Kvadratkomplettering og cirklens ligning

Vi husker fra sidst, at en cirkel med centrum i (x_0, y_0) og radius r har ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. (1.1)$$

Hæver vi parenteserne i denne ligning, så får vi

$$x^{2} + x_{0}^{2} - 2xx_{0} + y^{2} + y_{0}^{2} - 2yy_{0} = r^{2},$$
(1.2)

og cirklens ligning vil ofte optræde på denne form. Kvadratkomplettering går ud på at få en ligning fra formen (1.2) tilbage på formen (1.1), så radius og centrum kan aflæses.

Eksempel 1.1. En cirkel har ligningen

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 4.$$

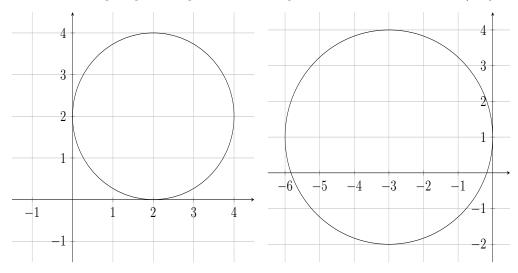
Vi ser, at vi har leddene x^2 og $-2xx_0 = -2x$ samt y^2 og $-2yy_0 = -4y$. Derfor kan vi se, at $x_0 = 1$ og $y_0 = 2$. Ifølge (1.2) skal vi have x_0^2 og y_0^2 på venstresiden af lignhedstegnet, så det lægges til i cirklens ligning:

$$x^{2} - 2x + y^{2} - 4y + 1 + 4 = 4 + 1 + 4 = 9.$$

Da ligningen nu er på formen (1.2), så kan vi se, at cirklen har centrum i (1,2) og radius $\sqrt{9} = 3$.

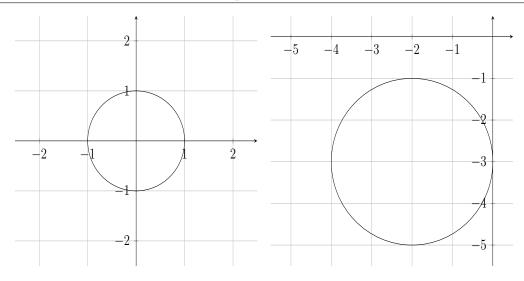
Opgave 1

Bestem cirklens ligning for følgende cirkler og omskriv dem til formen (1.2).



Side 1 af 3





Opgave 2

i) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = -9.$$

ii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 + 6y = -1.$$

iii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 8x + y^2 + 2y = 8.$$

iv) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 10x + y^2 - 12y = 3.$$

v) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 + 4x + y^2 + 14y = 47.$$

Opgave 3

i) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$(x-4)^2 + y^2 - 6y = 27.$$

ii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 + 4x + (y - 3)^2 = 21.$$

iii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 14x + (y+5)^2 = 0.$$