

Afstand mellem linje og punkt

Afstand mellem linje og punkt

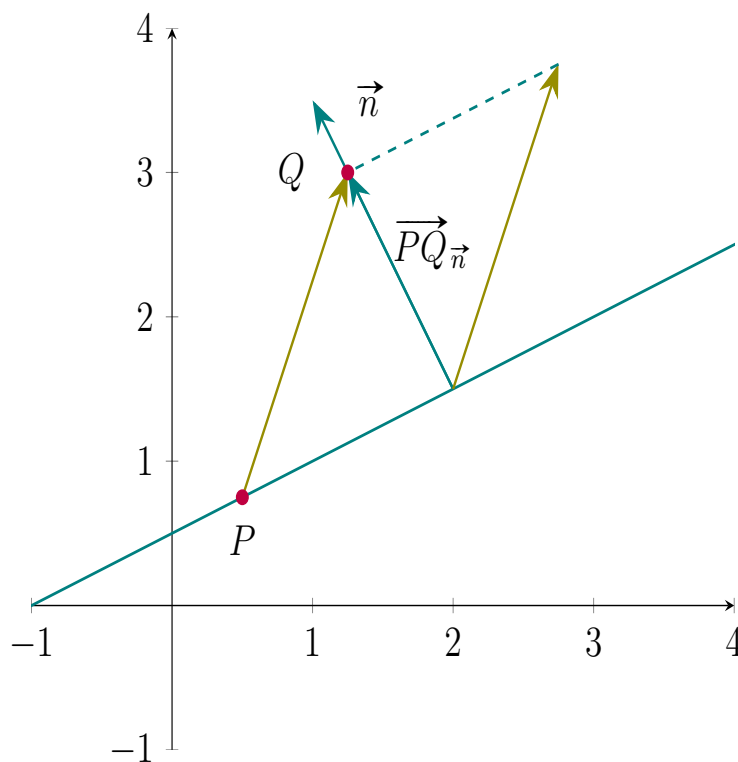
Vi kan bruge projektioner af vektorer til at bestemme afstanden mellem et punkt P og en linje l i planen. Det er ikke umiddelbart klart ud fra formlen at det er projektioner, vi bruger, men det vil ses af beviset. Afstanden findes ved følgende sætning.

Sætning 1.1 (Afstand mellem punkt og linje). *Har vi et punkt $Q(x_1, y_1)$ og en linje l givet ved ligningen*

$$ax + by + c = 0,$$

så kan vi bestemme afstanden mellem l og Q ved

$$\text{dist}(Q, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Figur 1: Afstand fra punkt til linje

Bevis

Vi skal bevise afstandsformlen. Vi bruger Figur 1 som skabelon

- i) Tegn en linje l i et koordinatsystem som på Figur 1.
- ii) Tegn et punkt $Q(x_1, y_1)$ i koordinatsystemet. Det må ikke ligge på l .
- iii) Tegn et punkt $P(x_0, y_0)$ på l . Du bestemmer selv hvor.
- iv) Tegn en vektor \overrightarrow{PQ} fra P til Q .
- v) Tegn en normalvektor \vec{n} til l , der går gennem Q
- vi) Tegn en repræsentant for den samme vektor som \overrightarrow{PQ} . Denne skal starte samme sted som \vec{n} .
- vii) Tegn projektionen $\overrightarrow{PQ}_{\vec{n}}$.
- viii) Overbevis dig selv om, at afstanden mellem l og Q må være lig længden af $\overrightarrow{PQ}_{\vec{n}}$.
- ix) Overbevis dig selv om, at \vec{n} har koordinaterne $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- x) Opskriv koordinaterne til \overrightarrow{PQ}
- xi) Udnyt, at længden af en projektion $\overrightarrow{a}_{\vec{b}}$ er givet ved

$$|\overrightarrow{a}_{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

til at opskrive længden af $\overrightarrow{a}_{\vec{b}}$.

- xii) Hæv parentesen i tælleren af din brøk.
- xiii) Vi er nu næsten færdige. Isolér c i linjens ligning $ax + by + c = 0$.
- xiv) Indsæt punktet $P(x_0, y_0)$ i ligningen.
- xv) Sammenlign udtrykket for c med tælleren i din brøk og lav en substitution.
- xvi) Sammenlign dit resultat med sætningen.