STX

STUDENTEREKSAMEN

BØRNE- OG UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR UNDERVISNING OG KVALITET

MATEMATIK A

Fredag den 12. august 2022
Kl. 9.00-14.00

stx222-MAT/A-12082022

Opgavesættet er delt i to dele:

Delprøve 1: 2 timer kun med den centralt udmeldte formelsamling, herunder vedlagte indstiksark til formelsamlingen.

Delprøve 2: 3 timer med alle tilladte hjælpemidler.

Delprøve 1 består af opgave 1-8.
Til delprøve 1 hører et bilag.

Delprøve 2 består af opgave 9-13.
Til delprøve 2 hører et digitalt bilag.

Pointtallet er angivet ud for hvert spørgsmål.

Der gives i alt 250 point.

En del af spørgsmålene er knyttet til mindstekravene.
Disse spørgsmål er markeret med grøn farve.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.
I bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger *eller* matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.

- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.

- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke hører til standardviden, skal der redegøres for betydningen.

- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.
  Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve 1 kl. 9.00-11.00

Opgave 1 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 4x .$$

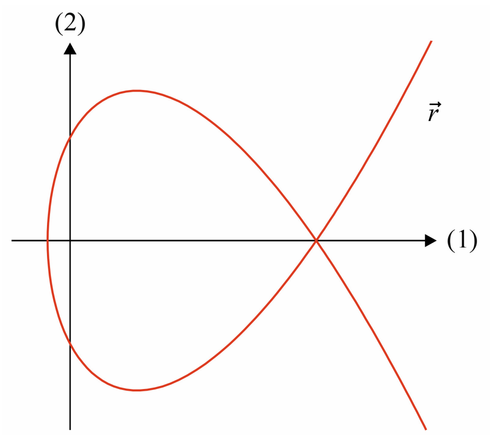
(10 point) a) Bestem $f(3,1)$.

Det oplyses, at f har ét stationært punkt P_0 .

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til P_0 .

Opgave 2 På figuren ses banekurven for vektor-funktionen $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ \frac{1}{3}t^3 - 4t \end{pmatrix} , \quad -4 \le t \le 4 .$$



(10 point) a) Bestem hastighedsvektoren $\vec{v}(t)$.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til det punkt, hvor banekurven har lodret tangent.

Opgave 3 a) Løs ligningen

(10 point) $(2x-6) \cdot (x^2 + 7x + 10) = 0$.

Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 \cdot \ln(x) .$$

(10 point) a) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen

$$y' = 3 \cdot \frac{y}{x} + x^2 .$$

Opgave 5 Der er givet en parabel med ligningen

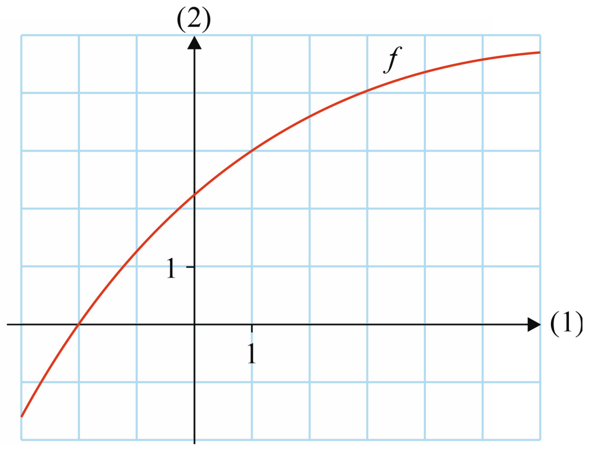
Bilag vedlagt

$$y^2 = 16x .$$

(10 point) a) Tegn parablen. Brug bilaget.

Opgave 6 På figuren ses grafen for en funktion f, som er defineret i intervallet $[-3; 6]$.

