Funktionsegenskaber

Surjektivitet og injektivitet

Definition 1.1 (Surjektiv funktion)**.** Lad $f : A \to B$ være givet. Hvis billedet af A under f opfylder, at

$$f(A) = B,$$

så siger vi, at f er *surjektiv*.

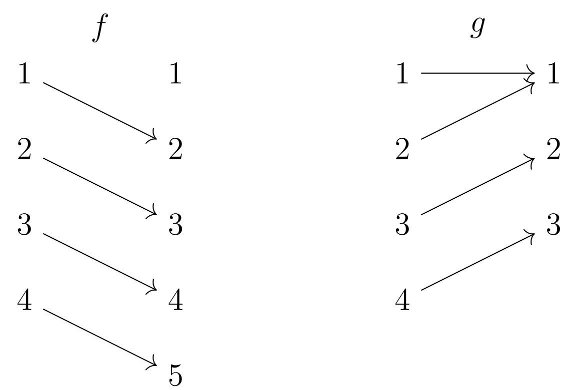
Hvis $f(A) = B$, så betyder det, at værdimængden for f er lig dispositionsmængden for f, altså at $\mathrm{Vm}(f) = B$. Funktionen kan altså ramme alt i dispositionsmængden.

Eksempel 1.2. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = 2x + 3$$

er surjektiv, da $f(x)$ kan antage alle reelle tal som værdi.

Eksempel 1.3. Funktionen $f : \{1, \ldots, 4\} \to \{1, \ldots, 5\}$, der ses af Figur 1 er ikke surjektiv, da elementet $1 \in \{1, \ldots, 5\}$ ikke ligger i værdimængden for f. Derimod er funktionen $g : \{1, \ldots, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ er surjektiv, da alle elementer i dispositionsmængden rammes af g.



Figur 1: Diagram for funktionerne f og g.

Definition 1.4 (Injektiv funktion)**.** Lad $f : A \to B$ være givet. Hvis det for to elementer $f(x_1) \in B$ og $f(x_2) \in B$ i værdimængden for f gælder, at

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2,$$

så siges f at være *injektiv*.

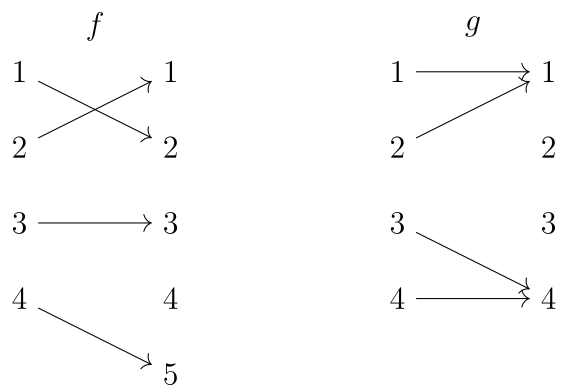
At f er injektiv betyder, at to forskellige værdier i definitionsmængden for f nødvendigvis bliver sendt til to forskellige værdier i værdimængden for f.

Eksempel 1.5. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ være givet ved

$$f(x) = x^2.$$

Denne funktion er ikke injektiv, da der til hver funktionsværdi $f(x)$ tilhører to x-værdier - x og $-x$. Det er eksempelvist opfyldt, at $f(2) = f(-2) = 4$.

Eksempel 1.6. Funktionen $f : \{1, \ldots, 4\} \to \{1, \ldots, 5\}$, der ses på Figur 2 er injektiv, da der kun er én pil hen til hvert punkt i B, hvorimod $g : \{1, \ldots, 4\} \to \{1, \ldots, 5\}$ er ikke injektiv,da to pile peger hen til punkterne $1, 4 \in \{1, \ldots, 4\}$.



Figur 2: Diagram for funktionerne f og g.

Definition 1.7 (Bijektiv funktion)**.** En funktion, der både er injektiv og surjektiv kaldes *bijektiv*.

