

Kombinatorik og binomialkoefficienten

Binomialkoefficienten

Vi diskuterede sidste gang permutationer og antallet af permutationer af k elementer blandt n elementer. I den bearbejdning tog vi ikke højde for, at permutationers rækkefølge ofte er ligegyldig. Trækker vi fem kort i et kortspil, så er vi ligeglade med, om vi har trukket spar to før klør fem eller omvendt. Dette vil vi tage højde for nu. D

Definition 1.1. Vi betegner antallet af måder, vi kan udvælge k elementer blandt n elementer, hvor rækkefølgen ikke har betydning som

$$K(n, k) = \binom{n}{k},$$

hvoraf det er den sidste skrivemåde, der er klart mest anvendt (men jeres bog bruger $K(n, k)$). Dette symbol kaldes for binomialkoefficienten. En måde at udvælge k elementer uden betydning af rækkefølge kaldes for en *kombination*.

Sætning 1.2. Binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ er givet ved

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Bevis. Antallet af måder, vi kan udvælge k elementer blandt n elementer, hvor rækkefølge har betydning så vi sidst var $P(n, k) = n!/(n-k)!$. Vi skal nu tage højde for alle de permutationer, der består af de samme elementer i forskellige rækkefølge. Men for ethvert valg af k elementer, så er der jo lige præcis $k!$ måder at permutere dem. Derfor må vi have $k!$ gange for mange permutationer med. Altså er $\binom{n}{k}$ givet ved

$$\binom{n}{k} = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

■

Eksempel 1.3. Vi skal bestemme på hvor mange måder, vi kan udvælge 3 kort i et kortspil. Da rækkefølge ikke betyder noget, og da der er 52 kort i et kortspil, så er det givet som

$$\binom{52}{3} = \frac{52!}{3!(49)!} = 21000.$$

Opgave 1

Vi har en pose med fem forskellige bolde.

- i) På hvor mange forskellige måder kan vi vælge to bolde i posen, hvis rækkefølgen ikke betyder noget?
- ii) På hvor mange forskellige måder kan vi vælge 4 bolde i posen, hvis rækkefølgen ikke betyder noget?

Opgave 2

En isbutik har 12 forskellige typer is, og vi er ligeglade med rækkefølgen af kugler

- i) På hvor mange forskellige måder kan vi bestille 3 kugler is?
- ii) Hvis vi vil have chokolade som den sidste kugle, på hvor mange forskellige måder kan vi så bestille is?
- iii) Hvis vi vil have chokolade, men er ligeglade med placeringen, på hvor mange forskellige måder kan vi så bestille en is?

Opgave 3

En mand har i sit klædeskab syv skjorter, fem par bukser og 3 jakker. Han skal have tre skjorter, to par bukser og en jakke med på ferie. På hvor mange måder kan han pakke sin kuffert?

Opgave 4

Bestem følgende binomialkoefficienter:

1) $\binom{7}{2}$

2) $\binom{10}{3}$

3) $\binom{5}{4}$

4) $\binom{200}{1}$

Opgave 5

En pokerhånd består af fem kort fra et kortspil på 52 kort.

- i) Hvor mange hænder er der i poker?
- ii) En flush består af fem kort i samme kulør. På hvor mange forskellige måder kan man få flush med hjerter? På hvor mange måder kan man få flush i alt?
- iii) En straight består af 5 kort i følge; e.g. 2,3,4,5,6. På hvor mange forskellige måder kan man få straight?

Opgave 6

Du skal i biografen med klassen. I en biograf med 200 sæder, på hvor mange forskellige måder kan I så vælge jeres sæder?

Opgave 7

I skal lave netværksgrupper i klassen. Disse består af 5 personer.

- i) På hvor mange forskellige måder kan man lave en netværksgruppe.

Opgave 8

Vi er til dimission og alle får serveret et glas champagne (eller hvad end, de nu ønsker). Alle gæster skåler med alle andre gæster, og vi hører i alt 435 klir fra glas, der støder sammen.

- i) Hvor mange er der til dimissionen?
- ii) Gæsterne skåler nu tre og tre på alle mulige måder. Hvor mange klir hører vi nu?