BØRNE- OG UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik A

Studentereksamen

Ny ordning

ny-stx212-MAT/A-13082021

Fredag den 13. august 2021
kl. 9.00-14.00

Opgavesættet er delt i to dele:

Delprøve 1: 2 timer kun med den centralt udmeldte formelsamling.
Delprøve 2: 3 timer med alle tilladte hjælpemidler.

Delprøve 1 består af opgave 1 – 10.

Delprøve 2 består af opgave 11 – 17.

Pointtallet er angivet ud for hvert spørgsmål.

Der gives i alt 250 point.

En del af spørgsmålene er knyttet til mindstekravene.
Disse spørgsmål er markeret med grøn farve.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.
I bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger eller matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.

- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.

- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke hører til standardviden, skal der redegøres for betydningen.

- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.
  Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve 1

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 a) Løs ligningen

(10 point)

$$x \cdot (3x - 9) = 0.$$

Opgave 2 En funktion *f* er løsning til differentialligningen

$$y' = x \cdot y,$$

og grafen for *f* går gennem punktet $P(2,7)$.

(10 point) a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet *P*.

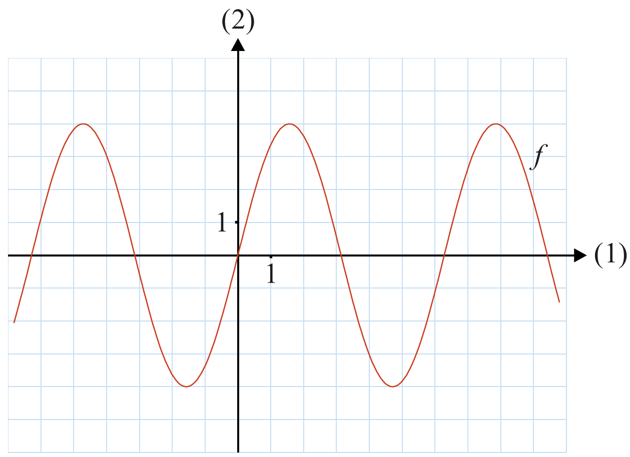
Opgave 3 En harmonisk svingning *f* er givet ved

$$f(x) = A \cdot \sin(x),$$

hvor A er en konstant.

Til opgaven hører et bilag.

På figuren ses grafen for *f*.



(10 point) a) Bestem A.

Benyt eventuelt det vedlagte bilag.

Opgave 4 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x), \quad x > 0.$$

(10 point) a) Bestem $f'(x)$.

Opgave 5 En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 9}, \qquad x > 0.$$

(10 point) a) Bestem $f(3)$.

En funktion *g* er givet ved

$$g(x) = \sqrt{\ln(x) + 9}, \quad x > 0.$$

(10 point) b) Bestem $g(f(x))$.

Opgave 6 En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}5+7\cdot\cos(t)\\-1+7\cdot\sin(t)\end{pmatrix},\quad 0\leq t\leq 2\pi.$$

(10 point) a) Bestem $\vec{s}(0)$.

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{s}$ er en cirkel.

(10 point) b) Bestem en ligning for cirklen.

Opgave 7 En differensligning er givet ved

$$y_{n+1}=1{,}5\cdot y_n+2.$$

Det oplyses, at $y_0=4$.

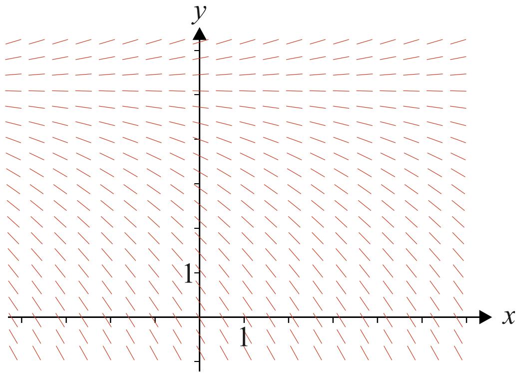
(10 point) a) Bestem y_1 og y_2.

Opgave 8 Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning.

Til opgaven hører et bilag.

Det oplyses, at funktionen *f* er en løsning til differentialligningen, samt at $f(0)=4$.

10 point a) Benyt vedlagte bilag til at tegne grafen for *f*.



Opgave 9 Lad *f* betegne tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel *X*.

