

Polynomier

Introduktion

Vi har tidligere arbejdet med både lineære og konstante funktioner. Disse er begge eksempler på den funktionstype, vi kalder for *polynomier*. Før vi giver en definition på et polynomium, så ser vi på nogle eksempler.

Eksempel 1.1. Funktionen $f(x) = 10$ er et konstant polynomium. Dette kaldes også for et nultegradspolynomium.

Eksempel 1.2. Funktionen $g(x) = 3x - 4$ er et lineært polynomium eller bare en lineær funktion. Dette kalder vi også for et førstegradspolynomium.

Eksempel 1.3. Funktionen $h(x) = 2x^2 - 4x + 2$ er et andengradspolynomium. Denne type polynomier er den, vi vi skal arbejde mest med i dette forløb. Det hedder et andengradspolynomium fordi den højeste potens af x er 2.

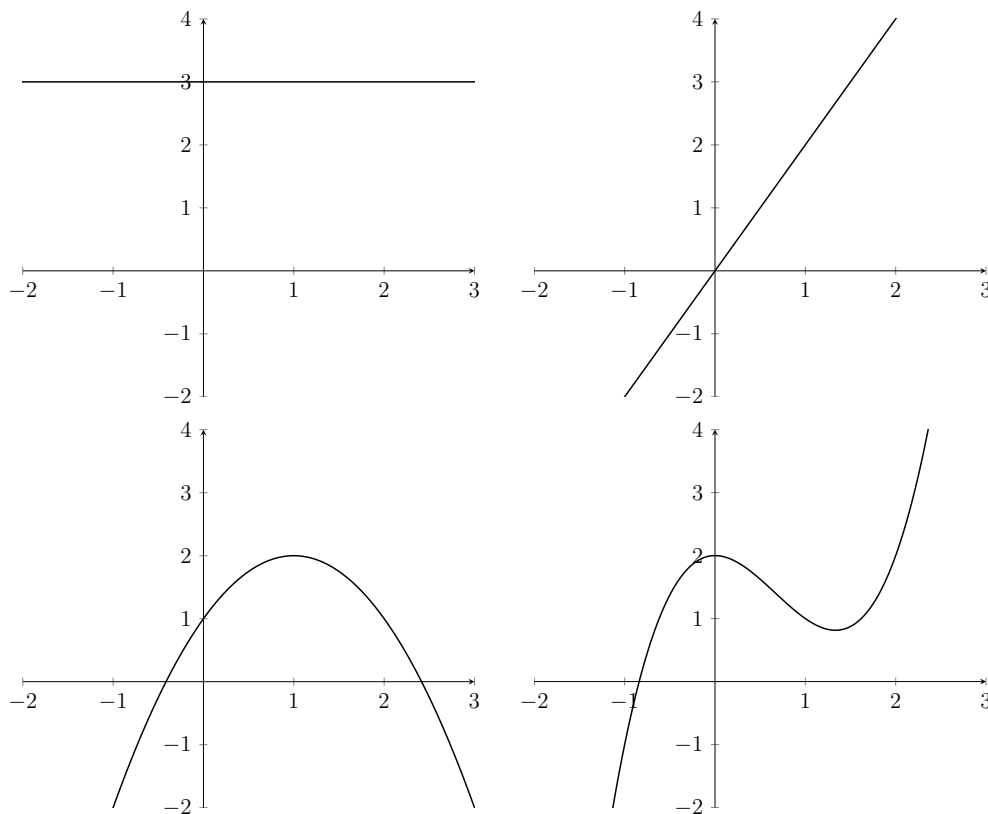
Eksempel 1.4. Funktionen $p(x) = 5x^7 - 3x + 1$ er et 7.gradspolynomium. Det kaldes et 7.gradspolynomium, da den højeste potens af x er 7.

Definition 1.5. Et polynomium er en funktion f på formen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

hvor $a_n \neq 0$. Vi kalder n for graden af f .

