Renteformlen

Som det sidste emne i vækstforløbet skal vi se på opsparing og gæld. Det første vi skal introduceres for er renteformlen.

Definition 1.1. Renteformlen er givet ved

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n,$$

hvor K_0 er startkapitalen, r er rentefoden, n er antal terminer, og K_n er slutkapitalen.

Renteformlen skal forstås som følgende: Vi indsætter startkapital K_0 på en konto, der lover os p procent i rente per termin. Dette er eksponentiel vækst (men kun defineret, når $n \in \mathbb{N}$), og vi husker på, at vækstraten r tilsvarede den procentvise stigning per gået enhed. Derfor findes vækstraten som $r = \frac{p}{100}$, og dermed fremskriver vi med $a = r+1$, hver gang der er gået en termin. Vi har altså, at kapitalen K_1 efter første termin må være

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100}) = K_0 \cdot (1+r).$$

Vækstraten kaldes også for *rentefoden*, når vi taler om renteformlen. Tilsvarende vil renten efter n terminer være givet

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n.$$

Eksempel 1.2. Vi indsætter 20 000kr på en konto. Dette er vores startkapital. Vi får $p = 2\%$ i rente. Rentefoden er derfor givet $r = \frac{2}{100} = 0.02$, og renteformlen lyder i dette tilfælde

$$K_n = 20\,000 \cdot (1.02)^n.$$

Skal vi bestemme, hvor meget der står på kontoen efter 10 år, skal vi bestemme

$$K_{10} = 20\,000 \cdot (1.02)^{10}.$$

Skal vi bestemme hvornår der står 30 000 på kontoen skal vi løse ligningen

$$30\,000 = 20\,000 \cdot (1.02)^n,$$

hvilket vi kan gøre ved at bruge ln eller blot løse ligningen i Maple.

Gældsannuitet

I gældsannuitet lånes der et beløb G, som vi kalder for *hovedstolen*. På lånet er der en bestemt rente r, der tilsvarer vækstraten. Til hver termin indbetaler vi et fast beløb Y, vi kalder for ydelsen. Vi vil gerne bestemme, hvor meget der fortsat skyldes efter n terminer.

Eksempel 2.1. Vi låner $G = 100\,000$kr i banken til en årlig rente på 5%. Vi betaler en terminsvis ydelse på $Y = 10\,000$kr. Efter 0 terminer er restgælden $G = 100\,000$kr. Efter 1 termin er gælden

$$G_1 = \underbrace{100\,000}_{=G} \cdot 1.05 - 10\,000 = 95\,000.$$

Efter to terminer er gælden

$$G_2 = \underbrace{95\,000}_{=G_1} \cdot 1.05 - 10\,000 = 89\,750.$$

Efter tre terminer gælden

$$G_3 = \underbrace{89\,750}_{=G_2} \cdot 1.05 - 10\,000 = 84\,237.5,$$

og så videre.

Vi kan bestemme restgælden efter $n+1$ terminer, hvis vi kender restgælden efter n terminer som

$$G_{n+1} = G_n \cdot (1+r) - Y,$$

hvor $(1+r)$ så tilsvarer fremskrivningsfaktoren fra eksponentiel vækst.

Sætning 2.2. *Låner vi G med en terminsvis rente på r og indbetaler en fast ydelse per termin på Y og skal have afbetalt vores lån på n terminer, har vi følgende sammenhæng mellem vores variable.*

$$G = Y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Eksempel 2.3. Om et forbrugslån gælder følgende betingelser for et lån på $20\,000$kr: Lånet skal betales tilbage efter 5 terminer, og ydelsen skal være på 6000kr. Hvad er renten på lånet? Vi opstiller ligningen

$$20000 = 6000 \cdot \frac{1-(1+r)^{-5}}{r},$$

og løser med et CAS-værktøj. Dette giver os $r = 0.152$, altså en procentvis rente på 15.2%.

Opsparingsannuitet

Opsparingsannuitet er meget lig gældsannuitet. Vi lægger bare et fast beløb til løbende i stedet for at trække det fra.

Sætning 3.1 (Opsparingsannuitet)**.** *Lægges der et beløb b ind på en konto løbende med en rente på r, så vil der efter n terminer være et beløb på A_n på kontoen, hvor A_n er givet ved*

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Eksempel 3.2. Vi indsætter til hver termin 1000 kr på en opsparingskonto. På kontoen får vi en rente på 5%. Vi skal afgøre, hvor meget der står på kontoen efter 10 terminer. Vi indsætter derfor tallene i annuitetsformlen og får

$$A_{10} = 1000 \cdot \frac{(1+0.05)^10 - 1}{0.05} = 12577.89kr.$$

Vi har altså tjent næsten 2577 kr på renter på de 10 terminer.

