

Rødder for andengradspolynomier

Diskriminanten

En rod for et andengradspolynomium er en x -værdi der opfylder, at parablen for polynomiet skærer x -aksen i netop denne x -værdi. For andengradspolynomier gælder der, at de kan have enten nul, én eller to rødder. Antallet af rødder kan vi afgøre ved brug af *diskriminanten*.

Sætning 1.1 (Diskriminanten). *For et andengradspolynomium f givet ved*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gælder der, at tallet

$$d = b^2 - 4ac$$

fortæller os, hvor mange rødder f har.

- Hvis $d > 0$, så har f to rødder.
- Hvis $d = 0$, så har f én rod.
- Hvis $d < 0$, så har f nul rødder.

Eksempel 1.2. Polynomiet f givet ved

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

har diskriminanten d givet ved

$$d = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 4 + 48 = 52 > 0.$$

Da dette tal er større end 0, så har f to rødder.

Eksempel 1.3. Polynomiet g givet ved

$$g(x) = x^2 - 4x + 4$$

har diskriminanten d givet ved

$$d = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0.$$

Da diskriminanten er lig 0, så har g netop én rod.

Eksempel 1.4. Polynomiet h givet ved

$$h(x) = -2x^2 + 5x - 4$$

har diskriminanten d givet ved

$$d = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = 25 - 32 = -7 < 0.$$

Da diskriminanten er mindre end 0, så har h ingen rødder.

Rødder for andengradspolynomier

Hvis vi skal bestemme rødderne for et andengradspolynomium, så skal vi bruge løsningsformlen for andengradsligninger, som vi også til tider kalder for diskriminantformlen. Denne er givet ved følgende.

Sætning 2.1 (Løsningsformlen for andengradsligninger). *Rødderne for et andengradspolynomium f givet ved*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

er givet ved

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a},$$

hvor vi antager, at diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ er ikke-negativ.

Grunden til, at vi kalder rodformlen for andengradspolynomier for løsningsformlen for andengradsligninger er, at en andengradsligning netop er en ligning, hvor løsningen er en rod til et andengradspolynomium. Vi vil bevise formelen senere, men vil for nu blot fokusere på at anvende den.

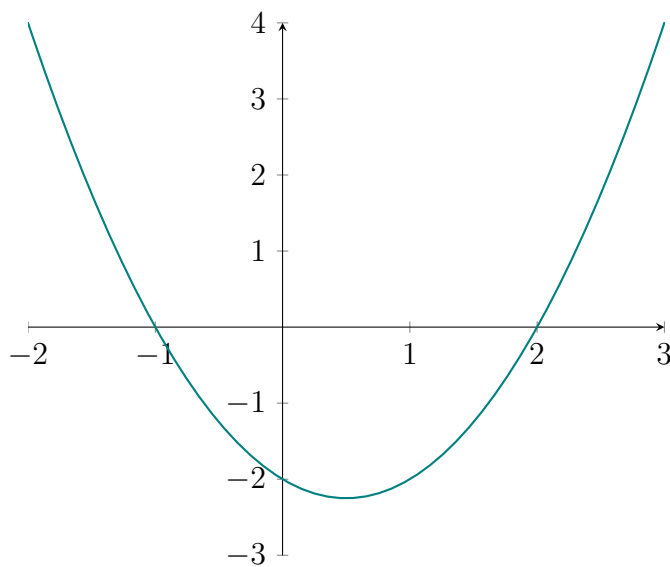
Eksempel 2.2. Et polynomium f er givet ved

$$f(x) = x^2 - x - 2,$$

og vi ønsker at bestemme rødderne. Vi indsætter koefficienterne i løsningsformlen og får

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{1 \pm 3}{2}. \end{aligned}$$

Rødderne er derfor givet ved $x = 2$ og $x = -1$. For at verificere løsningen tegner vi grafen for f . Denne kan ses af Fig. 1



