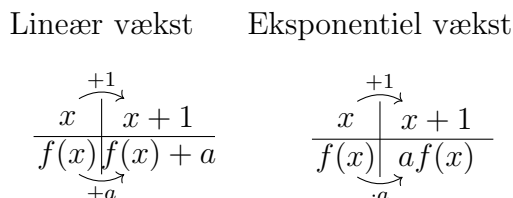


# Potensfunktioner som væksttype

## Potensvækst

Vi har set, hvordan lineær vækst udvikler sig, og vi har set, hvordan eksponentiel vækst udvikler sig. Begge dele fremgår af Fig. 1.



Figur 1: Udvikling af lineær og eksponentiel vækst

Vi kan desværre ikke få noget helt tilsvarende for potensvækst, da en øgning af  $x$  med en vil give forskellige fremskrivninger af  $f(x)$  alt efter hvad  $x$  er. Vi kan derimod beskrive potensvækst ved følgende sætning.

**Sætning 1.1.** *Lad  $f$  være en potensfunktion, altså*

$$f(x) = b \cdot a^x.$$

*Så vil en multiplikation af  $x$  med en faktor  $k$  tilsvare en stigning af  $f(x)$  med en faktor  $k^a$ . Mere præcist gælder der, at*

$$f(k \cdot x) = k^a \cdot f(x).$$

*Bevis.* Vi betragter

$$f(k \cdot x) = b \cdot (k \cdot x)^a = b \cdot k^a \cdot x^a = k^a \cdot \underbrace{b \cdot x^a}_{=f(x)} = k^a \cdot f(x),$$

hvilket beviser sætningen. ■

Det er værd at bemærke, at det at gange med  $k$  tilsvare at øge  $x$  med  $(k-1) \cdot 100\%$ . Tilsvarende svarer multiplikation med  $k^a$  til at øge  $f(x)$  med  $(k^a - 1) \cdot 100\%$ , så når vi øger  $x$  med en hvis procent, så fås en tilsvarende procentvis øgning til  $f(x)$ . Derfor kaldes potensvækst til tider for  $\% \%$ -vækst. Lineær vækst kaldes til tider for  $\Delta\Delta$ -vækst og eksponentiel vækst kaldes til tider for  $\Delta\%$ -vækst. Potensvækst illustreres på Figur 2.

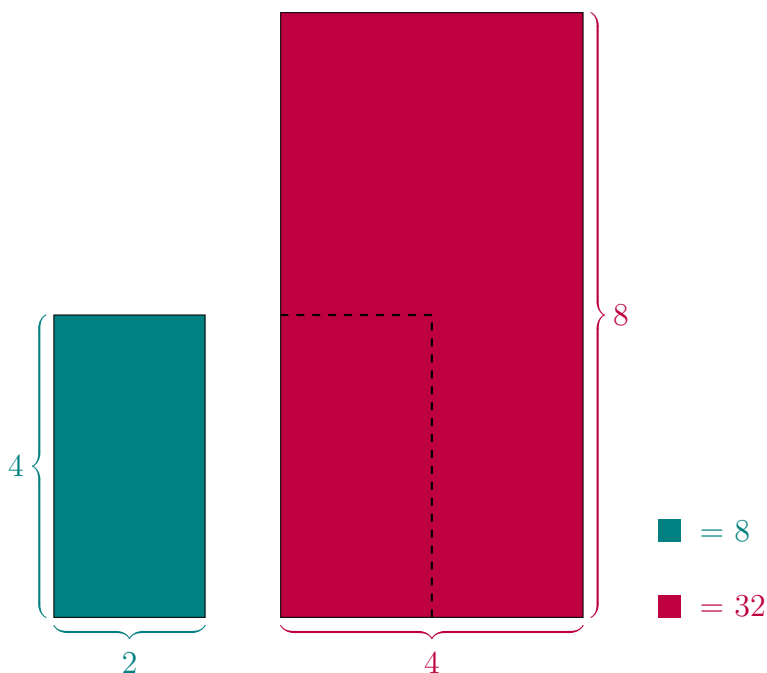
$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\cdot k} & \\ x & | & k \cdot x \\ \hline f(x) & | & k^a \cdot f(x) \\ & \xleftarrow{\cdot k^a} & \end{array}$$

Figur 2: Udvikling af potensvækst

**Eksempel 1.2.** Arealet af et rektangel med højde  $2x$  og bredde  $x$  har vi tidligere set kunne beskrives ved potensfunktionen  $A$  givet ved

$$A(x) = 2x^2.$$

Hvis  $x = 2$ , så er bredden 2, højden 4 og arealet 8. Tilsvarende giver  $x = 4$  os bredden 4, højden 8 og arealet 32. Dette kan ses på Figur 3.



