

# Vækst af eksponentialfunktioner

## Vækstrate og fremskrivningsfaktor

Vi starter med en definition af en eksponentialfunktion.

**Definition 1.1** (Eksponentialfunktion). Lad  $a, b > 0$ . Så definerer vi en funktion  $f$  på formen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

til at være en *eksponentialfunktion* med *begyndelsesværdi*  $b$ .

Det er ikke svært at se, hvorfor  $b$  kaldes for begyndelsesværdien, thi

$$f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b.$$

**Eksempel 1.2.** Lad os betragte delingen af en bakterie. Vi starter med 1 bakterie, der efter én time er 2 bakterier, efter 2 timer er 4 bakterier, efter 3 timer er 8 bakterier osv. Denne situation kan beskrives ved eksponentialfunktionen  $L(x)$  givet ved

$$L(x) = 2^x.$$

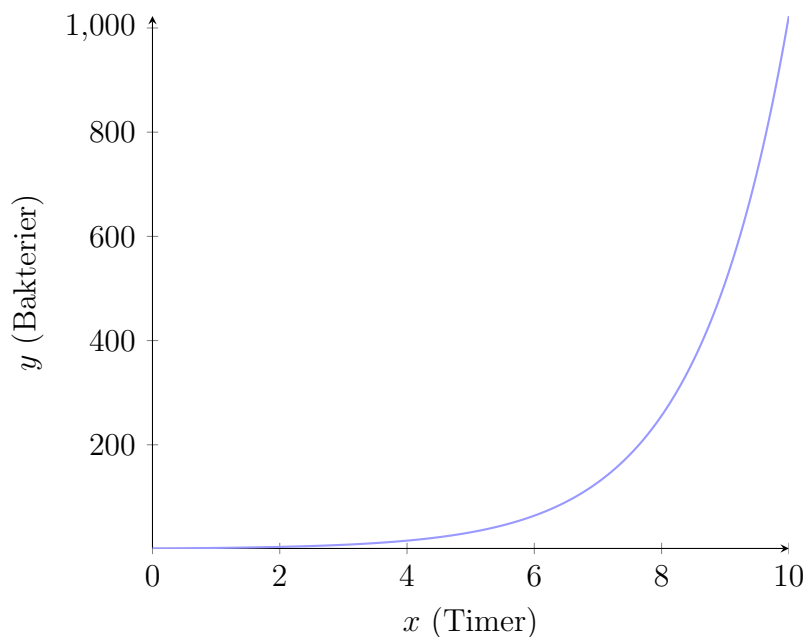
De første 10 funktionsværdier kan ses af Fig. 1

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L(x)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Diagram illustrating the exponential growth of the number of bacteria over time. The table shows the number of bacteria  $L(x)$  at each hour  $x$  from 0 to 10. The values are 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, and 1024. Above the table, arrows indicate a constant growth factor of +1 for each hour. Below the table, arrows indicate a constant growth factor of .2 for each hour.

Figur 1: De første ti funktionsværdier af  $L$ , der beskriver antallet af bakterier.

På Fig 2 kan grafen for  $L$  ses.



Figur 2: Antal bakterier som funktion af tiden

Inspireret af Eksempel 1.2 vil vi se på, hvordan eksponentiel vækst udvikler sig. Vi husker på, at en eksponentialfunktion  $f$  kan skrives på formen

$$f(x) = b \cdot a^x.$$

Ser vi på Fig. 1, så kan vi se, at vi i det tilfælde øger  $f(x)$  med en faktor 2, når vi øger  $x$  med 1. Tilsvarende vil vi øge generel eksponentiel vækst med en faktor  $a$ , når vi øger  $x$  med 1. Faktoren  $a$  kaldes for fremskrivningsfaktoren. Vi kan se dette fænomen af Fig. 3

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{+1} & \\ x & | & x+1 \\ \hline f(x) & | & af(x) \\ & \xleftarrow{\cdot a} & \end{array}$$

Figur 3: Udvikling af eksponentiel vækst.

