Arealer mellem grafer

Regneregler for bestemte integraler

Der gælder en tilsvarende linearitet for bestemte integraler, som der gjorde for ubestemte integraler

Sætning 1.1. *For kontinuerte funktioner f og g og konstant $c \in \mathbb{R}$ gælder følgende:*

i) $\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

ii) $\int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

iii) $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Bevis. Vi viser *i*) og overlader *ii*) og *iii*) til Opgave 4. Betragt derfor

$$\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x.$$

Vi skal først finde en stamfunktion til $f(x) + g(x)$, men vi har tidligere set, at sådan en funktion er givet som $F(x) + G(x)$, hvor F er en stamfunktion til f og G er en stamfunktion til g. Vi bruger altså denne stamfunktion $F(x) + G(x)$ i vores bestemte integral og får

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

■

Arealer mellem grafer

Ønsker vi at bestemme arealet mellem graferne for to kontinuerte funktioner f og g på et interval $[a, b]$, så kan dette findes ved brug af følgende sætning.

Sætning 2.1 (Areal mellem grafer)**.** *Arealet A mellem graferne for to kontinuerte funktioner f og g på et interval $[a, b]$ er givet ved*

$$\int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x.$$

Bevis. Vi starter med at forskyde vores funktioner med en konstant k, så det gælder, at $f(x)+k$ og $g(x)+k$ begge er positive på $[a,b]$. Dette ændrer ikke arealet mellem dem. Arealet mellem funktionerne vil så være givet ved

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)+k\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)+k\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)+k-(g(x)+k)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)+k-g(x)-k\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)-g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

■

Vi kan også nu fortolke på, hvad bestemte integraler er for funktioner under x-aksen.

Sætning 2.2. *For en funktion f, der opfylder, at $f(x)\leq 0$ på $[a,b]$, så er arealet A mellem grafen for f og x-aksen givet ved*

$$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Bevis. Vi finder arealet mellem $g(x)=0$ (x-aksen) og $f(x)$ ved brug af Sætning 2.1 som

$$A = \int_a^b 0 - f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b -f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

■

Eksempel 2.3. Arealet mellem funktionerne $f(x)=x^2+1$ og $g(x)=x$ på intervallet $[-1,1]$ er givet ved

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^2+1-x\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3+x-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{3}+1-\frac{1}{2}-(-\frac{1}{3}-1-\frac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{3}+2 \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Eksempel 2.4. Arealet mellem x-aksen og funktionen x^2-4 på intervallet $[-2,2]$ er givet ved

$$\begin{aligned}
A &= -\int_{-2}^{2} x^2-4\mathrm{d}x \\
&= -\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{-2}^{2} \\
&= -\left(\frac{8}{3}-8-(\frac{-8}{3}-(-8))\right) \\
&= -\left(\frac{16}{3}-16\right) \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

Opgave 1

Bestem arealet mellem x-aksen og følgende positive funktioner:

1) $3x^2$ 2) $x+2x+3x^2$

Opgave 2

i) Bestem arealet mellem $f(x)=2x^3-3x^2+3$ og $g(x)=-2x$ på intervallet $[0,2]$.

ii) Bestem arealet mellem funktionen $f(x)=x$ og $g(x)=-x+2$ på intervallet $[0,4]$. Brug geometri til at bestemme samme areal.

iii) Bestem arealet mellem $f(x)=x^2$ og $g(x)=-x^2+10$ på intervallet $[-3,3]$.

Opgave 3

i) Tegn funktionerne $f(x)=x^2-1$ og $g(x)=-x^2+17$. De afgrænser sammen et område O. Bestem arealet af O.

ii) Funktionerne $f(x)=x^2$ og $g(x)=\sqrt{x}$ afgrænser et område. Bestem arealet af dette område.

iii) Bestem arealet af trekanten afgrænset af $f(x)=2x$ og $g(x)=4$, samt y-aksen.

Opgave 4

Bevis *ii*) og *iii*) fra Sætning 1.1

Opgave 5

Bestem arealet afgrænset af funktionen $f(x) = 4x^3 - 9x^2$. Start med at tegne grafen.