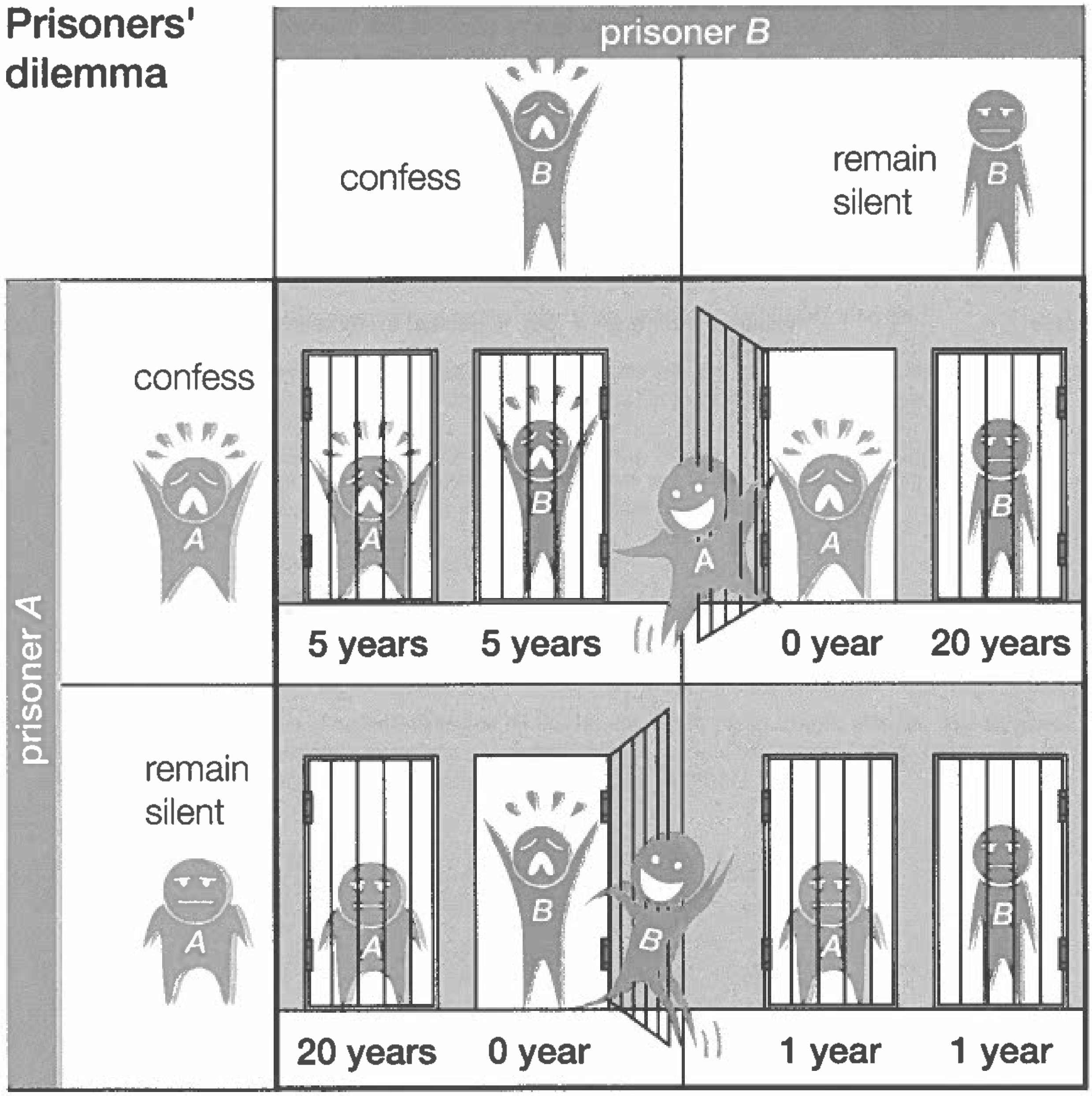

Prisoners' dilemma
prisoner B
confess
remain silent
prisoner A
confess
remain silent
5 years
5 years
0 year
20 years
20 years
0 year
1 year
1 year

Spilteori

Indledning

Spilteori drejer sig om matematiske analyser af *spil*, hvor flere *parter* spiller mod hinanden. Der er otte afsnit, hvoraf de første fem er elementære med mange eksempler, mens de sidste tre går i detaljer med matematikken:

Indhold

1. Rene strategier: Nul-sum spil
2. Rene strategier: Ikke nul-sum spil
3. Blandede strategier: Nul-sum spil I
4. Blandede strategier: Ikke nul-sum spil I
5. Spiltræer I
6. Blandede strategier: Nul-sum spil II
7. Blandede strategier: Ikke nul-sum spil II
8. Spiltræer II

Titelbladet

Titelbladet refererer til det klassiske spilteoretiske problem kaldet *Fangernes dilemma*.

1: Rene strategier: Nul-sum spil

Nul-sum spil

Jeg begynder med et eksempel på et *nul-sum spil*, dvs. et spil, hvor det, som den ene part vinder, er lig med det, den anden part mister. Hvad jeg mener med det, fremgår snart.

<u>Eksempel</u>

Slaget om Bismarckhavet

Den 7. december 1941 angreb japanerne uden varsel den amerikanske flådebase Pearl Harbor på Hawaii. Det var begyndelsen på Stillehavskrigen, som rasede frem til amerikanernes atombombe-angreb på Hiroshima og Nagasaki i august 1945.

I februar 1943 fik amerikanerne efterretninger om, at japanerne ville overføre omkring 105.000 soldater fra Kina og Japan til Ny Guinea for at forstærke deres styrker der. Tropperne skulle transporteres med en konvoj af skibe.

Konvojen kunne enten sejle nord eller syd om *New-Britain* øen.

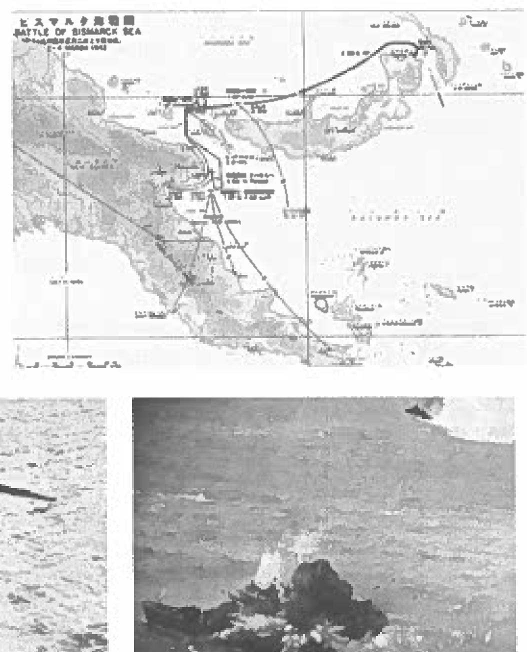
Hvis japanerne sejlede nord om New-Britain, ville de være beskyttet af dårligt vejr, mens turen syd om ville blive i klart vejr. Begge ruter ville tage 3 dage.

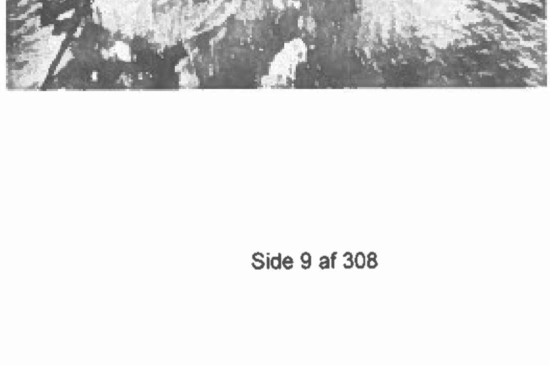
Den amerikanske general Kenney fik ordre til at angribe japanernes konvoj og påføre den maksimale tab. Han måtte derfor beslutte sig til, om han skulle koncentrere sine fly på den nordlige rute eller den sydlige.

Begge parter vurderede følgende:

Hvis de amerikanske fly var koncentreret på nordruten, ville japanerne blive opdaget i løbet af 1 dag pga. dårlig sigt, uanset om de valgte nordruten eller sydruten. Konvojen ville derefter blive angrebet i de resterende 2 dage.

Hvis de amerikanske fly var koncentreret på sydruten, ville der ske følgende: Hvis japanerne valgte nordruten, ville de blive bombet i 1 dag, men hvis de valgte sydruten med god sigt, ville de blive bombet i 3 dage.





Spilteoretisk analyse

Udbytte

Jeg kigger nu på *udbyttet*, dvs. antallet af bombedage for de forskellige kombinationer af amerikanernes og japanernes valg.

Udbyttematrix

(En matrix, matricen, flere matricer, alle matricerne)

Det skriver jeg op i en *udbyttematrix*, dvs. en tabel over udbyttet:

		Japanernes valg		
		Nordrute	*Sydrute*	*Min:*
Amerikanernes	*Nordrute*	2	2	2
valg	*Sydrute*	1	3	1
	Max:	2	3	

Hvad skal amerikanerne nu vælge? Og hvad skal japanerne gøre?

- Hvis amerikanerne vælger nordruten, vil det minimale udbytte være 2 dages bombninger.
- Hvis amerikanerne vælger sydruten, vil det minimale udbytte være 1 dags bombning.

Max-Min princippet

Spilteorien siger, at løsningen er at vælge det *maksimale* af de to *minimale* udbytter.

Altså skal amerikanerne vælge nordruten med 2 dages bombning.

Jeg kan også se på problemet fra japanernes side. Her opskriver jeg tabellen med negativt udbytte - japanerne mister jo noget.

		Amerikanernes valg		
		Nordrute	*Sydrute*	*Min:*
Japanernes	*Nordrute*	-2	-1	-2
valg	*Sydrute*	-2	-3	-3
	Max:	-2	-1	

Spilteorien siger tilsvarende, at japanerne skal vælge det maksimale af de to minimale udbytter, dvs. nordruten med -2.

Begge parter skal altså vælge nordruten - det er smartest spilteoretisk. Hvorfor? Hvis de nemlig satser på sydruten, risikerer de at lide endnu større tab.

I krigen var det præcis nordruten begge parter valgte: Konvojen blev opdaget efter 1 dag og derefter fulgte 2 dages bombardementer, hvor japanerne led svære tab.

Sadelpunkt

Løsningen - nordrute/nordrute - finder jeg hurtigt i udbyttematricen: Hvis jeg tilføjer minimum-værdierne for hver række og maksimum-værdierne for hver søjle, ser jeg, at løsningen netop er der, hvor:

Max i søjlen og *Min i rækken*

Et sådan punkt kalder man et *sadelpunkt*.

Max-Min princippet

Spilteorien siger, at man om muligt skal vælge de maksimale af de minimale udbytter. Dette hedder *max-min princippet*.

Sadelpunkt

Valget svarer til et *sadelpunkt*, dvs. et element, som er maksimalt i sin søjle og samtidigt minimalt i sin række.

Det er dog ikke altid sikkert, at der findes sadelpunkter i en udbyttematrix.

2: Rene strategier: Ikke nul-sum spil

Ikke nul-sum spil

Her kommer nogle eksempler på ikke *nul-sum spil*. Her er den ene parts udbytte ikke nødvendigvis lig med den anden parts tab.

Eksempel

Hastighedskontrol

En bilist har mulighed for at overholde hastighedsgrænserne eller at overtræde dem. I sidste tilfælde er der risiko for at få en bøde, men også chance for at spare tid og opnå lidt mere køreglæde.

Samfundet kan vælge at kontrollere eller ikke at kontrollere. I hvor stort omfang samfundet vælger det ene frem for det andet, afhænger naturligvis af de ressourcer, som man afsætter.

