Opgaver med panserformlen

Panserformlen

Sætning 1.1 (Panserformlen)**.** *Lad* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *og* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *være kontinuerte funktioner. Så har differentialligningen*

$$y' + a(x)y = b(x)$$

den fuldstændige løsning

$$y(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)},$$

hvor A *er en stamfunktion til* a *og* $c \in \mathbb{R}$*.*

Eksempel 1.2. Vi betragter den lineære differentialligning af 1. orden

$$y' + 2xy = \frac{1}{2}x.$$

Her er $b(x) = \frac{1}{2}x$ og $a(x) = 2x$. Vi bestemmer først $A(x) = \int 2xdx = x^2$. Vi indsætter nu i panserformlen.

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x^2} \int \frac{1}{2}xe^{x^2}dx + ce^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}\frac{1}{4}e^{x^2} + ce^{-x^2} \\ &= \frac{1}{4} + ce^{-x^2}. \end{aligned}$$

Opgave 1

i) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' + x^3y = 0.$$

ii) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' = -\cos(x)y.$$

iii) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' + 2xy = 2x$$

iv) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' + 3y = e^x$$

v) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' + \cos(x)y = 3\cos(x).$$

vi) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' + 2xy = e^{-x^2}.$$

vii) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' - \cos(x)y = e^{\sin(x)}.$$

viii) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$y' + \frac{1}{x}y = \sin(x^2)$$

Opgave 2

i) Bestem den partikulære løsning til differentialligningen

$$y' + \frac{1}{x}y = \cos(2x^2 - 4),$$

der går gennem punktet $(\sqrt{2}, 1)$.