Variabeltransformation

Linearisering

Vi husker os selv på, at forskriften for en eksponentialfunktion f er givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x.$$

Det viser sig, at vi kan lave grafen for f til en ret linje ved at betragte et koordinatsystem med en sædvanlig x-akse og en y-akse, hvor vi har tallene $\log_{10}(y)$ i stedet for y. Et sådant koordinatsystem kaldes for et *enkeltlogaritmisk koordinatsystem.* Hvilken logaritme, der anvendes er i vores sammenhæng underordnet.

Sætning 1.1. *Grafen for funktionen f givet ved*

$$f(x) = b \cdot a^x$$

vil være en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bevis. Vi betragter udtrykket

$$y = b \cdot a^x.$$

Vi tager $\log_{10}$ på begge sider af lighedstegnet og får

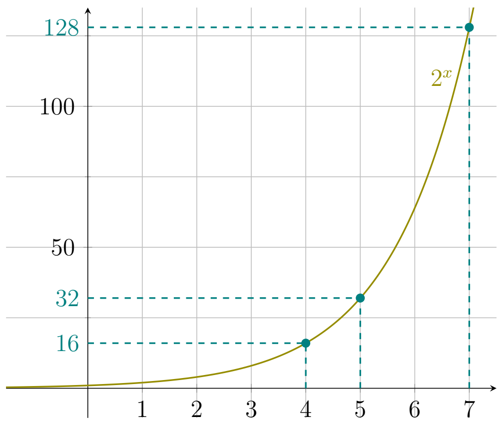
$$\begin{aligned}\log_{10}(y) &= \log_{10}(b \cdot a^x)\\ &= \log_{10}(b) + \log_{10}(a^x)\\ &= \log_{10}(b) + x\log_{10}(a).\end{aligned}$$

Der er altså en lineær sammenhæng mellem x og $\log_{10}(y)$. ■

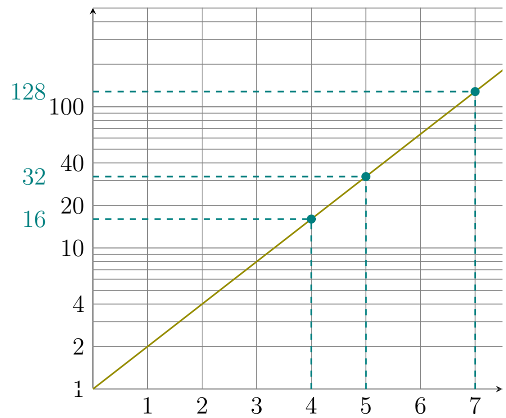
På Figur 1 kan vi se grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = 2^x$$

i et sædvanligt koordinatsystem og på Figur 2 kan vi se grafen for f i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.



Figur 1: Graf for funktionen 2^x i et sædvanligt koordinatsystem.



Figur 2: Graf for funktionen 2^x i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

På samme måde som vi kan tegne en eksponentialfunktion som en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem kan vi tegne en potensfunktion som en ret linje i et *dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.* Et sådant koordinatsystem har akserne $\log_{10}(x)$ i stedet for x-aksen og $\log_{10}(y)$ i stedet for y-aksen. Igen er det ikke vigtigt, hvilken logaritme, vi bruger.

Sætning 1.2. *Grafen for en potensfunktion f givet ved*

$$f(x) = b \cdot x^a$$

er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bevis. Vi har i en potenssammenhæng følgende sammenhæng mellem x og y.

