

Opstilling af differentiallyigninger

Sproglig beskrivelse af differentiallyigning

En differentiallyigning kan også være repræsenteret ved en sproglig beskrivelse, og I skal kunne gå fra sproglig beskrivelse af differentiallyigning til opstilling af differentiallyigning. Vi vil gennemgå nogle eksempler.

Eksempel 1.1. Vi har følgende sproglige beskrivelse af en differentiallyigning: *Væksthastigheden af en population er proportional med størrelsen på populationen.* Vi ønsker at opstille en differentiallyigning på baggrund af denne beskrivelse. Lad os betegne størrelsen af populationen ved N . Så vil væksthastigheden være N' . Da disse skal være proportionale, må vi have, at

$$N' = k \cdot N,$$

hvor k er en proportionalitetskonstant. Dette er derfor differentiallyigningen. Den fuldstændige løsning til denne differentiallyigning er som bekendt givet ved

$$N(x) = ce^{kx}.$$

Eksempel 1.2. Newtons afkølingslov lyder: *Den hastighed hvorved en genstands temperatur aftager er propotional med forskellen mellem genstandens temperatur og omgivelsernes temperatur.* Lad os betegne genstandens temperatur med T og omgivelsernes temperatur med T_{omg} . Forskellen på temperaturen og omgivelserne er dermed $T - T_{\text{omg}}$. Dette skal være proportionalt med hastigheden hvorved temperaturen aftager, som er T' . Dermed fås differentiallyigningen

$$T' = -k(T - T_{\text{omg}}) = -kT + kT_{\text{omg}}.$$

Denne differentiallyigning har som bekendt den fuldstændige løsning

$$T(x) = T_{\text{omg}} + ce^{-kx}$$

Opgave 1

- i) I en begrænset periode oplyses det, at væksthastigheden for en bestemt type bakterie er proportional med koncentrationen af bakterier. Proportionalitetskonstanten er 0.16. Opstil en differentiallyigning, der beskriver bakterievæksten og brug denne til at bestemme en model for bakteriekoncentrationen.

- ii) Vi opløser salt i vand. Vi opløser i alt 7kg salt ned i en stor beholder med vand. Det oplyses, at hastigheden hvorved saltet opløses er proportional med den mængde salt, der endnu ikke er opløst. Proportionalitetskonstanten er 0.05. Opstil en differentialligningsmodel, der beskriver opløsningen af salt i vand og bestem en fuldstændig løsning til denne differentialligning.
- iii) En cylindrisk beholder har et hul i siden af bunden. Til at starte med er den fyldt med vand. Den hastighed hvormed højden af vandet i beholderen aftager er proportional med kvadratroden af højden. Opstil en differentialligning, der beskriver denne situation.
- iv) Størrelsen på befolkningen i en bestemt by beskriver vi med n . Bæreevnen (det maksimale antal mennesker) er givet ved $M = 1.2$ mio. Det oplyses, at væksten af befolkningen er proportional med produktet af størrelsen på befolkningen og forskellen mellem befolkningsstørrelsen og bæreevnen. Proportionalitetskonstanten er 1.05. Opstil en differentialligning, der beskriver situationen

Opgave 2

I en model for væksten af en bestemt fisk betegner $l(t)$ længden af fisken i cm til tiden t målt i uger. Den hastighed, hvormed $l(t)$ vokser er proportional med fiskens længde og omvendt proportional med $(1 + t)^2$.

- i) Opstil en differentialligning, der beskriver fiskens vækst.
- ii) Løs differentialligningen, når proportionalitetskonstanten er 1.2 og $l(0) = 5$. (Løs med Maple og dsolve)
- iii) Hvor lang er fisken efter 4 uger ifølge modellen?
- iv) Hvor lang bliver fisken maksimalt?

Opgave 3

Følgende er tidligere eksamensopgaver uden hjælpemidler

4.D1.1 (2018-06, 4 – Vejledende 1)

I en model kan udviklingen af træmassen i en bestemt skov beskrives ved en funktion M , hvor $M(t)$ betegner træmassen (målt i kg) til tidspunktet t (målt i år). I modellen er væksthastigheden i træmassen proportional med træmassen. Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er 1,04.

- a) Opskriv en differentialligning, som M må opfylde.

4.D1.5 (2018-08, 8 – Vejledende 2)



Foto: www.colourbox.com

I en model kan antallet af skarvkolonier i Danmark i perioden 1982-2008 beskrives ved en funktion S af tiden t (målt i år efter 1982). Den hastighed, hvormed antallet af skarvkolonier vokser til tidspunktet t , er proportional med produktet af antallet af skarvkolonier til tidspunktet t og forskellen mellem 67 og antallet af skarvkolonier til tidspunktet t .

Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er $k = 0,0029$.

- a) Opskriv en differentialligning, som S må opfylde.

4.D1.7 (2019-05, 9)



I en model kan temperaturudviklingen i et vandbad under afkøling beskrives ved en funktion f , hvor $f(t)$ betegner vandbadets temperatur (målt i $^{\circ}\text{C}$) til tidspunktet t (målt i minutter).

I modellen er væksthastigheden for vandbadets temperatur proportional med forskellen mellem omgivelsernes temperatur og vandbadets temperatur.

Det oplyses, at omgivelsernes temperatur er 22°C , og at proportionalitetskonstanten er $0,01\text{s}^{-1}$.

- a) Bestem væksthastigheden for vandbadets temperatur, når vandbadets temperatur er 50°C .
b) Opskriv en differentialligning, som f må være en løsning til.