Flere separable differentialligninger

Separation af variable

Vi så sidste gang, hvordan vi kunne bruge separation af variable til at løse separable differentialligninger.

Sætning 1.1 (Separation af variable)**.** *Lad f og g være kontinuerte funktioner, samt $g \neq 0$. Så har differentialligningen*

$$y' = h(x)g(y)$$

den fuldstændige løsning $y = f(x)$, der opfylder, at

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx.$$

Opgave 1

i) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}.$$

ii) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' = (x+1)\frac{1}{x^2+2x-1}(-y^2).$$

Opgave 2

i) Bestem den partikulære løsning til differentialligningen

$$y' = 2xe^y,$$

der går gennem punktet $(0, 1)$.

ii) Bestem den partikulære løsning til differentialligningen

$$y' = (3x+1)\sin(x^3+x)y,$$

der går gennem punktet $(0, 1)$.

Opgave 3

i) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen
$$\frac{y'}{y^3} = x^2 + x + 1.$$

ii) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen
$$\frac{y'}{\cos(x)e^{\sin(x)}} = y.$$

iii) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen
$$\frac{y'}{y^5} = x^5$$

iv) Bestem den partikulære løsning til differentialligningen
$$\frac{y'}{\cos(x)\cos(\sin(x))} = \frac{1}{y},$$
der opfylder, at $y(0) = 4$.

Opgave 4

Et bestemt vejrfænomen kan beskrives ved differentialligningen
$$y' \cdot y^4 = 12x^3 \cos(3x^4) + x^2 \sin\left(\frac{1}{3}x^3\right). \tag{1.1}$$

i) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen (1.1).

ii) Bestem den partikulære løsning til differentialligningen, der går gennem punktet $(0, 2)$.

iii) Brug dit svar til at bestemme væksten af y, når $y = 3$. (Brug Maple).

Opgave 5

Brug separation af variable til at vise, at differentialligningen
$$y' = \frac{x^n}{y^m}$$
har den fuldstændige løsning
$$y(x) = \sqrt[m+1]{\frac{m+1}{n+1}x^{n+1} + k}.$$