Rødder for andengradspolynomier

Rødder for andengradspolynomier

Hvis vi skal bestemme rødderne for et andengradspolynomium, så skal vi bruge løsningsformlen for andengradsligninger, som vi også til tider kalder for diskriminantformlen. Denne er givet ved følgende.

Sætning 1.1 (Løsningsformlen for andengradsligninger)**.** *Rødderne for et andengradspolynomium f givet ved*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

er givet ved

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a},$$

hvor vi antager, at diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ er ikke-negativ.

Bevis. Vi skal løse ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1.1}$$

Før vi går i gang med at løse ligningen, så vil vi gerne udregne et hjælperesultat. Vi vil gerne hæve parentesen i

$$(2ax + b)^2, \tag{1.2}$$

og til dette skal vi bruge kvadratsætningen

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Vi anvender denne kvadratsætning på (1.2) og får

$$(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + b^2 + 4axb. \tag{1.3}$$

Dette skal vi bruge senere i beviset. Vi vender nu tilbage til ligningen (1.1) og ganger begge sider af lighedstegnet med $4a$.

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Vi lægger nu diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ til på begge sider af lighedstegnet.

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Vi skal nu anvende (1.2) på venstresiden og får

$$(2ax + b)^2 = d.$$

Da d er ikke-negativ, så kan vi tage kvadratroden på begge sider af lighedstegnet, og vi får

$$2ax + b = \pm\sqrt{d}$$

Vi kan nu isolere x og får

$$\begin{aligned} 2ax + b = \pm\sqrt{d} &\Leftrightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{d} \\ &\Leftrightarrow \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}. \end{aligned}$$

Med dette er vi færdige. ■