

Cirkler og cirkels ligning

Cirkels ligning

Hvis vi har en linje l , så kan vi finde en ligning, der beskriver alle de punkter, der ligger på linjen. Det samme kan vi gøre for cirkler. Ligningen for en cirkel kaldes naturligt nok for *cirkels ligning*, og for at bestemme ligningen for en cirkel skal vi kende dens midtpunkt og dens radius. Dette er beskrevet i følgende sætning.

Sætning 1.1 (Cirkels ligning). *Ethvert punkt (x, y) ligger på cirklen c med radius r og centrum i (x_0, y_0) præcis når det er opfyldt, at*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Bevis. Punktet (x, y) ligger på cirklen præcis i de tilfælde, hvor vektoren

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

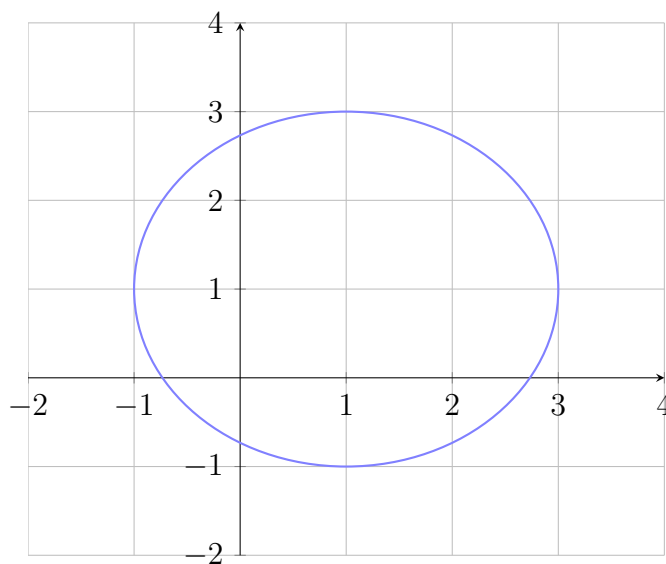
har længde r . Dette er ensbetydende med, at

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right| = r &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \end{aligned}$$

■

Eksempel 1.2. Vi betragter cirklen på Fig. 1. Den har centrum i punktet $(1, 1)$ og radius 2. Derfor lyder cirkels ligning for denne cirkel

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$



Figur 1: Cirkel

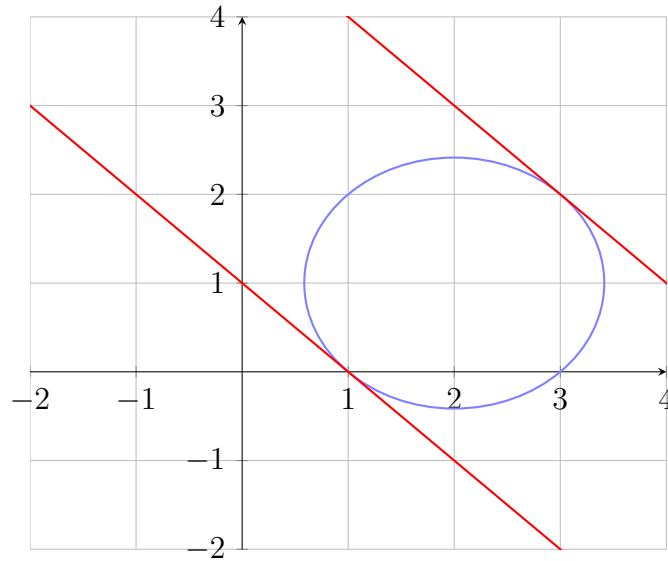
Eksempel 1.3. Vi betragter cirklen på Fig. 2. Vi skal bestemme de tangenter til cirklen, der har hældning -1. Dette gøres i Geogebra ([Link til fil](#)), og tangenterne findes til at have ligningerne

