

Funktionstyper

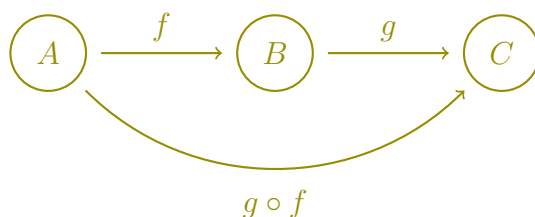
Sammensatte funktioner

En sammensat funktion er - som navnet hentyder til - funktioner, der er sat sammen. Mere præcist har vi en definition.

Definition 1.1. Har vi to funktioner $f : A \rightarrow B$ og $g : B \rightarrow C$, så kan vi bestemme den sammensatte funktion af f og g som

$$g(f(x)).$$

Dette skrives også til tider $g(f(x)) = g \circ f(x)$. I dette tilfælde kaldes g for den *indre* funktion og f for den *ydre* funktion.



Eksempel 1.2. Lad f og g være givet ved henholdsvis

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ og } g(x) = 3 \cdot x.$$

Så er den sammensatte funktion $f(g(x))$ bestemt ved

$$f(g(x)) = \sqrt{3 \cdot x}.$$

Tilsvarende er den sammensatte funktion $g(f(x))$ bestemt ved

$$g(f(x)) = 3\sqrt{x}.$$

Eksempel 1.3. CO₂-koncentrationen i en beholder kan tilnærmes ved $f(x) = 10 \cdot x + 385$, hvor f er i ppm (parts per million) og x er antallet af en bestemt type bakterier i mio. Antallet af bakterier (i mio.) i beholderen kan i et begrænset tidsinterval beskrives ved $g(t) = 2 \cdot 1.07^t$, hvor t beskriver tiden i timer. CO₂-koncentrationen som funktion af tid kan derfor beskrives ved

$$f(g(t)) = 10 \cdot (2 \cdot 1.07^t) + 385 = 20 \cdot 1.07^t + 385.$$

Stykvist definerede funktioner

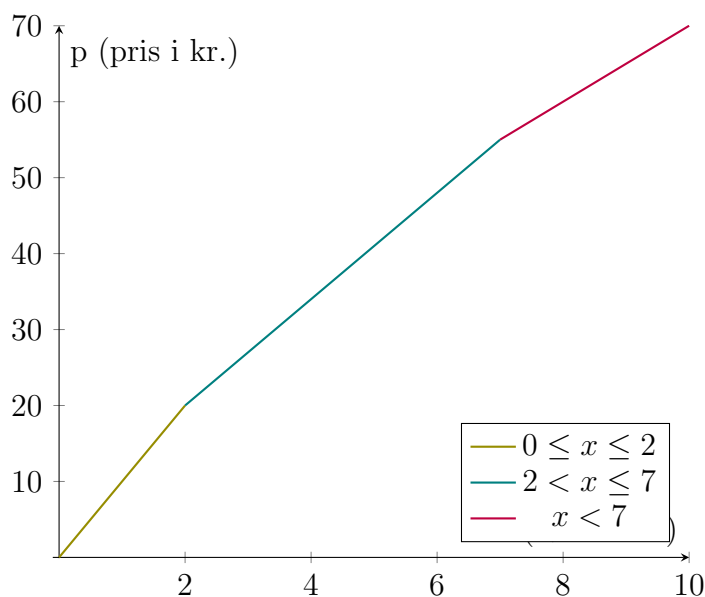
En stykvist defineret funktion er en funktion, der er defineret på forskellige måder alt efter hvad x er.

Eksempel 2.1. Et taxafirma tager følgende pris for taxakørsel: De første to kilometer koster 10kr pr kilometer, de næste 5km koster 7 kr pr kilometer, og resten af afstanden koster taxaen 5kr pr kilometer. Vi kan definere prisen $p(x)$ som en stykvist defineret funktion:

$$p(x) = \begin{cases} 10 \cdot x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 7 \cdot x + 6, & 2 < x \leq 7, \\ 5 \cdot x + 20, & 7 < x, \end{cases}$$

hvor x er antal kilometer kørt og $p(x)$ er prisen i kr.

Grafen for p kan ses på Figur 1.



Figur 1: Pris for taxa som funktion af kørte km.

