Definitionsmængde og værdimængde samt renteformlen

Defitionsmængde og værdimængde

Når vi har med funktioner at gøre, så er det altid implicit, hvilke værdier vi kan vælge som x-værdier. Skal man være mere præcis, så skal vi, når vi introducerer funktioner, altid fortælle, hvad vi må vælge x til at være, samt hvad $f(x)$ kan være.

Definition 1.1 (Definitionsmængde)**.** *Definitionsmængden* for en funktion f, er den mængde, funktionen afbilder fra. Den består altså at de tal, vi må vælge x til at være i funktionsudtrykket $f(x)$. Vi skriver til tider $\mathrm{Dm}(f)$ for definitionsmængden. Definitionsmængden kaldes også for domænet.

Definition 1.2 (Værdimængde)**.** *Værdimængden* for en funktion f er den mængde, funktionen afbilder over i. Vi skriver til tider $\mathrm{Vm}(f)$ for værdimængden. Værdimængden kaldes også for billedmængden.

Eksempel 1.3. For funktionen $f(x) = 2x$ er $\mathrm{Vm}(f) = \mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R}$. Vi kan stoppe alle tal ind på x, og funktionen giver os reelle tal.

Eksempel 1.4. Funktionen $g(x) = x^2$ har $\mathrm{Dm}(g) = \mathbb{R}$, men $\mathrm{Vm}(g) = \mathbb{R}_{\geq 0}$, altså kun de ikke-negative tal.

Vi husker på, at potensfunktioner kun var defineret i første kvadrant. Der gælder derfor for potensfunktioner f, at $\mathrm{Dm}(f) = \mathrm{Vm}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Hvis vi mere eksplicit vil opskrive, hvad værdimængden og definitionsmængden for en funktion er, så skriver vi $f : \mathrm{Dm}(f) \to \mathrm{Vm}(f)$. Eksempelvis har vi, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = x^3.$$

1.1 Numerisk værdi

Definition 1.5. Funktionen $|x|$ kaldes for numerisk værdi, og er defineret som

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Renteformlen

Som det sidste emne i vækstforløbet skal vi se på opsparing og gæld. Det første vi skal introduceres for er renteformlen.

Definition 2.1. Renteformlen er givet ved

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n,$$

hvor K_0 er startkapitalen, r er rentefoden, n er antal terminer, og K_n er slutkapitalen.

Renteformlen skal forstås som følgende: Vi indsætter startkapital K_0 på en konto, der lover os p procent i rente per termin. Dette er eksponentiel vækst (men kun defineret, når $n \in \mathbb{N}$), og vi husker på, at vækstraten r tilsvarede den procentvise stigning per gået enhed. Derfor findes vækstraten som $r = \frac{p}{100}$, og dermed fremskriver vi med $a = r + 1$, hver gang der er gået en termin. Vi har altså, at kapitalen K_1 efter første termin må være

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100}) = K_0 \cdot (1 + r).$$

Vækstraten kaldes også for *rentefoden*, når vi taler om renteformlen. Tilsvarende vil renten efter n terminer være givet

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n.$$

Eksempel 2.2. Vi indsætter 20.000kr på en konto. Dette er vores startkapital. Vi får $p = 2\%$ i rente. Rentefoden er derfor givet $r = \frac{2}{100} = 0,02$, og renteformlen lyder i dette tilfælde

$$K_n = 20.000 \cdot (1,02)^n.$$

Skal vi bestemme, hvor meget der står på kontoen efter 10 år, skal vi bestemme

$$K_{10} = 20.000 \cdot (1,02)^{10}.$$

Skal vi bestemme hvornår der står 30.000 på kontoen skal vi løse ligningen

$$30.000 = 20.000 \cdot (1,02)^n,$$

hvilket vi kan gøre ved at bruge ln eller blot løse ligningen i Maple.

Opgave 1

Bestem definitionsmængde og værdimængde for følgende funktioner

1) x	2) $\sqrt{x}$
3) $10x^3$	4) $\ln(x)$
5) $\ln(x^2)$	6) x^4

Opgave 2

Funktionen $f(x) = \lceil x \rceil$ runder x op til nærmeste heltal. Hvad er værdimængden og definitionsmængden for f?

Opgave 3

Der indsættes 100.000 på en konto med en årlig rente på 3%.

i) Hvad står der på kontoen efter 5 år?

ii) Hvornår står der 110.000 på kontoen?

iii) Hvor længe går der, før pengene på kontoen er fordoblet?

iv) Hvad tilsvarer denne rente til i månedlig rente?

Opgave 4

På en konto får du 0% i rente på de første 100.000 kr. og en kvartalsvis rente på -1% i rente på alt derover. Vi indsætter 200.000 på kontoen.

i) Hvor meget står der på kontoen efter 10 år?

ii) Hvornår står der 150.000 på kontoen?

iii) Hvad er det mindste beløb, der kan stå på kontoen, hvis vi bare efterlader den?