Mere om Prikproduktet

Prikprodukt

Definition 1.1. Lad $\vec{v}$ og $\vec{w}$ være defineret som

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \text{ og } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Så defineres *prikproduktet*, *skalarproduktet*, eller *det indre produkt* mellem $\vec{v}$ og $\vec{w}$ som

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Dette skrives også til tider $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Eksempel 1.2. Lad $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og lad $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Så kan vi bestemme prikproduktet mellem $\vec{v}$ og $\vec{w}$ som

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = 6.$$

Sætning 1.3. *To vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er orthogonale hvis og kun hvis $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.*

Vi vil senere se mere præcist hvordan sammenhængen mellem vinklen mellem vektorer og prikproduktet er.

Eksempel 1.4. Vi vil afgøre, om $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er orthogonale. Vi bestemmer derfor prikproduktet

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0.$$

Derfor ved vi, at vinklen mellem de to vektorer er 0°, og at de derfor er orthogonale eller vinkelrette.

Sætning 1.5 (Regneregler for prikproduktet)**.** *For vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ samt konstanter k gælder der, at*

i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,

ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,

iii) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$,

iv) $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$,

v) $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$.

2 Opgave 1

Bestem følgende prikprodukter:

1) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\14\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{2}{7}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}-0.5\\0.7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14\\10\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Opgave 2

Løs følgende ligninger:

i) $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$

ii) $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}x-\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}.$

iii) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\x\end{pmatrix}=0.$

iv) $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}=22.$

Opgave 3

Bevis Sætning 1.5.