Binomialkoefficienten

Binomialkoefficienten

Vi diskuterede sidste gang permutationer og antallet af permutationer af r elementer blandt n elementer. I den bearbejdning tog vi ikke højde for, at permutationers rækkefølge ofte er ligegyldig. Trækker vi fem kort i et kortspil, så er vi ligeglade med, om vi har trukket spar to før klør fem eller omvendt. Dette vil vi tage højde for nu.

Definition 1.1. Vi betegner antallet af måder, vi kan udvælge r elementer blandt n elementer, hvor rækkefølgen ikke har betydning som

$$\mathrm{K}(n, r) = \binom{n}{r}.$$

hvoraf det er den sidste skrivemåde, der er klart mest anvendt uden for gymnasieskolen, men $\mathrm{K}(n, r)$ vil I se i en eksamensopgave. Dette symbol kaldes for binomialkoefficienten.

Sætning 1.2. *Binomialkoefficienten* $\mathrm{K}(n, r)$ *er givet ved*

$$\mathrm{K}(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Bevis. Antallet af måder, vi kan udvælge r elementer blandt n elementer, hvor rækkefølge har betydning så vi sidst var $\mathrm{P}(n, r) = n!/(n-r)!$. Vi skal nu tage højde for alle de permutationer, der består af de samme elementer i forskellige rækkefølge. Men for ethvert valg af r elementer, så er der jo lige præcis $r!$ måder at permutere dem. Derfor må vi have $r!$ gange for mange permutationer med. Altså er $K(n, r)$ givet ved

$$\mathrm{K}(n, r) = \frac{\mathrm{P}(n, r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

■

Eksempel 1.3. Hvis der for en mængde A gælder, at $|A| = n$, så er $\mathrm{K}(n, r)$ antallet af delmængder af A med kardinalitet r, da rækkefølgen af elementerne ikke har betydning i en mængde.

Eksempel 1.4. Vi skal bestemme på hvor mange måder, vi kan udvælge 3 kort i et kortspil. Da rækkefølge ikke betyder noget, og da der er 52 kort i et kortspil, så er det givet som

$$\binom{52}{3} = \frac{52!}{3!(49)!} = 21000.$$

Pascals trekant

Man kan beskrive binomialkoefficienten ud fra det, der kaldes en *differensligning* (også kaldet rekurrensrelation eller rekursionsligning).

Sætning 1.5. *For binomialkoefficienten gælder følgende rekursionsligning*

$$\mathrm{K}(n,r) = \mathrm{K}(n-1,r-1) + \mathrm{K}(n-1,r). \tag{1.1}$$

Bevis. For at bevise dette betragter vi mængden $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, og vi skal bestemme antallet af måder, vi kan vælge forskellige delmængder af A med r elementer. Vi deler disse delmængder op i to kategorier:

i) De delmængder, der indeholder elementet x_1.

ii) De delmængder, der ikke indeholder elementet x_1.

Vi betragter først tilfældet i). Hvis vi har valgt x_1 som element i vores delmængde, så mangler vi at vælge $r-1$ elementer blandt elementerne $\{x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ (vi kan jo ikke vælge x_1 igen). Vi har altså $n-1$ valgmuligheder. Delmængderne af type i) kan altså vælges på $\mathrm{K}(n-1,r-1)$ forskellige måder.

Vi betragter nu tilfældet ii). Hvis x_1 ikke må være i delmængden, så skal vi vælge r elementer i mængden $\{x_2, x_3, \ldots, x_n\}$. Vi har altså $n-1$ valgmuligheder for elementer til vores mængde. Delmængder af type ii) kan altså vælges på $\mathrm{K}(n-1,r)$ forskellige måder. Derfor må antallet af måder, vi kan vælge delmængder af A med r elementer være antal måder vi kan vælge type i) summeret med antallet af måder, vi kan vælge delmængder af type ii). Altså kan vi konkludere, at

$$\mathrm{K}(n,r) = \underbrace{\mathrm{K}(n-1,r-1)}_{\text{type i)}} + \underbrace{\mathrm{K}(n-1,r)}_{\text{type ii)}}.$$

