Harmoniske svingninger og trigonometriske funktioner

Harmoniske svingninger

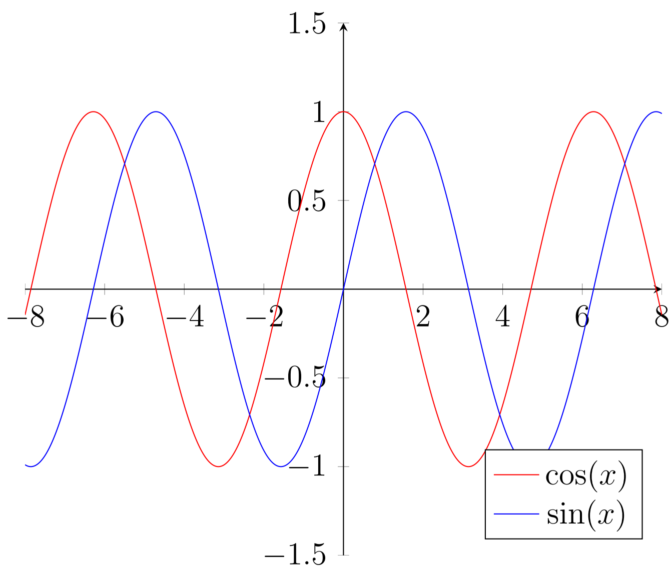
De trigonometriske funktioner $\cos(x)$ og $\sin(x)$ er periodiske funktioner, da

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$$

for alle heltal $k \in \mathbb{Z}$ og tilsvarende

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$$

for alle heltal k. Vi kan plotte $\cos(x)$ og $\sin(x)$, hvilket kan ses af Fig. 1



Figur 1: Grafer for $\cos(x)$ og $\sin(x)$.

Vi kan bruge trigonometriske funktioner til at modellere mange virkelige fænomener, da de er periodiske i natur. Vi kan eksempelvis bruge trigonometriske funktioner til at beskrive lyd og billedsignaler.

Da alle virkelige fænomener ikke har en periode på 2π, så vil vi gerne kunne forkorte eller forlænge perioden. Vi vil også gerne kunne forskyde perioden, og vi vil gerne kunne øge *amplituden*, så funktionen ikke kun går fra -1 til 1, men kan gå mellem større værdier. Desuden gælder der, at $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, så vi kan altid bruge sin til at beskrive cos og vice versa. Derfor giver vi følgende definition:

Definition 1.1 (Harmoniske svingninger)**.** En sammenhæng

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

kaldes for en harmonisk svingning som funktion af tiden t. Konstanten ω kaldes for vinkelhastigheden, konstanten φ kaldes for begyndelsesfasen og konstanten A kaldes for amplituden.

Opgave 1

I Geogebra tegn så funktionen

$$y = A \sin(\omega x + \varphi).$$

i) Hvordan ændrer det på grafen for sammenhængen at ændre på φ?

ii) Hvordan ændrer det på grafen at ændre på ω?

iii) Hvordan ændrer det på grafen at ændre på A?

Opgave 2

I Geogebra tegn så $\cos(x)$ og $\sin(x + k)$, og bestem k, så graferne er sammenfaldende. Argumentér ved brug af enhedscirklen for, at graferne er sammenfaldende i dette tilfælde.

Opgave 3

Vi kan ved en bestemt havn modellere vandstanden med den harmoniske svingning

$$f(t) = 1.2 \sin(0.524t) + 3.4,$$

hvor t er tiden målt i timer og $f(t)$ er vandstanden i meter.

i) Tegn grafen for f i Geogebra.

ii) På hvor mange timer er en periode? (Antallet af timer, før vandstanden er det samme igen)

iii) Hvornår er vandstanden højest? Hvad med lavest?

Opgave 4

For den harmoniske svingning

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

kaldes længden på en periode T, så $y(t) = y(t+T)$ for svingningstiden, og antallet af perioder per tidsenhed f kaldes for frekvensen.

i) Bestem et udtryk for svingningstiden T for $y(t)$.

ii) Bestem et udtryk for frekvensen f for $y(t)$.

Opgave 5

En simpel model for lydbølger er en enkelt harmonisk svinging

$$P(t) = A\sin(2\pi f t),$$

hvor f er frekvensen målt i svingninger pr sekund (Hz), tid t i sekunder, amplitude A og $P(t)$ er tryk målt i decibel.

i) Kammertonen er 440 Hz. Plot i geogebra en harmonisk svingning med amplitude 70 og frekvens 440 Hz. Hvad er svingningstiden i dette tilfælde?

ii) At gå en oktav op tilsvarer en fordobling af frekvensen, og at gå en oktav ned tilsvarer en halvering af frekvensen. Kammertonen er enstreget a: a^1. Vi betegner andre oktaver af a med

Oktav	A_2	A_1	A	a	a^1	a^2	a^3	a^4
Frekvens					440Hz			

hvor A_2 her er laveste oktav og a^4 her er højeste. Udfyld resten af skemaet.

iii) Tegn grafen for den harmoniske svingning en oktav over kammertonen og en oktav under kammertonen.