Facitliste

Opgave 1

Sætning 1.1. *Produktet mellem et lige tal og et ulige tal er et lige tal.*

Bevis. Lad n være et lige tal og lad y være et ulige tal. Det betyder, at vi kan skrive $n = 2m$ og $y = 2x + 1$ for andre heltal m, x. Hvis vi ganger n og y sammen, får vi

$$n \cdot y = (\underbrace{2m}_{=n}) \cdot (\underbrace{2x+1}_{=y}) = 4mx + 2m = 2 \cdot (\underbrace{2mx + m}_{\text{heltal}}).$$

Da $n \cdot y$ kan skrives som 2 gange et heltal, så er $n \cdot y$ et lige tal. ■

Opgave 2

Sætning 1.2. *n er lige hvis og kun hvis n^2 er lige.*

Bevis. Antag, at n er lige. Vi kan så skrive $n = 2m$ for et andet heltal m. Derfor kan vi skrive

$$n^2 = (2m)^2 = 2^2m^2 = 2 \cdot (2m^2).$$

Det betyder, at n^2 er et heltal, da det kan skrives som 2 gange et heltal. Antag, at et heltal n^2 er lige, og antag, at n er ulige. Vi kan derfor skrive $n = 2m + 1$ for et andet heltal m. Dette samler vi, og får

$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1,$$

men da $4m^2$ er lige, og $4m$ er lige, så må $n^2 = 4m^2 + 4m + 1$ være ulige. Det er i modstrid med antagelsen om, at n^2 er lige, altså må n også være lige. ■

Opgave 3

i) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

ii) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

iii) $\{\text{Rød}, \text{Hvid}, \text{Blå}, \text{Gul}\}$.

iv) $\emptyset$.

Opgave 4

Vi skal i denne opgave bruge, at betingelser i mængdebyggernotation opdeles af et logisk "og"også kaldet en konjunktion $\wedge$.

i) $\{a \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq a \leq 10 \wedge \text{der findes } m \in \mathbb{Z} \text{ så } a = 2m\}$.

ii) $\{a \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq a \leq 10 \wedge \text{der findes } m \in \mathbb{Z} \text{ så } a = 2m + 1\}$.

iii) $\left\{a \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \neq \frac{b}{c} \text{ for } b, c \in \mathbb{Z}\right\}$.

iv) Med mængdebygger-notation:

$$\{x, y \in \mathbb{Q} \, | y = 3x + 7 \wedge y = -4x + 2\}.$$

Uden mængebygger-notation: $\left\{\frac{-5}{7}\right\}$.

v) Med mængdebygger-notation:

$$\{x, y \in \mathbb{Q} \, | y = 5x - 2 \wedge y = 5x + 13\}.$$

Uden mængdebygger-notation: $\emptyset$.