

Linjens parameterfremstilling

Linjens Parameterfremstilling

I stedet for at repræsentere en linje ved hjælp af et punkt $P(x_0, y_0)$ og en normalvektor \vec{n} , så kan vi repræsentere linjen ved hjælp af et punkt $P(x_0, y_0)$ og en retningsvektor \vec{r} givet ved

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

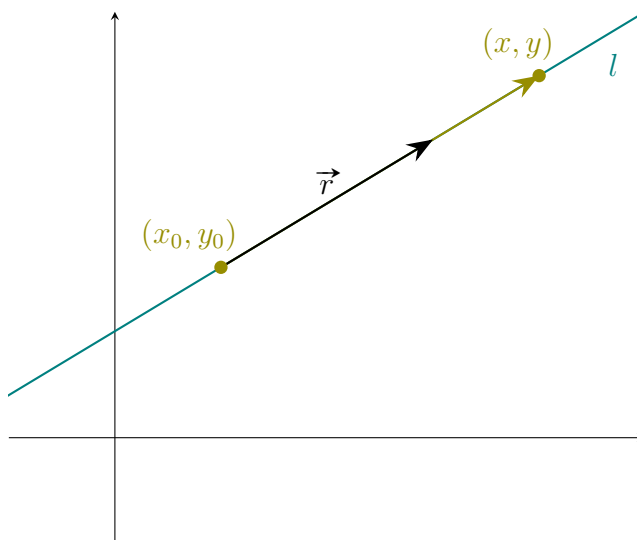
så må punktet (x, y) , der opfylder, at

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

ligge på l . Men for alle tal t ved vi, at alle vektorer $t\vec{r}$ er parallelle med \vec{r} . Derfor må der desuden gælde, at alle punkter (x, y) , der opfylder, at

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

må være præcist de punkter, der ligger på linjen l . Dette kan ses af Figur 1



Figur 1: Retningsvektor til linjen l .

Vi kan nu konkludere med en sætning.

Sætning 1.1 (Linjens parameterfremstilling). *For en linje l gælder der, at alle punkter (x, y) , der ligger på l opfylder, at*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

hvor $P(x_0, y_0)$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er en retningsvektor for linjen og t er et vilkårligt tal.

Vi kalder dette for parameterfremstillingen for l .

Definition 1.2 (Tværvektor). Lad \vec{v} være givet ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Så defineres tværvektoren $\widehat{\vec{v}}$ til \vec{v} som

$$\widehat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Det er ikke svært at overbevise sig selv om at en vektor \vec{v} og dens tværvektor $\widehat{\vec{v}}$ er orthogonale. Tjekker vi efter, får vi, at

$$\vec{v} \cdot \widehat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = a \cdot b - b \cdot a = 0.$$

Eksempel 1.3. Har vi et punkt $P = (-1, 3)$ og en retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

kan vi bestemme parameterfremstillingen for linjen l , der går gennem P og har retningsvektor \vec{r} :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ er orthogonal til \vec{r} vil denne vektor være en normalvektor til l . Vi kan derfor også repræsentere l ved ligningen

$$-1(x + 1) + 5(y - 3) = 0.$$

Eksempel 1.4. En linje l har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi skal afgøre, om punkterne $(1, 1)$ og $(5, 0)$ ligger på l . Vi indsætter første punkt i parameterfremstillingen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I første linje har vi ligningen

$$1 = 1 + t \cdot 4,$$

så $t = 0$. Det indsættes i den nederste ligning:

$$1 = -2 + 0 \cdot 2 = -2,$$

hvilket ikke er korrekt. Derfor ligger punktet $(1, 1)$ ikke på linjen l . Tilsvarende indsættes punktet $(5, 0)$, og vi får

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Første ligning lyder så

$$5 = 1 + t \cdot 4,$$

så $t = 1$. Dette indsættes i anden ligning:

$$0 = -2 + 1 \cdot 2 = 0,$$

hvilket er sandt, så punktet $(5, 0)$ ligger på linjen l .

Opgave 1

Bestem en parameterfremstilling for følgende linjer, der har retningsvektorer

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

og hvor punkterne $P(x_0, y_0)$ ligger på linjen.

