# Ekstrema

## Ekstrema for differentiable funktioner

I mange sammenhænge er det en fordel at kunne bestemme *toppunkter/maksima og minima* for en funktion $f$. Hvis $f$ er en differentiabel funktion, så kan vi udnytte differentialregning til at bestemme sådanne punkter. Et punkt, der enten er et maksimum eller et minimum kaldes et *ekstremumspunkt*.

Vi har følgende sætning:

**Sætning 1.1** (Ekstremumspunkter)**.** *Lad $f$ være en differentiabel funktion. Hvis et punkt $P(x_0, f(x_0))$ er et ekstremumspunkt for $f$, så gælder der, at*

$$f'(x_0) = 0.$$

Det er dog værd at bemærke, at vi ikke nødvendigvis har den omvendte implikation; hvis $f'(x_0) = 0$, så er $(x_0, f(x_0))$ ikke nødvendigvis et ekstremumspunkt. Vi kalder sådanne for *vendetangenter*, og vi vil se eksempler på disse senere.

**Eksempel 1.2.** Lad $f$ være givet ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5.$$

Vi ønsker at bestemme ekstrema for $f$. Vi differentierer derfor først $f$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4).$$

Dette sættes nu lig 0, og vi får

$$3x(x-4) = 0,$$

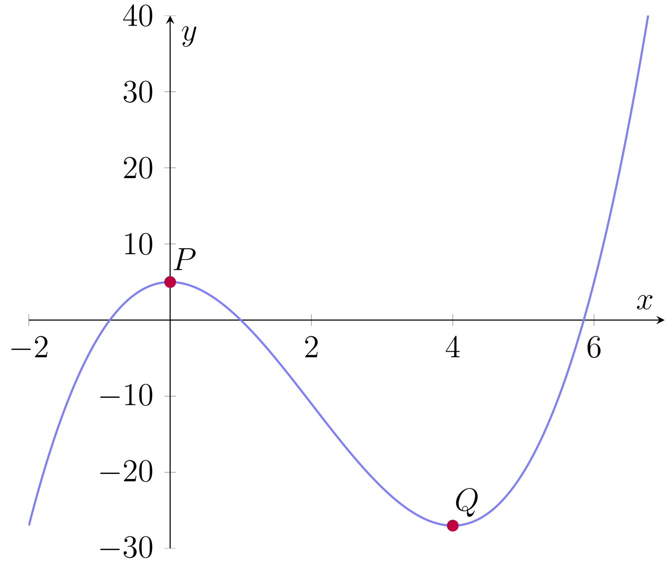
og ved hjælp af nulreglen ved vi, at $x = 0$ eller $x = 4$. Vi bestemmer nu de tilhørende $y$-værdier og vi får

$$f(0) = 5$$

og

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 5 \\ &= 64 - 96 + 5 \\ &= -27. \end{aligned}$$

Vi har derfor en vandret tangent i $P(0,5)$ og $Q(4,-27)$. For at bestemme, om det er et ekstremumspunkt, så tegner vi grafen. Denne kan ses af Fig. 1




Figur 1: Graf for funktionen $f$.

Af Fig. 1 kan vi se, at punkterne $P$ og $Q$ er ekstremumspunkter. $P$ er et *lokalt maksimum* og $Q$ er et *lokalt minimum*. Vi kan også se, at $f$ ikke har nogle *globale ekstrema*.

# Opgave 1

Bestem ekstremumspunkter for følgende funktioner. Løs først ligningen $f'(x) = 0$ og tegn derefter grafen for funktionen. Afgør til sidst, om der er tale om globale maksimum/minimum eller lokale maksimum/minimum.

| | |
|---|---|
| 1) $-x^2 + 10$ | 2) $x^3$ |
| 3) $x^4 - 8x^2$ | 4) $\ln(x) - \frac{1}{2}x^2$ |
| 5) $\sqrt{x} - x^3$ | 6) $\frac{1}{x} + x^2$ |
| 7) $x^5 - 10x^4$ | 8) $\frac{4}{x} - 2x$ |