Ubestemte integraler

$+k$?

Vi husker på, at det ubestemte integral $\int f(x)\mathrm{d}x$ for en integrabel funktion f er en funktion, der opfylder, at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x),$$

altså at $\int f(x)\mathrm{d}x$ er en stamfunktion for f. Desuden gælder der, at en konstant adderet til en stamfunktion igen giver en stamfunktion. Derfor bestemmer vi det ubestemte integral som

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + k,$$

hvor F er en vilkårlig stamfunktion til f.

Lad os nu sige, at vi vil bestemme en stamfunktion, der har en bestemt egenskab. Ofte kan dette være nok til at vi kan bestemme stamfunktionen entydigt.

Eksempel 1.1. Lad os sige, at vi har en funktion f givet ved

$$x^3 + 2x^2 + 1,$$

og vi ønsker at bestemme den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $(1, 2)$. Vi starter med at finde det ubestemte integral:

$$\int x^3 + 2x^2 + 1\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x + k.$$

Vi bestemmer nu værdien af det ubestemte integral i 1:

$$\frac{1}{4}1^4 + \frac{2}{3}1^3 + 1 + k = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 1 + k = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} + \frac{12}{12} + k = \frac{25}{12} + k,$$

så k må være lig $-1/12$.

Opgave 1

i) Bestem en stamfunktion til $f_1(x) = x^2$, der går gennem punktet $(2, 3)$.

ii) Bestem en stamfunktion til $f_2(x) = \frac{10}{x}$, $x > 0$, der går gennem punktet $(e^2, 30)$.

iii) Bestem en stamfunktion til $f_3(x) = e^{2x}$, der går gennem punktet $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e + 6)$.

iv) Bestem en stamfunktion til $f_4(x) = x^3 + 3^x$, der går gennem punktet $(2, 4 + 9\ln(3))$.

Opgave 2

i) Bestem en stamfunktion til $g_1(x) = 10 - x$, der har $y = 1$ som tangent.

ii) Bestem en stamfunktion til $g_2(x) = x^2 + 4x + 4$, der har $y = 4$ som tangent.

iii) Bestem en stamfunktion til $g_3(x) = -\frac{1}{x^2}$, der har $y = -1x + 10$ som tangent.

iv) Bestem DE stamfunktioner til $g_4(x) = x^2 - x - 2$, der har x-aksen som tangent.