Enhedsvektorer og prikprodukter

Enhedsvektorer

Vi kalder alle vektorer, der har længde 1 for enhedsvektorer. Givet en vektor $\vec{v}$ kan vi bestemme en enhedsvektor, der peger i samme retning som $\vec{v}$.

Sætning 1.1. *Lad $\vec{v}$ være en ikke-nulvektor. Så er vektoren*

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$$

en enhedsvektor ensrettet og parallel med $\vec{v}$.

Bevis. Længden af $\vec{e}$ er givet ved

$$|\vec{e}| = \left|\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|}|\vec{v}| = 1.$$

Vektorerne er klart parallelle, og de peger i samme retning, da $\frac{1}{v} > 0$. ■

Eksempel 1.2. Lad $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Så kan vi bestemme en enhedsvektor parallel med $\vec{v}$ som

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Prikprodukt

Vi vil ikke definere nogen måde at gange vektorer sammen. Vi vil i stedet definere det såkaldte prikprodukt. Dette kan blandt andet bruges til at bestemme vinklen mellem to vektorer.

Definition 2.1. Lad $\vec{v}$ og $\vec{w}$ være defineret som

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \text{ og } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Så defineres *prikproduktet*, *skalarproduktet*, eller *det indre produkt* mellem $\vec{v}$ og $\vec{w}$ som

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Dette skrives også til tider $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Eksempel 2.2. Lad $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og lad $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Så kan vi bestemme prikproduktet mellem $\vec{v}$ og $\vec{w}$ som

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = 6.$$

Sætning 2.3. *To vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er orthogonale hvis og kun hvis $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.*

Vi vil senere se mere præcist hvordan sammenhængen mellem vinklen mellem vektorer og prikproduktet er.

Eksempel 2.4. Vi vil afgøre, om $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er orthogonale. Vi bestemmer derfor prikproduktet

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0.$$

Derfor ved vi, at vinklen mellem de to vektorer er $0°$, og at de derfor er orthogonale eller vinkelrette.

Sætning 2.5 (Regneregler for prikproduktet)**.** *For vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ samt konstanter k gælder der, at*

i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,

ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w})$,

iii) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$,

iv) $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$,

v) $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$.

3 Opgave 1

i) Bestem en enhedsvektor, der peger i samme retning som følgende vektorer:

1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Opgave 2

i) Bestem prikproduktet mellem følgende vektorer

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -3 \\ 14 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0.1 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

Opgave 3

Bevis Sætning 2.3.

Opgave 4

Vis *i*), *ii*), *iv*) og *v*) i Sætning 1.2 fra Modul 26.