

Skæring mellem linjer 2

Det er også muligt at bestemme skæringspunkter mellem to linjer, hvis de er givet ved linjens parameterfremstilling.

Skæring givet parameterfremstilling

Tilsvarende kan vi også bestemme et skæringspunkt mellem to linjer l og m , hvis deres parameterfremstilling er givet.

Eksempel 1.1. Lad l og m være linjer med følgende parametriseringer:

$$\begin{aligned}l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \\m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vi skal bestemme skæringen mellem disse linjer. Vi sætter dem derfor lig hinanden:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dette giver os to lineære ligninger med to ubekendte, som vi enten kan løse med substitution eller ved lige store koefficienters metode. Vi bruger substitutionsmetoden. Ligningerne lyder:

$$4 + 2t_1 = -4 + 5t_2$$

og

$$4 - 2t_1 = t_2.$$

Anden ligning indsættes i første ligning:

$$\begin{aligned}4 + 2t_1 &= -4 + 5t_2 \\ \Leftrightarrow 4 + 2t_1 &= -4 + 5(4 - 2t_1) \\ \Leftrightarrow 4 + 2t_1 &= -4 + 20 - 10t_1 \\ \Leftrightarrow 8 + 2t_1 &= 20 - 10t_1 \\ \Leftrightarrow 12t_1 &= 12 \\ \Leftrightarrow t_1 &= 1.\end{aligned}$$

Dette indsættes i første parameterfremstilling:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Derfor skærer linjerne l og m hinanden i punktet $(6, 2)$.

Opgave 1

- i) Bestem skæringen mellem linjerne l og m , der har følgende parameterfremstillinger henholdsvis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ii) Bestem skæringen mellem linjerne l og m , der har følgende parameterfremstillinger henholdsvis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- iii) Bestem skæringspunktet mellem følgende to linjer.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 2

- i) En linje l går gennem punkterne $(1, 1)$ og $(2, 3)$. Bestem en parameterfremstilling for l .
- ii) En linje m går gennem punkterne $(-2, -4)$ og $(3, 5)$. Bestem en ligning for m .

Opgave 3

- i) En linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og en anden linje m har ligningen

$$(x - 3) + 7(y + 2) = 0$$

Bestem skæringspunktet mellem l og m .

- ii) En linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

og en anden linje m har ligningen

$$-5(x + 3) + 2(y - 2) = 0$$

Bestem skæringspunktet mellem l og m .