Vektorregning

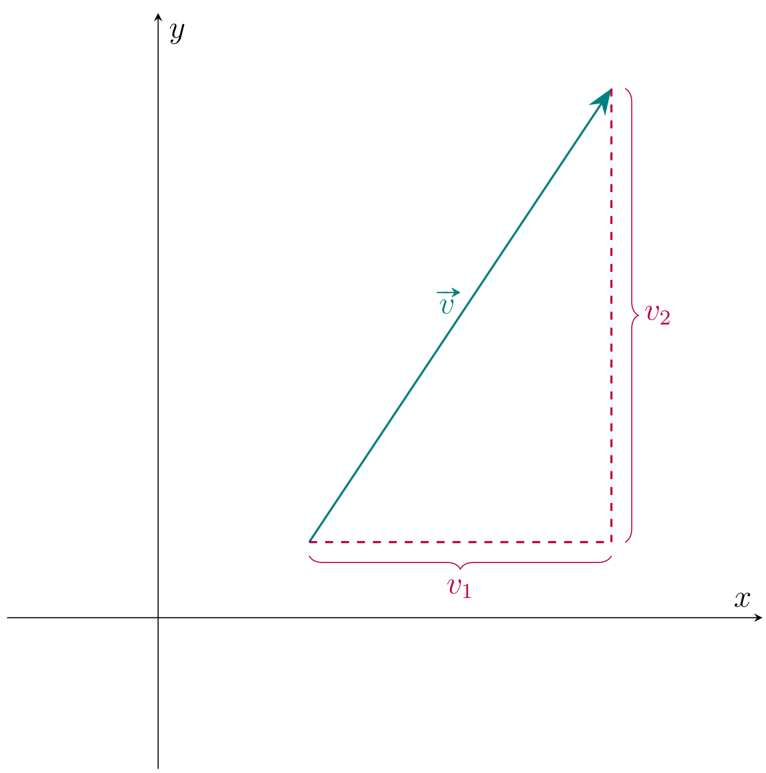
Vektorrepræsentation

Vi vil til at starte med definere, hvad vi mener med en vektor.

Definition 1.1 (Vektor)**.** En vektor $\vec{v}$ er et objekt med to koordinater v_1 og v_2, der begge er tal. Vi skriver vektoren op som

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

En vektor kan repræsenteres i et koordinatsystem som en pil. Vi vil typisk starte pilen i origo (husk, at origo er punktet $(0,0)$ i et koordinatsystem), men vi kan i princippet placere den hvor vi vil. På Figur 1 kan vi se, hvordan vi kan tegne en vektorrepræsentant.

