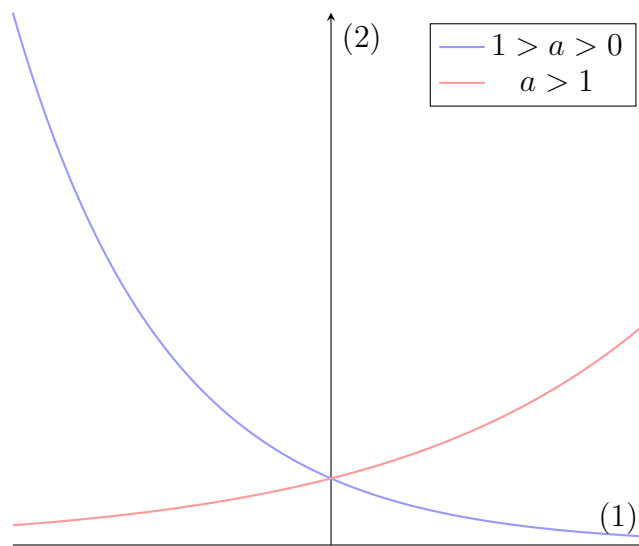


# Eksponentielle funktioner og regression

Vi husker på, at en eksponentiel funktion er en funktion på formen

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

hvor  $a, b > 0$ . Eksponentiel vækst kan se ud på forskellige måder. Der skældnes generelt mellem to tilfælde:  $a > 1$  og  $1 > a > 0$  (Hvad sker der, hvis  $a = 1$ ?). Disse to tilfælde fremgår af Fig. 1.



Figur 1: Eksponentiel vækst i de to tilfælde, at  $1 > a > 0$  og  $a > 1$ .

## Eksponentiel regression

Har vi data, hvor vi forventer at kunne beskrive det ved en lineær sammenhæng, så kan vi "fitte" den bedste rette linje på det data. Dette kalder vi lineær regression. Vi kan gøre det præcist samme med eksponentiel data, altså data, vi forventer kan beskrives ved eksponentiel vækst. Vi udnytter logaritmen til at linearisere modellen. Betragt derfor en eksponentiel funktion  $f(x) = b \cdot a^x$ . Tager vi den naturlige logaritme af denne fås

$$\begin{aligned}\ln(f(x)) &= \ln(b \cdot a^x) \\ &= \ln(b) + \ln(a^x) \\ &= \underbrace{\ln(b)}_{=\beta} + x \underbrace{\ln(a)}_{=\alpha}.\end{aligned}$$

Vi har derfor en lineær sammenhæng mellem  $F(x) = \ln(f(x))$  og  $x$  givet ved

$$F(x) = \alpha x + \beta,$$

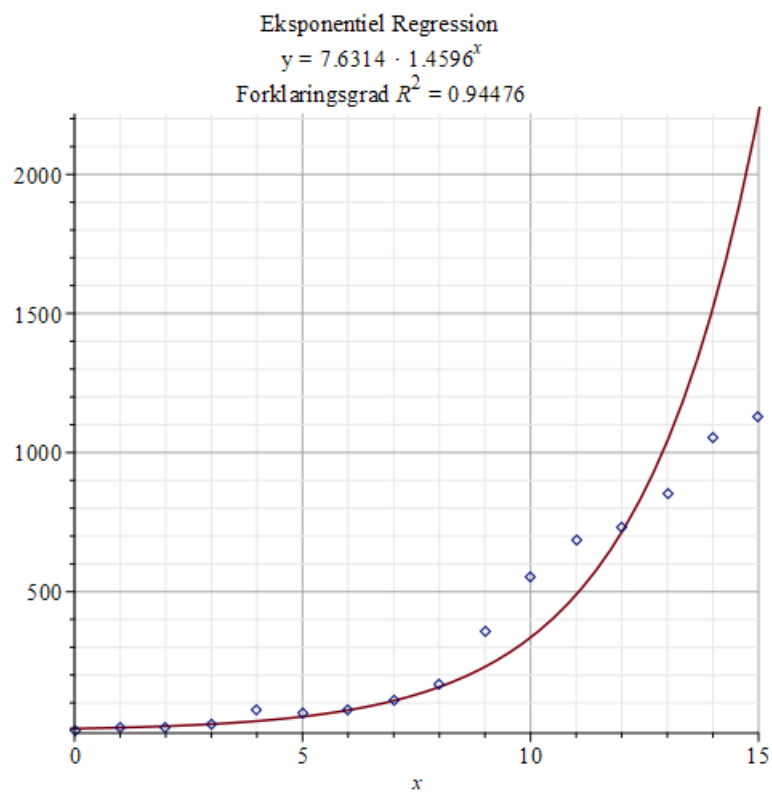
hvor  $\alpha = \ln(a)$  og  $\beta = \ln(b)$ . Vi kan derfor bruge nøjagtigt samme værktøj til eksponentiel regression som til lineær regression. Vi tager altså logaritmen af alt vores data. Vi laver så lineær regression, og til sidst tager vi  $e$  og opløfter i vores regression.

