Punkter og vektorer samt vinkler mellem vektorer

Recap

Vi husker på, at vektoren fra et punkt $P = (p_1, p_2)$ til et punkt $Q = (q_1, q_2)$ er givet ved

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2. \end{pmatrix}$$

Eksempel 1.1. Lad os bestemme længden af vektoren $2\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AB}$, hvor $P = (1, -2)$, $Q = (-4, 3)$, $A = (5, -2)$, $B = (-1, -1)$. Først bestemmer vi vektorerne $\overrightarrow{PQ}$ og $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -4-1 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ og } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-5 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu bestemme udtrykket:

$$2\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AB} = 2\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Til slut bestemmer vi så længden af vektoren

$$\left|\begin{pmatrix} -16 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-16)^2 + 6^2} = \sqrt{256 + 36} = \sqrt{292} \approx 17$$

Eksempel 1.2. Lad os bestemme midtpunktet mellem to punktet $P = (-2, 2)$ og punktet $Q = (1, 4)$. Lad os kalde det punkt M. Der må gælde, at $\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OM}$. Vi bestemmer derfor $\overrightarrow{PQ}$ som

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu bestemme stedvektoren til punktet M som

$$\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Derfor må punktet M hedde $M = (0, 3)$.

Vinkler mellem vektorer

Vinklen mellem to vektorer betegnes med $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ for to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Det er typisk den spidse vinkel, der betegnes. Altså gælder der typisk, at

$$0 \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 180.$$

Der er to specielle tilfælde: Når vinklen er 0° eller 180° og når vinklen er 90°. I tilfældet, at vinklen mellem to vektorer $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$ eller 180°, så siger vi, at vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle. I tilfælde af, at vinklen mellem to vektorer er 90°, så siger vi, at vektorerne er vinkelrette eller *orthogonale*

Definition 2.1. To vektorer $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ siges at være orthogonale, hvis $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 90°$. I dette tilfælde skriver vi $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Definition 2.2. To vektorer $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ siges at være parallelle, hvis $\vec{v} = k\vec{w}$ for en konstant k. I så fald skriver vi $\vec{v} \parallel \vec{w}$.

Eksempel 2.3. Vektorerne $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ er parallelle, da $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{w}$.

3 Opgave 1

i) Bestem stedvektoren til følgende punkter

1) $(1, 2)$ 2) $(0, 0)$
3) $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ 4) $(-2, 7)$

ii) Bestem vektorerne i begge retninger mellem følgende punkter

1) $(4, 5)$ og $(-5, 4)$ 2) $(0, 0)$ og $(1, 1)$
3) $(1, 2)$ og $(-3, -4)$ 4) $(9, 7)$ og $(10, -4)$

iii) For punkterne $A = (1, -1)$, $B = (0, 5)$, $C = (-7, 2)$ og $D = (-2, 3)$ bestem

1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ 2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$
3) $\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$ 4) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

Opgave 2

i) For punkterne $A = (10, 5)$ og $B = (-2, 3)$ bestem så midtpunktet M mellen A og B. Bestem derefter midtpunktet mellem M og A.

ii) For punkterne $A = (5, 0)$ og $B = (0, 5)$ bestem så midtpunktet M mellem A og B. Bestem så længden af $\overrightarrow{OM}$.

Opgave 3

i) Fire punkter er givet ved $A = (2, 2)$, $B = (4, 5)$, $C = (-5, 6)$, $D = (1, 12)$. Afgør, om $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CD}$ er parallelle. Hvad med $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{BC}$.

ii) Er $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonale?

iii) Er $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonale?

Opgave 4

Vis *i*), *ii*), *iv*) og *v*) i Sætning 1.2 fra Modul 26.