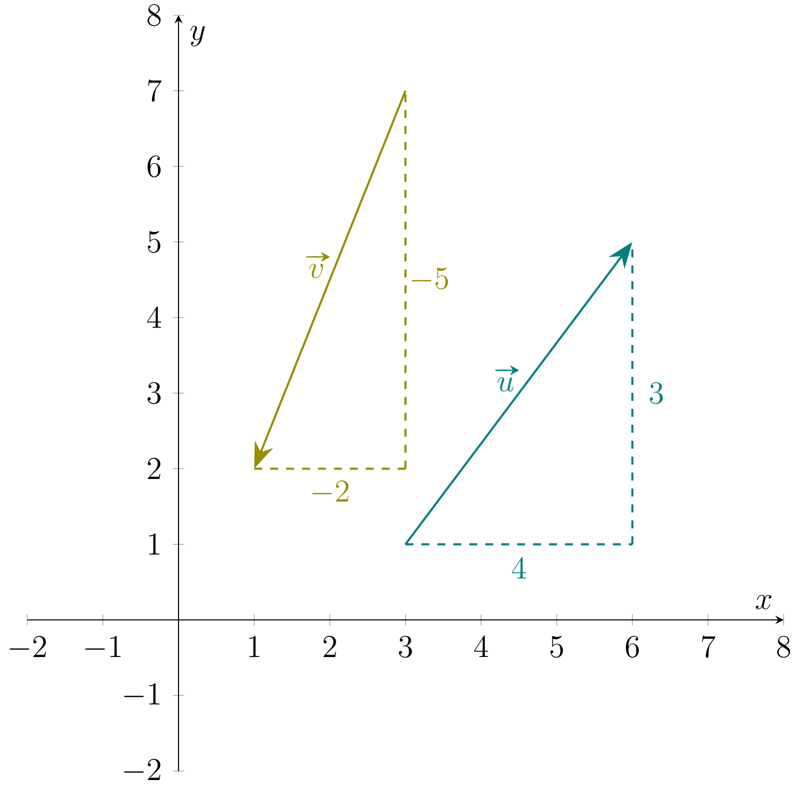


Figur 1: Repræsentant for en vektor

Eksempel 1.2. Vi har to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

På Figur 2 kan vi se en repræsentant for hver af disse vektorer

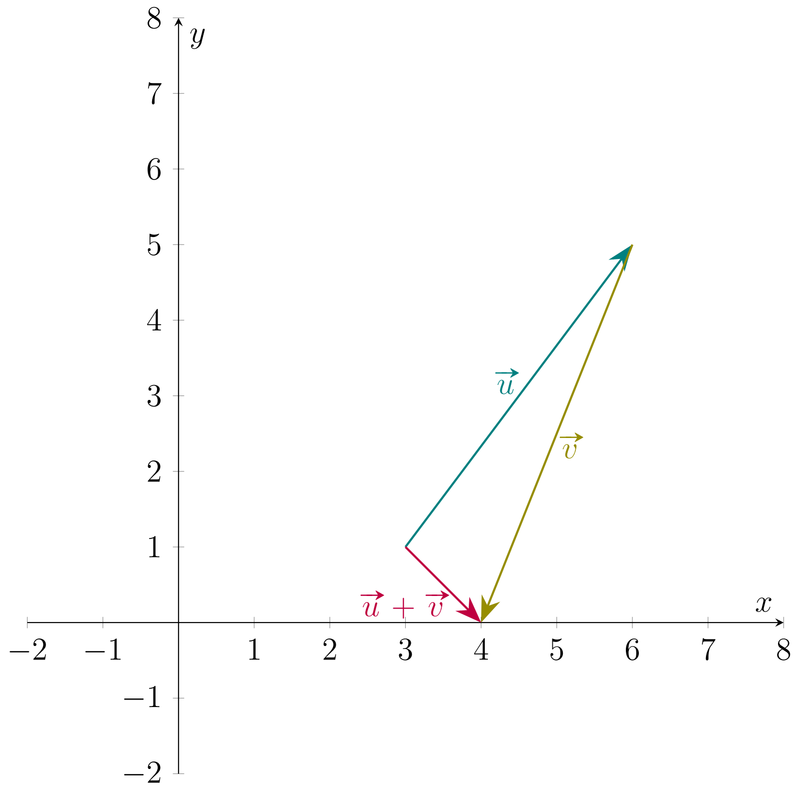


Figur 2: Repræsentanter for to vektorer

Sum, differens og skalering

Vi starter med at definere, hvordan vi geometrisk lægger to vektorer sammen. Hvis vi ønsker at lægge to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ sammen, så sætter vi deres repræsentanter i forlængelse af hinanden og danner en ny vektor $\vec{u} + \vec{v}$ fra begyndelsen af den første vektor til enden af den anden vektor.

Eksempel 2.1. Vi ønsker at lægge vektorerne $\vec{u}$ og $\vec{v}$ fra Eksempel 1.2 sammen. Vi sætter derfor vektorerne i forlængelse af hinanden som vi kan se på Figur 3



