# Polynomier

## Introduktion

Vi har set på eksempler på lineære funktioner, konstante funktioner, og vi har løst andengradsligninger. Alle disse koncepter er relaterede til polynomier, som vi vil arbejde mere generelt med. Vi starter med en definition.

**Definition 1.1.** Et polynomium er en funktion $f$ på formen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

hvor $a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Vi kalder $n$ for graden af $f$.

Denne definition er meget generel, og skal forstås gennem eksempler.

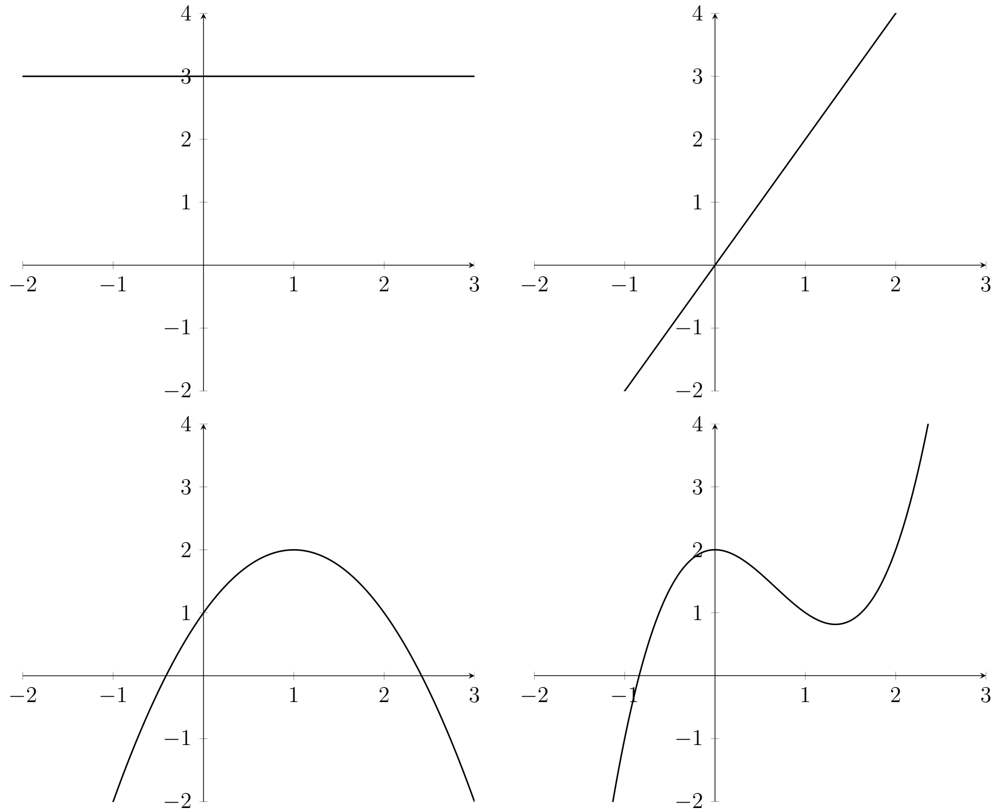
**Eksempel 1.2.** Funktionen $f(x) = 10$ er et konstant polynomium. Vi kalder dette for et nultegradspolynomium, da det eneste led det består af er $a_0 = 10$.

**Eksempel 1.3.** Funktionen $g(x) = 3x - 4$ er et lineært polynomium eller bare en lineær funktion. Det er et førstegradspolynomium, da det består af leddene $a_0 = -4$ og $a_1 x = 3x$.

**Eksempel 1.4.** Funktionen $h(x) = 2x^2 - 4x + 2$ er et andengradspolynomium. Det består af leddene $a_0 = 2$, $a_1 x = -4x$ og $a_2 x^2 = 2x^2$.

**Eksempel 1.5.** Funktionen $p(x) = 5x^7$ er et 7.gradspolynomium. Det består kun af leddet $5x^7$

Vi kalder tallene $a_0, a_1, \ldots, a_n$ for et polynomiums koefficienter. På Fig. 1 kan vi se eksempler på et nulte, første, anden og tredjegradspolynomium.



Figur 1: Henholdsvis nulte-, første-, anden- og tredjegradspolynomier.

Vi har et særligt fokus på andengradspolynomier i dette forløb. Vi har tidligere lært, hvordan man finder rødder for et andengradspolynomium:

**Sætning 1.6.** *For et andengradspolynomium $f$ givet ved*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

*så har $f$ rødder i*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

*Vi kalder $d = b^2 - 4ac$ for diskriminanten.*

Husk, at diskriminanten $d$ afgør, hvor mange rødder et polynomium har. Er $d > 0$, så har polynomiet to rødder. Er $d < 0$, så har polynomiet ingen rødder, og er $d = 0$, så har polynomiet nøjagtigt en rod.

