

Kvadratkomplettering og cirkels ligning

Vi husker fra sidst, at en cirkel med centrum i (x_0, y_0) og radius r har ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (1.1)$$

Hæver vi parenteserne i denne ligning, så får vi

$$x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + y^2 + y_0^2 - 2yy_0 = r^2, \quad (1.2)$$

og cirkels ligning vil ofte optræde på denne form. Kvadratkomplettering går ud på at få en ligning fra formen (1.2) tilbage på formen (1.1), så radius og centrum kan aflæses.

Eksempel 1.1. En cirkel har ligningen

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 4.$$

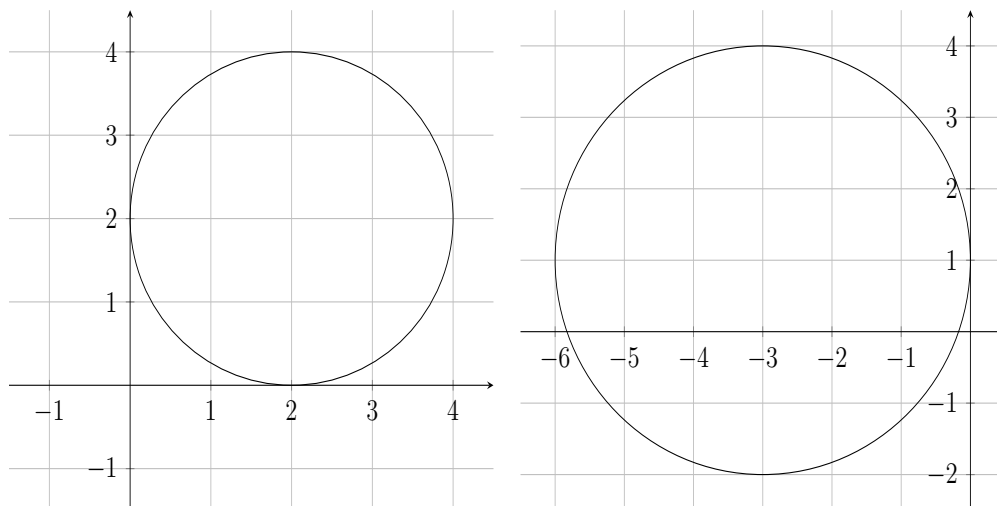
Vi ser, at vi har leddene x^2 og $-2xx_0 = -2x$ samt y^2 og $-2yy_0 = -4y$. Derfor kan vi se, at $x_0 = 1$ og $y_0 = 2$. Ifølge (1.2) skal vi have x_0^2 og y_0^2 på venstresiden af lighedstegnet, så det lægges til i cirkels ligning:

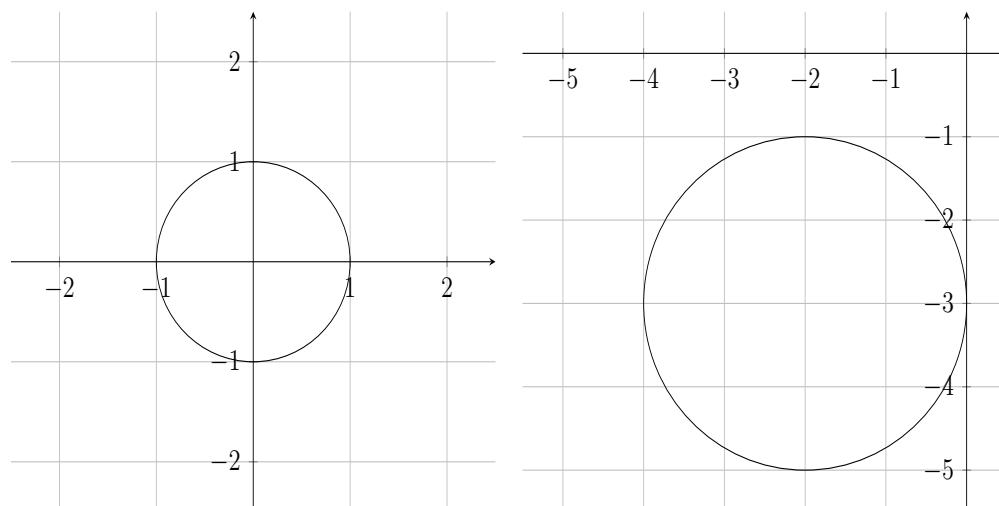
$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 + 4 = 4 + 1 + 4 = 9.$$

Da ligningen nu er på formen (1.2), så kan vi se, at cirklen har centrum i $(1, 2)$ og radius $\sqrt{9} = 3$.

Opgave 1

Bestem cirkels ligning for følgende cirkler og omskriv dem til formen (1.2).





Opgave 2

- i) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = -9.$$

- ii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 + 6y = -1.$$

- iii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 8x + y^2 + 2y = 8.$$

- iv) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 10x + y^2 - 12y = 3.$$

- v) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 + 4x + y^2 + 14y = 47.$$

Opgave 3

- i) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$(x - 4)^2 + y^2 - 6y = 27.$$

- ii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 + 4x + (y - 3)^2 = 21.$$

- iii) Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 - 14x + (y + 5)^2 = 0.$$