Matematik-aflevering

2022

3.e MA

Opgavesætter er delt i to dele:
Delprøve 1 kun med den centralt udmeldte formelsamling.
Delprøve 2 med alle hjælpemidler.

Krav til formidling af din besvarelse

Ved bedømmelse af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

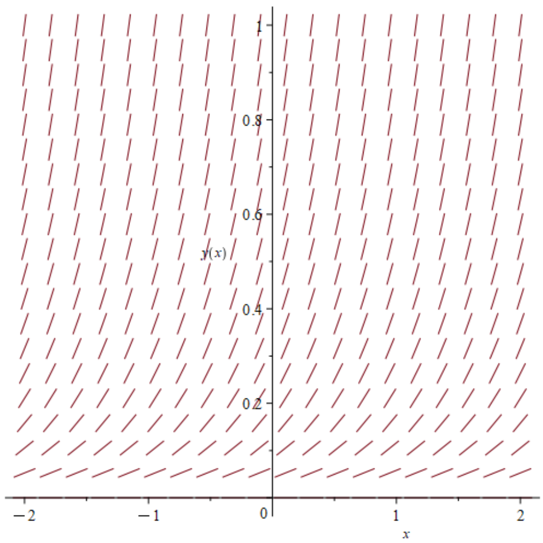
- **Redegørelse og dokumentation for metode**
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstragegi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger *eller* matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.
- **Figurer, grafer og andre illustrationer**
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.
- **Notation og layout**
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog, og med en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres stil standardviden.
- **Formidling og forklaring**
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.

  Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve uden hjælpemidler

Opgave 1

På 1 ses et hældningsfelt for en differentialligning.



Figur 1: Hældningsfelt for differentialligning.

a) Afgør, om funktionen f givet ved

$$f(x) = e^{-2x}$$

kan være en partikulær løsning til differentialligningen

Opgave 2

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x, y) = xy^2 - x - y.$$

a) Vis, at punkterne

$$\left(-\frac{1}{2}, -1, f\left(-\frac{1}{2}, -1\right)\right) \quad \text{og} \quad \left(\frac{1}{2}, 1, f\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right)$$

er stationære punkter for f.

b) Arten af de stationære punkter er ens. Bestem arten af de stationære punkter.

Opgave 3

En kugle K er givet ved ligningen

$$K: \; x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 8z = 4$$

a) Afgør, om punktet $(1, 2, 2)$ ligger på kuglen.

b) Bestem centrum og radius for K.

Opgave 4

En differentialligning er givet ved

$$y' + \frac{2}{x}y = 3\cos(x^3). \tag{1.1}$$

a) Vis, at (1.1) er en førsteordens lineær differentialligning.

b) Bestem en løsning til (1.1), der går gennem punktet $(1, \sin(1))$.

Opgave 5

På en plan L ligger punktet $(1, 4, -5)$. Desuden har planen vektoren $\vec{n}$ givet ved

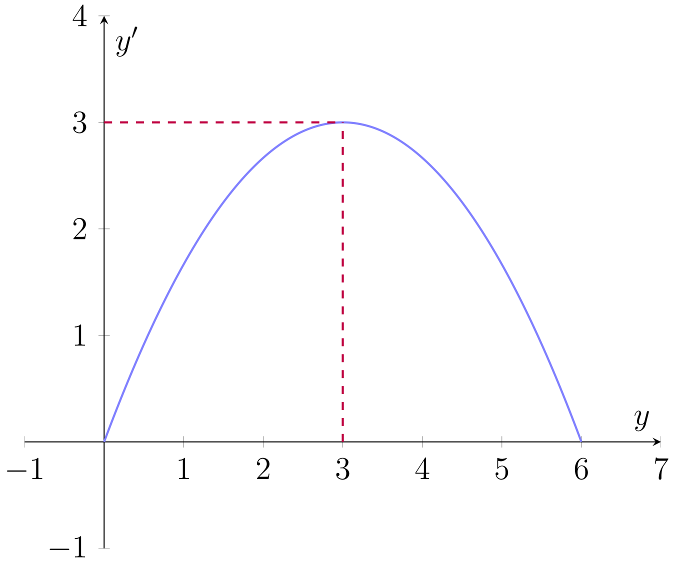
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1/2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

som normalvektor.

a) Bestem en ligning for L.

Opgave 6

En differentialligning er repræsenteret grafisk på Fig. 2.



Figur 2: Grafisk repræsentation af differentialligning.

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen repræsenteret grafisk på Fig. 2.

Delprøve med hjælpemidler

Opgave 6

En differentialligning er givet ved

$$y' = ay(1.73 - y). \tag{2.1}$$

a) Udnyt, at $y' = 0.0106$, når $y = 0.02$.

b) Bestem en partikulær løsning f til (2.1), der går gennem punktet $(4, 0.67)$.

c) Bestem tallet $f(11)$.

Opgave 7

På Tab. 1 ses sammenhængen mellem antallet af beboere i en landsby og antal år efter år 1970.

År efter år 1970	0	5	10	15	20	25	30	35
Beboere i tusinde	1.36	1.99	7.56	11.31	14.73	15.29	15.05	15.15

Tabel 1: Antal Beboere i landsby efter år 1970.

a) Lav lineær, eksponentiel og logistisk regression på tallene fra Tab. 1.

b) Brug residualerne for de forskellige modeller for at afgøre hvilken af modellerne, der bedst beskriver datasættet.

En analysevirksomhed beslutter sig for at bruge den logistiske model grundet tidligere erfaringer.

c) Hvad er det maksimale antal beboere ifølge modellen?

Opgave 8

En importør af bildæk får lovet fra fabrikanten, at der kun vil være fejl på 0.1% af de dæk, han køber. I en sending på 1500 dæk opdager han, at der er fejl på 6 af dækkene, hvilket gør ham mistænksom.

a) Argumentér for, at antallet af fejl på bildækkene er binomialfordelt og angiv antals- og sandsynlighedsparameteren for fordelingen.

b) Opstil en nulhypotese, der kan bruges til at afkræfte mandens mistanke.

c) Lav binomialtest på dataet og afgør, om vi skal forkaste nulhypotesen.

Opgave 9

I en differentialligningsmodel er en bi-bestands vækst I' proportional med antallet af bier $I(t)$ i tusinde efter t uger.

a) Opstil en differentialligningsmodel, der beskriver væksten af bierne.

b) Udnyt, at $I' = 7.2$, når $I = 120$ til at bestemme proportionalitetsfaktoren.

c) Udnyt, at $I(0) = 102.5$ til at bestemme en partikulær løsning til differentialligningen.

d) Bestem antallet af bier efter 30 uger.