Afsluttende opgaver i differentialligninger

Følgende opgaver er fra tidligere eksamenssæt. Få jer et overblik over, hvilke opgaver I kan løse og hvilke I ikke kan løse.

Opgaver uden hjælpemidler

Opgave 2 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = x \cdot y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2,7)$.

(10 point) a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + x^2.$$

(10 point) a) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen

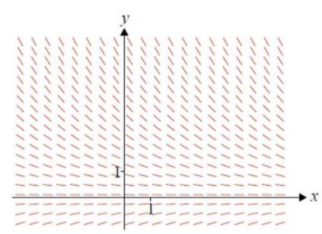
$$y' = 2 \cdot (y + x - x^2).$$

Opgave 7 Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning på formen $y' = k \cdot y$.

Funktionerne f, g og h er givet ved

$$f(x) = \mathrm{e}^{-0{,}3x}$$
$$g(x) = 4\mathrm{e}^{-0{,}3x}$$
$$h(x) = 4\mathrm{e}^{0{,}3x}.$$

Til opgaven hører et bilag.



(10 point) a) Argumentér for, hvilken af funktionerne f, g og h, der ikke kan være en løsning til differentialligningen.

Opgave 5 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 0{,}1 \cdot y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(0,6)$.

(10 point) a) Bestem linjeelementet i P.

(5 point) b) Bestem en forskrift for f.

Opgave 9

I en model kan temperaturudviklingen i et vandbad under afkøling beskrives ved en funktion f, hvor $f(t)$ betegner vandbadets temperatur (målt i °C) til tidspunktet t (målt i minutter).

I modellen er væksthastigheden for vandbadets temperatur proportional med forskellen mellem omgivelsernes temperatur og vandbadets temperatur.

Det oplyses, at omgivelsernes temperatur er 22°C, og at proportionalitetskonstanten er $0{,}01\,\mathrm{s}^{-1}$.

(10 point) a) Bestem væksthastigheden for vandbadets temperatur, når vandbadets temperatur er 50°C.

(5 point) b) Opskriv en differentialligning, som f må være en løsning til.

Opgave 5 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 6 - \tfrac{1}{2}y.$$

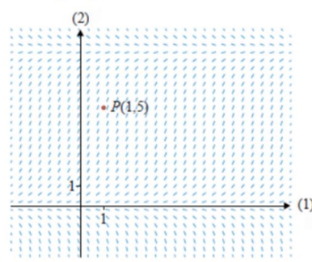
Det oplyses, at grafen for f går gennem punktet $(0,8)$.

(10 point) a) Bestem $f'(0)$.

(10 point) b) Bestem en forskrift for f.

Opgave 7 På figuren ses et hældningsfelt hørende til differentialligningen

$$y' = a \cdot y \cdot (8 - y).$$



Til opgaven hører et bilag.

Funktionen f er løsning til differentialligningen. Grafen for f går gennem punktet $P(1,5)$.

(10 point) a) Indtegn en skitse af grafen for f på det vedlagte bilag.

(10 point) b) Bestem a, når det oplyses, at $f'(1) = 3$.

Opgave 9 I en model kan antallet af en bestemt type bakterier i en madrest beskrives ved en funktion B af tiden t.
Den hastighed, hvormed antallet af bakterier vokser til tidspunktet t (målt i minutter), er proportional med antallet $B(t)$ af bakterier (målt i mio.).
Proportionalitetsfaktoren er $k = 0{,}035$.

(10 point) a) Opskriv en differentialligning, som B må opfylde.

Billedkilde: Colourbox

Opgave 3. En differentialligning er givet ved

$$y' = 4 - 2y.$$

(10 point) a) Bestem linjeelementet for differentialligningen i punktet $P(x_0, y_0) = (0,3)$.

(10 point) b) Undersøg, om funktionen $f(x) = 2 + e^{-2x}$ er en løsning til differentialligningen.

Opgave med hjælpemidler

Opgave 11 En differentialligning er givet ved

$$y' = y + x^2.$$

(10 point) a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen.

Det oplyses, at funktionen f er løsning til differentialligningen, og at grafen for f går gennem punktet $P(0,-1)$.

(10 point) b) Bestem en forskrift for f.

Opgave 10 Der er givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{y}{x}.$$

(10 point) a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen.

En funktion f er løsning til differentialligningen.
Grafen for f går gennem punktet $P(2,3)$.

