Vektorfunktioner

Definition af vektorfunktion

Nyt emne; vektorfunktioner. Vektorfunktioner er funktioner af én variabel hvis dispositionsmængde består af vektorer. Vi har allerede stiftet bekendtskab med en type vektorfunktion; linjens parameterfremstilling. Hvis vi har en retningsvektor $\vec{r}$ og et punkt $P(x_0, y_0)$ som linjen skærer igennem har vi set at linjens parameterfremstilling er givet ved

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Vil vi repræsentere denne som en vektorfunktion kan vi skrive

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + tr_1 \\ y_0 + tr_2 \end{pmatrix},$$

og $\vec{r}$ er nu en funktion af t. Vi skriver som tidligere $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Vi vil definere en vektorfunktion mere præcist:

Definition 1.1 (Vektorfunktion)**.** En funktion $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

kaldes en *vektorfunktion*. Funktionerne x og y kaldes for vektorfunktionens *koordinatfunktioner*.

Grafen for en vektorfunktion kaldes ofte for en *parameterkurve*, og vektorfunktionen er denne kurves *parameterfremstilling.*

Eksempel 1.2. Vi vil ofte tænke på vektorfunktioner som funktioner, der beskriver placeringen af en partikel i planen. Hvis en partikel bevæger sig langs en kurve i planen, så vil parameterfremstillingen for denne kurve en vektorfunktion $\vec{r}$, og tilsvarer partiklens stedvektor. Parameterkurven vil i dette tilfælde kaldes for *banekurven.*

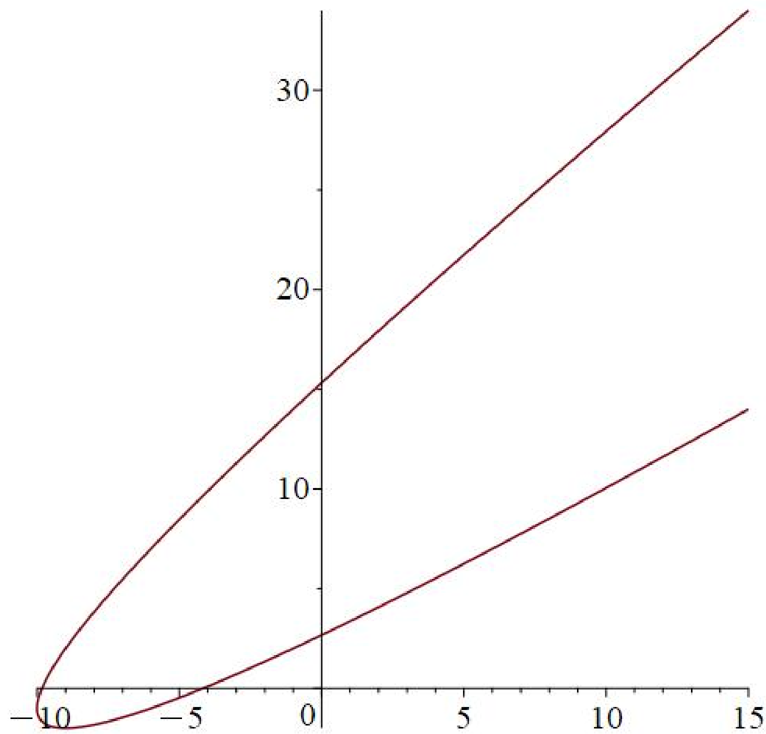
Eksempel 1.3. Lad os betragte vektorfunktionen $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 10 \\ t^2 + 2t - 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan tegne denne i Maple ved at skrive

```
with(Gym):
r(t):= <t^2-10,t^2+2t-1>
vektorPlot(r(t))
```

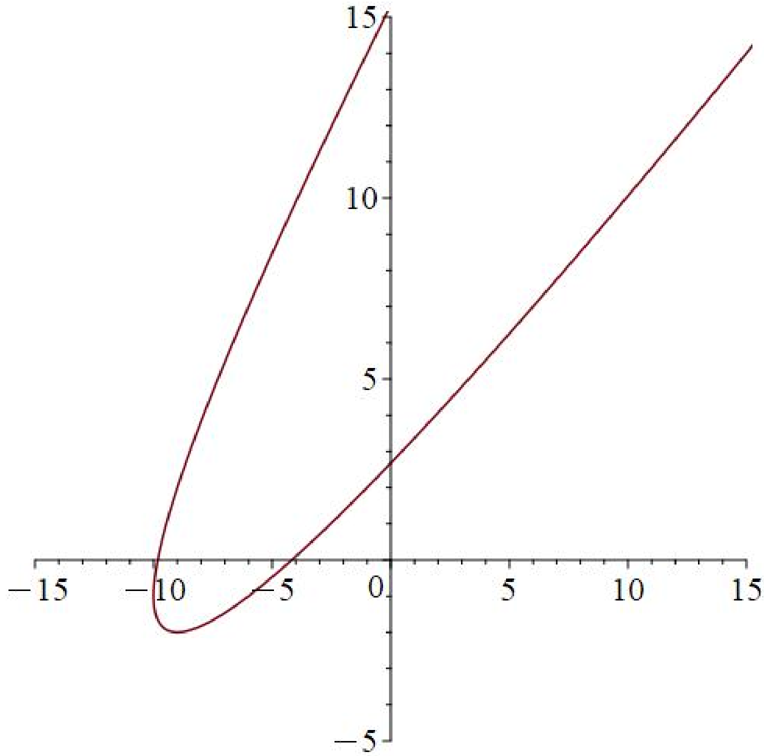
Vi får så følgende plot



Vi kan specificere akserne og t-intervallet ved at skrive

```
vektorPlot(r(t), t = -7 .. 7, view = [-15 .. 15, -5 .. 15]).
```

