Monotoniforhold og ekstrema

Monotoniforhold

Vi siger, at en funktion er monoton på et interval, hvis den enten er voksende eller aftagende på intervallet. Mere præcist har vi følgende definition.

Definition 1.1. En funktion f siges at være voksende på et interval I, hvis det for alle x_1, x_2 i I gælder, at

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2).$$

Hvis der tilmed gælder, at

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2),$$

så siges funktionen at være strengt voksende på I.

En funktion f siges at være aftagende på et interval I, hvis det for alle x_1, x_2 i I gælder, at

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Hvis der tilmed gælder, at

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

så siges funktionen at være strengt aftagende på I.

Monotoniforhold omhandler at finde de intervaller, hvor en funktion er enten voksende eller aftagende.

Vi vil starte med at definere, hvad et lokalt ekstremum er

Definition 1.2. En funktion f siges at have et lokalt maksimum i x_0, hvis der i en omegn I af x_0 gælder, at

$$x \in I, x \neq x_0 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0).$$

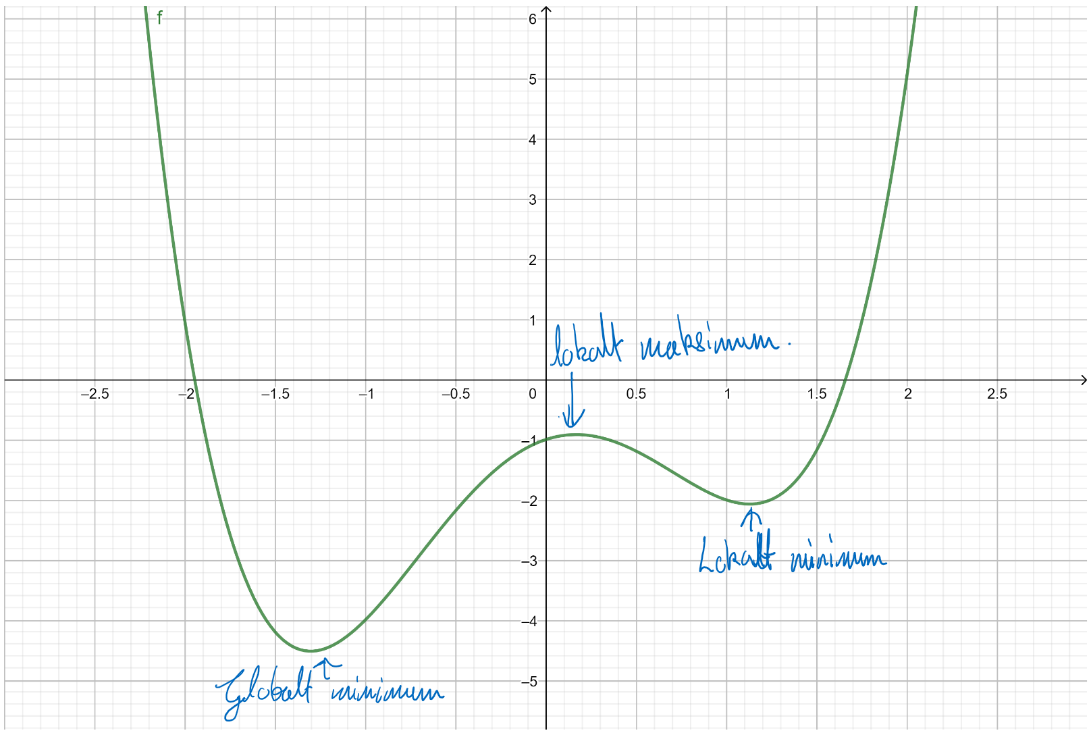
Hvis I kan vælges som hele definitionsmængden af f, så siges x_0 at være et globalt maksimum.

En funktion f siges at have et lokalt minimum i x_0, hvis der i en omegn I af x_0 gælder, at

$$x \in I, x \neq x_0 \;\Rightarrow\; f(x) > f(x_0).$$

Hvis I kan vælges som hele definitionsmængen af f, så siges x_0 at være et globalt minimum.

Vi kan se ekstremumspunkterne af en funktion f på Fig. 1



Figur 1: Funktion med angivne ekstremumspunkter.

Et maksimum og minimum kaldes for et ekstremumspunkt. For at finde ekstremumspunkter, kan vi udnytte følgende sætning:

Sætning 1.3. *En funktion f har ekstremum i et punkt x_0 kun hvis $f'(x_0) = 0$.*

Eksempel 1.4. Funktion, der er plottet i Fig. 1 har forskrift

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1.$$

Vi bestemmer $f'(x) = 4x^3 - 6x + 1$. Denne sætter vi lig nul:

$$4x^3 - 6x + 1 = 0,$$

og får $x \approx -1.3 \ \vee \ x \approx 0.17 \ \vee \ x \approx 1.13$.

Derfor har vi ekstremumspunkter

$$(-1.3, f(-1.3)) = (-1.3, -4.51), \qquad (0.17, f(0.17)) = (0.17, -0.92),$$
$$(1.13, f(1.13)) = (1.13, -2.07).$$

Opgave 1

Find ekstremumspunkterne for følgende funktioner:

1) x^2	2) $3x^3 + 2x + 1$
3) $10 + 5x + \sqrt{x}$	4) $\ln(x)\sqrt{x}$
5) $3x^2 + \ln(x^2)$	6) $\ln(x^2) + 3x^3$
7) $x^{5/2} - 2x$	8) $e^{2x+3} + 10x^2$
9) $x^{\ln(x)}$	10) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$

Opgave 2

Plot funktionerne fra Opgave 1 omkring deres ekstremumspunkter og afgør i hvilke intervaller, de ser ud til at være voksende og aftagende.