Den naturlige eksponentialfunktion og logaritme

Den naturlige eksponentialfunktion

Én eksponentialfunktion har så pæne egenskaber, at den fortjener et særligt navn; den naturlige eksponentialfunktion. Vi definerer den her.

Definition 1.1 (Den naturlige eksponentialfunktion)**.** Den naturlige eksponentialfunktion defineres som funktionen f givet ved

$$f(x) = e^x,$$

hvor $e \approx 2.718281$ kaldes for *Eulers tal.*

Denne eksponentialfunktion vil vi arbejde med særligt i 2. og 3.g. Den har begyndelsesværdi 1 og opfylder, at hældningen af funktionen alle steder er lig funktionsværdien, hvilket vi dog først vil præcisere næste år.

Vi kan bruge Eulers tal e til at repræsentere alle eksponentialfunktioner. Vi vil dog først præsentere *den naturlige logaritme.*

Den naturlige logaritme

På samme måde som vi sidst eksempelvis brugte $\log_2$ i forbindelse med eksponentialfunktionen 2^x og $\log_{10}$ i forbindelse med eksponentialfunktionen 10^x vil vi her definere den naturlige logaritme, der er den inverse funktion til den naturlige eksponentialfunktion.

Definition 2.1 (Den naturlige logaritme)**.** Den naturlige logaritme defineres som logaritmen med grundtal e, altså

$$\log_e(x).$$

Denne skrives ofte

$$\ln(x).$$

Denne opfylder som bekendt, at

$$\ln(e^x) = x$$

og

$$e^{\ln(x)} = x.$$

Eksempel 2.2. Det gælder eksempelvis, at $\ln(e^{10}) = 10$ og $e^{\ln(4)} = 4$.

Vi kan bruge den naturlige logaritme og den naturlige eksponentialfunktion til at omskrive alle eksponentialfunktioner. Har vi en eksponentialfunktion f givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

så kan vi udnytte, at

$$a = e^{\ln(a)}$$

samt regnereglen

$$(a^y)^x = a^{x \cdot y}.$$

Derfor kan vi skrive a^x som

$$a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a) \cdot x}.$$

Vi kalder nu $\ln(a) = k$ og indsætter dette i forskriften for f. Vi får derfor

$$f(x) = b \cdot a^x = b \cdot e^{kx}.$$

Enhver eksponentialfunktion kan altså omskrives til formen

$$f(x) = b \cdot e^{kx},$$

hvor $k = \ln(a)$.

Eksempel 2.3. Vi ønsker at omskrive eksponentialfunktionen f givet ved

$$f(x) = 10 \cdot 1.32^x$$

til formen

$$f(x) = b \cdot e^{kx}.$$

Vi udnytter, at $k = \ln(a) = \ln(1.32) = 0.278$ og får, at f kan skrives som

$$f(x) = 10e^{0.278x}.$$

Vi kan også være i situationen, hvor vi ønsker at gå den anden vej. Lad os betragte tilfældet, hvor vi har fået en eksponentialfunktion g givet ved

$$g(x) = 14 \cdot e^{-0.11x}.$$

Vi kan i denne situation ikke umiddelbart aflæse hverken fremskrivningsfaktor eller vækstrate. For at gøre dette skal vi omskrive g til formen

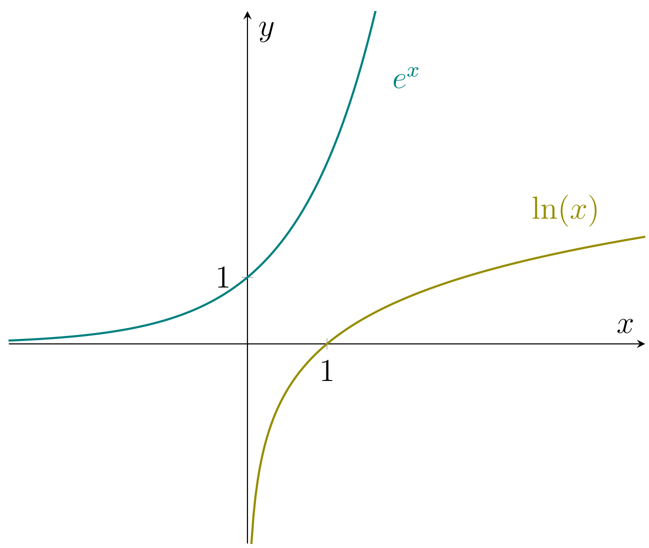
$$g(x) = b \cdot a^x.$$

Da $k = \ln(a)$, så må det gælde, at $e^k = e^{\ln(a)} = a$, så vi kan altså finde fremskrivningsfaktoren a ved at bestemme $a = e^{-0.11} = 0.896$, og g lyder derfor

$$g(x) = 14 \cdot 0.896^x.$$

Grafer

Da logaritmer gør det omvendte af eksponentialfunktioner (de er inverse til eksponentialfunktioner), må deres grafer være eksponentialfunktioner spejlet i linjen $y = x$. (Hvis dette ikke er klart, så kommer vi til at vende tilbage til det senere). Grafen for e^x samt $\ln(x)$ kan ses af Figur 1



Figur 1: Grafer for funktionerne e^x og $\ln(x)$.