(10 point) a) Forklar, hvad integralet $\int_{-\infty}^{13} f(x)\,dx$ fortæller om den stokastiske variabel *X*.

Opgave 10 En funktion *f* er givet ved

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x},\qquad x>0.$$

(10 point) a) Bestem $\int f(x)\,dx$.

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

Delprøve 2

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 11

Grafik: freepik.com

Tabellen viser sammenhørende værdier for kilometerstand og brugtvognspris for et bestemt bilmærke.

Kilometerstand (1000 km)	58	56	…	25	38
Brugtvognspris (1000 kr.)	173,3	152,7	…	188,4	193,7

(Hele tabellen med alle 130 *datapunkter findes i bilaget Biler.xlsx)*

I en model kan sammenhængen mellem kilometerstand og brugtvognspris beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner brugtsvognsprisen (målt i 1000 kr.), og x betegner kilometerstanden (målt i 1000 km).

(10 point) a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b.

(10 point) b) Gør rede for, at residualerne med god tilnærmelse kan siges at være normalfordelte.

Opgave 12 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 2x + 5.$$

(10 point) a) Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(0,10)$.

Opgave 13 En normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim N(5,1)$.

(10 point) a) Tegn grafen for fordelingsfunktionen hørende til X.

(10 point) b) Bestem tallet k, så $P(X \leq k) = 0,4$.

Opgave 14 En funktion *f* er løsning til differentialligningen

$$y' = y + x - x^2.$$

Det oplyses, at grafen for *f* går gennem $P(1,3)$.

(10 point) a) Bestem en forskrift for *f*.

Opgave 15 En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2 \\ t^3 - 4t + 3 \end{pmatrix}, \quad -3 \le t \le 3.$$

(10 point) a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{s}$ har et dobbeltpunkt *P* svarende til parameterværdien $t = 2$.

(10 point) b) Bestem den anden parameterværdi hørende til dobbeltpunktet *P*.

(10 point) c) Bestem den spidse vinkel mellem de to tangenter til parameterkurven for $\vec{s}$ i *P*.

Opgave 16 En andenordens differensligning er bestemt ved

$$y_{n+1} = 6 \cdot y_n - 9 \cdot y_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Det oplyses, at $y_0 = 5$ og $y_1 = 10$.

(10 point) a) Tegn et punktplot for udviklingen i y_n, når $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

(10 point) b) Opskriv løsningen til differensligningen på lukket form.

Opgave 17 En funktion *f* af to variable er givet ved

$$f(x,y) = \frac{24 \cdot x}{x^2 + y^2 + 4}.$$

(10 point) a) Bestem koordinatsættet til hvert af de to stationære punkter for funktionen *f*.

