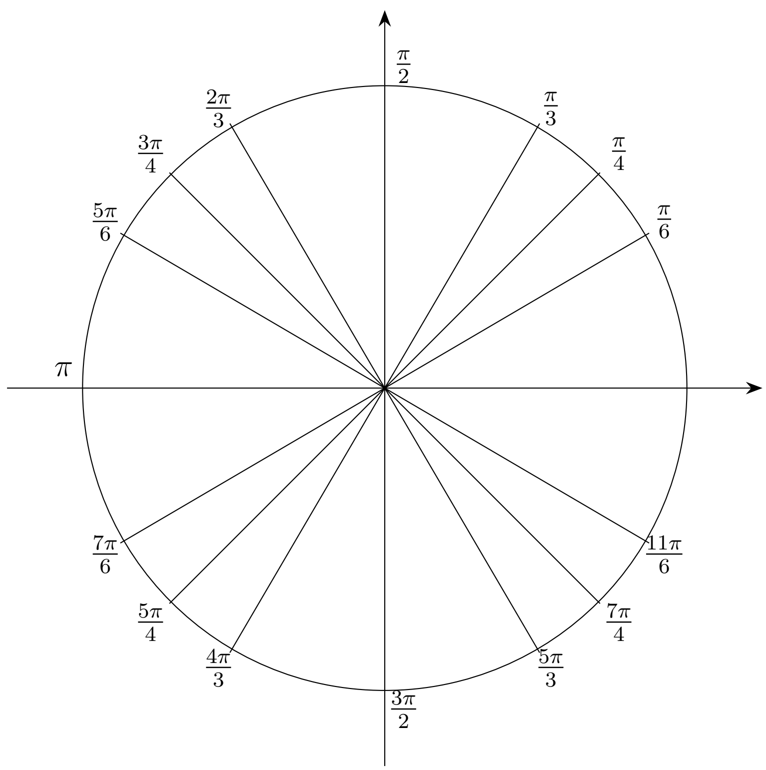
Trigonometriske funktioner og harmoniske svinginger

Grader og radianer

Vi har tidligere arbejdet med radianer i stedet for grader. Vi vil dog lige huske os selv på, hvordan det er radianer og grader hænger sammen. Som bekendt er omkredsen af enhedscirklen 2π, så idéen er følgende: I stedet for at repræsentere en vinkel med gradtal, så repræsenteres den af længden af det linjestykke, vinkel overdækker på enhedscirklen. Idéen kan ses af Fig. 1.



Figur 1: Radianer tilsvarende bestemte vinkler.

Sætning 1.1. *Har vi en vinkel v i grader og skal omregne til radianer, så er fremgangsmåden*

$$v \text{ i grader} \mapsto v \text{ i radianer}$$
$$v \mapsto v \cdot \frac{2\pi}{360}.$$

Har vi en vinkel v i radianer og skal omregne til grader, så udregner vi:

$$v \text{ i radianer} \mapsto v \text{ i grader}$$
$$v \mapsto v \cdot \frac{360}{2\pi}.$$

Eksempel 1.2. En vinkel er 180°. I radianer er den derfor

$$180 \cdot \frac{2\pi}{360} = \pi$$

radianer.

Eksempel 1.3. En vinkel er $\frac{2\pi}{3}$ radianer. Vi omregner til grader:

$$\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{360}{2\pi} = 120°.$$

Harmoniske svingninger

Vi vil - hvis andet ikke er nævnt - altid i forbindelse med de trigonometriske funktioner cos, sin og tan bruge radianer og ikke grader. Vi er nu derfor at specificere definitionsmængde og dispositionsmængde for de trigonometriske funktioner. Cosinus er derfor funktionen

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

, sinus er funktionen

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

og tangens er funktionen

$$\tan : \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

, hvor funktionerne er givet som sædvanligt.

