Linjens parameterfremstilling

Parameterfremstilling

I stedet for at repræsentere en linje ved hjælp af et punkt $P(x_0, y_0)$ og en normalvektor $\vec{n}$, så kan vi repræsentere linjen ved hjælp af et punkt $P(x_0, y_0)$ og en *retningsvektor* $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

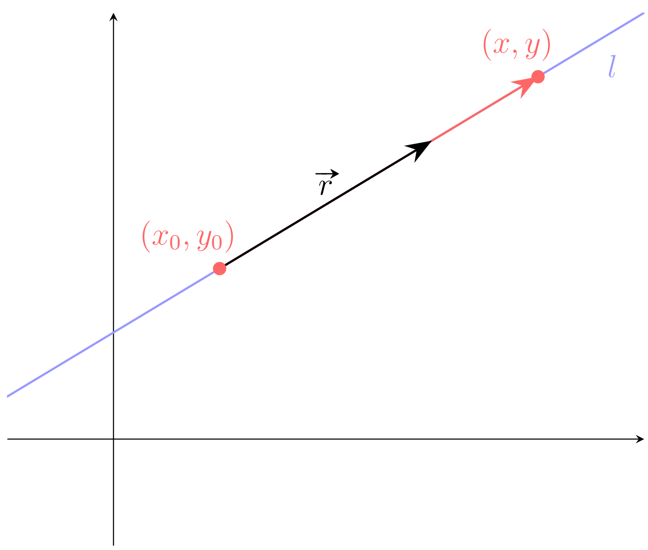
så må punktet (x, y), der opfylder, at

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

ligge på l. Men for $t \in \mathbb{R}$ ved vi, at alle vektorer $t\vec{r}$ er parallelle med $\vec{r}$. Derfor må der desuden gælde, at alle punkter (x, y), der opfylder, at

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

må være præcist de punkter, der ligger på linjen l. Dette kan ses af Fig. 1



Figur 1: Retningsvektor til linjen l.

Vi kan nu konkludere med en sætning.

Sætning 1.1 (Parametrisering af linjen)**.** *For en linje l gælder der, at alle punkter (x, y), der ligger på l opfylder, at*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

hvor $P(x_0, y_0)$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er en retningsvektor for linjen og $t \in \mathbb{R}$ er et vilkårligt reelt tal. Vi kalder dette for en parametrisering af l.

Definition 1.2 (Tværvektor)**.** Lad $\vec{v}$ være givet ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Så defineres *tværvektoren* $\hat{\vec{v}}$ til $\vec{v}$ som

$$\hat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Det er ikke svært at overbevise sig selv om at en vektor $\vec{v}$ og dens tværvektor $\hat{\vec{v}}$ er orthogonale. Tjekker vi efter, får vi, at

$$\vec{v} \cdot \hat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = a \cdot b - b \cdot a = 0.$$

Eksempel 1.3. Har vi et punkt $P = (-1, 3)$ og en retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ kan vi bestemme parametriseringen for linjen l, der går gennem P og har retningsvektor $\vec{r}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ er orthogonal til $\vec{r}$ vil denne vektor være en normalvektor til l. Vi kan derfor også repræsentere l ved ligningen

$$-1(x + 1) + 5(y - 3) = 0.$$

Eksempel 1.4. En linje l har parametriseringen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi skal afgøre, om punkterne $(1,1)$ og $(5,0)$ ligger på l. Vi indsætter første punkt i parametriseringen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I første linje har vi ligningen

$$1 = 1 + t \cdot 4,$$

så $t = 0$. Det indsættes i den nederste ligning:

$$1 = -2 + 0 \cdot 2 = -2,$$

hvilket ikke er korrekt. Derfor ligger punktet $(1,1)$ ikke på linjen l. Tilsvarende indsættes punktet $(5,0)$, og vi får

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Første ligning lyder så

$$5 = 1 + t \cdot 4,$$

så $t = 1$. Dette indsættes i anden ligning:

$$0 = -2 + 1 \cdot 2 = 0,$$

hvilket er sandt, så punktet $(5,0)$ ligger på linjen l.

Opgave 1

Bestem en parametrisering for følgende linjer, der har retningsvektorer

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

og hvor punkterne $P(x_0, y_0)$ ligger på linjen.

1) $P(1,1),\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) $P(-5,-3),\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3) $P\left(\frac{-2}{5}, 13\right),\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \end{pmatrix}$.

4) $P(\sqrt{2}, \sqrt{3}),\ \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}$.

5) $P(0,0),\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6) $P(-100,5),\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -9 \end{pmatrix}$.

Opgave 2

i) En linje l har parametriseringen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Afgør, om punkterne $(3,-2)$ og $(2,2)$ ligger på l.

ii) En linje l har parametriseringen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Afgør, om punkterne $(0,0)$ og $(16,23)$ ligger på l.

Opgave 3

i) Bestem en parametrisering for linjen l givet ved ligningen

$$2(x-2) + 3(y+1) = 0.$$

ii) Bestem en parametrisering for linjen l givet ved ligningen

$$-10(x-10) + 10(y+10) = 0.$$

iii) Bestem en ligning for linjen l givet ved parametriseringen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

iv) Bestem en ligning for linjen l givet ved parametriseringen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Opgave 4

I følgende koordinatsystemer er tegnet en linje l samt en retningsvektor $\overrightarrow{r}$ til linjen. Brug koordinatsystemerne til at bestemme linjens ligning for hver af linjerne.