

Beregning af sandsynligheder

Sandsynlighed for udfald af normalfordelte stokastiske variable

Skal vi bestemme sandsynligheden for et udfald for en normalfordelt stokastisk variabel skal vi bruge fordelingsfunktionen. Vi husker på, hvordan fordelingsfunktionen er defineret først:

Definition 1.1 (Tætheds- og fordelingsfunktion). En normalfordelt stokastisk variabel

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

med middelværdi μ og spredning σ har sandsynlighedsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

og fordelingsfunktion

$$P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx.$$

Eksempel 1.2. Særligt når $\sigma = 1$ og $\mu = 0$ giver os den standardnormalfordelte stokastiske variabel X . Denne har tæthedsfunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

og fordelingsfunktion

$$P(X \leq a) = \Phi(a) = \int_{-\infty}^a \varphi(x) dx.$$

Bemærk, at vi ud fra tæthedsfunktionen af standardnormalfordelingen kan konstruere en generel tæthedsfunktion, thi

$$\frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = f(x).$$

Eksempel 1.3. Lad $X \sim N(10, 5)$. Vi ønsker at bestemme sandsynligheden for, at

$$P(3 \leq X \leq 7).$$

Vi bruger fordelingsfunktionen for normalfordelingen og får i Maple

$$F(7) - F(3) \approx 0.2.$$

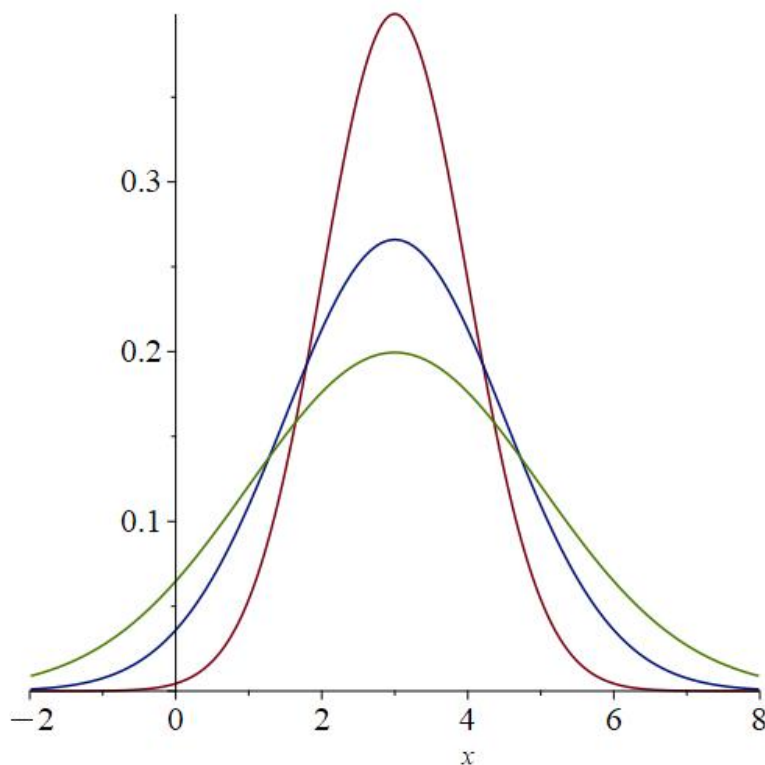
Opgave 1 (Med Maple)

Lad $X \sim N(100, 10)$.

- i) Bestem $P(X < 50)$.
- ii) Bestem $P(100 < X)$.
- iii) Bestem $P(80 < X < 120)$.

Opgave 2 (Uden Maple)

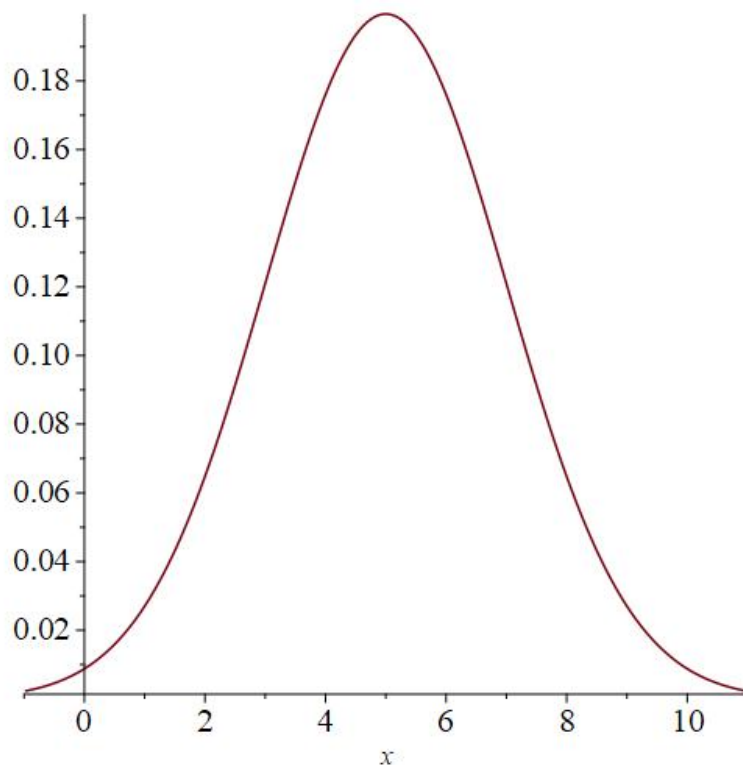
Følgende grafer er Gauss-kurver for tre normalfordelte stokastiske variable med samme middelværdi.



