

# Den naturlige eksponentialfunktion og logaritme

## Den naturlige eksponentialfunktion

En eksponentialfunktion har så pæne egenskaber, at den fortjener et særligt navn; den naturlige eksponentialfunktion. Vi definerer den her.

**Definition 1.1** (Den naturlige eksponentialfunktion). Den naturlige eksponentialfunktion defineres som funktionen  $f$  givet ved

$$f(x) = e^x,$$

hvor  $e \approx 2.718281$  kaldes for *Eulers tal*.

Denne eksponentialfunktion vil vi arbejde med særligt i 2. og 3.g. Den har begyndelsesværdi 1 og opfylder, at hældningen af funktionen alle steder er lig funktionsværdien, hvilket vi dog først vil præcisere næste år.

Vi kan bruge Eulers tal  $e$  til at repræsentere alle eksponentialfunktioner. Vi vil dog først præsentere *den naturlige logaritme*.

## Den naturlige logaritme

På samme måde som vi sidst eksempelvis brugte  $\log_2$  i forbindelse med eksponentialfunktionen  $2^x$  og  $\log_{10}$  i forbindelse med eksponentialfunktionen  $10^x$  vil vi her definere den naturlige logaritme, der er den inverse funktion til den naturlige eksponentialfunktion.

**Definition 2.1** (Den naturlige logaritme). Den naturlige logaritme defineres som logaritmen med grundtal  $e$ , altså

$$\log_e(x).$$

Denne skrives ofte

$$\ln(x).$$

Denne opfylder som bekendt, at

$$\ln(e^x) = x$$

og

$$e^{\ln(x)} = x.$$

**Eksempel 2.2.** Det gælder eksempelvis, at  $\ln(e^{10}) = 10$  og  $e^{\ln(4)} = 4$ .

Vi kan bruge den naturlige logaritme og den naturlige eksponentialfunktion til at omskrive alle eksponentialfunktioner. Har vi en eksponentialfunktion  $f$  givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

så kan vi udnytte, at

$$a = e^{\ln(a)}$$

samt regnereglen

$$(a^y)^x = a^{x \cdot y}.$$

Derfor kan vi skrive  $a^x$  som

$$a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a) \cdot x}.$$

Vi kalder nu  $\ln(a) = k$  og indsætter dette i forskriften for  $f$ . Vi får derfor

$$f(x) = b \cdot a^x = b \cdot e^{kx}.$$

Enhver eksponentialfunktion kan altså omskrives til formen

$$f(x) = b \cdot e^{kx},$$

hvor  $k = \ln(a)$ .

**Eksempel 2.3.** Vi ønsker at omskrive eksponentialfunktionen  $f$  givet ved

$$f(x) = 10 \cdot 1.32^x$$

til formen

$$f(x) = b \cdot e^{kx}.$$

Vi udnytter, at  $k = \ln(a) = \ln(1.32) = 0.278$  og får, at  $f$  kan skrives som

$$f(x) = 10e^{0.278x}.$$

Vi kan også være i situationen, hvor vi ønsker at gå den anden vej. Lad os betragte tilfældet, hvor vi har fået en eksponentialfunktion  $g$  givet ved

$$g(x) = 14 \cdot e^{-0.11x}.$$

Vi kan i denne situation ikke umiddelbart aflæse hverken fremskrivningsfaktor eller vækstrate. For at gøre dette skal vi omskrive  $g$  til formen

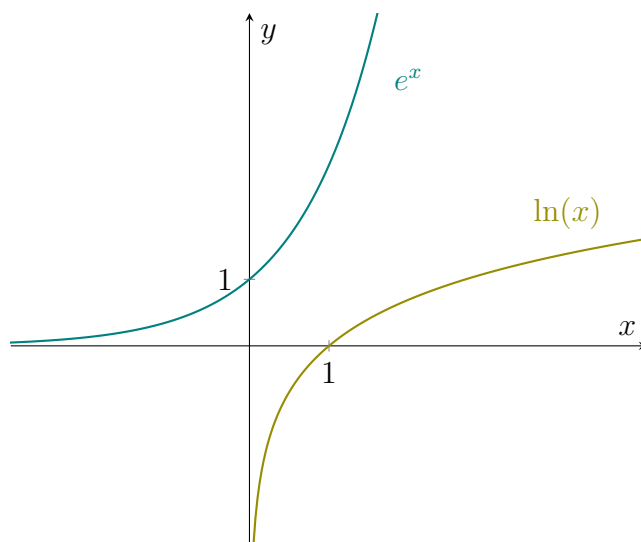
$$g(x) = b \cdot a^x.$$

Da  $k = \ln(a)$ , så må det gælde, at  $e^k = e^{\ln(a)} = a$ , så vi kan altså finde fremskrivningsfaktoren  $a$  ved at bestemme  $a = e^{-0.11} = 0.896$ , og  $g$  lyder derfor

$$g(x) = 14 \cdot 0.896^x.$$

## Grafer

Da logaritmer gør det omvendte af eksponentialfunktioner (de er inverse til eksponentialfunktioner), må deres grafer være eksponentialfunktioner spejlet i linjen  $y = x$ . (Hvis dette ikke er klart, så kommer vi til at vende tilbage til det senere). Grafen for  $e^x$  samt  $\ln(x)$  kan ses af Figur 1



Figur 1: Grafer for funktionerne  $e^x$  og  $\ln(x)$ .

