Kvadratsætninger

Kvadratsætninger

Til at løse andengradsligninger kan det være meningsfuldt at bruge det, vi kalder for *kvadratsætninger*. Disse præsenteres i følgende sætning.

Sætning 1.1 (Kvadratsætninger)**.** *For alle reelle tal a, b gælder der, at*

i) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

ii) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Bevis. Vi regner blot og får for i), at

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + b^2 + ab + ba = a^2 + b^2 + 2ab.$$

For ii) fås, at

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 + b^2 - ab - ba = a^2 + b^2 - 2ab.$$

For iii) fås tilsvarende, at

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 - ab + ba = a^2 - b^2.$$

■

Eksempel 1.2. Vi har af kvadratsætning i), at

$$(2x+y)^2 = 4x^2 + y^2 + 4xy.$$

Eksempel 1.3. Vi kan bruge regneregel iii) til at udregne udtrykket $101 \cdot 99$, da

$$101 \cdot 99 = (100+1)(100-1) = 100^2 - 1^2 = 9999.$$

Eksempel 1.4. Vi kan bruge kvadratsætning ii) baglæns på $x^2 + 4y^2 - 4xy$ da

$$x^2 + 4y^2 - 4xy = x^2 + (2y)^2 + 2(2y)x = (x^2 - y^2).$$

Opgave 1

Bevis de tre kvadratsætninger ved at gange de to parenteser sammen.

Opgave 2

Brug kvadratsætninger til at hæve følgende parenteser

1) $(a+5)^2$ 2) $(7-x)^2$
3) $(2x+4y)^2$ 4) $(5-8x)^2$
5) $(x+6)(x-6)$ 6) $(\sqrt{2}+5x)^2$
7) $(\frac{1}{3}-\frac{7}{2}a)^2$ 8) $(7-x)^2$

Opgave 3

Brug kvadratsætning iii) på følgende udtryk for at udregne dem. Brug en lommeregner eller Maple for at regne efter.

1) $18 \cdot 22$ 2)$95 \cdot 105$
3) $63 \cdot 57$ 4)$46 \cdot 54$
5) $1007 \cdot 993$ 6)$180 \cdot 220$

Opgave 4

Løs følgende ligninger ved at anvende kvadratsætningerne baglæns.

1) $x^2+4+4x=0$ 2)$x^2+9-6x=0$
3) $x^2+16+8x=0$ 4)$2x^2+9-12x=0$
5) $9x^2+36-36x=0$ 6)$x^2-16=0$
7) $x^4-16=0$ 8)$16x^2+25+40=0$

Opgave 5

Når vi skal løse andengradsligninger, skal vi bruge det, vi kalder for *diskriminanten*. Denne betegnes med et d og udregnes for en andengradsligning

$$ax^2+bx+c=0$$

som

$$d = b^2 - 4ac.$$

Hvis $d > 0$, så har ligningen to løsninger. Hvis $d = 0$, så har ligningen netop én løsning og hvis $d < 0$, så har ligningen ingen løsninger.

Bestem diskriminanten d for følgende andengradspolynomier og afgør antallet af løsninger.

1) $2x^2 + 4x - 2 = 0$	2) $-x^2 + 5x + 7 = 0$
3) $x^2 + 4 + 7x = 0$	4) $5x^2 = -9x + 8$
5) $6x^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0$	6) $3x^2 - 4x = 1$
7) $\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$	8) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{6} = 0$