Funktioner 2

Surjektivitet og injektivitet

Definition 1.1 (Surjektiv funktion)**.** Lad $f : A \to B$ være givet. Hvis billedet af A under f opfylder, at

$$f(A) = B,$$

så siger vi, at f er *surjektiv*.

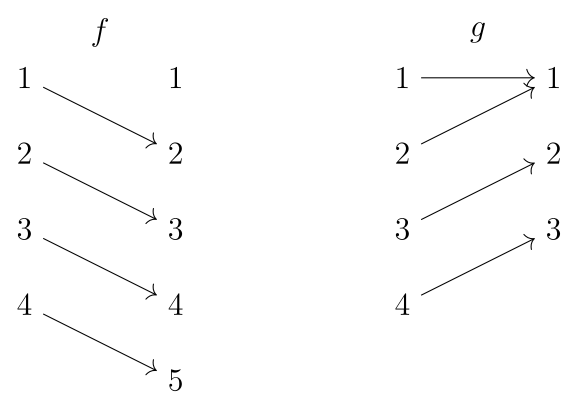
Hvis $f(A) = B$, så betyder det, at værdimængden for f er lig dispositionsmængden for f, altså at $\mathrm{Vm}(f) = B$. Funktionen kan altså ramme alt i dispositionsmængden.

Eksempel 1.2. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = 2x + 3$$

er surjektiv, da $f(x)$ kan antage alle reelle tal som værdi.

Eksempel 1.3. Funktionen $f : \{1, \ldots, 4\} \to \{1, \ldots, 5\}$, der ses af Fig. 1 er ikke surjektiv, da elementet $1 \in \{1, \ldots, 5\}$ ikke ligger i værdimængden for f. Derimod er funktionen $g : \{1, \ldots, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ er surjektiv, da alle elementer i codomænet rammes af g.



Figur 1: Diagram for funktionerne f og g.

Definition 1.4 (Injektiv funktion)**.** Lad $f : A \to B$ være givet. Hvis det for to elementer $f(x_1) \in B$ og $f(x_2) \in B$ i værdimængden for f gælder, at

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2,$$

så siges f at være *injektiv*.

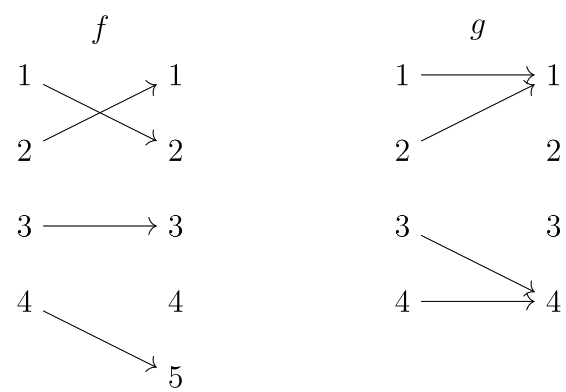
At f er injektiv betyder, at to forskellige værdier i definitionsmængden for f nødvendigvis bliver sendt til to forskellige værdier i værdimængden for f.

Eksempel 1.5. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ være givet ved

$$f(x) = x^2.$$

Denne funktion er ikke injektiv, da der til hver funktionsværdi $f(x)$ tilhører to x-værdier - x og $-x$. Det er eksempelvist opfyldt, at $f(2) = f(-2) = 4$.

Eksempel 1.6. Funktionen $f : \{1, \ldots, 4\} \to \{1, \ldots, 5\}$, der ses på Fig. 2 er injektiv, da der kun er én pil hen til hvert punkt i B, hvorimod $g : \{1, \ldots, 4\} \to \{1, \ldots, 5\}$ er ikke injektiv,da to pile peger hen til punkterne $1, 4 \in \{1, \ldots, 4\}$.



Figur 2: Diagram for funktionerne f og g.

Definition 1.7. Lad $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være givet. Så kalder vi funktionen $g \circ f : A \to C$ defineret ved

$$f \circ g(x) = g(f(x))$$

for sammensætningen af f og g.

Et diagram over en sammensat funktion $f \circ g$ kan ses af Fig. 3.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Figur 3: Kommutativt diagram.

Eksempel 1.8. Lad $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$g(x) = 2x + 1$$

og lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ være givet ved

$$f(x) = x^2.$$

Så er den sammensatte funktion $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ givet ved

$$g \circ f(x) = (2x + 1)^2.$$

Definition 1.9 (Bijektiv funktion)**.** En funktion $f : A \to B$ siges at være bijektiv, hvis der findes en funktion $f^{-1} : B \to A$, så $f \circ f^{-1}(x) = x$ og $f^{-1} \circ f(x) = x$. Funktionen f^{-1} kaldes i så fald den inverse funktion til f.

Sætning 1.10. *En funktion $f : A \to B$ er bijektiv hvis og kun hvis den er injektiv og surjektiv.*

Bevis. Antag først, at $f : A \to B$ er bijektiv, og at der for to værdier $x_1, x_2 \in A$ gælder, at $f(x_1) = f(x_2)$. Så får vi, at

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Leftrightarrow\ & f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Siden $f(x_1) = f(x_2)$ medfører, at $x_1 = x_2$, så kan vi konkludere, at f er injektiv.

Lad nu $y \in B$. Så gælder der, at $f^{-1}(y) = x$ for et $x \in A$. Vi får så, at

$$\begin{aligned} & f^{-1}(y) = x \\ \Leftrightarrow\ & f(f^{-1}(y)) = f(x) \\ \Leftrightarrow\ & y = f(x), \end{aligned}$$

men det må betyde, at y er i værdimængden for f, og da $y \in B$ var valgt vilkårligt, så må f være surjektiv. Vi har nu vist, at f er bijektiv kun hvis f er surjektiv og injektiv.

