# Tangenter og toppunkter

## Hvordan vi finder ligningen for tangenten i et punkt

Vi husker fra sidst ligningen for tangentlinjer.

**Sætning 1.1** (Tangentligningen)**.** *Lad $f$ være en differentiabel funktion. Så er ligningen for tangenten i punktet $P(x_0, f(x_0))$ givet ved*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

*Bevis.* Vi skal finde en linje med ligning på formen

$$y = ax + b, \tag{1.1}$$

der går gennem punktet $P(x_0, f(x_0))$, og som er tangent til grafen for $f$ i dette punkt. Vi ved derfor, at

$$a = f'(x_0).$$

Dette indsættes i (1.1) og vi får ligningen

$$y = f'(x_0)x + b. \tag{1.2}$$

Vi ved desuden, at linjen skal gå gennem $P$. Derfor må der gælde, at

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b,$$

og altså, at

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Dette indsættes på $b$'s plads i (1.2), og vi får

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \\ &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \end{aligned}$$

■

**Eksempel 1.2.** Vi ønsker at finde ligningen for tangenten til funktionen $x^2$ i punktet $(1, 1)$. Vi finder først den afledede til $x^2$:

$$(x^2)' = 2x.$$

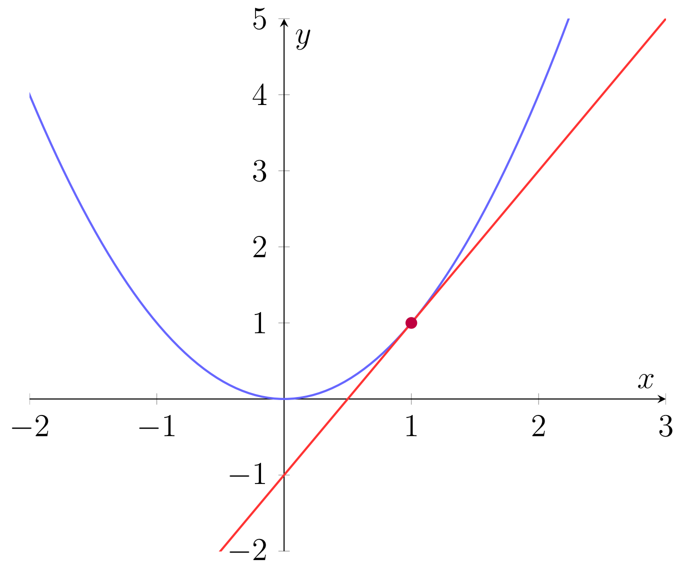
Derfor må hældningen af tangenten i punktet $(1, 1)$ være $a = f'(1) = 2$. Vi skal nu finde $b$ i ligningen $y = 2x + b$, så vi indsætter vores kendte punkt:

$$y = 2x + b \Leftrightarrow 1 = 2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -1,$$

og derfor må tangentens ligning i punktet $(1, 1)$ være givet som

$$y = 2x - 1.$$

Funktionen $x^2$ og tangenten i punktet $(1, 1)$ til $x^2$ fremgår af Fig. 1.




Figur 1: Funktion $f(x) = x^2$ og tangentlinjen $g(x) = 2x - 1$.

# Ekstrema for differentiable funktioner

I mange sammenhænge er det en fordel at kunne bestemme *toppunkter/maksima og minima* for en funktion $f$. Hvis $f$ er en differentiabel funktion, så kan vi udnytte differentialregning til at bestemme sådanne punkter. Et punkt, der enten er et maksimum eller et minimum kaldes et *ekstremumspunkt*.

Vi har følgende sætning:

**Sætning 2.1** (Ekstremumspunkter)**.** *Lad $f$ være en differentiabel funktion. Hvis et punkt $P(x_0, f(x_0))$ er et ekstremumspunkt for $f$, så gælder der, at*

$$f'(x_0) = 0.$$

Det er dog værd at bemærke, at vi ikke nødvendigvis har den omvendte implikation; hvis $f'(x_0) = 0$, så er $(x_0, f(x_0))$ ikke nødvendigvis et ekstremumspunkt. Vi kalder sådanne for *vendetangenter*, og vi vil se eksempler på disse senere.