**Eksempel 1.1.** Vi antager, at det daglige antal smittede med omikron-varianten af Covid-19 vokser eksponentielt. På Fig. 2 ses blandt andet det daglige antal bekræftede smittede af omikron-varianten. Data er hentet tors. d. 16. dec. 2021.

Provedato	Positive PCRtest, hvor der er foretaget Variant-PCR analyse	Bekræftede tilfælde af Omikron (B.1.1.529)	Inkonklusiv	Andre varianter	Omikron i pct. af Variant-PCR test
15DEC2021	1	.	.	1	0,00
14DEC2021	156	124	.	32	79,49
13DEC2021	2620	557	8	2055	21,26
12DEC2021	5521	1130	13	4378	20,47
11DEC2021	6262	1053	9	5200	16,82
10DEC2021	6457	855	10	5592	13,24
09DEC2021	6345	734	15	5596	11,57
08DEC2021	6411	686	4	5721	10,70
07DEC2021	7106	551	11	6544	7,75
06DEC2021	6961	355	19	6587	5,10
05DEC2021	5066	169	7	4890	3,34
04DEC2021	5166	112	10	5044	2,17
03DEC2021	5087	77	15	4995	1,51
02DEC2021	4449	63	25	4361	1,42
01DEC2021	4404	77	12	4315	1,75
30NOV2021	5315	24	19	5272	0,45
29NOV2021	4959	12	29	4918	0,24
28NOV2021	3921	11	9	3901	0,28
27NOV2021	3981	3	8	3970	0,08

Figur 2: Omikron-data

Uden at tage forbehold for variationen i testintensitet så vil vi fitte en eksponentiel regressionslinje på antallet af omikron-bekræftede som funktion af tiden. Dette kan ses på Fig. 3



Figur 3: Ekspontiel regression på Omikron-varianten

## Opgave 1

Vi betragter igen Omikron-datasættet.

- i) Vi skal tage højde for den daglige variation i testintensitet. Derfor tager vi antallet af bekræftede smittede (Søjle 3) og dividerer det med det daglige antal Variant-PCR-tests (Søjle 2). Dette giver den procentvise andel af omikron/variant-pcr-test (Søjle 6). Lav nu eksponentiel regression på dette. Ser det rigtigere ud?
- ii) Det ser ud til at smitten vokser meget tæt på eksponentielt i starten, men flader lidt ud senere. Har I et bud på, hvorfor dette sker? Der er ikke nødvendigvis noget rigtigt svar.
- iii) I stedet for at bruge **ExpReg** i Maple, så skal I tage  $\ln$  af al dataen og plotte det op mod tiden. Ser det lineært ud? Brug nu lineær regression på dette data. Du får så en funktion  $F(x) = ax + b$ . Bestem nu  $f(x) = e^{ax+b}$  og sammenlign denne med regressionen fra eksemplet. Kommentér på resultatet.
- iv) Er det realistisk at omikron-variantens vækst kan blive ved med at være eksponentiel? Hvilke eventuelle begrænsende faktorer er der?