Potenser og rødder

Potenser/rødder og det udvidede potensbegreb

Når vi opløfter et tal a i et naturligt tal n så tilsvarer det

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ gange}}, \tag{1.1}$$

vi multiplicerer altså tallet a n gange med sig selv. Vi vil snart forklare, hvad det betyder at opløfte et tal i både en positiv og negativ brøk. Vi vil først diskutere regnereglerne for potenser. Vi vil udnytte repræsentationen (1.1) for at udlede regnereglerne for multiplikation. Af repræsentationen (1.1) må vi for eksempel have

$$a^5 a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8,$$

og mere generelt for naturlige tal m, n så har vi

$$a^n a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ gange}} \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ gange}} = a^{m+n}$$

Tilsvarende har vi for eksempel, at

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2,$$

og mere generelt for naturlige tal m, n, så

$$\frac{a^n}{a^m} = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ gange}} / \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ gange}} = a^{n-m}.$$

Derfor må vi også kunne udvide vores potensbegreb til negative eksponenter, og a^{-n} må være lig $\frac{1}{a^n}$ af vores argumentation. Det burde også være klart, hvorfor $a^0 = 1$ i det

$$1 = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0.$$

Vi vil nu opskrive vores første potensregneregler:

i) Potens/rod af produkt: $(ab)^n = a^n b^n$ og $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

ii) Multiplikation/division af potenser: $a^n a^m = a^{n+m}$ og $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Med vores nuværende regler, vil vi se, om vi kan udlede flere regler. Vi har eksempelvis

$$(a^5)^2 = a^5 a^5 \overset{\text{ii)}}{=} a^{10},$$

eller mere generelt for hele tal m, n så

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ gange}} \overset{\text{ii)}}{=} a^{m+m+\cdots+m} = a^{mn}. \tag{1.2}$$

På samme tid, så har vi, at

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Hvis vi sammenligner dette med (1.2), så må vi have

$$a = \sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{1/n},$$

altså tilsvarer n'teroden at opløfte i $1/n$'te potens. Vi kan nu konstruere potenser med alle brøker $\frac{n}{m}$ som

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n},$$

og vi kan derfor også give mening til at opløfte tal i andet end heltal. Vi kan nu opskrive vores resterende potensregneregler:

i) Potenser af potenser: $(a^n)^m = a^{nm}$,

ii) Rødder og potenser: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

Opgave 1

Vi husker os selv på, at vi noterer eksempelvis $a \cdot a \cdot a$ som a^3.

i) Bestem $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

ii) Bestem $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Vi kan selvfølgelig også gå den anden vej og notere a^4 som $a \cdot a \cdot a \cdot a$.

iii) Omskriv a^5 som $a \cdot a \cdots a$

iv) Omskriv $a^3 \cdot a^4$ til $a \cdot a \cdots a$ og herefter tilbage til a^n.

v) Omskriv $a^2 \cdot a^7$ til $a \cdot a \cdots a$ og herefter tilbage til a^n.

vi) Omskriv $a^5 \cdot a^5$ til $a \cdot a \cdots a$ og herefter tilbage til a^n.

vii) Kan I generalisere dette til en regneregel?

Opgave 2

Når vi har ens faktorer i både tæller og nævner i en brøk, så vil de gå ud med hinanden. Har vi eksempelvis

$$\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a}$$

så vil faktorerne gå ud og vi vil få

$$\frac{a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a \cdot a = a^2$$

i) Forkort $\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a}$

ii) Forkort $\frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a}$

iii) Forkort $\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a}$

iv) Forkort $\frac{a^6}{a^3}$ ved eventuelt først at omskrive til formen $a \cdot a \cdots a$.

v) Forkort $\frac{a^{10}}{a^6}$.

vi) Forkort $\frac{a^9}{a^3}$.

vii) Kan I generalisere dette til en regneregel?

Opgave 3

Vi kan også have potenser opløftet i potenser som $(a^3)^4$. Dette udtryk betyder

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3.$$

i) Omskriv $(a^2)^2$ til formen $a \cdot a \cdots a$.

ii) Omskriv $(a^3)^2$ til formen $a \cdot a \cdots a$.

iii) Hvor mange a'er er ganget sammen i $(a^2)^2$ og $(a^3)^2$? Hvad med $(a^3)^4$?

iv) Kan I generalisere dette til en regneregel?

Opgave 4

Vi kan udnytte, at multiplikation er det, vi kalder for *kommutativ* - det er altså ligegyldigt, hvilken rækkefølge, vi ganger tal sammen i. Derfor kan vi omskrive $(a \cdot b)^2$ som

$$(a \cdot b)^2 = a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot b \cdot b. \tag{1.3}$$

i) Omskriv $(ab)^3$ som i (1.3).

ii) Omskriv $(ab)^5$ som i (1.3).

iii) Omskriv $(ab)^6$ som i (1.3).

iv) Hvor mange a'er og b'er er ganget sammen i $(ab)^2$? Hvad med de andre udtryk?

v) Kan I generalisere dette til en regneregel?

Opgave 5

Vi vil gerne bevise, at $a^0 = 1$ for ethvert tal $a \neq 0$.

i) Bevis, at $a^0 = 1$ ved at bruge dine regneregler. (Vink: omskriv 0 til 1-1 og brug regnereglen fra Opgave 2 baglæns.)

Opgave 6

Forkort følgende så meget som muligt.

1) $(xy)^6$	2) $(ab^4)^2$
3) $(2a)^2$	4) $(ab)^2(ab)^3$
5) $(4x^3)^4$	6) $\dfrac{(a^2)^4b^3}{ab^2}$
7) $(abc)^2$	8) $(a^5)^2(a^2)^5$
9) $\dfrac{6^3}{6^2}$	10) $\dfrac{2^8 \cdot 3^5}{3^4 \cdot 4^4}$
11) $(x^5)^{1/5}$	12) $\sqrt[3]{27}$
13) $\sqrt{5}\sqrt{20}$	14) $3\sqrt{4}\sqrt{3}$
15) $3\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2}$	16) $4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}$
17) $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{4^2}\right)^4$	18) $\left(\dfrac{ab}{b^3}\right)^3$

Opgave 7

i) Forklar, hvorfor $(-1)^n = 1$, hvis n er lige og $(-1)^n = -1$, hvis n er ulige.

ii) Hvis n er ulige, hvad er så fortegnet på

$$((-1)(-2)(-3))^n?$$