# Tværvektorer og determinanter

## Tværvektor

Ønsker vi at bestemme en vektor, der står vinkelret på en vektor, kan vi konstruere den vektor, vi kalder for tværvektoren.

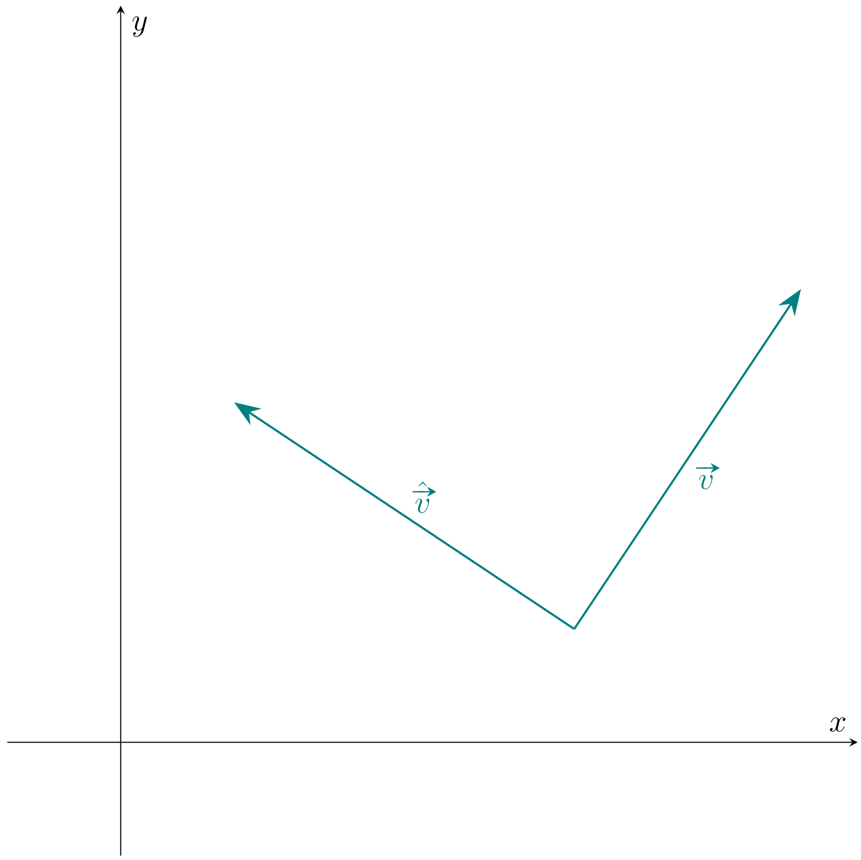
**Definition 1.1** (Tværvektor)**.** For en vektor $\vec{v}$ med koordinaterne

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

defineret *tværvektoren* til $\vec{v}$ som

$$\hat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

På Figur 1 kan vi se, tværvektoren for en vektor.




Figur 1: En vektor og dens tværvektor

**Eksempel 1.2.** Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

har vektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

som tværvektor.

# Determinanter

**Definition 2.1** (Determinanter)**.** For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

defineres *determinanten* mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Dette skrives også til tider

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

**Eksempel 2.2.** For vektorerne

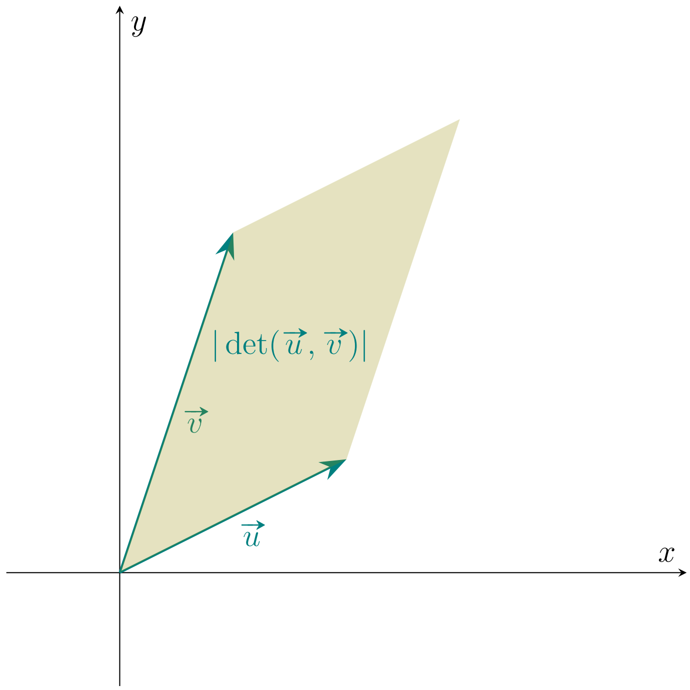
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

er determinanten givet ved

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot (-3) = 10 + 3 = 13$$

**Sætning 2.3** (Areal og determinant)**.** *For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ gælder der, at arealet af deres udspændende parallelogram er lig* $|\det(\vec{u}, \vec{v})|$.

