Konfidensinterval og binomialtest

Konfidensintervaller

Sætning 1.1. *Har vi en binomialfordelt stikprøve på n elementer med sandsynlighedsparameter p, så er et 95% konfidensinterval givet ved*

$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right],$$

hvor $\hat{p}$ er stikprøveestimatet for p.

Dette skal forstås på følgende måde. Laver vi en stikprøve på n elementer 100 gange, så vil vi få 100 forskellige konfidensintervaller. Så vil vi forvente at den rigtige p vil ligge inde i 95 af disse 100 konfidensintervaller.

Eksempel 1.2. I en meningsmåling fra Voxmeter er 1000 personer blevet spurgt, hvad de vil stemme til det danske folketingsvalg, og vi antager, at personerne er en repræsentativ stikprøve for den danske befolkning. 300 personer har svaret, at de vil stemme på Socialdemokratiet. Vores stokastiske eksperiment har bestået i at spørge 1000 personer, og en succes har været svaret: "Socialdemokratiet". Vi bestemmer nu et 95% konfidensinterval for denne stikprøve. Vores estimat på $\hat{p}$ må være

$$\hat{p} = \frac{300}{1000} = 0.3.$$

Usikkerheden eller fejlmarginen er så

$$2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2\sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{1000}} = 0.0289 = 2.89\%.$$

Konfidensintervallet for stikprøven bliver da

$$\begin{aligned}\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] &= [0.3 - 0.0289, 0.3 + 0.0289] \\ &= [0.2710, 0.3289].\end{aligned}$$

Den rigtige sandsynlighedsparameter p må være andelen af personer, der stemmer på Socialdemokratiet til folketingsvalget (Alt efter hvad vi mener, vi måler på). Derfor vil socialdemokratiet hvis befolkningen ikke skifter mening mellem meningsmålingen og folketingsvalget med 95% sikkerhed have en vælgertilslutning på mellem 27.10% og 32.89%. Socialdemokraterne fik som bekendt 27.5% af stemmerne, hvilket er inden for den statistiske usikkerhed.

Eksempel 1.3. Vi bestemmer et 95% konfidensinterval for Dansk Folkeparti. Deres tilslutning i meningsmålingen var 25 personer. Derfor er stikprøveandelen

$$\hat{p} = \frac{25}{1000} = 0.025 = 2.5\%.$$

Den statistiske usikkerhed er derfor

$$2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1000}} = 0.0099 = 0.99\%.$$

Konfidensintervallet lyder så

$$[0.025 - 0.0099, 0.025 + 0.0099] = [0.0151, 0.0349].$$

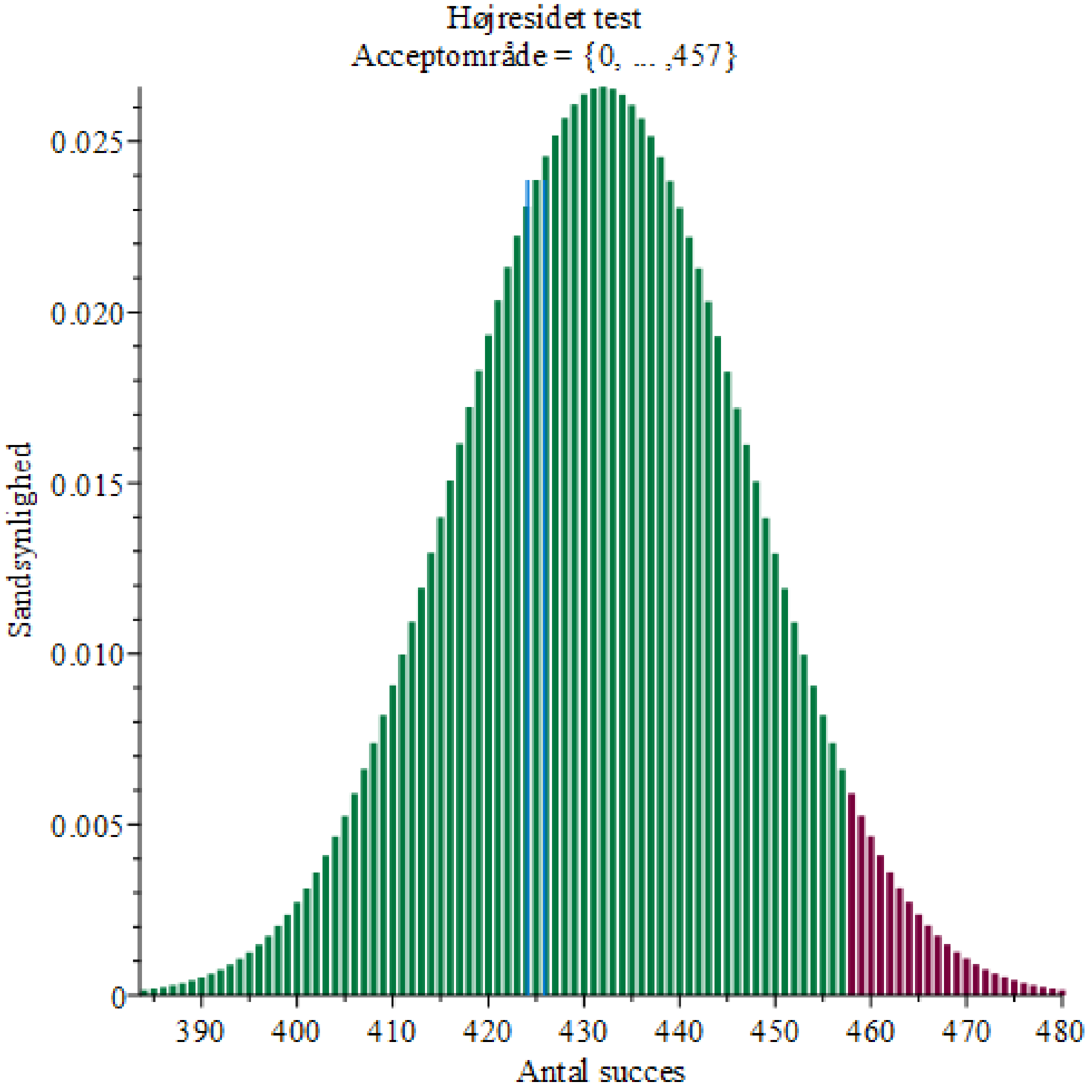
Tilslutningen til DF vil altså med 95% sikkerhed ligge mellem 1.51% og 3.49%. De er altså ikke sikre på at ligge over spærregrænsen på 2%. DF fik til valget 2.6% af stemmerne, hvilket er inden for den statistiske usikkerhed.

