

Den jævne cirkelbevægelse

Den jævne cirkelbevægelse

Vi kan parametrisere en cirkel ved hjælp af de trigonometriske funktioner \cos og \sin .

Definition 1.1 (Jævn cirkelbevægelse). *Den jævne cirkelbevægelse* defineres som partiklen, hvis stedfunktion er vektorfunktionen \vec{r} givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Vi vil gerne vise, at hastigheden af partiklen er konstant, og at partiklens bane udgør en cirkel med radius r .

Sætning 1.2. *Den jævne cirkelbevægelse beskrevet ved vektorfunktionen*

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

har konstant hastighed ωr og banekurven for partiklen udgør en cirkel med radius r og centrum i $(0, 0)$.

Bevis. Vi betragter først hastighedsfunktionen for \vec{r} .

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Vi bestemmer nu farten $|\vec{v}|$.

$$\begin{aligned} |\vec{v}(t)| &= \left| \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{(-r\omega \sin(\omega t))^2 + (r\omega \cos(\omega t))^2} \\ &= \sqrt{r^2\omega^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))} \\ &= r\omega \sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} \\ &= \omega r, \end{aligned}$$

hvor den sidste lighed følger af idiotformlen

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Vi definerede en cirkel som alle punkter, der har afstand r fra centrum. Vi undersøger derfor længden af stedfunktionen \vec{r} , da dette må tilsvare afstanden fra $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} |\vec{r}(t)| &= \left| \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{(r \cos(\omega t))^2 + (r \sin(\omega t))^2} \\ &= \sqrt{r^2(\cos(\omega t)^2 + \sin(\omega t)^2)} \\ &= r \sqrt{\cos(\omega t)^2 + \sin(\omega t)^2} \\ &= r, \end{aligned}$$

hvor vi igen udnytter idiotformlen. Da stedvektoren har konstant afstand r fra origo, er kontinuert og har konstant fart må banekurven for \vec{r} udgøre en cirkel med radius r . ■

Opgave 1

Lad en jævn cirkelbevægelse være givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(\pi t) \\ 2 \sin(\pi t) \end{pmatrix}.$$

- i) Bestem $r(0)$ og $r(1)$.
- ii) Bestem de værdier for t , så

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 2

Lad en jævn cirkelbevægelse være givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(\omega t) \\ 2 \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

- i) Det oplyses, at $P_0(1, 0)$, $P_1(1, 0)$ og $P_2(-1, 0)$. Bestem ud fra dette vinkelhastigheden ω , så $\omega \leq 2\pi$.
- ii) Hvis det oplyses, at omløbstiden er givet ved T , hvordan findes vinkelhastigheden ω så?

Opgave 3

- i) Vis, at hastighedsvektoren for den jævne cirkelbevægelse er parallel med stedvektoren \vec{r} .
- ii) Vis, at accelerationsvektoren for den jævne cirkelbevægelse peger i modsat retning af \vec{r} .