

Kuglens ligning

Opgave 1

- i) En kugle K har centrum i $(0, 0, 0)$ og radius 1. Bestem ligningen for K .
- ii) En kugle K har centrum i $(-2, 4, 8)$ og radius 5. Bestem ligningen for K .
- iii) En kugle K har centrum i $(-1, -2, 5)$ og radius 3. Bestem ligningen for K .
- iv) En kugle K har centrum i $(0.5, -11, 13)$ og radius $\sqrt{7}$. Bestem ligningen for K .

Opgave 2

- i) En kugle K har ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 10y + 6z = -22$$

. Afgør, om punkterne $(6, 5, -3)$ og $(1, 3, -4)$ ligger på kuglen.

- ii) En kugle K har ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z = 3$$

Afgør, om punkterne $(-3, -1, -3)$ og $(2, -2, 0)$ ligger på kuglen.

Opgave 3

Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

går fra centrum af kuglen K ud til kuglens overflade. Centrum af kuglen er i punktet $(-5, 2, -10)$.

- i) Bestem ligningen for K .
- ii) Afgør, om punktet $(-5, -1, 10)$ ligger på kuglen.

Opgave 4

I følgende opgave skal I kvadratkomplettere. Fremgangsmåden er nøjagtigt som når i kvadratkompletterer cirkelns ligning.

- i) En kugle K har ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 + 4y + z^2 - 8z = 1.$$

Bestem centrum og radius for K .

- ii) En kugle K har ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 - 6y + z^2 - 10z = 21.$$

Bestem centrum og radius for K .

Opgave 5

Et *tangentplan* til en kugle er et plan, der rører kuglen i netop et punkt. Der tilhører altså et tangentplan til hvert punkt på en kugle. En kugle K har ligningen

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 5$$

og punktet $(2, 1, -2)$ ligger på kuglen.

- i) Bestem en ligning for tangentplanen til K i punktet $(2, 1, -2)$.

Funktioner af to variable

Opgave 7

En funktion f er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + 2y.$$

- i) Bestem tallene $f(2, 4)$, $f(-3, 3)$ og $f(3, -3)$.
- ii) Prøv at gætte dig frem til en løsning til ligningen $f(x, y) = 3$
- iii) (Svær) Kan du gennemskue en strategi til at finde heltalsløsninger til ligningen $f(x, y) = 4$?

Opgave 8

En funktion f er givet ved

$$f(x, y) = \sqrt{x} + 3y^2.$$

- i) Hvilke af punkterne $(4, 1, 5)$, $(1, 2, 3)$ og $(2, 1, \sqrt{2} + 3)$ ligger på grafen for f ?

Opgave 9

- i) Et plan L går gennem punktet $(-5, 4, 2)$ og har vektoren \vec{n} givet ved

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestem en funktion f , der har L som graf. Brug denne funktion til at afgøre, om punktet $(1, 1, 1)$ ligger på L .

- ii) Et plan L går gennem punktet $(2, 4, 8)$ og har normalvektoren \vec{n} givet ved

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestem en funktion f , der har L som graf. Brug denne funktion til at afgøre, om punktet $(0, 1, 4)$ ligger på L .

Opgave 10

- i) En kugle K med centrum i origo har radius 7. Bestem en funktion f , der har den øvre halvkugle af K som graf for funktionen. Brug denne funktion til at afgøre, om punktet $(0, 0, 9)$ ligger på kuglen.
- ii) En kugle K med centrum i origo har radius $\sqrt{3}$. Bestem en funktion f , der har den nedre halvkugle af K som graf for funktionen. Brug denne funktion til at afgøre, om punktet $(-1, 1, -\sqrt{3})$ ligger på kuglen.

Opgave 11

- i) Vis, at den øvre halvkugle for en kugle med centrum i (x_0, y_0, z_0) og radius r kan beskrives ved grafen for funktionen f givet ved

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - x_0^2 + 2xx_0 - y^2 - y_0^2 + 2yy_0 + z_0}$$

- ii) Brug dette til at bestemme en funktion, hvis graf er den øvre halvkugle for en kugle med centrum i $(1, 4, 3)$ og radius 2.