Andengradsligninger

Diskriminanten

Når vi skal løse andengradsligninger, skal vi bruge det, vi kalder for *diskriminanten*. Vi definerer den som følgende.

Definition 1.1 (Diskriminanten)**.** For en andengradsligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

defineres diskriminanten som

$$d = b^2 - 4ac.$$

Diskriminanten har fået sit navn, fordi den diskriminerer mellem antallet af løsninger for andengradsligningen. For diskriminanten gælder følgende sætning.

Sætning 1.2. *For andengradsligningen*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gælder der for diskriminanten d*, at*

- *hvis* $d < 0$*, så har ligningen nul løsninger,*
- *hvis* $d = 0$*, så har ligningen netop én løsning, og*
- *hvis* $d > 0$*, så har ligningen to løsninger.*

Vi skal senere se et bevis for dette.

Eksempel 1.3. Vi betragter andengradsligningen

$$2x^2 - 4x + 6 = 0.$$

Denne har $a = 2$, $b = -4$ og $c = 6$. Vi udregner diskriminanten og får

$$d = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 16 - 48 = -32,$$

og andengradsligningen har derfor nul løsninger. Tilsvarende kan vi finde diskriminanten for andengradsligningen

$$-3x^2 + 6x - 3 = 0.$$

Her bliver diskriminanten

$$d = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-3) = 36 - 36 = 0,$$

så denne ligning har netop én løsning. Til slut kan vi finde diskriminanten for andengradsligningen

$$x^2 + 5x - 2 = 0,$$

der lyder

$$d = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 25 + 8 = 33,$$

og denne andengradsligning har derfor to løsninger.

Løsning af andengradsligninger

Vi har set, at vi kan anvende kvadratsætninger baglæns og nulreglen for at løse andengradsligninger. Dette kan i princippet gøres med alle andengradsligninger, men er ofte besværligt at gennemskue. Vi har derfor en formel, der kan bruges for at løse andengradsligninger. Denne kaldes for *diskriminantformlen* eller *løsningsformlen for andengradsligninger*.

Sætning 2.1 (Diskriminantformlen)**.** *Lad en andengradsligning være givet ved*

$$ax^2 + bx + c,$$

hvor $a \neq 0$*. Hvis* $d \geq 0$*, kan løsningerne til ligningen findes som*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a},$$

og

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a},$$

hvor $d = b^2 - 4ac$*.*

Bevis. Vi betragter ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Vi multiplicerer ligningen med $4a$ og får

$$4a \cdot x^2 + 4a \cdot bx + 4a \cdot c = 4a \cdot 0 \;\Leftrightarrow\; 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Vi lægger diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ til på begge sider af lighedstegnet

$$\begin{aligned} 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \;&\Leftrightarrow\; 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac \\ &\Leftrightarrow\; 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \\ &\Leftrightarrow\; (2ax)^2 + 4axb + b^2 = d \end{aligned}$$

Vi indser nu, at vi kan bruge kvadratsætningen

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

på dette, hvor $\alpha^2 = (2ax)^2$, $\beta^2 = b^2$ og $2\alpha\beta = 2 \cdot 2ax \cdot b$. Vi kan derfor skrive

$$(2ax)^2 + 4axb + b^2 = d \;\Leftrightarrow\; (2ax + b)^2 = d$$

Vi ønsker at isolere x i dette udtryk. Vi tager derfor kvadratroden på begge sider af lighedstegnet og får

$$2ax + b = \pm\sqrt{d},$$

hvor vi husker på, at vi skal have både den positive og negative løsning til kvadratet. Afslutningsvist får vi så

$$\begin{aligned} 2ax + b = \pm\sqrt{d} \;&\Leftrightarrow\; 2ax = -b \pm \sqrt{d} \\ &\Leftrightarrow\; x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}. \end{aligned}$$

■

Eksempel 2.2. Vi betragter andengradsligningen

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

og vi ønsker at bestemme løsningerne. Vi bestemmer først diskriminanten som

$$d = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9.$$

Der er derfor to løsninger. Vi sætter dette ind i løsningsformlen.

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

og

$$x_2 = \frac{1 - 3}{2} = -1.$$

Vi vinder altså løsningerne $x_1 = 2$ og $x_2 = -1$.

Opgave 1

Bestem diskriminanten d for følgende andengradspolynomier og afgør antallet af løsninger.

1) $2x^2 + 4x - 2 = 0$
2) $-x^2 + 5x + 7 = 0$
3) $x^2 + 4 + 7x = 0$
4) $5x^2 = -9x + 8$
5) $6x^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0$
6) $3x^2 - 4x = 1$
7) $\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$
8) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{6} = 0$

Opgave 2

Bestem løsningen til følgende andengradsligninger, hvis den eksisterer, ved at bruge diskriminantformlen.

1) $x^2 - 11x + 10 = 0$
2) $4x^2 + 4x + 1 = 0$
3) $-3x^2 + 6x - 6 = 0$
4) $x^2 - 6x + 5 = 0$
5) $3x^2 + 3x - 18 = 0$
6) $x^2 - 10x + 24 = 0$
7) $4x^2 - 11x + 6 = 0$
8) $2x^2 - 50 = 0$
9) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
10) $9x^2 - 18x + 9 = 0$