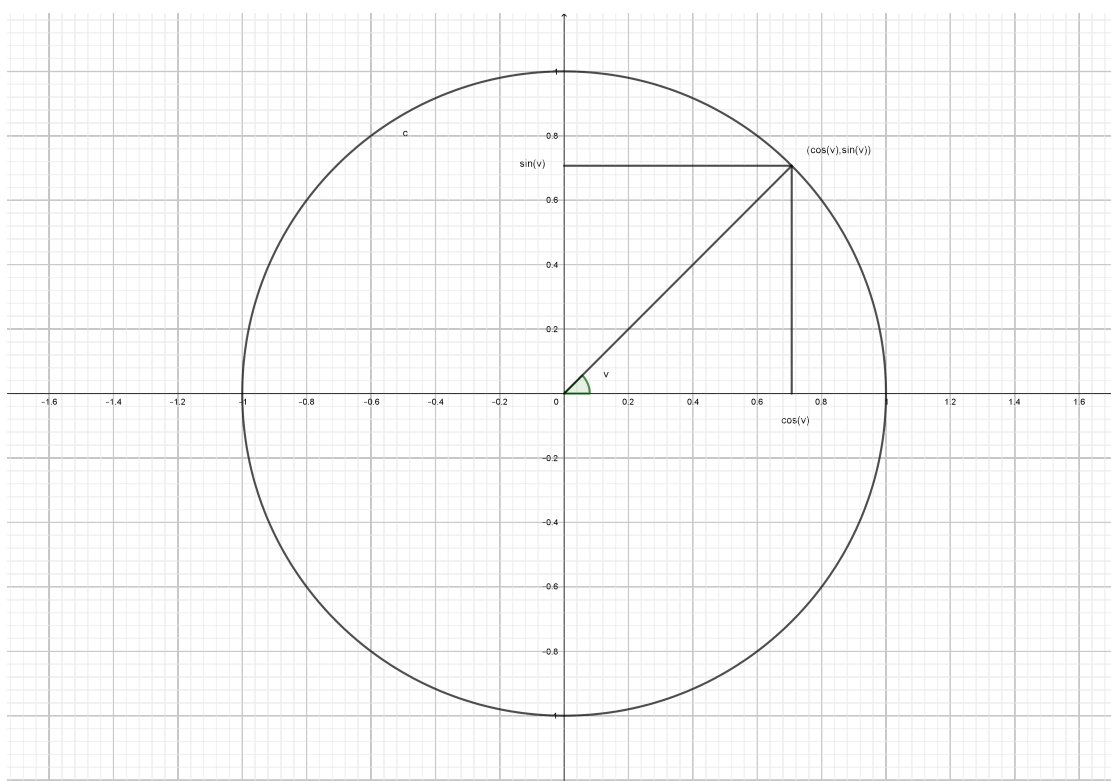


# Vektorer og trigonometri

## Enhedscirklen

Trigonometri omhandler regning med trekanter. Til at regne på trekanter har vi såkaldte trigonometriske funktioner, der relaterer sidelængder og vinkler i retvinklede trekanter. De mest kendte trigonometriske funktioner er I formentlig bekendte med:  $\cos(v)$  og  $\sin(v)$ . Vi vil bruge enhedscirklen til at definere disse funktioner. Enhedscirklen kan ses af Fig. 1



Figur 1: Enhedscirklen

Enhedscirklen er en cirkel med centrum i origo og radius 1. Vi kan bruge enhedscirklen til at definere  $\cos$  og  $\sin$ .

**Definition 1.1.** Lad  $P_v$  være et punkt på enhedscirklen, så vinklen mellem stedvektoren  $\overrightarrow{OP_v}$  og  $x$ -aksen er  $v$ . Så defineres funktionerne  $\cos(v)$  og  $\sin(v)$  som koordinaterne til  $P_v$ :

$$P_v = (\cos(v), \sin(v)).$$

**Eksempel 1.2.** Det gælder, at  $\cos(0) = 1$  og  $\sin(0) = 0$ , da koordinatsættet til  $P_0$  er

$$P_0 = (1, 0) = (\cos(0), \sin(0)).$$

**Sætning 1.3** (Idiotformlen (den trigonometriske grundrelation)). *For enhver vinkel  $v$  gælder der, at*

$$\cos(v)^2 + \sin(v)^2 = 1.$$

*Bevis.* Det er klart, at da enhedscirklen har radius 1 og centrum i origo, så vil længden af alle vektorer på enhedscirklen have længde 1. Tager vi stedvektoren  $\overrightarrow{OP_v}$  og bestemmer længden får vi

$$1 = |\overrightarrow{OP_v}| = \left| \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\cos(v)^2 + \sin(v)^2}.$$

Resultatet følger nu ved at opløfte begge sider af lighedstegnet i 2. ■

Tangens er den sidste trigonometriske funktion, vi skal betragte. Denne er defineret som

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}.$$

## 2 Opgave 1

Brug enhedscirklen til at aflæse  $\cos(v)$  og  $\sin(v)$  for følgende vinkler

- |        |        |
|--------|--------|
| 1) 90  | 2) 45  |
| 3) 180 | 4) 270 |
| 5) 60  | 6) 120 |
| 7) 360 | 8) 450 |

## Opgave 2

Afgør for hvilke vinkler  $v$  og  $w$ , det gælder at

- i)  $\cos(v) = \cos(w)$ .
- ii)  $\cos(v) = \sin(w)$ .
- iii)  $\cos(v) = -\cos(w)$ .
- iv)  $\sin(v) = \sin(w)$ .
- v)  $\sin(v) = -\sin(w)$ .

## Opgave 3

Brug idiotformlen til at bestemme  $\cos(45)$  eksakt.

## Opgave 4

- i) Brug enhedscirklen til at argumentere for, at  $\cos(30) = 0.5$ .
- ii) Brug nu denne information samt idiotformlen til at bestemme  $\sin(30)$ .
- iii) Brug nu enhedscirklen til at bestemme  $\sin(60)$  og  $\cos(60)$ .

## Opgave 5

Brug dit resultat fra Opgave 1 til at bestemme tangens for følgende vinkler

- |        |        |
|--------|--------|
| 1) 90  | 2) 45  |
| 3) 180 | 4) 270 |
| 5) 60  | 6) 120 |
| 7) 360 | 8) 450 |