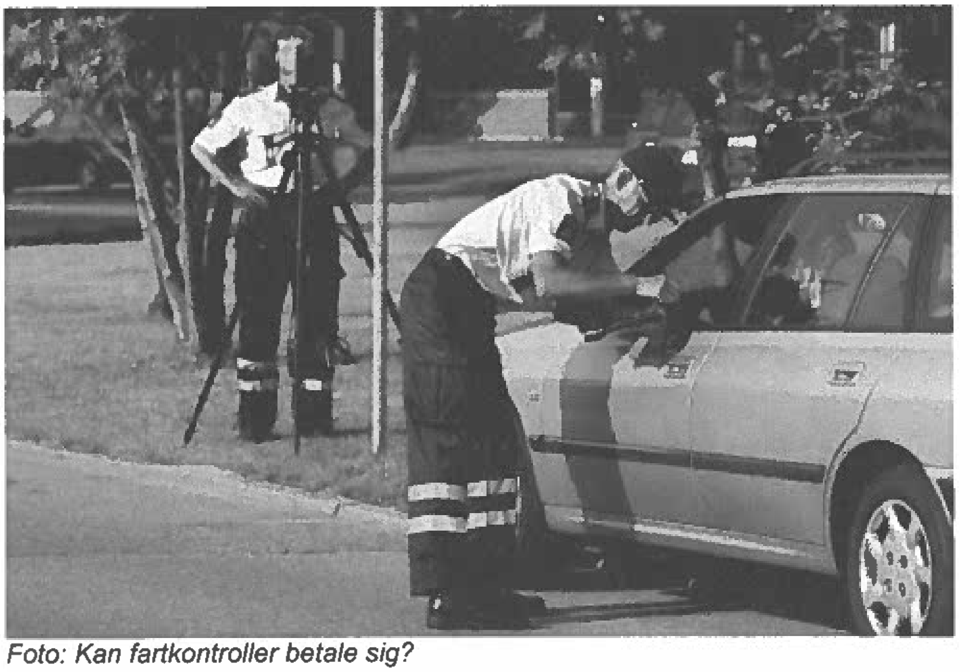


Foto: Kan fartkontroller betale sig?

Spilteoretisk analyse

Lad:

b = bøden for at køre for stærkt
p = prisen, som samfundet skal betale for en fartkontrol

Antag, at
$b < p$

Jeg opskriver følgende udbyttematrix:

		Samfundets valg		
		Kontrol	*Ingen kontrol*	*Max y*
Bilistens	*Overtræde*	(10-b,-5-p+b)	(10,-5)	-5
valg	*Overholde*	(0,-p)	(0,0)	0
	Max x	max(10-b,0)	10	

Hvad er den optimale strategi her? Spilteorien siger, at man skal lede efter såkaldte *Nash-ligevægte*:

Nash-ligevægt

En *Nash-ligevægt* er et par (x_i,y_j) i tabellen, hvor:

- x_i er større end alle andre x-værdier i *søjlen* j og
- y_j er større end alle andre y-værdier i *rækken* i

	Søjle j=	1		j		m
Række i=						
1				$x_1<x_i$		
				...		
i		$y_1<y_j$	...	(x_i,y_j)	...	$y_m<y_j$
				...		
n				$x_i>x_n$		

Nash's princip

Nash siger, at den spilteoretiske optimale løsning finder man der, hvor der er en Nash-ligevægt.

Her gælder der nemlig for begge parter, at de klarer sig dårligere, hvis de vælger noget andet. Nash-ligevægt er derfor en modificeret udgave af max-min princippet.

Eksempel

Hastighedskontrol fortsat

Kombinationen *Overtræde/Ingen kontrol* er en Nash-ligevægt: Elementet (10,-5) har større x-værdi (10) end alle andre elementer i 2. søjle, og samtidig er y-værdien (-5) større end alle andre y-værdier i 1. række, fordi b<p.

Begge parter står altså ringere stillet, hvis de træffer et andet valg.

Den spilteoretiske konklusion er derfor, at det ikke er optimalt for samfundet at lave fartkontrol.

Eksempel

Cuba-krisen

Cuba-krisen var den episode under den kolde krig, hvor supermagterne USA og Sovjetunionen kom tættest på en atomkrig. Den udspillede sig over 13 dage i oktober 1962 og handlede om opstillingen af sovjetiske mellemdistance-raketter med atomsprængladninger på Cuba.

Forhistorien var, at Cuba i 1959 var blevet kommunistisk efter en revolution anført af oprørslederen Fidel Castro, hvor det lykkedes at vælte den forhadte og diktatoriske Fulgencio Batista, som tidligere havde taget magten ved et militærkup.

Fidel Castro samarbejdede med russerne, som var interesserede i Cuba - ikke mindst pga. landets placering blot nogle få hundrede kilometer syd for Florida.

I 1962 tog et amerikansk U2-spionfly nogle luftfotografier, der viste en såkaldt *SS4-installation* nær den cubanske by San Cristobal. Der var tale om landanlæg til affyring af mellemdistanceraketter, som kunne nå store dele af USA på få minutter. Det lod dog ikke til, at anlægget endnu husede atomvåben.

Da præsident Kennedy blev forelagt oplysningerne, nedsatte han en specialgruppe kaldet *Sikkerhedsrådets Eksekutivkomité* (*ExComm* - The Executive Committee of the National Security Council) for at drøfte situationen og de mulige strategier for at imødegå russernes trussel.

Amerikanerne protesterede overfor Sovjetunionen, og de følgende dage blev en øvelse i *Brinkmanship* - dvs. kunsten at balancere mellem krig og fred for ved hjælp af bluff og reel styrkeopvisning at opnå den mest fordelagtige situation for én selv.

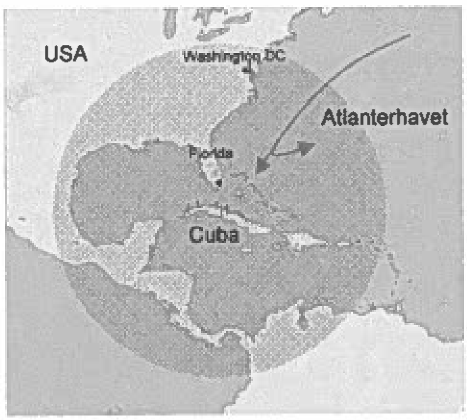
Forskellige handlinger blev foreslået: At lægge pres på Fidel Castro, at invadere Cuba samt at lave en flådeblokade. I alle tilfælde var der en reel risiko for, at konflikten skulle eskalere og ende med en atomkrig, der i værste fald kunne resultere i en verdenskrig, som ville udslette menneskeheden.

Amerikanerne valgte den 20. oktober at etablere en flådeblokade. Den sovjetiske generalsekretær Nikita Khrusjtjov sendte flere breve til Kennedy, hvori han bedyrede, at missilerne udelukkende tjente fredelige formål.

Verden holdt vejret, da efterretninger bl.a. fra Stevnsfortet og Langelandsfortet ved de danske bælter afslørede, at russerne på ny sendte skibe med raketter mod Cuba.

Sagen kom op i FN, og efter flere dages skænderier tilbød russerne at trække raketterne tilbage. De krævede garantier fra USA om aldrig at invadere Cuba. Senere krævede russerne også, at amerikanerne fjernede nogle raketter, som tidligere var opstillet i Tyrkiet. Amerikanerne svarede aldrig på det sidste, men accepterede det første krav. I sidste ende fjernede man dog også de tyrkiske missiler. Krisen var dermed slut.

Efter Cuba-krisen blev der øget fokus på den kolde krigs uhyggelige konsekvenser. USA og Sovjetunionen etablerede bl.a. *den røde linje* dvs. en direkte telefonforbindelse mellem Washington og Moskva. I de følgende årtier lavede man også en række nedrustningsaftaler. Efter Sovjetunionens sammenbrud viste dokumenter i 1992, at der faktisk befandt sig atomvåben på Cuba, og at de russiske rådgivere var bemyndiget til at bruge dem i tilfælde af en amerikansk invasion.



Spilteoretisk analyse

Jeg vil igen opstille en udbyttematrix, men denne gang holder jeg rede på både den ene og den anden parts udbytte ved de forskellige kombinationer af valg.

Udbyttet er størrelsen af den politiske eller militære sejr.

Amerikanerne kan enten undvige, dvs. lade russerne få deres vilje, eller insistere på, at russerne trækker raketterne væk.

Russerne kan på samme måde undvige, dvs. trække deres raketterne hjem, eller insistere på at opstille dem på Cuba.

Udbyttematricen ser sådan ud:

		Russernes valg		
		Undvige	*Insistere*	*Max y*
Amerikanernes	*Undvige*	(0,0)	(-1,1)	1
valg	*Insistere*	(1,-1)	(-10,-10)	-1
	Max x	1	-1	

Kombinationen *Insistere/Insistere* har fået udbytte-elementet (-10,-10) svarende til en gensidig atomkrig.

Jeg ser, at kombinationerne *Insistere/Undvige* med (1,-1) og *Undvige/Insistere* med (-1,1) begge er Nash-ligevægte.

Spilteorien kan altså i dette tilfælde ikke give et entydigt svar på, hvad der er optimalt at gøre.

Begge parter bliver rådet til at sætte hårdt mod hårdt, selvom det i virkelighedens verden virker som en ret farlig politik.

Dette paradoks siger noget om, at der er andre betragtninger og faktorer i politik, end en simpel udbyttematrix kan udtrykke.

Eksempel

Fangernes dilemma

Her kommer et klassisk og måske endnu mere paradoksalt eksempel kaldet *fangernes dilemma*:

To personer A og B sidder varetægtsfængslet i isolation for at have begået et mord. Den ene kan blive dømt for mordet - den anden for ulovlig våbenbesiddelse, men politiet ved ikke hvem af de to, der er morderen.

Politiet tilbyder nu hver fange, at han kan gå fri, hvis han sladrer om den anden.

Hvis de begge sladrer, får de dog hver 5 års fængsel. Hvis ingen af dem sladrer, kan politiet kun give dem 1 års fængsel hver.

Udbyttematricen ser derfor sådan ud:

		B's valg	
		Sladre	*Tie*
A's	*Sladre*	(-5,-5)	(0,-20)
valg	*Tie*	(-20,0)	(-1,-1)

Jeg ser, at kombinationen *Sladre/Sladre* med (-5,-5) er en Nash-ligevægt. Spilteorien anbefaler derfor begge fanger at sladre.

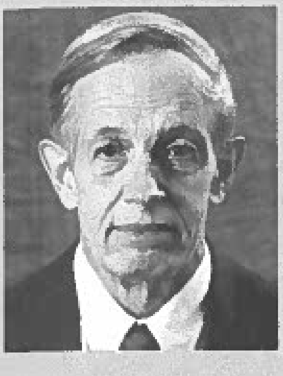
Det paradoksale ligger her i, at kombinationen *Tie/Tie* med (-1,-1) lader til at være langt bedre for begge parter - de slipper jo med kun 1 års fængsel hver.

Problemet er bare, om fangerne kan stole på hinanden: Hvis den ene fange tier, løber han en stor risiko, hvis den anden sladrer.

Spilteorien optimerer bedst de tilfælde, hvor samarbejde mellem parterne er tvivlsomt.

Biografi

John Nash



Nash, John Forbes Jr., 1928. Amerikansk økonom og matematiker. Om Nash er mest berømt for sit arbejde inden for spilteorien eller fra Hollywood-filmen *A Beautiful Mind* fra 2001, afhænger af, hvem man spørger, men alle er nok enige om, at han som Nobelpristager trods sin livslange kamp mod skizofrenien står som en af de mere bemærkelsesværdige skikkelser inden for moderne videnskab.

Nash blev født i West Virginia som søn af en elektriker og en skolelærerinde. Hans talent for matematik blev plejet tidligt - f.eks. fik han lov til at tage college-kurser, mens han stadig gik i highschool. Han blev optaget på Carnegie University (nu Carnegie Mellon) og læste senere videre på Princeton. Her tog han i 1950 en ph.d. med en afhandling om spilteori, hvor han indførte de begreber, som senere skulle blive kaldt *Nash-ligevægte*.

Nash giftede sig i 1957 med Alicia Lopez-Harrison de Lardé - en fysikstuderende fra El Salvador. De fik en søn i 1959, men kort forinden blev Nash tvangsindlagt på et sindssygehospital pga. paranoid skizofreni. I de næste mange år var han i perioder indlagt på forskellige hospitaler, og han tog løbende anti-psykotisk medicin. Efter 1970 droppede han dog medicineringen og blev ikke mere indlagt. I årtierne derefter kæmpede han sig til anerkendelse i de videnskabelige kredse.

I 1994 fik han Nobelprisen i økonomi for sit arbejde med spilteori. Han bidrog også inden for algebraisk geometri, differentialgeometri og partielle differentialligninger.

