Bestemte integraler

Vi starter med en variant af analysens fundamentalsætning, der relaterer arealer under grafer og differentiation.

Sætning 1.1. *For en kontinuert, ikke-negativ funktion f er arealet afgrænset af x-aksen, to punkter a og b og grafen for f givet ved*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Bevis. Vi betegner arealet mellem f, på intervallet $[a, x]$ og x-aksen med $A_a(x)$. For et lille h har vi så, at

$$A_a(x+h) - A_a(x) = f(x) \cdot h + O(h),$$

hvor $O(h)$ er en lille fejl, der afhænger af størrelsen på h. Vi skal se, at denne fejl går mod 0, når h er kontinuert. Vi isolerer $f(x)$ i dette udtryk og får

$$f(x) = \frac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h} - \frac{O(h)}{h}. \tag{1.1}$$

Vi kan vurdere $O(h)$ opadtil ved $O(h) \leq h \cdot f(x + h_{\max}) - h \cdot f(x + h_{\min})$, hvor $h_{\max}$ og $h_{\min}$ er de punkter på intervallet $[x, x+h]$ hvor f tager sit maksimum hhv. minimum. Vi vil gerne lade h gå mod 0 i udtrykket (1.1). Derfor ser vi på, hvad der sker med $\frac{O(h)}{h}$ for $h \to 0$. Vi bruger vurderingen

$$\begin{aligned}\frac{O(h)}{h} &\leq \frac{h \cdot f(x + h_{\max}) - h \cdot f(x + h_{\min})}{h} \\ &= f(x + h_{\max}) - f(x + h_{\min}).\end{aligned}$$

Når vi lader $h \to 0$, så går $f(x + h_{\max}) - f(x + h_{\min})$ klart mod 0, og derfor så må $\frac{O(h)}{h}$ gå mod 0, da $O(h) \geq 0$. Derfor har vi, at

$$f(x) = \frac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h} - \frac{O(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} f(x) = A'_a(x)$$

Vi har derfor, at arealfunktionen $A_a(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$. Vi bruger den i definitionen af det bestemte integral.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_a(b) - A_a(a) = A_a(b),$$

hvilket afslutter vores bevis. ■

Opgave 1

Gennemgå bevis for sætning i fællesskab.