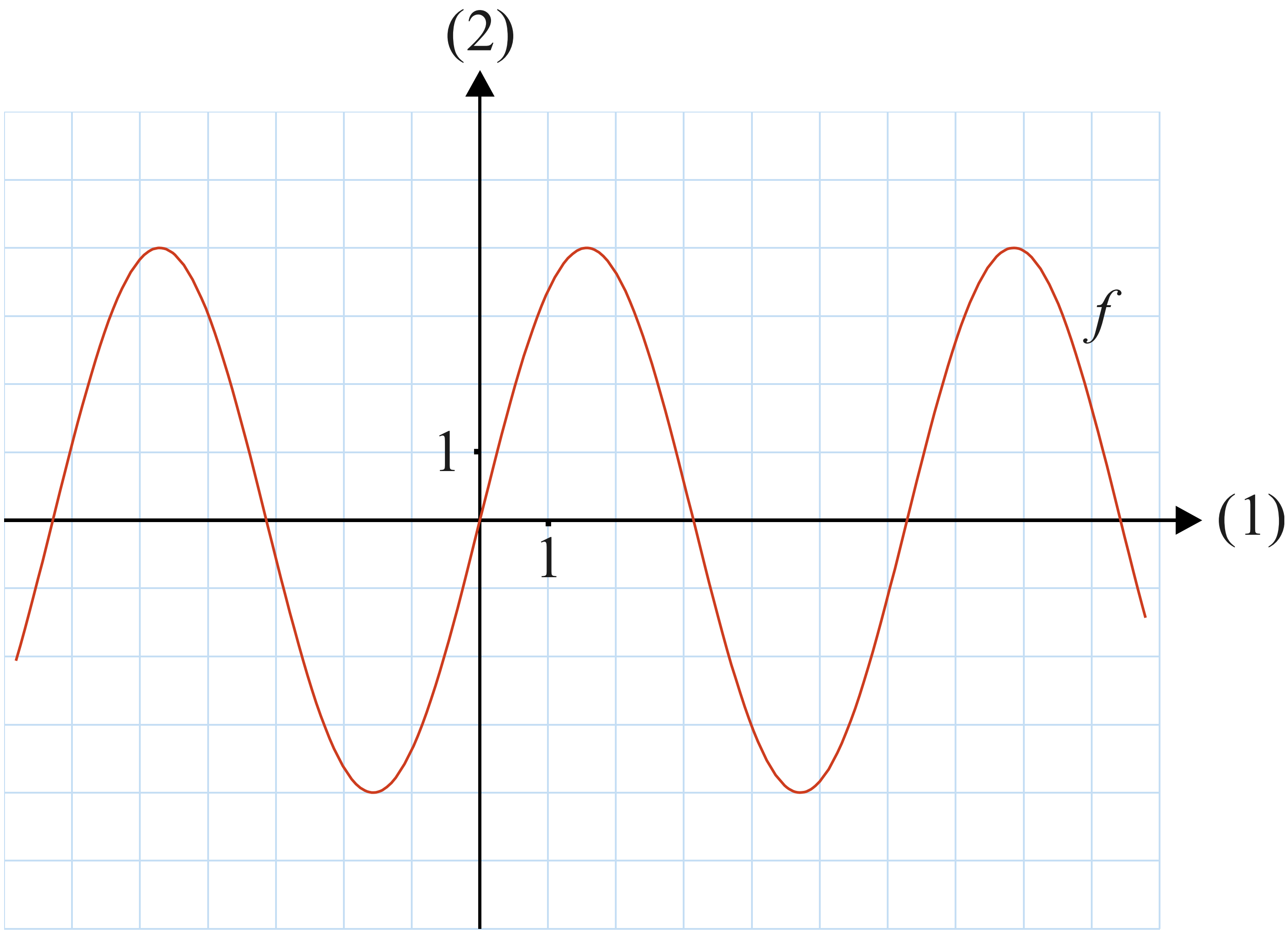
(10 point) b) Argumentér for, at niveaukurven bestemt ved ligningen $f(x,y) = 4$ er en cirkel.

BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr.	Antal ark i alt	Tilsynsførende