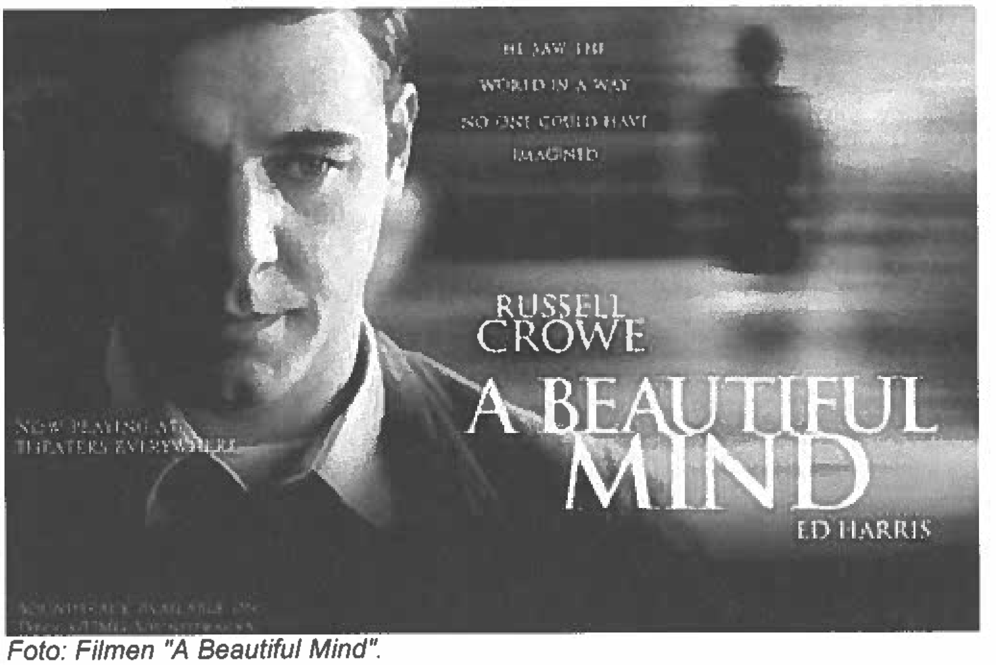


Foto: Filmen "A Beautiful Mind".

Opgaver

1 Et kærestepar skal i biografen. Manden vil helst se en action-film, mens kvinden er til romantik. De er dog enige om, at de allerhelst bare vil være sammen.

Analysér problemet udtrykt ved følgende udbyttematrix:

		Kvindens valg	
		Action	*Romantik*
Mandens valg	*Action*	(2,1)	(-1,-1)
	Romantik	(-1,-1)	(1,2)

2 Klimapolitik: Hvem skal investere penge for at stoppe den globale opvarmning? I-landene (USA, Europa, ...) eller udviklingslandene (Kina, Indien, ...)?

Analysér først situationen ud fra denne udbyttematrix.

		U-landenes valg	
		Investere	*Lade stå til*
I-landenes valg	*Investere*	(1,1)	(0,2)
	Lade stå til	(2,0)	(-2,-2)

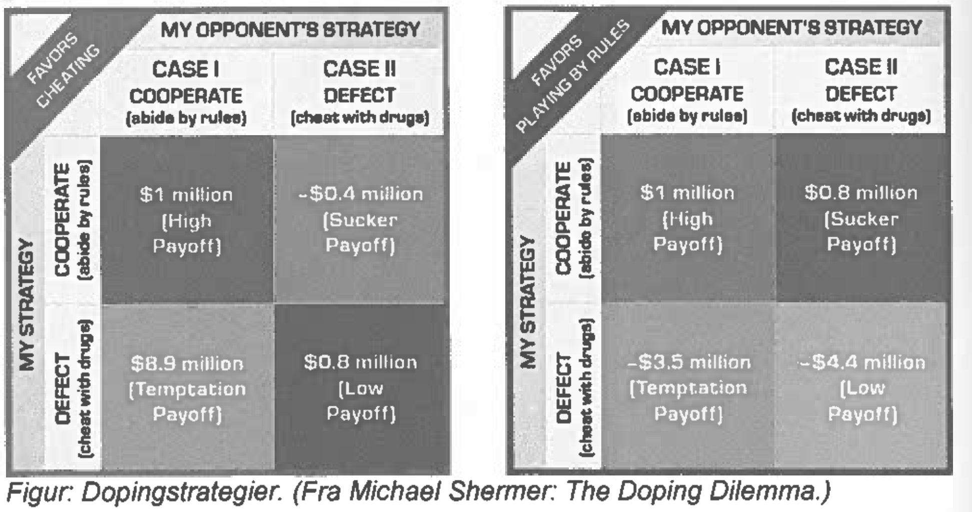
Nu ændrer jeg spillereglerne lidt. Befolkningerne i I-landene presser regeringerne til at gøre noget. Hvis regeringerne investerer, bliver de genvalgt. I modsat fald taber de magten.

		U-landenes valg	
		Investere	*Lade stå til*
I-landenes valg	*Investere*	(2,1)	(1,2)
	Lade stå til	(1,0)	(-3,-2)

Analysér igen situationen ud fra den ændrede udbyttematrix.

Konkludér og vurdér resultatet af analysen.

3 Analysér problematikken med doping, doping-kontrol og bøder ud fra disse figurer:



Figur: Dopingstrategier. (Fra Michael Shermer: The Doping Dilemma.)

3: Blandede strategier: Nul-sum spil I

Ren strategi

I de foregående eksempler gav spilteorien en metode til at finde et optimalt valg ud fra en udbyttematrix. En metode, der i enhver mulig valgsituation foreskriver et bestemt valg, kalder man en *ren strategi.*

Blandet strategi

En *blandet strategi* er derimod en sandsynlighedsfordeling af de mulige rene strategier. Hvad jeg præcist mener hermed, giver jeg nu eksempler på for nul-sum spil:

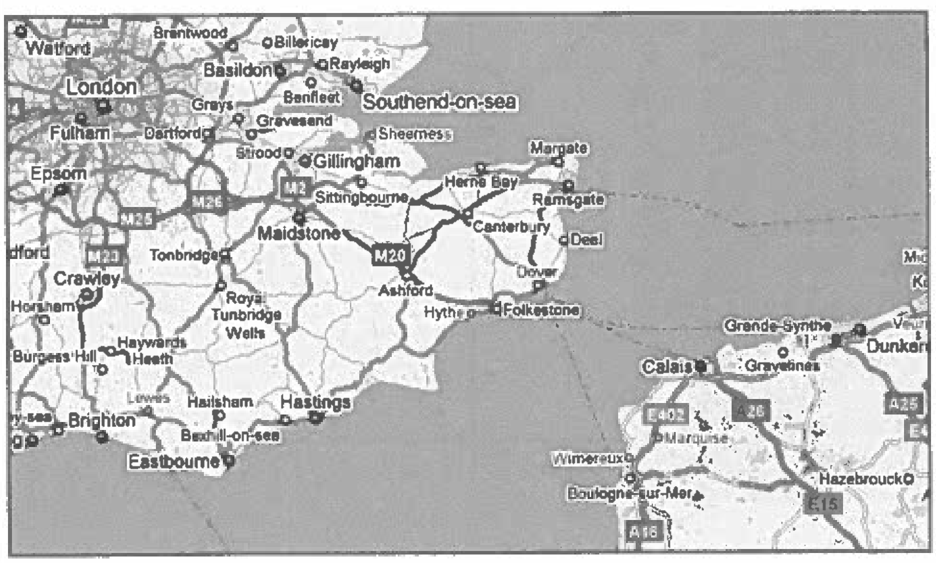
<u>Eksempel</u>

Sherlock Holmes

I Sir Arthur Conan Doyles novelle *The Final Problem* er mesterdetektiven Sherlock Holmes på flugt fra sin ærkefjende professor Moriarty, der leder den organiserede kriminalitet i London. Moriarty vil Holmes til livs og forfølger ham.

I London springer Sherlock Holmes på toget til Dover for næsen af Moriarty.

Moriarty har dog lejet et specialtog, som kan indhente Dover-toget med Holmes enten ved endestationen Dover eller ved stationen Canterbury på vejen.



- Hvis Holmes i hemmelighed står af i Canterbury, og Moriarty fortsætter til Dover, slipper Holmes i første omgang, men jagten vil uden tvivl fortsætte senere. Holmes' overlevelsesprocent sætter jeg derfor til 50%.

- Hvis Holmes derimod fortsætter til Dover, og Moriarty gør det samme, så er det ude med Holmes. Overlevelsesprocenten for ham er 0%.
- Hvis Holmes står af i Canterbury, og Moriarty gennemskuer det og gør det samme, så er det også ude med Holmes. Overlevelsesprocenten er 0%.
- Hvis Holmes fortsætter til Dover, og Moriarty står af i Canterbury for at lede, så kan Holmes undslippe til Kontinentet med Dover-Calais båden. Overlevelsesprocenten er 100%.

Spilteoretisk analyse

Jeg opskriver Sherlock Holmes' overlevelseschancer i en matrix:

		Moriartys valg		
		Canterbury	*Dover*	*Min:*
Holmes' valg	*Canterbury*	*0%*	*50%*	0
	Dover	*100%*	*0%*	0
	Max:	100	50	

Bemærk, at der ikke er noget sadelpunkt (dvs. min i rækken og max i søjlen).

For at komme videre introducerer jeg nogle sandsynligheder:

x_1 = sandsynligheden for, at Holmes vælger Canterbury
x_2 = sandsynligheden for, at Holmes vælger Dover = $1-x_1$

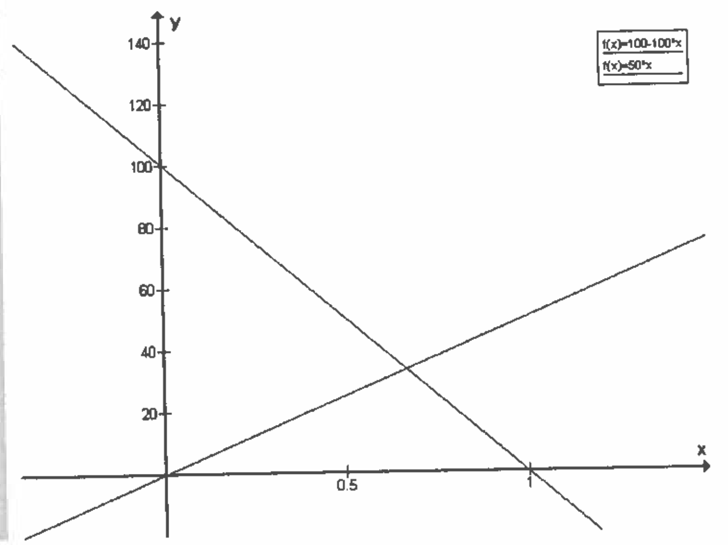
Hvis Moriarty vælger Canterbury, er den gennemsnitlige overlevelseschance for Holmes følgende (udregnet som middelværdi):

$$m = 0 \cdot x_1 + 100x_2 = 100(1-x_1) = 100 - 100x_1$$

Hvis omvendt Moriarty vælger Dover, er den gennemsnitlige overlevelseschance for Holmes:

$$n = 50x_1 + 0 \cdot x_2 = 50x_1$$

Grafisk får jeg:



Jeg ser, at i det tilfælde Moriarty vælger Canterbury, så falder Holmes' gennemsnitlige overlevelseschancer, jo mere sandsynligt det er, at han stiger af i Canterbury.

I det tilfælde at Moriarty vælger Dover, så falder Holmes' gennemsnitlige overlevelseschancer, jo mere sandsynligt det er, at han stiger af i Dover.

Med tanke for max-min princippet finder jeg derfor skæringspunktet for de to linjer ovenover:

$100 - 100x_1 = 50x_1$ dvs. $x_1 = \frac{100}{150} = \frac{2}{3}$

Den spilteoretiske konklusion er nu, at Holmes skal slå med en terning: Hvis han får øjnene 1 til 4, skal han stå af i Canterbury, og hvis han får 5 og 6, skal han stå af i Dover.

Opgaver

1 En politibil får meddelelse om et bankrøveri. Røverne er enten kørt mod Mexico eller mod nabobyen. Hvis politibilen kører samme sted hen som røverne, bliver de fanget. Hvis politibilen derimod kører mod nabobyen og røverne mod Mexico, så slipper de fri. Men hvis politibilen kører mod Mexico og røverne mod nabobyen, så er der 50% chance for, at de bliver fanget.

Analysér situationen med en blandet strategi.

4: Blandede strategier: Ikke nul-sum spil I

I sidste afsnit præsenterede jeg blandede strategier for nul-sum spil. Det kan man naturligvis også gøre for ikke nul-sum spil.

Eksempel

Slaget om Bismarckhavet igen

Jeg vender tilbage til eksemplet med japanernes skibskonvoj, som amerikanerne skulle bombe.

Denne gang introducerer jeg nogle sandsynligheder for vejret:

	Nordrute	*Sydrute*
God sigt	0,10	0,80
Dårlig sigt	0,90	0,20

Der er nu en lille sandsynlighed (10%) for en ekstra bombedag på nordruten og ligeledes en lille sandsynlighed (20%) for en bombedag mindre på sydruten.

