Projektioner af vektorer

Projektioner

Har vi to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så kan vi være interesserede i at bestemme den vektor $\overrightarrow{a_{\vec{b}}}$, der peger i samme retning som $\vec{b}$ og som i en forstand er så tæt på $\vec{a}$ som muligt. Vi kalder i et sådant tilfælde vektoren $\overrightarrow{a_{\vec{b}}}$ for projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$. Vi skriver også

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a}_{\vec{b}}.$$

Vi starter med at vise, hvordan vi finder projektionen af en vektor på en anden vektor.

Sætning 1.1 (Projektionssætningen)**.** *For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$, som vi betegner*

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a}_{\vec{b}},$$

givet ved

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}.$$

Længden af $\vec{a}_{\vec{b}}$ er givet ved

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Bevis. Af konstruktionen af projektionen $\overrightarrow{a_{\vec{b}}}$ så findes der et tal k, så

$$k\vec{b} = \overrightarrow{a_{\vec{b}}}.$$

Lad n være en normalvektor til $\vec{u}$, der opfylder, at

$$\overrightarrow{a_{\vec{b}}} + \vec{n} = \vec{a}.$$

Vi har så, at

$$\vec{n} = \vec{a} - \overrightarrow{a_{\vec{b}}}.$$

Da $\vec{n}$ er en normalvektor til $\vec{b}$, så får vi følgende prikprodukt.

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \vec{b} = 0 &\Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{a_{\vec{b}}}) \cdot \vec{b} = 0 \\
&\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a_{\vec{b}}} \cdot \vec{b} = 0 \\
&\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a_{\vec{b}}} \cdot \vec{b} = k\vec{b} \cdot \vec{b} \\
&\Leftrightarrow k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}
\end{aligned}$$

Derfor får vi, at

$$\begin{aligned}
\vec{a_{\vec{b}}} &= k\vec{b} \\
&= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}.
\end{aligned}$$

Vi kan nu bestemme længden af vektoren:

$$\begin{aligned}
|\vec{a_{\vec{b}}}| &= \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \right| \\
&= \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right| |b| \\
&= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|b|}
\end{aligned}$$

■

Eksempel 1.2. Vi skal bestemme projektionen af vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

på vektoren

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Vi bestemmer først

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 19$$

Vi bestemmer så

$$|b|^2 = (\sqrt{5^2 + 7^2})^2 = 25 + 49 = 74$$

Vi kan nu bestemme projektionen $\overrightarrow{a_{\vec{b}}}$ som

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{\vec{b}}} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \\ &= \frac{19}{74}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{95}{74}\\ \frac{134}{74}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Opgave 1

Projicér vektoren $\vec{v}$ givet ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

ned på følgende vektorer:

1) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$

Opgave 2

En linje l er givet ved parametriseringen

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Bestem projektionen af følgende punkter ned på l.

1) $(1,1)$	2) $(-2,3)$
3) $(5,2)$	4) $(-3,-4)$
5) $(4,7)$	6) $(3,-5)$

Opgave 3

I har fået en aflevering