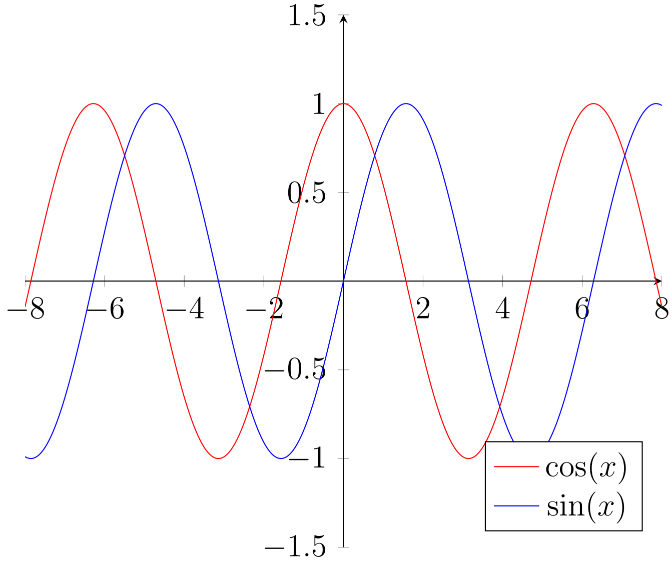
De trigonometriske funktioner $\cos(x)$ og $\sin(x)$ er periodiske funktioner, da

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$$

for alle heltal $k \in \mathbb{Z}$ og tilsvarende

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$$

for alle heltal k. Vi kan plotte $\cos(x)$ og $\sin(x)$, hvilket kan ses af Fig. 2



Figur 2: Grafer for $\cos(x)$ og $\sin(x)$.

Som vi kan se af Fig 2, så er trigonometriske funktioner så langt fra injektive, som en funktion nærmest kan være. Til enhver funktionsværdi $f(x)$ tilhører der uendeligt mange x-værdier. Dog er cos og sin så vigtige, at vi gerne vil have en slags invers funktion til dem. Vi definerer derfor

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1].$$

Denne funktion er surjektiv og injektiv, og vi kan derfor definere en invers funktion

$$\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Den kaldes også til tider for arccos. Tilsvarende kan vi definere

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1].$$

Den inverse funktion er så defineret

$$\sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

og kaldes til tider for arcsin.

Eksempel 1.4. Vi har, at $\cos^{-1}(1) = 0$, da $\cos(0) = 1$.

Vi kan bruge trigonometriske funktioner til at modellere mange virkelige fænomener, da de er periodiske i natur. Vi kan eksempelvis bruge trigonometriske funktioner til at beskrive lyd og billedsignaler.

Da alle virkelige fænomener ikke har en periode på 2π, så vil vi gerne kunne forkorte eller forlænge perioden. Vi vil også gerne kunne forskyde perioden, og vi vil gerne kunne øge *amplituden*, så funktionen ikke kun går fra -1 til 1, men kan gå mellem større værdier. Desuden gælder der, at $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, så vi kan altid bruge sin til at beskrive cos og vice versa. Derfor giver vi følgende definition:

Definition 1.5 (Harmoniske svingninger)**.** En sammenhæng

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

kaldes for en harmonisk svingning som funktion af tiden t. Konstanten ω kaldes for vinkelhastigheden, konstanten φ kaldes for begyndelsesfasen og konstanten A kaldes for amplituden.

Opgave 1

Omregn følgende vinkler fra grader til radianer:

1) 90 2) 180
3) 130 4) 360

Opgave 2

Omregn følgende vinkler fra radianer til grader:

1) 2π 2) $\dfrac{\pi}{4}$
3) $\dfrac{3\pi}{2}$ 4) $\dfrac{\pi}{3}$

Opgave 3

Bestem følgende

1) $\cos(\pi)$ 2) $\sin(\pi/2)$
3) $\sin(45^\circ)$ 4) $\cos(2\pi)$

Opgave 4

Bestem følgende

1) $\cos^{-1}(0)$ 2) $\sin^{-1}(0)$
2) $\sin^{-1}(1)$ 4) $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$

Opgave 5

I Geogebra tegn så funktionen

$$y = A\sin(\omega x + \varphi).$$

i) Hvordan ændrer det på grafen for sammenhængen at ændre på φ?

ii) Hvordan ændrer det på grafen at ændre på ω?

iii) Hvordan ændrer det på grafen at ændre på A?

Opgave 6

I Geogebra tegn så $\cos(x)$ og $\sin(x + k)$, og bestem k, så graferne er sammenfaldende. Argumentér ved brug af enhedscirklen for, at graferne er sammenfaldende i dette tilfælde.

Opgave 7

Vi kan ved en bestemt havn modellere vandstanden med den harmoniske svingning

$$f(t) = 1.2\sin(0.524t) + 3.4,$$

hvor t er tiden målt i timer og $f(t)$ er vandstanden i meter.

i) Tegn grafen for f i Geogebra.

ii) På hvor mange timer er en periode? (Antallet af timer, før vandstanden er det samme igen)

iii) Hvornår er vandstanden højest? Hvad med lavest?