Hvis amerikanerne vælger nordruten, og japanerne gør det samme, bliver det gennemsnitlige antal bombedage (udregnet som middelværdi):

$m = 0{,}10 \cdot 3 + 0{,}90 \cdot 2 = 2{,}1$ (Nord/Nord)

Tilsvarende får jeg for de andre kombinationer:

$m = 0{,}80 \cdot 2 + 0{,}20 \cdot 1 = 1{,}8$ (Nord/Syd)

$m = 0{,}10 \cdot 2 + 0{,}90 \cdot 1 = 1{,}1$ (Syd/Nord)

$m = 0{,}80 \cdot 3 + 0{,}20 \cdot 2 = 2{,}8$ (Syd/Syd)

Udbyttematrix

Jeg har derfor følgende udbyttematrix:

		Japanernes valg		
		Nordrute	*Sydrute*	*Min:*
Amerikanernes valg	*Nordrute*	2,1	1,8	1,8
	Sydrute	1,1	2,8	1,1
	Max:	2,1	2,8	

Læg mærke til, at der ikke længere er noget sadelpunkt.

Jeg anlægger i stedet en blandet strategi på problemet. Lad:

x_1 = sandsynligheden for at amerikanerne vælger nordruten
x_2 = sandsynligheden for at amerikanerne vælger sydruten = 1- x_1

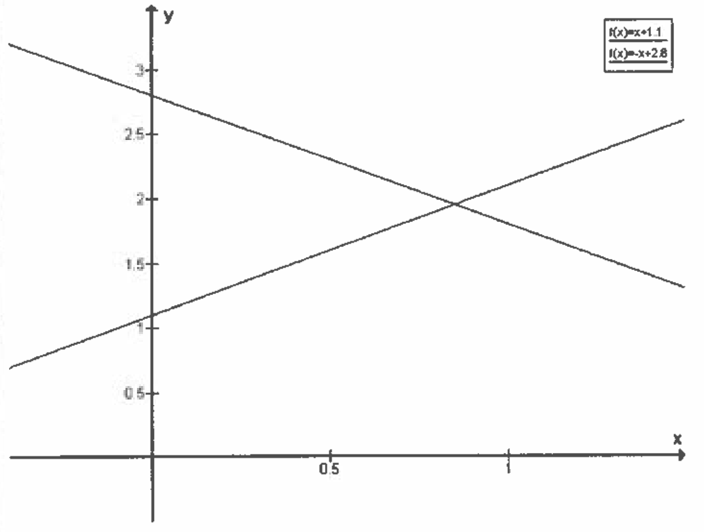
Hvis japanerne vælger nordruten, bliver det gennemsnitlige antal bombedage:

$m = 2{,}1 \cdot x_1 + 1{,}1 \cdot x_2 = 2{,}1 \cdot x_1 + 1{,}1 \cdot (1 - x_1) = 1{,}0 \cdot x_1 + 1{,}1$

Hvis japanerne vælger sydruten, bliver det gennemsnitlige antal bombedage:

$m = 1{,}8 \cdot x_1 + 2{,}8 \cdot x_2 = 1{,}8 \cdot x_1 + 2{,}8 \cdot (1 - x_1) = -1{,}0 \cdot x_1 + 2{,}8$

Grafisk ser det sådan ud:



Ligesom før finder jeg skæringspunktet:

$$1{,}0\cdot x_1+1{,}1=-1{,}0\cdot x_1+2{,}8 \quad \text{dvs.} \quad x_1=\frac{1{,}7}{2}=0{,}85$$

Amerikanerne skal altså stadig tage nordruten.

Hvis jeg omvendt kigger på situationen fra japanernes side, sætter jeg:

x_1 = sandsynligheden for at japanerne vælger nordruten
x_2 = sandsynligheden for at japanerne vælger sydruten = 1- x_1

Hvis amerikanerne vælger nordruten, bliver det gennemsnitlige antal bombedage:

$$m=2{,}1\cdot x_1+1{,}8\cdot x_2=2{,}1\cdot x_1+1{,}8\cdot(1-x_1)=0{,}3\cdot x_1+1{,}8$$

Hvis amerikanerne vælger sydruten, bliver det gennemsnitlige antal bombedage:

$$m=1{,}1\cdot x_1+2{,}8\cdot x_2=1{,}1\cdot x_1+2{,}8\cdot(1-x_1)=-1{,}7\cdot x_1+2{,}8$$

Skæringspunktet er:

$$0{,}3\cdot x_1+1{,}8=-1{,}7\cdot x_1+2{,}8 \quad \text{dvs.} \quad x_1=\frac{1}{2}$$

Japanerne kan altså overraskende nok slå plat eller krone om, hvad de skal gøre.

Opgaver

1 Analysér eksemplet med hastighedsgrænser med en blandet strategi, hvor sandsynligheden for kontrol er s.

5: Spiltræer I

Spiltræer

For at få overblik over de forskellige muligheder i et spil kan man bruge såkaldte *spiltræer* (på engelsk *sequential games*):

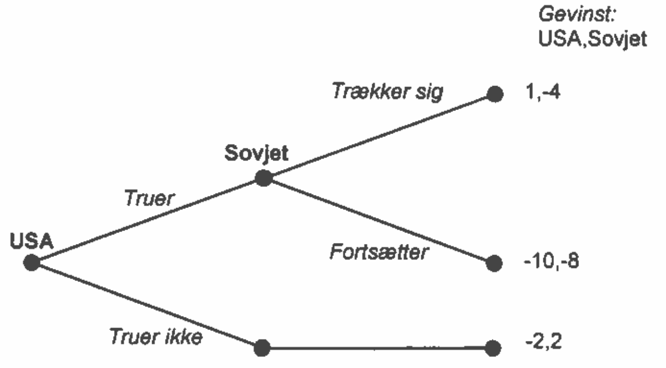
Eksempel

Cuba-krisen igen

Jeg kigger igen på Cuba-krisen, hvor situationen er denne:

Sovjet sejler atomraketter mod Cuba:

- USA kan *true* Sovjet med at blokere (og evt. angribe) skibene.
- Sovjet kan *trække sig* eller *fortsætte*.

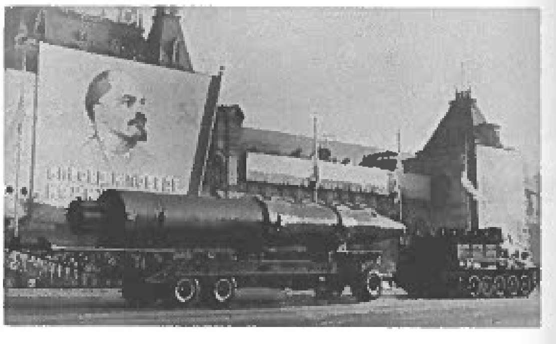


Jeg prøver at sætte gevinster på de forskellige udfald for USA og Sovjet:

- USA truer, og Sovjet trækker sig: USA vinder, og Sovjet lider et stort prestigetab som supermagt. Gevinster: 1,-4.
- USA truer, men Sovjet fortsætter: Atomkrig! USA lider et ekstra prestigetab. Gevinster: -10,-8.
- USA truer ikke, Sovjet fortsætter: USA lider et prestigetab, og Sovjet vinder Gevinster: -2,2.

Man kunne godt argumentere for, at USA's prestigetab burde være -4 ligesom Sovjets i den omvendte situation.

Spørgsmål til historien
Hvilken betydning har prestigetabet for henholdsvis USA og Sovjet?



Jeg foreslår nu en blandet strategi:

Sovjet:
Hårde eller bløde

Sovjet kan enten være hårde eller bløde. At de er hårde, betyder, at de er *hardlinere,* dvs. mere ligeglade med deres egen befolkning og derfor mindre bange for USA's trusler. At de er bløde, betyder derimod, at de bekymrer sig om deres befolkning, er mere diplomatiske og fornuftige. Men de kan stadig godt vælge at ignorere USA's trussel.

Det er de sovjetiske ledere, der bestemmer dette, men amerikanerne kan ikke vide med sikkerhed, om Sovjet vil vælge den hårde eller bløde linje.

Sandsynligheden p

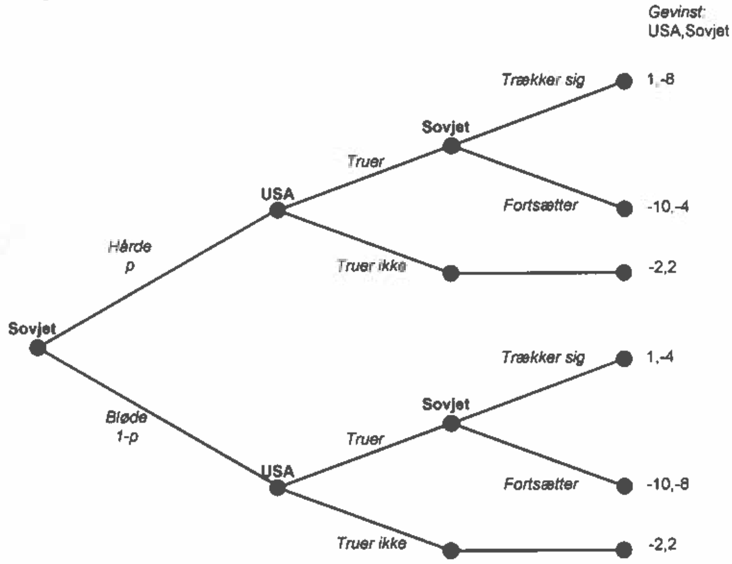
Lad p være sandsynligheden for, at Sovjet er hårde.

Matematisk betyder det, at hvis der udspillede sig 100 Cubakriser, ville Sovjet være hårde i p% af dem.

Spørgsmål til historien
Det siges, at Kennedy skønnede, at p var mellem 33% og 50%. Hvor kommer denne information fra, og er den realistisk? Havde de sovjetiske ledere tidligere være hardlinere i andre konflikter?

Foto: Møde i ExComm.

Da Sovjet både kan være hårde eller bløde, må jeg fordoble spiltræet for at få alle muligheder med og fastsætte gevinsterne.



Jeg har ændret følgende gevinster i det øvre spiltræ altså der, hvor Sovjet er hårde:

- USA truer, og Sovjet trækker sig: USA vinder, og Sovjets nederlag og prestigetab er ekstra stor, fordi de lagde hårdt ud. Gevinsten for Sovjet er ændret fra -4 til -8.
- USA truer, men Sovjet fortsætter: Atomkrig! USA lider som før, men de hårde sovjetledere kommer lidt stærkere ud af krigen. Gevinsten for Sovjet er ændret fra -8 til -4.

Hvis Sovjet er bløde, ændrer jeg ikke på gevinsterne i forhold til de oprindelige.

USA kan true Sovjet med atomkrig, men USA behøver ikke føre truslen ud i livet. Det er de amerikanske ledere, som beslutter dette.

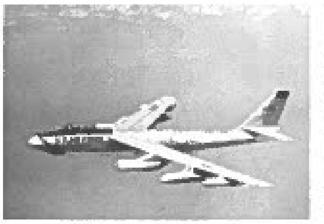
Sandsynligheden q

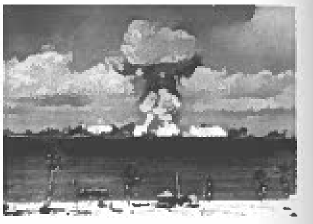
Lad q være sandsynligheden for, at USA starter en atomkrig (under forudsætning af, at Sovjet fortsætter med at opstille missiler).

Matematisk betyder det, at hvis der udspillede sig 100 Cubakriser, ville det ende med atomkrig i q% af dem, hvis USA truede. Man kan også sige, at det svarer til, at de amerikanske ledere slog med en terning for at afgøre, om de skulle starte en atomkrig eller ej.

USA styrer alene værdien af q. Jeg ser nemlig bort fra, at Sovjet også kunne starte en atomkrig, hvis deres skibe blev angrebet.

Spørgsmål til historien
Overvejede Sovjet at starte en atomkrig som de første?





