Determinanter

Determinant

Definition 1.1 (Determinant)**.** Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Så defineres determinanten $\det(\vec{a}, \vec{b})$ som

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Determinanten opfylder følgende egenskaber, som vi ikke vil bevise.

Sætning 1.2. *Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være givet ved*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Så gælder følgende:

i) $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$.

ii) $\det(\vec{a}, \vec{b}) = -\det(\vec{b}, \vec{a})$.

iii) $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow$ $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

iv) $|\det(\vec{a}, \vec{b})| =$ Arealet af det udspændte parallelogram

Eksempel 1.3. Lad følgende vektorer være givet

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Så er determinanten mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 - (-4) \cdot 2 = 2 + 8 = 10.$$

Arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er derfor 10.

Opgave 1

Bestem determinanten mellem følgende vektorer:

1) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}11\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-2\\11\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$

Opgave 2

Bestem arealet af det udspændte parallelogram mellem følgende vektorer:

1) $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}-12\\3\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

Opgave 3

Afgør hvilke af følgende vektorer, der er parallelle:

1) $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-4\\-16\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

Opgave 4

i) Bestem t så følgende vektorer er parallelle:

$$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}8\\t\end{pmatrix}$$

ii) Bestem t så følgende vektorer er parallelle:

$$\begin{pmatrix} -t \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

iii) Bestem t så følgende vektorer er parallelle:

$$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t^2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Opgave 5

Aflevering