Figur 3: Sum af to vektorer

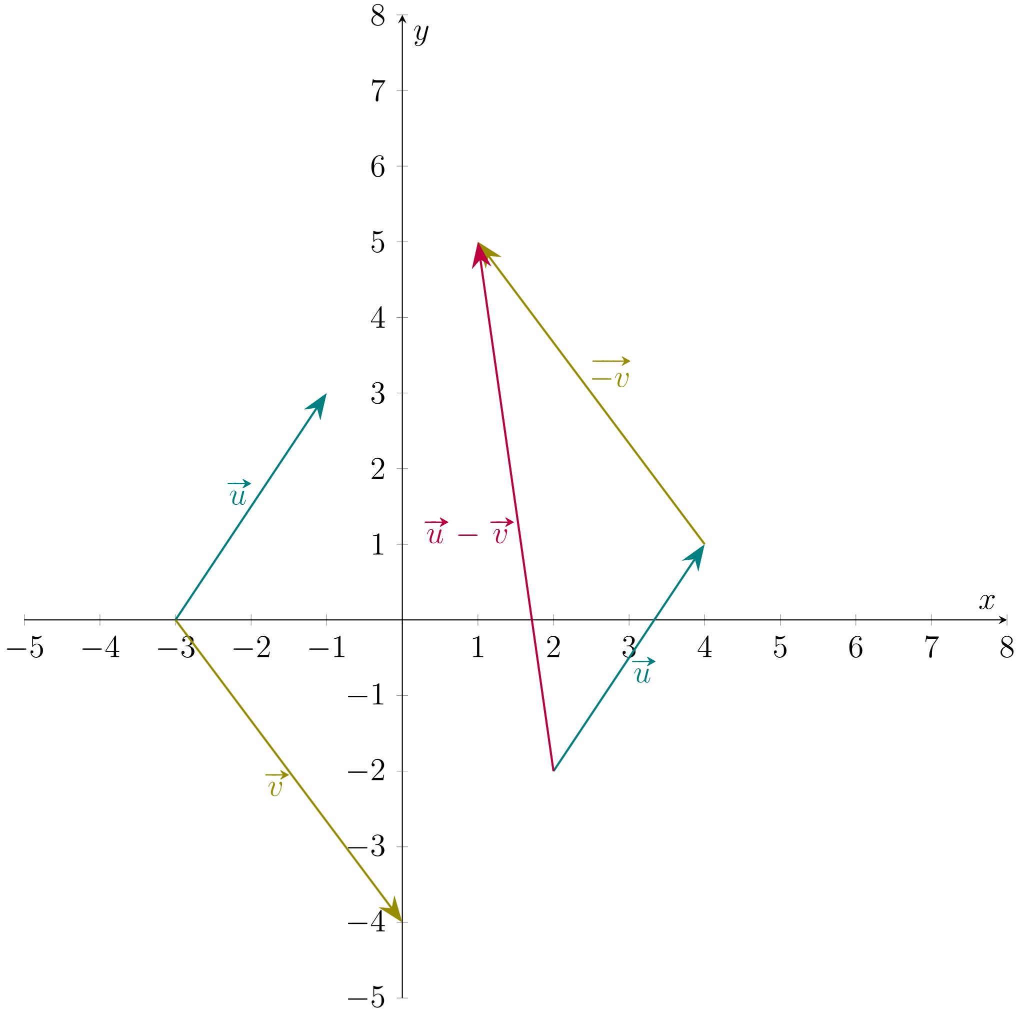
Skal vi trække en vektor $\vec{u}$ fra en vektor $\vec{v}$, så skal vi vende repræsentanten for $\vec{u}$ om og derefter lægge vektorerne sammen.

