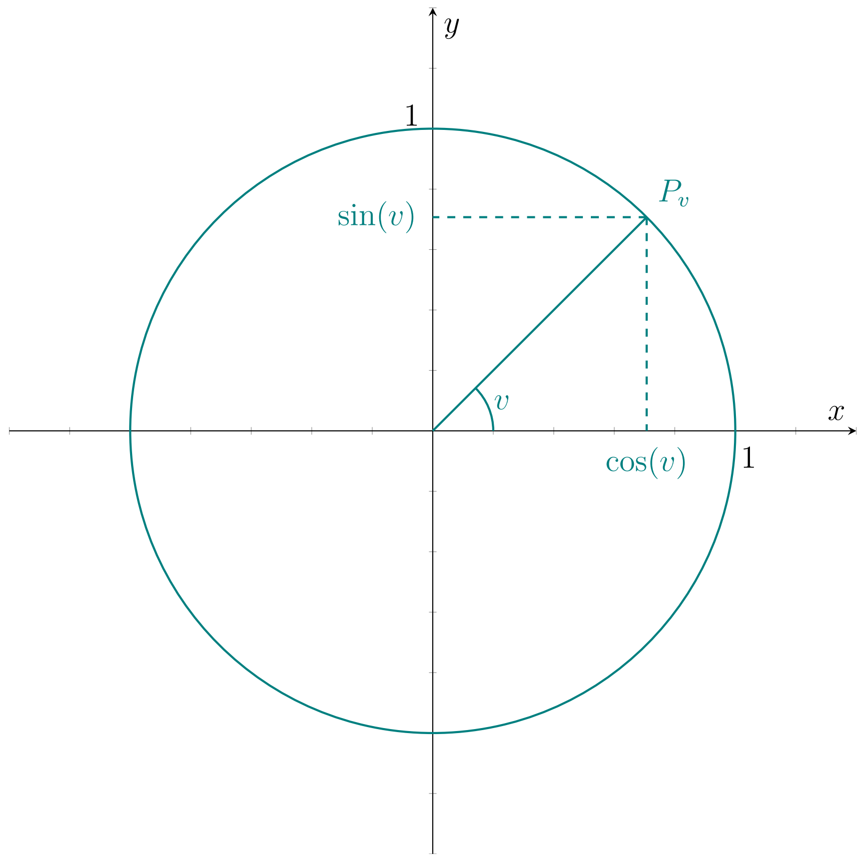
Enhedscirklen og trigonometriske funktioner

Enhedscirklen

Vi har tidligere arbejdet med de trigonometriske funktioner cos, sin og tan, og vi skal nu bruge *enhedscirklen* til at definere dem. Enhedscirklen kan ses på Figur 1



Figur 1: Definition af cos og sin ud fra enhedscirklen

Enhedscirklen er en cirkel med centrum i origo og radius 1. Vi kan bruge enhedscirklen til at definere cos og sin.

Definition 1.1. Lad P_v være et punkt på enhedscirklen, så vinklen mellem stedvektoren $\overrightarrow{OP_v}$ og x-aksen er v. Så defineres funktionerne $\cos(v)$ og $\sin(v)$ som koordinaterne til P_v:

$$P_v = (\cos(v), \sin(v)).$$

Eksempel 1.2. Det gælder, at $\cos(0) = 1$ og $\sin(0) = 0$, da koordinatsættet til P_0 er

$$P_0 = (1, 0) = (\cos(0), \sin(0)).$$

Skal vi anvende de trigonometriske funktioner i Maple og vi ønsker at anvende grader, så skal vi skrive

```
with(Gym):
Cos(v)
Sin(v)
```

Tangens er den sidste trigonometriske funktion, vi skal betragte. Denne er defineret som