- | | |
|---|--|
| 1) $P(1, 1), \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$ | 2) $P(-5, -3), \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$ |
| 3) $P\left(\frac{-2}{5}, 13\right), \vec{r} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \end{pmatrix}.$ | 4) $P(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$ |
| 5) $P(0, 0), \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ | 6) $P(-100, 5), \vec{r} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -9 \end{pmatrix}.$ |

Opgave 2

- i) En linje l har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Afgør, om punkterne $(3, -2)$ og $(2, 2)$ ligger på l .

- ii) En linje l har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Afgør, om punkterne $(0, 0)$ og $(16, 23)$ ligger på l .

Opgave 3

- i) Bestem en parameterfremstilling for linjen l givet ved ligningen

$$2(x - 2) + 3(y + 1) = 0.$$

- ii) Bestem en parameterfremstilling for linjen l givet ved ligningen

$$-10(x - 10) + 10(y + 10) = 0.$$

- iii) Bestem en ligning for linjen l givet ved parameterfremstillingen

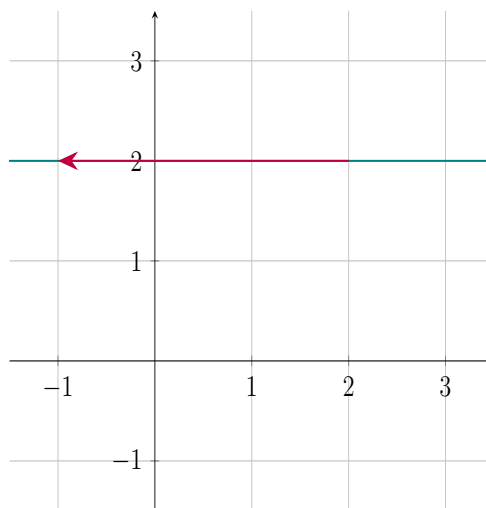
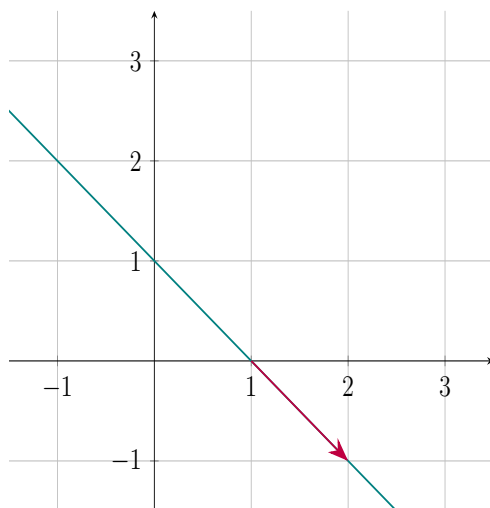
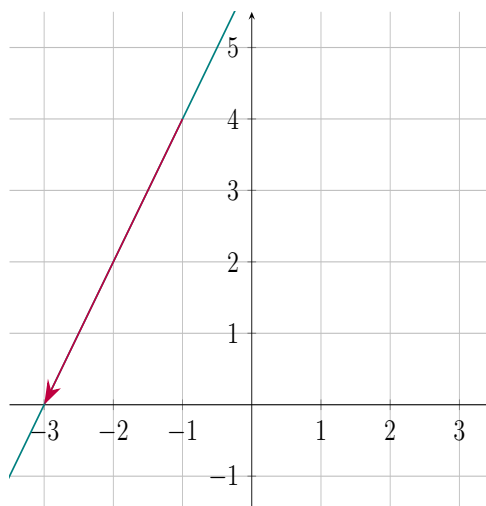
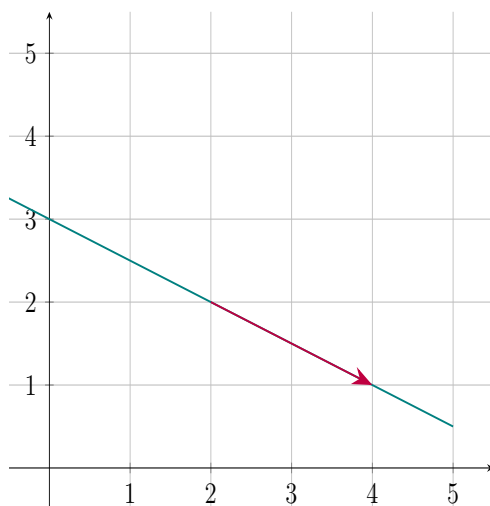
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

iv) Bestem en ligning for linjen l givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

