Sætning 1

Vi skal vise, at der for funktionerne f og g givet ved

$$f(x) = \mathrm{e}^{kx}$$

og

$$g(x) = a^x$$

gælder, at de begge er differentiable og deres differentialkvotienter er givet ved

$$f'(x) = k\mathrm{e}^{kx}$$

og

$$g'(x) = \ln(x)a^x$$

Vejledning til $f'(x)$:

i) Bestem den ydre og indre funktion for $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$.

ii) Anvend kædereglen på f.

iii) Husk firkanten.

Vejledning til $g'(x)$:

i) Overbevis jer selv om, at $a = \mathrm{e}^{\ln(a)}$, og indsæt dette på a's plads i g.

ii) Anvend en potensregneregel til at omskrive på udtrykket for g.

iii) Anvend nu kædereglen på g.

iv) Husk firkanten.

Sætning 2

Vi skal vise, at der for funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \ln(x)$$

gælder, at f er differentiabel med differentialkvotienten

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Vejledning:

i) Overbevis jer selv om, at $x = \mathrm{e}^{\ln(x)}$.

ii) Differentiér begge sider af lighedstegnet (OBS: Vær opmærksomme, når I differentierer på højresiden).

iii) Isolér $(\ln(x))'$ i udtrykket.

iv) Husk firkanten.

Sætning 3

Vi skal vise, at der for funktionen f givet ved

$$f(x) = x^a$$

gælder, at f er differentiabel med differentialkvotienten

$$f'(x) = ax^{a-1}.$$

Vejledning:

i) Overbevis jer selv om, at $x = \mathrm{e}^{\ln(x)}$, og indsæt dette på x's plads i f

ii) Anvend en potensregneregel til at omskrive på udtrykket for f.

iii) Anvend kædereglen til at differentiere jeres udtryk for f.

iv) Anvend nu tricket fra trinene i) og ii) baglæns på det differentierede udtryk og forkort.

v) Husk firkanten.

Sætning 4

Vi skal vise, at der for to differentiable funktioner f og g ($g \neq 0$) gælder, at

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

er differentiabel med differentialkvotienten

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Vejledning:

i) Opskriv

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

ii) Brug kædereglen til at bestemme

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

iii) Brug nu produktreglen til at bestemme

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$$

iv) Forlæng brøken

$$f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

med $g(x)$ og sæt på fælles brøkstreg.

v) Husk firkant