Vi kalder tallene a_0, a_1, \dots, a_n for et polynomiums koefficienter. På Figur 1 kan vi se eksempler på et nulte, første, anden og tredje gradspolynomium.



Figur 1: Henholdsvis nulte-, første-, anden- og tredjegradspolynomier.

Vi vil som sagt have et særligt fokus på andengradspolynomier i dette forløb, og derfor betragtes graferne for andengradspolynomier. Disse kaldes også for *parabler*.

For en god ordens skyld giver vi en definition på et andengradspolynomium.

Definition 1.6 (Andengradspolynomium). En funktion f på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

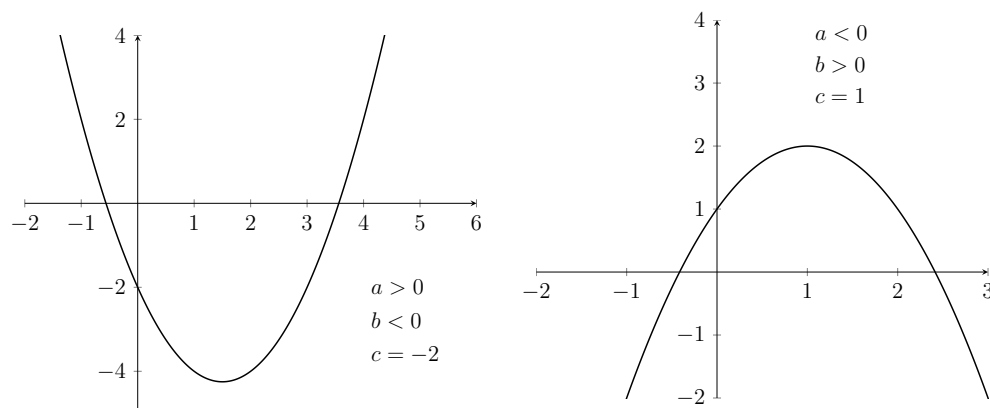
hvor $a \neq 0$ kaldes for et andengradspolynomium.

Vi skal kunne bruge koefficienterne i et andengradspolynomium til at afgøre, hvordan grafen for polynomiet ser ud. For koefficienterne gælder der:

- Tallet c er skæringen med y -aksen.
- Tallet b fortæller os, om parablen er voksende eller aftagende i skæringen med y -aksen. Hvis $b > 0$, så er parablen voksende, og hvis $b < 0$, så er parablen aftagende.

- Tallet a fortæller os, om parablens arme vender op eller ned. Hvis $a > 0$, så vender armene op ad, og hvis $a < 0$, så vender armene nedad.

På Figur 2 kan vi se to parabler.



Figur 2: To parabler

De steder hvor polynomier skærer x -aksen kaldes ofte for *rødder*. Vi skal senere se, hvordan vi kan bestemme rødderne for andengradspolynomier, men for nu vil vi holde os til at afgøre, hvor mange rødder et polynomium har. Til dette har vi *diskriminanten*.

Sætning 1.7 (Diskriminanten). *For et andengradspolynomium f givet ved*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gælder der, at tallet

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

fortæller os, hvor mange rødder f har.

- Hvis $d > 0$, så har f to rødder.
- Hvis $d = 0$, så har f én rod.
- Hvis $d < 0$, så har f nul rødder.

Vi kalder tallet d for *diskriminanten*.

Eksempel 1.8. Polynomiet f givet ved

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

har nul rødder, da diskriminanten d er givet ved

$$d = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 16 - 24 = -8,$$

som er mindre end 0.

Eksempel 1.9. Polynomiet g givet ved

$$-3x^2 + 4x + 2$$

har to rødder, da diskriminanten d er givet ved

$$d = 4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 16 + 24 = 40,$$

som er større end 0.

Eksempel 1.10. Polynomiet h givet ved

$$x^2 - 2x + 1$$

har netop én rod, da diskriminanten d er givet ved

$$d = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0.$$

Opgave 1

Bestem graden af følgende polynomier.

