Logaritmer

Titalslogaritmen

Har vi en ligning af typen $x^2 = k$, så kan vi bestemme x ved at tage kvadratroden på begge sider af lighedstegnet og bestemme (en af) løsningerne til ligningen. I forbindelse med eksponentiel vækst vil vil gerne kunne løse ligninger af typen $10^x = k$ og $e^x = k$ (hvor e betegner Eulers tal, $e \approx 2.71$). Til dette vil vi introducere logaritmefunktionerne.

Definition 1.1 (Titalslogaritmen)**.** Titalslogaritmen log er den entydige funktion, der opfylder, at

$$\log(10^x) = x$$

og

$$10^{\log(x)} = x.$$

Eksempel 1.2. Vi har, at

$$\log(100) = \log(10^2) = 2.$$

For titalslogaritmen gælder der en række regneregler.

Sætning 1.3 (Logaritmeregneregler)**.** *For $a, b > 0$ gælder der, at*

i) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$,

ii) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$,

iii) $\log(a^x) = x\log(a)$.

Bevis. Vi vil løbende udnytte, at $\log(10^a) = a$ og $10^{\log(a)} = a$. Vi betragter udtrykkene.
i)

$$\begin{aligned}\log(a \cdot b) &= \log(10^{\log(a)}10^{\log(b)}) \\ &= \log(10^{\log(a)+\log(b)}) \\ &\log(a) + \log(b).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log\left(\frac{10^a}{10^b}\right)\\ &= \log(10^{\log(a)-\log(b)})\\ &= \log(a)-\log(b).\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\log(a^x) &= \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right)\\ &= \log\left(10^{\log(a)x}\right)\\ &= x\log(a),\end{aligned}$$

og vi er færdige med beviset. ■

Vi vil bevise denne sætning næste gang.

Eksempel 1.4. Vi ønsker at løse ligningen $10^{x+5} = 1000$. Vi tager derfor logaritmen på begge sider af lighedstegnet:

$$\log\left(10^{x+5}\right) = \log(1000) \;\Leftrightarrow\; x+5 = \log(1000) = 3 \;\Leftrightarrow\; x = -2.$$

Eksempel 1.5. Vi ønsker at løse ligningen

$$\log(4x) = 4.$$

Vi opløfter derfor 10 i begge sider af lighedstegnet.

$$10^{\log(4x)} = 10^4 \;\Leftrightarrow\; 4x = 10000 \;\Leftrightarrow\; x = 2500.$$

Den naturlige logaritme

Definition 2.1. Den naturlige logaritme er den entydige funktion ln, der opfylder, at

$$\ln(e^x) = x,$$

og

$$e^{\ln(x)} = x,$$

hvor e er Euler's tal. ($e \approx 2.7182$)

Funktionen e^x kaldes for den naturlige eksponentialfunktion, og vi vil senere beskrive den nærmere.

Sætning 2.2 (Regneregler for ln)**.** *For den naturlige logaritme* ln *gælder der for* $a, b > 0$*, at*

i) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$,

ii) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$,

iii) $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Opgave 1

Løs følgende udtryk

1) $\log(10^7)$
2) $\log(10000)$
3) $\log(10^{1.5})$
4) $\log(10^{\sqrt{2}})$
5) $\log(10000000)$
6) $\log(1)$
7) $\log(10)$
8) $\log(20) + \log(5)$

Opgave 2

Bestem følgende:

1) $\ln(e)$
2) $\ln(e^3)$
3) $\ln(\sqrt{e})$
4) $\ln(\sqrt[5]{e^4})$

Opgave 3

Bestem følgende

1) $\log(\sqrt{10})$
2) $\log(\sqrt[3]{100})$
3) $\log(\sqrt[n]{1000})$
4) $\log(2) + \log(50)$
5) $\log(200) - \log(20)$
6) $\log(2 \cdot 10^5)$

Opgave 4

Løs følgende ligninger

1) $\ln(x) = 1$
2) $\ln(x) = 0$
3) $\ln(3x + 7) = 3$
4) $\ln(x^2) = e^4$

Opgave 5

i) Løs ligningen

$$10^x = 100.$$

ii) Løs ligningen

$$10^{x^2} = 10000.$$

iii) Løs ligningen

$$10^{5x+9} = 10$$

iv) Løs ligningen

$$10^{\sqrt{x}} = 1000$$

Opgave 6

i) Bevis, at $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

ii) Bevis, at $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

iii) Bevis, at $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

(Vink: Brug beviset for regnereglerne for titalslogaritmen som skabelon.)