Hastighed og acceleration

Vektorfunktioner som stedfunktioner

Da vi introducerede vektorfunktioner bemærkede vi, at vektorfunktioner kan udgøre stedfunktioner for partikler i planen. Præcist som i kender det fra fysik, så er hastigheden af et objekt givet som den afledede af stedfunktionen.

Definition 1.1 (Hastighed)**.** Lad $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ være en stedfunktion for en partikel givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

hvor koordinatfunktionerne x og y begge er differentiable. Så er *hastigheden* af partiklen til tiden t givet ved

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.2. Vi betragter en partikel, hvis position er beskrevet ved vektorfunktionen $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ \frac{1}{5}t^5 + 3t^3 \end{pmatrix}.$$

Hastighedsfunktionen for denne vektorfunktion er så givet ved

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t - 2 \\ t^4 + 9t^2 \end{pmatrix}.$$

Skal vi bestemme hastigheden til tidspunktet $t = 2$, så indsættes 2 i hastighedsfunktionen.

$$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 2 \\ 2^4 + 9 \cdot 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 52 \end{pmatrix}.$$

I x-aksens retning er hastigheden derfor 2 og i y-aksens retning er hastigheden 52.

Som I også ved fra jeres fysikundervisning, så beskriver den afledede af en hastighedsfunktion accelerationen af partiklen.

Definition 1.3 (Acceleration)**.** Lad $\vec{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ være en stedfunktion til en partikel givet ved

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix},$$

hvor koordinatfunktionerne x og y begge er to gange differentiable funktioner. Så er *accelerationen* af partiklen til tiden t givet ved

$$\vec{a}(t)=\vec{v}\,'(t)=\vec{r}\,''(t)=\begin{pmatrix}x''(t)\\y''(t)\end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.4. Vi betragter igen vektorfunktionen $\vec{r}$ fra Eksempel 1.2 givet ved

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}t^2-2t\\\frac{1}{5}t^5+3t^3\end{pmatrix}.$$

For at bestemme accelerationen for partiklen bestemmer vi $\vec{r}\,''$:

$$\vec{a}(t)=\vec{r}\,''(t)=\begin{pmatrix}2\\4t^3+18t\end{pmatrix}.$$

Accelerationen af partiklen til tidspunktet $t=2$ er derfor

$$\vec{a}(2)=\begin{pmatrix}2\\4\cdot 2^3+18\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\68\end{pmatrix}.$$

Opgave 1

Bestem hastigheds- og accelerationsvektorfunktionerne $\vec{v}$ og $\vec{a}$ for følgende vektorfunktioner.

1) $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}$ 2) $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}t^4\\t^2\end{pmatrix}$

3) $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}t^3-t^2\\t^5-15t^3\end{pmatrix}$ 4) $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}t^3+t^2+t+1\\t^6-10t^3\end{pmatrix}$

Opgave 2

i) En partikels stedfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}.$$

Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 0$ og accelerationsvektoren til tidspunktet $t = 1$.

ii) En partikels stedfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix}.$$

Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t = \pi$ og accelerationsvektoren til tidspunktet $t = \pi/2$.

Opgave 3

i) En partikels stedfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + 2 \\ 3t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}.$$

Bestem t, så hastighedsvektoren for partiklen er givet ved

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix}$$

ii) En partikels stedfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^4 - 4t^2 \\ 2t^2 - 2t \end{pmatrix}.$$

Bestem de værdier for t, så accelerationen for partiklen er givet ved

$$\begin{pmatrix} 56 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4

i) En partikels stedfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 8t \\ \frac{1}{3}t^3 - 4t \end{pmatrix}.$$

Bestem de værdier for t, så hastighedsvektoren er lodret, og bestem de værdier for t, så hastighedsvektoren er vandret.