Figur 3: To lignedannede rektangler

Dette passer også med vores forventning, da ved at gange vores  $x$ -værdi med 2 (2 til 4) gør, at vi skal gange vores samlede areal med  $2^a = 2^2 = 4$ , hvilket som kan ses af Figur 3 er fra 8 til 32.

## Opgave 1

En potensfunktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 4 \cdot x^2.$$

- i) Afgør, hvad  $f(x)$  ganges med, hvis vi ganger  $x$  med 2.
- ii) Afgør, hvad  $f(x)$  ganges med, hvis vi ganger  $x$  med 4.

## Opgave 2

En potensfunktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 5 \cdot x^{-1.5}.$$

- i) Hvad ganges funktionsværdien med, hvis  $x$  ganges med 2?
- ii) Hvad ganges funktionsværdien med, hvis  $x$  ganges med 1.5?

## Opgave 3

En potensfunktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 10 \cdot x^{0.6}$$

- i) Hvad ganges  $f(x)$  med, hvis  $x$  ganges med 3?
- ii) Hvor mange procent øges  $f(x)$  med, hvis  $x$  øges med 50%?

## Opgave 4

For en bestemt bil er sammenhængen mellem hastigheden  $x$  (i km/t) og den aktuelle motoreffekt  $f$  (i hk) givet ved

$$f(x) = 0.00005x^3$$

- i) Hvis hastigheden øges med 100%, hvor meget øges den krævede motoreffekt så?
- ii) Hvis motoreffekten ganges med 2, hvad skal hastigheden så ganges med?

## Opgave 5

Vi betragter nu rektanglet fra Figur 3. Vi tager udgangspunkt i, at sidelængden i rektanglet er 2.

- i) Gang sidelængden i rektanglet med 3, så  $x = 6$ . Hvor mange gange større bliver arealet?
- ii) Gang sidelængden i rektanglet med 4, så  $x = 8$ . Hvor mange gange større bliver arealet

## Opgave 6

En kasse har længde, højde og bredde  $x$ .

- i) Bestem forskriften for den potensfunktion  $f$ , der beskriver rumfanget af kassen.
- ii) Bestem rumfanget, hvis  $x = 2$ .
- iii) Gang sidelængden med 2, så  $x = 4$ . Hvor mange gange større bliver rumfanget?
- iv) Gang sidelængden med 3, så  $x = 6$ . Hvor mange gange større bliver rumfanget?
- v) Gang sidelængden med 4, så  $x = 8$ . Hvor mange gange større bliver rumfanget?

## Opgave 7

Rumfanget af en kugle med radius  $x$  er givet ved

$$R(x) = \frac{4}{3}\pi x^3.$$

- i) Bestem rumfanget, hvis  $x = 2$ .
- ii) Gang radius med 2, så  $x = 4$ . Hvor mange gange større bliver rumfanget?
- iii) Gang radius med 3, så  $x = 6$ . Hvor mange gange større bliver rumfanget?
- iv) Gang radius med 4, så  $x = 8$ . Hvor mange gange større bliver rumfanget?
- v) Gang radius med 5, så  $x = 10$ . Hvor mange gange større bliver rumfanget?

## Opgave 8

En potensfunktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot x^{1.7}$$

Udfyld følgende tabel uden at sætte  $x$ -værdierne ind i forskriften for  $f$ .

$x$	1	2	4	5	6	8	11
$f(x)$	3						

## Opgave 9

Den effekt, det kræves at bevæge sig gennem luft med kan beskrives ved

$$P(v) = K \cdot v^3,$$

hvor  $v$  beskriver hastigheden og  $K$  er en konstant, der afhænger af en række forhold.

- Hvis vi øger hastigheden  $v$  med 50%, hvor meget øges den effekt, der kræves for at bevæge sig gennem luften så med?
- Hvis vi øger vores effekt med 200%, hvor meget hurtigere kan vi så bevæge os gennem luften?

## Opgave 10

Bremselængden for en bil kan beskrives ved  $D$  givet ved

$$D(v) = k \cdot v^2.$$

- Hvis vi øger hastigheden med 20%, hvor meget øges bremselængden  $D$  så med?
- Hvis vi vil sænke vores bremselængde med 50%, hvor meget skal vi så sænke vores hastighed med?