Differentialregning og poylnomier

Toppunkt og hældning

Vi kan bruge differentialregning til at bestemme toppunktet for et andetgradspolynomium.

Sætning 1.1 (Toppunktsformlen)**.** *Lad f være et andetgradspolynomium givet ved*

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Så er toppunktet for parablen for f givet ved

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right),$$

hvor d er givet ved $b^2 - 4ac$.

Bevis. Vi differentierer f og sætter funktionen lig 0.

$$\begin{aligned} f'(x) = 2ax + b = 0 &\Leftrightarrow 2ax = -b \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}. \end{aligned}$$

Dette udtryk indsættes nu i forskriften for f.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-b}{2a}\right) &= a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\frac{-b}{2a} + c \\ &= a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\ &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\ &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\ &= \frac{-d}{4a}, \end{aligned}$$

hvor $d = b^2 - 4ac$. ∎

Vi kan også bruge differentialregning til at afgøre, hvorfor hældningen af en parabel i skæringspunktet med y-aksen er lig b.

Sætning 1.2. *Lad f være et andetgradspolynomium givet ved*

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Så tilsvarer b hældningen af parablen for f i skæringen med y-aksen.

Bevis. Hældningen af grafen i skæringspunktet med y-aksen må være givet ved $f'(0)$. Dette bestemmes.

$$f'(0) = 2a \cdot 0 + b = b.$$

■

Følgende er det sidste bevis, vi skal se i differentialregning.

Sætning 1.3. *Der gælder, at*

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

for $x \neq 0$.

Bevis. Vi anvender definitionen af differentialkvotienten for f givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Denne er givet som

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{x(x+h)h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x^2 + xh} \\
&= -\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

■

Opgave 1

Del jer ind i 6 grupper. Bevis én af følgende differentialregningsregler i jeres gruppe.

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(x^2)' = 2x$
$(x^3)' = 3x^2$
Tangentligningen er givet ved $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
Toppunkt for parabel er givet ved $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$

Fremlæggelse for hinanden i slutningen af modulet.