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}.$$

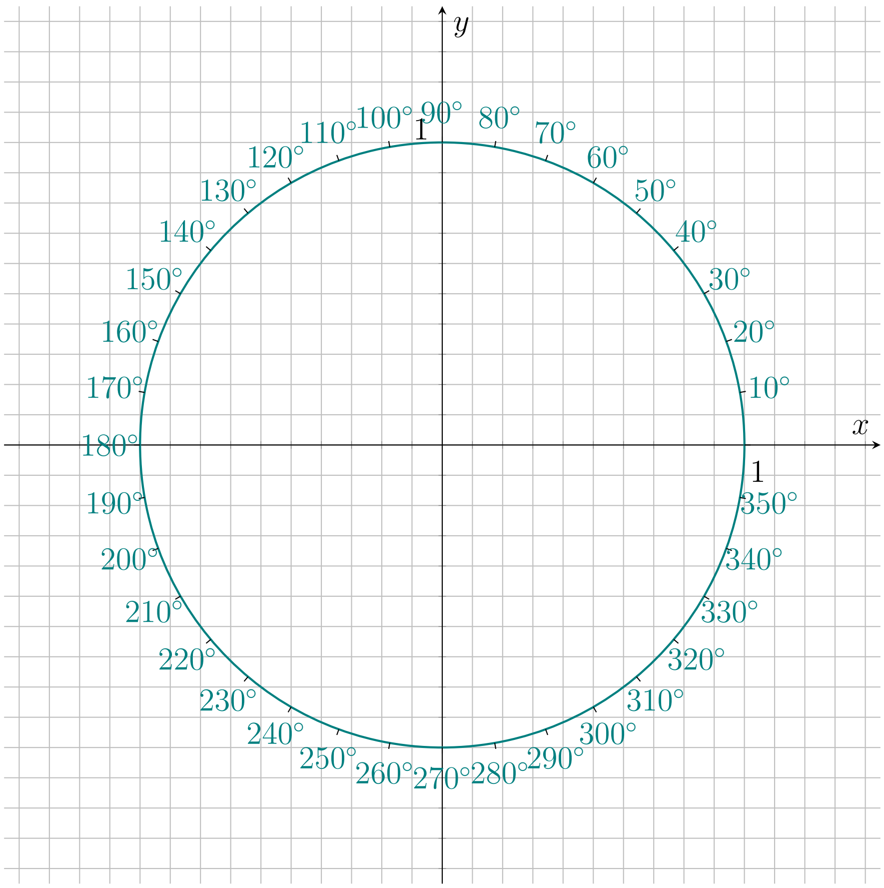
Retvinklede trekanter

Sætning 2.1. *Lad ABC være en trekant med punkterne A, B og C som hjørner, og lad C være en ret vinkel. Så gælder der for vinklen v, der er vinklen i enten hjørnet A eller B, at*

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenuse}}$$
$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenuse}}$$
$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

Bevis. Bevises som opgave. ∎

Opgave 1

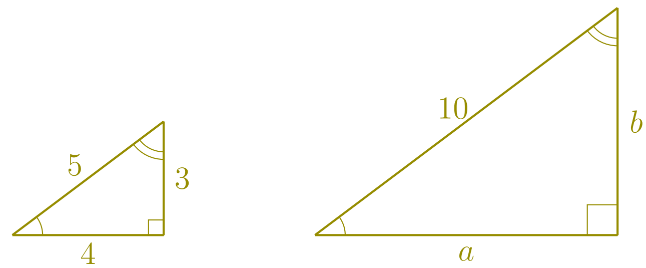


Brug enhedscirklen til at aflæse $\cos(v)$ og $\sin(v)$ for følgende vinkler. (Det behøver ikke være helt præcist.)