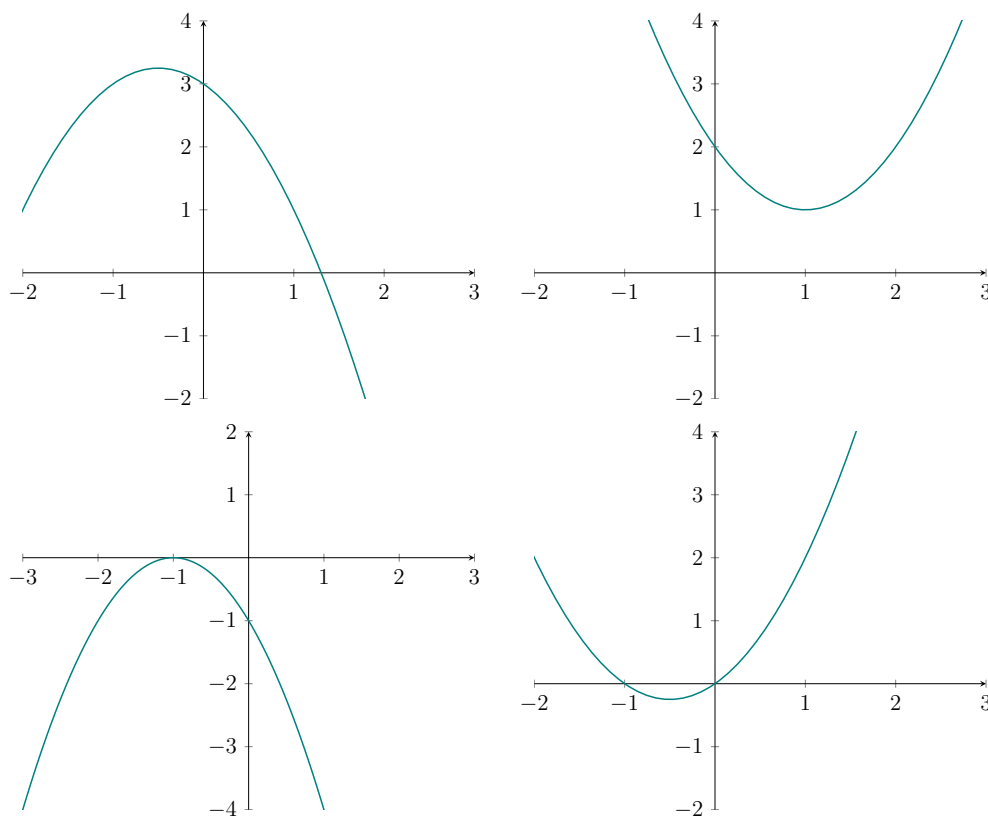
Figur 1: Parabel for f

Det ser på Figur 1 ud til at rødderne er fundet korrekt.

Opgave 1

For parablerne i Figur 2

- Bestem fortegnet på koefficienterne a og b .
- Bestem c .



Figur 2: Fire parabler

Opgave 2

Bestem fortegnet for diskriminanten for de fire polynomier hvis parabler ses på Figur 2.

Opgave 3

Bestem diskriminanten for følgende polynomier, og brug diskriminanten til at afgøre hvor mange rødder, polynomierne har. Tegn efterfølgende graferne i Maple og brug grafen til at verificere dit svar.

1) $2x^2 + 4x - 6$

2) $2x^2 - 8x + 4$

3) $x^2 - 6x + 9$

4) $3x^2 + 6$

Opgave 4

Bestem rødderne for følgende polynomier ved at bruge løsningsformlen for andengradsligninger. Verificér dit svar ved at tegne graferne i Maple. (I kan genbruge diskriminanten fra før i de tre første opgaver)

1) $2x^2 + 4x - 6$

2) $2x^2 - 8x + 4$

3) $x^2 - 6x + 9$

4) $3x^2 - 3$

5) $x^2 - 4x + 4$

6) $x^2 - 3x + 2$