Vækst af eksponentialfunktioner

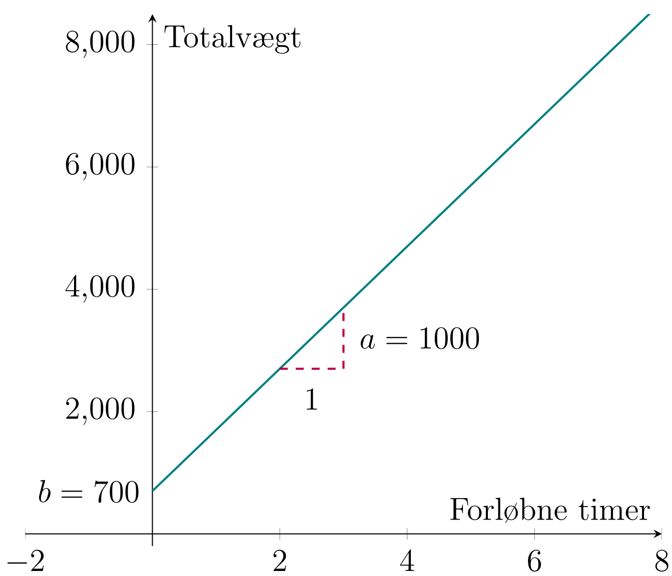
Vækst af lineære funktioner

Da vi arbejdede med lineær vækst så vi, at den øgedes ved at lægge hældningen a til funktionsværdien hver gang vi øgede x-værdien med 1.

Eksempel 1.1. En container fyldes med sand. Containeren vejer 700kg og den fyldes med 1000kg sand i timen. Denne situation kan beskrives ved den lineære funktion f givet ved

$$f(x) = 1000x + 700,$$

hvor x betegner antal forløbne timer og f er totalvægten af containeren. Tegner vi denne model får vi



Figur 1: Totalvægt af container

Vi kan også beskrive dette ved en tabel. Tabel 2 beskriver funktionen f.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	700	1700	2700	3700	4700	5700	6700	7700	8700

Figur 2: Totalvægt af container

Procentvis vækst

Vi så sidst, at vi for at øge en størrelse S med en fast procent p skulle multiplicere S med $(1 + \frac{p}{100})$. Skal vi eksempelvis øge 120 med 10 procent bestemmer vi

$$120 \cdot 1.10 = 132.$$

Ønsker vi at øge 120 med 10 procent to gange, så øger vi blot 132 med 10 procent igen. Så får vi

$$132 \cdot 1.10 = 145.2.$$

Eksempel 1.2. En bestemt plantes vægt vokser med 10 % om ugen. Vi ønsker at opstille en lignende tabel som Tabel 2, men med plantens vægt. Vi skal nu være opmærksomme på, at vi nu skal gange med 1.10 hver gang der går en uge. Lad os sige, at planten vejer 200g i begyndelsen. Resultatet kan ses af Tabel 3.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	200	220	242	266	293	322	354	390	429

Figur 3: Vægt af plante

Ud fra dette eksempel vil vi definere begrebet eksponentialfunktion.

Definition 1.3 (Eksponentialfunktion)**.** Lad $a, b > 0$. Så definerer vi en funktion f på formen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

til at være en *eksponentialfunktion* med *begyndelsesværdi* b og *fremskrivningsfaktor* a.

Det er ikke svært at se, hvorfor b kaldes for begyndelsesværdien thi

$$f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b.$$

Eksempel 1.4. Lad os betragte delingen af en bakterie. Vi starter med 1 bakterie, der efter én time er 2 bakterier, efter 2 timer er 4 bakterier, efter 3 timer er 8 bakterier osv. Denne situation kan beskrives ved eksponentialfunktionen $f(x)$ givet ved

