Vinkler mellem linjer

Vinkler mellem linjer

I 1.g lærte vi, hvordan vi bestemte vinklen mellem to vektorer. Givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så gælder der følgende forhold mellem vinklen v mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og deres indbyrdes prikprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(v) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Vi kan derfor finde vinklen v ved

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \;\Leftrightarrow\; v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right).$$

Typisk vil vi blot bruge ligningen til venstre og så løse med `solve`-kommandoen i Maple. Lad os betragte et par eksempler.

Eksempel 1.1. En linje l er givet ved ligningen

$$l: \; 2(x-1) + 3(y-2) = 0,$$

og en linje m er givet ved ligningen

$$m: \; -1(x+2) - 5(y-1) = 0,$$

Linjen l har derfor normalvektoren $\vec{n_l}$ givet ved

$$\vec{n_l} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

og linjen m har normalvektoren $\overrightarrow{n_m}$ givet ved

$$\overrightarrow{n_m} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Vinklen mellem linjerne l og m må være lig vinklen mellem deres normalvektorer. Vinklen v mellem linjerne bestemmes derfor ved at løse ligningen

$$\cos(v) = \frac{2(-1) + 3(-5)}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2}}.$$

Dette løses i Maple, og vinklen mellem linjerne fås til at være $157,62°$. Dette er klart den stumpe vinkel. Den spidse vinkel mellem linjerne er derfor

$$180 - 157,62 = 22,38°.$$

Eksempel 1.2. To linjer l og m er givet ved følgende to parameterfremstillinger henholdsvist.

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Tilsvarende eksemplet med linjens ligning må vinklen mellem to linjer være lig vinklen mellem linjernes retningsvektorer $\vec{r_l}$ og $\vec{r_m}$. Derfor findes vinklen mellem l og m som vinklen mellem

$$\vec{r_l} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og

$$\vec{r_m} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dette gøres igen i Maple, og vi får, at vinklen mellem linjerne l og m er givet ved $v = 91.22°$.

Opgave 1

i) To linjer l og m har følgende ligninger:

$$l: \; 4(x-1)+4(y-1)=0,$$
$$m: \; 2(x+1)-2(y-7)=0.$$

Bestem den spidse vinkel mellem l og m.

ii) To linjer l og m har følgende ligninger:

$$l: \; -7(x+13)-20(y-1)=0,$$
$$m: \; \frac{1}{3}(x+4)+\sqrt{2}(y-2)=0.$$

Opgave 2

i) To linjer l og m har følgende parameterfremstillinger:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestem vinklen v mellem l og m.

ii) To linjer l og m har følgende parameterfremstillinger:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestem vinklen v mellem l og m.

Opgave 3

i) En linje l er givet ved ligningen

$$6(x-6) + 8(y-8) = 0,$$

og en linje m er givet ved parametriseringen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Bestem vinklen v mellem l og m.