

Fordoblingskonstanten for eksponentialfunktioner

Fordoblingskonstanten

Perspektivet var før at overveje, hvordan funktionsværdien af eksponentiel vækst udvikler sig, når vi øger x med 1. Vi kan tilsvarende betragte problemet fra den modsatte side: hvad skal vi øge x med for at fordoble/halvere funktionsværdien. Vi skal altså bestemme en størrelse T_2 , så

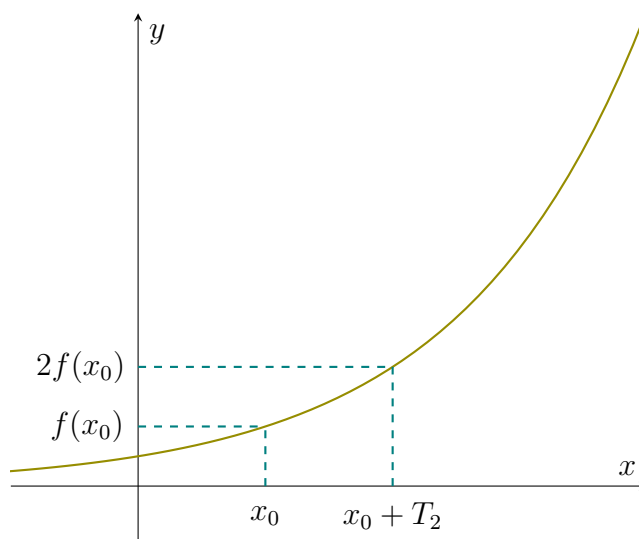
$$f(x + T_2) = 2f(x)$$

for en eksponentialfunktion f . Denne idé er præsenteret i Figur 1.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{+T_2} & \\ x & & x + T_2 \\ \hline f(x) & & 2f(x) \\ & \xrightarrow{\cdot 2} & \end{array}$$

Figur 1: Fordoblingskonstant

Dette kan tilsvarende ses grafisk på Figur 2

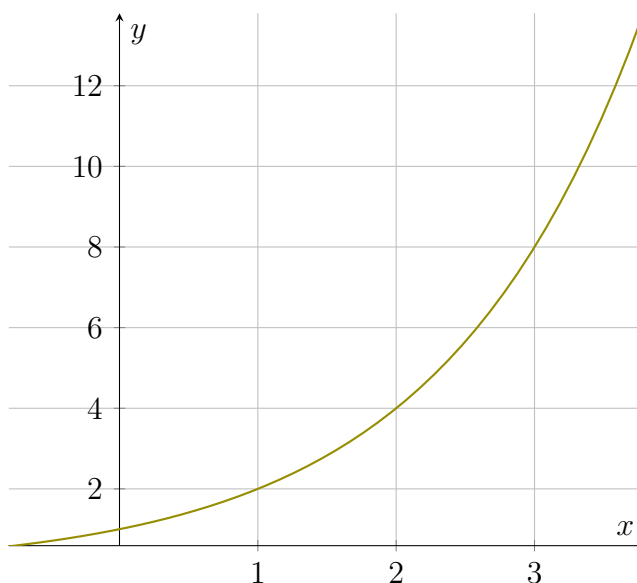


Figur 2: Grafisk præsentation af fordoblingskonstanten.

Eksempel 1.1. Vi betragter eksponentialfunktionen f givet ved

$$f(x) = 2^x.$$

Grafen for denne kan ses på Figur 3.



Figur 3: Graf for funktionen $f(x) = 2^x$.

Vi kan på figuren aflæse, at fordoblingskonstanten for f er 1, da vi skal øge x med 1 for at funktionsværdien fordobles.

For eksponentialvækst, hvor fremskrivningsfaktoren a er større end 1 er det muligt at finde et sådan tal $T_2 > 0$. Følgende sætning fortæller, hvordan vi skal finde dette tal, og vi kalder tallet for *Fordoblingskonstanten for f* .

Sætning 1.2. For en eksponentialfunktion f gælder det, at fordoblingskonstanten T_2 , der opfylder, at

$$f(x + T_2) = 2f(x)$$

er givet ved

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Tilsvarende er halveringskonstanten $T_{1/2}$, der opfylder, at

$$f(x + T_{1/2}) = \frac{1}{2}f(x)$$

bestemt ved

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\ln(a)} = \frac{\log(1/2)}{\log(a)}.$$

Desuden gælder der, at $a = \sqrt[2]{2} = \sqrt[1/2]{1/2}$

Bevis. Vi beviser tilfældet for fordoblingskonstanten. Tilfældet for halveringskonstanten beviset fuldstændig analogt. Lad os derfor for en eksponentialfunktion f givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x$$

antage, at tallet T_2 opfylder, at $f(x + T_2) = 2f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi har så, at

$$\begin{aligned} f(x + T_2) = 2f(x) &\Leftrightarrow b \cdot a^x a^{T_2} = 2b \cdot a^x \\ &\Leftrightarrow a^{T_2} = 2 \\ &\Leftrightarrow \ln(a^{T_2}) = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow T_2 \ln(a) = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}, \end{aligned}$$

og vi har givet et bevis for fordoblingskonstanten. Siden vi har, at $a^{T_2} = 2$, så må der desuden gælde, at $a = \sqrt[2]{2}$, da $a > 0$. ■

