

Punkter og vektorer

Vektorer mellem punkter

Definition 1.1. Har vi to punkter $P = (p_1, p_2)$ og $Q = (q_1, q_2)$, så betegner vi vektoren mellem punkterne som

$$\overrightarrow{PQ}.$$

Som et vigtigt eksempel har vi vektoren fra punktet $O = (0, 0)$ til et punkt P , der betegnes

$$\overrightarrow{OP},$$

og kaldes for *stedvektoren* for P . Koordinaterne til vektoren \overrightarrow{OP} er givet ved $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$. Vi definerer derfor koordinaterne til vektoren \overrightarrow{PQ} ved

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.2. Stedvektoren til punktet $P = (2, 3)$ er givet ved

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Har vi også punktet $Q = (-3, 5)$, så er vektoren \overrightarrow{PQ} givet ved

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 - 2 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da vi definerede vektoren mellem to vektorer benyttede vi følgende kendsgerning:

Sætning 1.3 (Indskudssætningen). *For tre punkter A, B, C gælder der, at*

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Eksempel 1.4. Indskudssætningen medfører desuden, at vi kan indskyde et vilkårligt antal punkter. Har vi eksempelvis punkter A, B, C, D, E , så gælder der, at

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}.$$

Sætning 1.5 (Afstand mellem to punkter). *Skal vi bestemme afstanden mellem et punkt $P = (p_1, p_2)$ og et punkt $Q = (q_1, q_2)$, så er det givet ved*

$$\text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

Bevis. Vektoren \overrightarrow{PQ} er givet ved

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}.$$

Vi anvender nu blot formelen for længden af en vektor og får

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

■

Eksempel 1.6. Afstanden fra punktet $P = (0, 1)$ og punktet $Q = (-1, 2)$ er givet ved

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5}.$$

2 Opgave 1

i) Bestem stedvektoren til følgende punkter

1) $(1, 2)$

2) $(0, 0)$

3) $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$

4) $(-2, 7)$

ii) Bestem vektorerne i begge retninger mellem følgende punkter

1) $(4, 5)$ og $(-5, 4)$

2) $(0, 0)$ og $(1, 1)$

3) $(1, 2)$ og $(-3, -4)$

4) $(9, 7)$ og $(10, -4)$

iii) For punkterne $A = (-2, -4)$, $B = (-8, 10)$ og $C = (-2, 3)$ bestem

1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

3) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}$

4) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

Opgave 2

i) Lad $P = (0, 3)$ og $Q = (4, 0)$. En trekant har \overrightarrow{OP} og \overrightarrow{OQ} som to af siderne.
Bestem længden af den sidste side.

ii) For $A = (4, 0)$, $B = (12, 1)$ og $C = (-3, -4)$ bestem

1) $|\overrightarrow{OA}|$

2) $|\overrightarrow{BC}|$

3) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$

4) $\text{dist}(A, B)$

Opgave 3

Vis $i)$, $ii)$, $iv)$ og $v)$ i Sætning 1.2 fra sidste gang.