Gensyn med linjens ligning og parametrisering

Repræsentationer for linjen

Vi husker på, at vi kan beskrive en linje l ud fra et punkt på linjen $P = (x_0, y_0)$ samt en normalvektor til linjen $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Dette gøres ud fra følgende kendsgærning. Vi kan danne en vektor fra (x_0, y_0) til ethvert andet punkt (x, y) som

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Vi husker på, at to vektorer er orthogonale hvis og kun hvis deres prikprodukt er 0. Derfor må alle punkter (x, y) opfylde, at vektoren (1.1) og $\vec{n}$ er orthogonale, altså

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

hvilket medfører, at

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Vi kan nu konkludere med en sætning.

Sætning 1.1 (Linjens ligning)**.** *Alle punkter (x, y), der ligger på en linje l opfylder, at*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

hvor $P = (x_0, y_0)$ er et punkt på linjen og $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er en normalvektor til l.

Eksempel 1.2. På linjen l kender vi punktet $P = (-1, 3)$ og normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ligningen for l er derfor givet

$$2(x + 1) + 4(y - 3) = 0.$$

Vi kan repræsentere linjen ved hjælp af en retningsvektor i stedet. Har vi en linje l, der går gennem et punkt $P = (x_0, y_0)$, samt har en retningsvektor $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, så må punktet (x, y), der opfylder, at

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

ligge på l. Men for $t \in \mathbb{R}$ ved vi, at alle vektorer $t\overrightarrow{r}$ er parallelle med $\overrightarrow{r}$. Derfor må der desuden gælde, at alle punkter (x, y), der opfylder, at

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Må være præcist de punkter, der ligger på linjen l. Dette leder os til følgende sætning.

Sætning 1.3 (Parametrisering af linjen)**.** *For en linje l gælder der, at alle punkter (x, y), der ligger på l opfylder, at*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

hvor $P = (x_0, y_0)$ er et punkt på linjen og $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er en retningsvektor for linjen. Vi kalder dette for en parametrisering af l.

Eksempel 1.4. Har vi et punkt $P = (-1, 3)$ og en retningsvektor $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ kan vi bestemme parametriseringen for linjen l, der går gennem P og har retningsvektor $\overrightarrow{r}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ er orthogonal til $\overrightarrow{r}$ vil denne vektor være en normalvektor til l. Vi kan derfor også repræsentere l ved ligningen

$$-1(x + 1) + 5(y - 3) = 0.$$

Opgave 1

Bestem linjens ligning for følgende punkter $P = (x_0, y_0)$ og normalvektorer $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

1) $P = (1, 1),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) $P = (-5, -3),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3) $P = (\frac{-2}{5}, 13),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \end{pmatrix}$.

4) $P = (\sqrt{2}, \sqrt{3}),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}$.

5) $P = (0, 0),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6) $P = (-100, 5),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -9 \end{pmatrix}$.

Opgave 2

Bestem parametriseringen for en linje, der står vinkelret på hver af linjerne fra Opgave 1.

Opgave 3

i) Bestem en parametrisering for linjen l givet ved ligningen

$$2(x-2) + 3(y+1) = 0.$$

ii) Bestem en parametrisering for linjen l givet ved ligningen

$$-10(x-10) + 10(y+10) = 0.$$

iii) Bestem en ligning for linjen l givet ved parametriseringen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

iv) Bestem en ligning for linjen l givet ved parametriseringen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Opgave 4

i) Bestem skæringen mellem linjerne l og m, der har følgende ligninger henholdsvist:

$$(x-3)+(y-4)=0$$

og

$$4(x+2)+2(y-1)=0$$

ii) Bestem skæringen mellem linjerne l og m, der har følgende ligninger henholdsvist:

$$2(x+1)+3(y-1)=0$$

og

$$4(x-4)+1(y-2)=0$$

iii) Bestem skæringen mellem linjerne l og m, der har følgende parametriseringer henholdsvist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iv) Bestem skæringen mellem linjerne l og m, der har følgende parametriseringer henholdsvist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$