**Eksempel 1.7.** Vi skal finde rødderne for $x^2 - x - 2$. Vi bestemmer først diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9.$$

Vi bestemmer så rødderne

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

og rødderne for $f$ er altså $x = 2$ og $x = -1$ .

Grafen for et andengradspolynomium kaldes for en parabel. Vi bruge grafen for et andengradspolynomium til at afgøre, hvad koefficienterne $a$, $b$ og $c$ skal være (tilnærmelsesvist).

**Sætning 1.8.** *For et andengradspolynomium $f$ givet ved*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

*så er der følgende sammenhæng mellem koefficienterne for $f$ og parablen for $f$:*

- *Hvis $a > 0$, så peger parablens arme op. Hvis $a < 0$, så peger parablens arme ned.*
- *Hældningen af parablen hvor den skærer $y$-aksen er givet ved $b$.*
- *Parablens skæring med $y$-aksen er givet ved $c$.*

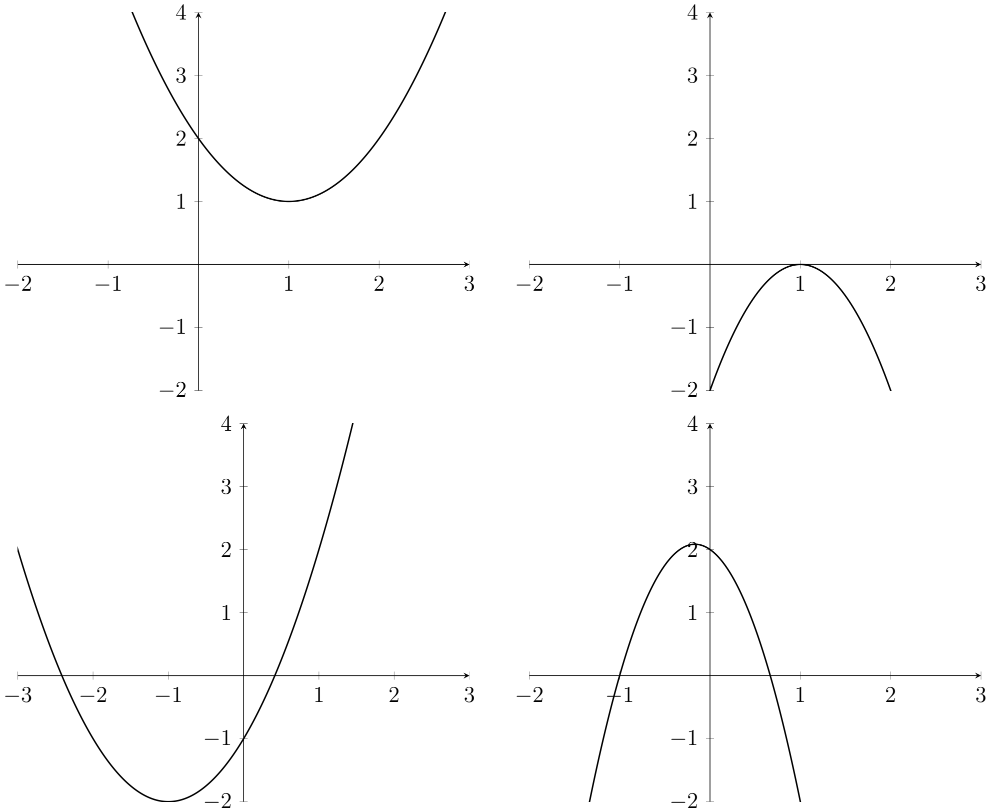
# Opgave 1

For parablerne i Fig. 2

i) Bestem fortegnet på diskriminanten $d$.

ii) Bestem fortegnet på koefficienterne $a$ og $b$.

iii) Bestem $c$.




Figur 2: Fire parabler

# Opgave 2

Skitsér graferne for følgende polynomier og brug din skitse til at afgøre antallet af rødder.

| | |
|---|---|
| 1) $x^2 - 1$ | 2) $-10x^2$ |
| 3) $-2x^2 + 2x + 2$ | 4) $3x^2 - x - 3$ |
| 5) $-x^2 - 10$ | 6) $x^2 + 2x + 7$ |

# Opgave 3

Brug diskriminantformlen til at finde rødderne for følgende andengradspolynomier.

1) $2x^2 + 2x - 12$
2) $2x^2 - 8x + 4$
3) $x^2 - 4$
4) $x^2 + 3x - 4$
5) $6x^2 - 6x - 12$
6) $25x^2 + 100x + 100$