

# Vinkler mellem linjer

## Vinkler mellem linjer

I 1.g lærte vi, hvordan vi bestemte vinklen mellem to vektorer. Givet to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ , så gælder der følgende forhold mellem vinklen  $v$  mellem  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  og deres indbyrdes prikprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(v) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Vi kan derfor finde vinklen  $v$  ved

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow v = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right).$$

Typisk vil vi blot bruge ligningen til venstre og så løse med `solve`-kommandoen i Maple. Vi kan også anvende funktionen `vinkel` i Maple. Lad os betragte et par eksempler.

**Eksempel 1.1.** En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$l : 2(x - 1) + 3(y - 2) = 0,$$

og en linje  $m$  er givet ved ligningen

$$m : -1(x + 2) - 5(y - 1) = 0,$$

Linjen  $l$  har derfor normalvektoren  $\vec{n}_l$  givet ved

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

og linjen  $m$  har normalvektoren  $\vec{n}_m$  givet ved

$$\vec{n}_m = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Vinklen mellem linjerne  $l$  og  $m$  må være lig vinklen mellem deres normalvektorer. Vinklen  $v$  mellem linjerne bestemmes derfor ved at løse ligningen

$$\cos(v) = \frac{2(-1) + 3(-5)}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2}}.$$

Dette løses i Maple, og vinklen mellem linjerne fås til at være  $157,62^\circ$ . Dette er klart den stumpe vinkel. Den spidse vinkel mellem linjerne er derfor

$$180 - 157.62 = 22.38^\circ.$$

Vi kan også bruge `vinkel`-kommandoen. Dette gøres ved at skrive

```
with(Gym):
u := <2,3>
v := <-1,-5>
vinkel(u,v)
```

Dette giver også vinklen  $157.62^\circ$ .

**Eksempel 1.2.** To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved følgende to parameterfremstillinger henholdsvis.

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Tilsvarende eksemplet med linjens ligning må vinklen mellem to linjer være lig vinklen mellem linjernes retningsvektorer  $\vec{r}_l$  og  $\vec{r}_m$ . Derfor findes vinklen mellem  $l$  og  $m$  som vinklen mellem

$$\vec{r}_l = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og

$$\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dette gøres igen i Maple, og vi får, at vinklen mellem linjerne  $l$  og  $m$  er givet ved  $v = 91.22^\circ$ .

## Opgave 1

- i) Bestem vinklen mellem linjernen  $l$  og  $m$ , der har følgende parameterfremstillinger henholdsvis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ii) Bestem vinklen mellem linjerne  $l$  og  $m$ , der har følgende parametriseringer henholdsvis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

## Opgave 2

- i) To linjer  $l$  og  $m$  har følgende ligninger:

$$\begin{aligned} l : 4(x - 1) + 4(y - 1) &= 0, \\ m : 2(x + 1) - 2(y - 7) &= 0. \end{aligned}$$

Bestem den spidse vinkel mellem  $l$  og  $m$ .

- ii) To linjer  $l$  og  $m$  har følgende ligninger:

$$\begin{aligned} l : -7(x + 13) - 20(y - 1) &= 0, \\ m : \frac{1}{3}(x + 4) + \sqrt{2}(y - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Bestem den stumpe vinkel mellem  $l$  og  $m$ .

## Opgave 3

- i) To linjer  $l$  og  $m$  har følgende parameterfremstillinger:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestem vinklen  $v$  mellem  $l$  og  $m$ .

- ii) To linjer  $l$  og  $m$  har følgende parameterfremstillinger:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestem den spidse vinkel mellem  $l$  og  $m$ .

## Opgave 4

- i) En linje  $l$  har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og en anden linje  $m$  har ligningen

$$(x - 3) + 7(y + 2) = 0$$

Bestem vinklen mellem  $l$  og  $m$ .

- ii) En linje  $l$  har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

og en anden linje  $m$  har ligningen

$$-5(x + 3) + 2(y - 2) = 0.$$

Bestem vinklen mellem  $l$  og  $m$ .

## Opgave 5

- i) En linje  $l$  er givet ved ligningen

$$6(x - 6) + 8(y - 8) = 0,$$

og en linje  $m$  er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Bestem vinklen mellem  $l$  og  $m$

## Opgave 6

- i) En linje  $l$  går gennem punkterne  $(1, 1)$  og  $(2, 3)$ . Bestem en parameterfremstilling for  $l$ .
- ii) En linje  $m$  går gennem punkterne  $(-2, -4)$  og  $(3, 5)$ . Bestem en ligning for  $m$ .
- iii) Bestem vinklen mellem  $l$  og  $m$ .