(10 point) b) Bestem $f'(2)$.

I en model kan udviklingen af antallet af bjørne i et bestemt habitat beskrives ved differentialligningen

$$N' = -0{,}00001 \cdot N^3 + 0{,}0051 \cdot N^2 - 0{,}05 \cdot N,$$

hvor $N(t)$ betegner antallet af bjørne til tidspunktet t (målt i år).

(10 point) a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen sammen med løsningskurven gennem punktet $(0{,}100)$.

(10 point) b) Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden for antallet af bjørne, når der er 100 bjørne i habitatet.

(5 point) c) Bestem henholdsvis det mindste og det største antal bjørne, der kan være i habitatet, så antallet af bjørne ifølge modellen er voksende.

Opgave 10 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 0{,}045 \cdot y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(0{,}100)$.

(10 point) a) Bestem en forskrift for f.

I en model kan udviklingen i temperaturen af en portion suppe beskrives ved ovenstående differentialligning, hvor y betegner suppens temperatur (målt i °C) til tidspunktet t (målt i minutter).

(10 point) b) Bestem væksthastigheden for suppens temperatur, når suppens temperatur er 50°C.

Opgave 13 Befolkningsudviklingen i Taiwan i perioden 1996-2019 kan i en model beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dP}{dt} = 0,003641 \cdot P \cdot (23,95 - P),$$

hvor $P(t)$ er antallet af indbyggere i Taiwan (målt i millioner), og t er antal år efter 1996. I 1996 var der 21,53 millioner indbyggere i Taiwan.

(10 point) a) Bestem en forskrift for P.

(10 point) b) Bestem $P'(23)$, og forklar betydningen af dette tal.

Opgave 12 Den samlede biomasse af en population af helleflyndere i et område af Stillehavet kan beskrives ved modellen

Billedkilde: Wikipedia

$$\frac{dy}{dx} = 0,71 \cdot \left(1 - \frac{y}{80,5}\right) \cdot y,$$

hvor $y = f(x)$ er populationens samlede biomasse (målt i mio. kg), og x er tiden (målt i år).
Til tidspunktet $x = 0$ er den samlede biomasse 20,1 mio. kg.

(10 point) a) Med hvilken hastighed vokser den samlede biomasse til tidspunktet $x = 0$?

(10 point) b) Bestem et udtryk for den samlede biomasse $f(x)$.

(10 point) c) Til hvilket tidspunkt når den samlede biomasse op på 75 mio. kg?

I en model kan udviklingen i verdens samlede kapacitet til produktion af vedvarende energi i perioden 2001 – 2018 beskrives ved en funktion K, der er løsning til differentialligningen

$$K' = 0,00106 \cdot K \cdot (222,9 - K),$$

hvor $K(t)$ betegner kapaciteten (målt i GW) til tidspunktet t (målt i antal år efter 2001).

Det oplyses, at verdens samlede kapacitet af vedvarende energi i 2001 var 18 GW.

(10 point) a) Bestem en forskrift for K.

(10 point) b) Giv en fortolkning af tallet 222,9 i modellen.

(10 point) c) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt t, hvor kapaciteten vokser hurtigst.

Nedenstående tabel viser sammenhørende værdier af befolkningstallet og befolkningstilvæksten i Indien i en periode fra 1960 og frem.

Befolkningstal (mio.)	449	498	554	621	697	782	870	960	1053	1144	1231	1309
Befolkningstilvækst (mio. pr. år)	8	9,8	11,2	13,4	15,2	17	17,6	18,0	18,6	18,2	17,4	15,6

(Tabellen findes også i bilaget "Indiens_befolkningstal.xlsx")

I en model kan sammenhængen beskrives ved en differentialligning af typen

$$y' = a \cdot y^2 + b \cdot y + c,$$

hvor y og y' betegner henholdsvis befolkningstallet (målt i mio.) og befolkningstilvæksten (målt i mio. pr. år) til tidspunktet t (målt i år efter 1960).

(10 point) a) Benyt tabellens data til at bestemme a, b og c.

Det oplyses, at befolkningstallet i Indien i 1960 var 449 mio.

(10 point) b) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen sammen med løsningskurven for udviklingen i Indiens befolkningstal efter 1960.

(5 point) c) Benyt modellen til at bestemme det maksimale befolkningstal i Indien efter 1960.