Ekstrema

Ekstrema for differentiable funktioner

I mange sammenhænge er det en fordel at kunne bestemme *toppunkter/maksima og minima* for en funktion f. Hvis f er en differentiabel funktion, så kan vi udnytte differentialregning til at bestemme sådanne punkter. Et punkt, der enten er et maksimum eller et minimum kaldes et *ekstremumspunkt*.

Vi har følgende sætning:

Sætning 1.1 (Ekstremumspunkter)**.** *Lad f være en differentiabel funktion. Hvis et punkt $P(x_0, f(x_0))$ er et ekstremumspunkt for f, så gælder der, at*

$$f'(x_0) = 0.$$

Det er dog værd at bemærke, at vi ikke nødvendigvis har den omvendte implikation; hvis $f'(x_0) = 0$, så er $(x_0, f(x_0))$ ikke nødvendigvis et ekstremumspunkt. Vi kalder sådanne for *vendetangenter*, og vi vil se eksempler på disse senere.

Eksempel 1.2. Lad f være givet ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5.$$

Vi ønsker at bestemme ekstrema for f. Vi differentierer derfor først f.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4).$$

Dette sættes nu lig 0, og vi får

$$3x(x - 4) = 0,$$

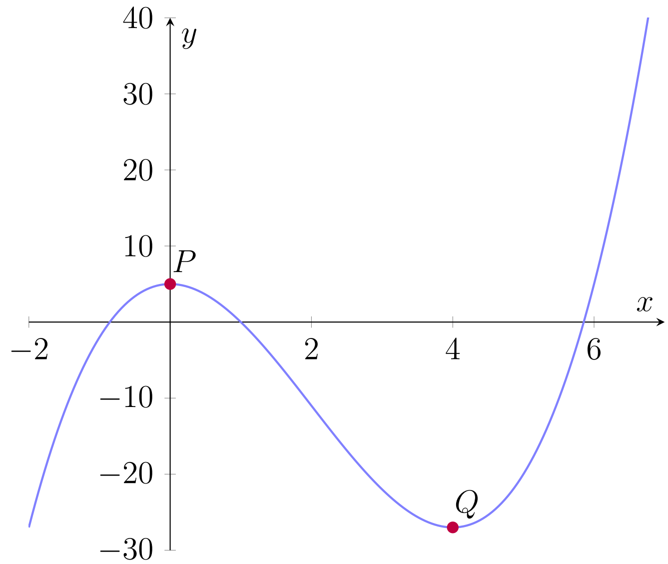
og ved hjælp af nulreglen ved vi, at $x = 0$ eller $x = 4$. Vi bestemmer nu de tilhørende y-værdier og vi får

$$f(0) = 5$$

og

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 5 \\ &= 64 - 96 + 5 \\ &= -27. \end{aligned}$$

Vi har derfor en vandret tangent i $P(0,5)$ og $Q(4,-27)$. For at bestemme, om det er et ekstremumspunkt, så tegner vi grafen. Denne kan ses af Fig. 1



Figur 1: Graf for funktionen f.

Af Fig. 1 kan vi se, at punkterne P og Q er ekstremumspunkter. P er et *lokalt maksimum* og Q er et *lokalt minimum*. Vi kan også se, at f ikke har nogle *globale ekstrema*.

Vi tilføjer flere funktioner til vores tabel med afledede funktioner

$f(x)$	$f'(x)$
konstant	0
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^a	ax^{a-1}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Opgave 1

Bestem ekstremumspunkter for følgende funktioner. Løs først ligningen $f'(x) = 0$ og tegn derefter grafen for funktionen. Afgør til sidst, om der er tale om globale maksimum/minimum eller lokale maksimum/minimum.

1) $-x^2 + 10$	2) x^3
3) $x^4 - 8x^2$	4) $\ln(x) - \frac{1}{2}x^2$
5) $\sqrt{x} - x^3$	6) $\frac{1}{x} + x^2$
7) $x^5 - 10x^4$	8) $\frac{4}{x} - 2x$

Opgave 2

i) Tegn funktionen $\sin(x)$ på intervallet $[-10, 10]$.

ii) Hvor mange ekstrema har $\sin(x)$ på dette interval og hvilken type har de?

iii) Bestem ekstrema for $\sin(x)$.

Opgave 3

i) Hvad sker der, hvis I differentierer $\cos(x)$ to gange?

ii) Hvad sker der, hvis I differentierer $\sin(x)$ to gange?

iii) Hvad sker der, hvis I differentierer $\cos(x)$ fire gange?

iv) Hvad sker der, hvis I differentierer $\sin(x)$ fire gange?