To tilfælde:

Jeg ser nu på følgende to tilfælde:

USA truer - Sovjet hårde

(1) USA truer, og Sovjet er hårde og fortsætter:

Hvis USA starter en atomkrig, er deres gevinst som nævnt -10. Hvis ikke, er gevinsten -2 (da det svarer til, at de ikke truer). USA's gennemsnits-gevinst er derfor:

$$-10q - 2(1-q) = -2 - 8q$$

Da et hårdt Sovjets gevinst ved atomkrig er -4 og 2 uden, er deres gennemsnits-gevinst:

$$-4q + 2(1-q) = 2 - 6q$$

USA truer - Sovjet bløde

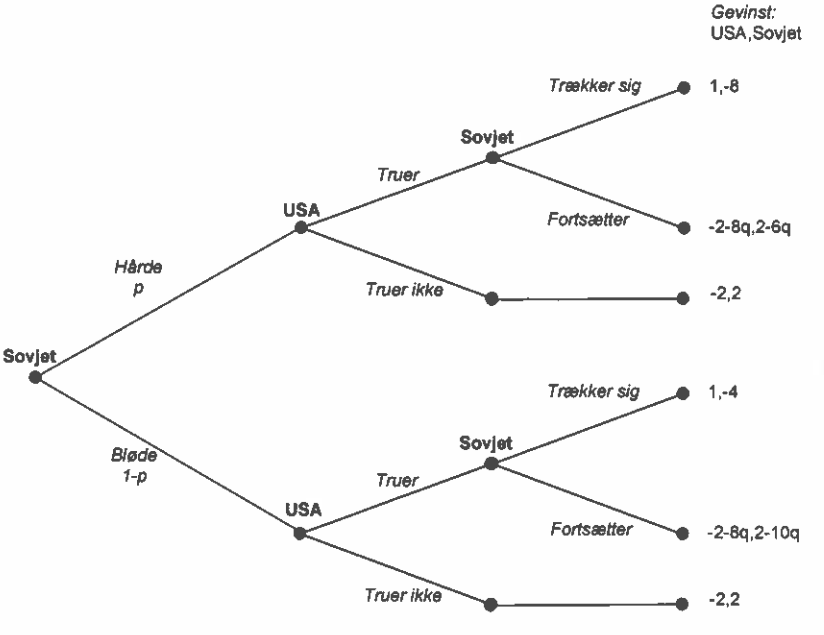
(2) Hvis omvendt USA truer, og Sovjet er bløde, men alligevel fortsætter, så er USA's gevinst stadig -10, hvis de starter en atomkrig og -2, hvis de ikke gør. USA's gennemsnits-gevinst er derfor som før:

$$-10q - 2(1-q) = -2 - 8q$$

Et blødt Sovjets gevinst ved atomkrig er -8 og 2 uden, så deres gennemsnits-gevinst er:

$$-8q + 2(1-q) = 2 - 10q$$

Disse gevinster fremgår af spiltræet nedenunder:



Effektivitets-betingelse

Hvis Sovjet er bløde, så skal det give større gevinst for dem at trække sig. Set fra USA's side skal truslen og dermed værdien for q derfor være så stor, at der gælder:

$$-4 > 2 - 10q \quad \text{dvs.} \quad q > \frac{6}{10} = 0{,}60$$

Der er altså en nedre grænse for q, hvis truslen skal være *effektiv* mod Sovjet, dvs. at det skal kunne betale sig for dem at være bløde.

Hvis Sovjet er hårde, USA truer, og Sovjet fortsætter, så er USA's gevinst som nævnt -2-8q.

Hvis Sovjet er bløde, USA truer, og Sovjet trækker sig, så er USA's gevinst 1. USA's gennemsnits-gevinst er derfor:

$$(-2-8q)p+1(1-p)$$

Hvis USA ikke truer, er deres gevinst -2, så hvis de skal have noget ud af truslen, må følgende betingelse være opfyldt:

$$(-2-8q)p+1(1-p)>-2$$

Dette fører til, at:

$$-3p-8pq>-3 \quad \text{dvs.} \quad -p(1+\tfrac{8}{3}q)>-1 \quad \text{dvs.} \quad 1+\tfrac{8}{3}q<\frac{1}{p} \quad \text{dvs.}$$

$$\tfrac{8}{3}q<\frac{1}{p}-1=\frac{1-p}{p} \quad \text{dvs.}$$

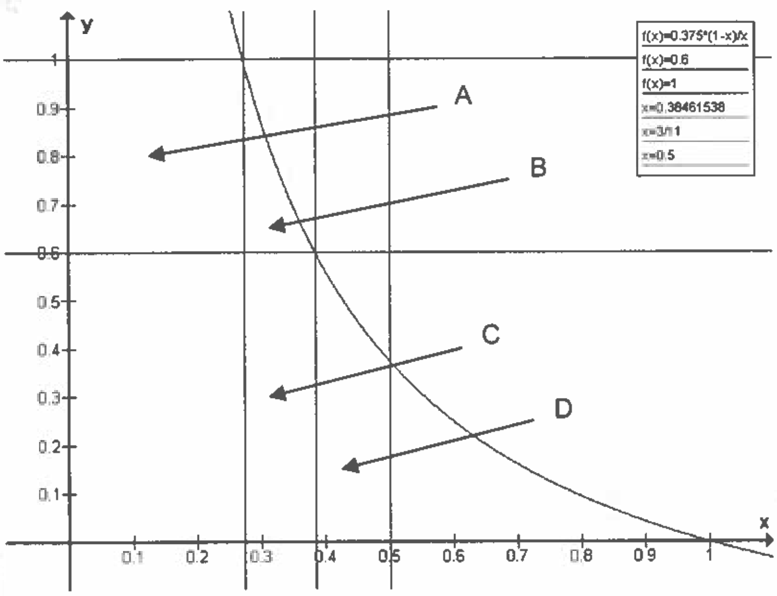
$$q<0{,}375\frac{1-p}{p}$$

Acceptabilitet-betingelse

Der er altså en øvre grænse for q, hvis truslen skal være *acceptabel* for USA, dvs. at det skal kunne betale sig for dem at true.

Diagram

Jeg indtegner nu de to betingelser i et diagram:



Den vandrette linje q = 0,6 og den aftagende kurve skærer hinanden for p = 0,3846.

Endvidere gælder for p < 3/11 = 0,27, at q = 1.

Brinkmanship

Kunsten at håndtere en situation på randen af krig hedder på engelsk *brinkmanship*. Jeg kan bruge diagrammet til at diskutere, hvad der er mest optimalt for USA:

I områderne A og B er begge betingelser opfyldt.

I A er p < 0,27 og q > 0,6, hvilket teoretisk betyder, at det er optimalt for USA, hvis Sovjet med lille sandsynlighed er hårde, og hvis USA ikke tøver med at starte en atomkrig i det tilfælde, at skibene fortsætter. Denne situation er imidlertid ikke særlig realistisk. Kennedy regnede som nævnt med, at p lå mellem 33% og 50%.

Området B er derfor mere interessant. Her kan sandsynligheden for, at Sovjet er hårde, være op til 38%, inden det ikke længere er optimalt for USA. Men der er stadig et stykke op til de 50%.

Hvad så? Jo, i praksis kender USA ikke p. Amerikanerne må derfor udforske området C og D omkring de 38% politisk: Kan USA true/friste Sovjet til at trække sig? Ved gradvist at øge q, altså villigheden til at starte en atomkrig, kan USA rykke sig fra en position i området C+D op mod området A+B. Men det er en farefuld politisk manøvre.

gsmål til historien
Jan passer
stående spilteoretiske
med de konkrete
ske overvejelser?
le USA presset og
jan?

ver

1	Gennemfør udregningerne i eksemplet ovenover med gevinsten -12 i stedet for værdien -10 for USA i tilfælde af en atomkrig.
2	Hvilken betydning har det for konklusionen, hvis man vægter USA's prestigetab med -4 i stedet for -2 i det tilfælde, at Sovjet vinder?
3	Lad gevinsterne i spiltræet være variable og opskriv derpå effektivitets- og acceptabilitets-betingelserne udtrykt ved disse variable. Lav et excel-ark, hvor man kan indtaste gevinsterne, hvorefter diagrammet fra sidste side bliver tegnet automatisk.
4	Udskift Sovjet med *Islamisk Stat* og atomkrig med *fuld vestlig invasion af Mellemøsten*. Lav derpå en tilsvarende spilteoretisk analyse, idet du ændrer gevinsterne passende (evt. ved hjælp af regnearket fra opgave 3).

6: Blandede strategier: Nul-sum spil II

Strategiprofiler

Tiden er nu kommet til at gå i detaljer med matematikken. I dette afsnit vil jeg se på blandede strategier for et nul-sum matrix-spil på formen:

		Spiller 2			
	Strategi	*1*	*2*	...	*n*
Spiller 1	*1*	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...
	m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Bemærk, at tallene a_{ij} i skemaet er spiller 1's gevinster.

Til spillet svarer følgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Jeg formaliserer nu begrebet "en blandet strategi":

Definition

Strategiprofil

En *strategiprofil* (eller en *blandet strategi*) for spiller 1 er en vektor:

$$p = (p_1, p_2, \dots p_m)$$

hvor p_i'erne er sandsynlighederne for de forskellige strategier, så:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Tilsvarende er en strategiprofil for spiller 2 en vektor:

$$q = (q_1, q_2, \dots q_n)$$

hvor q_i'erne er sandsynlighederne for de forskellige strategier, så:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

Ren strategi

Bemærk, at en *ren strategi* svarer til en strategiprofil på formen:

$$p = (0, \dots, 1, \dots 0)$$

Jeg vil regne på, hvad spiller 1 får ud af at spille med en bestemt strategiprofil:

Definition

Udbyttefunktion

Udbyttefunktionen for spiller 1 er:

$$u(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$$

(På matrixform: $u(p,q) = pAq^t$)

Diskussion

De følgende overvejelser er abstrakte, men lige efter kommer der et eksempel, hvor tankerne bliver konkretiseret. Du kan derfor med fordel følge eksemplet sideløbende:

Spiller 2 vil gøre alt for at minimere spiller 1's udbytte, dvs. vælge en strategiprofil q, så:

$$v_1(p) = \min_q u(p,q)$$

Dette er altså spiller 1's mindste-udbytte (på engelsk *gain-floor*) for en given strategiprofil p.

Udbyttefunktionen kan jeg også skrive således:

$$u(p,q) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i q_j a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} q_j (\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij})$$

Summen

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \qquad \textit{(På matrixform: } (pA)_j\textit{)}$$

svarer til udbyttet, hvis spiller 2 vælger den rene strategi givet ved j mod spiller 1's blandede strategi p.

Man kan derfor se udbyttefunktionen som et *vægtet gennemsnit* for udbyttet for spiller 1, hvis han bruger strategiprofilen p mod spiller 2's rene strategier.

Derfor skal minimumet findes blandt spiller 2's rene strategier:

$$v_1(p) = \min_q u(p,q) = \min_j \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$$

Spiller 2 forsøger altså at minimere spiller 1's udbytte.

Spiller 1 forventer imidlertid dette, så han vil vælge en strategiprofil p, som maksimerer dette mindste-udbytte:

$$v_1 = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$$

Maximin strategi

Man siger, at spiller 1 anlægger en *maximin* strategi.

Spiller 1 vil omvendt gøre alt for at maksimere sit udbytte. Han vælger derfor en strategiprofil, så:

$$v_2(q) = \max_p u(p,q)$$

Dette er spiller 2's største tab (på engelsk *loss-ceiling*) for en given strategiprofil q.

Med tilsvarende argument får jeg:

$$v_2(q) = \max_p u(p,q) = \max_i \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}$$

Spiller 2 er imidlertid klar over spiller 1's ønske, så han vil vælge en strategiprofil q, som minimerer dette tab:

$$v_2 = \min_q \max_i \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}$$

Minimax strategi

Man siger, at spiller 2 anlægger en *minimax* strategi.