Bilag til opgave 3

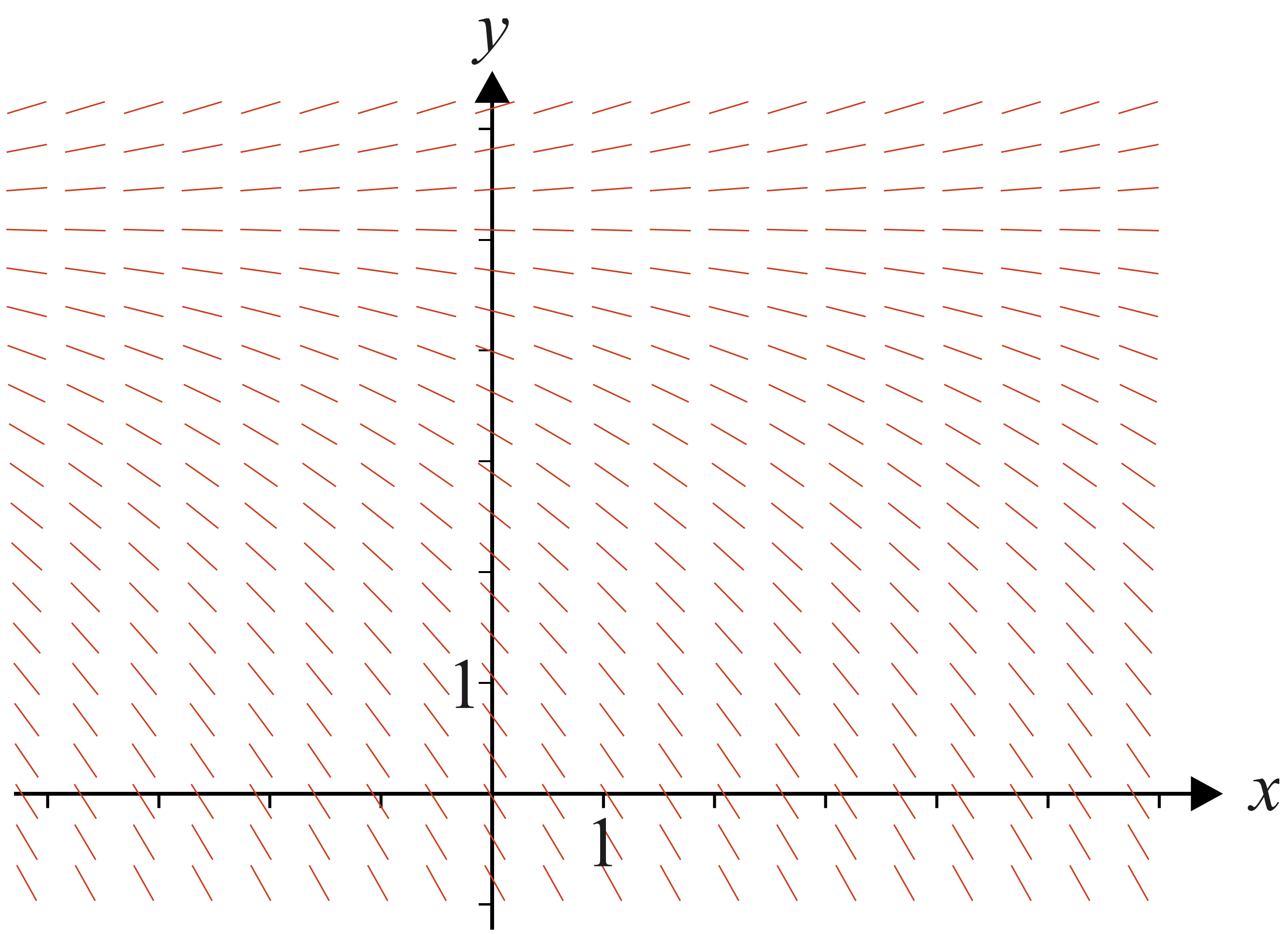


BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr.	Antal ark i alt	Tilsynsførende

Bilag til opgave 8



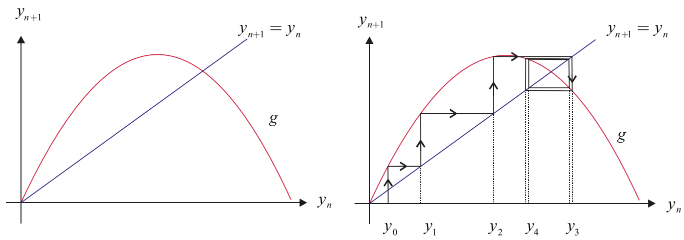
BILAG: Indstiksark til formelsamlingen fra forberedelsesmateriale

Differensligning af første orden (F1) $y_{n+1}=g(y_n),\ n=0,1,2...$

Lineær differensligning af første orden med konstante koefficienter (F2) $y_{n+1}=a\cdot y_n+b,\ n=0,1,2...$

Løsning på lukket form (F3) $y_n=a^n\cdot y_0+b\cdot\dfrac{a^n-1}{a-1},\quad n=0,1,2,...,\ \ a\neq 0,\ \ a\neq 1.$

Cobwebdiagram (F4)



Cobwebdiagram   Cobwebdiagram med begyndelsesværdi y_0

Fikspunkt $\tilde{y}$ for differensligning af første orden $y_{n+1}=g(y_n)$

(F5) $g(\tilde{y})=\tilde{y}$

(F6) $|g'(\tilde{y})|<1$, stabilt (tiltrækkende)

$|g'(\tilde{y})|>1$, ustabilt (frastødende)

Homogen lineær differensligning af anden orden med karakteristisk polynomium P

(F7) $y_{n+1}=\alpha\cdot y_n+\beta\cdot y_{n-1}\ ,\ \ \beta\neq 0,\ \ n=1,2,3,....$

(F8) $P(x)=x^2-\alpha\cdot x-\beta$, diskriminant D, rødder m_1 og m_2

(F9) $D>0\ :\ y_n=C_1\cdot m_1{}^n+C_2\cdot m_2{}^n$

$D=0\ :\ y_n=C_1\cdot m_1{}^n+C_2\cdot n\cdot m_1{}^n$

Newton-Raphsons differensligning til bestemmelse af nulpunkter (F10) $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,2,...$