Opgave 1

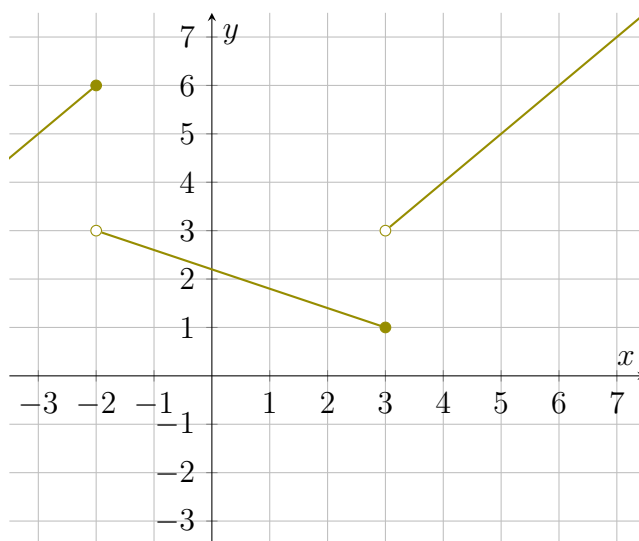
En stykvist defineret funktion f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & \text{hvis } x < -2, \\ -4x + 12, & \text{hvis } x \geq 2. \end{cases}$$

- i) Bestem $f(-2)$.
- ii) Bestem $f(-5)$.
- iii) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Opgave 2

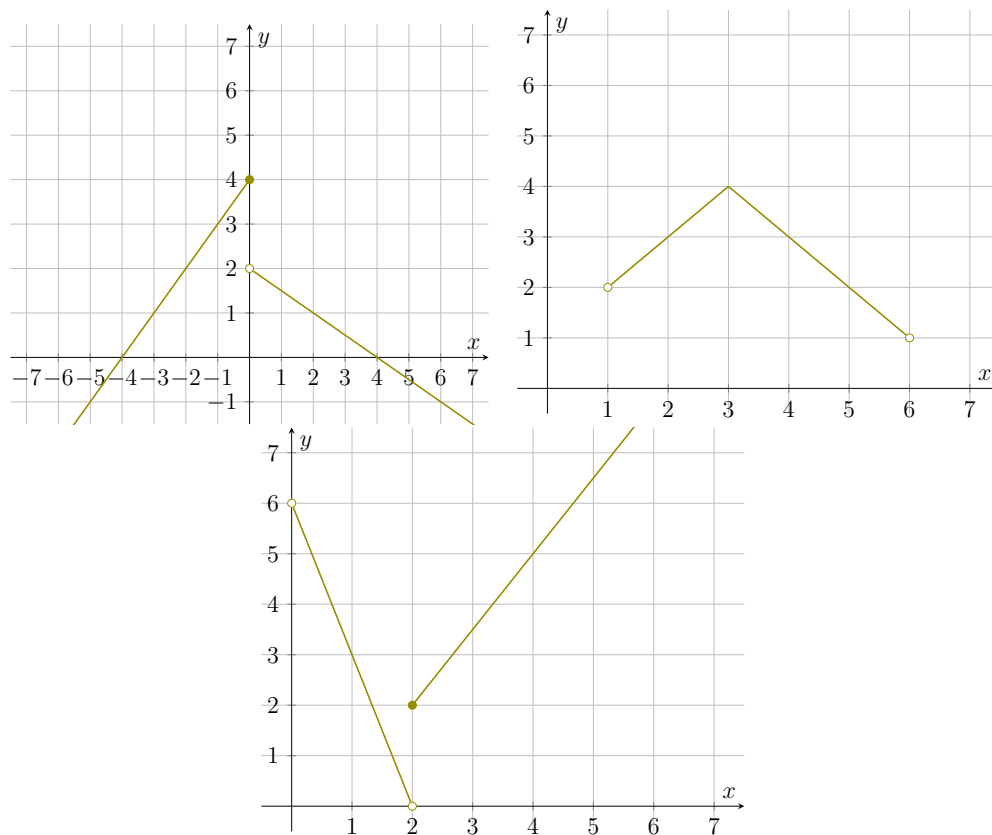
En stykvist defineret funktion f er givet ved følgende graf.



- i) Bestem $f(4)$
- ii) Bestem $f(3)$
- iii) Løs ligningen $f(x) = 6$

Opgave 3

Bestem en forskrift for følgende stykvist definerede funktioner.



