Regnearternes hierarki og brøker

Vi starter med at huske os selv på regnearternes hierarki også kaldet operatorpræcedens, der fortæller os i hvilken rækkefølge, vi skal anvende operatorerne i et givent regnestykke. Altså i hvilken rækkefølge, vi skal lægge sammen, gange, dividere, tage potenser osv.

Definition 1.1 (Regnearternes hierarki)**.** I en udregning anvender vi operatorerne i følgende rækkefølge:

i) Parentes. Betegnes med (). (Alt, der står i parentes udregnes først efter rækkefølgen bestemt for de resterende operatorer).

ii) Fakultet. Betegnes med !. Vi husker på, at for $n \in \mathbb{N}$ er $n!$ defineret som

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0, \\ n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 & \text{for } n > 0. \end{cases}$$

iii) Potenser og rødder. Et tal a i n'te potens og n'te rod betegnes med henholdsvist a^n og $\sqrt[n]{a}$.

iv) Multiplikation og division. Betegnes med henholdsvist $\cdot$ og $/$.

v) Addition og subtraktion. Betegnes med henholdsvist $+$ og $-$.

Eksempel 1.2. Lad os betragte regnestykket

$$7 + 10 - \underbrace{(5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 3!^2)}_{\text{Parentes 1}} + \underbrace{(7-9)}_{\text{Parentes 2}} \cdot 4. \tag{1.1}$$

Vi starter med at udregne Parentes 1. Vi følger regnearternes hierarki:

$$\begin{aligned} (5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 3!^2) &\overset{\text{ii)}}{=} (5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 6^2) \\ &\overset{\text{iii)}}{=} (5 - 2 \cdot \frac{3}{6} + 36) \\ &\overset{\text{iv)}}{=} (5 - 1 + 36) \\ &\overset{\text{v)}}{=} (40). \end{aligned}$$

Og Parentes 2 tilsvarende:

$$(7 - 9) \overset{\text{v)}}{=} (-2).$$

Disse indsættes nu i (1.1), og vi anvender igen regnearternes hierarki til at udregne:

$$7 + 10 + \underbrace{40}_{\text{Par. 1}} + \underbrace{(-2)}_{\text{Par. 2}} \cdot 4 \overset{\text{iv)}}{=} 7 + 10 + 40 - 8$$
$$\overset{\text{v)}}{=} 39.$$

Brøkregneregler

Vi skal i dag arbejde med brøkregneregler.

i) Addition og subtraktion af brøker. For to brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er summen og differensen givet ved

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}.$$

ii) Multiplikation af brøker. Produktet mellem $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er givet ved

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Specielt er produktet mellem en brøk $\frac{a}{b}$ og et tal c givet ved

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}.$$

iii) Division af brøker. Forholdet mellem to brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er givet ved

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

(Vi ganger med den omvendte brøk.) Specielt er en brøk $\frac{a}{b}$ divideret med et tal c givet ved

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc},$$

og et tal c divideret med en brøk $\frac{a}{b}$ givet ved

$$\frac{c}{\frac{a}{b}} = \frac{cb}{a}.$$

iv) Brøker og potenser/rødder. En brøk $\frac{a}{b}$ opløftet i et tal c er givet ved

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}.$$

n'te roden af en brøk $\frac{a}{b}$ er givet ved

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Eksempel 2.1. Lad os se på et eksempel, hvor vi anvender nogle af disse regler:

$$\frac{\frac{2}{5}+\frac{5}{7}}{\frac{10}{3}} \overset{\text{i)}}{=} \frac{\frac{14+25}{35}}{\frac{10}{3}} = \frac{\frac{39}{35}}{\frac{10}{3}} \overset{\text{iii)}}{=} \frac{39\cdot 3}{35\cdot 10} = \frac{117}{350}.$$

Opgave 1

Udregn følgende.

1) $4(2+7)$

2) $\dfrac{6}{3}\cdot 7 + 3\dfrac{10}{2}$

3) $2!^3$

4) $(2+4)^2$

5) $\dfrac{12}{4}+9$

6) $-5^2+9-\dfrac{14}{7}\cdot(-2)$

7) $(-5)^3+\dfrac{24}{2+2}$

8) $(1+3!)^2$

9) $(2+3)^3$

10) $\sqrt{3^2+4^2}$

11) $\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}$

12) $\dfrac{(1+1+1)!+6^2+(2^2-6\cdot(-2))}{\sqrt{4^2+20}}$

Opgave 2

i) Udregn $(-2)(-3)$

ii) Udregn $(-5)2$.

iii) Udregn $(-3)(-0.5)(-6)(-1)$

iv) Udregn $(3)(-3)(-3)(-1)$

v) For hvilke heltal $n>0$ gælder det, at $(-2)^n$ bliver et positivt tal?

vi) For hvilke heltal $n>0$ gælder det, at $(-2)^n$ bliver et negativt tal?

Opgave 3

Forkort følgende udtryk så meget som muligt.

1) $(a+a)b$ 2) $\sqrt{a^2}$
3) $(a-b)a-a^2+ab+c$ 4) $(\sqrt[7]{a+b})^7$

Opgave 4

Løs følgende ligninger.

1) $2x=4$ 2) $(-5+2)x+3!x=2x$
3) $5x+2x=21$ 4) $\sqrt{x+2}=2$
5) $(x-4)!=24$ 6) $2^x=8$
7) $3+4\cdot 2x=11x$ 8) $x^2=2x$
9) $\dfrac{x^2}{3}=x$ 10) $\dfrac{x+x}{2}=1$

Opgave 5

Udregn følgende brøker (forkort så meget som muligt). Brug Maple til at tjekke jeres svar

1) $\dfrac{6}{7}+\dfrac{3}{1}$ 2) $\dfrac{7}{22}+\dfrac{9}{10}$
3) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{2}$ 4) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}$
5) $2\dfrac{2}{3}+\dfrac{7+4}{2}$ 6) $\dfrac{4}{\frac{5}{7}}$
7) $\dfrac{\frac{2}{3}}{6}-2$ 8) $\dfrac{-7+\frac{2}{6}}{8}+\dfrac{9}{5}$
9) $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}$ 10) $\dfrac{\frac{10}{3}-\frac{2}{4}}{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}$
11) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{7}{10}}{\frac{2}{5}+\frac{11}{3}}-\dfrac{\frac{22}{3}+\frac{-23}{6}}{\frac{1}{2}}$ 12) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}+\left(\dfrac{3}{2+4}\right)^2$
13) $\sqrt{\dfrac{\frac{100}{36}}{\frac{25}{49}}}$ 14) $\left(\dfrac{\sqrt{\frac{5}{7}}}{\sqrt{\frac{2}{9}}}\right)^2+\sqrt[3]{\dfrac{\left(\frac{2+5}{3+11}\right)^3}{\left(\frac{5}{7-6}\right)^3}}$

Opgave 6

Forkort følgende brøker så meget som muligt.

1) $\dfrac{ab}{a}$

2) $\dfrac{a+b}{b} + \dfrac{a-c}{a}$

3) $\dfrac{(a+b)b - ab}{b}$

4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - \dfrac{a^3}{b^3}$

Opgave 7

Løs følgende ligninger.

1) $\dfrac{x}{9} = \dfrac{4}{x}$

2) $\dfrac{x}{4 + \frac{2}{5}} = 2$

3) $\sqrt{\dfrac{x}{4}} = \dfrac{\frac{2}{5} + \frac{16}{10}}{\frac{1}{2}}$

4) $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} + \dfrac{x + \frac{4}{2}x}{2} = \dfrac{7}{\frac{1}{2}}$