Bilag vedlagt



(10 point) a) Benyt bilaget til at bestemme

$$f^{-1}(3).$$

Opgave 7 En funktion f er løsning til differentialligningen

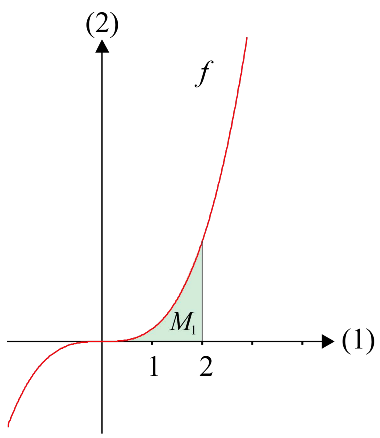
$$y' = 0{,}01 \cdot y \cdot (20 - y).$$

Grafen for f går gennem punktet $P(0,10)$.

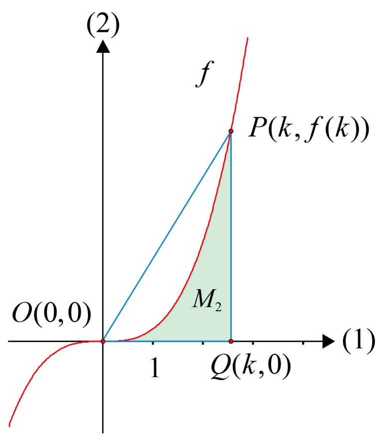
(10 point) a) Bestem linjeelementet i P.

(10 point) b) Bestem en forskrift for f.

Opgave 8



Figur 1



Figur 2

En funktion f er givet ved $f(x) = x^3$. Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i intervallet $0 \le x \le 2$ et område M_1, se figur 1.

(10 point) a) Bestem arealet af området M_1.

Figur 2 viser grafen for f og en trekant OPQ. Koordinaterne for punkterne O, P og Q fremgår af figuren.
Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i intervallet $0 \le x \le k$ et område M_2.

(10 point) b) Gør rede for, at arealet af området M_2 er halvt så stort som arealet af trekant OPQ.

Besvarelsen af delprøve 1 afleveres kl. 11.00

Delprøve 2 kl. 9.00-14.00

Opgave 9 En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^3-\mathrm{e}^t+2 \\ -t^3-\mathrm{e}^{-t}+4 \end{pmatrix}\ , \qquad -2\le t\le 2\ .$$

(10 point) a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

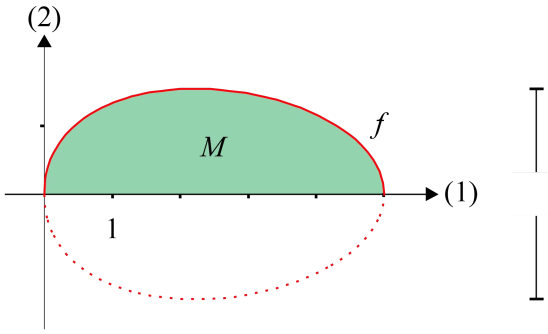
(10 point) b) Bestem t-værdien for det punkt, hvor parameterkurven for $\vec{s}$ skærer andenaksen.

Opgave 10 En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=1{,}2\cdot\left(\sqrt{5}\cdot x-x^{1{,}5}\right)^{0{,}5}\ ,\ \text{hvor}\ 0\le x\le 5\,.$$

(10 point) a) Løs ligningen $f(x)=0$.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen et område M.



I en model kan formen af et æg beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° omkring førsteaksen i et koordinatsystem med enheden cm på begge akser.

(10 point) b) Benyt modellen til at bestemme rumfanget af ægget.

(10 point) c) Benyt modellen til at bestemme bredden b af ægget.

Opgave 11 Tabellen viser vingelængden, målt i tiendedele millimeter, for 100 stuefluer.

Vingelængde	36	41		50	55

Alle tabellens 100 data findes i den vedhæftede fil: vingelængde.xlsx

(10 point) a) Gør rede for, at vingelængderne med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X.

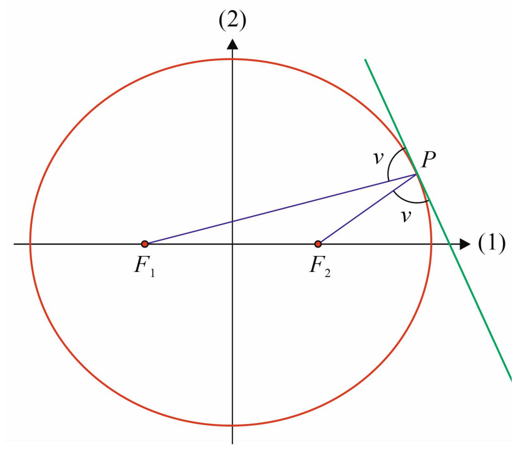
(10 point) b) Bestem $P(X\ge 52)$.

