

# Dobbelpunkter

## Dobbelpunkter for vektorfunktioner

Vi har set flere eksempler på vektorfunktioner hvis parameterkurver skærer gennem sig selv. Et sådant punkt, hvor dette forekommer kalder vi et dobbelpunkt, og vi skal se, hvordan vi finder disse punkter.

**Eksempel 1.1.** Lad os betragte vektorfunktionen  $\vec{r}$  givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 4t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Vi får at vide, at vektorfunktionen har et dobbelpunkt, når  $t = 2$ . Vi ønsker at bestemme den anden værdi for  $t$ , så vi også rammer dette punkt. Vi starter med at finde punktet.

$$\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 2^3 - 4 \cdot 2 \\ 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi skal derfor bestemme  $t$ , så vektorfunktionen rammer punktet  $P_t(0, 4)$ . Vi betragter derfor ligningen

$$t^2 = 4,$$

og får at den anden løsning må være  $t = -2$ . Dette indsættes for at verificere, og vi får

$$\vec{r}(-2) = \begin{pmatrix} (-2)^3 - 4(-2) \\ (-2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

og vi ved derfor, at vi har fundet det rigtige  $t$ .

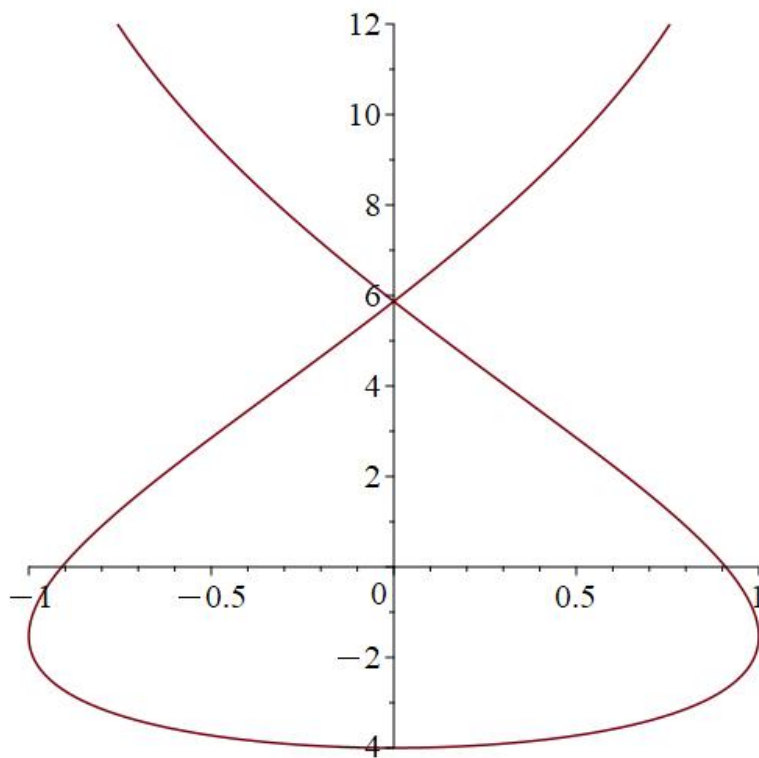
**Eksempel 1.2.** Vi ønsker at finde dobbelpunkter for vektorfunktionen  $\vec{r}$  givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t^4 - 4t^2 \end{pmatrix}.$$

Vi starter med at tegne parameterkurven for  $\vec{r}$ . Dette gøres ved at skrive følgende i Maple.

```
with(Gym):
r(t):=<t^2-2t,t^4-4t^2>
vektorPlot(r(t),t=-2..3)
```

Vi får så plottet, der kan ses på Fig. 1.



Figur 1: Parameterkurve for vektorfunktion med dobbeltpunkt

Det ser ud til at der er et dobbeltpunkt i  $(0,0)$ . Vi afgør dette ved at indføre en ny vektorfunktion  $\vec{v}$  givet ved

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} s^2 - 2s \\ s^4 - 4s^2 \end{pmatrix}.$$

Denne vektorfunktion er i princippet lig  $\vec{r}$ , men nu med en ny parameter  $s$ . Vi skal løse ligningen

$$\vec{r}(t) = \vec{v}(s).$$

Dette gøres i Maple ved at skrive følgende.

```
solve([t^2-2t=s^2-2s,t^4-4t^2=s^4-4s^2])
```

Dette giver os løsningen  $t = 2, s = 0$ , så dobbelpunktet findes altså når  $t = 0$  eller når  $t = 2$ . Dette indsættes i  $\vec{r}$  og vi får

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

og dobbelpunktet er altså i  $(0, 0)$  som forventet. Vi vil gerne bestemme vinklen mellem tangenterne i dobbelpunktet. Vi bestemmer derfor tangentvektorerne:

$$\vec{r}'(2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 2 \\ 4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Tilsvarende gøres for  $t = 0$ .

$$\vec{r}'(0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 2 \\ 4 \cdot 0^3 - 8 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi bestemmer vinklen mellem disse i Maple og får vinklen til at være  $97.1^\circ$ .

## Opgave 1 (Uden Maple)

i) En vektorfunktion  $\vec{r}$  er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - 8t \end{pmatrix}.$$

Den har et dobbelpunkt, når  $t = -4$ . Bestem det andet  $t$ , så  $\vec{r}$  rammer dette punkt

## Opgave 2

i) En vektorfunktion  $\vec{r}$  er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Parameterkurven for  $\vec{r}$  har et dobbelpunkt, når  $t = \pi$ . Bestem den anden værdi for  $t$ , der tilsvarende dette punkt.

- ii) En vektorfunktion  $\vec{r}$  er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Parameterkurven for  $\vec{r}$  har et dobbeltpunkt, når  $t = \pi$ . Bestem den anden værdi for  $t$ , der tilsvarende dette punkt.

- iii) En vektorfunktion  $\vec{r}$  er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t^2 - t + 3 \\ t^4 - 4t^3 + t^2 + 8t - 6 \end{pmatrix}.$$

Parameterkurven for  $\vec{r}$  har et dobbeltpunkt, når  $t = 1$ . Bestem den anden værdi for  $t$ , og bestem vinklen mellem tangentvektorerne i dette punkt.

### Opgave 3

- i) En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = (t^3 - 6t, t^2 - 5).$$

Tegn først  $\vec{r}$  og bestem derefter eventuelle dobbeltpunkter for  $\vec{r}$ .

- ii) En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = (\cos(t) + \sin(t), t^2 - 4).$$

Tegn først  $\vec{r}$  og bestem derefter eventuelle dobbeltpunkter for  $\vec{r}$ , når  $-5 < t < 5$ . Bestem desuden vinklen mellem tangentvektorerne i dette punkt.