Hypotesetest

Vi har for nogle år siden spurgt 900 personer om deres holdning til et byggeprojekt i lokalområdet. 48% var imod projektet. Vi forventer derfor, at antallet af utilfredse personer følger en binomialfordeling med antalsparameter 900 og $p = 0,48$. Vi spørger nu igen befolkningen, og denne gang er 52% utilfredse. Vi opstiller derfor en nul-hypotese H_0 : Holdningen til byggeprojektet har ikke ændret sig. Den alternative hypotese H_1 er så: Modstanden mod byggeprojektet er steget.

Vi ønsker at bestemme sandsynligheden for H_0 og hvis den er mindre end et *signifikansniveau* på 5%, så vil vi forkaste nulhypotesen. Vi bestemmer derfor sandsynligheden for, at mere end $900 \cdot 0.52 = 468$ personer er utilfredse, hvis de følger en binomialfordeling med $n = 900$ og $p = 0.48$. Dette gøres i Maple med `bincdf(900,0.48,468,∞)` og giver $0,00895$ eller 0,895%. Derfor forkaster vi nulhypotesen at holdningen ikke har ændret sig.

Vi kan bestemme alle de udfald af antal personer der udtrykker modstand, der vil gøre, at vi vil forkaste nulhypotesen ved `binomialTest(900,0.48,0.05,højre)`. Dette giver os plottet på Fig. 1.



Figur 1: Højresidet test på stemmefordeling

Vi kan derfor se, at alle udfald $X \geq 457$ vil gøre, at vi tror på nulhypotesen. Tilsvarende vil alle udfald $X \geq 458$ vil gøre, at vi forkaster nulhypotesen. Mængden $\{458, \ldots, 900\}$ kaldes for den kritiske mængde.

Opgave 1

i) En producent af et lægemiddel påstår, at 12% af anvendelserne af lægemiddelet er succesfulde. Ud af 100 personer bliver kun 5 helbredt. Vores nulhypotese er, at producenten taler sandt. Med et signifikansniveau på 5%, vil vi så forkaste nulhypotesen? Hvad er den kritiske mængde for forsøget?

ii) Til seneste valg spurgte vi 300 personer om, hvad de stemte. 30 stemte på liste Q. Vi har nu spurgt 300 nye personer og denne gang har partiet fået 25 stemmer. Er det rimeligt at antage, at partiets vælgertilslutning er faldet? Hvis vores nulhypotese er, at tilslutningen ikke er faldet, kan vi så med et signifikansniveau på 5% forkaste denne nulhypotese? Bestem desuden den kritiske mængde

iii) En mand finder 3 sten i sit glas med oliven og synes, at det er lidt for mange. Han kigger på glasset, og der er det lovet, at glasset er 99% stenfri. I glasset er der 70 oliven. Har han grund til sin skepsis? Opstil nulhypotese og se, om den kan forkastes med et signifikansniveau på 5%. Bestem desuden den kritiske mængde.

iv) Vi kaster med en mønt, og vil se, om plat og krone er lige sandsynlige. Vi slår 150 gange og får plat 72 gange. Nulhypotesen er H_0: Plat og krone er lige sandsynlige. Bestem med et signifikansniveau på 5% om vi vil forkaste nulhypotesen. Bestem desuden den kritiske mængde.

Opgave 2

En butik har et klientel, der består af 30% mænd.

i) Opstil en binomialmodel, der beskriver antallet af mænd i en stikprøve på 50 personer.

ii) Hvad er sandsynligheden for, at 12 af personerne i stikprøven er mænd?

iii) En dag havde butikken 220 kunder. 79 af disse var mænd. Opstil en nulhypotese, der beskriver undersøgelsen, og brug en binomialtest med et signifikansniveau på 5% til at undersøge nulhypotesen.

Opgave 3

Spørg mig