Eksempel 2.2. Har vi to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

På Figur 4 kan vi se, hvordan vi trækker $\vec{u}$ fra $\vec{v}$



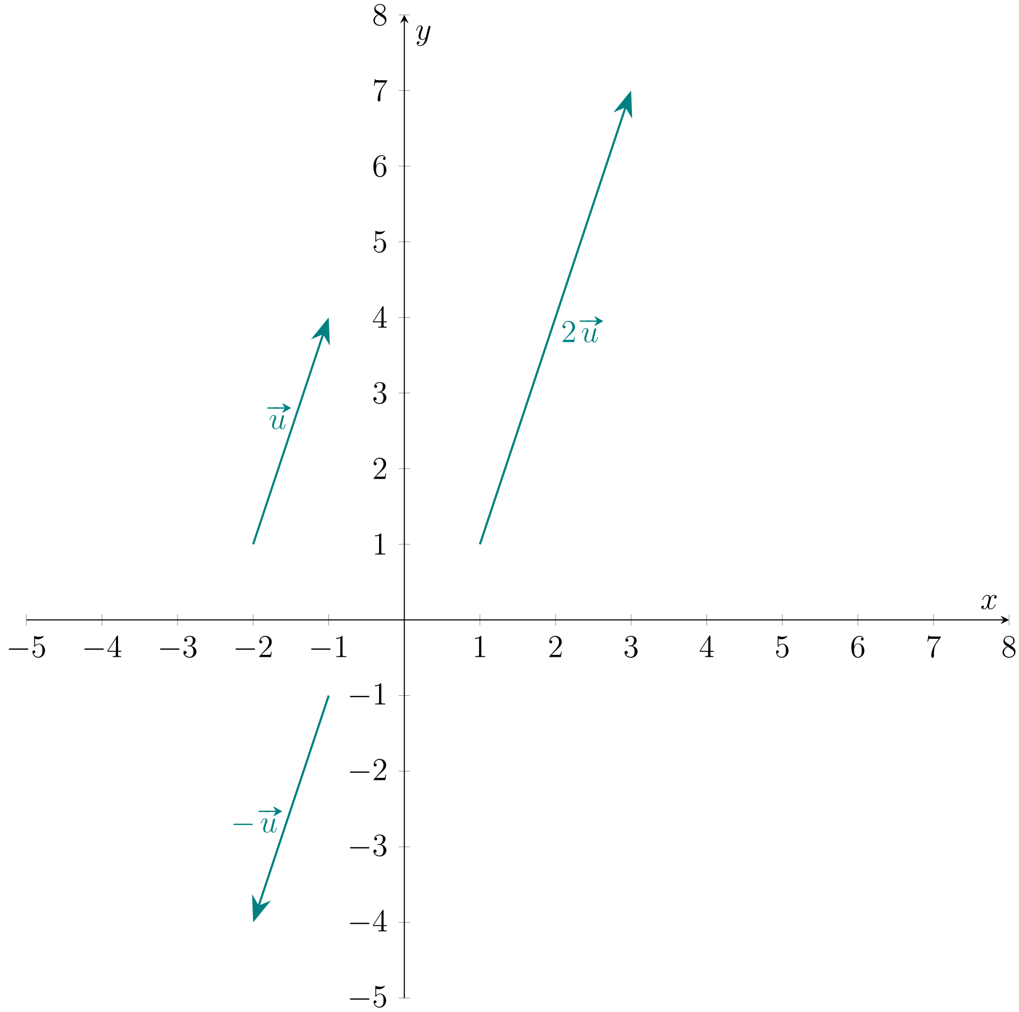
Figur 4: Differens af to vektorer

Ganger vi en vektor med et tal, så gør vi den tilsvarende længere.

Eksempel 2.3. En vektor $\vec{u}$ er givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

På Figur 5 kan vi se vektorerne $\vec{u}$, $2\vec{u}$ og $-\vec{u}$.



