Regneregler for differentiation

Regneregler

Sætning 1.1. *i) For den naturlige logaritme* ln *har vi*

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

ii) For den naturlige eksponentialfunktion e^x *har vi*

$$(e^x)' = e^x.$$

iii) For en given eksponentialfunktion a^x *har vi*

$$(a^x)' = a^x \ln(a).$$

iv) For potensfunktioner (og specielt polynomier) x^a *har vi*

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

Vi vil bevise iv) i tilfældet, at a er et heltal. Vi vil bevise iv) ved induktion. Princippet i induktionsbeviser er som følgende: Lad os sige, at vi ønsker at bevise noget for ethvert naturligt tal n. Vi kan så starte med at give et bevis i tilfældet at $n = 0$ eller $n = 1$ og derefter vise, at hvis det er sandt for et vilkårligt naturligt tal k, så må det også være sandt for $k + 1$.

Eksempel 1.2. Det arketypiske eksempel på et induktionsbevis er følgende: Bevis, at summen af de første n heltal er givet ved $n(n + 1)/2$, altså

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

Bevis. Basisskridt: Antag, at $n = 1$. Så er $n(n + 1)/2 = 1(2)/2 = 1$, altså er (1.1) sand for $n = 1$.

Induktionsskridt: Antag nu, at (1.1) er sandt for et vilkårligt $n > 1$. Vi lægger $n + 1$ til på begge sider af lighedstegnet i (1.1) og får

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2},\end{aligned}$$

og vi er færdige. ■

Bevis for iv). Basisskridt: Antag, at $a = 1$. Så har vi $x^a = x^1$ og $(x^1)' = 1 = 1x^0$ af en tidligere sætning.

Induktionsskridt: Antag nu, at $(x^a)' = ax^{a-1}$ for et vilkårligt $a > 1$, hvor a er et heltal. Vi ser på

$$\begin{aligned}
x^{a+1} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{a+1} - x^{a+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^a(x+h) - x^a x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^a x + (x+h)^a h - x^a x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x[(x+h)^a - x^a] + (x+h)^a h}{h} \\
&= xax^{a-1} + x^a \\
&= (a+1)x^a,
\end{aligned}$$

og vi er færdige. ■

Lidt om eksponentialfunktionen

Når vi har med eksponentiel vækst at gøre, vil vi ofte gerne sige noget om væksten til et bestemt tidspunkt t, altså tangenthældningen af funktionen i punktet tilsvarende tid t. Eksponentiel vækst er på formen

$$f(x) = a^x.$$

Enhver eksponentiel funktion kan omskrives til den naturlige eksponentialfunktion som

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a)x} = e^{kx},$$

hvor $k = \ln(a)$. Dette er smart, da den afledede af f så blot bliver en konstant gange funktionen:

$$f'(x) = ke^{kx}$$

af kædereglen. Tilsvarende vil fordoblings og halveringskonstanten for f så være henholdsvist givet ved

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{k}, \qquad \text{og } T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{k}.$$

Opgave 1

Differentiér følgende funktioner

1) $x^{\frac{27}{2}}$	2) e^{10x}
1) $\dfrac{e^{2x+3}}{x^2}$	2) $\dfrac{3}{x^{x^{\frac{3}{2}}+1}}$
1) $4e^{2x^2} - \ln(3x)$	2) $\ln(25x^2)$
1) 10^x	2) $\dfrac{ln(x)}{\ln(x^2)}$
1) $ln(e^{2x})$	2) $e^{2ln(x^2)}$

Opgave 2

i) Antallet af mennesker i en given befolkning kan beskrives med

$$N(t) = 2.3e^{0.05t},$$

hvor t er tid målt i år og $N(t)$ er befolkningens størrelse målt i mio. mennesker. Hvilken væksttype vokser befolkningen med? Bestem den hastighed befolkningen vokser med både som funktion af t og til tiden $t = 10$ og $t = 50$. Hvad er fordoblingskonstanten for befolkningen?

ii) Temperaturen H i et glas vand kan modelleres i et rum med modellen

$$H(t) = 10e^{-0.023t}.$$

t er tid i minutter og H er grader celsius. Hvilken væksttype er dette? Hvis modellen er korrekt, hvor varmt er der så i det omkringliggende miljø? Hvad er temperaturen af vandet til tid $t = 0$? Hvor hurtigt aftager vandets temperatur efter 10min? Hvad er halveringstiden for temperaturen? Hvornår er vandet 2 grader? Hvad med 0 grader?