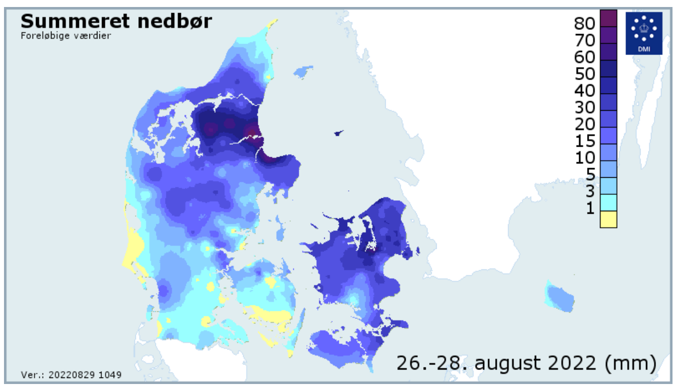
Niveaukurver og snitkurver

Niveaukurver

Det kan være en fordel at betragte en funktion af to variable som et landskab, hvor funktionsværdien $f(x, y)$ er højden af landskabet og x-koordinaten er breddegraden og y-koordinaten er længdegraden.

Eksempel 1.1. På Fig. 1 ses den summerede nedbørsmængde i Danmark fra d. 26.-28. august. Som funktion af bredde- og længdegraderne x og y kan vi bestemme nedbørsmængden $N(x, y)$.



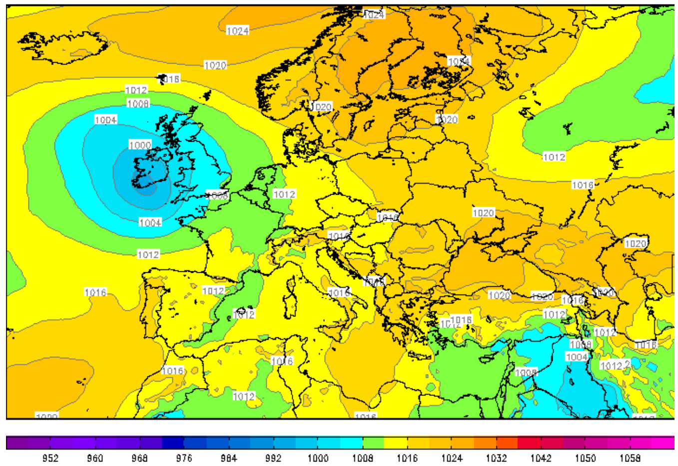
Figur 1: Summeret nedbør d. 26.-28. august

I stedet for at tegne en figur i 3d, så kan det være en fordel at tegne en figur i xy-planen, hvor kurver med bestemte funktionsværdier tegnes ind. Dette kan give et bedre overblik over forløbet for grafen for funktionen. Sådanne kurver kaldes for *niveaukurver*.

Definition 1.2 (Niveaukurver)**.** Lad $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funktion af to variable, og k en konstant. Så kaldes punktmængden $\{(x, y, f(x, y)) \mid f(x, y) = k\}$ for en niveaukurve for f.

Definitionen for en niveaukurve kan virke lidt abstrakt, og den er klart nemmest forstået gennem eksempler.

Eksempel 1.3. På Fig. 2 kan vi se niveaukurver for en funktion, der for et koordinatsæt (x, y) giver lufttrykket et givent sted i Europa d. 7 septemper 2022 (prognose). Disse niveaukurver kaldes for isobarer, og deler Europa op i intervaller af lufttryk. Det er typisk med sådanne niveaukurver at højtryk og lavtryk præsenteres.