Definition 1.8 (Invers funktion)**.** For en funktion $f : A \to B$ siges en funktion $g : B \to A$ at være *invers funktion* til g, hvis det gælder, at

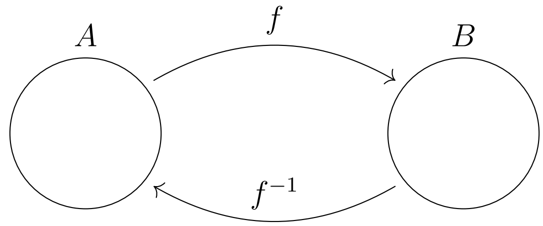
$$f \circ g(x) = x$$

og

$$g \circ f(x) = x.$$

I så fald skriver vi $g = f^{-1}$.

Det kan vises, at en funktion f har en invers funktion hvis og kun hvis den er bijektiv Vi kan se en illustration af en invers funktion på Figur 3.



Figur 3: Funktion f samt invers funktion f^{-1}.

Eksempel 1.9. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = 4x + 7$$

er bijektiv. Vi kan finde den inverse funktion til f ved at isolere x i ligningen

$$y = 4x + 7 \;\Leftrightarrow\; y - 7 = 4x \;\Leftrightarrow \frac{y-7}{4} = x.$$

Derfor er funktionen $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{4}$$

den inverse funktion til f. Vi kan tjekke dette ved at bestemme den sammensatte funktion $f \circ f^{-1}$:

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f^{-1}(f(x)) \\ &= \frac{4x+7-7}{4} \\ &= \frac{4x}{4} \\ &= x. \end{aligned}$$

Eksempel 1.10. Hvis vi betragter kvadratfunktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ givet ved

$$f(x) = x^2$$

til første kvadrant, så har den kvadratrodsfunktionen $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ udtrykt ved

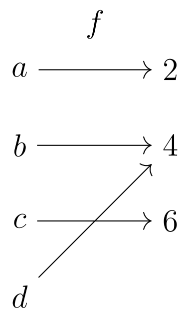
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

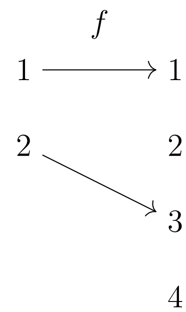
som invers funktion, siden

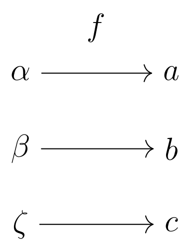
$$\sqrt{x^2} = x.$$

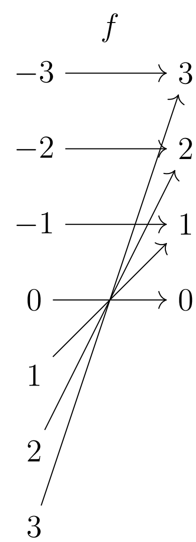
Opgave 1

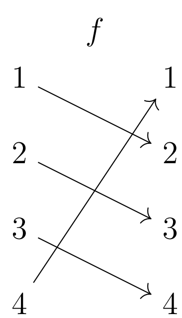
Afgør, hvilke af følgende der er surjektive, injektive eller bijektive. I fald de er bijektive, bestem så den inverse funktion.

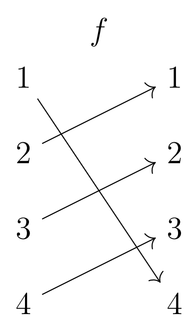












Opgave 2

I følgende opgaver kan det være en fordel at tegne funktionerne.

i) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = 10x.$$

Afgør, om f er surjektiv, injektiv eller bijektiv.

ii) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = x^3.$$

Afgør, om f er surjektiv, injektiv eller bijektiv.

iii) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = x^2 - 3x + 7.$$

Afgør, om f er surjektiv, injektiv eller bijektiv.

iv) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2.$$

Afgør, om f er surjektiv, injektiv eller bijektiv.

