Regneregler

Vi starter med at huske os selv på regneartemes hierarki også kaldet operatorpræcedens, der fortæller os i hvilken rækkefølge, vi skal anvende operatorerne i et givent regnestykke. Altså i hvilken rækkefølge, vi skal lægge sammen, gange, dividere, tage potenser osv.

Definition 0.1 (Regneartemes hierarki)**.** I en udregning anvender vi operatorerne i følgende rækkefølge:

i) Parentes. Betegnes med (). (Alt, der står i parentes udregnes først efter rækkefølgen bestemt for de resterende operatorer).

ii) Fakultet. Betegnes med !. Vi husker på, at for $n \in \mathbb{N}$ er $n!$ defineret som

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0, \\ n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 & \text{for } n > 0. \end{cases}$$

iii) Potenser og rødder. Et tal a i n'te potens og n'te rod betegnes med henholdsvist a^n og $\sqrt[n]{a}$.

iv) Multiplikation og division. Betegnes med henholdsvist $\cdot$ og $/$.

v) Addition og subtraktion. Betegnes med henholdsvist $+$ og $-$.

Eksempel 0.2. Lad os betragte regnestykket

$$7 + 10 - \underbrace{(5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 3!^2)}_{\text{Parentes 1}} + \underbrace{(7-9)}_{\text{Parentes 2}} *4. \tag{0.1}$$

Vi starter med at udregne Parentes 1. Vi følger regneartemes hierarki:

$$\begin{aligned} (5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 3!^2) &\overset{\text{ii)}}{=} (5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 6^2) \\ &\overset{\text{iii)}}{=} (5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 36) \\ &\overset{\text{iv)}}{=} (5 - 1 + 36) \\ &\overset{\text{v)}}{=} (40). \end{aligned}$$

Og Parentes 2 tilsvarende:

$$(7-9) \overset{\text{v)}}{=} (-2).$$

Disse indsættes nu i (0.1), og vi anvender igen regnearternes hierarki til at udregne:

$$\begin{aligned} 7 + 10 + \underbrace{40}_{\text{Par. 1}} + \underbrace{(-2)}_{\text{Par. 2}} \cdot 3 &\overset{\text{iv)}}{=} 7 + 10 + 40 - 6 \\ &\overset{\text{v)}}{=} 51. \end{aligned}$$

Brøker

i) Addition og subtraktion af brøker. For to brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er summen og differensen givet ved

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}.$$

ii) Multiplikation af brøker. Produktet mellem $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er givet ved

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Specielt er produktet mellem en brøk $\frac{a}{b}$ og et tal c givet ved

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}.$$

iii) Division af brøker. Forholdet mellem to brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er givet ved

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

(Vi ganger med den omvendte brøk.) Specielt er en brøk $\frac{a}{b}$ divideret med et tal c givet ved

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc},$$

og et tal c divideret med en brøk $\frac{a}{b}$ givet ved

$$\frac{c}{\frac{a}{b}} = \frac{ac}{b}$$

iv) Brøker og potenser/rødder. En brøk $\frac{a}{b}$ opløftet i et tal c er givet ved

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}.$$

n'te roden af en brøk $\frac{a}{b}$ er givet ved

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Eksempel 1.1. Lad os se på et eksempel, hvor vi anvender nogle af disse regler:

$$\frac{\frac{2}{5}+\frac{5}{7}}{\frac{10}{3}} \overset{\text{i)}}{=} \frac{\frac{14+25}{35}}{\frac{10}{3}} = \frac{\frac{39}{35}}{\frac{10}{3}} \overset{\text{iii)}}{=} \frac{39\cdot 3}{35\cdot 10} = \frac{117}{350}.$$

Potenser/rødder og det udvidede potensbegreb

Når vi opløfter et tal $a \in \mathbb{R}$ i et naturligt tal $n \in \mathbb{N}$ så tilsvarer det

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n \text{ gange}}, \tag{2.1}$$

vi multiplicerer altså tallet a n gange med sig selv. Vi vil snart forklare, hvad det betyder at opløfte et tal i både en positiv og negativ brøk. Vi vil først diskutere regnereglerne for potenser. Vi vil udnytte repræsentationen (2.1) for at udlede regnereglerne for multiplikation. Af repræsentationen (2.1) må vi for eksempel have

$$a^5a^3 = (a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)(a\cdot a\cdot a) = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^8,$$

og mere generelt for $m, n \in \mathbb{N}$, så har vi

$$a^na^m = \underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{n \text{ gange}}\underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{m \text{ gange}} = a^{m+n}$$

Tilsvarende har vi for eksempel, at

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a} = a\cdot a = a^2,$$

og mere generelt for $m, n \in \mathbb{N}$, så

$$\frac{a^n}{a^m} = \underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{n \text{ gange}}/\underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{m \text{ gange}} = a^{n-m}.$$

Derfor må vi også kunne udvide vores potensbegreb til negative eksponenter, og a^{-n} må være lig $\frac{1}{a^n}$ af vores argumentation. Det burde også være klart, hvorfor $a^0 = 1$ i det

$$1 = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0.$$

Vi vil nu opskrive vores første potensregneregler:

i) Potens/rod af produkt: $(ab)^n = a^nb^n$ og $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

ii) Multiplikation/division af potenser: $a^n a^m = a^{n+m}$ og $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Med vores nuværende regler, vil vi se, om vi kan udlede flere regler. Vi har eksempelvis

$$(a^5)^2 = a^5 a^5 \overset{\text{ii)}}{=} a^{10},$$

eller mere generelt for $m, n \in \mathbb{Z}$ så

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ gange}} \overset{\text{ii)}}{=} a^{m+m+\cdots+m} = a^{mn}. \tag{2.2}$$

På samme tid, så har vi, at

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Hvis vi sammenligner dette med (2.2), så må vi have

$$a = \sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{1/n},$$

altså tilsvarer n'teroden at opløfte i $1/n$'te potens. Vi kan nu konstruere potenser med alle brøker $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ som

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n},$$

og vi kan derfor også give mening til at opløfte tal i andet end heltal. Vi kan nu opskrive vores resterende potensregneregler:

i) Potenser af potenser: $(a^n)^m = a^{nm}$,

ii) Rødder og potenser: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

Opgave 1

Udregn følgende brøker (forkort så meget som muligt). Brug Maple til at tjekke jeres svar

1) $\dfrac{6}{7} + 3$ 2) $\dfrac{7}{22} + \dfrac{9}{10}$

3) $\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{2}$ 4) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}$

5) $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}$ 6) $\dfrac{\frac{10}{3} - \frac{2}{4}}{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}}$

Opgave 2

Forkort følgende så meget som muligt.

1) $(4x^3)^4$

2) $\dfrac{(a^2)^4 b^3}{ab^2}$

3) $(abc)^2$

4) $(a^4 + bc^2)^5$

5) $\dfrac{6^3}{6^2}$

6) $\dfrac{2^8 \cdot 3^5}{3^4 \cdot 4^4}$

7) $(x^5)^{1/5}$

8) $\sqrt[3]{27}$

9) $\sqrt{5}\sqrt{20}$

10) $3\sqrt{4}\sqrt{3}$

11) $3\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2}$

12) $4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}$