Ligningen for en tangent.

Hvordan vi finder ligningen for tangenten i et punkt

Vi husker på, at hældingen af tangenten i et punkt $(x_0, f(x_0))$ for en differentiabel funktion f er givet ved $f'(x_0)$. Ligningen for en ret linje er givet som

$$y = ax + b,$$

så ligningen for tangenten for f i punktet $(x_0, f(x_0))$ må have $a = f'(x_0)$.

En ret linje er entydigt bestemt ved hældningen og et punkt. Vi ved, at tangenten går gennem punktet $(x_0, f(x_0))$, så vi kan finde b i ligningen ved at indsætte dette punkt i ligningen $y = f'(x_0)x + b$:

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Leftrightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0,$$

og vi har løst a og b og dermed tangentens ligning.

Eksempel 1.1. Vi ønsker at finde ligningen for tangenten til funktionen x^2 i punktet $(1, 1)$. Vi finder først den afledede til x^2:

$$(x^2)' = 2x.$$

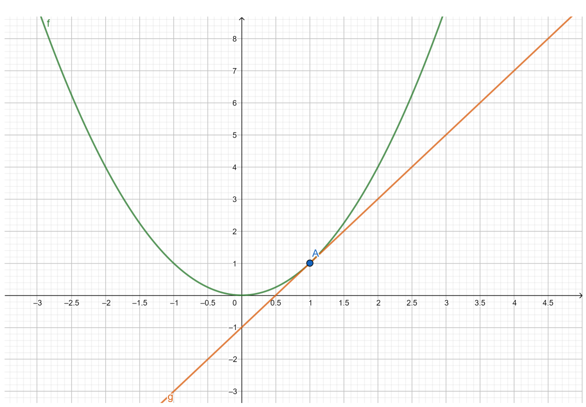
Derfor må hældningen af tangenten i punktet $(1, 1)$ være $a = f'(1) = 2$. Vi skal nu finde b i ligningen $y = 2x + b$, så vi indsætter vores kendte punkt:

$$y = 2x + b \Leftrightarrow 1 = 2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -1,$$

og derfor må tangentens ligning i punktet $(1, 1)$ være givet som

$$y = 2x - 1.$$

Funktionen x^2 og tangenten i punktet $(1, 1)$ til x^2 fremgår af Fig. 1.



Figur 1: Funktion $f(x) = x^2$ og tangentlinjen $g(x) = 2x - 1$.

Vi kan også bruge differentialregning til at sige noget om, hvad tallet b betyder i et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Vi ved allerede, at c er y-værdien for skæringen med y-aksen. Desuden ved vi, at fortegnet på a afgør, om vores parabel for andengradspolynomiet er "sur"eller "glad- peger armene ned eller op. Differentierer vi f får vi

$$f'(x) = 2ax + b,$$

og indsætter vi så $x = 0$, får vi, at $f'(0) = b$. b må derfor tilsvare hældningen af f i punktet $(0, f(0))$, altså der, hvor grafen for f skærer y-aksen. Desuden ved vi, at $f(0) = c$. Vi kan samle disse betragtninger til en sætning:

Sætning 1.2. *Ligningen for tangenten til funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ i punktet $(0, c)$ er givet ved*

$$y = bx + c.$$

Bevis for differentialkvotienten af x^2

Sætning 2.1. *Funktionen $f(x) = x^2$ er overalt differentiabel med differentialkvotient*

$$\frac{d}{dx}x^2 = (x^2)' = 2x.$$

Bevis. Vi anvender definitionen af differentialkvotienten:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

hvilket i tilfældet $f(x) = x^2$ giver

$$\begin{aligned}
(x^2)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{2xh}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} h + \lim_{h\to 0} 2x \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

■

Opgave 1

Find ligningen for tangenten til følgende funktioner i de tilhørende punkter:

1) $f(x) = x^2,\ p = (-1, f(-1))$

2) $f(x) = 2x^2 - 1x + 3,\ p = (0, f(0))$

3) $f(x) = \frac{1}{x} - x^3,\ p = (2, f(2))$

4) $f(x) = \sqrt{x},\ p = (4, f(4))$

5) $f(x) = 7x + 3,\ p = (3, f(3))$

6) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1,\ p = (1, f(1))$

7) $f(x) = 27,\ p = (1000, f(1000))$

8) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x},\ p = (9, f(9))$

9) $f(x) = \frac{10}{x} + 3x^3,\ p = (2, f(2))$

10) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x + 1,\ p = (-2, f(-2))$

Opgave 2

Skitsér følgende polynomier:

1) $2x^2 + 2x + 3$

2) $-x^2 + 10$

3) $3x^2 - 2x - 4$

4) $-2x^2 - 3x - 3$