

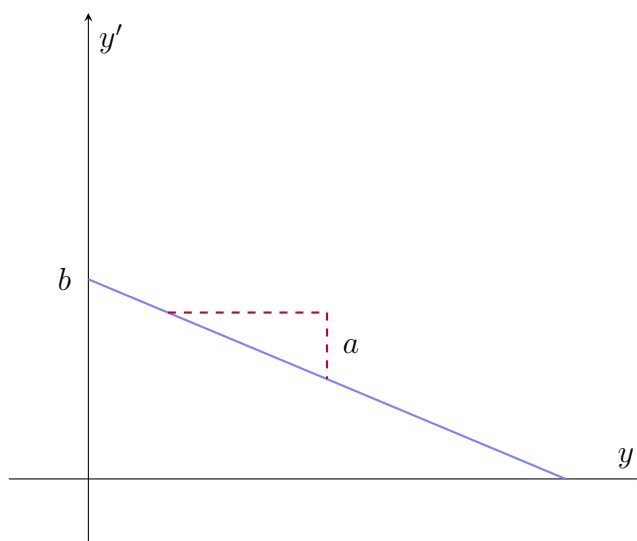
Logistisk vækst og grafer

Logistisk vækst og grafer

Den eksponentielle differentialligning givet ved

$$y' = b - ay$$

har den grafiske repræsentation set på Fig. 1.

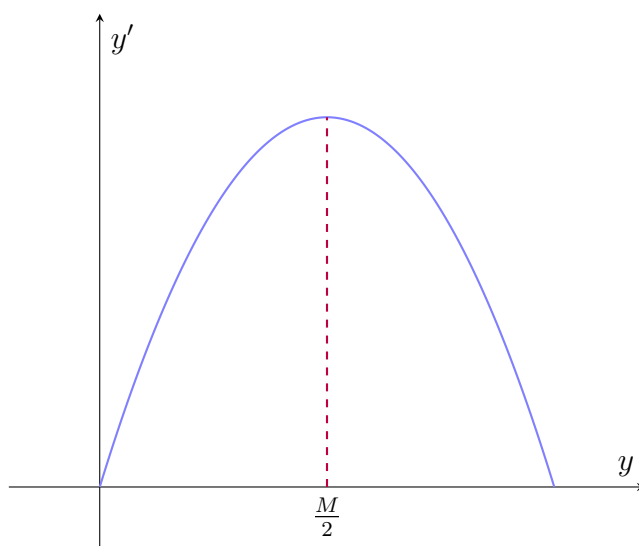


Figur 1: Grafisk repræsentation af differentialligningen $y' = b - ay$.

Vi kan tilsvarende lave en grafisk repræsentation af den logistiske differentialligning

$$y' = ay(M - y) = -ay^2 + aMy.$$

Det er ikke svært at overbevise sig om, at dette bliver en ”sur” parabel, der skærer i $(0,0)$. Den grafiske repræsentation af denne differentialligning kan ses på Fig. 2



Figur 2: Grafisk repræsentation af den logistiske differentiaalligning $y' = ay(M - y)$.

Af Fig. 2 kan vi se, at differentiaalligningens vækst y' er maksimeret, når $y = M/2$. Dette vil vi vise.

Sætning 1.1. *Den logistiske differentiaalligning*

$$y' = ay(M - y)$$

har maksimal vækst, når $y = M/2$.

