Logaritmer

Titalslogaritmen

I forbindelse med behandlingen af eksponentiel vækst får vi brug for logaritmebegrebet. Vi tager udgangspunkt i funktionen $f(x) = 10^x$. Antag, at vi kender $f(x)$, men ikke x. Vi vil gerne have en funktion, der - når vi stopper $f(x)$ ind - giver x. Dette giver anledning til følgende definition.

Definition 1.1. Logaritmefunktionen $\log_{10}(x)$ er den entydige funktion, der opfylder, at

$$\log_{10}(10^x) = x,$$

og

$$10^{\log_{10}(x)} = x,$$

for $x > 0$ Vi vil ofte skrive $\log_{10}(x)$ som $\log(x)$, og den kaldes for titalslogaritmen eller logaritmefunktionen med grundtal (eller base) 10.

Sætning 1.2 (Logaritmeregneregler)**.** *For $a, b > 0$ har vi*

i) $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$,

ii) $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$,

iii) $\log(a^x) = x\log(a)$.

Bevis. Vi beviser først *i*). Lad derfor $a, b > 0$, og vi får

$$\begin{aligned}\log(ab) &= \log(10^{\log(a)}10^{\log(b)})\\ &= \log(10^{\log(a)+\log(b)})\\ &= \log(a) + \log(b).\end{aligned}$$

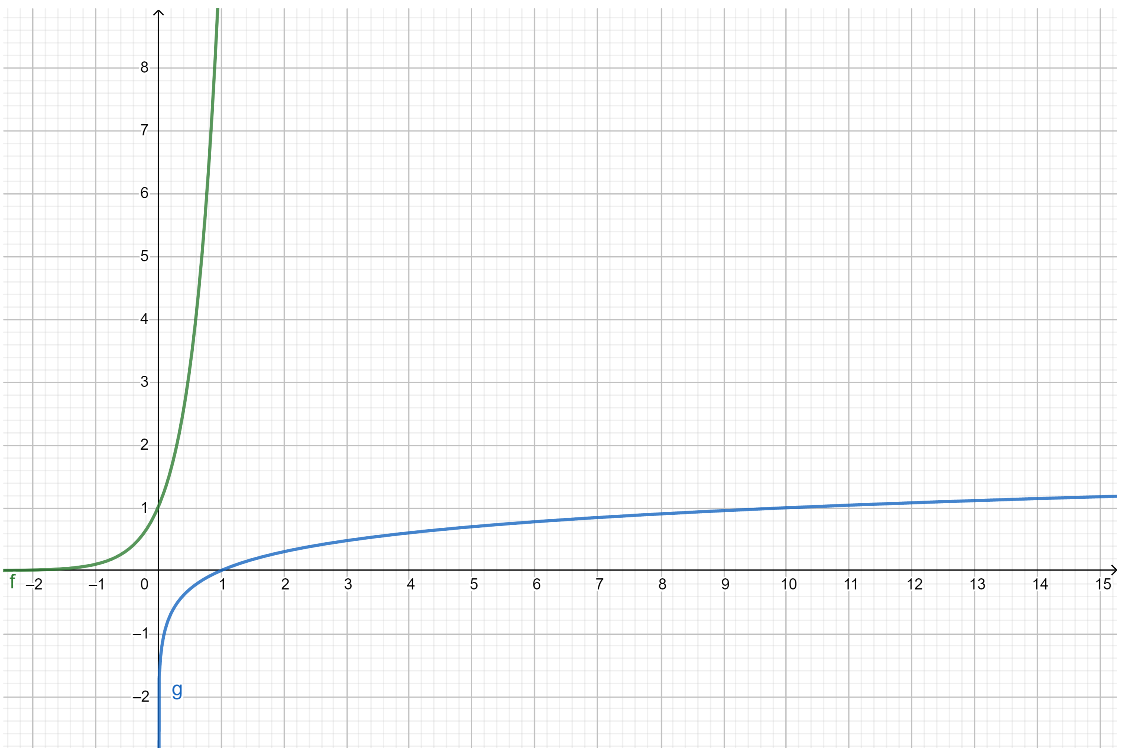
Vi beviser nu *ii*). Vi betragter derfor

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log\left(\frac{10^{\log(a)}}{10\log(b)}\right)\\ &= \log\left(10^{\log(a)-\log(b)}\right)\\ &= \log(a) - \log(b).\end{aligned}$$

Til sidst viser vi *iii*):

$$\begin{aligned}\log(a^x) &= \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)\right) \\ &= \log\left(10^{x\log(a)}\right) \\ &= x\log(a)\end{aligned}$$

■



Figur 1: Plot af funktionerne $f(x) = 10^x$ og $g(x) = \log(x)$.

Eksempel 1.3. pH-værdien af en opløsning er defineret som

$$pH = -\log(a_{H^+}),$$

hvor a_{H^+} betegner hydrogenionaktiviteten. a_{H^+} er ca. stofmængdekoncentrationen af H^+-ioner i opløsningen. Hvis vi antager, at en opløsning har en stofmængdekoncentration på $10^{-3} mol/L$ h^+-ioner. Så vil pH-værdien af opløsningen være (ca.) $-\log(10^{-3}) = 3$.

Den naturlige logaritme

Definition 1.4. Den naturlige logaritme er den entydige funktion ln, der opfylder, at

$$\ln(e^x) = x,$$

og

$$e^{\ln(x)} = x,$$

hvor e er Euler's tal. ($e \approx 2.7182$)

Funktionen e^x kaldes for den naturlige eksponentialfunktion, og vi vil senere beskrive den nærmere

Opgave 1

Løs følgende ligninger

1) $\log(x) = 1$	2) $\log(x) = 2.5$
3) $\log(2x) = 4$	4) $\log(3x + 10) = 3$
5) $\log(x^2) = 10$	6) $\log(5x) = 5$

Opgave 2

Bestem følgende

1) $\log(\sqrt{10})$	2) $\log(\sqrt[3]{100})$
3) $\log(\sqrt[n]{1000})$	4) $\log(2) + \log(50)$
5) $\log(200) - \log(20)$	6) $\log(2 \cdot 10^5)$

Opgave 3

i) Hvad er pH-værdien for en opløsning med en H^+-koncentration på 10^{-10}?

ii) Hvad er H^+-koncentrationen for en opløsning med pH-værdi $7,5$?

iii) En opløsning har volumen $500L$ og indeholder 1 mol H^+. Hvad er pH-værdien af opløsningen?

Opgave 4

i) Bevis, at $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

ii) Bevis, at $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

iii) Bevis, at $\ln(a^x) = x\ln(a)$.