<u>Eksempel</u>

På matrixform: min(pA)$_j$

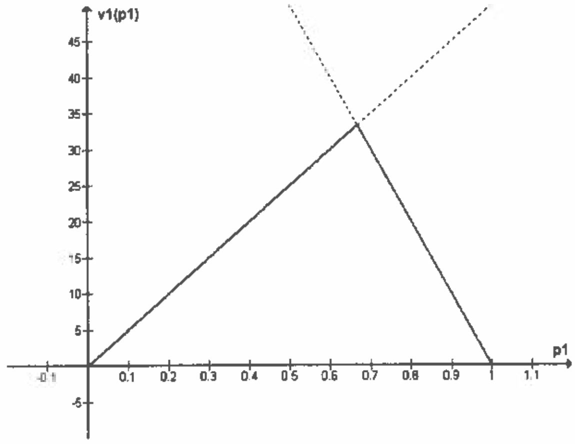
Givet matricen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 50 \\ 100 & 0 \end{pmatrix}$$

Jeg får først:

$$v_1(p) = \min_j \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = \min(p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 100, p_1 \cdot 50 + p_2 \cdot 0)$$
$$= \min(100p_2, 50p_1) = \min(100(1-p_1), 50p_1)$$
$$= \min(100 - 100p_1, 50p_1)$$

$v_1(p)$ er altså en funktion af p_1, som grafisk ser sådan ud:



Jeg skal finde:

$$v_1 = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$$

Dette maksimum får jeg i skæringspunktet:

$$100 - 100p_1 = 50p_1 \quad \text{dvs.} \quad p_1 = \frac{100}{150} = \tfrac{2}{3}$$

Den tilsvarende værdi for v_1 er:

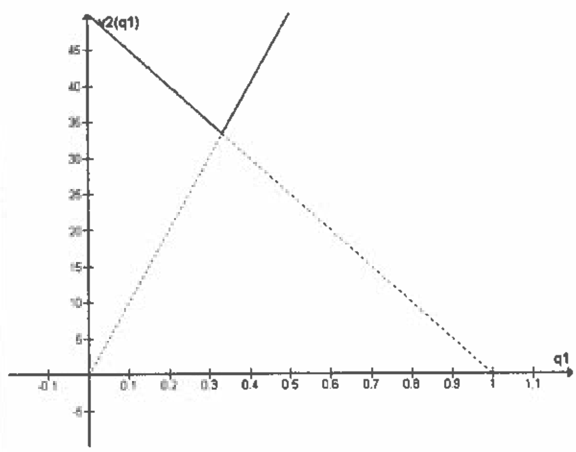
$$v_1(\tfrac{2}{3}) = 50 \cdot \tfrac{2}{3} = 33\tfrac{1}{3}$$

Dernæst får jeg:

På matrixform: $\max(Aq^t)_i$
(NB: Det lille t betyder "transponeret" dvs. rækken q er vendt til en søjle.)

$$v_2(q) = \max_i \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} = \max(0 \cdot q_1 + 50 \cdot q_2, 100 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2)$$
$$= \max(50q_2, 100q_1) = \max(50(1-q_1), 100q_1)$$
$$= \max(50 - 50q_1, 100q_1)$$

$v_2(q)$ er altså en funktion af q_1, som grafisk ser sådan ud:



Jeg skal finde:

$$v_2 = \min_q \max_i \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}$$

Dette minimum får jeg i skæringspunktet:

$$50 - 50q_1 = 100q_1 \quad \text{dvs.} \quad q_1 = \frac{50}{150} = \tfrac{1}{3}$$

Den tilsvarende værdi for v_2 er:

$$v_2(\tfrac{1}{3}) = 100 \cdot \tfrac{1}{3} = 33\tfrac{1}{3}$$

Bemærk, at udbyttefunktionen (på matrixform) er:

$$u(p,q) = pAq^t = (p_1, p_2)A\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})\begin{pmatrix} 0 & 50 \\ 100 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{2}{3} \end{pmatrix} = (33\tfrac{1}{3}, 33\tfrac{1}{3})\begin{pmatrix} \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{2}{3} \end{pmatrix} = 33\tfrac{1}{3}$$

Bemærk endelig, at matricen A svarer til situationen i det tidligere eksempel med Sherlock Holmes' kamp mod professor Moriarty, og konklusionen er den samme!

Spiller 1 og 2 har åbenlyst modstridende interesser, så hvordan ender spillet? I eksemplet viste det sig, at både spiller 1's maximin strategi og spiller 2's minimax strategi førte til det samme udbytte.

Det er ingen tilfældighed! Der gælder nemlig følgende overraskende sætning, som blev vist af grundlæggerne af spilteorien nemlig *John von Neumann* og *Oskar Morgenstern*:

Sætning

Minimaxsætningen

For et nul-sum matrix-spil gælder:

$$v_1 = \max_p \min_j \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \quad = \quad v_2 = \min_q \max_i \sum_{j=1}^n q_j a_{ij}$$

De to spilleres strategier (maximin og minimax) er altså forenelige!

Værdi for spillet

Tallet $v = v_1 = v_2$ hedder *(spil-)værdien* for nul-sum spillet.

Optimale strategier og løsning til spillet

De strategiprofiler, som svarer til værdien, kalder man for *optimale strategier* og en *løsning* til spillet.

Bevis

Beviset bruger to lemmaer, som kommer efterfølgende.

Allerførst bemærker jeg, at der altid gælder (overvej!):

$$v_1 = \max_p \min_j \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \quad \le \quad v_2 = \min_q \max_i \sum_{j=1}^n q_j a_{ij}$$

Lad nul-sum spillet være beskrevet med matricen A. Ifølge Lemma 1 (se nedenfor) gælder enten situation (1) eller (2).

Situation 1

Hvis (1) gælder, så findes der tal $p_1,\dots,p_m$ således at:

$p_i \ge 0$ for alle i

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^m p_i a_{ij} > 0$$

Da

$$v_1 = \max_p \min_j \sum_{i=1}^m p_i a_{ij}$$

får jeg, at:

$v_1 > 0$

Situation 2

Hvis (2) gælder, så findes der tal $s_1,\dots,s_{m+n}$ således at:

$$0 = \sum_{j=1}^n s_j a_{ij} + s_{n+i} \quad \text{for hvert } i = 1,\dots,m$$

$$s_j \geq 0 \quad \text{for alle } j = 1,\ldots,m+n \quad \text{og}$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} s_j = 1$$

Jeg påstår, at mindst ét af tallene $s_1,\ldots,s_n$ er positivt. Ellers ville man nemlig kunne skrive 0 som en sum af enhedsvektorer $e_1,\ldots,e_m$ fra lemmaet. Det går ikke!

Derfor er

$$\sum_{k=1}^{n} s_k > 0$$

og det giver mening at kigge på:

$$q_j = \frac{s_j}{\sum_{k=1}^{n} s_k} \quad \text{for } j = 1,\ldots,n$$

For disse tal har jeg (overvej!):

$$q_j \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_j = 1 \quad \text{og}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} = \frac{-s_{n+i}}{\sum_{j=1}^{n} s_j} \leq 0 \quad \text{for alle } i$$

Da

$$v_2 = \min_q \max_i \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}$$

får jeg, at:

$$v_2 \leq 0$$

Samlet

Alt i alt har jeg nu, at der gælder enten $0 < v_1$ eller $v_2 \leq 0$. Det er altså umuligt, at:

$$v_1 \leq 0 < v_2$$

Nu ændrer jeg spillet lidt, idet jeg adderer en konstant k til alle udbytterne i A. Det nye spil har altså matricen B givet ved:

$$b_{ij} = a_{ij} + k$$

Udbyttefunktionen bliver:

$$w(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j (a_{ij} + k) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j k$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} + k\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} q_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} + k$$

Om værdierne v_1 og v_2 for B gælder derfor:

$$v_1(B) = v_1(A) + k \quad \text{og} \quad v_2(B) = v_2(A) + k$$

Med argumentation som før er det ikke muligt, at:

$$v_1(B) \leq 0 < v_2(B) \quad \text{dvs.}$$

$$v_1(A) + k \leq 0 < v_2(A) + k \quad \text{dvs.}$$

$$v_1(A) \leq -k < v_2(A)$$

Da k var vilkårlig valgt, er det ikke muligt, at
$v_1(A) < v_2(A)$

Da der altid gælder
$v_1(A) \le v_2(A)$
må
$v_1(A) = v_2(A)$

QED

Terminologi

Jeg får brug for nogle begreber, som kræver lidt mere viden om matematik. Her er en kort forklaring:

Afsluttet mængde

En *afsluttet mængde* er en mængde, som indeholder alle sine randpunkter. Intervallet [0,1] er afsluttet, mens [0,1[ikke er det.

Konveks mængde

En *konveks mængde* er en mængde M, hvorom der gælder, at hvis man har to punkter a og b i mængden, så vil alle punkter på linjestykket imellem a og b også tilhøre mængden. Matematisk skriver man dette sådan:

$x = ta + (1-t)b \in M$ for alle punkter a og b samt for alle $t \in [0,1]$

Lemma 1

For en mxn matrix A gælder netop én af følgende to situationer:

Situation 1:
Der findes tal $p_1,\dots,p_m$ således at:
$p_i \ge 0$ for alle i

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} > 0$$

Situation 2:
Der findes tal $s_1,\dots,s_{m+n}$ således at:
$s_j \ge 0$ for alle j = 1,...,m+n

$$\sum_{j=1}^{m+n} s_j = 1$$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} s_j a_{ij} + s_{n+i}$$ for hvert i = 1,...,m

Det sidste betyder, at 0 er indeholdt i det såkaldte *konvekse hylster* frembragt af de n søjler i A og de m enhedsvektorer e_i.

Bevis

Antag, at situation 2 ikke gælder. Ifølge Lemma 2 findes da tal $r_1,\dots,r_{m+1}$ så:

$$\sum_{j=1}^{m} 0 \cdot r_j = r_{m+1}$$ (dvs. $r_{m+1} = 0$)

$$\sum_{j=1}^{m} r_j y_j > 0$$ for alle y i det konvekse hylster

Specielt gælder den sidste ligning for de n søjler i A og de m enhedsvektorer:

$$\sum_{j=1}^{m} r_j a_{ij} > 0$$ og $$r_i = \sum_{j=1}^{m} r_j e_{ij} > 0$$

Da $r_i>0$, gælder:

$$\sum_{k=1}^{m} r_k > 0$$

Det giver derfor mening at sætte:

$$p_i = \frac{r_i}{\sum_{k=1}^{m} r_k}$$

Med det får jeg:

$p_i \geq 0$ for alle i

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} > 0$$

QED

Lemma 2

Lad B være en afsluttet konveks m-dimensionel mængde. Lad $x=(x_1,\ldots,x_m)$ være et punkt, der ikke ligger i B.

Da findes tal $r_1,\ldots,r_m,r_{m+1}$, så:

$$\sum_{j=1}^{m} x_i r_j = r_{m+1}$$

$\sum_{j=1}^{m} r_j y_j > r_{m+1}$ for alle y i B

Bevis

Lad z være det punkt i B, som har den mindste afstand til x. (Sådan et punkt findes, fordi B er afsluttet.)

Lad:

$r_i = z_i - x_i$ i=1,...,m og

$$r_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} z_i x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

Med dette får jeg:

$$r_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} z_i x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (z_i x_i - x_i^2) = \sum_{j=1}^{m} x_i r_i$$

Den første ligning i lemmaet er dermed bevist.

Jeg skal nu vise, at den anden ligning også gælder. Jeg har, at:

$$\sum_{i=1}^{m} r_i z_i = \sum_{i=1}^{m} (z_i - x_i) z_i = \sum_{i=1}^{m} z_i^2 - \sum_{i=1}^{m} z_i x_i$$

og dermed:

$$\sum_{i=1}^{m} r_i z_i - r_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} z_i^2 - \sum_{i=1}^{m} z_i x_i - \sum_{i=1}^{m} z_i x_i + \sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} z_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} z_i x_i + \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (z_i - x_i)^2 > 0$$

Derfor er:

(*) $\sum_{j=1}^{m} x_i r_j > r_{m+1}$

Antag, at der eksisterer et punkt y i B, hvor:

$$(**) \quad \sum_{j=1}^{m} y_i r_j \leq r_{m+1}$$

Da B er konveks, vil hele linjestykket mellem y og z tilhøre B, dvs.

$w_t = ty + (1-t)z \in B$ for alle t∈[0,1]

Kvadratet på afstanden mellem x og w_t er:

$$R^2 = |x - w_t|^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - ty_i - (1-t)z_i)^2$$

Jeg differentierer nu:

$$\frac{dR^2}{dt} = 2\sum_{i=1}^{m} (x_i - ty_i - (1-t)z_i)(-y_i + z_i)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{m} (z_i - x_i)y_i - 2\sum_{i=1}^{m} (z_i - x_i)z_i + 2\sum_{i=1}^{m} t(z_i - x_i)^2 \quad \text{(Tjek ved udregning!)}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{m} r_i y_i - 2\sum_{i=1}^{m} r_i z_i + 2\sum_{i=1}^{m} t r_i^2$$

For t=0 (dvs. w_t = z) får jeg:

$$\left.\frac{dR^2}{dt}\right|_{t=0} = 2\sum_{i=1}^{m} r_i y_i - 2\sum_{i=1}^{m} r_i z_i$$

Pga. ulighederne (*) og (**) er:

$$\left.\frac{dR^2}{dt}\right|_{t=0} < 0$$

Konsekvensen er (overvej!), at:

$|x - w_t| < |x - z|$ for et tilstrækkeligt lille t

Men z var valgt, så afstanden til x var minimal.

Antagelsen om, at der findes et punkt y i B, hvor

$$\sum_{j=1}^{m} y_i r_j \leq r_{m+1}$$

er altså gal.

