Lineære differentialligninger af 1. orden

Førsteordens lineære differentialligninger

Vi har indtil nu arbejdet med to klasser af differentialligninger. Lineære differentialligninger og separable differentialligninger. Differentialligningerne

$$y' = b - ay$$

og specialtilfældet

$$y' = ay$$

er eksempler på lineære differentialligninger af første orden.

Definition 1.1 (Førsteordens lineære differentialligninger)**.** Lad $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuerte funktioner. Så kaldes en differentialligning på formen

$$y' + a(x)y = b(x)$$

for en *førsteordens lineær differentialligning.* I fald $b(x) = 0$ kaldes ligningen for en *homogen førsteordens lineær differentialligning.* Hvis $h(x) \neq 0$, så siges ligningen at være *inhomogen.*

Vi vil typisk kræve, at $a(x) \neq 0$, da vores differentialligning ellers i realiteten blot er et ubestemt integral. Ordet førsteorden kommer af, at der kun optræder en gange afledede i ligningen.

Eksempel 1.2. Differentialligningen

$$y' + xy = e^x$$

er en lineær differentialligning. Funktionerne a og b er givet ved

$$a(x) = x, \qquad\qquad b(x) = e^x.$$

Vi kan løse lineære førsteordens differentialligninger ved brug af den såkaldte *panserformel.* Det kan ofte være *overkill* at bruge panserformlen, men den virker til gengæld altid, når vi har med lineære differentialligninger af 1. orden at gøre.

Sætning 1.3 (Panserformlen)**.** *Lad* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *og* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *være kontinuerte funktioner. Så har differentialligningen*

$$y' + a(x)y = b(x)$$

den fuldstændige løsning

$$y(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)},$$

hvor A er en stamfunktion til a og $c \in \mathbb{R}$.

Bevis. Antag, at $y(x)$ er en løsning til differentialligningen

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{1.1}$$

Vi indfører nu hjælpefunktionen

$$z(x) = e^{A(x)}y(x)$$

for en stamfunktion A til a. Vi differentierer nu z ved hjælp af produktreglen for differentiation.

$$\begin{aligned} z'(x) &= a(x)e^{A(x)}y(x) + e^{A(x)}y'(x) \\ &= e^{A(x)} \underbrace{(a(x)y(x) + y'(x))}_{=b(x)} \\ &= e^{A(x)}b(x). \end{aligned}$$

Vi får så, at

$$z(x) = \int e^{A(x)}b(x)dx + c.$$

Da

$$z(x) = e^{A(x)}y(x),$$

så gælder det, at

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-A(x)}z(x) \\ &= e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)}. \end{aligned}$$

For en god ordens skyld, lad os nu vise, at

$$y(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)}$$

er en løsning. Vi indsætter i (1.1), og starter med y'.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \left(e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)}\right)' \\
&= -a(x)e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx + e^{-A(x)}b(x)e^{A(x)} - a(x)ce^{-A(x)} \\
&= -a(x)\left(e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)}\right) + b(x) \\
&= -a(x)y(x) + b(x),
\end{aligned}$$

og dette var, hvad vi skulle vise. ∎

Eksempel 1.4. Vi betragter den lineære differentialligning af 1. orden

$$y' + 2xy = \frac{1}{2}x.$$

Her er $b(x) = \frac{1}{2}x$ og $a(x) = 2x$. Vi bestemmer først $A(x) = \int 2xdx = x^2$. Vi indsætter nu i panserformlen.

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-x^2}\int \frac{1}{2}xe^{x^2}dx + ce^{-x^2} \\
&= e^{-x^2}\frac{1}{4}e^{x^2} + ce^{-x^2} \\
&= \frac{1}{4} + ce^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Opgave 1

i) Argumentér for, hvorfor differentialligningen

$$y' = k$$

er en lineær førsteordens differentialligning (Hint: Bestem $a(x)$ og $b(x)$).

ii) Argumentér for, hvorfor differentialligningen

$$y' = ay$$

er en lineær førsteordens differentialligning (Hint: Bestem $a(x)$ og $b(x)$).

iii) Argumentér for, hvorfor differentialligningen

$$y' = b - ay$$

er en lineær førsteordens differentialligning (Hint: Bestem $a(x)$ og $b(x)$).

Opgave 2

Følgende differentialligninger er førsteordens lineære differentialligninger på formen

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Bestem $a(x)$ og $b(x)$.

1) $y' + y = 0$
2) $y' + \cos(x)y = \sin(x)$
3) $y' = -\sqrt{x}y + x^2$
4) $y' + (13x^2 + 4x)y = \sin(x^2)$
5) $y' + 2xy - \ln(x) = 0$
6) $y' = \cos(x) + \sin(x)y$
7) $y' - y = 5$
8) $\dfrac{y'}{y} + x = \dfrac{\sqrt{x}}{y}$

Opgave 3

i) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' + x^3y = 0.$$

ii) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' = -cos(x)y.$$

iii) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' + 2xy = x^2$$

iv) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' + 3y = e^x$$

v) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' + \cos(x)y = 3\cos(x).$$

vi) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' + 2xy = e^{-x^2}.$$

vii) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' - \cos(x)y = e^{sin(x)}.$$

Opgave 4

i) Brug Panserformlen til at bevise løsningsformlen for differentialligningen

$$y' = b - ay.$$