Monotoniforhold for koordinatfunktionerne

Monotoniforhold

Vi kan bestemme monotoniforholdene for koordinatfunktionerne x og y for en vektorfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t). \end{pmatrix}$$

Dette gøres nøjagtigt som da vi bestemte monotoniforhold for differentiable funktioner af én variabel i 2.g. Fortolkningen er også mere eller mindre analog.

Hvis $y'(t) > 0$, så bevæger partiklen sig opad på grafen.
Hvis $y'(t) < 0$, så bevæger partiklen sig nedad på grafen.
Hvis $x'(t) > 0$, så bevæger partiklen sig til højre på grafen.
Hvis $x'(t) < 0$, så bevæger partiklen sig til venstre på grafen.

Eksempel 1.1. Vi ønsker at bestemme monotoniforholdene for vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t + 6 \\ t^4 - 2t^2 \end{pmatrix}$$

Vi bestemmer de afledede af koordinatfunktionerne og sætter dem lig 0.

$$x'(t) = 2t - 1 = 0$$

, så $t = 0.5$. Tilsvarende for $y(t)$.

$$y'(t) = 4t^3 - 4t = 0,$$

så $t = 0$, $t = 1$ eller $t = -1$. Vi bestemmer desuden hældningerne mellem toppunkterne:

$$x'(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1,$$

og

$$x'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

Vi har derfor monotoniforholdene for x:

$$\begin{aligned} &x(t) \text{ er aftagende for } t \in (-\infty, 0.5], \\ &x(t) \text{ er voksende for } t \in [0.5, \infty). \end{aligned}$$

Tilsvarende bestemmer vi hældningerne for $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(-2) &= 4(-2)^3 - 4(-2) = -24, \\ y(-0.5) &= 4(-0.5)^3 - 4(-0.5) = 1.5, \\ y(0.5) &= 4(0.5)^3 - 4(0.5) = -1.5, \\ y(2) &= 4(2)^2 - 4(2) = 24. \end{aligned}$$

Derfor lyder monotoniforholdene for y:

$$\begin{aligned} &y(t) \text{ er aftagende for } t \in (-\infty, -1], \\ &y(t) \text{ er voksende for } t \in [-1, 0], \\ &y(t) \text{ er aftagende for } t \in [0, 1], \\ &y(t) \text{ er voksende for } t \in [1, \infty). \end{aligned}$$

Opgave 1

Bestem monotoniforholdene for koordinatfunktionerne for følgende funktioner. Tegn parameterkurverne i Maple og undersøg, at du har fundet de korrekte monotoniforhold.

1) $\vec{r} = \begin{pmatrix} t-4 \\ t^2-2 \end{pmatrix}$

2) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ t-7t^4 \end{pmatrix}$

3) $\vec{r} = \begin{pmatrix} t^2-t-1 \\ t^4-t^3-t^2-t-1 \end{pmatrix}$

4) $\vec{r} = \begin{pmatrix} t^6-t \\ t^3+t \end{pmatrix}$

5) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3t^2-2t \\ 4t^3-3t^2 \end{pmatrix}$

6) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 3t-2 \end{pmatrix}$