(10 point) c) Hvilke af de 100 vingelængder er ikke normale udfald?

Kilde: Sokal, R.R., and P.E.Hunter. 1955

Opgave 12

Figur 1



Figur 2

Loop, en form for Pool, spilles på et ellipseformet bord (se figur 1).

I en model er det grønne spilområde afgrænset af en ellipse med centrum i (0, 0), se figur 2. Ellipsens storakse er 130 cm, og lilleaksen er 118 cm.

(10 point) a) Bestem en ligning på normalform for denne ellipse.

Punktet *P* på ellipsen har koordinaterne $\left(60, \dfrac{295}{13}\right)$.

(10 point) b) Bestem en ligning for tangenten til ellipsen i *P*.

En kugle afsendt fra brændpunktet F_1 reflekteres i tangenten til ellipsen i *P* og sendes tilbage til det andet brændpunkt F_2, hvor der er et hul i bordet (se figur 2).

(10 point) c) Bestem den spidse vinkel *v* mellem tangenten og linjen gennem *P* og brændpunktet F_2.

Billedkilde: homecrux.com

Opgave 13 Når en bestemt type brusetablet bliver opløst i vand, kan rumfanget *V*(t) af tabletten (målt i cm3) i en model beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dV}{dt} = -1{,}1 \cdot V^{\frac{2}{3}},$$

hvor t er tiden (målt i minutter), efter at tabletten er lagt ned i vandet. Det oplyses, at $V(0) = 0{,}44$.

Billedkilde: Colourbox

(10 point) a) Bestem en forskrift for *V*(t)

En anden brusetablet er lidt større. Udviklingen i rumfanget af den store tablet, når den er blevet lagt ned i vandet, kan beskrives ved samme model som ovenfor.
Den store tablet er opløst efter 2,3 minutter.

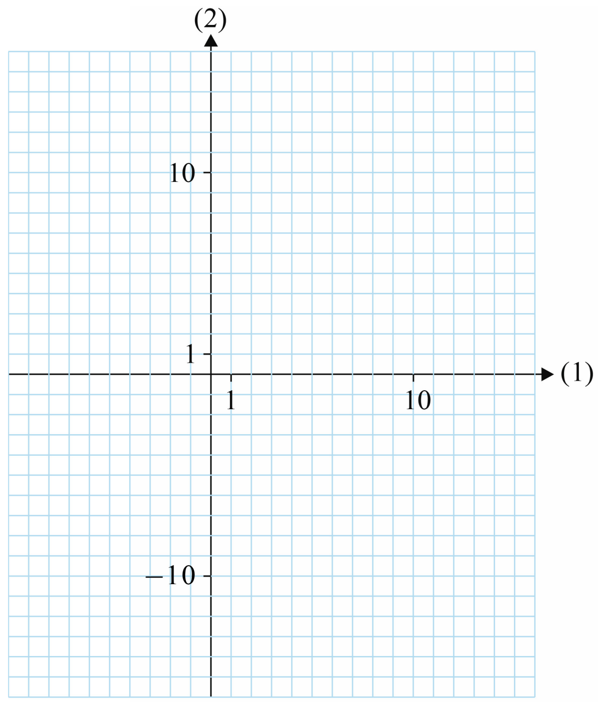
(10 point) b) Bestem rumfanget af den store tablet, inden den blev lagt ned i vandet.