- i) Hvad er middelværdien for de tre stokastiske variable?
- ii) Hvilken stokastisk variabel har størst og mindst spredning?

Opgave 3 (Uden Maple)

En normalfordelt stokastisk variabel X har følgende Gauss-kurve som tæthedsfunktion.



Den har middelværdi $\mathbb{E}[X] = 5$. Det oplyses, at der for tæthedsfunktionen f på figuren gælder, at

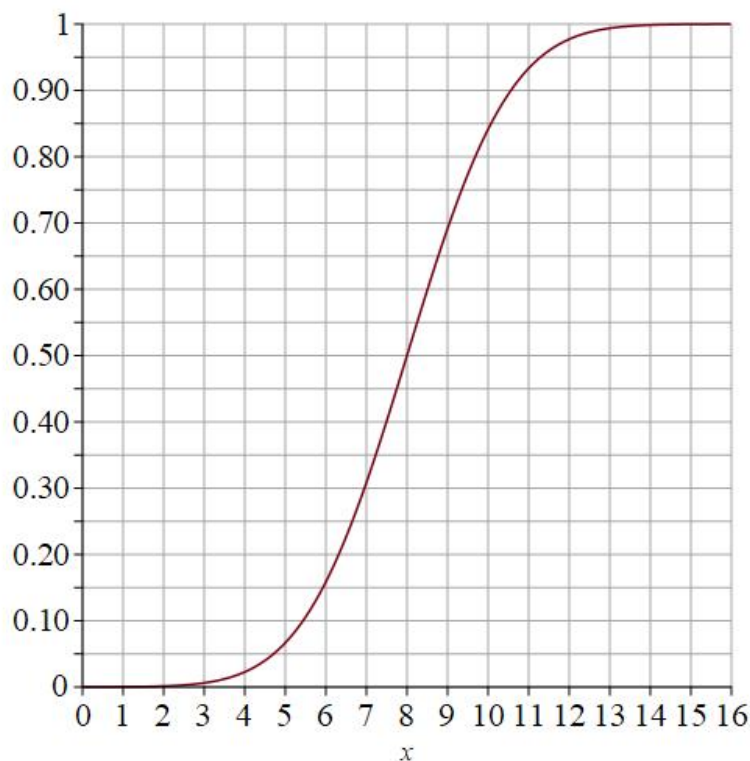
$$\int_2^5 f(x)dx = 0.433.$$

Brug dette til at bestemme følgende sandsynligheder

- i) $P(2 < X < 8)$.
- ii) $P(X < 2)$.
- iii) $P(5 < X)$.
- iv) $P(8 < X)$.
- v) $P(X = 5)$.

Opgave 4 (Uden Maple)

En fordelingsfunktion for en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$ ser ud som følgende.



- i) Bestem middelværdien μ .
- ii) Bestem $P(X < 7)$.
- iii) Bestem $P(6 < X < 10)$.
- iv) Bestem $P(9 < X)$.
- v) Bestem et 95%-konfidensinterval for middelværdien μ . (Dette giver i princippet ikke mening, men humour me).

Opgave 5 (Med Maple)

I en bestemt pose lakridser er antallet af lakridser normalfordelt med middelværdi 103.5 og spredning 2.12.

- i) Bestem sandsynligheden for, at der i en pose er mindre end 99 lakridser.

- ii) Bestem sandsynligheden for, at der i en pose er mellem 102 og 105 lakridser.

Opgave 6 (Uden Maple)

Her er tre tæthedsfunktioner og deres tilhørende fordelingsfunktioner for tre normalfordelte stokastiske variable med samme middelværdi og forskellig spredning.