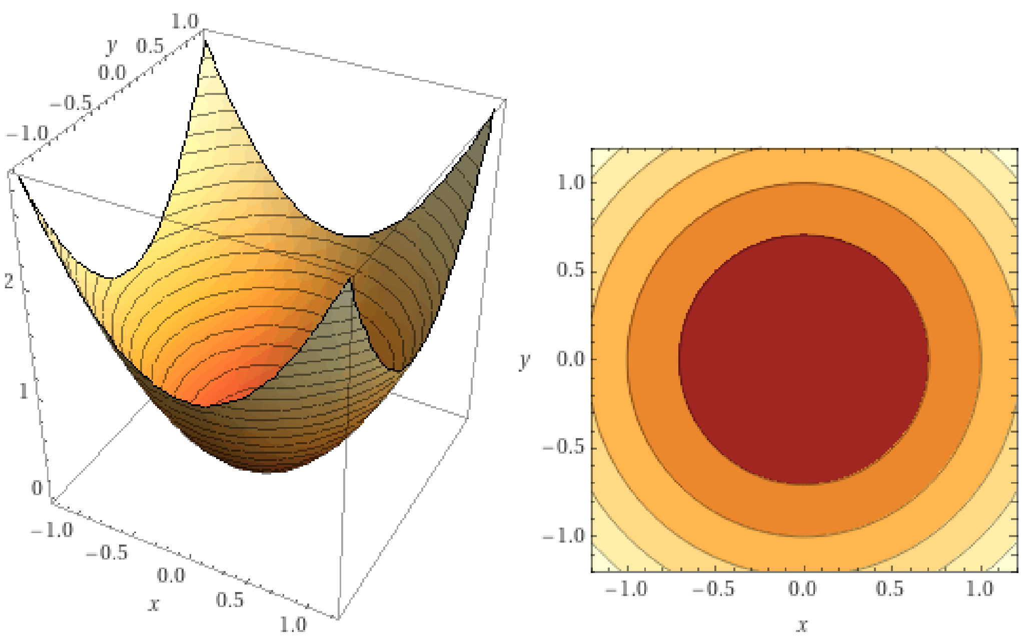


Figur 2: Lufttryk over Europa d. 7. september kl 20:00 (prognose).

Eksempel 1.4. Vi kan bestemme niveaukurver for paraboloiden, der er graf for funktionen f givet ved

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Grafen samt niveaukurver for f kan ses af Fig. 3



Figur 3: Paraboloide med niveaukurver.

Det kan godt tyde på, at niveaukurverne er cirkler. Det er også tilfældet. Betragter vi en niveaukurve, der består af punktmængden (x, y), så $f(x, y) = k$, så vil vi have

$$k = x^2 + y^2,$$

men dette er netop ligningen for en cirkel med centrum i $(0, 0)$ og radius $\sqrt{k}$.

Snitkurver

Til at analysere funktioner af to variable kan vi også bruge *snitkurver*. På samme måde som niveaukurver er vandrette snit af grafen for funktionen f, så vil snitkurver være lodrette snit typisk langs enten yz- eller xz-planen. Vi definerer snitkurver på følgende vis.

Definition 2.1 (Snitkurver)**.** Lad $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funktion af to variable. For en konstant $k \in \mathbb{R}$ defineres punktmængden

$$\{(k, y, f(k, y))\}$$

som snitkirven i x-retningen, og punktmængden

$$\{(x, k, f(x, k))\}$$

defineres som snitkurven i y-retningen.

Eksempel 2.2. Vi betragter igen funktionen f givet ved

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

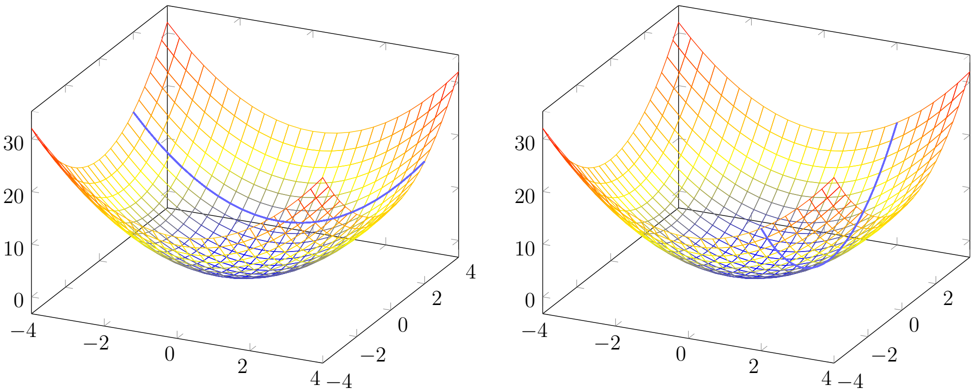
Vi vælger at betragte snittet langs henholdsvist x- og y-aksen med $k = 2$. Dette giver os snitfunktionerne

$$h_y(x) = f(x, 2) = x^2 + 4,$$

og

$$h_x(y) = f(2, y) = y^2 + 4.$$

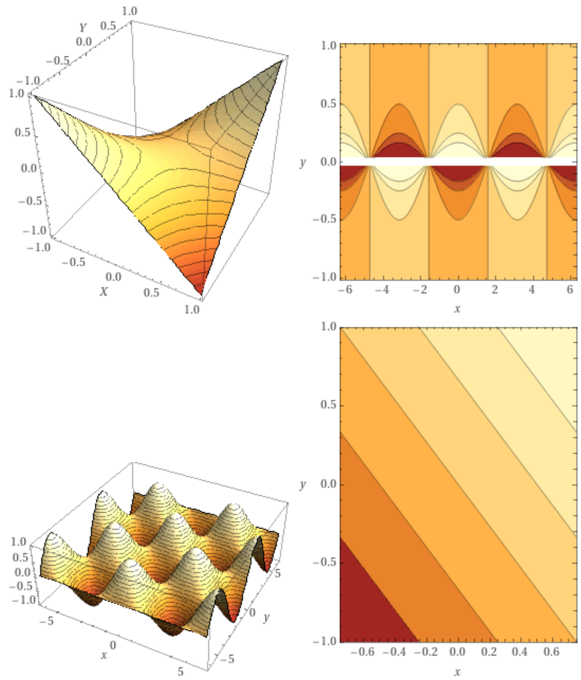
Snitkurverne er graferne for disse funktioner, og det kan ses, at snitkurverne er parabler. Snitkurverne kan ses af Fig. 4

