

# Afstand mellem linje og punkt

## Afstand mellem linje og punkt

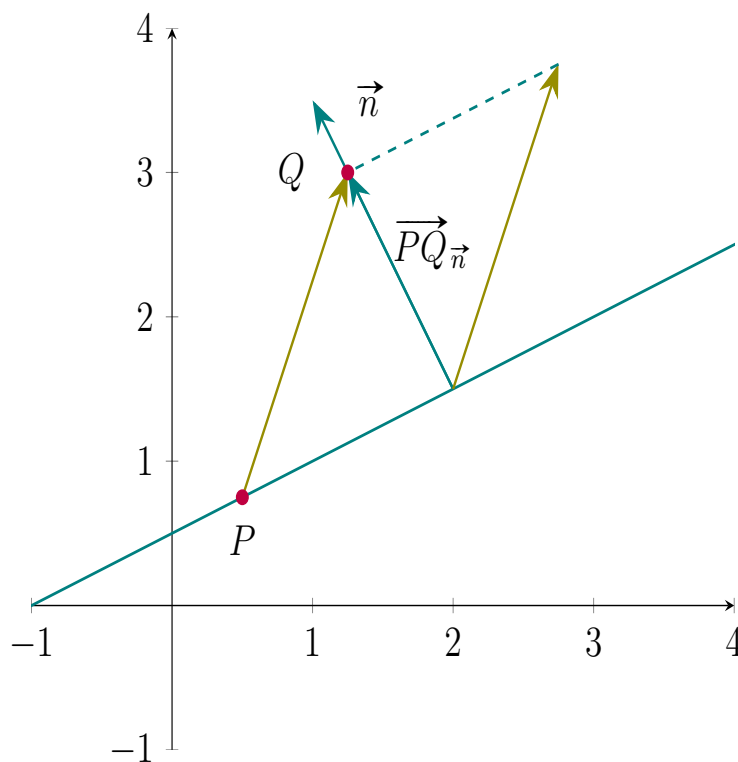
Vi kan bruge projektioner af vektorer til at bestemme afstanden mellem et punkt  $P$  og en linje  $l$  i planen. Det er ikke umiddelbart klart ud fra formelen at det er projektioner, vi bruger, men det vil ses af beviset. Afstanden findes ved følgende sætning.

**Sætning 1.1** (Afstand mellem punkt og linje). *Har vi et punkt  $Q(x_1, y_1)$  og en linje  $l$  givet ved ligningen*

$$ax + by + c = 0,$$

*så kan vi bestemme afstanden mellem  $l$  og  $Q$  ved*

$$\text{dist}(Q, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Figur 1: Afstand fra punkt til linje

## Bevis

Vi skal bevise afstandsformlen. Vi bruger Figur 1 som skabelon

- i) Tegn en linje  $l$  i et koordinatsystem som på Figur 1.
- ii) Tegn et punkt  $Q(x_1, y_1)$  i koordinatsystemet. Det må ikke ligge på  $l$ .
- iii) Tegn et punkt  $P(x_0, y_0)$  på  $l$ . Du bestemmer selv hvor.
- iv) Tegn en vektor  $\overrightarrow{PQ}$  fra  $P$  til  $Q$ .
- v) Tegn en normalvektor  $\vec{n}$  til  $l$ , der går gennem  $Q$
- vi) Tegn en repræsentant for den samme vektor som  $\overrightarrow{PQ}$ . Denne skal starte samme sted som  $\vec{n}$ .
- vii) Tegn projektionen  $\overrightarrow{PQ_{\vec{n}}}$ .
- viii) Overbevis dig selv om, at afstanden mellem  $l$  og  $Q$  må være lig længden af  $\overrightarrow{PQ_{\vec{n}}}$ .
- ix) Overbevis dig selv om, at  $\vec{n}$  har koordinaterne  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .
- x) Opskriv koordinaterne til  $\overrightarrow{PQ}$ . (Vink: hvordan bestemmer vi en forbindelsesvektors koordinater?)
- xi) Vi skal have bestemt længden af  $\overrightarrow{PQ_{\vec{n}}}$ . Denne er givet ved

$$|\overrightarrow{PQ_n}| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

Opskriv prikproduktet og længden af vektoren i denne brøk.

- xii) Hæv parentesen i tælleren af din brøk.
- xiii) Vi er nu næsten færdige. Isolér  $c$  i linjens ligning  $ax + by + c = 0$ .
- xiv) Indsæt punktet  $P(x_0, y_0)$  i ligningen.
- xv) Sammenlign udtrykket for  $c$  med tælleren i din brøk og lav en substitution.
- xvi) Sammenlign dit resultat med sætningen.