Afstand mellem linje og punkt

Afstand mellem linje og punkt

Vi kan bruge projektioner af vektorer til at bestemme afstanden mellem et punkt P og en linje l i planen. Det er ikke umiddelbart klart ud fra formlen at det er projektioner, vi bruger, men det vil ses af beviset. Afstanden findes ved følgende sætning.

Sætning 1.1 (Afstand mellem punkt og linje)**.** *Har vi et punkt $Q(x_1, y_1)$ og en linje l givet ved ligningen*

$$ax + by + c = 0,$$

så kan vi bestemme afstanden mellem l og Q ved

$$\mathrm{dist}(Q, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bevis. Vi vælger et punkt $P(x_0, y_0)$ på l. Da l har ligningen

$$ax + by + c = 0,$$

må der gælde, at

$$ax_0 + by_0 + c = 0,$$

og derfor har vi et udtryk for c givet ved

$$c = -ax_0 - by_0.$$

Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ er givet ved

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0. \end{pmatrix}$$

Vi har en normalvektor til l givet ved

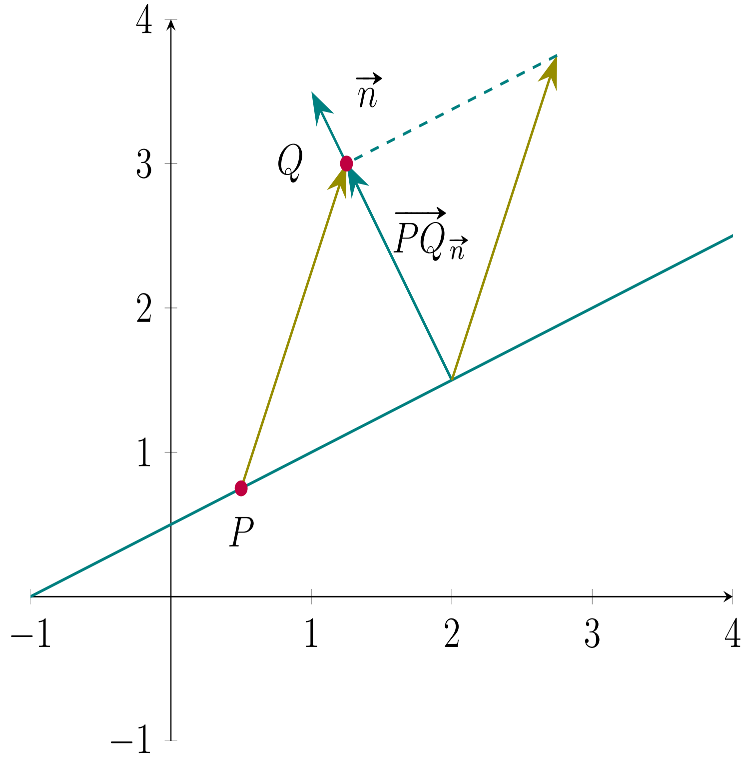
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Vi bemærker nu, at længden af projektionen $\overrightarrow{PQ_{\vec{n}}}$ må være afstanden fra l til Q. Vi bestemmer derfor længden af denne projektion:

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{PQ_{\vec{n}}}\right| &= \frac{|\overrightarrow{PQ_{\vec{n}}} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\
&= \frac{\left|\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|} \\
&= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{|ax_1 + by_1 - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.
\end{aligned}
$$

■

Argumentationen i beviset er beskrevet på Figur 1



Figur 1: Afstand fra punkt til linje

Eksempel 1.2. Vi skal bestemme afstanden fra punktet $P(1,1)$ til linjen med ligningen $4(x-1)+3(y+1)=0$. Vi starter med at hæve parenteserne i ligningen:

$$4(x-1)+3(y+1)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-1=0.$$

Vi kan nu bruge formlen for afstand mellem punkt og linje og får:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(P,l) &= \frac{|4\cdot 1+3\cdot 1-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} \\ &= \frac{6}{5}, \end{aligned}$$

hvilket er afstanden fra punktet P til linjen l.

