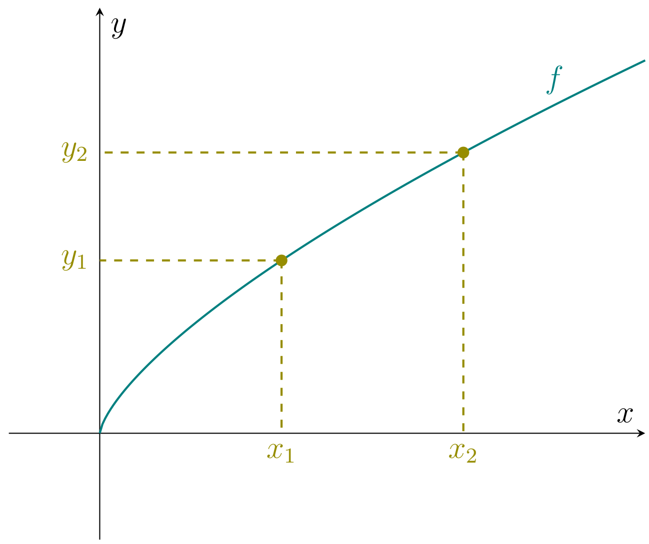
Topunktsformlen for potensfunktioner og potensvækst

Topunktsformlen for potensfunktioner

Som det var tilfældet med både lineære funktioner og eksponentialfunktioner, så er det også muligt at finde en entydig potensfunktion, der går gennem to givne punkter. Vi kan se situationen på Figur 1.



Figur 1: Graf for potensfunktion f med to punkter på grafen.

Formlen for denne kalder vi for topunktsformlen for potensfunktioner.

Sætning 1.1 (Topunktsformlen for potensfunktioner)**.** *Lad* (x_1, y_1) *og* (x_2, y_2) *være to punkter i første kvadrant. Så er der en entydig potensfunktion* f*, der skærer gennem disse punkter givet ved*

$$f(x) = b \cdot x^a.$$

Konstanterne a *og* b *er givet ved henholdsvist*

$$a = \frac{\log_{10}(y_2) - \log_{10}(y_1)}{\log_{10}(x_2) - \log_{10}(x_1)}$$

og

$$b = \frac{y_1}{x_1^a}.$$

Bevis. Fremgangsmåden er tilsvarende den, vi anvendte, da vi skulle udlede topunktsformlen for eksponentialfunktion. Vi antager derfor, at potensfunktionen f givet ved

$$f(x) = b \cdot x^a$$

går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2). Vi må så have, at

$$y_1 = b \cdot x_1^a \text{ og}$$
$$y_2 = b \cdot x_2^a.$$

Vi bestemmer nu forholdet mellen de to y-værdier:

$$\begin{aligned}\frac{y_2}{y_1} &= \frac{b \cdot x_2^a}{b \cdot x_1^a} \\ &= \frac{x_2^a}{x_1^a} \\ &= \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a.\end{aligned}$$

Vi kan nu isolere a ved hjælp af titalslogaritmen $\log_{10}(x)$. (I princippet kunne vi også bruge enhver anden logaritme - det ville ingen forskel gøre.):

$$\begin{aligned}\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a &\Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \log_{10}\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a\right) = a\log_{10}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_{10}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log_{10}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = a \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_{10}(y_2) - \log_{10}(y_1)}{\log_{10}(x_2) - \log_{10}(x_1)} = a,\end{aligned}$$

og vi har nu bestemt a. For at bestemme b udnytter vi igen, at

$$y_1 = b \cdot x_1^a \Leftrightarrow b = \frac{y_1}{x_1^a}.$$

■

Eksempel 1.2. Lad os betragte et eksempel. Vi ønsker at finde den potensfunktion, der går gennem punkterne $(2, 16)$ og $(3, 36)$. Vi bruger topunktsformlen til først at bestemme a.

$$a = \frac{\log(36) - \log(16)}{\log(3) - \log(2)} = 2.$$

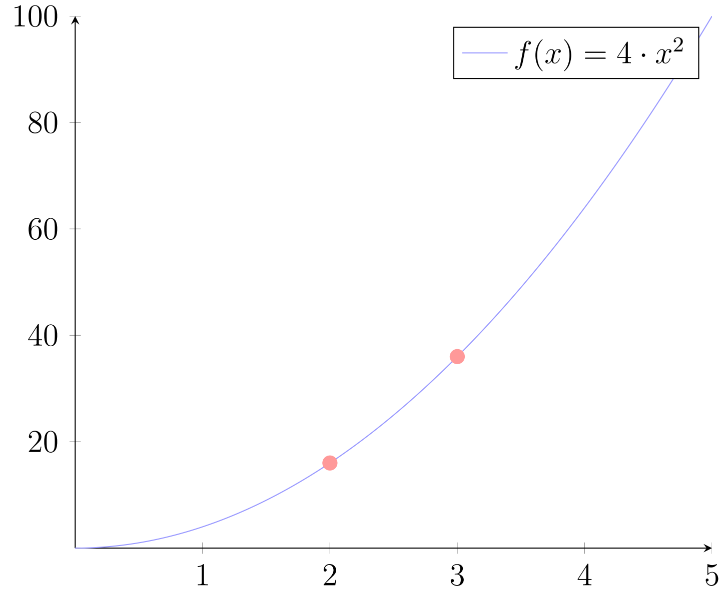
Dette bestemmes med CAS-værktøj som eksempelvist Maple. Vi bestemmer nu b:

$$b = \frac{16}{2^2} = \frac{16}{4} = 4.$$

Potensfunktionen, der går gennem punkterne $(2, 16)$ og $(3, 36)$ er derfor bestemt ved

$$f(x) = 4 \cdot x^2.$$

På Fig. 2 ses funktionen $f(x)$ samt de to punkter.



