Differentiation

Uden hjælpemidler

Niveau 1

Bestem den afledede funktion til følgende funktioner:

1) $2x^2 + 10x^3$
2) $5\sqrt{x}$
3) $\cos(x) - 10$
4) $\ln(x) - \sqrt{7}$
5) $e^7 + \ln(4)$
6) $-5x^{\frac{3}{2}}$

Niveau 2

Bestem den afledte funktion til følgende funktioner:

1) $\ln(x^2 + 11x - 6)$
2) $\cos(x) \cdot (4x^2 - 3x^5)$
3) $8\sqrt{x} \cdot e^x$
4) $e^{4\sin(x)}$
5) 2^{5x+11}
6) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{-2\ln(x)}$

Niveau 3

Bestem den afledte funktion til følgende funktioner:

1) $\cos(x^2) \cdot \sin(4x + 13)$
2) $e^{\sqrt{x}\cdot\sin(x)}$
3) $\sqrt{x^4 - 2x^2} \cdot \ln(x^2 - 2x^2)$
4) $(\cos(x) \cdot \sin(x))^{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}$

Væksthastighed og tangenthældning

Uden hjælpemidler

Niveau 1

i) En funktion f er givet ved

$$f(t) = 6t^2 - 11t + 7.$$

Bestem væksthastigheden for f til tidspunktet $t = 4$.

ii) En funktion g er givet ved

$$g(x) = \ln(x) + 4x.$$

Bestem tangenthældningen for grafen for g i punktet $(1, g(1))$.

iii) En funktion h er givet ved

$$h(x) = x^2 - 4x + 11.$$

Bestem det sted, hvor tangenthældningen for grafen for h er 2.

Niveau 2

i) En funktion f er givet ved

$$f(t) = t^3 - 3t^2 + 4.$$

Bestem de steder, hvor vækshastigheden er nul.

ii) En funktion g er givet ved

$$g(x) = \ln(x) + 2\sqrt{x} + 4$$

Bestem ligningen for tangenten til grafen for g gennem punktet $(1, g(1))$.

iii) En funktion h er givet ved

$$h(x) = \cos(x) \cdot (6x^2 + 4x + 7).$$

Bestem $h'(0)$.

Niveau 3

i) En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + k.$$

Bestem de værdier for k, så f har linjen med ligningen $y = 16x - 10$ som tangent

ii) En funktion h er givet ved

$$h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4.$$

Bestem tallet a, så ligningen $h'(x) = a$ har så få løsninger som muligt.

Med hjælpemidler

Niveau 1

I en begrænset tidsperiode kan antallet af bakterier i en petriskål beskrives ved

$$B(t) = 17.32\mathrm{e}^{0.017t},$$

hvor t beskriver tiden i timer efter begyndelsestidspunktet og B er antallet af bakterier i mia.

i) Tegn grafen for B

ii) Bestem $B(3)$ og $B'(3)$ og forklar hvad disse tal siger om bakterievæksten.

iii) Hvornår stiger antallet af bakterier med én mia. i timen?

Niveau 2

Antallet af mennesker i en storby P kan i tidsperioden 1930 til 2020 beskrives ved funktionen

$$P(t) = \frac{7.8}{1 + 5.6\mathrm{e}^{-0.074t}},$$

hvor P er antal mennesker i mio. og t er tiden efter år 1930 i år.

i) Tegn funktionen.

ii) Bestem $P(0)$ og giv en fortolkning af dette tal.

iii) Bestem $P'(40)$ og forklar, hvad dette tal siger om udviklingen.

iv) Bestem det tidspunkt, hvor antallet af mennesker i byen vokser mest.

Niveau 3

Antallet af katte i et lille land kan beskrives ved funktionen

$$K(t) = \frac{5.3}{1 + c\mathrm{e}^{-0.097t}},$$

hvor K er antallet af katte i mio. og t er tiden i år efter år 1950.

i) Bestem antallet af katte i år 1960, hvis $c = 4.4$.

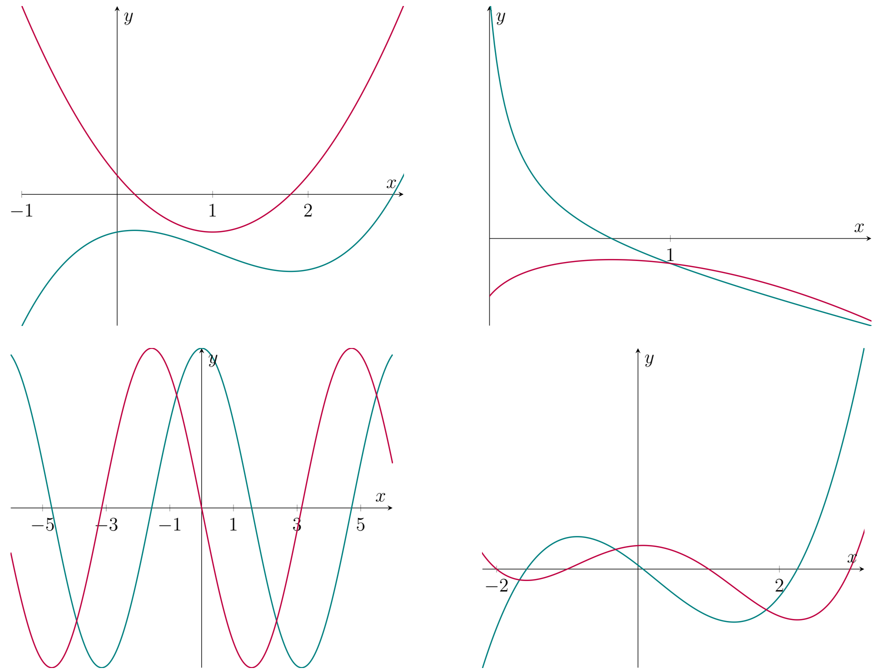
ii) Hvornår stiger antallet af katte med 100000 årligt, hvis $c = 4.9$?