v	90	70	120	190	350	45	100	420	-50
$\cos(v)$	0								
$\sin(v)$	1								

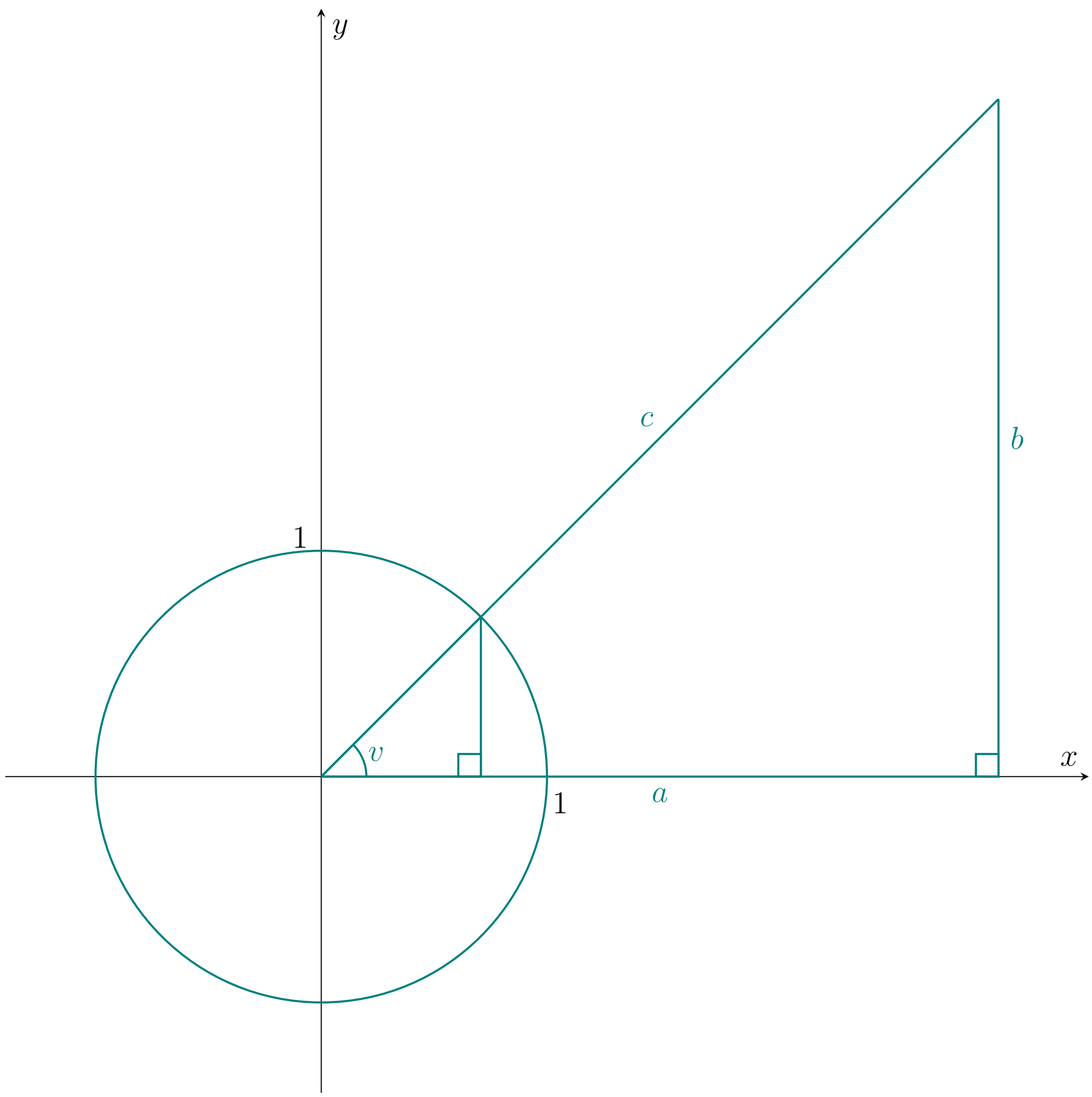
Opgave 2

Brug hvad du ved om ensvinklede trekanter til at bestemme sidelængderne a og b i følgende trekant:



Opgave 3

Vi skal nu bevise Sætning 2.1. Vi betragter derfor Figur 2



Figur 2: To ensvinklede trekanter i et koordinatsystem med enhedscirklen

i) Tegn Figur 2 i jeres gruppe.

ii) Hvad er længden af hypotenusen for den lille trekant? Skriv det på jeres figur.

iii) Hvad er højden og bredden af den lille trekant? Sammenlign eventuelt med enhedscirklen på Figur 1 eller tænkt på Opgave 1.

iv) Hvor mange gange større er den store trekant end den lille trekant? Tænk på hvad i gjorde i Opgave 2 (I skal ikke måle, men regne med bogstaver).

v) Hvad skal vi gange bredden med i den lille trekant for at få a? Skriv det udtryk op.

vi) Hvad skal vi gange højden med i den lille trekant for at få b? Skriv det udtryk op.

vii) Isolér $\cos(v)$ i det første udtryk.

viii) Isolér $\sin(v)$ i det andet udtryk.

ix) Hvad er hyp, hos og mod i den store trekant? Indsæt det i de to udtryk.

x) Sammenlign jeres resultat med Sætning 2.1.

xi) Indsæt jeres udtryk for $\cos(v)$ og $\sin(v)$ i udtrykket

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}.$$

xii) Brug brøkregneregler til at forkorte udtrykket og sammenlign herefter med Sætning 2.1.