Figur 2: Topunktsformlen anvendt på de to punkter $(2, 16)$ og $(3, 36)$.

Opgave 1 (Med Maple)

i) Brug topunktsformlen til at bestemme den potensfunktion, der går gennem punkterne $(0.5, 1)$, og $(1.5, 1.5)$.

ii) Brug topunktsformlen til at bestemme den potensfunktion, der går gennem punkterne $(1, 1)$ og $(2, 2)$.

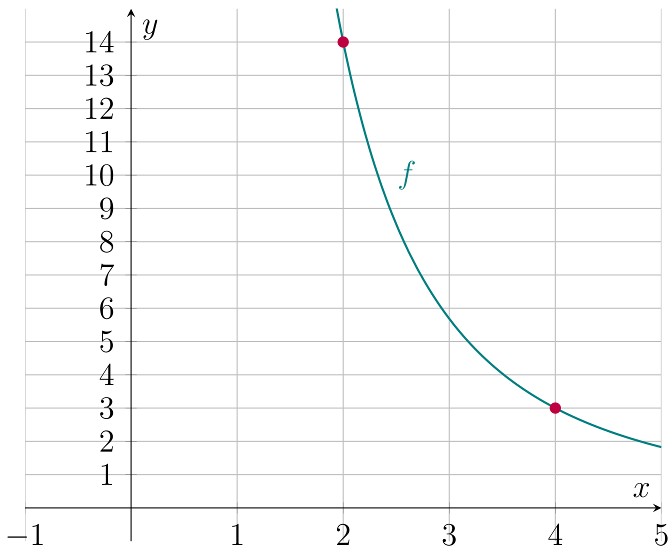
iii) Grafen for en potensfunktion f skærer gennem punkterne $(1, 4)$ og $(2, 9)$. Bestem forskriften for f

iv) Grafen for en potensfunktion g skærrer gennem punkterne $(3, 10)$ og $(5, 2)$. Bestem forskriften for g.

v) En potensfunktion h opfylder, at $h(4) = 15$ og $h(10) = 2$. Bestem forskriften for h.

Opgave 2 (Med Maple)

På Figur 3 kan grafen for en potensfunktion f ses.



Figur 3: Graf for potensfunktion f.

i) Bestem en forskrift for f ved at bruge topunnktsformlen for potensfunktioner

ii) Bestem $f(3)$ og undersøg, om dette passer med Figur 3.

iii) Løs ligningen $f(x) = 12$.

Opgave 3 (Med Maple)

1. Potensfunktionen $f(x) = 2 \cdot x^a$ går gennem punktet $(2, 18)$. Brug dette til at bestemme a.

2. Potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^1$ går gennem punktet $(3, 3)$. Brug dette til at bestemme b.

Opgave 4 (Med Maple)

Det antages, at bremselængden som funktion af hastigheden for en bil er en potenssammenhæng. For en bestemt bil er bremselængden ved 80km/t på 27.4 meter. Ved hastigheden 95km/t er bremselængden 38.7 meter.

i) Bestem en potensfunktion der beskriver bremselængden for bilen som funktion af tiden.

ii) Hvad vil bremselængden være for en bil, der kører 130km/t?

iii) Hvor stærkt skal man køre, hvis bremselængden skal være på 200m?

Opgave 5 (Bevis)

Vi skal besvise topunktsformlen for potensfunktioner. Vi bruger følgende delopgaver til at nå gennem beviset.

i) Lav en tegning som på Figur 1 og opskriv forskriften for en potensfunktion f.

ii) Indsæt de to punkter i forskriften for f, som vi har gjort i begge topunktsformelbeviser fra tidligere for at få et udtryk for y_1 og et udtryk for y_2

iii) Dividér udtrykket for y_2 med udtrykket for y_1. Er der noget, der kan forkortes ud?

iv) Brug regnereglen

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

til at omskrive jeres udtryk.

v) Tag nu titalslogaritmen af begge sider af lighedstegnet.

vi) Anvend regnereglen

$$\log_{10}(a^x) = x\log_{10}(a)$$

til at omskrive jeres udtryk.

vii) Isolér a i udtrykket.

viii) Anvend til sidst regnereglen

$$\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{10}(a) - \log_{10}(b)$$

til at omskrive udtrykket. Sammenlign jeres udtryk for a med det fra sætningen.

ix) Betragt udtrykket for y_1 fra punkt ii) og isolér b i dette udtryk.

x) Sæt en lille, sort firkant, læn dig tilbage og fryd dig.