Funktioner

Definitionsmængde og dispositionsmængde

Vi har indtil nu hovedsagligt betragtet funktioner som noget, vi kan beskrive med et funktionsudtryk à la $f(x) = 2x+1$ eller $g(x) = x^2$. Funktioner er mere generelle end det, og vi vil komme lidt nærmere på, hvad funktioner er for en størrelse. Vi vil arbejde med følgende "intuitive definition": For to mængder A og B definerer vi en funktion som en entydig tildeling af elementer i B til ethvert element i A. Vi noterer i så fald funktionen f som $f : A \to B$.

Definition 1.1 (Definitionsmængde og dispositionsmængde/codomæne)**.** Lad A og B være to mængder, og lad $f : A \to B$ være en funktion. Så kaldes A for *definitionsmængden/domænet for f* og B kaldes for *dispositionsmængden/codomænet for f.*

Eksempel 1.2. Vi har funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

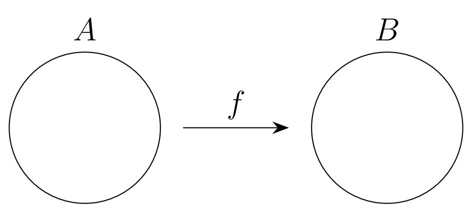
$$f(x) = x^2,$$

som har $\mathbb{R}$ som både definitionsmængde og codomæne.

Eksempel 1.3. Lad mængden N bestå af alle navne i 3.e. Vi definerer så funktionen $f : N \to \mathbb{N}$ som funktionen, der giver alderen på en person i 3.e. Vi vil så have eksempelvis

$$f(\text{Lærer-Christian}) = 26.$$

Vi kan også tænke på funktioner som diagrammer som set på Fig. 1.



Figur 1: Funktionsdiagram for funktionen f.

Codomænet for en funktion kan godt bestå af en større mængde en det, som vores funktion rent faktisk kan "ramme"- det er ikke altid trivielt at bestemme, hvad en funktion helt præcist rammer i codomænet. Til at indkapsle denne idé introducerer vi begrebet *værdimængde/billedmængde*.

Definition 1.4 (Værdimængde)**.** For en funktion $f : A \to B$ kaldes mængden $\mathrm{Vm}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$ for værdimængden for f. Den består af de elementer, f kan ramme.

Eksempel 1.5. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = x^2$$

har værdimængde $\mathrm{Vm}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$, da den kan ramme alle positive reelle tal.

Eksempel 1.6. Lad U bestå af mængden af alle lange videregående uddannelser, og lad funktion $l : U \to \mathbb{R}$ være funktionen, der tager en uddannelse og giver gennemsnitsbruttoindkomsten efter afsluttet uddannelse. Så vil funktionen give os eksempelvis

$$l(\text{Samfundsfag}) = 660.500.$$

Værdimængden for denne funktion vil være

$$\mathrm{Vm}(l) = [267.200, 1.383.200].$$

Til slut har vi *billedet* og *urbilledet* for mængder.

Definition 1.7 (Billede og urbillede)**.** Lad $f : A \to B$ være en funktion, og lad $K \subseteq A$ være en delmængde af A. Så kalder vi mængden

$$f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$$

for billedet af K under f. Lad tilsvarende $L \subseteq B$. Så kaldes mængden

$$\{x \in A \mid f(x) \in K\}$$

for urbilledet af L under f.

Eksempel 1.8. Lad $K = [1, 2] \subseteq \mathbb{R}$, og lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = 2x + 1.$$

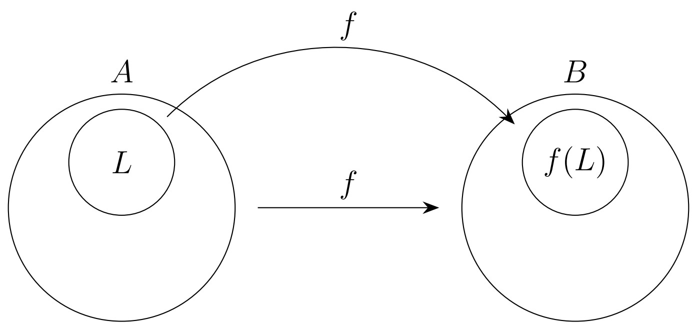
Så er billedet af K under f givet ved mængden

$$f([1, 2]) = [3, 5].$$

Lader vi tilsvarende $L = [-2, 0] \subseteq \mathbb{R}$, så vil urbilledet af L under f være givet ved mængden

$$[-1.5, -0.5].$$

Et diagram, der illustrerer billedet af en mængde under en funktion kan ses på Fig. 2.



Figur 2: Funktionsdiagram for funktionen f.

Opgave 1

i) Bestem værdimængden for funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = x^3.$$

ii) Bestem værdimængde for funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = |x|.$$

iii) Bestem værdimængden for funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \lfloor x \rfloor,$$

der runder alle tal ned til nærmeste heltal.

iv) Bestem værdimængden for funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ givet ved

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

v) Bestem værdimængden for funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = x^4.$$

vi) Bestem værdimængen for funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

vii) Bestem værdimængden for funktionen f fra Eksempel 1.3.

Opgave 2

Vi husker på, at det kartesiske produkt $A \times B$ af to mængder A og B er defineret ved

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Bestem værdimængden for funktionen $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Opgave 3

i) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = x + 4.$$

Bestem billedet af følgende delmængder af $\mathbb{R}$ under f:

1) $\{1, 2, 4\}$ 2) $[0, 5]$
3) $\emptyset$ 4) $\{20\}$

ii) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1.$$

Bestem billedet af følgende delmængder af $\mathbb{R}$ under f (det kan være en fordel at plotte f):

1) $[3, 8]$ 2) $\{1, \dots, 8\}$;
3) $\emptyset$ 4) $[-2, 2]$;

iii) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ være givet ved

$$f(x) = \lceil x \rceil + 2.$$

Bestem billedet af følgende delmængder af $\mathbb{R}$ under f:

1) $[-4, 5]$ 2) $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 1.85\}$
3) $[0, 1]$ 4) $\{1, 2, 3, 4\}$

Opgave 4

Lad l være funktionen fra Eksempel 1.6. Bestem billedet af mængden

$$\{\text{Medicin, Tandlæge, Erhvervsøkonomi}\}.$$

Lønstatistik kan findes her.

Opgave 5

i) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = x - 5.$$

Bestem urbilledet af følgende mængder under f:

1) $[9, 12]$
2) $\{2\}$
3) $\{-4, -2, -1\}$
4) $\emptyset$

ii) Lad $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ være givet ved

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Bestem urbilledet af følgende mængder under f:

1) $\{2\}$
2) $[0, 4]$
3) $\{1, 3, 4, 5, 6\}$
4) $[8, 16]$

iii) Lad f være funktionen fra Eksempel 1.3. Bestem urbilledet af følgende mængder:

1) $[0, 15]$
2) $\{18\}$
3) $[17, 30]$
4) $\{17, 19\}$

iv) Lad l være funktionen fra Eksempel 1.6. Bestem urbilledet af mængden $[700.000, 1.000.000]$.