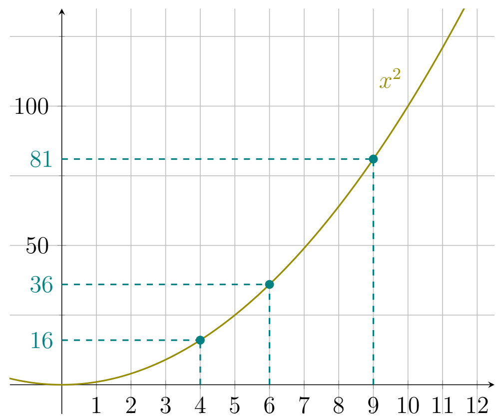
$$y = b \cdot x^a.$$

Vi tager logaritmen på begge sider af lighedstegnet og får

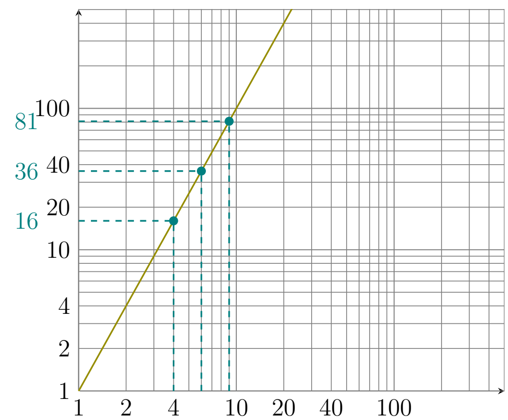
$$\begin{aligned} \log_{10}(y) = \log_{10}(y \cdot x^a) &\Leftrightarrow \log_{10}(y) = \log_{10}(b) + \log_{10}(x^a) \\ &\Leftrightarrow \log_{10}(y) = \log_{10}(b) + a\log_{10}(x). \end{aligned}$$

Der er altså en lineær sammenhæng mellem $\log_{10}(y)$ og $\log_{10}(x)$. ■

Vi kan på Figur 3 se grafen for potensfunktionen x^2 i et sædvanligt koordinatsystem og på Figur 4 se grafen for x^2 i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.



Figur 3: Graf for funktionen x^2 i et sædvanligt koordinatsystem.



Figur 4: Graf for funktionen x^2 i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Opgave 1

i) Tegn punkterne $(1, 2)$ og $(4, 16)$ ind på et enkeltlogaritmisk og forbind dem med en ret linje.

ii) Brug linjen til at udfylde følgende tabel.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2			16						

Kan du gennemskue hvilken sammenhæng, linjen beskriver? (Vink: Overvej, hvad der sker med tallene, når x øges med 1.)

Opgave 2

i) Tegn punkterne $(2, 18)$ og $(4, 162)$ ind på et enkeltlogaritmisk koordinatsystem og forbind dem med en ret linje.

ii) Brug linjen til at udfylde følgende tabel.

x	1	2	3	4	5
y		18		162	

iii) Kan du gennemskue hvilken sammenhæng, linjen beskriver?

Opgave 3

i) Grafen for en funktion f er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem. Grafen for f går gennem punkterne $(3, 2)$ og $(6, 16)$. Bestem en forskrift for

f uden at tegne grafen.

Opgave 4

i) Tegn punkterne $(2, 4)$ og $(6, 36)$ ind på et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem og forbind dem med en ret linje.

ii) Brug linjen til at udfylde følgende tabel.

x	1	2	3	4	5	6	10	20	40	80
y		4				36				

Kan du gennemskue hvilken sammenhæng, linjen beskriver?

Opgave 5

i) Tegn punkterne $(1, 2)$ og $(4, 128)$ ind på et enkeltlogaritmisk koordinatsystem og forbind dem med en ret linje.

ii) Brug linjen til at udfylde følgende tabel.

x	1	2	3	4	5	6
y	2			162		

iii) Kan du gennemskue hvilken sammenhæng, linjen beskriver?

Opgave 6 (Med Maple)

i) Grafen for en funktion f er på et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem en ret linje. Grafen for f går gennem punkterne $(5, 9)$ og $(13, 107)$. Bestem en forskrift for f uden at tegne grafen.

Opgave 7

Vi skal vise, at eksponentielle sammenhænge mellem to variable x og y vil være lineære på enkeltlogaritmisk papir. Vi husker os selv på, at en eksponentiel sammenhæng mellem to variable er på formen

$$y = b \cdot a^x \tag{1.1}$$

i) Tag logaritmen på begge sider af lighedstegnet på (1.1).

ii) Anvend to logaritmeregneregler på udtrykket.

iii) Er der en lineær sammenhæng mellem x og $\log(y)$?

Opgave 8

Vi skal vise, at potenssammenhænge mellem to variable x og y vil være lineære på dobbeltlogaritmisk papir. Vi husker os selv på, at en potenssammenhæng mellem to variable er på formen

$$y = b \cdot x^a \tag{1.2}$$

i) Tag logaritmen på begge sider af lighedstegnet på (1.2).

ii) Anvend to logaritmeregneregler på udtrykket.

iii) Er der en lineær sammenhæng mellem $\log(x)$ og $\log(y)$?