BILAG stx matematik A august 2022

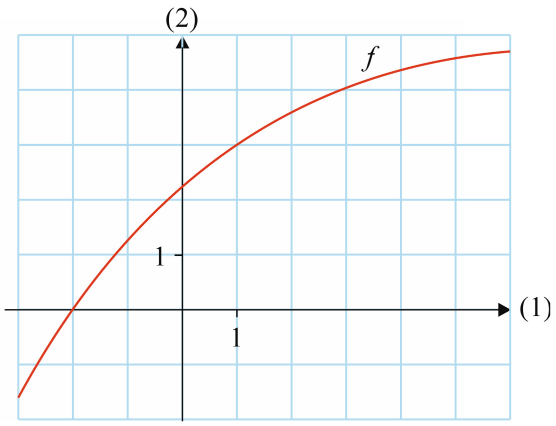
Bilaget indgår i opgavebesvarelsen

Skole		Hold	ID
Navn	Ark nr.	Antal ark i alt	Tilsynsførende

Opgave 5



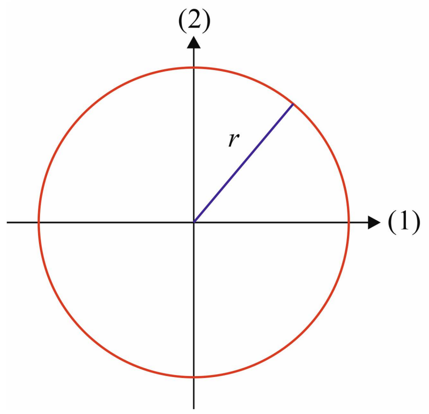
Opgave 6



Besvarelsen af delprøve 1 afleveres kl. 11.00

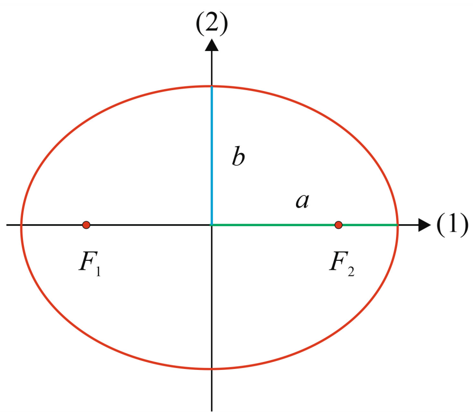
Indstiksark til formelsamlingen — stx matematik A august 2022

Den generelle andengradsligning i to variable	F(1)	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$



Cirkel

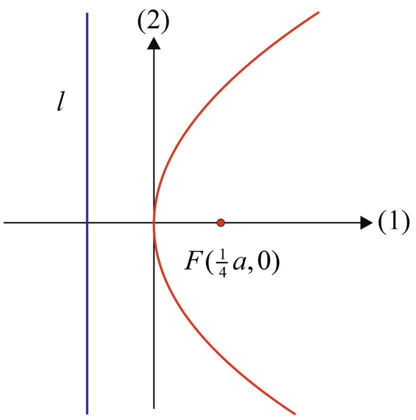
Ligning på normalform for cirkel med centrum $C(0,0)$ og radius r	F(2)	$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$



Ellipse

Areal A af ellipse med halvakser a og b	F(3)	$A = \pi \cdot a \cdot b$
Ligning på normalform for ellipse med centrum $C(0,0)$, den halve storakse a og den halve lilleakse b	F(4)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Koordinatsæt til brændpunkter for ellipse med centrum $C(0,0)$, den halve storakse a og den halve lilleakse b	F(5)	$F_1\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ og $F_2\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$
Ligning for tangenten i punktet $P(x_0, y_0)$ til ellipse med centrum $C(0,0)$, den halve storakse a og den halve lilleakse b	F(6)	$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1.$

Ligning på normalform for parabel med ledelinje $l:\ y=-\frac{1}{4a}$	F(7)	$y=a\cdot x^2$
Koordinatsæt til brændpunkt F for parabel med ledelinje $l:\ y=-\frac{1}{4a}$	F(8)	$F\left(0,\frac{1}{4a}\right)$



Parabel

Ligning på normalform for parabel med ledelinje $l:\ x=-\frac{1}{4}a$	F(9)	$y^2=a\cdot x$
Koordinatsæt til brændpunkt F for parabel med ledelinje $l:\ x=-\frac{1}{4}a$	F(10)	$F(\frac{1}{4}a,0)$
Ligning for tangenten til parablen med ligningen $y^2=a\cdot x$ i punktet $P(x_0,y_0)$	F(11)	$y\cdot y_0=\frac{1}{2}a\cdot(x+x_0)$