For alle punkter gælder derfor:

$$\sum_{j=1}^{m} y_i r_j > r_{m+1}$$

QED

Biografi

von Neumann

von Neumann, John, 1903-1957. Ungarsk-amerikansk matematiker. von Neumann er blevet kaldt den sidste af de store matematikere, idet han beherskede en lang række af fagets områder - både teoretiske og anvendelsesorienterede. Han har således bidraget inden for mængdeteori, spilteori, funktionalanalyse, kvantemekanik og computervidenskab.

von Neumann blev født i Budapest i 1903, da byen tilhørte det østrigsk-ungarske rige. Hans familie var jødisk og velhavende, idet faren var advokat og arbejdede for en bank. von Neumanns fødenavn var *Janos Lajos*, og allerede som 6-årig viste han sit store matematiske talent. Som 22-årig fik han en doktorgrad fra Pazmany Peter universitetet i Budapest for en afhandling om mængdelære.

Efter at faren døde, emigrerede familien i 1930 til USA, hvor von Neumann blev inviteret til Princeton University. Her blev han sammen med Albert Einstein og Kurt Gödel flyttet til det nyoprettede *Institute for Advanced Study.*

Der går en anekdote om von Neumanns enestående matematiske talent. Han skulle engang have fået følgende gåde: En flue flyver med 100 km/t frem og tilbage mellem frontruderne på to tog, der nærmer sig hinanden med 75 km/t. Hvis der er 150 km mellem togene til at begynde med, hvor langt når fluen da at flyve, inden togene mødes? 100 km! svarede von Neumann promte. Gådestilleren bemærkede, at de fleste prøver at løse gåden på den svære måde, nemlig ved at udregne en uendelig sum (i stedet for at konstatere, at fluen har fløjet præcis en time med 100 km/t). Dertil svarede von Neumann: "Hvad mener du med den svære måde? Det var sådan, jeg fandt svaret!"

von Neumann giftede sig to gange: Først i 1930 med Mariette Kövesi, som han blev skilt fra i 1937, men dog fik en datter med. Derpå i 1938 med Kari Dan.

I 1955 fik von Neumann konstateret knoglekræft. Han døde i 1957 i Washington i stor smerte og under militær bevogtning, idet myndighederne frygtede, at han skulle afsløre statshemmeligheder under den kraftige medicinering.

Biografi

Morgenstern

Morgenstern, Oskar, 1902-1977. Tyskfødt østrigsk økonom. Morgenstern blev født i Görlitz, Tyskland, men fik sin uddannelse i Wien. Da Hitler indlemmede Østrig, opholdt Morgenstern sig på Princeton University i USA, hvor han var gæsteprofessor i økonomi. Med sine jødiske rødder besluttede han sig for at blive. Sammen med matematikeren John von Neumann grundlagde han spilteorien med deres berømte bog *Theory of Games and Economic Behavior* fra 1944.

Morgenstern døde i 1977 i Princeton.

Opgaver

1 Givet matricen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eftervis, at de optimale strategier er:

$p = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ og $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

svarende til værdien $v = \frac{1}{2}$.

7: Blandede strategier: Ikke nul-sum spil II

Strategiprofiler

I dette afsnit vil jeg se på blandede strategier for et ikke nul-sum matrix-spil på formen:

		Spiller 2			
	Strategi	1	2	...	*n*
Spiller 1	1	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})	...	(a_{1n},b_{1n})
	2	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})	...	(a_{2n},b_{2n})
	...	...	...	...	...
	m	(a_{m1},b_{m1})	(a_{m2},b_{m2})	...	(a_{mn},b_{mn})

Til dette spil svarer to matricer:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Jeg formaliserer nu begrebet "en blandet strategi":

Definition

Strategiprofil

En *strategiprofil* (eller en *blandet strategi*) for spiller 1 er en vektor:

$$p = (p_1, p_2, \dots p_m)$$

hvor p_i'erne er sandsynlighederne for de forskellige strategier, så:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Tilsvarende er en strategiprofil for spiller 2 en vektor:

$$q = (q_1, q_2, \dots q_n)$$

hvor q_i'erne er sandsynlighederne for de forskellige strategier, så:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

Ren strategi

Bemærk, at en *ren strategi* svarer til en strategiprofil på formen:

$$p = (0, \dots, 1, \dots 0)$$

Jeg vil regne på, hvad hver spiller får ud af at spille med en bestemt strategiprofil:

Defintion

Udbyttefunktion

Udbyttefunktionen for spiller 1 er:

$$u_1(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$$

Tilsvarende er udbyttefunktionen for spiller 2:

$$u_2(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij}$$

Bemærk, at udbyttefunktionerne giver det *gennemsnitlige udbytte* (på engelsk *payoff*) for de to strategiprofiler.

Nash-ligevægt

Hvilke strategiprofiler optimerer spillet? For at svare på dette indfører jeg følgende begreb:

Definition

Nash-ligevægt

En *Nash-ligevægt* er et par af strategiprofiler (p^*,q^*), så:

$$u_1(p^*,q^*) \geq u_1(p,q^*) \quad \text{og} \quad u_2(p^*,q^*) \geq u_2(p^*,q) \quad \text{for alle andre p og q}$$

Eksempel

Kig på spillet givet ved:

	Spiller 2	
Spiller 1	(0,3)	(3,0)
	(2,1)	(1,2)

Dette svarer til følgende matricer:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jeg kigger på to strategiprofiler:

$$p = (p_1, p_2) \quad \text{og} \quad q = (q_1, q_2)$$

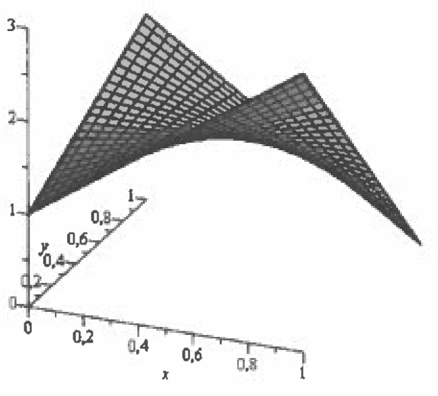
De to udbyttefunktioner er:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 + 3p_1q_2 + 2p_2q_1 + 1p_2q_2 \\ &= 3p_1(1-q_1) + 2(1-p_1)q_1 + (1-p_1)(1-q_1) \\ &= -4p_1q_1 + 2p_1 + q_1 + 1 \end{aligned}$$

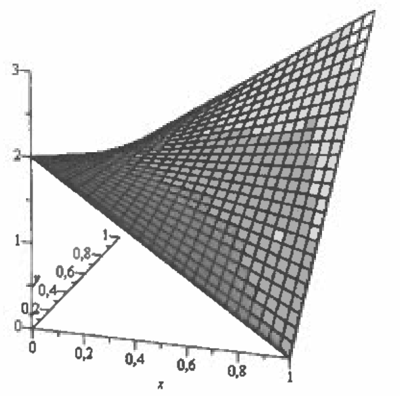
og

$$\begin{aligned} u_2 &= 3p_1q_1 + 0 + 1p_2q_1 + 2p_2q_2 \\ &= 3p_1q_1 + 0 + 1(1-p_1)q_1 + 2(1-p_1)(1-q_1) \\ &= 4p_1q_1 - 2p_1 - q_1 + 2 \end{aligned}$$

Med et passende matematikprogram kan man tegne graferne for udbyttefunktionerne. Jeg finder to sadelpunkter:



*Figur: Maple: plot3d(-4*x*y+2*x+y+1, x =0..1, y=0..1)*



*Figur: Maple: plot3d(4*x*y-2*x-y+2, x=0..1, y=0..1)*

Nash-ligevægten finder jeg ved at differentiere (og evt. tjekke randen):

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = -4q_1 + 2 = 0 \quad \text{dvs.} \quad q_1 = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad q_2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_1} = 4p_1 - 1 = 0 \quad \text{dvs.} \quad p_1 = \frac{1}{4} \quad \text{og} \quad p_2 = \frac{3}{4}$$

Nash-ligevægten er altså følgende par af strategiprofiler:

$$p = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}) \quad \text{og} \quad q = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

Der gælder følgende vigtige sætning:

Sætning

For et matrix-spil eksisterer der altid en Nash-ligevægt med blandede strategier.

Bevis

Lad p og q være to strategiprofiler. Sæt:

$$\alpha_i = \max(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj} p_k q_j, 0)$$

$$\beta_j = \max(\sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{ik} p_i q_k, 0)$$

Kig nu på følgende *transformation* af strategiprofilerne:

T: $p_i' = \dfrac{p_i + \alpha_i}{1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k}$ og $q_j' = \dfrac{q_j + \beta_j}{1 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k}$

p' og q' er begge strategiprofiler, fordi:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i' = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i + \alpha_i}{1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i}{1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k} = \frac{1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i}{1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k} = 1 \quad \text{og}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j' = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i + \beta_i}{1 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i}{1 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k} = \frac{1 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i}{1 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k} = 1$$

Transformationen T(p,q) = (p',q') er kontinuert (overvej!). Endvidere er mængden af strategiprofiler afsluttet, begrænset og konveks (overvej!).

Jeg kan derfor bruge *Brouwers fikspunktsætning* (se nedenfor): Der findes et fikspunkt for transformationen T, dvs. et punkt hvor:

(p',q') = T(p,q) = (p,q)

Jeg påstår nu, at:

(p,q) = (p',q') $\Leftrightarrow$ (p,q) er en Nash-ligevægt

Fikspunktet fra Brouwers sætning er med andre ord en Nash-ligevægt, hvorved sætningen er bevist, når påstanden er begrundet:

Bevis for påstanden:

Hvis (p,q) er en Nash-ligevægt, så gælder:

$$u_1((0,\ldots,1,\ldots,0),q) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj} p_k q_j = u_1(p,q) \quad \text{for alle i} \quad \text{og}$$

$$u_2(p,(0,\ldots,1,\ldots,0)) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{ik} p_i q_k = u_2(p,q) \quad \text{for alle j}$$

Derfor er:

$\alpha_i = 0$ og $\beta_j = 0$ for alle i og j

Hvis omvendt (p,q) ikke er en Nash-ligevægt, så findes der enten en strategiprofil $\overline{p}$, hvor:

$$u_1(p,q)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}p_kq_j<\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\overline{p}_kq_j=u_1(\overline{p},q)$$

eller også findes der en strategiprofil $\overline{q}$, hvor:

$$u_1(p,q)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}p_kq_j<\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}p_k\overline{q}_j=u_1(p,\overline{q})$$

Antag, at det første er tilfældet. Jeg vil vise, at p' ≠ p.

NB:

Vægtet gennemsnit af tal:
$0{,}25\cdot 4+0{,}75\cdot 8=5$

Ét af tallene er større end gennemsnittet, og ét af tallene er mindre!

Jeg har:

$$u_1(p,q)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}p_kq_j<\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\overline{p}_kq_j=u_1(\overline{p},q)$$

Da højresiden er et *vægtet gennemsnit* (med vægte $\overline{p}_k$) for tallene:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{kj}q_j$$

må der være et k, hvor:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}p_kq_j<\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\overline{p}_kq_j<\sum_{i=1}^{n}a_{kj}q_j$$

og for dette k er altså:

$$\alpha_k>0$$

Summen:

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$$

er altså positiv.

Omvendt er venstresiden:

$$u_1(p,q)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}p_kq_j$$

et vægtet gennemsnit (med vægte p_k) for samme tal:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{kj}q_j$$

Der må derfor være et (andet) k, hvor:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{kj}q_j\le\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}p_kq_j$$

For dette k er:

$$\alpha_k=0$$

Alt i alt har jeg:

$$p'_k=\frac{p_k+\alpha_i}{1+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}=\frac{p_k}{1+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}<p_{ik}\qquad\text{dvs.}\qquad p'_k\neq p_k$$

Altså er p' ≠ p.

Antag, at det andet er tilfældet. På tilsvarende måde kan jeg så vise, at q' ≠ q. Dette beviser påstanden.

QED

Sætning

Brouwers fikspunktsætning

En transformation T på $[0,1]^n$ har altid et *fikspunkt*, dvs. et punkt, hvor:

$$T(p,q)=(p,q)$$

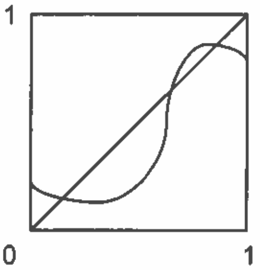
Faktisk gælder dette for enhver transformation på en afsluttet, begrænset og konveks mængde.

Bevis

For n=1 gælder det om at vise, at grafen for en kontinuert funktion f defineret på [0,1] vil krydse linjen y=x, således at der er et fikspunkt:

$f(x)=y=x$

Det er dog intuitivt klart. (Se figuren nedenfor.)



