Fremskrivningsfaktor og vækstrate

Definitioner

Vi gentager lige seneste moduls definitioner

Definition 1.1 (Eksponentialfunktion)**.** En funktion f på formen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

hvor $a, b > 0$ kaldes for en *eksponentialfunktion*. Vi kalder tallet b for *begyndelsesværdien*.

Definition 1.2 (Fremskrivningsfaktor og vækstrate)**.** For en eksponentialfunktion f givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x$$

kaldes tallet a for *fremskrivningsfaktoren* Tallet

$$r = a - 1$$

kaldes for *vækstraten*.

Sætning 1.3 (Betydning af vækstrate)**.** *En vækstrate r tilsvarer at funktionsværdien for eksponentialfunktionen øges med $r \cdot 100\%$, når x øges med 1.*

Eksempel 1.4. Funktionen f givet ved

$$f(x) = 7 \cdot 1.3^x$$

er en eksponentialfunktion. Den har begyndelsesværdi $b = 7$ og fremskrivningsfaktor 1.3. Vækstraten er

$$r = a - 1 = 1.3 - 1 = 0.3.$$

Det tilsvarer, at funktionsværdien øges med $0.3 \cdot 100 = 30\%$, når x øges med 1.

Grafer for eksponentialfunktioner

Skal vi gøre et tal større, så skal vi gange det med et tal større end 1. Skal vi gøre det mindre skal vi tilsvarende gange det med et tal mindre end 1. Vi definerer derfor følgende.

Definition 1.5. For en eksponentialfunktion f givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x$$

siges f at være *voksende*, hvis $a > 1$. Hvis $a < 1$ siges f derimod at være *aftagende.*

Eksempel 1.6. Eksponentialfunktionen

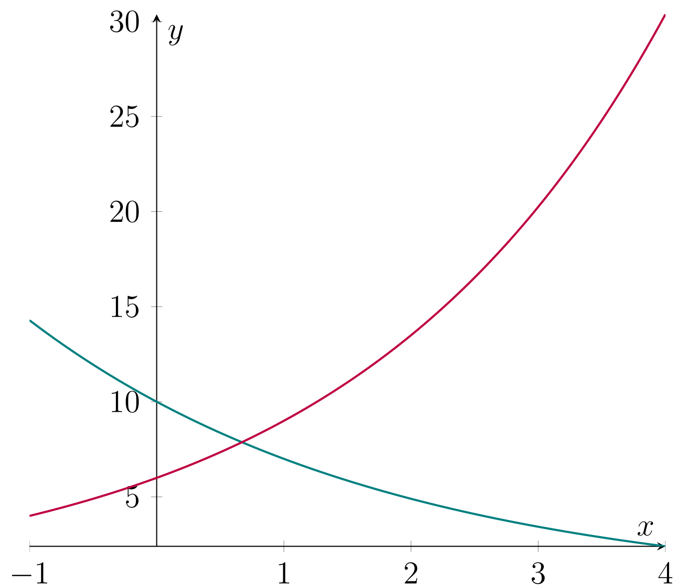
$$f(x) = 6 \cdot 1.5^x$$

er voksende, da $1.5 > 1$.

Eksponentialfunktionen

$$g(x) = 10 \cdot 0.7^x$$

er aftagende, da $0.7 < 1$. Graferne for de to funktioner kan ses på Figur 1



Figur 1: Grafer for eksponentialfunktioner

Vi husker på, at b i en eksponentialfunktion

$$f(x) = b \cdot a^x$$

tilsvarer skæringen med y-aksen. Dette kan vi se, hvis vi indsætter 0 på x' plads i forskriften

$$f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b.$$

Opgave 1

For følgende eksponentialfunktioner aflæs da fremskrivningsfaktoren a og begyndelsesværdien b.

$a)$ $f(x) = 6 \cdot 2^x$ $\qquad$ $b)$ $f(x) = 0.3 \cdot 1.5^x$

$c)$ $f(x) = 1.6 \cdot 0.7^x$ $\qquad$ $d)$ $f(x) = 200 \cdot 0.1^x$

Opgave 2

i) Bestem vækstraten for $f(x) = 2 \cdot 1.6^x$.

ii) Bestem vækstraten for $f(x) = 5 \cdot 2.5^x$.

Opgave 3

Udfyld de tomme felter i følgende tabel.

$f(x)$	$1.1 \cdot 1.2^x$				$4.5 \cdot 2.1^x$	
a		2	1.7	4.7		
b	1.1	10	22.5	15.2		7.9
r	0.2	1				1.4

Opgave 4

a) En eksponentialfunktion f er givet ved

$$f(x) = 6.7 \cdot 1.3^x.$$

i) Bestem $f(4)$.

ii) Bestem $f(-3)$.

b) En eksponentialfunktion g har begyndelsesværdi 7 og fremskrivningsfaktor 0.7.

i) Opskriv forskriften for g.

ii) Bestem $g(7)$.

