# Mere om cirkler

## Kvadratkomplettering

Får vi ligningen for en cirkel med radius $r$ og centrum i $(x_0, y_0)$, så kan det være, at den ikke er på formen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \tag{1.1}$$

men at parenteserne i stedet er hævet, så ligningen er på formen

$$x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + y^2 + y_0^2 - 2yy_0 = r^2 \tag{1.2}$$

Idéen er nu, at vi skal *kvadratkomplettere*, så vi kan omskrive ligningen fra formen (1.2) til formen (1.1). Lad os betragte et eksempel.

**Eksempel 1.1.** En cirkel har ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 + 8y + 11 = 0,$$

og vi vil gerne bestemme centrum og radius for denne cirkel. Vi skal derfor omskrive ligningen til formen (1.2) og derefter til (1.1). I ligningen har vi leddene $-4x = -2xx_0$, så $x_0$ må være 2. Tilsvarende har vi, at $8y = -2yy_0$ så $y_0 = -4$. I ligningen mangler vi leddene $x_0^2 = 4$ og $y_0^2 = 16$, så dem lægger vi til på begge sider af lighedstegnet:

$$x^2 - 4x + y^2 + 8y + 11 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 11 + 16 = 20,$$

Vi flytter nu det overskydende 11 over på højre side af lighedstegnet og får

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 9.$$

Nu er ligningen på formen (1.2), og vi omskriver derfor til formen (1.1):

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 3^2,$$

og centrum ligger derfor i $(2, -4)$ og radius af cirklen er $r = 3$.

## Tangenter til cirkler

Hvis vi kender et punkt $P(x_0, y_0)$ på en cirkel, så kan vi bestemme en tangent til cirklen i dette punkt, hvis vi kender centrum for cirklen. Vi kunne i princippet sagtens bestemme en formel for ligningen for tangenten, men lad os for intuitionens skyld bestemme ligningen gennem et eksempel.

**Eksempel 2.1.** En cirkel har centrum i $C(2,1)$ og et punkt $P(3.41, 2.41)$ ligger på cirklen. Vi ønsker at bestemme ligningen for tangenten $l$ til cirklen i dette punkt. Vi udnytter, at vektoren

$$\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 2-3.41 \\ 1-2.41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.41 \\ -1.41 \end{pmatrix}$$

er en normalvektor til $l$. Desuden kender vi et punkt $l$ skærer igennem - $P$. Derfor kan vi anvende formlen for linjens ligning, der kræver en normalvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

og et punkt på linjen $P(x_0, y_0)$. Dette giver ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; -1.41(x - 3.41) - 1.41(y - 2.41) = 0$$

for tangenten for cirklen i punktet $P$.

# Skæringer mellem linje og cirkel

Skal vi finde skæringen mellem en linje og en cirkel, så er fremgangsmåden ikke overraskende meget lig metoden til at finde skæringer mellem linjer. Vi ser på et eksempel.

**Eksempel 3.1.** Lad os igen betragte cirklen med ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 + 8y + 11 = 0.$$

Vi skal bestemme de to punkter, hvor linjen $l$ med ligningen

$$y = -x - 2$$

skærer cirklen. Derfor indsætter vi udtrykket for $y$ fra linjens ligning på $y$'s plads i cirklens ligning og får:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 8y + 11 = 0 \;&\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + (-x-2)^2 + 8(-x-2) + 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 2x^2 - 8x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Vi løser denne andengradsligning med diskriminantformlen for får

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 \pm \sqrt{64-8}}{4} \\ &= 2 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Vi indsætter nu dette i formlen for $y$ for at få $y$-værdierne for skæringerne og får

$$y = -(2 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}) - 2 = -4 \mp \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

