

Regnearternes hierarki og brøker

Vi starter med at huske os selv på regnearternes hierarki også kaldet operatorpræcedens, der fortæller os i hvilken rækkefølge, vi skal anvende operatorerne i et givent regnestykke. Altså i hvilken rækkefølge, vi skal lægge sammen, gange, dividere, tage potenser osv.

Definition 1.1 (Regnearternes hierarki). I en udregning anvender vi operatorerne i følgende rækkefølge:

- i) Parentes. Betegnes med (). (Alt, der står i parentes udregnes først efter rækkefølgen bestemt for de resterende operatorer).
- ii) Fakultet. Betegnes med !. Vi husker på, at for $n \in \mathbb{N}$ er $n!$ defineret som

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0, \\ n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 & \text{for } n > 0. \end{cases}$$

- iii) Potenser og rødder. Et tal a i n 'te potens og n 'te rod betegnes med henholdsvis a^n og $\sqrt[n]{a}$.
- iv) Multiplikation og division. Betegnes med henholdsvis \cdot og $/$.
- v) Addition og subtraktion. Betegnes med henholdsvis $+$ og $-$.

Eksempel 1.2. Lad os betragte regnestykket

$$7 + 10 - \underbrace{\left(5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 3!^2\right)}_{\text{Parentes 1}} + \underbrace{(7 - 9)}_{\text{Parentes 2}} \cdot 4. \quad (1.1)$$

Vi starter med at udregne Parentes 1. Vi følger regnearternes hierarki:

$$\begin{aligned} \left(5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 3!^2\right) &\stackrel{\text{ii)}}{=} \left(5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 6^2\right) \\ &\stackrel{\text{iii)}}{=} \left(5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 36\right) \\ &\stackrel{\text{iv)}}{=} (5 - 1 + 36) \\ &\stackrel{\text{v)}}{=} (40). \end{aligned}$$

Og Parentes 2 tilsvarende:

$$(7 - 9) \stackrel{\text{v)}}{=} (-2).$$

Disse indsættes nu i (1.1), og vi anvender igen regnearternes hierarki til at udregne:

$$7 + 10 + \underbrace{40}_{\text{Par. 1}} + \underbrace{(-2) \cdot 4}_{\text{Par. 2}} \stackrel{\text{iv)}}{=} 7 + 10 + 40 - 8 \\ \stackrel{\text{v)}}{=} 39.$$

Brøkrekneregler

Vi skal i dag arbejde med brøkrekneregler.

- i) Addition og subtraktion af brøker. For to brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er summen og differensen givet ved

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}.$$

- ii) Multiplikation af brøker. Produktet mellem $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er givet ved

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Specielt er produktet mellem en brøk $\frac{a}{b}$ og et tal c givet ved

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}.$$

- iii) Division af brøker. Forholdet mellem to brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er givet ved

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

(Vi ganger med den omvendte brøk.) Specielt er en brøk $\frac{a}{b}$ divideret med et tal c givet ved

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc},$$

og et tal c divideret med en brøk $\frac{a}{b}$ givet ved

$$\frac{c}{\frac{a}{b}} = \frac{cb}{a}.$$

iv) Brøker og potenser/rødder. En brøk $\frac{a}{b}$ opløftet i et tal c er givet ved

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}.$$

n 'te roden af en brøk $\frac{a}{b}$ er givet ved

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Eksempel 2.1. Lad os se på et eksempel, hvor vi anvender nogle af disse regler:

$$\frac{\frac{2}{5} + \frac{5}{7}}{\frac{10}{3}} \stackrel{\text{i)}}{=} \frac{\frac{14+25}{35}}{\frac{10}{3}} = \frac{\frac{39}{35}}{\frac{10}{3}} \stackrel{\text{iii)}}{=} \frac{39 \cdot 3}{35 \cdot 10} = \frac{117}{350}.$$

Opgave 1

Udregn følgende.

