

To ligninger med to ubekendte

To lineære ligninger med to ubekendte

Hvis vi har to linjer l og m i planen, så har disse netop et skæringspunkt, hvis de ikke er parallelle. Vi husker på, at rette linjer kan beskrives ved følgende ligninger:

$$\begin{aligned}l &: y = ax + b, \\m &: y = cx + d.\end{aligned}$$

Skal vi finde skæringen mellem sådan to linjer, så tilsvare det at løse to lineære ligninger med to ubekendte. Vi skal i dag lære to metoder til at løse sådanne ligningssystemer.

Eksempel 1.1 (Lige store koefficienters metode). Vi skal bestemme løsningen til ligningerne

$$4x + 6y = 12 \tag{1.1}$$

og

$$x + 2y = 6. \tag{1.2}$$

Vi vil bruge lige store koefficienters metode. Vi starter med at gange (1.2) med 4 og får

$$4x + 8y = 24.$$

Vi trækker nu (1.2) fra (1.1) og får

$$\begin{aligned}4x - 4x + 6y - 8y &= 12 - 24 \Leftrightarrow -2y = -12 \\&\Leftrightarrow y = 6.\end{aligned}$$

Vi indsætter nu $y = 6$ i (1.2).

$$\begin{aligned}x + 2y &= 6 \Leftrightarrow x + 2 \cdot 6 = 6 \\&\Leftrightarrow x = 6 - 12 = -6.\end{aligned}$$

Løsningen til ligningssystemet er derfor $(x, y) = (-6, 6)$.

Eksempel 1.2 (Substitutionsmetoden). Vi skal bestemme løsningen til samme ligninger som før.

$$4x + 6y = 12 \quad (1.3)$$

og

$$x + 2y = 6. \quad (1.4)$$

Vi vil nu benytte os af substitutionsmetoden, som I har set i grundforløbet. Vi isolerer x i (1.4).

$$x + 2y = 6 \Leftrightarrow x = 6 - 2y$$

Dette indsættes nu i (1.3).

$$\begin{aligned} 4x + 6y &= 12 \Leftrightarrow 4(6 - 2y) + 6y = 12 \\ &\Leftrightarrow 24 - 8y + 6y = 12 \\ &\Leftrightarrow -2y = -12 \\ &\Leftrightarrow y = 6. \end{aligned}$$

Dette indsættes i ligningen for x , vi brugte før.

$$\begin{aligned} x &= 6 - 2y \\ &= 6 - 2 \cdot 6 \\ &= 6 - 12 \\ &= -6. \end{aligned}$$

Også med denne metode finder vi altså løsningen $(x, y) = (-6, 6)$.

Opgave 1

Løs følgende ligningssystemer ved brug af både substitution og lige store koefficienters metode:

i)

$$\begin{aligned} y &= 4x + 2, \\ x + y &= 2. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ -3x + 6y &= 0. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}2x - 10y &= 8, \\ -x + 6y &= 1.\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}1x - 2y &= 3, \\ 4x - 5y &= 6.\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y &= 3, \\ 3x - 9y &= 3.\end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned}2x + 4y &= 8, \\ 3x - 9y &= 27.\end{aligned}$$

Opgave 2

i) Løs følgende ikke-lineære ligningssystem ved substitutionsmetoden.

$$\begin{aligned}x^2 - x &= y, \\ x + y &= 4\end{aligned}$$

Opgave 3

Løs følgende ligningssystem ved lige store koefficienters metode.

$$\begin{aligned}x + y + z &= 4, \\ x - y + 2z &= 8, \\ 2x - 2y + 8z &= 8.\end{aligned}$$