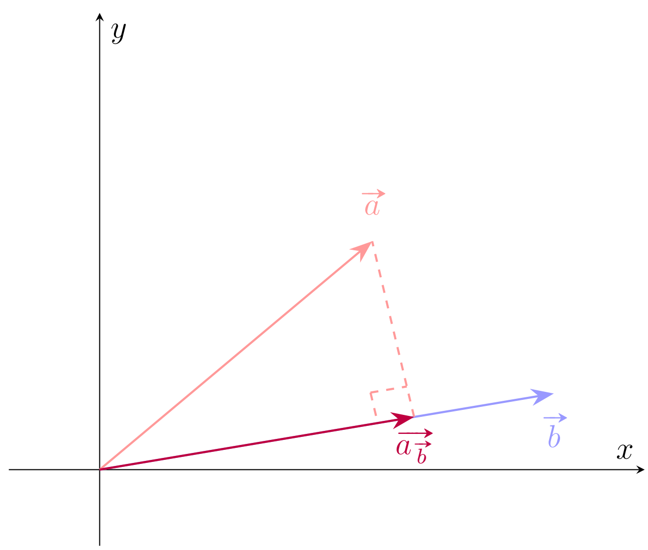
Projektioner af vektorer

Projektioner

Har vi to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så kan vi være interesserede i at bestemme den vektor $\vec{a_{\vec{b}}}$, der peger i samme retning som $\vec{b}$ og som i en forstand er så tæt på $\vec{a}$ som muligt. Vi kalder i et sådant tilfælde vektoren $\vec{a_{\vec{b}}}$ for projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$. Vi skriver også

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a}_{\vec{b}}.$$



Vi starter med at vise, hvordan vi finder projektionen af en vektor på en anden vektor.

Sætning 1.1 (Projektionssætningen)**.** *For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$, som vi betegner*

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a}_{\vec{b}},$$

givet ved

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}.$$

Længden af $\vec{a}_{\vec{b}}$ er givet ved

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Bevis. Af konstruktionen af projektionen $\overrightarrow{a_{\vec{b}}}$ så findes der et tal k, så

$$k\vec{b} = \overrightarrow{a_{\vec{b}}}.$$

Lad n være en normalvektor til $\vec{b}$, der opfylder, at

$$\overrightarrow{a_{\vec{b}}} + \vec{n} = \vec{a}.$$

Vi har så, at

$$\vec{n} = \vec{a} - \overrightarrow{a_{\vec{b}}}.$$

Da $\vec{n}$ er en normalvektor til $\vec{b}$, så får vi følgende prikprodukt.

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \vec{b} = 0 &\Leftrightarrow (\vec{a} - \overrightarrow{a_{\vec{b}}}) \cdot \vec{b} = 0 \\
&\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - \overrightarrow{a_{\vec{b}}} \cdot \vec{b} = 0 \\
&\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{a_{\vec{b}}} \cdot \vec{b} = k\vec{b} \cdot \vec{b} \\
&\Leftrightarrow k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}
\end{aligned}$$

Derfor får vi, at

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a_{\vec{b}}} &= k\vec{b} \\
&= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}.
\end{aligned}$$

Vi kan nu bestemme længden af vektoren:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{a_{\vec{b}}}| &= \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \right| \\
&= \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right| |b| \\
&= \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|b|}
\end{aligned}$$

■

Eksempel 1.2. Vi skal bestemme projektionen af vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

på vektoren

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi bestemmer først

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14$$

Vi bestemmer så

$$|b|^2 = (\sqrt{5^2 + 7^2})^2 = 25$$

Vi kan nu bestemme projektionen $\vec{a_{\vec{b}}}$ som

$$\begin{aligned} \vec{a_{\vec{b}}} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \\ &= \frac{14}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{42}{25} \\ \frac{58}{25} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eksempel 1.3. Vi skal projicere vektoren $\vec{u}$ givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ned på linjen med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi skal først projicere ned på retningsvektoren