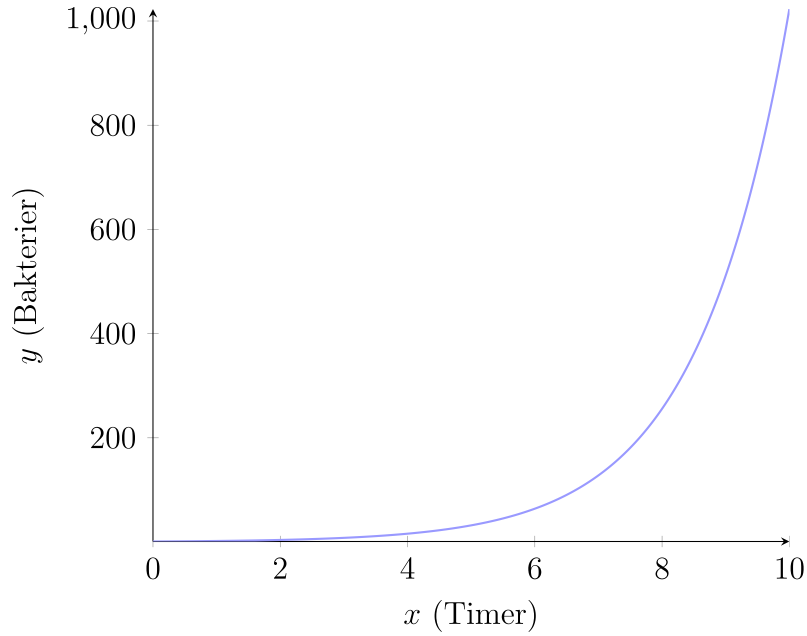
$$f(x) = 2^x.$$

De første 10 funktionsværdier kan ses af Fig. 4

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Figur 4: De første ti funktionsværdier af f, der beskriver antallet af bakterier.

På Fig 5 kan grafen for f ses.



Figur 5: Antal bakterier som funktion af tiden

Inspriret af Eksempel 1.4 vil vi se på, hvordan eksponentiel vækst udvikler sig. Vi husker på, at en eksponentialfunktion f kan skrives på formen

$$f(x) = b \cdot a^x.$$

Ser vi på Fig. 4, så kan vi se, at vi i det tilfælde øger $f(x)$ med en faktor 2, når vi øger x med 1. Tilsvarende vil vi øge generel eksponentiel vækst med en faktor a, når vi øger x med 1. Faktoren a kaldes for fremskrivningsfaktoren. Vi kan se dette fænomen af Fig. 6

$$\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\overset{+1}{\curvearrowright}} \\
x & x+1 \\ \hline
f(x) & af(x) \\
\multicolumn{2}{c}{\underset{\cdot a}{\curvearrowright}}
\end{array}$$

Figur 6: Udvikling af eksponentiel vækst.

Det er ikke svært at vise, at dette rent faktisk er sandt. Betragter vi

$$f(x+1) = ba^{x+1} = ba^x a = af(x),$$

så ses det, at eksponentialfunktioner har en sådan udvikling.

Definition 1.5 (Vækstrate og fremskrivningsfaktor)**.** For en eksponentialfunktion f givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x$$

kaldes a for *fremskrivningsfaktoren.* Vi definerer desuden *vækstraten* r som

$$r = a - 1.$$

Opgave 1

En person får en timeløn på 130 kr. Han får hvert år en lønstigning på 20kr i timen. Udfyld følgende tabel, der beskriver vedkommenes timeløn efter x år

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
 & \multicolumn{1}{c}{} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} \\
x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
f(x) & 130 & & & & & & & & \\
 & \multicolumn{1}{c}{} & \underset{+20}{\curvearrowright} & \underset{+20}{\curvearrowright} & & & & & &
\end{array}$$

i) Brug tabellen til at bestemme personens timeløn efter 6 år

ii) Bestem en funktionsforskrift for f der beskriver personens løn efter x år.

Opgave 2

En person får om måneden 30000 i løn. Vedkommende får årligt en lønstigning på 4%. Udfyld følgende tabel, der beskriver vedkommenes månedsløn efter x år

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
 & \multicolumn{1}{c}{} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} & \overset{+1}{\curvearrowright} \\
x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
f(x) & 30000 & & & & & & & & \\
 & \multicolumn{1}{c}{} & \underset{\cdot 1.04}{\curvearrowright} & \underset{\cdot 1.04}{\curvearrowright} & & & & & &
\end{array}$$

i) Hvad er personens månedsløn efter 7 år?

ii) Hvordan noterer vi, at vi har ganget med det samme tal flere gange? Hvad skal vil gange 30000 med, hvis vi gerne vil bestemme personens månedsløn efter 10 år?

iii) Har du en idé til, hvordan forskriften for funktionen, der beskriver personens løn efter x år kunne se ud? Hvis ikke, så går du bare videre.

iv) Tallet 1.04 kaldes for *fremskrivningsfaktoren*. Hvad ville fremskrivnings- faktoren være, hvis personens løn skulle stige med 2% om året?

v) Hvad ville fremskrivningsfaktoren være, hvis personens løn skulle falde med 2% om året?

vi) Kan du gennemskue, hvad der skal gælde om fremskrivningsfaktoren, hvis personens løn skal vokse?

vii) Kan du gennemskue, hvad der skal gælde om fremskrivningsfaktoren, hvis personens løn skal aftage?

