Vandrette og lodrette tangenter

Vandrette og lodrette tangenter

Vi ønsker at kunne bestemme de steder, hvor tangenten til parameterkurven for en vektorfunktion $\vec{r}$ er enten lodret eller vandret. Dette er helt analogt til at bestemme toppunkterne for koordinatfunktionerne x og y.

Eksempel 1.1. Lad os betragte vektorfunktionen $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t^2+1 \\ -t^3+12t \end{pmatrix}.$$

Vi ønsker at bestemme alle lodrette og vandrette tangenter for denne vektorfunktion. Vi begynder med at bestemme de vandrette tangenter.

$$y'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; -3t^2+12 = 0.$$

Derfor har parameterkurven for $\vec{r}$ en vandret tangent, når $t = 2$ eller $t = -2$. Dette indsættes i $\vec{r}$:

$$\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} -(2)^2+1 \\ -(2)^3+12\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{r}(-2) = \begin{pmatrix} -(-2)^2+1 \\ -(-2)^3+12(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -16 \end{pmatrix}$$

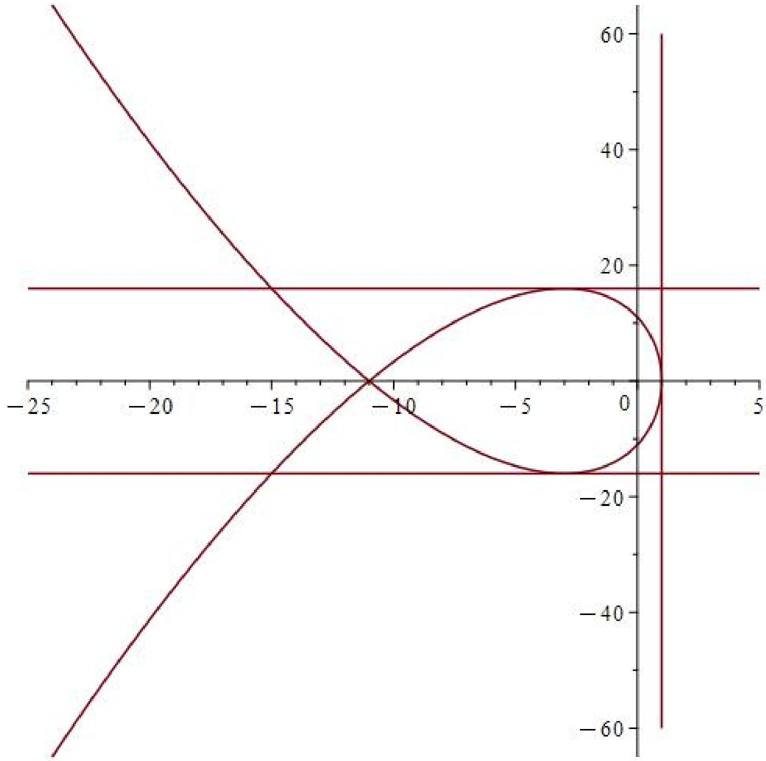
Parameterkurven for $\vec{r}$ har derfor en vandret tangent i punktet $P_{-2}(-3,-16)$ med ligningen $y = -16$. Den har også en vandret tangent i punktet $P_2(-3,16)$ med ligningen $y = 16$. Vi ønsker også at bestemme lodrette tangenter.

$$x'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; -2t = 0.$$

Derfor har parameterkurven for $\vec{r}$ en vandret tangent, når $t = 0$. Som før indsættes dette i $\vec{r}$.

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} -(0)^2+1 \\ -(0)^3+12\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Derfor har parameterkurven for $\vec{r}$ en lodret tangent i punktet $P_0(1,0)$ med ligningen $x = 1$. På Fig. 1 kan en tegning af parameterkurven for $\vec{r}$ ses samt de vandrette og lodrette tangenter.



Figur 1: Lodrette og vandrette tangenter for parameterkurve.

Opgave 1

Bestem de vandrette og lodrette tangenter til følgende vektorfunktioner. Bestem desuden skæringspunktet med tangenten, og tegn vektorfunktionen for at undersøge, om du har fundet de rigtige tangenter.

1) $\vec{r} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - 24t \end{pmatrix}$ 2) $\vec{r} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - 24t \end{pmatrix}$

3) $\vec{r} = \begin{pmatrix} \ln(t) - t^2 \\ t^3 - 3t^2 \end{pmatrix}$ 4) $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

Opgave 2

Lav aflevering.