Partielle afledede

Partielle afledede

Vi så sidste gang på snitkurver og de funktioner, hvis grafer danner snitkurverne. Disse funktioner kalder vi *snitfunktioner*. Mere præcist, hvis vi har en funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

så har vi snitfunktionerne $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $h_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved henholdsvist

$$g_k(y) = f(k, y),\ h_k(x) = f(x, k),$$

som begge er funktioner af én variabel. Hvis disse er differentiable, så kan vi bestemme deres afledede funktion præcist som vi er vant til.

Eksempel 1.1. Lad f være givet ved

$$f(x, y) = x^2 + 2y.$$

Så har vi for hvert k snitfunktionerne

$$g_k(y) = f(k, y) = k^2 + 2y$$

og

$$h_k(x) = f(x, k) = x^2 + 2k.$$

Disse er differentiable funktioner. Derfor kan de differentieres som sædvanligt:

$$\frac{d}{dy} g_k(y) = 2,$$

og

$$\frac{d}{dx} h_k(x) = 2x.$$

Det er dog en smule besværligt at skulle konstruere en snitfunktion hver gang vi vil bestemme en sådan afledt. Derfor defineres *de partielle afledede* af en funktion af to variable.

Definition 1.2. Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en funktion af to variable. Så defineres den partielle afledede i (x, y) til f med hensyn til x som grænseværdien

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h},$$

og den partielle afledede i (x, y) med hensyn til y defineres som grænseværdien

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

Det er ikke nødvendigvist givet, at disse grænseværdier eksisterer, men vi vil kun betragte tilfælde, hvor de eksisterer. Vi noterer også $\frac{\partial}{\partial x} f$ som f'_x, og tilsvarende noteres $\frac{\partial}{\partial y} f$ som f'_y.

Når vi laver partiel differentiation med henhold til x, så differentierer normalt mht. x og betragter y som en konstant og vice versa.

Eksempel 1.3. Rumfanget af en cylinder afhænger af to variable - radius r og højde h. Rumfanget af en cylinder er givet ved

$$R(h,r) = h\pi r^2.$$

De partielle afledede af cylinderen er derfor

$$\frac{\partial}{\partial h} R(h,r) = \pi r^2,$$

og

$$\frac{\partial}{\partial r} R(h,r) = 2h\pi r.$$

Væksten i højdens retning er derfor konstant, hvorimod væksten i radius retning er lineært voksende.

Eksempel 1.4. En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = \ln(x) + \sqrt{y}.$$

Så er de partielle afledede givet ved

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{x}$$

og

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Til slut defineres *gradienten* for en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Definition 1.5 (Gradient)**.** Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet. Så defineres gradienten til f som vektoren

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \end{pmatrix}$$

Gradienten for en funktion er den retning, hvor funktionen vokser mest i et givent punkt.

Opgave 1

Bestem de partielle afledede til følgende funktioner

1) $f(x,y) = x^2 + 3x + y$
2) $f(x,y) = xy + x^2 + 4y$
3) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$
4) $f(x,y) = \sqrt{xy} + \dfrac{1}{x+y}$
5) $f(x,y) = (x+y)(x-y)$
6) $f(x,y) = 10(3x+2y)^2$
7) $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$
8) $f(x,y) = \cos(x+y)\sin(yx)$

Opgave 2

i) Lad f være givet ved

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2.$$

Bestem

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y),$$

og

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y),$$

og sammenlign dine resultater

ii) Lad f være givet ved

$$f(x,y) = e^{(x-y)(x+y)}$$

Bestem

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y),$$

og

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y),$$

og sammenlign dine resultater.

Opgave 3

Bestem gradienten til følgende funktioner:

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$
2) $f(x,y) = (x-2y)(3y-4x^2)$
3) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$
4) $f(x,y) = e^{x^2+xy+y^2}$
5) $f(x,y) = \ln(x+y+10)$
6) $f(x,y) = (x+y)^5$

Opgave 4

i) Lad f være givet ved

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2.$$

Bestem gradienten af f i punktet $(-1,3)$.

ii) Lad f være givet ved

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}.$$

Bestem gradienten af f i punktet $(2,-4)$

Opgave 5

I følgende opgave skal I bevise, at partiel differentiation fungerer nøjagtigt som normal differentiation i tilfældet at vi kan dele vores funktion af to variable op på en pæn måde.

i) Vis, at hvis $f(x,y) = g(x) + h(y)$, så er $f'_x(x,y) = g'(x)$ og $f'_y(x,y) = h'(y)$

ii) Vis, at hvis $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ så er $f'_x(x,y) = g'(x)h(y)$ og $f'_y(x,y) = g(x)h'(y)$.