Tangentplaner og kugler

Har vi en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, så kan vi i et punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ finde en tangentplan for f.

Sætning 1.1 (Tangentplan)**.** *Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ samt et punkt $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ være givet. Så er ligningen for tangentplanen T for f i P givet ved*

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Bevis. Det skal I selv. ■

Eksempel 1.2. Lad f være givet ved

$$f(x) = x^2 + y^2.$$

Vi finder så tangentplanen i et punkt $P(2, 2)$ ved

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 8 + 4(x - 2) + 4(y - 2). \end{aligned}$$

Eksempel 1.3. Lad en kugle K være givet ved ligningen

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 16.$$

Vi vil gerne bestemme tangentplanen i punktet $P(2, -1, 1)$. Vi bestemmer derfor en vektor til centrum $C(3, -1, 1)$ fra P:

$$\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ -1 - (-1) \\ 1 - (1 + \sqrt{15}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{15}. \end{pmatrix}$$

Dette er en normalvektor til tangentplanen. Vi kan derfor bestemme tangentplanens ligning ud fra planens ligning.

$$\begin{aligned} 1(x - 2) + 0(y + 1) - \sqrt{15}(z - 1 - \sqrt{15}) = 0 \;\Leftrightarrow \\ x - 2 - \sqrt{15}(z - 1 - \sqrt{15}) = 0 \end{aligned}$$

Opgave 1

i) Bestem en tangentplan for funktionen f givet ved

$$f(x, y) = \sin(\frac{xy}{4})$$

i $(0, 2\pi)$.

ii) Bestem en tangentplan for funktionen f givet ved

$$f(x,y) = (xy)^4$$

i $(-2,-3)$.

iii) Bestem en tangentplan for funktionen f givet ved

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^4$$

i $(-1,2)$.

Opgave 2

i) Bestem en tangentplan for kuglen K med ligningen

$$x^2+y^2+z^2 = 9$$

i punktet $(0,0,3)$.

ii) Bestem en tangentplan for kuglen K med ligningen

$$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-1)^2 = 25$$

i punktet $(2,2,1+\sqrt{17})$.

iii) Bestem en tangentplan for kuglen K med ligningen

$$x^2-2x+y^2-4x+z^2-6z = -10$$

i punktet $(1,2,3+\sqrt{3})$.

Opgave 3

Dette er en guidet tour gennem beviset for Sætning 1.1.

i) Argumentér for, at vektoren $\overrightarrow{v_x}$ givet ved

$$\overrightarrow{v_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

er en retningsvektor for tangentlinjen i (x_0,y_0) for snitfunktionen langs y-aksen.

ii) Argumentér for, at vektoren $\vec{v_x}$ givet ved

$$\vec{v_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

er en retningsvektor for tangentlinjen i (x_0, y_0) for snitfunktionen langs x-aksen.

iii) Givet to vektorer i rummet $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan vi bestemme deres krydsprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ved

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Krydsproduktet af to vektorer er orthogonalt til begge vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Argumenter for, at $\vec{v_x} \times \vec{v_y}$ må være en normalvektor til tangentplanen og brug dette til at udlede ligningen for tangentplanen.

Opgave 4

Aflevering!