Figur: Brouwers fikspunktsætning i én dimension. Funktionen her har hele 3 fikspunkter.

Det generelle bevis er meget kompliceret, og jeg udelader det derfor. I Allan Tarps bog *Spilteori og afstemningsteori* er der dog i appendiks side 257 et oplæg til et bevis for Brouwers sætning, som bruger det såkaldte *Sperners lemma*.

(QED)

Biografi

Brouwer

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 1881-1966. Hollandsk matematiker og logiker. Brouwer blev født i Overschie, Rotterdam, og da han var teenager, flyttede familien til Amsterdam. I 1897 kom han på universitetet i Amsterdam, hvor lærerne straks bemærkede hans evner. I 1904 tog han en kandidatgrad og i 1907 en doktorgrad, hvor han lagde grunden til den retning inden for matematikken, som man kalder *intuitionalismen*, dvs. den opfattelse, at matematikken skal hvile på et enkelt grundlag f.eks. uden indirekte beviser. Denne opfattelse stod i modstrid til den såkaldte *formalisme* og *logicisme* repræsenteret af henholdsvis David Hilbert og Bertrand Russell.

Brouwer bidrog med meget inden for mængdeteori, topologi og kompleks analyse. Mest kendt er måske hans såkaldte *fixpunktsætning*.

I 1904 giftede han sig med Lize de Holl, som var elleve år ældre og havde en datter fra et tidligere ægteskab. Parret fik ingen børn sammen.

Brouwer døde 85 år gammel, da han blev ramt af et køretøj på vejen foran sit hus.

Opgaver

1 Find Nash-ligevægten for matrix-spillet givet ved:

$$A=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$$

2 Find Nash-ligevægten for følgende variant af matrix-spillet *Fangernes Dilemma*:

$$A=\begin{pmatrix}-1&-10\\0&-5\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B=\begin{pmatrix}-1&0\\-10&-5\end{pmatrix}$$

8: Spiltræer II

Strategiprofiler

Til slut vil jeg kigge på yderligere teori for spiltræer.

Definition

Spiltræ

Et *spiltræ* for n spillere har følgende egenskaber:

1. Et antal punkter er forbundet med pile som i et træ.
2. Hvert *mellempunkt* M_i (dvs. et der bliver fortsat med pile) er *ejet* af en af de n spillere.
3. Hvert *slutpunkt* S (dvs. et der ikke bliver fortsat) har et bestemt udbytte for hver spiller givet med følgende *udbytte-vektorfunktion*:
   $u(S) = (u_1(S), \ldots, u_n(S))$

Definition

Strategi

Lad N være mængden af mellempunkter ejet af en bestemt spiller. Lad V være mængden af alle punkter i spiltræet. En *strategi* for en spiller i et spiltræ er en funktion:
$f: N \rightarrow V$

Strategien angiver altså for hvert punkt, som en spiller ejer, hvilket næste punkt han vælger.

Notation

Jeg vil notere en strategi således:

Hvis funktionen er
$f: N = \{N_1, \ldots, N_k\} \rightarrow V$
hvor
$f(N_1) = V_1$, $f(N_2) = V_2, \ldots, f(N_k) = V_k$
noterer jeg strategien:
$[V_1, V_2, \ldots, V_k]$

Definition

Strategiprofil

En *strategiprofil* for et spiltræ er en bestemt samling af strategier svarende til én for hver spiller:
$s = (s_1, \ldots, s_n)$

Bemærk, at en strategiprofil her ikke har noget med sandsynligheder at gøre.

En strategiprofil udpeger et bestemt slutpunkt, når man kombinerer strategierne for de enkelte spillere. Det giver derfor mening at anvende udbyttefunktionerne på en strategiprofil:
$u_i(s_1, \ldots, s_n) = u_i(S)$, i = 1,...,n

Nash-ligevægt

For spiltræer definerer man Nash-ligevægte sådan:

Definition

En *Nash-ligevægt* er en strategiprofil, hvor der for alle spillere "i" gælder:
$u_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \geq u_i(s_1, \ldots, s, \ldots, s_n)$ for alle strategier s for spiller "i"

En Nash-ligevægt er således en strategiprofil, hvor ingen spiller kan forbedre sit udbytte ved at ændre sin strategi, når alle andre fastholder deres.

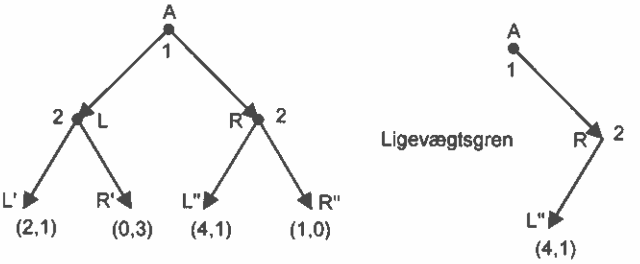
Definition

Ligevægtsgren

En *ligevægtsgren* for en Nash-ligevægt er grenen udpeget ved ligevægtens strategiprofil:
$s = (s_1, \ldots, s_n)$

Eksempel

Kig på følgende spiltræ:



Figur: Nash-ligevægte. (Fra C. Aliprantis: Games and Decision Making.)

Punktet A er ejet af spiller 1, mens L og R er ejet af spiller 2.

En strategiprofil er f.eks. ([R] , [R',L"]).

Den angiver, at spiller 1 i A vælger at fortsætte med R, mens spiller 2 i L vælger R' og L" i R. Strategiprofilen udpeger slutpunktet L" med udbyttet 4 for spiller 1 og 1 for spiller 2.

Jeg påstår, at følgende strategiprofiler er Nash-ligevægte:
([R] , [R',L"])   og   ([R] , [L',L"])

Der gælder nemlig for den første strategiprofil:

$$u_1([R],[R',L'']) = 4 \geq \begin{cases} u_1([R],[R',L'']) = 4 \\ u_1([L],[R',L'']) = 0 \end{cases} \quad \text{og}$$

$$u_2([R],[R',L'']) = 1 \geq \begin{cases} u_2([R],[R',L'']) = 1 \\ u_2([R],[L',L'']) = 1 \\ u_2([R],[R'',L']) = 0 \\ u_2([R],[R'',R']) = 0 \end{cases}$$

Tilsvarende for den anden:

$$u_1([R],[L',L'']) = 4 \geq \begin{cases} u_1([R],[L',L'']) = 4 \\ u_1([L],[L',L'']) = 2 \end{cases} \quad \text{og}$$

$$u_2([R],[L',L'']) = 1 \geq \begin{cases} u_2([R],[R',L'']) = 1 \\ u_2([R],[L',L'']) = 1 \\ u_2([R],[R'',L']) = 0 \\ u_2([R],[R'',R']) = 0 \end{cases}$$

Begge disse Nash-ligevægte udpeger ligevægtsgrenen: A→R→L".

NB:

En ligevægtsgren udpeger netop en Nash-ligevægt, men flere Nash-ligevægte kan godt svare til samme ligevægtsgren (overvej!).

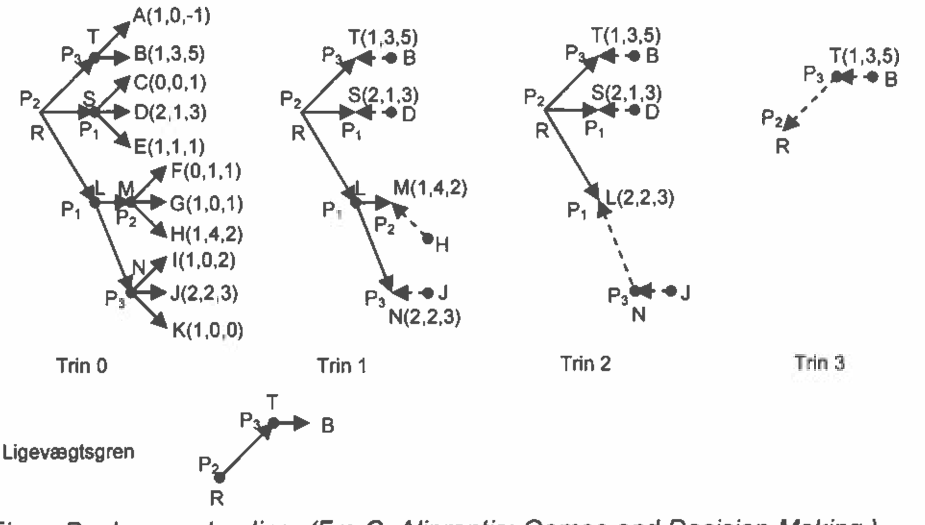
Hvordan finder man en Nash-ligevægt? Det giver følgende eksempel en metode til:

Eksempel

Baglæns optrevling

Foto: Harold W. Kuhn

Givet følgende spiltræ (yderst til venstre) for de tre spillere P_1, P_2 og P_3:



Figur: Baglæns optrevling. (Fra C. Aliprantis: Games and Decision Making.)

Backward induction

Jeg gør nu følgende: (Metoden hedder *baglæns optrevling* eller på engelsk *backward induction*. Den er opfundet af Harold W. Kuhn, født 1925.)

Trin 1:
Kig på punkter med pile, der fører til slutpunkter (dvs. T, S, L og N). Vælg for hvert af disse punkter den udbyttevektor, der giver det største udbytte for den spiller, som ejer punktet.

Trin 2:
Beskær spiltræet.

Trin 3:
Gentag proceduren fra trin 1 med de tilbageværende punkter, som fører til slutpunkter.

Trin 4:
Beskær igen spiltræet.

Konklusion:
Den tilbageværende gren svarer til en strategiprofil, som er en Nash-ligevægt.

Bemærk, at metoden her finder en Nash-ligevægt. Den garanterer imidlertid ikke, at der ikke findes andre.

Sætning

Der eksisterer en Nash-ligevægt for ethvert spiltræ. (*Kuhns sætning.*)

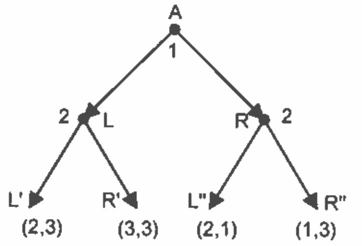
Bevis

Man kan altid bruge baglæns optrevling til at finde en ligevægtsgren, som udpeger en Nash-ligevægt. Sætningen er dermed bevist.

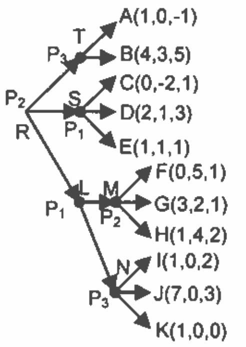
QED

Opgaver

1 Find ligevægtsgrenen for følgende spiltræ med to spillere:



2 Anvend baglæns optrevling på følgende spiltræ med de tre spillere P_1, P_2 og P_3:



Referencer

- Jan Pedersen: Hvad er rationalitet? (ISBN: 87-593-0830-3)
- E.S. Ventzel: Elementer af spilteorien (ISBN: 87-7536-071-3)
- Edmund Christiansen: Elementer af matematisk spilteori (SDU noter 2004)
- Allan Tarp: Spilteori og afstemningsteori (ISBN: 87-87392-38-0)
- Avinash Dixit: Games of Strategy (ISBN: 0-393-92499-8)
- Charalambos D. Aliprantis: Games and Decision Making (ISBN: 0-19-512609-2)
- Guillermo Owen: Game Theory (ISBN: 0-12-531150-8)

- Steven Brams: Superpower Games (ISBN: 0-300-03364-8)
- Steven Brams: Game theory and the Cuban missile crisis (http://plus.maths.org/issue13/features/brams/index.html)
- Michael Shermer: The Doping Dilemma (Scientific American, April 2008)
- Steve Schecter: Game Theory and Global Warming (http://www4.ncsu.edu/~schecter/gtgw.pdf)
- Cornell University: ISIS's blunder (http://blogs.cornell.edu/info2040/2014/09/10/isissblunder/)

- YouTube: Små videoer, der forklarer spilteori (http://www.youtube.com/watch?v=5Ug2EVjdS4E&feature=related)
- YouTube: Video om global opvarmning og spilteori (http://www.youtube.com/watch?v=zORv8wwiadQ)
- Internet: Komplet kursus i spilteori fra Yale University (http://www.academicearth.org/lectures/introduction-to-game-theory)
- Film: A Beautiful Mind (Amerikansk spillefilm fra 2001 om John Nash instrueret af Ron Howard)
- Film: Thirteen Days (Amerikansk spillefilm fra 2000 om Cuba-krisen instrueret af Roger Donaldson)