## Opgave 1

En tabel med funktionsværdier for  $e^x$  er givet.

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$e^x$	0.018	0.049	0.135	0.368	1	2.718	7.389	20.085	54.598	148.413

Brug tabellen til at bestemme følgende.

- |                  |                   |
|------------------|-------------------|
| 1) $\ln(20.085)$ | 2) $\ln(54.598)$  |
| 3) $\ln(1)$      | 4) $\ln(0.018)$   |
| 5) $\ln(0.049)$  | 6) $\ln(148.413)$ |

## Opgave 2

Bestem følgende udtryk

1)  $\ln(e^3)$

2)  $\ln(e^{17})$

3)  $\ln(e^{\sqrt{4}})$

4)  $\ln(e)$

5)  $\ln(1)$

6)  $\ln(e^{-0.157})$

## Opgave 3 (Med Maple)

Omskriv følgende eksponentialfunktioner til formen

$$f(x) = be^{kx}.$$

1)  $f(x) = 2 \cdot 1.2^x$

2)  $f(x) = 10 \cdot 0.75^x$

3)  $f(x) = 1.93 \cdot 2^x$

4)  $f(x) = 510 \cdot 1.13^x$

5)  $f(x) = \sqrt{2} \cdot 0.9^x$

6)  $f(x) = 9 \cdot (e^{-1.5})^x$

## Opgave 4

I Opgave 3 havde  $k$  forskellige fortegn. Kan du gennemskue, hvad fortegnet for  $k$  betyder for eksponentialfunktionen?

## Opgave 5 (Med Maple)

i) En eksponentialfunktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 5 \cdot e^{-0.05x}.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for  $f$ .

ii) En eksponentialfunktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 17 \cdot e^{0.8x}.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for  $f$ .

iii) En eksponentialfunktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 9.11 \cdot e^{-0.17x}.$$

Afgør, hvor mange procent  $f$  stiger med, hver gang  $x$  øges med 1.

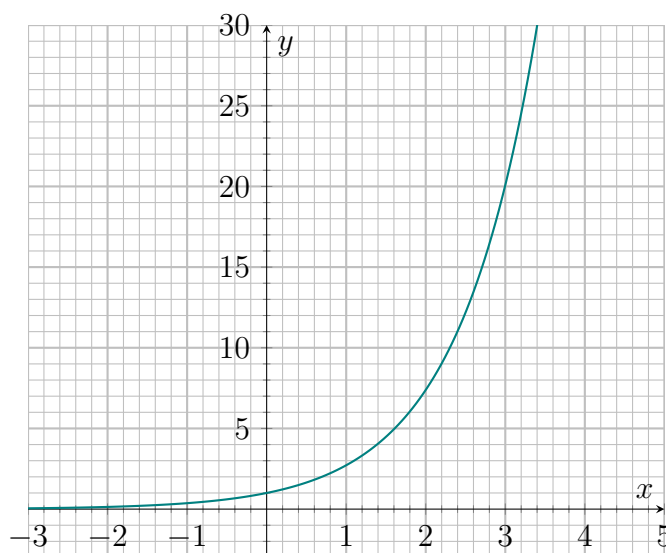
## Opgave 6 (Med Maple)

I en by er indbyggertallet i år 2000 på 15 621 personer. I år 2010 er der 20 217 personer. Det antages, at indbyggertilvæksten kan beskrives ved en eksponentiel sammenhæng.

- i) Bestem en sammenhæng  $f(x) = b \cdot e^{kx}$ , der beskriver udviklingen af befolkningen i byen.  $x$  skal beskrive år efter år 2000 og  $f$  skal beskrive befolkningsantallet i byen.

## Opgave 7

Følgende er en graf for den naturlige eksponentialfunktion  $f(x) = e^x$ .



Figur 2: Graf for funktionen  $e^x$ .

Brug grafen for  $f(x) = e^x$  til at løse følgende opgaver. Aflæs efter bedste evne.

- i) Bestem  $e^2$ .
- ii) Bestem  $e^3$ .
- iii) Bestem  $e^{2.6}$ .
- iv) Bestem  $e^0$ .
- v) Bestem  $\ln(10)$ .
- vi) Bestem  $\ln(20)$ .

vii) Bestem  $\ln(26)$ .

### Opgave 8 (Med Maple)

Løs følgende ligninger både ved brug af  $\ln$  og ved brug af solve.

1)  $e^{x-4} = 403.43$

2)  $e^{x/2-6} = 54.59$

3)  $\ln(x+2) = 0.5$

4)  $\ln(4x-1) = 3.7$