På Figur 2 kan vi se arealet, som determinanten tilsvarer




Figur 2: Determinant som areal

Skal vi bestemme determinanten i Maple, så skal vi skrive

$$\texttt{with(Gym):}$$
$$\vec{\texttt{u}}\ \texttt{:=}\ \texttt{<}\texttt{u}_1\texttt{,}\texttt{u}_2\texttt{>}$$
$$\vec{\texttt{v}}\ \texttt{:=}\ \texttt{<}\texttt{v}_1\texttt{,}\texttt{v}_2\texttt{>}$$
$$\texttt{det(}\vec{\texttt{u}}\texttt{,}\vec{\texttt{v}}\texttt{)}$$

## Opgave 1

Bestem tværvektoren for følgende vektorer

$a)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b)\ \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 3 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $d)\ \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -27 \end{pmatrix}$

## Opgave 2

Bestem determinanten for følgende par af vektorer

$a)\ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b)\ \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

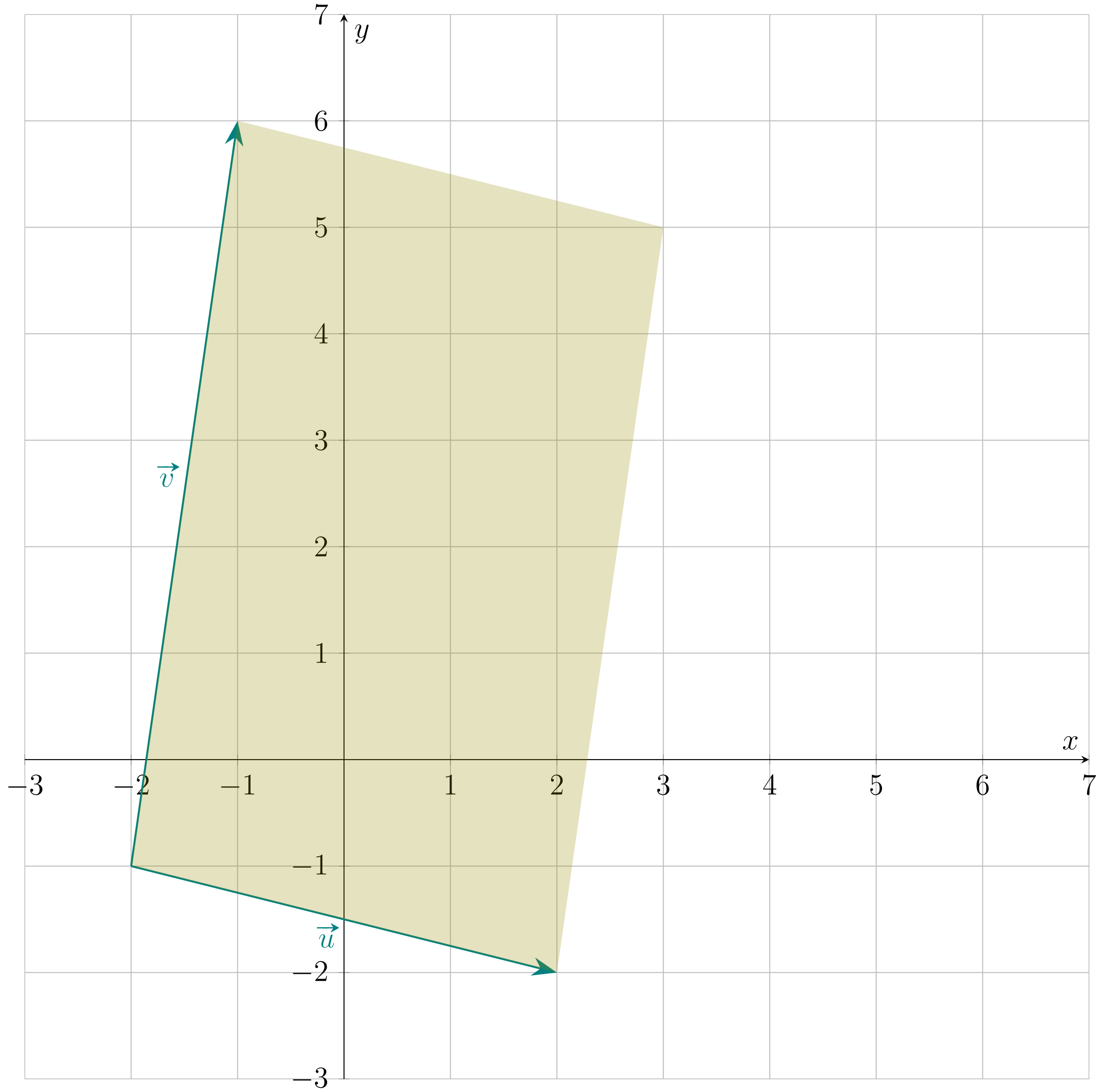
## Opgave 3

Udregn følgende

$a)\ \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $b)\ \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$

## Opgave 4

Beregn arealet af det skraverede område på følgende figur.



## Opgave 5

Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

er parallelle, da $2\vec{a} = \vec{b}$.

i) Bestem $\det(\vec{a}, \vec{b})$. Hvorfor giver resultatet god mening? Tænk på den geometriske fortolkning af determinanten

ii) Hvordan kan vi undersøge, om to vektorer er parallelle?

## Opgave 6

To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -t+3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

i) Bestem $\det(\vec{u}, \vec{v})$, hvis $t = 6$

ii) Bestem $t$, så arealet af vektorernes udspændende parallelogram er 20.

## Opgave 7

i) Bevis, at en vektor $\vec{v}$ og dens tværvektor $\hat{\vec{v}}$ er orthogonale

ii) Bevis, at der for to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

gælder, at

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \hat{\vec{u}} \cdot \vec{v}.$$