Tangenter

Mere om tangenter

Eksempel 1.1. Vi betragter funktionen

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1.$$

Vi ønsker at finde ligningen for alle de tangenter til f, der har hældning 2. Vi finder først den afledede til f:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2.$$

Vi skal løse ligningen $f'(x) = 2$, da vi så vil finde x-værdien alle de steder, der har hældning lig 2.

$$3x^2 - 6x + 2 = 2 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = 2.$$

Vi finder den tilhørende y-værdi til disse punkter:

$$\begin{aligned} f(x = 0) &= 1, \\ f(x = 2) &= 1. \end{aligned}$$

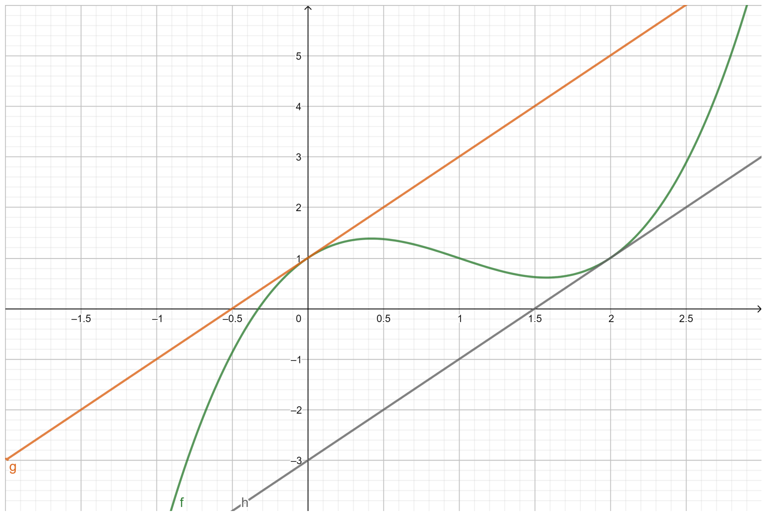
Vi ved derfor at tangenterne skal gå gennem henholdsvist punkterne $(0, 1)$ og $(2, 1)$. Vi kan derfor løse for b-værdien i tangentens ligning $y = 2x + b$.

$$\begin{aligned} y_1 = 2x + b_1 \;\Leftrightarrow\; 1 = 2 \cdot 0 + b_1 \Leftrightarrow\; b_1 = 1, \\ y_2 = 2x + b_2 \;\Leftrightarrow\; 1 = 2 \cdot 2 + b_2 \Leftrightarrow\; b_2 = -3. \end{aligned}$$

Derfor har tangenterne til funktionen f med hældning 2 ligningerne

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1, \\ y &= 2x - 3. \end{aligned}$$

Dette kan ses på Fig. 1.



Figur 1: Funktionen f med de to tangenter, der har hældning 2.

Differentialkvotient for $\frac{1}{x}$

Sætning 2.1. *Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ er differentiabel så længe $x \neq 0$, og differentialkvotienten er givet*

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Bevis. Antag, at $x \neq 0$. Vi anvender definitionen af differentialkvotienten:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

I tilfældet at $f(x) = \frac{1}{x}$ får vi så

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{x})' &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{x(x+h)h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)}.
\end{aligned}$$

Da $x \neq 0$ er $\frac{-1}{x(x+h)}$ kontinuert i x. Derfor får vi, at

$$\lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

■

Sætning 2.2. *Funktionen $f(x) = x^3$ er differentiabel overalt og differentialkvotienten for f er givet ved*

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

Bevis. Vi anvender som før definitionen af differentialkvotienten for f:

$$\begin{aligned}
(x^3)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x^2+h^2+2xh) - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + xh^2 + 2x^2h + hx^2 + h^3 + 2xh^2 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{xh^2 + 2x^2h + hx^2 + h^3 + 2xh^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} xh + 2x^2 + x^2 + h^2 + 2xh \\
&= 2x^2 + x^2 = 3x^2.
\end{aligned}$$

■

Opgave 1

Find alle de steder, hvor følgende funktioner har den givne tangenthældning:

1) $f(x) = x^2,\ f'(x) = 0$
2) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1,\ f'(x) = 2$
3) $f(x) = x^3 - 5x + 10,\ f'(x) = 7$
4) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 10x + 3,\ f'(x) = 1$
5) $f(x) = x^3 - 10x^2 + 10x + 1,\ f'(x) = -5$
6) $f(x) = -x^2 + 13x + 2, f'(x) = -4$

Opgave 2

i) Find ligningen for tangenten til funktionen $f(x) = -2x^3 - 10x^2 + 2x + 1$ i punktet $(-4, f(-4))$. Har denne funktion andre tangenter, der er parallelle til denne tangent?

ii) Find ligningen for tangenten til funktionen $f(x) = x^3 + 10x$ i punktet $(0, f(0))$. Har denne funktion andre tangenter, der er parallelle til denne tangent?