Differentialkvotient for vektorfunktioner

Differentiation af vektorfunktioner

Da vi bestemte monotoniforhold for vektorfunktioner udnyttede vi, at vi kunne differentiere koordinatfunktionerne x og y for vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Vi vil definere hvad vi mener med differentialkvotienten for en vektorfunktion lidt mere præcist. Den opfører sig (heldigvist) præcist som vi vil forvente.

Definition 1.1 (Differentialkvotient for vektorfunktion)**.** Lad $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ være en vektorfunktion. Så er differentialkvotienten for $\vec{r}$ defineret ved grænseværdien

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h},$$

hvis grænsen eksisterer.

Følgende sætning sikrer os i, at differentiation af vektorfunktioner blot er differentiation af koordinatfunktioner.

Sætning 1.2. *Lad $\vec{r}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ være givet ved*

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

hvor både x og y er differentiable funktioner. Så gælder der, at

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Bevis. Vi betragter definitionen af differentialkvotienten for $\vec{r}$:

$$\begin{aligned}
r'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} x(t+h) \\ y(t+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} x(t+h) - x(t) \\ y(t+h) - y(t) \end{pmatrix}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \\ \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

hvor vi i sidste lighed udnytter, at x og y begge er differentiable funktioner. ■

Eksempel 1.3. Differentialkvotienten af vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 1 \\ \ln(t) + 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

er givet ved

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} (t^2 + 2t + 1)' \\ (\ln(t) + 3e^{2t})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + 2 \\ \frac{1}{t} + 6e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorer

Vi vil bruge differentialkvotienten for en vektorfunktion til at definere tangentvektoren til en parameterkurve for en vektorfunktion.

Definition 2.1. Lad $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ være en vektorfunktion. Så er tangentvektoren til parameterkurven for $\vec{r}$ i punktet $P_t(x(t), y(t))$ givet ved $\vec{r}\,'(t)$.

Eksempel 2.2. Betragt vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^4 - 2t^2 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$$

Vi ønsker at bestemme en parameterfremstilling for tangentlinjen for parameterkurven for $\vec{r}$ gennem punktet

$$P_2(x(2), y(2)) = P_2(2^4 - 2 \cdot 2^2, 2^3 - 2) = P_2(8, 6).$$

Tangentvektoren for $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 4t^3 - 4t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Dermed er retningsvektoren for tangenten gennem P_2 givet ved

$$\vec{r}\,'(2) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Da er parameterfremstillingen for tangentlinjen givet ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 24 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Vi kan også bestemme en ligning for tangenten. Da

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 11 \end{pmatrix}$$

er en retningsvektor for tangenten, så vil

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -24 \end{pmatrix}$$

være en normalvektor til tangenten. Derfor er en ligning for tangenten givet ved

$$11(x - 8) - 24(y - 6) = 0.$$

Opgave 1

Bestem den afledede af følgende vektorfunktioner

1) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 6t^2 + 2t + 1 \\ 5t^2 + 10t \end{pmatrix}$ 2) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t^2) \\ 4t^4 \end{pmatrix}$

3) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ 4) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t}\ln(t) \\ \sin(t^4 + 2t^2) \end{pmatrix}$

Opgave 2

i) Bestem en parameterfremstilling for tangenten til parameterkurven for

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$$

i punktet P_1.

ii) Bestem en parameterfremstilling for tangenten til parameterkurven for

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

i punktet P_4.

iii) Bestem en parameterfremstilling for tangenten til parameterkurven

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

i punktet P_π.

Opgave 3

i) Bestem en ligning for tangenten til parameterkurven for

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t(t^2 - 1) \\ 2\sqrt{t} \end{pmatrix}$$

i punktet P_4.

ii) Bestem en ligning for tangenten til parameterkurven for

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \sin(t) 1 \end{pmatrix}$$

i punktet $P_{\pi/2}$.

Opgave 4

i) Brug definitionen af differentialkvotienten for vektorfunktioner til at bestemme differentialkvotienten for

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

ii) Brug definitionen af differentialkvotienten for vektorfunktioner til at bestemme differentialkvotienten for

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 4t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}$$