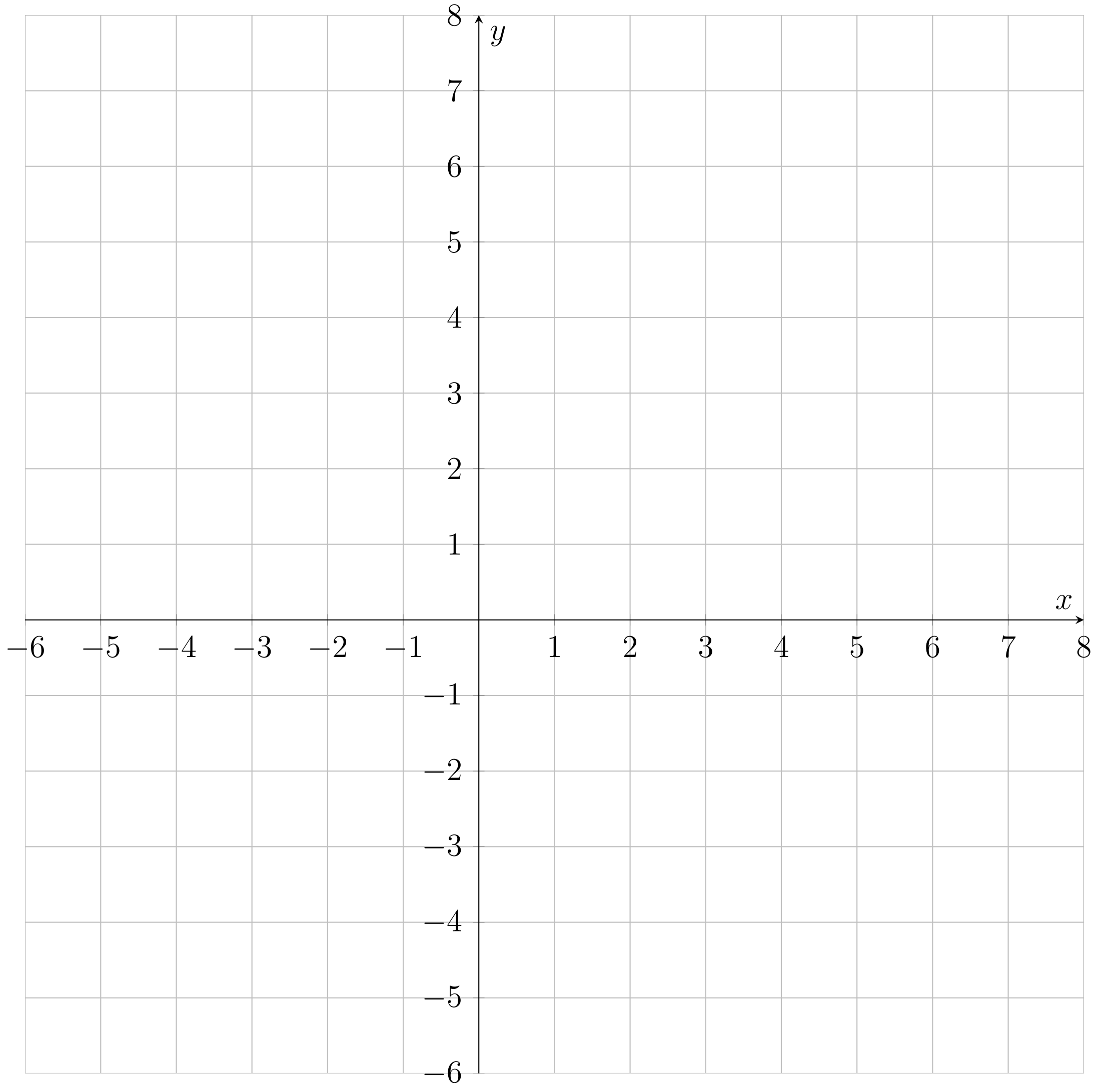
Figur 5: Skalering af vektorer

Opgave 1

Tegn følgende vektorer i koordinatsystemet

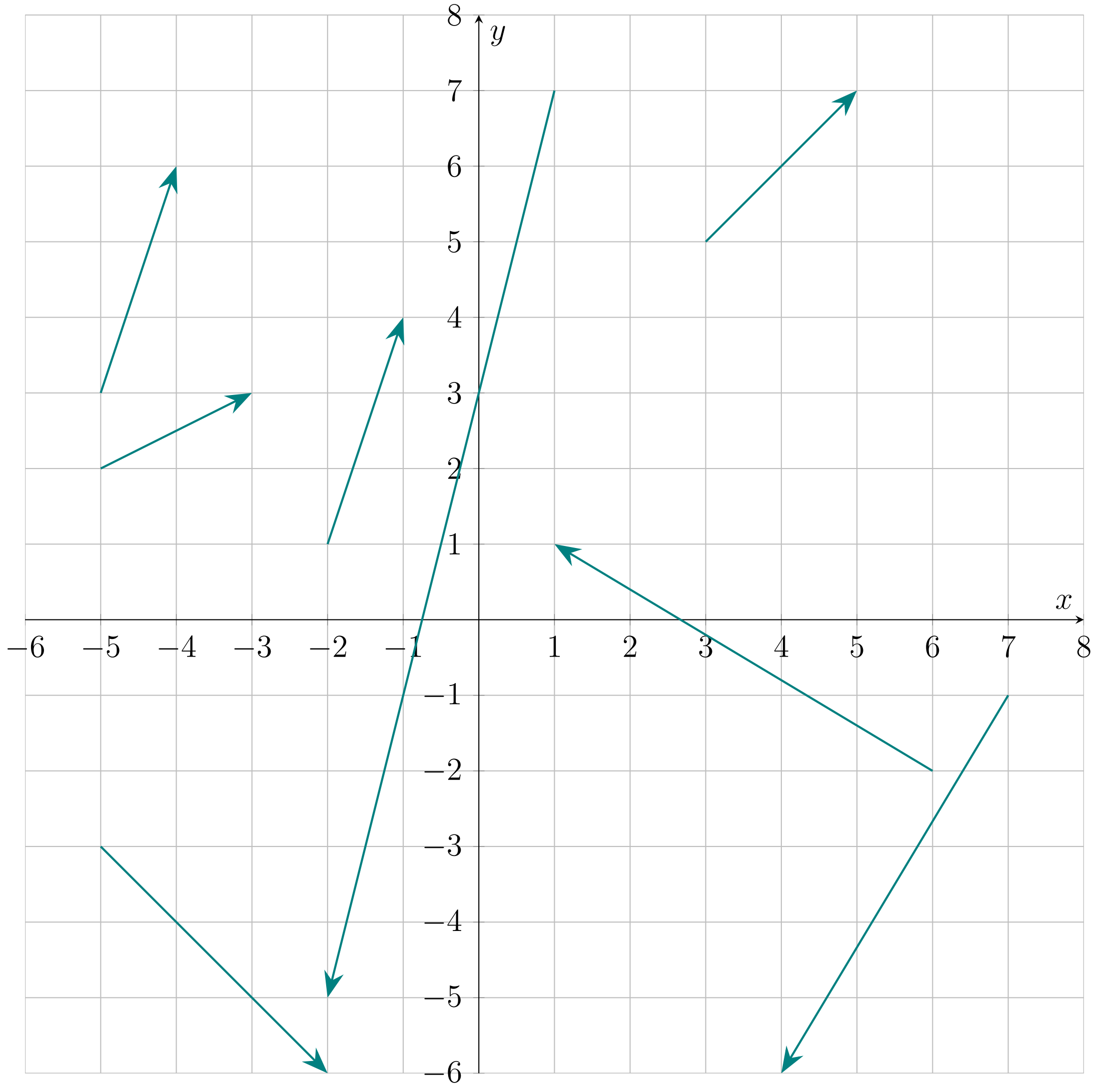
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Opgave 2