Opgave 3

I en opløsning findes en bakteriekoloni, der hvert døgn tredobles i antal. Der er i starten af kolonien 200 bakterier.

i) Hvad skal antallet af bakterier ganges med hver gang der er gået ét døgn?

ii) Udfyld en tabel med antallet af bakterier efter de første 6 døgn.

iii) Udregn hvor mange procent antallet af bakterier stiger fra dag 2 til dag 3 samt fra dag 3 til dag 4? Giver det mening?

Opgave 4

i) En eksponentialfunktion f er givet ved

$$f(x) = 1.3 \cdot 0.97^x.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for f. Afgør desuden hvor mange procent f stiger/falder med, hvis x øges med 1.

ii) En eksponentialfunktion f er givet ved

$$f(x) = 1 \cdot 2^x.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for f. Afgør desuden hvor mange procent f stiger/falder med, hvis x øges med 1.

iii) En eksponentialfunktion f er givet ved

$$f(x) = 9 \cdot 1.34^x.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for f. Afgør desuden hvor mange procent f stiger/falder med, hvis x øges med 1.

iv) En eksponentialfunktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot 5^x.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for f. Afgør desuden hvor mange procent f stiger/falder med, hvis x øges med 1.

Opgave 5

a) En eksponentialfunktion f er givet ved

$$f(x) = 6.7 \cdot 1.3^x.$$

i) Bestem $f(4)$.

ii) Bestem $f(-3)$.

b) En eksponentialfunktion g har begyndelsesværdi 7 og fremskrivningsfaktor 0.7.

i) Opskriv forskriften for g.

ii) Bestem $g(7)$.

Opgave 6

i) Udfyld følgende tabel og opskriv derefter forskriften for eksponentialfunktionen f.

ii) Undersøg, om du har udfyldt tabellen korrekt ved at bestemme $f(10)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	5.43										

Opgave 7

i) Lad f være givet ved

$$f(x) = 5 \cdot 1.7^x.$$

Hvor mange procent øges f med, hvis x øges med 2?

ii) Lad f være givet ved

$$f(x) = b \cdot 0.77^x.$$

Det oplyses, at $f(4) = 6.01$. Bestem $f(8)$.

iii) Lad f være givet ved

$$f(x) = 9.99 \cdot 1.05^x.$$

Hvor meget skal x øges med før f fordobles?

Opgave 8

Hver gang vi folder et stykke papir, så vil antallet af papirlag fordobles. Antallet af lag kan beskrives af en eksponentialfunktion

$$f(x) = b \cdot a^x.$$

i) Hvad er begyndelsesværdien og fremskrivningsfaktoren for f?

ii) Hvor mange lag har et stykke papir, hvis det er foldet 7 gange?

iii) Forestil dig, at du kan folde papiret lige så mange gange du har lyst. Hvor tykt er papiret, hvis du har foldet det 25 gange?

iv) Hvis ét lag papir er 0.1mm tykt, hvor tykt er dette stykke foldede papir?

v) Hvor mange gange skal vi folde papiret, for at det bliver 1km tykt?

Opgave 9

i) En bakteriekoloni indeholder til tid $t = 0$ $B_0 = 100.000$ bakterier. En bakterie deler sig i gennemsnit 1 gang per 4. time, og bakteriekolonien har ubegrænset plads. Beskriv antallet af bakterier som funktion af tiden i timer. Hvor mange bakterier er der i kolonien efter et døgn? Hvornår er der 1 mia. (10^9) bakterier i kolonien?

ii) Et glas vand stilles i et rum, og temperaturen i vandet antages at kunne beskrives ved

$$H(t) = 70 \cdot (0.97)^t,$$

hvor $H(t)$ beskriver temperaturen i grader celcius og t betegner tiden i minutter. Hvor varmt er vandet, når det stilles ind i rummet? Hvor varmt er det efter 5 minutter? Hvor varmt er der i rummet i følge modellen.

Opgave 10

i) Bevis, at hvis vi øger x med 2 i en eksponentialfunktion $f(x)$, så tilsvarer dette at øge $f(x)$ med en faktor a^2. Hvad hvis vi øger x med 3?

ii) Bevis, at hvis vi øger x med n i en eksponentialfunktion $f(x)$, så tilsvarer dette at øge $f(x)$ med en faktor a^n.