Den naturlige logaritme og eksponentiel vækst

Den naturlige logaritme

Definition 1.1. Den naturlige logaritme er den entydige funktion ln, der opfylder, at

$$\ln(e^x) = x,$$

og

$$e^{\ln(x)} = x,$$

hvor e er Euler's tal. ($e \approx 2.7182$)

Funktionen e^x kaldes for den naturlige eksponentialfunktion, og vi vil senere beskrive den nærmere.

Sætning 1.2 (Regneregler for ln)**.** *For den naturlige logaritme* ln *gælder der for* $a, b > 0$, *og* $x \in \mathbb{R}$ *at*

i) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$,

ii) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$,

iii) $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Bevis.
Ad i): Vi betragter

$$\begin{aligned} \ln(a \cdot b) &= \ln(e^{\ln(a)} \cdot e^{\ln(b)}) \\ &= \ln(e^{\ln(a)+\ln(b)}) \\ &= \ln(a) + \ln(b). \end{aligned}$$

Ad ii):

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(\frac{e^{\ln(a)}}{e^{\ln(b)}}\right) \\ &= \ln\left(e^{\ln(a)-\ln(b)}\right) \\ &= \ln(a) - \ln(b). \end{aligned}$$

Ad *iii*):

$$\begin{aligned}\ln(a^x) &= \ln\left(\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right)\\ &= \ln\left(e^{x\ln(a)}\right)\\ &= x\ln(a).\end{aligned}$$

■

Eksponentiel vækst

Vi vil hovedsagligt bruge logaritmebegrebet i forbindelse med eksponentiel vækst.

Definition 1.3. Hvis vi har en sammenhæng $y = b \cdot a^x$ for konstanter a, b, så siges sammenhængen mellem x og y at være eksponentiel. En funktion f med forskriften

$$f(x) = b \cdot a^x$$

siges at være en eksponentiel funktion.

Eksponentiel vækst vokser ved at gange med fremskrivningsfaktoren a efter hver tidsenhed.

Eksempel 1.4. Lad os sige, at vi har en bakteriekoloni med ubegrænset næringsstof og plads, og lad os se på væksten af en enkelt bakterie i kolonien. Lad os sige, at den en gang per time deler sig i to. Så vil den efter 1 time være to bakterier, efter to timer være 4 bakterier, efter 3 timer være 8 bakterier osv. Efter hver time ganger vi altså bakterieantallet med 2. Antallet af bakterier B må derfor kunne beskrives som

$$B(t) = B_0 \cdot 2^t,$$

hvor t er tiden i timer, og B_0 er antallet af bakterier til tid $t = 0$, da $B(0) = B_0 2^0 = B_0$. Dette er eksponentiel vækst, da $a = 2$, og $b = B_0$.

Eksempel 1.5. Vi tager et lån i banken og låner 100000kr. Banken giver os en månedlig rente på 1%. Efter hver måned skal vi altså gange med $1,01$, og en model for mængden vi skylder, hvis vi ikke afdrager på lånet er

$$f(x) = 100.000 \cdot (1,01)^t,$$

hvor t er tiden efter vores lån i måneder. Efter 3 år vil vi derfor skylde

$$f(36) = 100.000 \cdot (1,01)^{36} \approx 143.000$$

Opgave 1

i) Hvad er pH-værdien for en opløsning med en H^+-koncentration på 10^{-10}?

ii) Hvad er H^+-koncentrationen for en opløsning med pH-værdi $7,5$?

iii) En opløsning har volumen $500L$ og indeholder 1 mol H^+. Hvad er pH-værdien af opløsningen?

Opgave 2

Løs følgende ligninger

1) $\ln(x) = 1$ 2) $\ln(x) = e$
3) $\ln(3x + 7) = 3$ 4) $\ln(x^2) = e^4$

Opgave 3

Bestem følgende:

1) $\ln(e)$ 2) $\ln(e^3)$
3) $\ln(\sqrt{e})$ 4) $\ln(\sqrt[5]{e^4})$

Opgave 4

i) En person låner 40000 som forbrugslån. Han skal betale 19% i årlig rente. Opstil en model for de penge han skylder som funktion af tiden målt i år, hvis han ikke afdrager på lånet. Hvornår skylder han 100.000?

ii) En radioaktiv isotop har en halveringstid på 2 sekunder, og vi starter med et kilo af isotopen. Opstil en model for massen af isotopen som funktion af tiden målt i sekunder. Hvornår er der 10 gram tilbage? Hvornår er der 0?

Opgave 5

i) Bevis, at $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

ii) Bevis, at $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

iii) Bevis, at $\ln(a^x) = x\ln(a)$.