Logaritmer

Titalslogaritmen

Logaritmer er en slags omvendte funktioner til eksponentialfunktioner. Vi ser primært på logaritmer for to eksponentialfunktioner $f(x) = 10^x$ og $g(x) = e^x$. Princippet er, at vi gerne vil have en funktion, der - når vi stopper $f(x)$ ind i funktionen - så giver den x. Vi definerer derfor følgende.

Definition 1.1. Vi definerer titalslogaritmefunktionen $\log_{10}(x)$, som den entydige funktion, der opfylder, at

$$\log_{10}(10^x) = x$$

og

$$10^{log_{10}(x)} = x.$$

Vi vil typisk udelade 10-tallet og blot skrive $\log(x)$.

Eksempel 1.2. Der gælder, at $\log(100) = 2$, da

$$\log(100) = \log(10^2) = 2.$$

Eksempel 1.3. Der gælder, at $\log(10000) = 4$, da

$$\log(10000) = \log(10^4) = 4.$$

Den naturlige logaritme

Definition 2.1. Den naturlige logaritme er den entydige funktion ln, der opfylder, at

$$\ln(e^x) = x,$$

og

$$e^{\ln(x)} = x,$$

hvor e er Euler's tal. ($e \approx 2.7182$)

Funktionen e^x kaldes for den naturlige eksponentialfunktion.

Sætning 2.2 (Regneregler for log.)**.** *For titalslogaritmen* $\log_{10} = \log$ *gælder der for* $a, b > 0$*, at*

1. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.
2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$.
3. $\log(a^x) = x\log(a)$.

Bevis. Ad *i*):

$$\begin{aligned}\log(a \cdot b) &= \log(10^{\log(a)} \cdot 10^{\log(b)}) \\ &= \log(10^{\log(a)+\log(b)}) \\ &= \log(a) + \log(b).\end{aligned}$$

Ad *ii*):

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log\left(\frac{10^{\log(a)}}{10^{\log(b)}}\right) \\ &= \log(10^{\log(a)-\log(b)}) \\ &= \log(a) - \log(b).\end{aligned}$$

Ad *iii*):

$$\begin{aligned}\log(a^x) &= \log((10^{\log(a)})^x) \\ &= \log(10^{x\log(a)}) \\ &= x\log(a).\end{aligned}$$

■

Sætning 2.3 (Regneregler for ln)**.** *For den naturlige logaritme* ln *gælder der for* $a, b > 0$*, at*

i) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$,

ii) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$,

iii) $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Opgave 1

Løs følgende ligninger

1) $\log(x) = 1$	2) $\log(x) = 2.5$
3) $\log(2x) = 4$	4) $\log(3x + 10) = 3$
5) $\log(x^2) = 10$	6) $\log(5x) = 5$

Opgave 2

Bestem følgende

1) $\log(\sqrt{10})$
2) $\log(\sqrt[3]{100})$
3) $\log(\sqrt[n]{1000})$
4) $\log(2) + \log(50)$
5) $\log(200) - \log(20)$
6) $\log(2 \cdot 10^5)$

Opgave 3

Løs følgende ligninger

1) $\ln(x) = 1$
2) $\ln(x) = e$
3) $\ln(3x + 7) = 3$
4) $\ln(x^2) = e^4$

Opgave 4

Bestem følgende:

1) $\ln(e)$
2) $\ln(e^3)$
3) $\ln(\sqrt{e})$
4) $\ln(\sqrt[5]{e^4})$

Opgave 5

i) Bevis, at $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

ii) Bevis, at $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

iii) Bevis, at $\ln(a^x) = x\ln(a)$.