,\ P(1, f(1))$
7) $f(x) = 27,\ P(1000, f(1000))$	8) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x},\ P(9, f(9))$
9) $f(x) = \frac{10}{x} + 3x^3,\ P(2, f(2))$	10) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x + 1,\ P(-2, f(-2))$