Bevis. For at finde toppunktet, differentierer vi polynomiet

$$p(y) = ay(M - y) = aMy - ay^2.$$

Dette giver

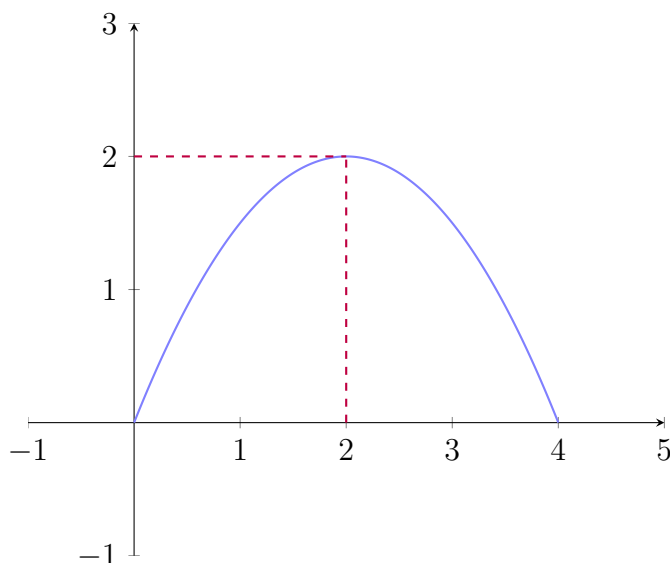
$$p'(y) = aM - 2ay$$

Vi sætter dette lig 0 for at finde toppunktet.

$$\begin{aligned} aM - 2ay &= 0 \Leftrightarrow aM = 2ay \\ &\Leftrightarrow \frac{aM}{2a} = y \\ &\Leftrightarrow \frac{M}{2} = y. \end{aligned}$$

■

Eksempel 1.2. Vi betragter den logistiske differentialligning repræsenteret på Fig. 3.



Figur 3: Grafisk repræsentation af en logistisk differentialligning.

Vi kan se, at denne parabel har rødder i 0 og 4. Derfor er differentialligningen på formen

$$y' = ay(4 - y),$$

og $M = 4$. Vi bestemmer nu toppunktet af parablen.

$$a \frac{M}{2} \left(4 - \frac{M}{2}\right) = a \frac{4}{2} \left(4 - \frac{4}{2}\right) = a \cdot 2 \cdot 2 = 4a$$

Vi kan af Fig. 3 se, at den maksimale vækst er $y' = 2$, så vi må have, at $4a = 2$, og $a = 0.5$. Vores differentialligning lyder da

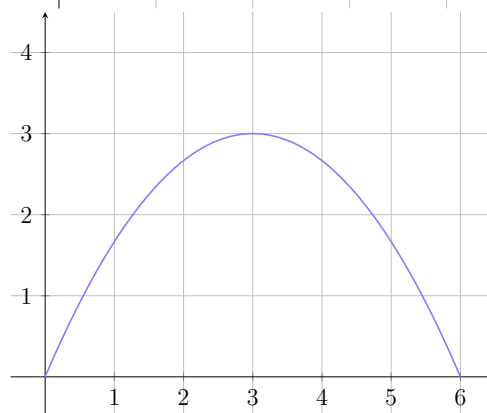
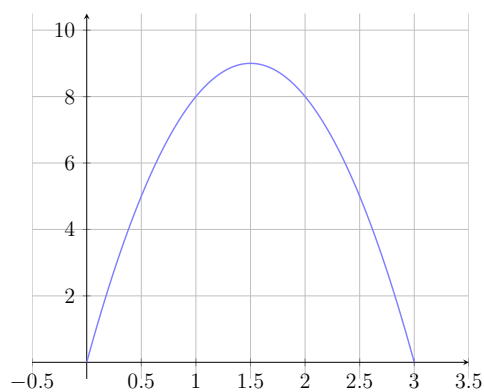
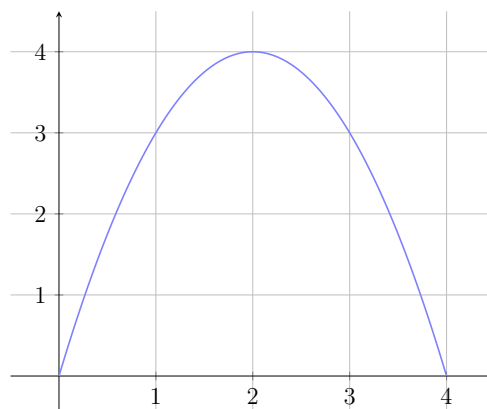
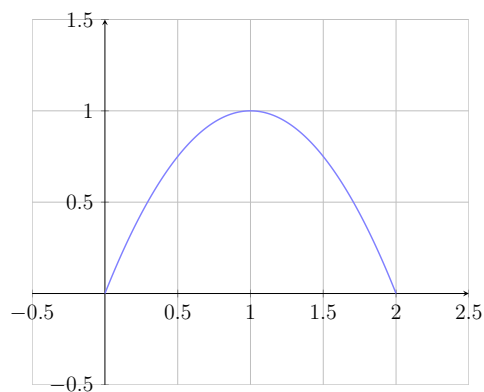
$$y' = 0.5y(4 - y).$$