Opgave 5

i) En eksponentialfunktion har en vækstrate på 0.5. Hvilken procentvis stigning vil denne vækstrate tilsvare, når x øges med 1?

ii) En eksponentialfunktion har en fremskrivningsfaktor på 1.1. Hvilken procentvis stigning vil denne fremskrivningsfaktor tilsvare, når x øges med 1?

Opgave 6

I en opløsning findes en bakteriekoloni, der hvert døgn tredobles i antal. Der er i starten af kolonien 200 bakterier.

i) Hvad skal antallet af bakterier ganges med hver gang der er gået ét døgn?

ii) Udfyld en tabel med antallet af bakterier efter de første 6 døgn.

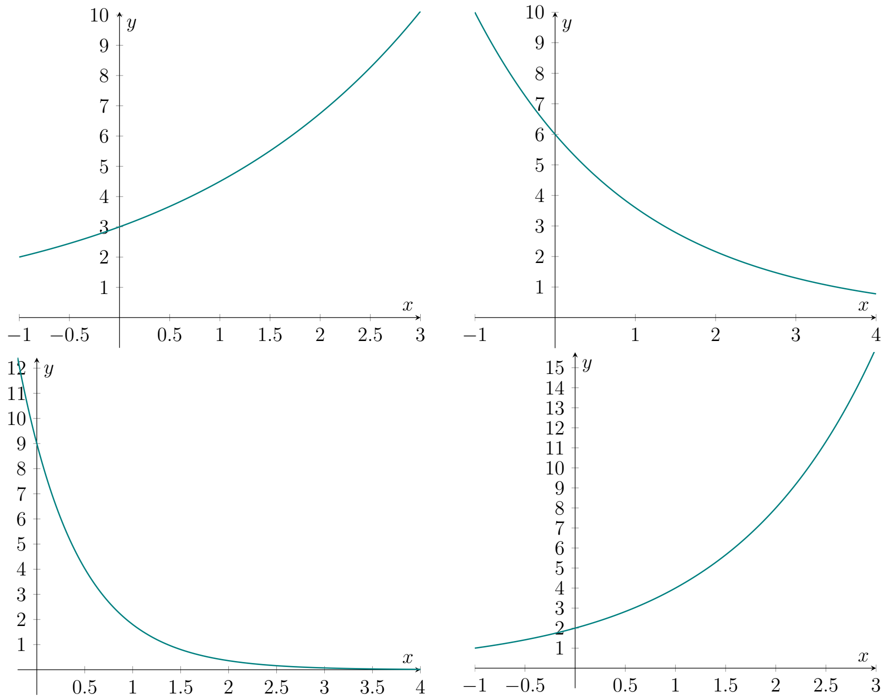
iii) Udregn hvor mange procent antallet af bakterier stiger fra dag 2 til dag 3 samt fra dag 3 til dag 4? Giver det mening?

Opgave 7

Følgende grafer for eksponentialfunktioner er givet.

i) Bestem b for eksponentialfunktionerne

ii) Afgør, om a er større eller mindre end 1.



Opgave 8

Hver gang vi folder et stykke papir, så vil antallet af papirlag fordobles. Antallet af lag kan beskrives af en eksponentialfunktion

$$f(x) = b \cdot a^x.$$

i) Hvad er begyndelsesværdien og fremskrivningsfaktoren for f?

ii) Hvor mange lag har et stykke papir, hvis det er foldet 7 gange?

iii) Forestil dig, at du kan folde papiret lige så mange gange du har lyst. Hvor tykt er papiret, hvis du har foldet det 25 gange?

iv) Hvis ét lag papir er 0.1mm tykt, hvor tykt er dette stykke foldede papir?

v) Hvor mange gange skal vi folde papiret, for at det bliver 1km tykt?

Opgave 9

i) En bakteriekoloni indeholder til tid $t = 0$ $B_0 = 100.000$ bakterier. En bakterie deler sig i gennemsnit 1 gang per 4. time, og bakteriekolonien har ubegrænset plads. Beskriv antallet af bakterier som funktion af tiden i timer. Hvor mange bakterier er der i kolonien efter et døgn? Hvornår er der 1 mia. (10^9) bakterier i kolonien?

ii) Et glas vand stilles i et rum, og temperaturen i vandet antages at kunne beskrives ved

$$H(t) = 70 \cdot (0.97)^t,$$

hvor $H(t)$ beskriver temperaturen i grader celcius og t betegner tiden i minutter. Hvor varmt er vandet, når det stilles ind i rummet? Hvor varmt er det efter 5 minutter? Hvor varmt er der i rummet i følge modellen.

Opgave 10

i) Bevis, at hvis vi øger x med 2 i en eksponentialfunktion $f(x)$, så tilsvarer dette at øge $f(x)$ med en faktor a^2. Hvad hvis vi øger x med 3?

ii) Bevis, at hvis vi øger x med n i en eksponentialfunktion $f(x)$, så tilsvarer dette at øge $f(x)$ med en faktor a^n.