Eksempel 1.3. Vi bruger sætningen til at bestemme fordoblingskonstanten for eksponentialfunktionen

$$f(x) = 2^x.$$

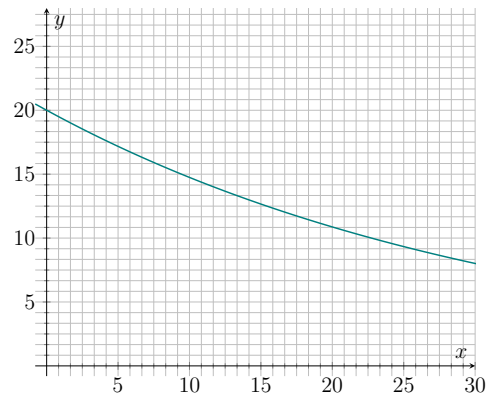
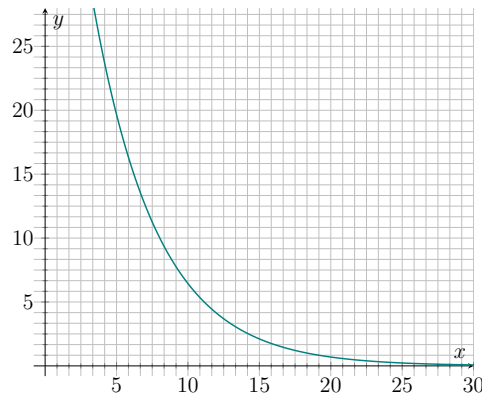
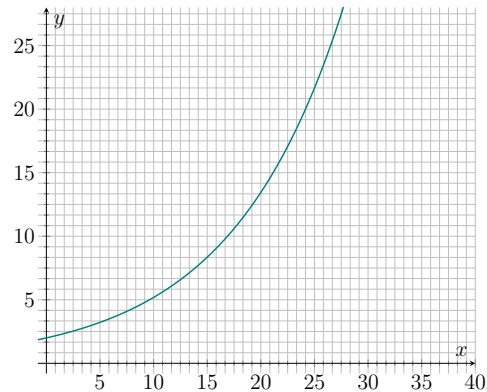
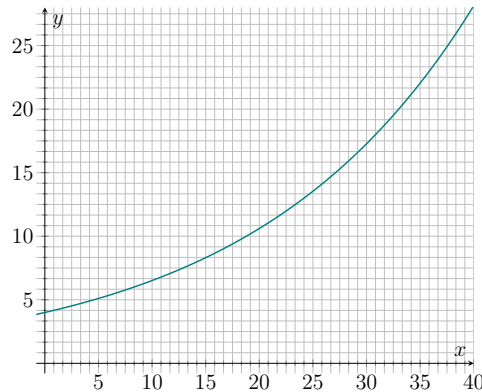
Vi får, at

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1,$$

som også var det vi kom frem til ved at bruge Figur 3.

Opgave 1

Aflæs fordoblings/halveringskonstanten for følgende eksponentialfunktioner.



Opgave 2 (Med Maple)

Bestem fordoblingskonstanten eller halveringskonstanten for følgende eksponentialfunktioner

1) $5 \cdot 2^x$

3) $1.03 \cdot 1.004^x$

5) $0.01 \cdot 1.75^x$

7) $10 \cdot 0.1^x$

2) $7 \cdot 0.95^x$

4) $6 \cdot 5.09^x$

6) $7.19 \cdot 1.179^x$

7) $6.13 \cdot 10^x$

Opgave 3 (Med Maple)

Bestem enten fordoblings eller halveringskonstanten for følgende eksponentialfunktioner

1) $f_1(x) = 0.5 \cdot 2^x$

2) $f_2(x) = 2 \cdot 0.5^x$

3) $f_3(x) = 2000 \cdot (0.003)^x$

4) $f_4(x) = 4e^x$

Opgave 4 (Med Maple)

- i) En bakteriekoloni vokser med 30 procent per døgn. Bestem fordoblingskonstanten for denne bakteriekoloni.
- ii) En radioaktiv isotop henfalder med 10 procent om året. Bestem halveringskonstanten for denne isotop.
- iii) Befolkningen i en by vokser med 2 procent om året. Bestem fordoblingskonstanten for befolkningen.
- iv) Du får 4 procent på en højrentekonto i banken. Hvor længe vil der gå, før du har fordoblet dine penge?
- v) Infektionstallet for en person falder med 12 procent i timen. Hvad er halveringskonstanten for infektionstallet?

Opgave 5 (Med Maple)

Tetrahydrocannabinol (THC) er det primære psykoaktive stof i hampplanten. Koncentrationen af stoffet efter indtagelse hos en bestemt person kan ses af Tabel 1.

Tid i timer	Koncentration i mg/L
0	0.30249
8	0.24512
16	0.20132
24	0.16371
32	0.13303
40	0.11069
48	0.08757
56	0.07317
64	0.05748

Tabel 1: Koncentration af tetrahydrocannabinol (THC)

Det antages at sammenhængen mellem antal forløbne timer x og blodkoncentrationen af THC $f(x)$ er givet ved en sammenhæng af typen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

- Lav regression på observationerne fra Tabel 1 og bestem en forskrift for f .
- Bestem halveringskonstanten for f .

Et stof eller lægemiddel vil betragtes som helt metaboliseret efter fem halveringstider.

- Hvor lang tid skal der gå, før vi kan sige, at der ikke er mere THC i kroppen på personen?

Opgave 6

- Læs beviset for formelen for fordoblingskonstanten.
- Lav beviset om, så du beviser formelen for halveringskonstanten.
- Kan vi forestille os andre typer af vækstkonstanter? Hvordan vil formelen se ud for disse? Kan du i så fald bevise formelen?