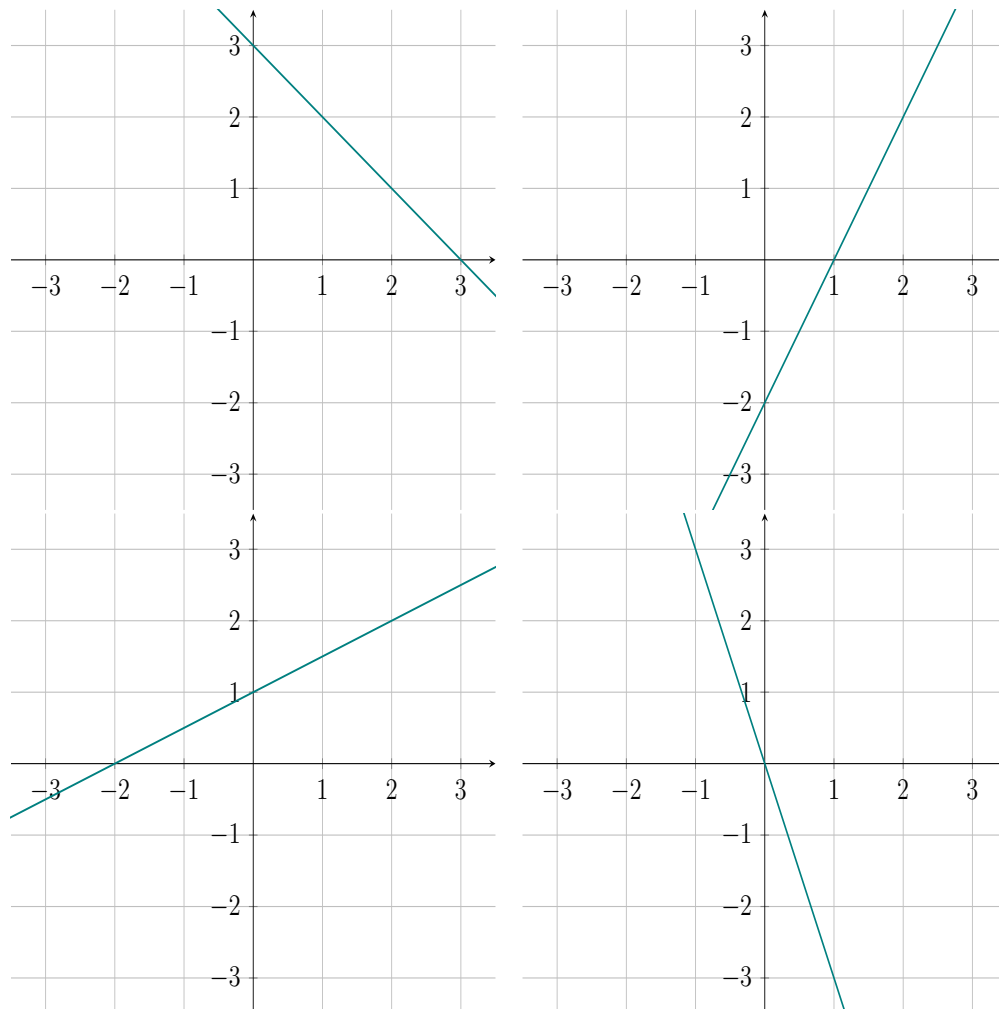
Opgave 4

I følgende koordinatsystemer er tegnet en linje l samt en retningsvektor \vec{r} til linjen. Brug koordinatsystemerne til at bestemme en parameterfremstilling for hver af linjerne.



Opgave 5

Bestem linjens parameterfremstilling og linjens ligning for følgende linjer.



Opgave 6

En linje l er givet ved parameterfremstillingen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Bestem den værdi for t , hvor l skærer x -aksen.
- Bestem det punkt, hvor l skærer y -aksen.

- iii) Bestem det punkt, hvor l skærer linjen med ligningen $y = 12$.

Opgave 7

En linje l er givet ved parameterfremstillingen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

og en linje m er givet ved ligningen

$$-3(x + 4) + 2(y - 1) = 0$$

- i) Afgør, om l og m er orthogonale.
- ii) Bestem det punkt, hvor l og m skærer hinanden.