Opgave 1

Der indsættes 100.000 på en konto med en årlig rente på 3%.

i) Hvad står der på kontoen efter 5 år?

ii) Hvornår står der 110.000 på kontoen?

iii) Hvor længe går der, før pengene på kontoen er fordoblet?

iv) Hvad tilsvarer denne rente til i månedlig rente?

Opgave 2

På en konto får du 0% i rente på de første 100.000 kr. og en kvartalsvis rente på −1% i rente på alt derover. Vi indsætter 200.000 på kontoen.

i) Hvor meget står der på kontoen efter 10 år?

ii) Hvornår står der 150.000 på kontoen?

iii) Hvad er det mindste beløb, der kan stå på kontoen, hvis vi bare efterlader den?

Opgave 3

i) Vi låner 150 000 i banken til en rente på 6% og betaler en ydelse på 12 000. Hvor meget er restgælden efter 1,2,3,4 og 5 terminer?

ii) Vi låner 50 000 til en rente på 10%, og betaler en ydelse på 80.000. Bliv ved med at fremskrive restgælden til lånet er afbetalt. Hvor lang til går der?

Opgave 4

i) Vi låner 1 000 000kr til en rente på 2%, og vi vil gerne betale lånet af på 20 år. Hvor meget skal vi betale i termin?

ii) Vi betaler 15 000kr i termin til en rente på 4 000 000 til en rente på 3%, og vi betaler 20 000 per termin. Hvornår er vores lån tilbagebetalt?

Opgave 5

Du vil gerne have penge til udbetalingen til et hus, når du fylder 40 år. Du begynder derfor at spare sammen, når du fylder 20 og sætter 1500kr ind på en opsparingskonto hver måned. Opsparingskontoen giver dig årligt en rente på 2%.

i) Hvor meget står der på opsparingskontoen, når du fylder 40?

ii) Hvor meget ville der stå på kontoen, hvis du begyndte at spare op som 18-årig i stedet?

I stedet for at sætte pengene på en opsparingskonto, beslutter du dig for at investere dem i aktier. Du finder en indeksfond, der har givet et årligt afkast på 6%.

iii) Hvor mange penge vil du have investeret i aktier som 40-årig, hvis du investerer de 1500kr i stedet for at sætte dem på opsparingskontoen?

iv) Et hus i københavnsområdet er dyrt og du beslutter dig for at sætte penge på opsparingskontoen i stedet for i aktier for en sikkerheds skyld. Du skal have 600 000 til udbetalingen til dit hus. Hvor meget skal du spare op om måneden for at have råd til dette som 40-årig?

Opgave 6

I skal købe hus og det skal være i Brønshøj, Vanløse eller Rødovre. I vil gerne købe det som 35-årige, og I starter med at spare op i dag. Vi antager, at huspriserne stiger med inflationen (altså omkring 2% årligt.)

i) Find et hus på jeres yndlingsegendomsmæglers hjemmeside og find ud af, hvad det vil koste, når I er 35 år, hvis prisen følger inflationen.

ii) Når man skal købe hus, skal man have 5% af husets pris som udbetaling kontant. Hvor meget skal I have sparet op, når I skal købe huset?

iii) Find ud af, hvor meget I kan få i rente på en opsparingskonto.

iv) Bestem, hvor meget I skal spare op hver måned, hvis I skal have til udbetalingen til jeres hus, når I er 35, hvis I sætter pengene ind på en opsparingskonto.

Investerer I i aktier, så er det ikke urealistisk med en årlig vækst på 10%, men det er forbundet med en hvis usikkerhed. Der skal desuden betales skat af afkastet, der afhænger af, hvor meget du sælger for. Lad os for nemhedens skyld sige, at du betaler 27% i skat af det, du har tjent på aktierne (dit afkast).

v) Hvor meget skal I have opsparet i aktier, hvis I også skal betale skat af opsparingen?

vi) Hvor meget skal I opspare hver måned, hvis I får et årligt afkast på 10% på jeres aktier?

I er nu 35 og skal købe jeres drømmehus. I skal derfor have et lån, der dækker de resterende 95% af jeres boligkøb

i) Find ud af, hvor meget I skal betale i rente på et realkreditlån.

ii) Hvor meget skal I betale i ydelse, hvis I skal betale lånet henover 30 år.

iii) Hvis I øger ydelsen med 15%, hvornår har I så betalt lånet af?