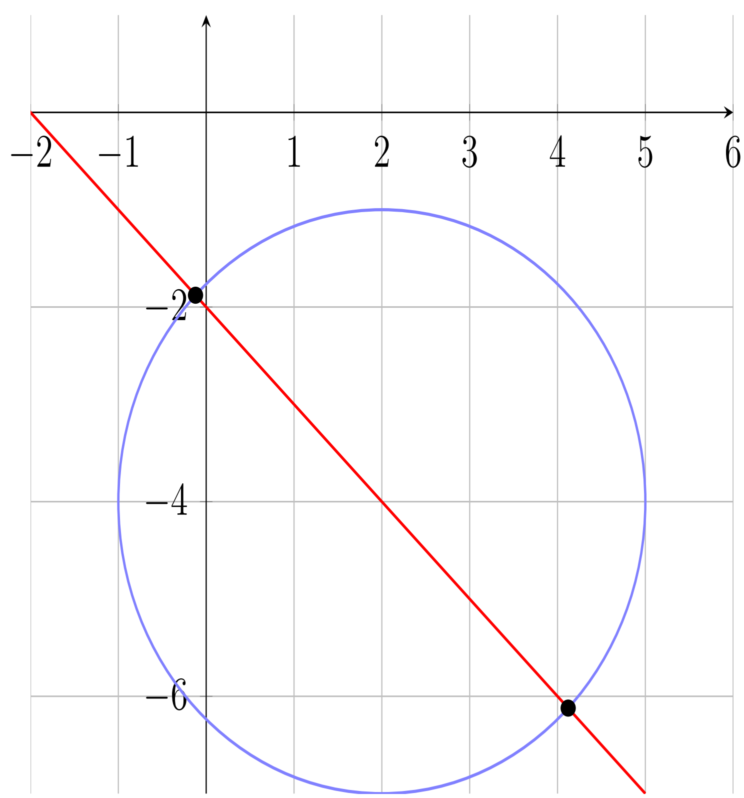
De to skæringspunkter er derfor

$$(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, -4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}) \approx (4.1213, -6.1213)$$

og

$$(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, -4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}) \approx (-0.1213, -1.8787)$$

Vi kan se linjen $l$ og cirklen på Fig. 1.




Figur 1: Skæringer mellem cirkel og linje

Vi kan se, at skæringen mellem cirklen og linjen er fundet korrekt.

# Opgave 1

Følgende er ligninger for cirkler. Brug kvadratkomplettering til at bestemme centrum og radius for cirklerne. Undersøg i Geogebra, om det er den korrekte cirkel, du har bestemt.

1) $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$
2) $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$
3) $x^2 + 6x + y^2 + 12y + 29 = 0$
4) $x^2 - 8x + y^2 + 10y + 5 = 0$

# Opgave 2

i) En cirkel har centrum i $(0, 0)$. Punktet $P(0.42, 0.91)$ ligger på cirklen. Bestem ligningen for tangenten til cirklen i punktet $P$. Undersøg i Geogebra, om du har fundet den korrekte ligning.

ii) En cirkel har centrum i $(2, -3)$. Punktet $P(1.37, -4.9)$ ligger på cirklen. Bestem ligningen for tangenten til cirklen i punktet $P$. Undersøg i Geogebra, om du har fundet den korrekte ligning.

iii) En cirkel har centrum i $(-4, 4)$. Punktet $(0, 0)$ ligger på cirklen. Bestem ligningen for tangenten til cirklen i punktet $P$. Undersøg i Geogebra, om du har fundet den korrekte ligning.

# Opgave 3

i) En cirkel har centrum i $(1, 1)$ og radius 2 Bestem skæringen mellem denne cirlen og linjen med ligningen $y = x$.

ii) En cirkel har centrum i $(0, 0)$ og radius 5 Bestem skæringen mellem denne cirlen og linjen med ligningen $y = 2x - 1$.

# Opgave 4

En linje har normalvektor $(1, 2)$ og skærer gennem punktet $(1, 1)$. En cirkel har centrum i $(1, 1)$ og radius 4. Bestem skæringen mellem linjen og cirklen og bestem derefter ligningen for tangenterne til cirklen i skæringspunkterne.