Det er ikke svært at vise, at dette rent faktisk er sandt. Betragter vi

$$f(x+1) = ba^{x+1} = ba^x a = af(x),$$

så ses det, at eksponentialfunktioner har en sådan udvikling.

**Definition 1.3** (Vækstrate og fremskrivningsfaktor). For en eksponentialfunktion  $f$  givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x$$

kaldes  $a$  for *fremskrivningsfaktoren*. Vi definerer desuden *vækstraten*  $r$  som

$$r = a - 1.$$

## Opgave 1

- i) En eksponentialfunktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 1.3 \cdot 0.97^x.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for  $f$ . Afgør desuden hvor mange procent  $f$  stiger/falder med, hvis  $x$  øges med 1.

- ii) En eksponentialfunktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = b \cdot 2^x.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for  $f$ . Afgør desuden hvor mange procent  $f$  stiger/falder med, hvis  $x$  øges med 1.

- iii) En eksponentialfunktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 9 \cdot 1.34^x.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for  $f$ . Afgør desuden hvor mange procent  $f$  stiger/falder med, hvis  $x$  øges med 1.

- iv) En eksponentialfunktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot 5^x.$$

Bestem fremskrivningsfaktoren og vækstraten for  $f$ . Afgør desuden hvor mange procent  $f$  stiger/falder med, hvis  $x$  øges med 1.

## Opgave 2

- i) Udfyld følgende tabel og opskriv derefter forskriften for eksponentialfunktionen  $f$ .
- ii) Undersøg, om du har udfyldt tabellen korrekt ved at bestemme  $f(10)$ .

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	5.43										
		$\cdot 1.26$									

## Opgave 3

- i) Lad  $f$  være givet ved

$$f(x) = 5 \cdot 1.7^x.$$

Hvor mange procent øges  $f$  med, hvis  $x$  øges med 2?

- ii) Lad  $f$  være givet ved

$$f(x) = b \cdot 0.77^x.$$

Det oplyses, at  $f(4) = 6.01$ . Bestem  $f(8)$ .

- iii) Lad  $f$  være givet ved

$$f(x) = 9.99 \cdot 1.05^x.$$

Hvor meget skal  $x$  øges med før  $f$  fordobles?

## Opgave 4

- i) Hvis vi folder et stykke papir 25 gange, hvor mange lag papir har vi så?
- ii) Hvis ét lag papir er 0.1mm tykt, hvor tykt er dette stykke foldede papir?
- iii) Hvor mange gange skal vi folde papiret, for at det bliver 1km tykt?

## Opgave 5

- i) En bakteriekoloni indeholder til tid  $t = 0$   $B_0 = 100.000$  bakterier. En bakterie deler sig i gennemsnit 1 gang per 4. time, og bakteriekolonien har ubegrænset plads. Beskriv antallet af bakterier som funktion af tiden i timer. Hvor mange bakterier er der i kolonien efter et døgn? Hvornår er der 1 mia. ( $10^9$ ) bakterier i kolonien?
- ii) Et glas vand stilles i et rum, og temperaturen i vandet antages at kunne beskrives ved

$$H(t) = 70 \cdot (0.97)^t,$$

hvor  $H(t)$  beskriver temperaturen i grader celcius og  $t$  betegner tiden i minutter. Hvor varmt er vandet, når det stilles ind i rummet? Hvor varmt er det efter 5 minutter? Hvor varmt er der i rummet i følge modellen.

## Opgave 6

- i) Bevis, at hvis vi øger  $x$  med 2 i en eksponentialfunktion  $f(x)$ , så tilsvare dette at øge  $f(x)$  med en faktor  $a^2$ . Hvad hvis vi øger  $x$  med 3?
- ii) Bevis, at hvis vi øger  $x$  med  $n$  i en eksponentialfunktion  $f(x)$ , så tilsvare dette at øge  $f(x)$  med en faktor  $a^n$ .