# Funktioner af to variable

## Vektorer i rummet

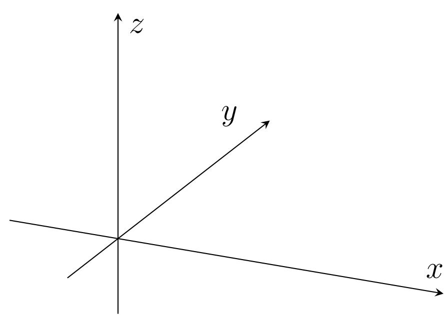
I har tidligere stiftet bekendtskab med funktionen $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, givet ved

$$f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Denne funktion har ikke én, men to variable $x$ og $y$, og bestemmer så brøken mellem de to brøker. Hvis et punkt lægger på grafen for $f$, så skal punktet have tre koordinater

$$P\left(x, y, \frac{x}{y}\right).$$

Dette punkt ligger i et koordinatsystem med tre akser, $x$, $y$ og $z$. Et sådant koordinatsystem kan ses af Fig. 1.




Figur 1: Koordinatsystemer i rummet.

Da grafer for funktioner af to variable tilsvarer punktmængder af punkter i rummet, vil vi tilsvarende introducere vektorer i rummet.

**Definition 1.1** (Vektorer i rummet)**.** En vektor i rummet $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ defineres som et objekt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

hvor $x, y, z \in \mathbb{R}$.

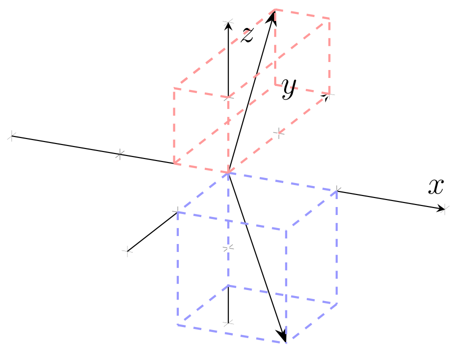
**Eksempel 1.2.** To vektorer i rummet $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er givet ved henholdsvist

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

og

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Disse vektorer kan ses på Fig. 2.




Figur 2: To vektorer i rummet.

Vektorer i rummet opfører sig nøjagtigt som vektorer i planen. Følgende definition beskriver vektorsummation, differens, skalarmultiplikation og prikprodukt.

**Definition 1.3** (Regneoperationer for vektorer)**.** Lad $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være vektorer givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Lad desuden $k \in \mathbb{R}$ være et vilkårligt tal.

Så defineres summen af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

Differensen af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ defineres

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}.$$

Skalarmultiplikation med en konstant $k$ defineres som

$$k\vec{u} = k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{pmatrix}$$

Til slut defineres prikproduktet mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

To vektorer i rummet siges at være orthogonale, hvis deres prikprodukt er lig nul.

**Eksempel 1.4.** Lad $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så er summen af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ givet ved

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 5+2 \\ 2-3 \\ -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Differensen $\vec{u} - \vec{v}$ er

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 2+3 \\ -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Vi kan gange $\vec{v}$ med $-3$ og få

$$-3\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 \\ -3 \cdot -3 \\ -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Prikker vi vektorerne sammen så fås

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + -4 \cdot 1 = 0.$$

Derfor er vektorerne $\vec{u}$ og $\vec{v}$ orthogonale.

Vi definerer også længden af en vektor i rummet.

**Definition 1.5** (Længde af vektor)**.** Lad $\vec{u}$ være en vektor i rummet givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Så defineres *længden* af $\vec{u}$ som

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**Eksempel 1.6.** Lad $\vec{u}$ være givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Længden af $\vec{u}$ er så

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

# Opgave 1

Udregn følgende:

1) $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-3\\-7\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}-10\\4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11\\-15\\1\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-7\\-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\\frac{3}{4}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\6\\9\end{pmatrix}$

# Opgave 2

Bestem følgende prikprodukter og afgør, om vektorerne er orthogonale.

1) $\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\10\\3\end{pmatrix}$

3) $\left(\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-6\\6\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\-11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\5\\7\end{pmatrix}\right)$

4) $7\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\0\\10\end{pmatrix}$

# Opgave 3

Bestem længden af følgende vektorer

1) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}6\\6\\7\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}10\\11\\2\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}4\\4\\7\end{pmatrix}$

# Opgave 4

i) Løs ligningen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

ii) Løs ligningen

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

# Opgave 5

Der gælder en række regneregler for vektorer i planen, som også gælder for vektorer i rummet. Et udpluk af dem er følgende: For vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ samt konstanter $k, c \in \mathbb{R}$ gælder der, at

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

iii) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

iv) $(k + c)\vec{u} = k\vec{u} + k\vec{v}$.

v) $(kc)\vec{u} = k(c\vec{u})$.

vi) Der findes en vektor $\vec{0}$, så $\vec{0} + \vec{u}$ for alle vektorer $\vec{u}$.

vii) For enhver vektor $\vec{u}$ findes der en vektor $-\vec{u}$, så $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

viii) $1\vec{u} = \vec{u}$.

Vis, at disse regneregler er korrekte.