Antag nu, at $f : A \to B$ er surjektiv og injektiv. Vi konstruerer så $f^{-1} : B \to A$ på følgende vis: For et vilkårligt $y \in B$ findes der et $x \in A$, så $f(x) = y$, da f er surjektiv. Da f er injektiv, er dette element entydigt, og derfor bestemmer vi f^{-1}, så $f^{-1}(y) = x$. Nu opfylder f og f^{-1}, at

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Vi tager f på begge sider af lighedstegnet og får

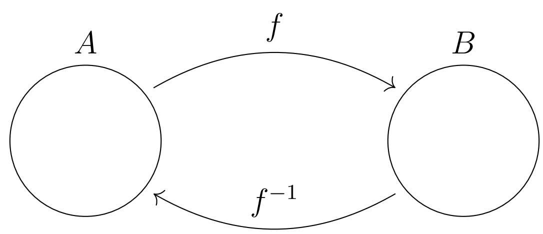
$$f(f^{-1}(f(x))) = f(x).$$

Da f er surjektiv, repræsenterer $f(x)$ et vilkårligt element $y \in B$, så vi kan sætte $y = f(x)$, og vi får

$$f(f^{-1}(y)) = y,$$

hvilket konkluderer beviset. ∎

Vi kan se en illustration af en invers funktion på Fig. 4.



Figur 4: Funktion f samt invers funktion f^{-1}.

Eksempel 1.11. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = 4x + 7$$

er bijektiv. Vi kan finde den inverse funktion til f ved at isolere x i ligningen

$$y = 4x + 7 \;\Leftrightarrow\; y - 7 = 4x \;\Leftrightarrow\; \frac{y-7}{4} = x.$$

Derfor er funktionen $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{4}$$

den inverse funktion til f. Vi kan tjekke dette ved at bestemme den sammensatte funktion $f \circ f^{-1}$:

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f^{-1}(f(x)) \\ &= \frac{4x + 7 - 7}{4} \\ &= \frac{4x}{4} \\ &= x. \end{aligned}$$

Eksempel 1.12. Hvis vi betragter kvadratfunktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ givet ved

$$f(x) = x^2$$

til første kvadrant, så har den kvadratrodsfunktionen $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ udtrykt ved

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

som invers funktion, siden

$$\sqrt{x^2} = x.$$

Opgave 1

I følgende opgaver kan det være en fordel at tegne funktionerne.

i) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = 10x.$$

Afgør, om f er surjektiv, injektiv eller bijektiv.

ii) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = x^3.$$

Afgør, om f er surjektiv, injektiv eller bijektiv.

iii) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = x^2 - 3x + 7.$$

Afgør, om f er surjektiv, injektiv eller bijektiv.

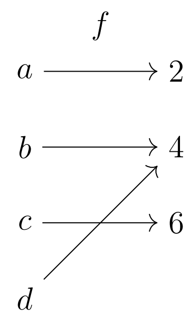
iv) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

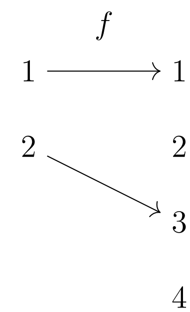
$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2.$$

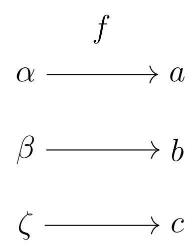
Afgør, om f er surjektiv, injektiv eller bijektiv.

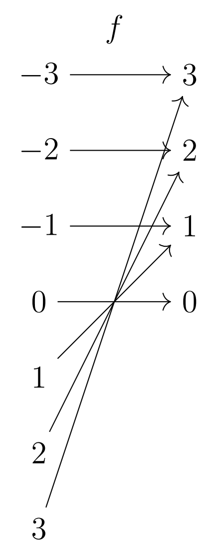
Opgave 2

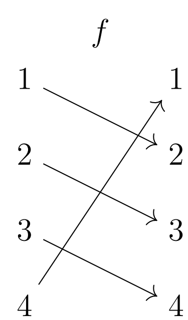
Afgør, hvilke af følgende der er surjektive, injektive eller bijektive. I fald de er bijektive, bestem så den inverse funktion.

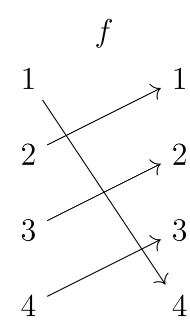












Opgave 3

i) Afgør, om funktionen fra seneste modul, der tager et navn i 3.e og giver alderen på personen er surjektiv, injektiv eller bijektiv.

ii) Afgør, om funktionen $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ givet ved

$$f(x, y) = \frac{x}{y}$$

er surjektiv, injektiv eller bijektiv.

Opgave 4

i) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = 3x + 1$$

er bijektiv. Bestem en invers funktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til f.

ii) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = -7x - 13$$

er bijektiv. Bestem en invers funktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til f.

iii) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = x^3$$

er bijektiv. Bestem en invers funktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til f.

iv) Funktionen $f : \left[\frac{-b}{2a}, \infty\right) \to \left[\frac{-d}{4a}, \infty\right)$ givet ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

hvor $a > 0$ er bijektiv. Bestem en invers funktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til f. (Lidt svær)

Opgave 5

Hvis en funktion $f : A \to B$ er injektiv og surjektiv har vi vist, at der eksisterer en invers funktion f^{-1}. Bevis, at denne funktion er entydig. (Lidt svær).