Opgave 3

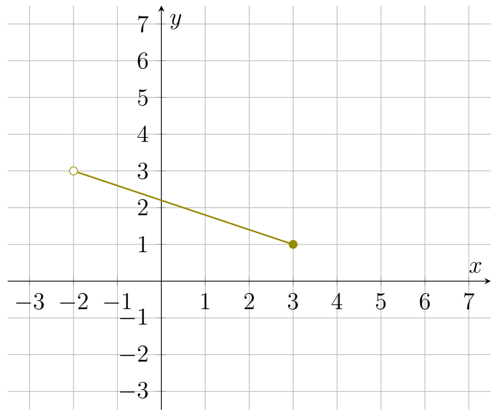
i) Lad A bestå af alle varer i et supermarked. En funktion $f : A \to \mathbb{R}$ giver prisen på varen. Er funktionen surjektiv, injektiv eller bijektiv?

ii) Lad A være alle elever på Nørre. Funktionen $f : A \to \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$ giver alderen på en elev. Er funktionen surjektiv, injektiv eller bijektiv?

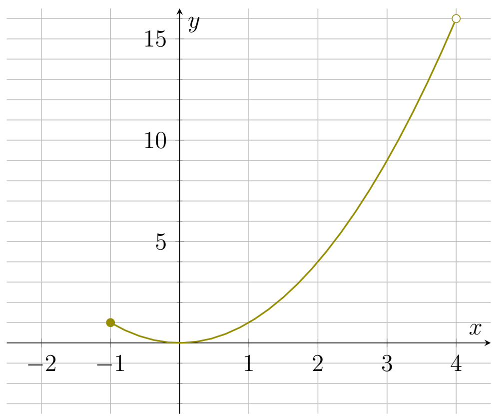
iii) Lad A betegne mængden af alle danskere og B betegner mængden af alle CPR-numre. Funktionen $f : A \to B$ giver CPR-nummeret på en person. Er funktionen surjektiv, injektiv eller bijektiv?

Opgave 4

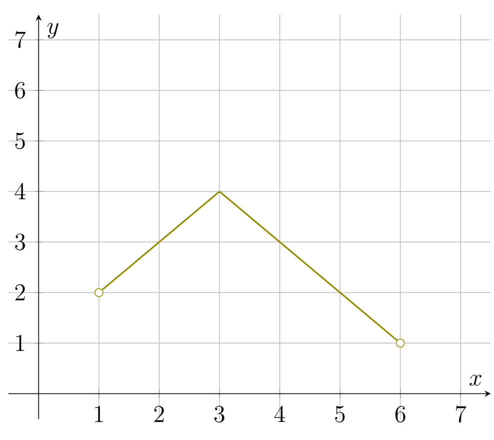
i) Afgør om funktionen $f :]-2, 3] \to [1, 3[$ givet ved følgende graf er surjektiv, injektiv eller bijektiv.



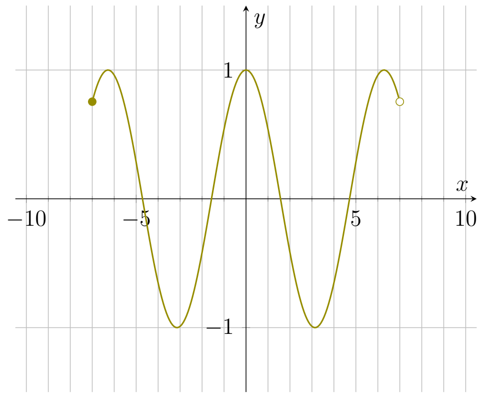
ii) Afgør om funktionen $f : [-1, 4[\to [0, 16[$ givet ved følgende graf er surjektiv, injektiv eller bijektiv.



iii) Afgør om funktionen $f\ :]1, 6[\to]1, 4]$ givet ved følgende graf er surjektiv, injektiv eller bijektiv.



iv) Afgør om funktionen $f : [-7, 7[\to [-1, 1]$ givet ved følgende graf er surjektiv, injektiv eller bijektiv.



Opgave 5

i) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = 3x + 1$$

er bijektiv. Bestem en invers funktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til f.

ii) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = -7x - 13$$

er bijektiv. Bestem en invers funktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til f.

iii) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = x^3$$

er bijektiv. Bestem en invers funktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til f.

Opgave 6

i) Afgør, om funktionerne f og g givet ved henholdsvis

$$f(x) = \frac{\log_2(x) + 6}{4},$$
$$g(x) = 2^{4x-6}.$$

er hinandens inverse

ii) Afgør, om funktionerne f og g givet ved henholdsvis

$$f(x) = (5x - 7)^3,$$
$$g(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 7}{3}.$$

er hinandens inverse.