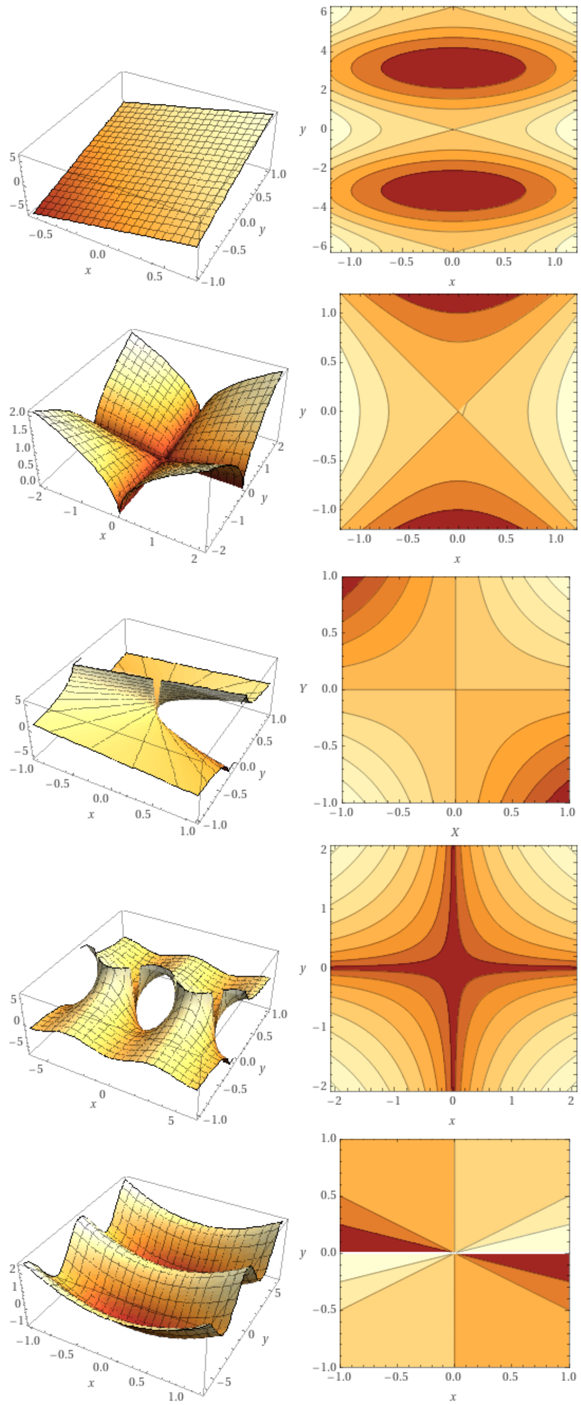


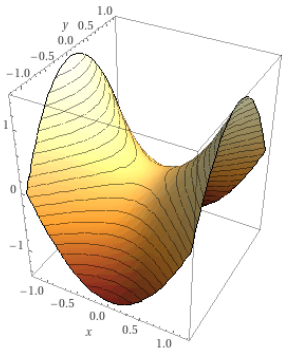
Figur 4: Snitkurver for paraboloide.

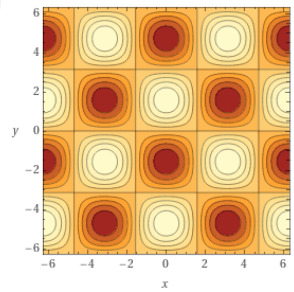
Opgave 1

Følgende grafer for funktioner af to variable er givet samt deres niveaukurver. Par graferne med niveaukurverne.









Opgave 2

En paraboloide er givet ved funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

i) Niveaukurven for f i højden $k = 4$ bestemmer en cirkel. Bestem radius og centrum for denne cirkel.

ii) Afgør, om punktet $(0, 4, 16)$ ligger på niveaukurven i højden $k = 16$.

Opgave 3

En paraboloide er givet ved funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2(x + y) + 4.$$

i) Niveaukurven for f i højden $k = 14$ bestemmer en cirkel. Bestem radius og centrum for denne cirkel.

Opgave 4

i) Bestem en snitkurve for følgende funktioner i planen $y = 3$.

1) $f(x, y) = x^2 + y^2$

2) $f(x, y) = x^3 - y^2 + 1,$

3) $f(x, y) = \cos(x) + \sin\left(\pi \dfrac{y}{3}\right)$

4) $f(x, y) = \sqrt{3y} + 3x^5.$

Opgave 5

i) Bestem en snitkurve for følgende funktioner i planen $x = 1$.

1) $f(x, y) = x^2 - y^2$
2) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$,
3) $f(x, y) = \sqrt{xy}$
4) $f(x, y) = x$.

Opgave 6

Vi har set, at den øvre halvkugle af en kugle med centrum i $C(0, 0, 0)$ og radius r kan beskrives ved grafen for funktionen f givet ved

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Vis, at niveaukurverne for f er cirkler, og bestem centrum og radius for disse cirkler givet en højde k for niveaukurven.