Opgave 1

En tabel med funktionsværdier for e^x er givet.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
e^x	0.018	0.049	0.135	0.368	1	2.718	7.389	20.085	54.598	148.413

Brug tabellen til at bestemme følgende.

1) $\ln(20.085)$
2) $\ln(54.598)$
3) $\ln(1)$
4) $\ln(0.018)$
5) $\ln(0.049)$
6) $\ln(148.413)$

Opgave 2

Bestem følgende udtryk

1) $\ln(\mathrm{e}^3)$	2) $\ln(\mathrm{e}^{17})$
3) $\ln(\mathrm{e}^{\sqrt{4}})$	4) $\ln(\mathrm{e})$
5) $\ln(1)$	6) $\ln(\mathrm{e}^{-0.157})$

Opgave 3 (Med Maple)

Omskriv følgende eksponentialfunktioner til formen

$$f(x) = be^{kx}.$$

1) $f(x) = 2 \cdot 1.2^x$	2) $f(x) = 10 \cdot 0.75^x$
3) $f(x) = 1.93 \cdot 2^x$	4) $f(x) = 510 \cdot 1.13^x$
5) $f(x) = \sqrt{2} \cdot 0.9^x$	6) $f(x) = 9 \cdot (e^{-1.5})^x$

Opgave 4

I Opgave 3 havde k forskellige fortegn. Kan du gennemskue, hvad fortegnet for k betyder for eksponentialfunktionen?

Opgave 5 (Med Maple)

i) En eksponentialfunktion f er givet ved

$$f(x) = 5 \cdot e^{-0.05x}.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for f.

ii) En eksponentialfunktion f er givet ved

$$f(x) = 17 \cdot e^{0.8x}.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for f.

iii) En eksponentialfunktion f er givet ved

$$f(x) = 9.11 \cdot e^{-0.17x}.$$

Afgør, hvor mange procent f stiger med, hver gang x øges med 1.

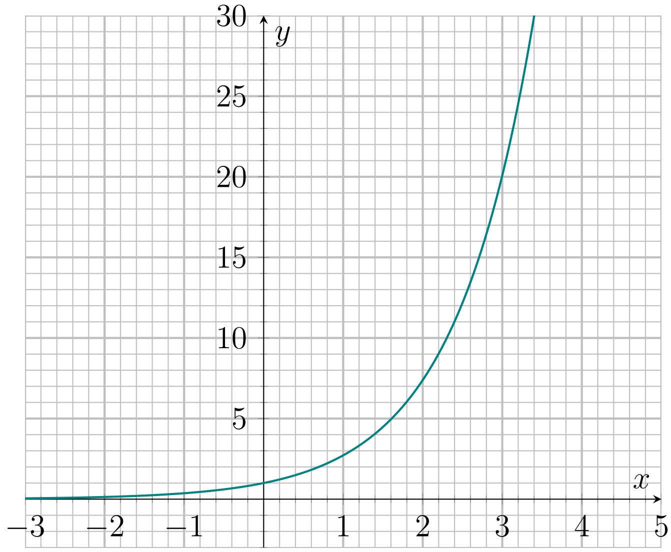
Opgave 6 (Med Maple)

I en by er indbyggertallet i år 2000 på 15 621 personer. I år 2010 er der 20 217 personer. Det antages, at indbyggertilvæksten kan beskrives ved en eksponentiel sammenhæng.

i) Bestem en sammenhæng $f(x) = b \cdot e^{kx}$, der beskriver udviklingen af befolkningen i byen. x skal beskrive år efter år 2000 og f skal beskrive befolkningsantallet i byen.

Opgave 7

Følgende er en graf for den naturlige eksponentialfunktion $f(x) = e^x$.



Figur 2: Graf for funktionen e^x.

Brug grafen for $f(x) = e^x$ til at løse følgende opgaver. Aflæs efter bedste evne.

i) Bestem e^2.

ii) Bestem e^3.

iii) Bestem $e^{2.6}$.

iv) Bestem e^0.

v) Bestem ln(10).

vi) Bestem ln(20).

vii) Bestem $\ln(26)$.

Opgave 8 (Med Maple)

Løs følgende ligninger både ved brug af ln og ved brug af solve.

1) $e^{x-4} = 403.43$	2) $e^{x/2-6} = 54.59$
3) $\ln(x+2) = 0.5$	4) $\ln(4x-1) = 3.7$