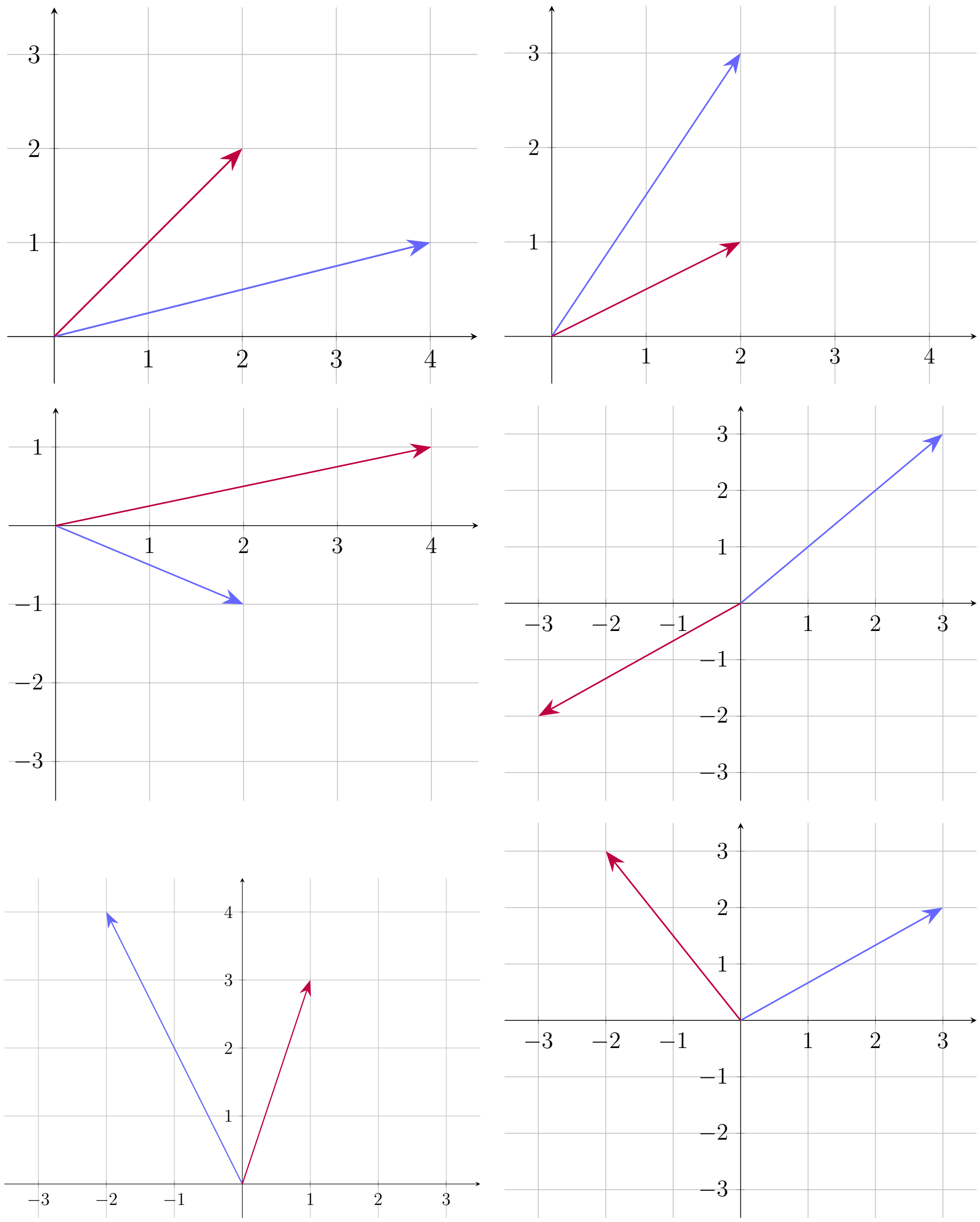
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dette gøres:

$$\vec{v}_{\vec{r}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Opgave 1

Projicér følgende vektorer $\vec{a}$ ned på vektorerne $\vec{b}$ både ved at tegne projektionen på figuren og ved at beregne projektionen.



Opgave 2

i) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved ligningen

$$-1(x-12)+9(y-1)=0.$$

ii) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved ligningen

$$-7(x+1)+2(y-2)=0.$$

iii) Undersøg dit resultat i GeoGebra.

Opgave 3

i) Projicér vektoren $\vec{v}$ givet ved

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ned på vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tegn vektorerne i GeoGebra og undersøg, om du har fundet den korrekte projektionsvektor.

ii) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ned på vektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tegn vektorerne i GeoGebra og undersøg, om du har fundet den korrekte projektionsvektor.

Opgave 4

i) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

iii) Undersøg dit resultat i GeoGebra.

Opgave 5

i) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved ligningen

$$-1(x-12)+9(y-1)=0.$$

ii) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved ligningen

$$-7(x+1)+2(y-2)=0.$$

iii) Undersøg dit resultat i GeoGebra.

Opgave 6

Argumentér både geometrisk og ved hjælp af projektionsformlen for, at projektionen af en vektor ned på en ortogonal vektor giver nulvektoren.