

# Eksponentiel vækst og fordobling/halvering

## Fordoblings- og halveringskonstanter

Perspektivet var før at overveje, hvordan funktionsværdien af eksponentiel vækst udvikler sig, når vi øger  $x$  med 1. Vi kan tilsvarende betragte problemet fra den modsatte side: hvad skal vi øge  $x$  med for at fordoble/halvere funktionsværdien. Vi skal altså bestemme en størrelse  $T_2$ , så

$$f(x + T_2) = 2f(x)$$

for en eksponentialfunktion  $f$ . Denne idé er præsenteret i Fig. 1.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{+T_2} & \\ x & | & x + T_2 \\ f(x) & | & 2f(x) \\ & \xleftarrow{\cdot 2} & \end{array}$$

Figur 1: Fordoblingskonstant

For eksponentialvækst, hvor fremskrivningsfaktoren  $a$  er større end 1 er det muligt at finde et sådan tal  $T_2 > 0$ . Følgende sætning fortæller, hvordan vi skal finde dette tal, og vi kalder tallet for *Fordoblingskonstanten for  $f$* .

**Sætning 1.1.** *For en eksponentialfunktion  $f$  gælder det, at fordoblingskonstanten  $T_2$ , der opfylder, at*

$$f(x + T_2) = 2f(x)$$

*er givet ved*

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

*Tilsvarende er halveringskonstanten  $T_{1/2}$ , der opfylder, at*

$$f(x + T_{1/2}) = \frac{1}{2}f(x)$$

*bestemt ved*

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\ln(a)} = \frac{\log(1/2)}{\log(a)}.$$

*Desuden gælder der, at  $a = \sqrt[2]{2} = \sqrt[1/2]{2}$*

*Bevis.* Vi beviser tilfældet for fordoblingskonstanten. Tilfældet for halveringskonstanten beviset fuldstændig analogt. Lad os derfor for en eksponentialfunktion  $f$  givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x$$

antage, at tallet  $T_2$  opfylder, at  $f(x + T_2) = 2f(x)$  for alle  $x \in \mathbb{R}$ . Vi har så, at

$$\begin{aligned} f(x + T_2) = 2f(x) &\Leftrightarrow b \cdot a^x a^{T_2} = 2b \cdot a^x \\ &\Leftrightarrow a^{T_2} = 2 \\ &\Leftrightarrow \ln(a^{T_2}) = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow T_2 \ln(a) = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}, \end{aligned}$$

og vi har givet et bevis for fordoblingskonstanten. Siden vi har, at  $a^{T_2} = 2$ , så må der desuden gælde, at  $a = \sqrt[T_2]{2}$ , da  $a > 0$ . ■

## Opgave 1

Bestem fordoblingskonstanten for følgende eksponentialfunktioner

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $5 \cdot 2^x$        | 2) $7 \cdot 0.95^x$     |
| 3) $1.03 \cdot 1.004^x$ | 4) $6 \cdot 5.09^x$     |
| 5) $0.01 \cdot 1.75^x$  | 6) $7.19 \cdot 1.179^x$ |

## Opgave 2

- Du har 50.000kr på en konto i banken og får 1 procent i årlig rente. Hvor meget står der på din konto efter 12 år?
- Hvis en bakteriekoloni vokser med 200 procent på et døgn, hvor mange procent vokser den så med på en time?
- Væksten af en bestemt infektionssygdom er på 2 procent om ugen. Hvad er den månedlige vækst?

## Opgave 3

Bestem enten fordoblings eller halveringskonstanten for følgende eksponentialfunktioner

1)  $f_1(x) = 0.5 \cdot 2^x$

2)  $f_2(x) = 2 \cdot 0.5^x$

3)  $f_3(x) = 2000 \cdot (0.003)^x$

4)  $4e^{27x}$

## Opgave 4

En bakteriekoloni vokser med 30 procent i timen. Hvad er fordoblingskonstanten for den eksponentialfunktion, der beskriver antallet af bakterier? Hvad er fordoblingskonstanten, hvis vi ændrer enheden fra timer til dage? Hvad med minutter?

## Opgave 5

- i) Bevis, at halveringskonstanten  $T_{1/2}$  er givet ved

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\ln(a)}$$

for en eksponentialfunktion  $f(x) = ba^x$ . (Hint: Brug beviset for fordoblingskonstanten som skabelon.)