Aflæs koordinaterne for følgende vektorer

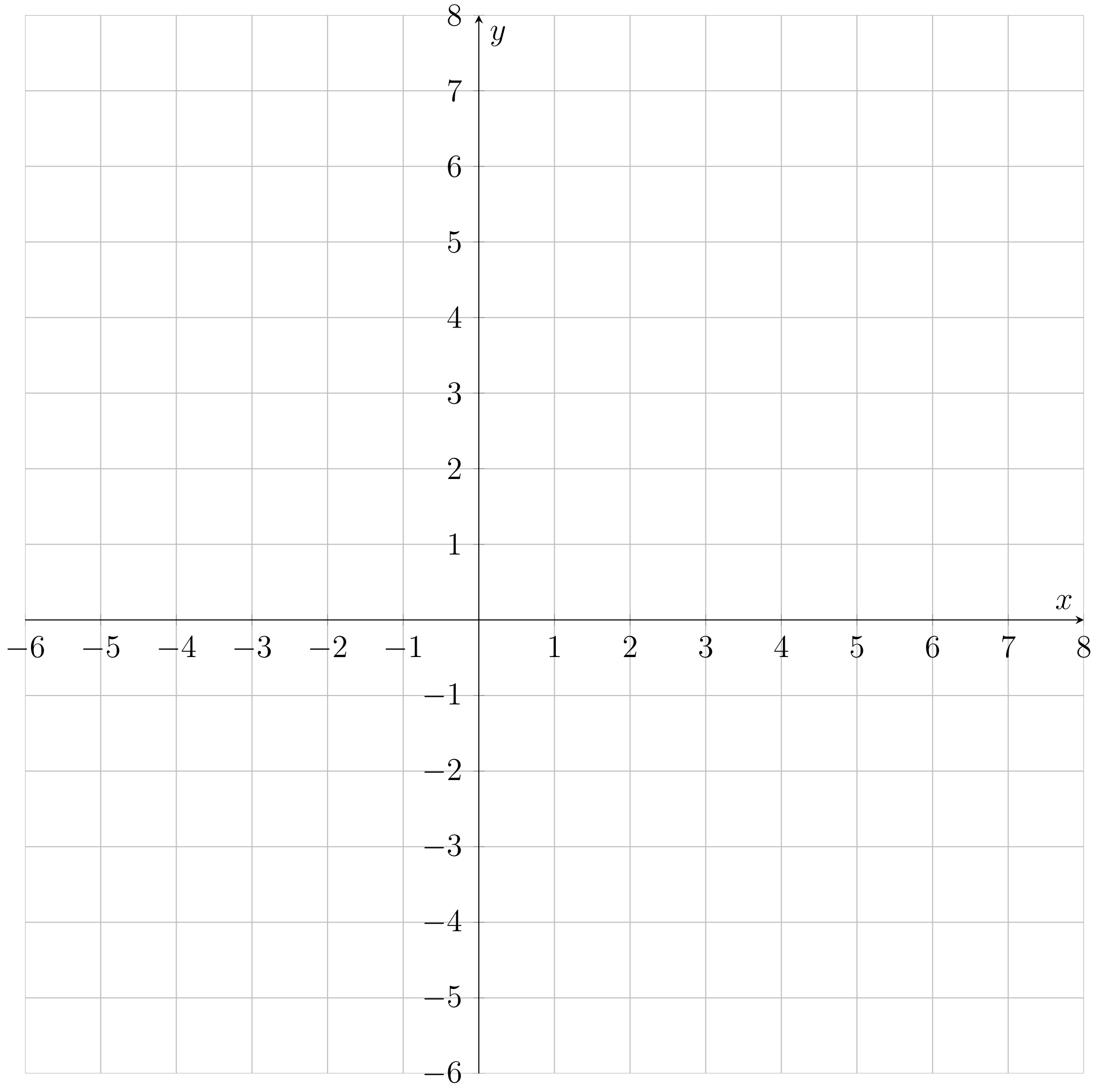


Opgave 3

Bestem følgende summer af vektorer ved at tegne dem på koordinatsystemet og aflæs derefter deres koordinater