iii) Hvor mange katte er der i år 1960, hvis antallet af katte skal vokse hurtigst i år 1980?

Grafer og differentialregning

Uden hjælpemidler

Bestem hvilke af graferne der tilsvarer funktionen f og hvilken der tilsvarer f'



Monotoniforhold

Uden hjælpemidler

i) For en funktion g gælder der, at $g'(x) = 0$ hvis og kun hvis $x = 2$ eller $x = 4$ samt at $g'(-4) = 1$, $g'(3) = 2$ og $g'(5) = -2$. Opskriv monotoniforholdene for g

ii) Bestem monotoniforholdene for funktionen f givet ved

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

iii) Bestem monotoniforholdene for funktionen g givet ved

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 10$$

Optimering

Med hjælpemidler

Niveau 2

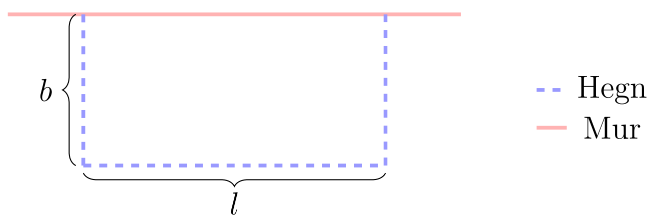
En person skal indhegne sine høns, og han vælger at gøre det op ad en bygning. Han skal derfor have hegn på det stiplede område på figuren.

i) Bestem et udtryk for omkredsen af hegnet, der afhænger af b og l.

ii) Bestem et udtryk for arealet af hegnet, der afhænger af b og l.

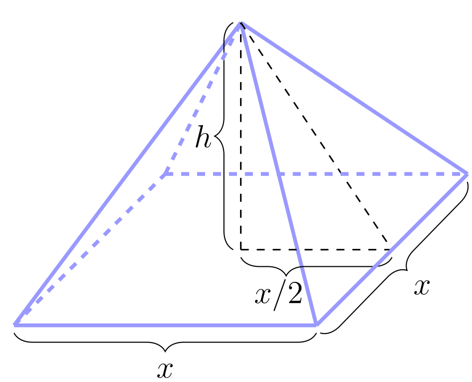
iii) Udnyt at personen har 50m hegn til at bestemme et udtryk for arealet, der kun afhænger af bredden.

iv) Bestem de dimensioner, der gør hønseburet så stort som muligt.



Niveau 3

Vi skal bygge en pyramide, og vi har sten nok til at overfladearealet af pyramiden kan blive 1 km^2. Vi vil gerne have at pyramiden har kvadratisk bund, og vi ønsker, at rumfanget af pyramiden er så stort som muligt, og vi ønsker ikke, at der skal være bund i pyramiden. Bredden og længden af pyramiden er x og højden af pyramiden er h. Pyramiden kan ses på Fig. 1



Figur 1: Pyramide med kvadratisk bund

i) Rumfanget af en pyramide er givet ved $R = (b \cdot l \cdot h)/3$, hvor l er længden af pyramiden, b er bredden af pyramiden og h er højden af pyramiden. Bestem overfladearealet af pyramiden på Figur 1.

ii) Argumentér for, at overfladeareal af en af de fire sidetrekanter er givet ved

$$O_T = \frac{x \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4} + h^2}}{2},$$

og konkludér, at det samlede overfladeareal af pyramiden må være givet ved

$$O_P = 2 \cdot x \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4} + h^2}.$$

iii) Udnyt, at vi ved, at det samlede overfladeareal skal være 1km^2, således at

$$O_P = 1 = 2 \cdot x \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4} + h^2},$$

og brug dette til at vise, at

$$h = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot x^2} - \frac{x^2}{4}}.$$

iv) Indsæt nu udtrykket for h i udtrykket for rumfanget af pyramiden og plot rumfanget som funktion af x på intervallet $[0, 1]$.

v) Bestem de dimensioner på pyramiden, der gør rumfanget af pyramiden maksimalt.