Prikprodukter

Prikprodukt

Vi vil ikke definere nogen måde at gange vektorer sammen. Vi vil i stedet definere det såkaldte prikprodukt. Dette kan blandt andet bruges til at bestemme vinklen mellem to vektorer.

Definition 1.1. Lad \vec{v} og \vec{w} være defineret som

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \text{ og } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Så defineres prikprodukteteller skalarproduktetmellem \overrightarrow{v} og \overrightarrow{w} som

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

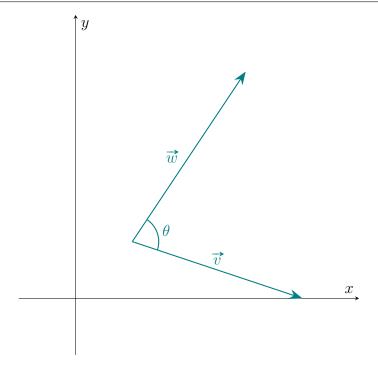
Dette skrives også til tider $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Eksempel 1.2. Lad $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og lad $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Så kan vi bestemme prikproduktet mellem \vec{v} og \vec{w} som

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = 6.$$

Vinkler mellem vektorer

Prikproduktet relaterer sig til vinklen mellem vektorer. Vi skal senere se, hvordan vi kan bestemme vinklen mellem to vektorer. Vinklen mellem to vektorer \overrightarrow{v} og \overrightarrow{w} noteres som $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. På Figur 1 er vinklen mellem to vektorer illustreret



Figur 1: Vinkel mellem to vektorer

Hvis vinklen mellem to vektorer \vec{v} og \vec{w} er 90°, altså at $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 90$ °, så siger vi, at vektorerne er vinkelrette eller *orthogonale*. Vi skriver da $\vec{w} \perp \vec{v}$.

Sætning 2.1. To vektorer \vec{v} og \vec{w} er orthogonale hvis og kun hvis $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Vi vil senere se mere præcist hvordan sammenhængen mellem vinklen mellem vektorer og prikproduktet er.

Eksempel 2.2. Vi vil afgøre, om $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er orthogonale. Vi bestemmer derfor prikproduktet

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0.$$

Derfor ved vi, at vinklen mellem de to vektorer er 0°, og at de derfor er orthogonale eller vinkelrette.

Opgave 1

i) Bestem prikproduktet mellem følgende vektorer

$$1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3)
$$\begin{pmatrix} 12\\15 \end{pmatrix}$$
 og $\begin{pmatrix} -3\\14 \end{pmatrix}$

3)
$$\begin{pmatrix} 12\\15 \end{pmatrix}$$
 og $\begin{pmatrix} -3\\14 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -2\\-5 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0.5\\-12 \end{pmatrix}$

Opgave 2

Afgør hvilke af følgende par af vektorer, der er orthogonale

1)
$$\binom{2}{5}$$
 og $\binom{-10}{4}$

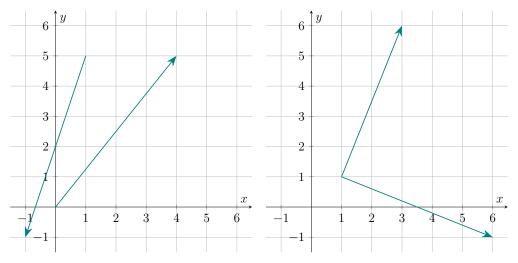
$$2) \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3)
$$\begin{pmatrix} -0.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$
 og $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -8 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 16 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -8 \end{pmatrix}$$
 og $\begin{pmatrix} 16 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

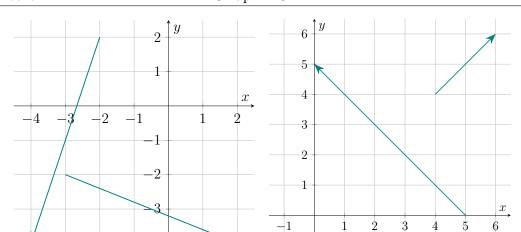
Opgave 3

Bestem prikproduktet mellem følgende vektorer.



Opgave 4

Afgør hvilke af følgende par af vektorer, der er orthogonale



Opgave 5

Fire punkter er givet ved A(2,2), B(5,4), C(-2,7) og D(-7,-3).

- i) Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
- ii) Afgør om \overrightarrow{AC} og \overrightarrow{DB} er orthogonale

Opgave 6

To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x^2 - 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

i) Bestem x, så \overrightarrow{a} og \overrightarrow{b} er orthogonale.