Eksempel 1.3. Vi skal bestemme k, så punktet $P(4,k)$ og linjen l med ligningen

$$2x-4y-3=0$$

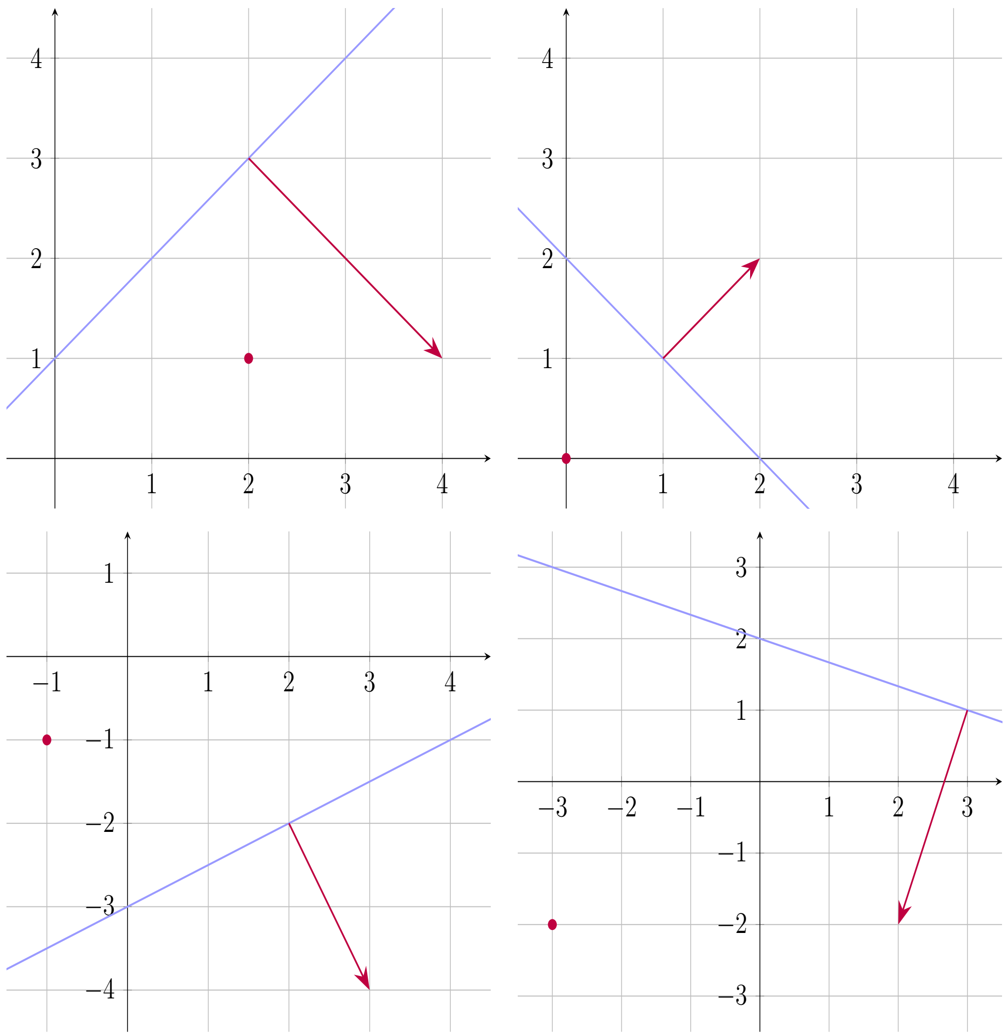
har afstand 1. Vi bruger afstandsformlen og får

$$\operatorname{dist}(P,l)=\frac{|2\cdot 4-4\cdot k-3|}{\sqrt{2^2+4^2|}}=\frac{|5-4k|}{\sqrt{20}}=1.$$

Vi løser denne ligning og får, at $k\approx 0.63$.

Opgave 1

Tegn en linje med den korteste afstand mellem følgende linjer og punkter. Giv et overslag over længden og bestem derefter afstanden ved at bruge afstandsformlen.



Opgave 2

i) Bestem k, så afstanden mellem linjen givet ved

$$x - 5y + 10 = 0$$

og punktet $P(k, 1)$ har afstand 4. Start med at tegne det i Geogebra.

ii) Bestem b, så l med ligningen

$$y = 2x + b,$$

og punktet $P(1, 1)$ har afstand 5. Start med at tegne i Geogebra.

Opgave 3

Prøv at læse og forstå beviset.