$a)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b)\ \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $d)\ \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

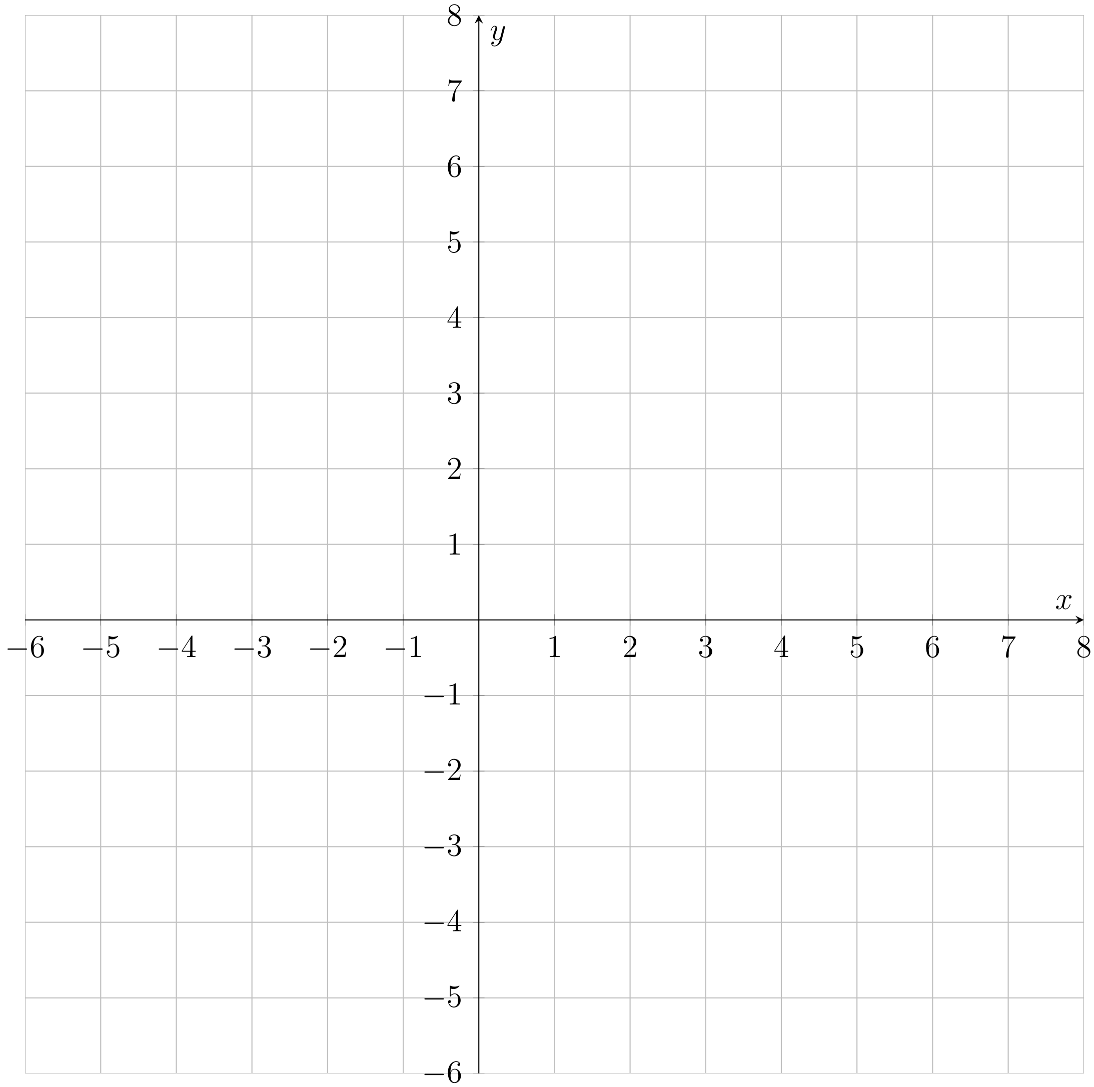


Opgave 4

Bestem følgende differenser af vektorer ved at tegne dem i koordinatsystemet og aflæs derefter deres koordinater