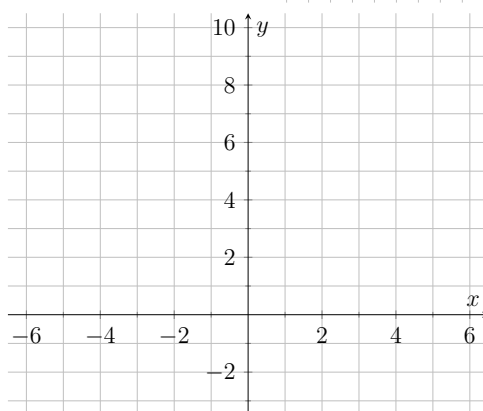
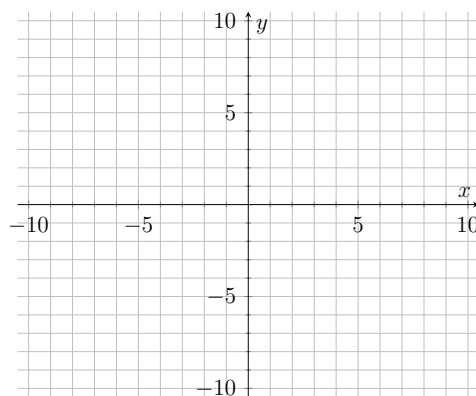
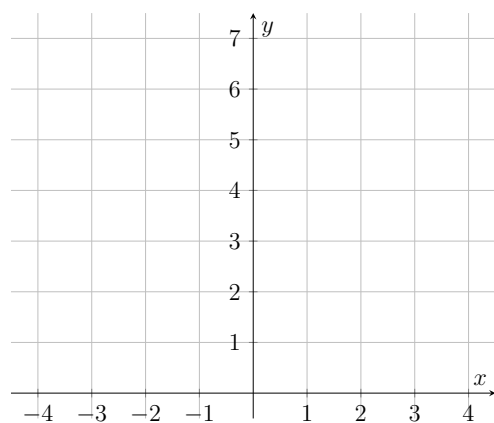
Opgave 4

Følgende tre stykvist definerede funktioner er givet

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{hvis } -3 \leq x < -2, \\ -0.5x + 4, & \text{hvis } -2 \leq x < 2. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 2, & \text{hvis } -5 < x \leq 3, \\ x - 11, & \text{hvis } 3 < x < 5. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{hvis } -5 < x < -4, \\ x + 2, & \text{hvis } -4 \leq x < 0, \\ -x + 7, & \text{hvis } 0 \leq x < 2. \end{cases}$$



Opgave 5

For følgende funktioner f og g , bestem så den sammensatte funktion $f(g(x))$ og $g(f(g))$.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x} \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 \\f(x) &= 2x^3 \quad \text{og} \quad g(x) = 10x + 3 \\f(x) &= \ln(x) \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{1}{x} \\f(x) &= \sqrt[10]{x} \quad \text{og} \quad g(x) = x^{20}\end{aligned}$$

Opgave 6

For $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2x + 3$ løs ligningen

$$f(g(x)) = 0.$$

Opgave 7

Bestem for følgende funktion den indre og ydre funktion

1) $\sqrt{2x+1}$	2) 2^{x^2-7}
3) $\frac{1}{-4x+12}$	4) e^{2x-4}
5) $\ln(2x)$	6) $\log_5(7x^2)$
7) $(x+10)^3$	8) $3^{\log_{10}(2x)+7}$

Opgave 8

En stykvist defineret funktion f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{hvis } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

- i) Bestem $f(3)$.
- ii) Bestem $f(-4)$.
- iii) Løs ligningen $f(x) = -64$.

Opgave 9

Prisen for at rejse x kilometer med taxafirmaet taxA kan beskrives ved funktionen f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 20x + 50, & \text{hvis } x \leq 8, \\ 16x + 82, & \text{hvis } 8 < x \leq 15, \\ 12x + 142, & \text{hvis } 15 < x. \end{cases}$$

- i) Bestem prisen for at køre 10km med taxA.
- ii) Afgør, hvor langt man kan køre for 250 kr.
- iii) Tegn grafen for f i Maple og verificér dit svar fra i) og ii).