

Differentiation af polynomier og potensfunktioner

Polynomier og potensfunktioner

Det er særligt nemt at differentiere potensfunktioner og polynomier. Følgende sætning fortæller os, hvordan vi gør.

Sætning 1.1. *Lad f være givet ved*

$$f(x) = x^a.$$

Så gælder, at

$$f'(x) = ax^{a-1}.$$

Sidste gang så vi specialtilfældende

$$(x^3)' = 3x^2$$

og

$$(x^2)' = 2x.$$

Eksempel 1.2. Vi skal differentiere polynomiet

$$f(x) = 5x^7 - 12x^3 - 2x^2 - x - 1.$$

Dette gøres ledvist og konstanter ganget på lades stå som sædvanligt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot 7x^6 - 12 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x - 1 \\ &= 35x^6 - 36x^2 - 4x - 1 \end{aligned}$$

Eksempel 1.3. Vi skal differentiere funktionen

$$f(x) = 2x^{-\frac{1}{7}}.$$

Vi bruger samme regel og får

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{7}x^{-\frac{1}{7}-1} \\ &= -\frac{2}{7}x^{-\frac{8}{7}} \end{aligned}$$

Vi tilføjer denne regel til vores tabel.

Sætning 1.4. *Vi har følgende sammenhæng mellem funktioner f og afledede funktion f' .*

$f(x)$	$f'(x)$
konstant	0
x	1
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^a	ax^{a-1}

Vi skal se vores første bevis for en differentialkvotient. Vi viser, at $(x^2)' = 2x$.

Sætning 1.5 (Differentiation af x^2). *For funktionen f givet ved*

$$f(x) = x^2$$

gælder der, at

$$f'(x) = 2x.$$

Bevis. Vi betragter definitionen af differentialkvotienten.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} h + 2x \\
 &= 2x.
 \end{aligned}$$

■

Opgave 1

Differentiér følgende funktioner

1) x^5

2) $2x^4 - 6x^2 + 10x - 11$

3) $\frac{1}{10}x^{10} + 7x^5 - 11x^2 + 20$

4) $x^4 - 3x^2 + 2x + 1$

5) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

6) $x^{\frac{1}{2}}$

7) $6x^{\frac{-5}{2}}$

8) $0.7x^{1.2}$

Opgave 2

Bestem hældningen af tangenterne punkterne $(2, f(2))$ og $(3, f(3))$ af følgende funktioner. Tegn først funktionerne i Geogebra og prøv at bestemme hældningen der først.

1) $5x^2 + 10$

2) \sqrt{x}

3) $\frac{\sqrt{x}}{3} + x^3$

4) $\frac{2}{x}$

5) 7

6) $\frac{7\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{x}$

7) $x^2 + x^3 + 1$

8) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$

9) $\frac{10}{3} + x + 3\sqrt{x}$

10) $7 + \frac{1}{3} + x^3 + \frac{2}{x}$