■

Pascals trekant er defineret som en uendelig trekant af binomialkoefficienter. De første seks rækker kan ses af Figur 1.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&& K(0,0) &&&&&& \\
&&&&& K(1,0) && K(1,1) &&&&& \\
&&&& K(2,0) && K(2,1) && K(2,2) &&&& \\
&&& K(3,0) && K(3,1) && K(3,2) && K(3,3) &&& \\
&& K(4,0) && K(4,1) && K(4,2) && K(4,3) && K(4,4) && \\
& K(5,0) && K(5,1) && K(5,2) && K(5,3) && K(5,4) && K(5,5) & \\
K(6,0) && K(6,1) && K(6,2) && K(6,3) && K(6,4) && K(6,5) && K(6,6)
\end{array}
$$

Figur 1: De første seks rækker i Pascals trekant

Det er klart, at alle $K(n,0) = 1$ og $K(n,n) = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dette sammen med rekursionsligningen (1.1) kan hjælpe os med at udfylde Pascals trekant. Resultatet af dette kan ses af Figur 2.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& 1 && 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 2 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 3 && 3 && 1 &&& \\
&& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 && \\
& 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 & \\
1 && 6 && 15 && 20 && 15 && 6 && 1
\end{array}
$$

Figur 2: De første seks rækker i Pascals trekant.

Opgave 1

Vi har en pose med fem forskellige bolde.

i) På hvor mange forskellige måder kan vi vælge to bolde i posen, hvis rækkefølgen ikke betyder noget?

ii) På hvor mange forskellige måder kan vi vælge 4 bolde i posen, hvis rækkefølgen ikke betyder noget?

Opgave 2

En isbutik har 12 forskellige typer is, og vi er ligeglade med rækkefølgen af kugler

i) På hvor mange forskellige måder kan vi bestille 3 kugler is?

ii) Hvis vi vil have chokolade som den sidste kugle, på hvor mange forskellige måder kan vi så bestille is?

iii) Hvis vi vil have chokolade, men er ligeglade med placeringen, på hvor mange forskellige måder kan vi så bestille en is?

Opgave 3

i) Opskriv den 7. række i Pascals trekant

ii) Af Pascals trekant ser det ud som om, at

$$\mathrm{K}(n, r) = \mathrm{K}(n, n-r).$$

Giv et kombinatorisk argument for, hvorfor dette er sandt. (Forklar det uden algebra.)

iii) Bevis, at $\mathrm{K}(n, r) = \mathrm{K}(n, n-r)$ ved at bruge formlen

$$\mathrm{K}(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Opgave 4

Bestem ved hjælp af Pascals trekant følgende binomialkoefficienter:

1) $\mathrm{K}(3, 4)$ 2) $\mathrm{K}(7, 3)$

3) $\mathrm{K}(8, 5)$ 4) $\binom{9}{2}$

Opgave 5

Bestem i Maple $(x + y)^n$ for $n = 1, 2, \ldots, 6$ og sammenlign koefficienterne for leddene med Pascals trekant. Hvad kan du se?

Opgave 6

I skal lave netværksgrupper i klassen. Disse består af 4 personer.

i) Bestem antallet af måder, man kan lave en netværksgruppe.

Opgave 7

En mand har i sit klædeskab syv skjorter, fem par bukser og 3 jakker. Han skal have tre skjorter, to par bukser og en jakke med på ferie. På hvor mange måder kan han pakke sin kuffert?

Opgave 8

Vi er til dimission og alle får serveret et glas champagne. Alle gæster skåler med alle andre gæster, og vi hører i alt 435 klir fra glas, der støder sammen.

i) Hvor mange er der til dimissionen?

ii) Gæsterne skåler nu tre og tre på alle mulige måder. Hvor mange klir hører vi nu?

Opgave 9

Bestem følgende binomialkoefficienter:

1) $\binom{7}{2}$ 2) $\binom{10}{3}$

3) $\binom{5}{4}$ 4) $\binom{200}{1}$

Opgave 10

En pokerhånd består af fem kort fra et kortspil på 52 kort.

i) Hvor mange hænder er der i poker?

ii) En flush består af fem kort i samme kulør. På hvor mange forskellige måder kan man få flush med hjerter? På hvor mange måder kan man få flush i alt?

iii) En straight består af 5 kort i følge; e.g. 2,3,4,5,6. På hvor mange forskellige måder kan man få straight?

Opgave 11

Du skal i biografen med klassen. I en biograf med 200 sæder, på hvor mange forskellige måder kan I så vælge jeres sæder?