Denne differentialligning har den fuldstændige løsning

$$y(x) = \frac{4}{1 + ce^{-2x}}.$$

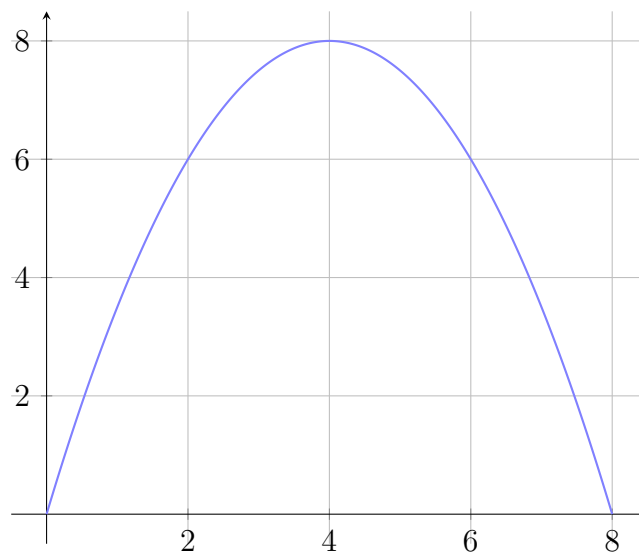
Opgave 1

Bestem fuldstændige løsninger til følgende grafisk repræsenterede differentialligninger.



Opgave 2

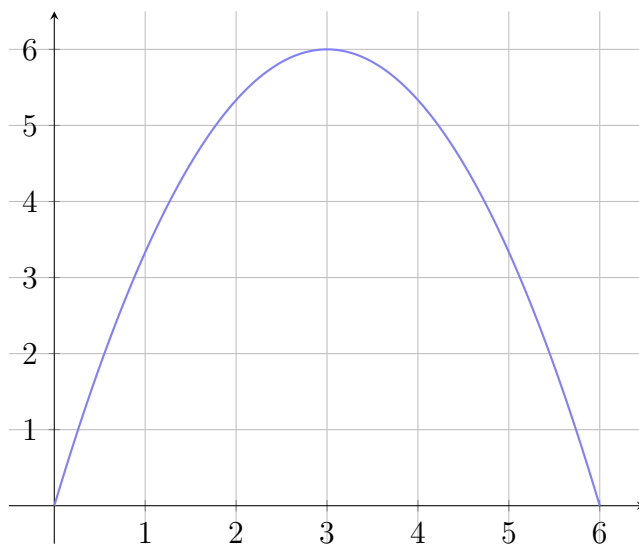
- i) Bestem en fuldstændig løsning til følgende grafisk repræsenterede differentiaalligning.



- ii) Bestem nu en partikulær løsning, der går gennem punktet $(0, 4)$.
iii) Hvad er væksten af y , når $y = 5$?
iv) Bestem $y(2)$.

Opgave 3

- i) Bestem en fuldstændig løsning til følgende grafisk repræsenterede differentiaalligning.



- ii) Bestem nu en partikulær løsning, der går gennem punktet $(0, 12)$.
iii) Hvad er væksten af y , når $y = 2$?
iv) Bestem $y(4)$.