Lineær vækst og lineære funktioner

For to tal a og b kaldes en sammenhæng mellem en uafhængig variabel x og en afhængig variabel y på formen $y = ax + b$ for en lineær sammenhæng. Dette leder os til definitionen af en lineær funktion

Definition 1.1. En lineær funktion f defineres som en funktion med forskrift

$$f(x) = ax + b,$$

hvor a og b er vilkårlige reelle tal.

Eksempel 1.2. Vi har en lineær sammenhæng $y = 3x - 4$. Her er $a = 3$ og $b = -4$.

Eksempel 1.3. Funktionen f givet ved

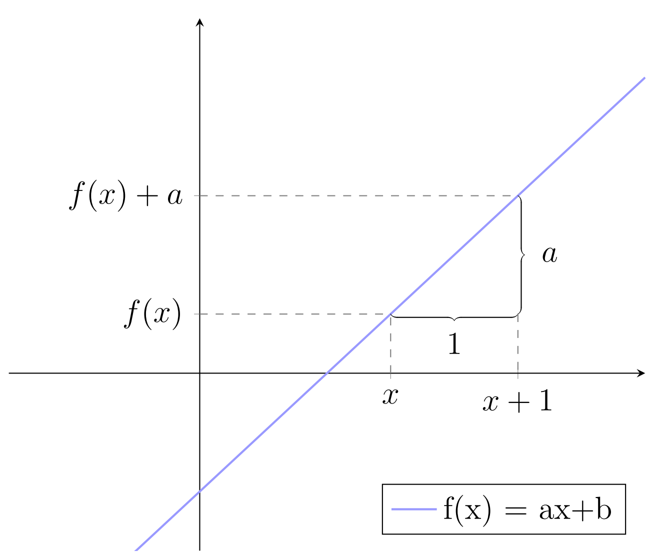
$$f(x) = -10x + 7$$

er en lineær funktion med $a = -10$ og $b = 7$.

Af Fig. 1 og Fig. 2 kan det ses, hvordan lineær vækst udvikler sig.

$$\begin{array}{c} \overset{+1}{\curvearrowright} \\ \begin{array}{c|c} x & x+1 \\ \hline f(x) & f(x)+a \end{array} \\ \underset{+a}{\curvearrowright} \end{array}$$

Figur 1: Udvikling af lineær vækst.



Figur 2: Udvikling af lineær vækst

Det er ikke svært at overbevise sig selv, om at dette er tilfældet. Øges x med 1 får vi

$$f(x+1) = a(x+1) + b = ax + b + a = f(x) + a,$$

hvoraf det ses, at en øgning af x med 1 tilsvarer en øgning af $f(x)$ med a.

Det er muligt at bestemme en entydig lineær funktion, der skærer gennem to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2). Formlen til at bestemme denne lineære funktion kalder vi for topunktsformlen for lineære funktioner. Den er givet af følgende sætning.

Sætning 1.4 (Topunktsformlen for lineære funktioner)**.** *Har vi to punkter* (x_1, y_1) *og* (x_2, y_2)*, så kan vi finde en entydig lineær funktion* f *givet ved*

$$f(x) = ax + b,$$

hvis graf skærer gennem disse punkter. Koefficienterne a *og* b *er givet ved henholdsvist*

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

og

$$b = y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2.$$

Bevis. Vi antager, at en lineær funktion f givet ved

$$f(x) = ax + b$$

skærer gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2). Der må da gælde, at

$$y_1 = ax_1 + b$$

og

$$y_2 = ax_2 + b.$$

Vi trækker nu disse udtryk fra hinanden.

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \underbrace{ax_2 + b}_{=y_2} - \underbrace{(ax_1 + b)}_{=y_1} \\ &= ax_2 + b - ax_1 - b \\ &= a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Vi isolerer nu a i dette udtryk og får

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Vi mangler nu kun at vise, hvordan vi bestemmer b. Vi ved, at $y_1 = ax_1 + b$. Isoleres b i dette udtryk fås

$$b = y_1 - ax_1.$$

■