- | | |
|------------------------------|---|
| 1) $4(2 + 7)$ | 2) $\frac{6}{3} \cdot 7 + 3\frac{10}{2}$ |
| 3) $2!^3$ | 4) $(2 + 4)^2$ |
| 5) $\frac{12}{4} + 9$ | 6) $-5^2 + 9 - \frac{14}{7} \cdot (-2)$ |
| 7) $(-5)^3 + \frac{24}{2+2}$ | 8) $(1 + 3!)^2$ |
| 9) $(2 + 3)^3$ | 10) $\sqrt{3^2 + 4^2}$ |
| 11) $\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2}$ | 12) $\frac{(1 + 1 + 1)! + 6^2 + (2^2 - 6 \cdot (-2))}{\sqrt{4^2 + 20}}$ |

Opgave 2

- i) Udregn $(-2)(-3)$
- ii) Udregn $(-5)2$.
- iii) Udregn $(-3)(-0.5)(-6)(-1)$
- iv) Udregn $(3)(-3)(-3)(-1)$
- v) For hvilke heltal $n > 0$ gælder det, at $(-2)^n$ bliver et positivt tal?
- vi) For hvilke heltal $n > 0$ gælder det, at $(-2)^n$ bliver et negativt tal?

Opgave 3

Forkort følgende udtryk så meget som muligt.

1) $(a + a)b$

2) $\sqrt{a^2}$

3) $(a - b)a - a^2 + ab + c$

4) $(\sqrt[7]{a + b})^7$

Opgave 4

Løs følgende ligninger.

1) $2x = 4$

2) $(-5 + 2)x + 3!x = 2x$

3) $5x + 2x = 21$

4) $\sqrt{x + 2} = 2$

5) $(x - 4)! = 24$

6) $2^x = 8$

7) $3 + 4 \cdot 2x = 11x$

8) $x^2 = 2x$

9) $\frac{x^2}{3} = x$

10) $\frac{x + x}{2} = 1$

Opgave 5

Udregn følgende brøker (forkort så meget som muligt). Brug Maple til at tjekke jeres svar

1) $\frac{6}{7} + \frac{3}{1}$

2) $\frac{7}{22} + \frac{9}{10}$

3) $\frac{4}{5} + \frac{3}{2}$

4) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

5) $2\frac{2}{3} + \frac{7+4}{2}$

6) $\frac{4}{\frac{5}{7}}$

7) $\frac{\frac{2}{3}}{6} - 2$

8) $\frac{-7 + \frac{2}{6}}{8} + \frac{9}{5}$

9) $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}$

10) $\frac{\frac{10}{3} - \frac{2}{4}}{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}}$

11) $\frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{10}}{\frac{2}{5} + \frac{11}{3}} - \frac{\frac{22}{3} + \frac{-23}{6}}{\frac{1}{2}}$

12) $\sqrt{\frac{16}{25}} + \left(\frac{3}{2+4}\right)^2$

13) $\sqrt{\frac{\frac{100}{36}}{\frac{25}{49}}}$

14) $\left(\frac{\sqrt{\frac{5}{7}}}{\sqrt{\frac{2}{9}}}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2+5}{3+11}\right)^3}{\left(\frac{5}{7-6}\right)^3}}$

Opgave 6

Forkort følgende brøker så meget som muligt.

$$1) \frac{ab}{a}$$

$$2) \frac{a+b}{b} + \frac{a-c}{a}$$

$$3) \frac{(a+b)b - ab}{b}$$

$$4) \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a^3}{b^3}$$

Opgave 7

Løs følgende ligninger.

$$1) \frac{x}{9} = \frac{4}{x}$$

$$2) \frac{x}{4 + \frac{2}{5}} = 2$$

$$3) \sqrt{\frac{x}{4}} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{16}{10}}{\frac{1}{2}}$$

$$4) \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} + \frac{x + \frac{4}{2}x}{2} = \frac{7}{\frac{1}{2}}$$