Den jævne cirkelbevægelse

Den jævne cirkelbevægelse

Vi kan parametrisere en cirkel ved hjælp af de trigonometriske funktioner cos og sin.

Definition 1.1 (Jævn cirkelbevægelse)**.** *Den jævne cirkelbevægelse* defineres som partiklen, hvis stedfunktion er vektorfunktionen $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Vi vil gerne vise, at hastigheden af partiklen er konstant, og at partiklens bane udgør en cirkel med radius r.

Sætning 1.2. *Den jævne cirkelbevægelse beskrevet ved vektorfunktionen*

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

har konstant hastighed ωr og banekurven for partiklen udgør en cirkel med radius r og centrum i $(0, 0)$.

Bevis. Vi betragter først hastighedsfunktionen for $\vec{r}$.

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Vi bestemmer nu farten $|\vec{v}|$.

$$\begin{aligned} |\vec{v}(t)| &= \left| \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{(-r\omega\sin(\omega t))^2 + (r\omega\cos(\omega t))^2} \\ &= \sqrt{r^2\omega^2(\sin(\omega t)^2 + \cos(\omega t)^2)} \\ &= r\omega\sqrt{\sin(\omega t)^2 + \cos(\omega t)^2} \\ &= \omega r, \end{aligned}$$

hvor den sidste lighed følger af idiotformlen

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

Vi definerede en cirkel som alle punkter, der har afstand r fra centrum. Vi undersøger derfor længden af stedfunktionen $\vec{r}$, da dette må tilsvare afstanden fra $(0,0)$.

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}(t)| &= \left| \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{(r\cos(\omega t))^2 + (r\sin(\omega t))^2} \\
&= \sqrt{r^2(\cos(\omega t)^2 + \sin(\omega t)^2)} \\
&= r\sqrt{\cos(\omega t)^2 + \sin(\omega t)^2} \\
&= r,
\end{aligned}
$$

hvor vi igen udnytter idiotformlen. Da stedvektoren har konstant afstand r fra origo, er kontinuert og har konstant fart må banekurven for $\vec{r}$ udgøre en cirkel med radius r. ■

Opgave 1

Lad en jævn cirkelbevægelse være givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(\pi t) \\ 2\sin(\pi t) \end{pmatrix}.$$

i) Bestem $r(0)$ og $r(1)$.

ii) Bestem de værdier for t, så

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 2

Lad en jævn cirkelbevægelse være givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(\omega t) \\ 2\sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

i) Det oplyses, at $P_0(1,0)$, $P_1(1,0)$ og $P_2(-1,0)$. Bestem ud fra dette vinkelhastigheden ω, så $\omega \leq 2\pi$.

ii) Hvis det oplyses, at omløbstiden er givet ved T, hvordan findes vinkelhastigheden ω så?

Opgave 3

i) Vis, at hastighedsvektoren for den jævne cirkelbevægelse er parallel med stedvektoren $\vec{r}$.

ii) Vis, at accelerationsvektoren for den jævne cirkelbevægelse peger i modsat retning af $\vec{r}$.