**Eksempel 2.2.** Lad $f$ være givet ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5.$$

Vi ønsker at bestemme ekstrema for $f$. Vi differentierer derfor først $f$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4).$$

Dette sættes nu lig 0, og vi får

$$3x(x - 4) = 0,$$

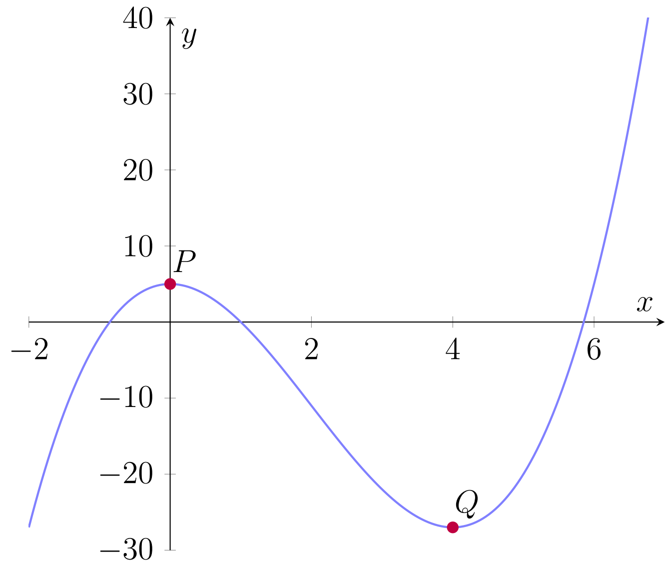
og ved hjælp af nulreglen ved vi, at $x = 0$ eller $x = 4$. Vi bestemmer nu de tilhørende $y$-værdier og vi får

$$f(0) = 5$$

og

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 5 \\ &= 64 - 96 + 5 \\ &= -27. \end{aligned}$$

Vi har derfor en vandret tangent i $P(0, 5)$ og $Q(4, -27)$. For at bestemme, om det er et ekstremumspunkt, så tegner vi grafen. Denne kan ses af Fig. 2




Figur 2: Graf for funktionen $f$.

Af Fig. 2 kan vi se, at punkterne $P$ og $Q$ er ekstremumspunkter. $P$ er et *lokalt maksimum* og $Q$ er et *lokalt minimum*. Vi kan også se, at $f$ ikke har nogle *globale ekstrema*.

# Opgave 1

Find ligningen for tangenten til følgende funktioner i de tilhørende punkter. Tegn desuden funktionerne og tangentlinjerne i Maple for at undersøge, om du har fundet de rigtige tangentlinjer.

1) $f(x) = 7x + 3,\ P(3, f(3))$
2) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1,\ P(1, f(1))$
3) $f(x) = 27,\ P(1000, f(1000))$
4) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x},\ P(9, f(9))$
5) $f(x) = \dfrac{10}{x} + 3x^3,\ P(2, f(2))$
6) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x + 1,\ P(-2, f(-2))$

# Opgave 2

Bestem ekstremumspunkter for følgende funktioner. Løs først ligningen $f'(x) = 0$ og tegn derefter grafen for funktionen. Afgør til sidst, om der er tale om globale maksimum/minimum eller lokale maksimum/minimum.

1) $-x^2 + 10$
2) $x^3$
3) $x^4 - 8x^2$
4) $\ln(x) - \dfrac{1}{2}x^2$
5) $\ln(x^2) - x$
6) $\dfrac{1}{x} + x^2$
7) $x^5 - 10x^4$
8) $\dfrac{1}{x^2 + 2x + 1} - 2x$