Funktionstyper

Sammensatte funktioner

En sammensat funktion er - som navnet hentyder til - funktioner, der er sat sammen. Mere præcist har vi en definition.

Definition 1.1. Har vi to funktioner f og g, så kan vi bestemme den sammensatte funktion af f og g som

$$f(g(x)).$$

Dette skrives også til tider $f(g(x)) = g \circ f(x)$. I dette tilfælde kaldes g for den indre funktion og f for den ydre funktion.

Eksempel 1.2. Lad f og g være givet ved henholdsvist

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ og } g(x) = 3 \cdot x.$$

Så er den sammensatte funktion $f(g(x))$ bestemt ved

$$f(g(x)) = \sqrt{3 \cdot x}.$$

Tilsvarende er den sammensatte funktion $g(f(x))$ bestemt ved

$$g(f(x)) = 3\sqrt{x}.$$

Eksempel 1.3. CO_2-koncentrationen i en beholder kan tilnærmes ved $f(x) = 10 \cdot x + 385$, hvor f er i ppm (parts per million) og x er antallet af en bestemt type bakterier i mio. Antallet af bakterier (i mio.) i beholderen kan i et begrænset tidsinterval beskrives ved $g(t) = 2 \cdot 1.07^t$, hvor t beskriver tiden i timer. CO_2-koncentrationen som funktion af tid kan derfor beskrives ved

$$f(g(t)) = 10 \cdot (2 \cdot 1.07^t) + 385 = 20 \cdot 1.07^t + 385.$$

Stykvist definerede funktioner

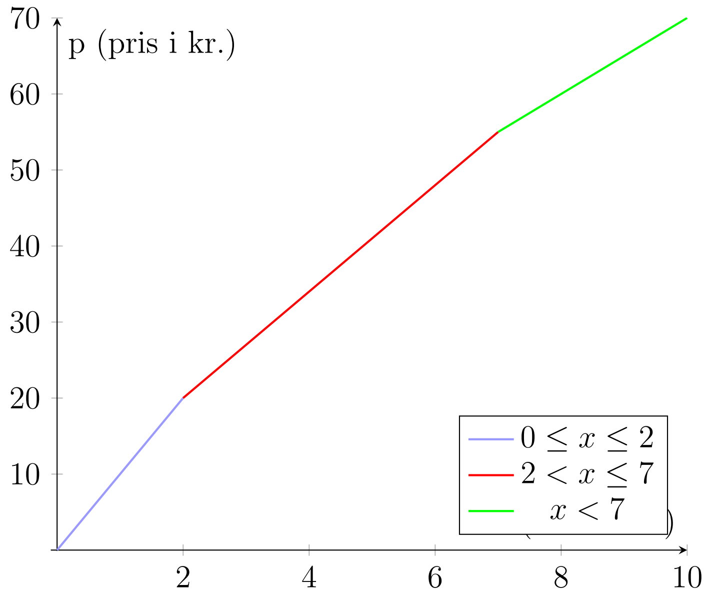
En stykvist defineret funktion er en funktion, der er defineret på forskellige måder alt efter hvad x er.

Eksempel 2.1. Et taxafirma tager følgende pris for taxakørsel: De første to kilometer koster 10kr pr kilometer, de næste 5km koster 7 kr pr kilometer, og resten at afstanden koster taxaen 5kr pr kilometer. Vi kan definere prisen $p(x)$ som en stykvist defineret funktion:

$$p(x) = \begin{cases} 10 \cdot x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 7 \cdot x + 6, & 2 < x \leq 7, \\ 5 \cdot x + 20, & 7 < x, \end{cases}$$

hvor x er antal kilometer kørt og $p(x)$ er prisen i kr.

Grafen for p kan ses på Fig. 1



Figur 1: Pris for taxa som funktion af kørte km.

Eksempel 2.2 (Absolutværdi/numerisk værdi)**.** Den stykvist definerede funktion

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Denne funktion tager et tal og giver os den positive ”udgave”af tallet. Vi har eksempelvis $|2| = 2$ og $|-4| = 4$

Definitionsmængde og værdimængde

Når vi har med funktioner at gøre, så er det altid implicit, hvilke værdier vi kan vælge som x-værdier. Skal man være mere præcis, så skal vi, når vi introducerer funktioner, altid fortælle, hvad vi må vælge x til at være, samt hvad $f(x)$ kan være.

Definition 3.1 (Definitionsmængde)**.** *Definitionsmængden* for en funktion f, er den mængde, funktionen afbilder fra. Den består altså at de tal, vi må vælge x til at være i funktionsudtrykket $f(x)$. Vi skriver til tider $\mathrm{Dm}(f)$ for definitionsmængden. Definitionsmængden kaldes også for domænet.

Definition 3.2 (Værdimængde)**.** *Værdimængden* for en funktion f er den mængde, funktionen afbilder over i. Vi skriver til tider $\mathrm{Vm}(f)$ for værdimængden. Værdimængden kaldes også for billedmængden.

Eksempel 3.3. For funktionen $f(x) = 2x$ er $\mathrm{Vm}(f) = \mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R}$. Vi kan stoppe alle tal ind på x, og funktionen giver os reelle tal.

Eksempel 3.4. Funktionen $g(x) = x^2$ har $\mathrm{Dm}(g) = \mathbb{R}$, men $\mathrm{Vm}(g) = \mathbb{R}_{\geq 0}$, altså kun de ikke-negative tal.

Vi husker på, at potensfunktioner kun var defineret i første kvadrant. Der gælder derfor for potensfunktioner f, at $\mathrm{Dm}(f) = \mathrm{Vm}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Hvis vi mere eksplicit vil opskrive, hvad værdimængden og definitionsmængden for en funktion er, så skriver vi $f : \mathrm{Dm}(f) \to \mathrm{Vm}(f)$. Eksempelvis har vi, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = x^3.$$

Opgave 1

For følgende funktioner f og g, bestem så den sammensatte funktion $f(g(x))$ og $g(f(g))$.

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sqrt{x} \;\text{ og } g(x) = x^2 \\
&f(x) = 2x^3 \;\text{ og } g(x) = 10x + 3 \\
&f(x) = \ln(x) \;\text{ og } g(x) = \frac{1}{x} \\
&f(x) = \sqrt[10]{x} \;\text{ og } g(x) = x^{20}
\end{aligned}$$

Opgave 2

For $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2x + 3$ løs ligningerne

$$f(g(x)) = 0$$

og

$$g(f(x)) = 0$$

Opgave 3

En funktion f er bestemt ved $\sqrt{x}$ for $x \geq 0$ og x^2 for $x < 0$. Hvad er $f(2)$ og $f(-2)$?. Prøv at tegne f.

Opgave 4

Bestem definitionsmængde og værdimængde for følgende funktioner

1) x	2) $\sqrt{x}$
3) $10x^3$	4) $\frac{1}{x}$
5) $\ln(x^2)$	6) x^4

Opgave 5

Funktionen $f(x) = \lceil x \rceil$ runder x op til nærmeste heltal. Hvad er værdimængden og definitionsmængden for f?