

Punkter og vektorer

Vektorer mellem punkter

Har vi to punkter $A(a_1, a_2)$ og $B(b_1, b_2)$, så betegner vi vektoren mellem punkterne som

$$\overrightarrow{AB}.$$

Vi kalder denne vektor for *forbindelsesvektoren* fra A til B . Vi definerer derfor koordinaterne til vektoren \overrightarrow{AB} ved

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Som et vigtigt eksempel har vi vektoren fra punktet origo $O(0, 0)$ til et punkt $P(p_1, p_2)$, der betegnes

$$\overrightarrow{OP},$$

og kaldes for *stedvektoren* for P . Koordinaterne til vektoren \overrightarrow{OP} er givet ved

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.1. Stedvektoren til punktet $P(2, 3)$ er givet ved

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Har vi også punktet $Q(-3, 5)$, så er vektoren \overrightarrow{PQ} givet ved

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 - 2 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Længde af vektor

Vi ønsker at definere længden af en vektor.

Definition 1.2 (Længden af en vektor). Længden af en vektor \vec{v} med koordinaterne

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

defineres som

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Den opmærksomme læser vil nok bemærke længdeformlens lighed med Pythagoras' sætning.

Eksempel 1.3. Vektoren \vec{v} givet ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

har længden

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Sætning 1.4 (Afstand mellem to punkter). *Skal vi bestemme afstanden mellem et punkt $P = (p_1, p_2)$ og et punkt $Q = (q_1, q_2)$, så er det givet ved*

$$\text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$$

Bevis. Vektoren \overrightarrow{PQ} er givet ved

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}.$$

Vi anvender nu blot formelen for længden af en vektor og får

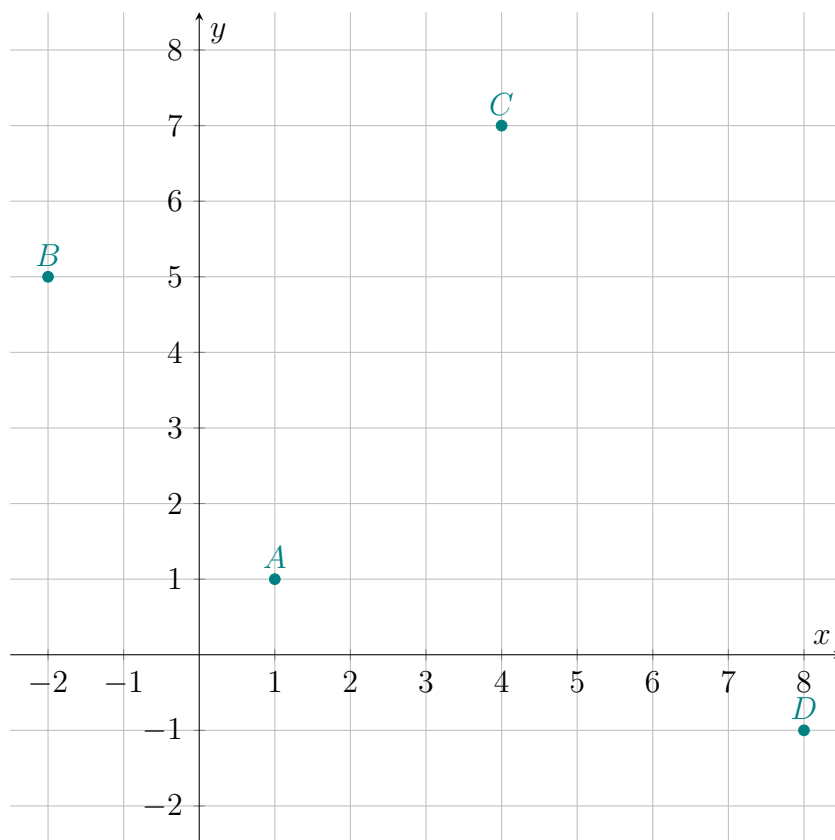
$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

■

Eksempel 1.5. Afstanden fra punktet $P(0, 1)$ og punktet $Q(-1, 2)$ er givet ved

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5}.$$

Opgave 1



Figur 1: Repræsentanter for to vektorer

- Bestem koordinaterne for punkterne A , B , C og D .
- Bestem koordinaterne til vektorerne \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{DA} og \overrightarrow{BD} .
- Bestem længden af vektorerne \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{DA} og \overrightarrow{BD} .

Opgave 2

- For punkterne $A(2, 5)$ og $B(4, 9)$ kan du så uden at tegne punkterne gennemskue hvad koordinaterne til forbindelsesvektoren \overrightarrow{AB} bliver?
- Hvis vi har to punkter $A(a_1, a_2)$ og $B(b_1, b_2)$, kan du så gennemskue, hvordan vi udregner koordinaterne til forbindelsesvektoren \overrightarrow{AB} ?

Opgave 3

Bestem koordinaterne til stedvektoren til følgende punkter

- | | |
|---------------------------|--------------|
| 1) $(1, 2)$ | 2) $(3, -1)$ |
| 3) $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ | 4) $(-2, 7)$ |

Opgave 4

Fire punkter er givet ved $A(1, 3)$, $B(-5, 6)$, $C(-4, 1)$ og $D(12, -7)$.

- i) Bestem koordinaterne til vektorerne \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} og \overrightarrow{DA} .
- ii) Bestem længden af vektorerne \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} og \overrightarrow{DA}
- iii) Bestem $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$.
- iv) Bestem $|2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}|$.

Opgave 5

Bestem afstanden mellem punkterne $A(6, 3)$ og $B(9, 7)$.