Prikprodukter

Prikprodukt

Vi vil ikke definere nogen måde at gange vektorer sammen. Vi vil i stedet definere det såkaldte prikprodukt. Dette kan blandt andet bruges til at bestemme vinklen mellem to vektorer.

Definition 1.1. Lad $\vec{v}$ og $\vec{w}$ være defineret som

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \text{ og } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Så defineres *prikproduktet* eller *skalarproduktet* mellem $\vec{v}$ og $\vec{w}$ som

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

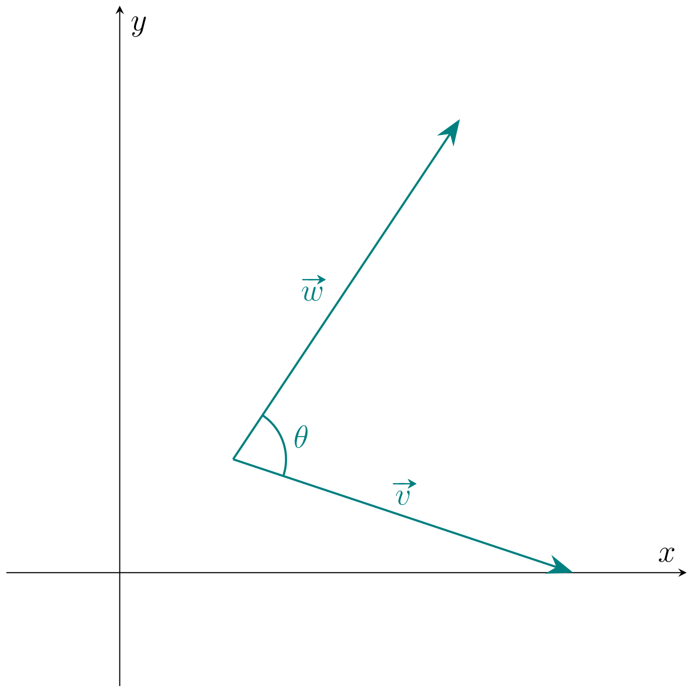
Dette skrives også til tider $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Eksempel 1.2. Lad $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og lad $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Så kan vi bestemme prikproduktet mellem $\vec{v}$ og $\vec{w}$ som

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = 6.$$

Vinkler mellem vektorer

Prikproduktet relaterer sig til vinklen mellem vektorer. Vi skal senere se, hvordan vi kan bestemme vinklen mellem to vektorer. Vinklen mellem to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ noteres som $\angle(\vec{v}, \vec{w})$. På Figur 1 er vinklen mellem to vektorer illustreret



Figur 1: Vinkel mellem to vektorer

Hvis vinklen mellem to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er 90°, altså at $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 90°$, så siger vi, at vektorerne er vinkelrette eller *orthogonale*. Vi skriver da $\vec{w} \perp \vec{v}$.

Sætning 2.1. *To vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er orthogonale hvis og kun hvis $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.*

Vi vil senere se mere præcist hvordan sammenhængen mellem vinklen mellem vektorer og prikproduktet er.

Eksempel 2.2. Vi vil afgøre, om $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er orthogonale. Vi bestemmer derfor prikproduktet

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0.$$

Derfor ved vi, at vinklen mellem de to vektorer er 0°, og at de derfor er orthogonale eller vinkelrette.

Opgave 1

i) Bestem prikproduktet mellem følgende vektorer

1) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-3\\14\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}0.5\\-12\end{pmatrix}$

Opgave 2

Afgør hvilke af følgende par af vektorer, der er orthogonale

1) $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$

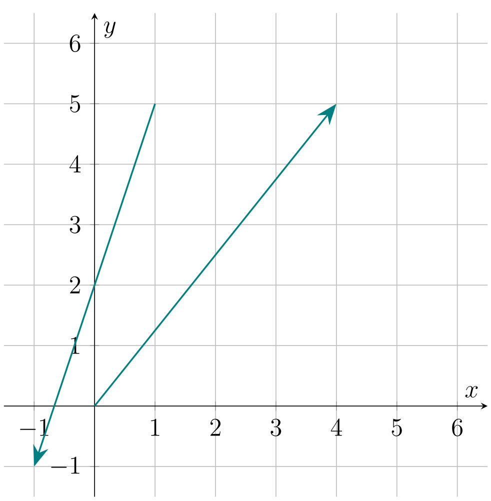
2) $\begin{pmatrix}4\\11\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-12\\3\end{pmatrix}$

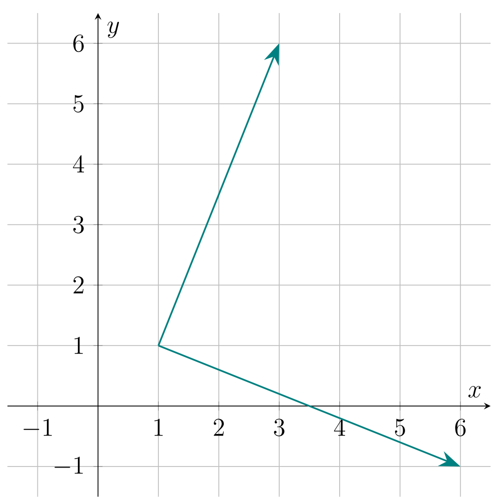
3) $\begin{pmatrix}-0.5\\3\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-8\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}16\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Opgave 3

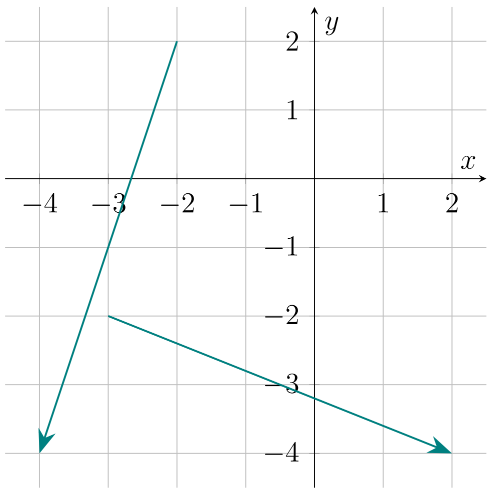
Bestem prikproduktet mellem følgende vektorer.

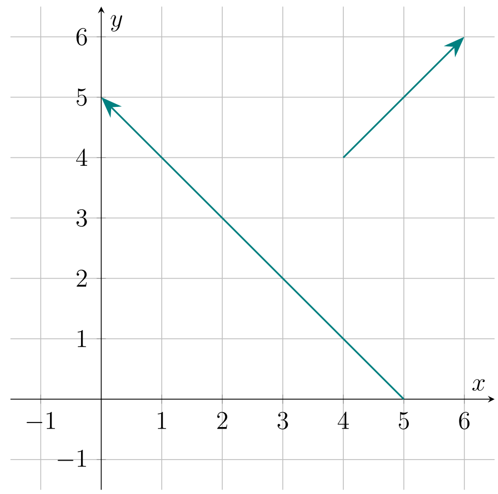




Opgave 4

Afgør hvilke af følgende par af vektorer, der er orthogonale





Opgave 5

Fire punkter er givet ved $A(2,2)$, $B(5,4)$, $C(-2,7)$ og $D(-7,-3)$.

i) Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

ii) Afgør om $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{DB}$ er orthogonale

Opgave 6

To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x^2 - 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

i) Bestem x, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er orthogonale.