1) $2x + 1$

2) $3x^2 + 4$

3) $x^4 + 2x + 10$

4) $-10x^5 + 2x^2 + x - 0.5$

5) $2x + x^2$

6) x^9

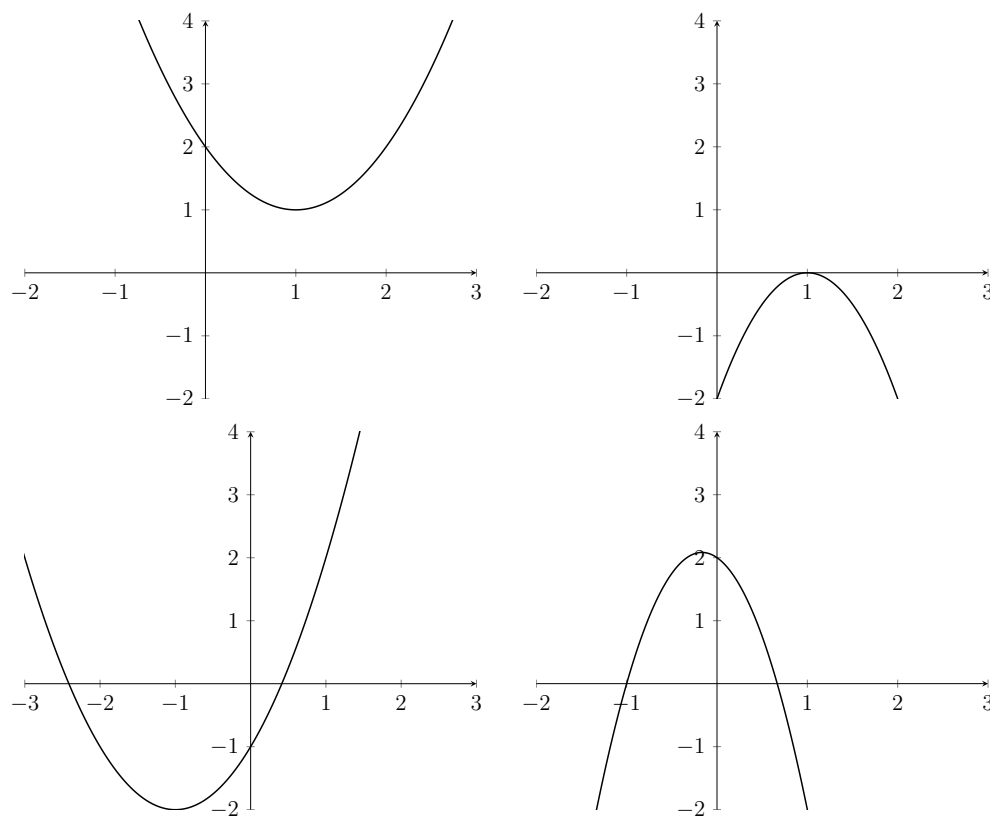
7) $-x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 10x + 2$

8) $5x^2 + 10x^{12}$

Opgave 2

For parablerne i Fig. 3

- i) Bestem fortegnet på diskriminanten d .
- ii) Bestem fortegnet på koefficienterne a og b .
- iii) Bestem c .



Figur 3: Fire parabler

Opgave 3

Bestem diskriminanten for følgende polynomier og brug den til at afgøre, hvor mange rødder polynomierne har. Tegn desuden graferne i Maple for at verificere dit resultat.

1) $2x^2 + 2x - 12$

2) $2x^2 - 8x + 4$

3) $x^2 - 4$

4) $x^2 + 3x - 4$

5) $6x^2 - 6x - 12$

6) $25x^2 + 100x + 100$

Opgave 4

Skitsér graferne for følgende polynomier og brug din skitse til at afgøre antallet af rødder. Tegn desuden graferne i Maple for at undersøge, om din skitse er korrekt.

1) $x^2 - 1$

3) $-2x^2 + 2x + 2$

5) $-x^2 - 10$

2) $-10x^2$

4) $3x^2 - x - 3$

6) $x^2 + 2x + 7$