$$y = -x + 5$$

og

$$y = -x + 1,$$

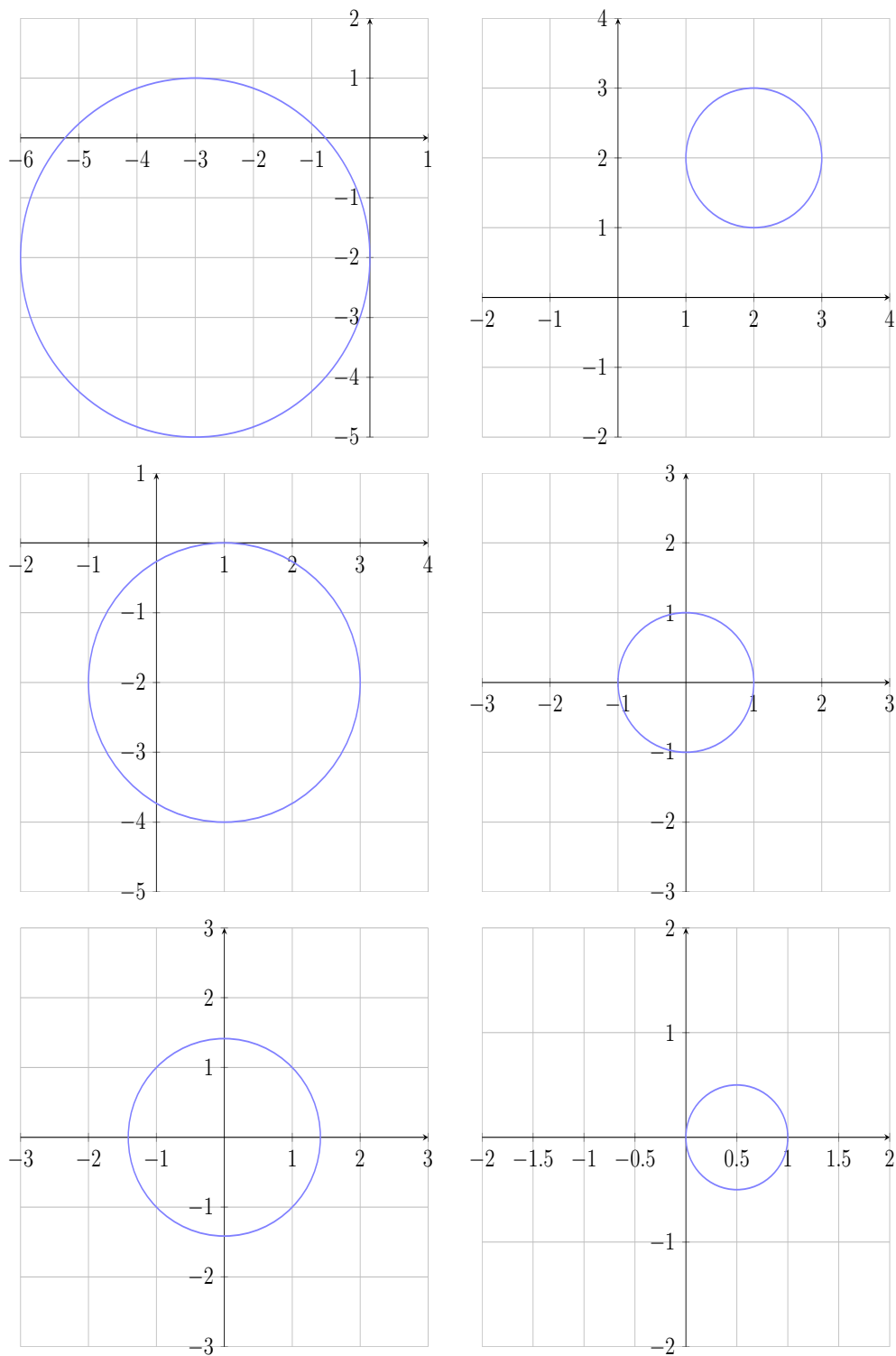
som vi kan se på figuren.



Figur 2: Cirkel

Opgave 1

Bestem ligningerne for følgende cirkler



Figur 3: Cirkler

Opgave 2

- i) En cirkel har ligningen $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$, og en linje har ligningen

$$y = 2x - 1.$$

Bestem skæringen mellem linjen og cirklen i Geogebra.

- ii) En cirkel har ligningen $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Bestem de tangenter, der har hældning 0 til cirklen i Geogebra.
- iii) En cirkel har ligningen $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$, og et punkt $(-4, 1)$ ligger på cirklen. Bestem ligningen for tangenten til cirklen i dette punkt i Geogebra.

Opgave 3

Aflevering