Dette giver følgende plot



Eksempel 1.4. Vi betragter igen $\vec{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ givet ved

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}t^2-10\\ t^2+2t-1\end{pmatrix}.$$

Hvis vi ønsker at bestemme koordinaterne til et givent t, så indsættes dette blot i koordinatfunktionen. Lad os bestemme $\vec{r}(2)$.

$$\vec{r}(2)=\begin{pmatrix}2^2-10\\ 2^2+2\cdot 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ 7\end{pmatrix}.$$

Skæring med akser

Vi kan for vektorfunktioner være interesseret i, hvornår de skærer akserne. For at bestemme skæringen med x-aksen for parameterkurven for en vektorfunktion

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$$

løses ligningen $y(t) = 0$. Løsningen t_0 indsættes så i vektorfunktionen og skæringspunktets koordinater vil da være

$$\vec{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skal skæringspunktet med y-aksen findes sættes koordinatfunktionen $x(t)$ tilsvarende lig 0.

Eksempel 2.1. Vi betragter nu $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t^2 - 6t + 9 \end{pmatrix}.$$

Skal skæringspunkterne med x-aksen findes løses ligningen

$$y(t) = t^2 - 6t + 9 = 0,$$

hvilket vi kan løse med diskriminantformlen og får løsningerne

$$t_0 = 3$$

Dette indsættes i koordinatfunktionen $x(t)$:

$$x(3) = 3^2 - 4 = 5$$

Derfor har parameterkurven for $\vec{r}$ én skæring med x-aksen i punktet $(5, 0)$. Skal vi tilsvarende finde skæringspunkterne med y-aksen sættes koordinatfunktionen x lig 0, og vi får:

$$x(t) = t^2 - 4 = 0,$$

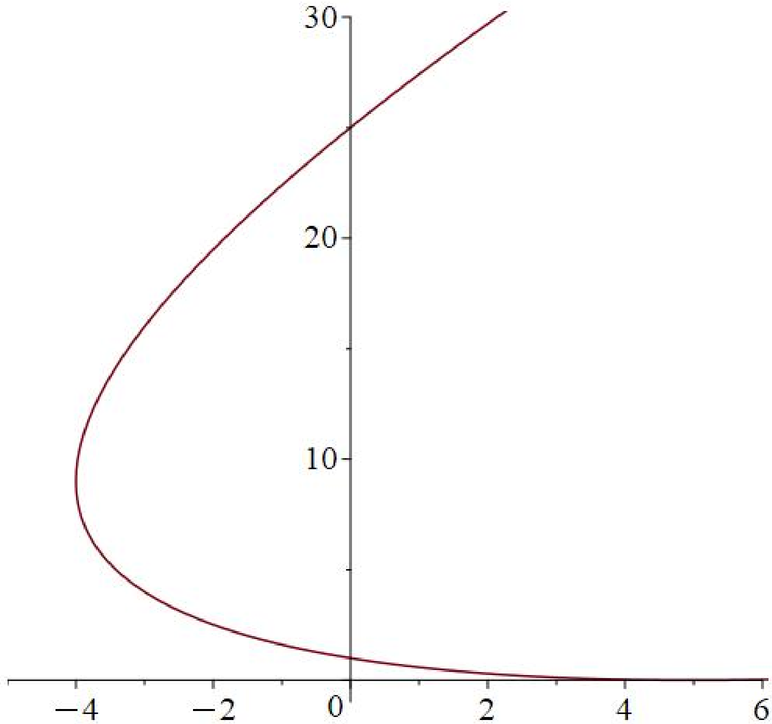
hvilken har løsningerne 2 og -2. Dette indsættes i koordinatfunktionen y, og vi får

$$y(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 9 = 1$$

og

$$y(-2) = (-2)^2 - 6(-2) + 9 = 25.$$

Derfor har vi desuden skæringspunkterne med y-aksen $(0, 1)$ og $(0, 25)$. Vi tegner parameterkurven i Maple og får følgende plot.



Det ser af grafen ud til, at vi har fundet de korrekte skæringspunkter med akserne.

Opgave 1

i) En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t+4 \\ 2t+5 \end{pmatrix}.$$

Bestem $\vec{r}(-1)$ og $\vec{r}(1)$, og tegn parameterkurven for $\vec{r}$ i Maple. Hvilken vej bevæger $\vec{r}$ sig, når t vokser?

ii) En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2-t-1 \\ -2t^2+2t+4 \end{pmatrix}.$$

Bestem $\vec{r}(3)$ og $\vec{r}(4)$, og tegn parameterkurven for $\vec{r}$ i Maple. Hvilken vej bevæger $\vec{r}$ sig, når t vokser?

iii) En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^5 - 1 \\ t^3 + 2t^2 + 4 \end{pmatrix}.$$

Bestem $\vec{r}(-1)$ og $\vec{r}(2)$, og tegn parameterkurven for $\vec{r}$ i Maple. Hvilken vej bevæger $\vec{r}$ sig, når t vokser?

Opgave 2

Bestem skæringen med x og y-akserne for følgende vektorfunktioner

1) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2t - 2 \\ 5t - 10 \end{pmatrix}$

2) $\vec{r} = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t - 2 \end{pmatrix}$

3) $\vec{r} = \begin{pmatrix} t - 10 \\ t^2 - 6t - 12 \end{pmatrix}$

4) $\vec{r} = \begin{pmatrix} t^4 - 1 \\ t^6 - t^4 + t^2 + 2t + 2 \end{pmatrix}$

5) $\vec{r} = \begin{pmatrix} \sqrt{t} - 2 \\ -3t^3 + 6t - 9 \end{pmatrix}$

6) $\vec{r} = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$