

# Logaritmer

## Logaritmer

Har vi et udtryk som  $2^3 = 8$ , så kan vi tage  $\sqrt[3]{8}$  for at finde det tal, som skal opløftes i 3 for at få 8, navnligt  $\sqrt[3]{8} = 2$ . Udtrykkende  $2^3 = 8$  og  $\sqrt[3]{8} = 2$  er derfor to forskellige måder at skrive den samme kendsgerning. Vi bruger altså  $2^3$ , hvis vi ikke kender 8 og  $\sqrt[3]{8}$ , hvis vi ikke kender 2. Man kan derfor overveje, om der ikke også er en måde at opskrive, hvis vi ikke kender 3. Til dette introducerer vi *logaritmefunktionen*  $\log_2(x)$ . Denne opfylder, at

$$\log_2(8) = 3.$$

Vi kalder derfor  $\log_2$  for den *omvendte* eller *inverse funktion* til  $2^x$  på samme måde som  $\sqrt[3]{x}$  er den inverse funktion til  $x^3$ . Logaritmefunktioner er derfor omvendte funktioner til eksponentialfunktioner.

Før vi går videre til en særligt vigtig logaritme, så vil vi definere præcist hvad logaritmefunktionen opfylder.

**Definition 1.1** (Logaritmefunktionen). Logaritmefunktionen  $\log_a(x)$  er den entydige funktion, der opfylder, at

$$\log_a(a^x) = x,$$

og

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

## Titalslogaritmen

Titalslogaritmen  $\log_{10}$  har en særlig rolle særligt i naturvidenskaben, og den får derfor også en særlig rolle i gymnasieundervisningen. Titalslogaritmen er den inverse funktion til

$$f(x) = 10^x.$$

Vi kan se nogle funktionsværdier for  $10^x$  i følgende tabel.

$x$	0	1	2	3	4	5
$10^x$	1	10	100	1000	10000	100000

Da  $\log_{10}(x)$  gør det omvendte af  $10^x$ , så vil en tilsvarende tabel se ud som følgende.

$x$	1	10	100	1000	10000	100000
$\log_{10}(x)$	0	1	2	3	4	5

**Eksempel 2.1.** Vi har, at

$$\log_{10}(100) = \log_{10}(10^2) = 2.$$

For alle logaritmer gælder der en række regneregler.

**Sætning 2.2** (Logaritmeregneregler). *For  $a, b > 0$  gælder der, at*

$$i) \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b),$$

$$ii) \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b),$$

$$iii) \log(a^x) = x \log(a).$$

*Bevis.* Vi beviser resultatet for  $\log_{10}()$  og lader generaliseringen være op til læseren. For at lette notationen lader vi desuden  $\log(x)$  betegne  $\log_{10}(x)$ . Vi vil løbende udnytte, at  $\log(10^a) = a$  og  $10^{\log(a)} = a$ . Vi betragter udtrykkene.

i)

$$\begin{aligned} \log(a \cdot b) &= \log(10^{\log(a)} 10^{\log(b)}) \\ &= \log(10^{\log(a) + \log(b)}) \\ &= \log(a) + \log(b). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log\left(\frac{10^a}{10^b}\right) \\ &= \log(10^{\log(a) - \log(b)}) \\ &= \log(a) - \log(b). \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \log(a^x) &= \log\left((10^{\log(a)})^x\right) \\ &= \log(10^{\log(a)x}) \\ &= x \log(a), \end{aligned}$$

og vi er færdige med beviset. ■

**Eksempel 2.3.** Vi ønsker at løse ligningen  $10^{x+5} = 1000$ . Vi tager derfor logaritmen på begge sider af lighedstegnet:

$$\log_{10}(10^{x+5}) = \log_{10}(1000) \Leftrightarrow x + 5 = \log_{10}(1000) = 3 \Leftrightarrow x = -2.$$

**Eksempel 2.4.** Vi ønsker at løse ligningen

$$\log_{10}(4x) = 4.$$

Vi opløfter derfor 10 i begge sider af lighedstegnet.

$$10^{\log_{10}(4x)} = 10^4 \Leftrightarrow 4x = 10000 \Leftrightarrow x = 2500.$$

## Opgave 1

En tabel med funktionsværdier for  $10^x$  er givet.

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$10^x$	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000	100000

Brug tabellen til at bestemme følgende.

- |                       |                        |
|-----------------------|------------------------|
| 1) $\log_{10}(10)$    | 2) $\log_{10}(1)$      |
| 3) $\log_{10}(0.001)$ | 4) $\log_{10}(100000)$ |

## Opgave 2

Bestem følgende udtryk

- |                          |                               |
|--------------------------|-------------------------------|
| 1) $\log_{10}(10^7)$     | 2) $\log_{10}(10000)$         |
| 3) $\log_{10}(10^{1.5})$ | 4) $\log_{10}(10^{\sqrt{2}})$ |
| 5) $\log_{10}(10000000)$ | 6) $\log_{10}(1)$             |
| 7) $\log_{10}(100)$      | 8) $\log_{10}(1000)$          |
| 9) $\log_{10}(10^{-4})$  | 10) $\log_{10}(0.00001)$      |

### Opgave 3

Bestem følgende udtryk

- |                          |                             |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1) $\log_2(4)$           | 2) $\log_2(16)$             |
| 3) $\log_3(9)$           | 4) $\log_4(16)$             |
| 5) $\log_5(25)$          | 6) $\log_4(256)$            |
| 7) $\log_2(1024)$        | 8) $\log_5(125)$            |
| 9) $\log_6(216)$         | 10) $\log_{16}(256)$        |
| 11) $\log_{\sqrt{2}}(2)$ | 12) $\log_{\sqrt[3]{2}}(5)$ |

### Opgave 4

- |  |                                      |
|--|--------------------------------------|
| 1) $\log_{10}(2 \cdot 10^3)$                                   | 2) $\log_{10}(3000)$                 |
| 3) $\log_{10}(500)$  | 4) $\log_{10}(10) + \log_{10}(1000)$ |
| 5) $\log_{10}(2500)$   | 6) $\log_{10}(20) + \log_{10}(5)$    |
| 7) $\log_{10}(5^6)$  | 8) $\log_{10}(4000) - \log_{10}(4)$  |
| 9) $\log_{10}(2) + \log_{10}(2) + \log_{10}(5) + \log_{10}(5)$ | 10) $\log_{10}(50) - \log_{10}(5)$   |

### Opgave 5

Isolér  $x$  i følgende ligninger

- |                           |                               |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1) $2^{5+x} = 512$        | 2) $5^{x-7} = 25$             |
| 3) $3^{\frac{x}{2}} = 27$ | 4) $7^{2x-10} = 49$           |
| 5) $2^{7x+28} = 1$        | 6) $3^{x-13} = 81$            |
| 7) $6^{\sqrt{x}} = 36$    | 8) $10^{\sqrt{x}+1} = 100000$ |

### Opgave 6

Isolér  $x$  i følgende ligninger

- |                        |                      |
|------------------------|----------------------|
| 1) $\log_2(4+x) = 3$   | 2) $\log_5(x-1) = 2$ |
| 3) $\log_{10}(2x) = 4$ | 4) $\log_4(8x) = 3$  |

## Opgave 7

Læs beviset for  $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$  og prøv at bevise regnereglerne  $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$  og  $\log(a^x) = x \log(a)$  på samme vis.