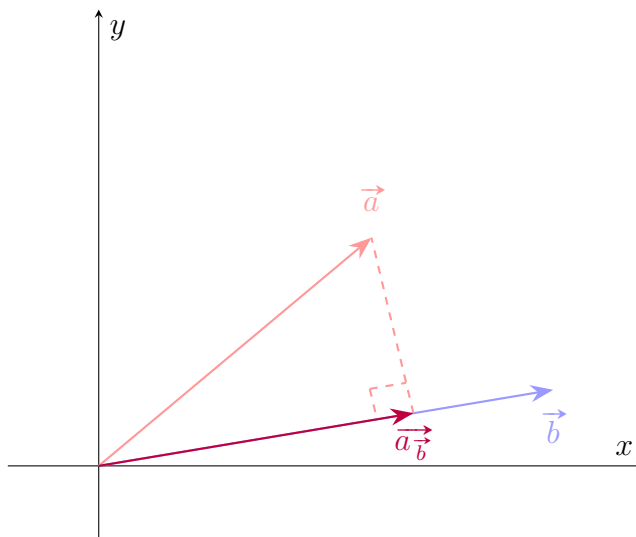


# Projektioner af vektorer

## Projektioner

Har vi to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ , så kan vi være interesserede i at bestemme den vektor  $\vec{a}_{\vec{b}}$ , der peger i samme retning som  $\vec{b}$  og som i en forstand er så tæt på  $\vec{a}$  som muligt. Vi kalder i et sådant tilfælde vektoren  $\vec{a}_{\vec{b}}$  for projektionen af  $\vec{a}$  på  $\vec{b}$ . Vi skriver også

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a}_{\vec{b}}.$$



Figur 1: Projektion af vektor på vektor.

Vi starter med at vise, hvordan vi finder projektionen af en vektor på en anden vektor.

**Sætning 1.1** (Projektionssætningen). *For to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er projektionen af  $\vec{a}$  på  $\vec{b}$ , som vi betegner*

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a}_{\vec{b}},$$

*givet ved*

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}.$$

Længden af  $\vec{a}_b$  er givet ved

$$|\vec{a}_b| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

## Bevis for projektionssætningen

Vi skal gennem en række små opgaver bevise projektionssætningen.

- i) Tegn en skitse af Figur 1.
- ii) Tegn en normalvektor  $\vec{n}$  til  $\vec{b}$ , der går langs den stiplede linje på Figur 1 op til  $\vec{a}$ .

Vi skal bruge tre kendsgerninger, som I skal overbevise jer selv om sandheden af.

- iii) Overbevis jer selv om, at

$$\vec{a}_b + \vec{n} = \vec{a}. \quad (1.1)$$

- iv) Overbevis jer selv om, at

$$\vec{a}_b = k \vec{b} \quad (1.2)$$

for et tal  $k$ .

- v) Overbevis jer selv om, at

$$\vec{n} \cdot \vec{b} = 0. \quad (1.3)$$

- vi) Isolér  $\vec{n}$  i (1.1).
- vii) Indsæt dette udtryk for  $\vec{n}$  i (1.3) (vink: husk parentes).
- viii) Prik  $\vec{b}$  ind i parentesen (Hæv parentesen).
- ix) Indsæt udtrykket for  $\vec{a}_b$  fra (1.2) i udtrykket.
- x) Isolér  $k$  i udtrykket.
- xi) Udnyt, at  $\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2$  til at omskrive udtrykket.
- xii) Indsæt dette udtryk for  $k$  i (1.2).
- xiii) Sammenlign med projektionssætningen.

Ekstraudfordring: Bestem længden af projektionsvektoren og bevis anden del af projektionssætningen.