

# Kvadratkomplettering og cirkels ligning

Vi husker fra sidst, at en cirkel med centrum i  $(x_0, y_0)$  og radius  $r$  har ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (1.1)$$

Hæver vi parenteserne i denne ligning, så får vi

$$x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + y^2 + y_0^2 - 2yy_0 = r^2, \quad (1.2)$$

og cirkels ligning vil ofte optræde på denne form. Kvadratkomplettering går ud på at få en ligning fra formen (1.2) tilbage på formen (1.1), så radius og centrum kan aflæses.

**Eksempel 1.1.** En cirkel har ligningen

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 4.$$

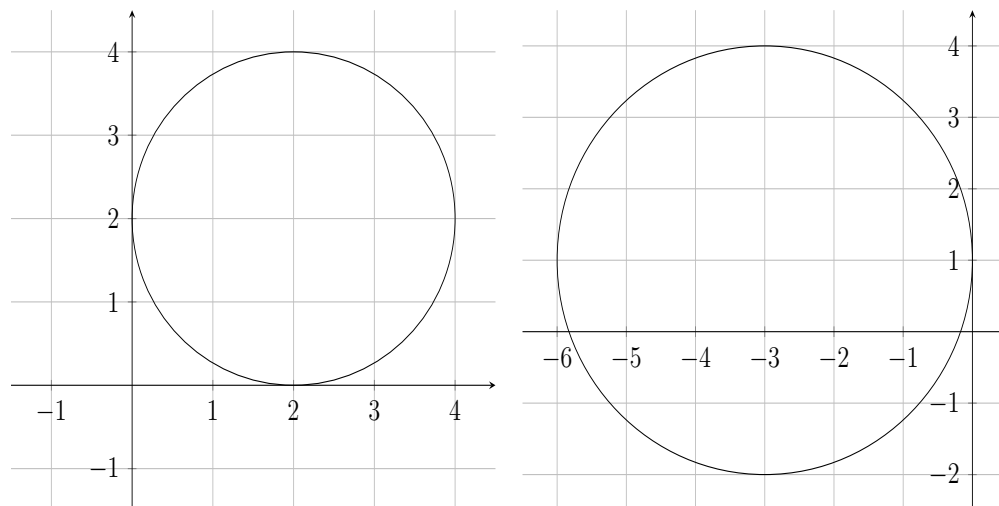
Vi ser, at vi har leddene  $x^2$  og  $-2xx_0 = -2x$  samt  $y^2$  og  $-2yy_0 = -4y$ . Derfor kan vi se, at  $x_0 = 1$  og  $y_0 = 2$ . Ifølge (1.2) skal vi have  $x_0^2$  og  $y_0^2$  på venstresiden af lighedstegnet, så det lægges til i cirkels ligning:

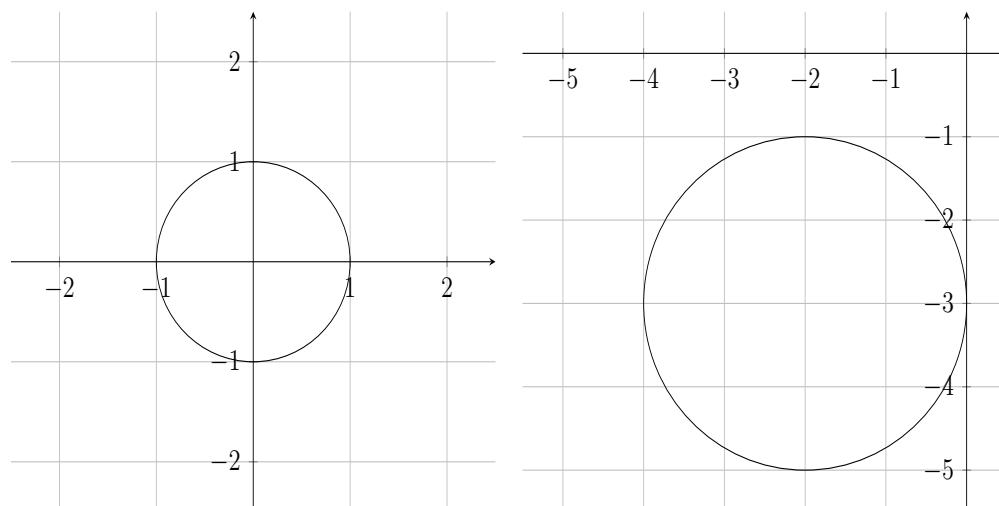
$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 + 4 = 4 + 1 + 4 = 9.$$

Da ligningen nu er på formen (1.2), så kan vi se, at cirklen har centrum i  $(1, 2)$  og radius  $\sqrt{9} = 3$ .

## Opgave 1

Bestem cirkels ligning for følgende cirkler og omskriv dem til formen (1.2).





## Opgave 2

- i) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = -9.$$

- ii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 + 6y = -1.$$

- iii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 8x + y^2 + 2y = 8.$$

- iv) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 10x + y^2 - 12y = 3.$$

- v) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 + 4x + y^2 + 14y = 47.$$

## Opgave 3

- i) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$(x - 4)^2 + y^2 - 6y = 27.$$

- ii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 + 4x + (y - 3)^2 = 21.$$

- iii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 14x + (y + 5)^2 = 0.$$