$$a)\ \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$$

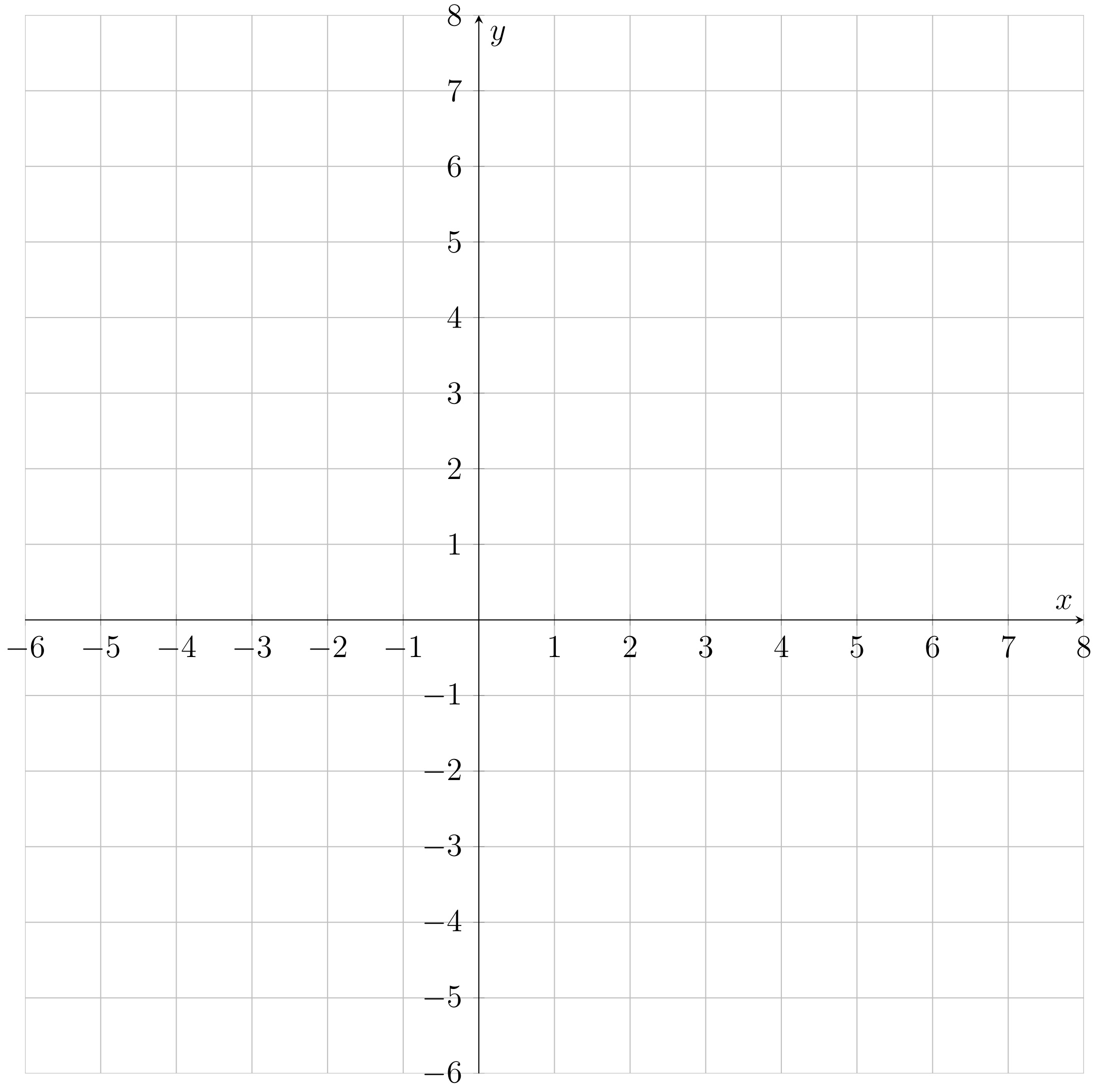


Opgave 5

For $\vec{u}$ og $\vec{v}$ givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

tegn da vektorerne $\vec{u}$, $\vec{v}$, $-\vec{u}$, $2\vec{u}$, $3\vec{v}$ og $-\vec{v}$ og aflæs deres koordinater



Opgave 6

Ved at betragte koordinaterne for summerne, differenserne og skaleringerne fra de tidligere opgaver, kan du så gennemskue, hvordan man laver disse operationer uden at tegne vektorerne men blot ved at anvende deres koordinater.

Opgave 7

Fire vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \end{pmatrix}$$

i) Bestem $4\vec{a}$.

ii) Bestem $\vec{a} + \vec{b}$.

iii) Bestem $2\vec{b} - \vec{c}$.

iv) Bestem $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

v) Bestem $-2\vec{d} - \vec{a}$.

vi) Bestem $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d}$.