Ligninger

Lineære ligninger

Vi skal lære, hvordan vi arbejder med ligninger af andre typer end lineære ligninger af én variabel. Sidst så vi på lineære ligningssystemer, der kunne indeholde flere variable.

Eksempel 1.1. En lineær ligning af én variabel kunne være en ligning af typen

$$2(x-4)=8.$$

Denne løses ved at isolere x som i grundforløbet.

$$\begin{aligned} 2(x-4)=8 &\Leftrightarrow 2x-8=8 \\ &\Leftrightarrow 2x=16 \\ &\Leftrightarrow x=8. \end{aligned}$$

Andengradsligninger

En andengradsligning er en ligning, hvor der indgår et led med x^2. Disse kan se ud på flere forskellige måder, og vi kan generelt desværre ikke isolere x i disse ligninger med vores sædvanlige værktøjer. Nogle gange kan vi dog gætte løsningen. Disse ligninger har heller ikke altid nogle løsninger.

Eksempel 2.1. En andengradsligning kunne være en ligning på formen

$$x^2=16$$

Denne ligning kan vi gætte løsningerne på. Løsningerne til denne ligning er $x=4$ og $x=-4$. Andengradsligningen

$$x^2=-4$$

har derimod ikke nogle løsninger i $\mathbb{R}$. En andengradsligning på formen

$$x^2+4x+2=0$$

kan vi ikke løse med vores sædvanlige værktøjskasse. Vi skal næste gang se på, hvordan sådan en ligning løses.

Vi kan definere en andengradsligning mere generelt.

Definition 2.2 (Andengradsligning)**.** En andengradsligning er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Eksempel 2.3. Andengradsligningen

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

har $a = 1$, $b = 4$ og $c = 2$.

Hvis der i en ligning ikke optræder noget konstantled c, så kan vi bruge *nulreglen* til at bestemme løsningerne til ligningen.

Eksempel 2.4. Vi har ligningen

$$x^2 + 3x = 0$$

Vi kan sætte x uden for en parentes og få

$$x(x + 3) = 0.$$

For at dette udtryk skal kunne give 0, så skal enten x være nul eller $x + 3$ være nul. Derfor må løsningerne være $x = 0$ og $x = -3$.

Opgave 1

Løs følgende ligninger.

1) $2x + 6 = 12$ 2) $10x + 5 = -35$
3) $4(x + 5) = 24$ 4) $8x = 2(9 + 4x) - 2x$

Opgave 2

Løs følgende ligninger.

1) $\dfrac{4x}{5 + x} = 2$ 2) $\dfrac{2x + 7}{x} = 3$
3) $\dfrac{5 + 7x}{3x + 1} = 2$ 4) $\dfrac{x + 4}{x + 6} = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

Opgave 3

Bestem løsningerne til følgende ligninger, hvis de eksisterer.

1) $x^2 = 4$	2) $x^2 - 36 = 0$
3) $x^2 + 9 = 0$	4) $x^2 = 100$
5) $2x^2 - 50 = 0$	6) $3x^3 - 81 = 0$
7) $x^4 = -16$	8) $x^5 - 243 = 0$

Opgave 4

Bestem koefficienterne a, b og c for følgende andengradsligniger.

1) $2x^2 - 5x + 7 = 0$	2) $-6x^2 + 7x - 1 = 0$
3) $-x^2 - 10 + 5x = 0$	4) $5x^2 = -2x + 4$
5) $2 + 7x^2 - 50 = 0$	6) $10 = x^2 + 7x$

Opgave 5

Brug nulreglen til at bestemme løsningerne til følgende ligninger.

1) $(x-1)(x+2) = 0$	2) $2x + x^2 = 0$
3) $6x^2 + 12x = 0$	4) $x^2 = 14x$
5) $10x + 100x^2 = 0$	6) $(x^2 - 4)(\log_2(x) - 3) = 0$
7) $e^{6x^2+36x} = 1$	8) $\log_2(9x^2 + 81x + 16) = 4$