

# Regneregler for integration

## Regneregler for bestemte integraler

I Tabel 1 fremgår stamfunktionen af nogle udvalgte funktioner.

$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	$x + k$
$c$	$cx + k$
$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$x^2$	$\frac{1}{3}x^3 + k$
$x^a$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$
$a^x$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + k$
$e^x$	$e^x + k$
$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$
$\cos(x)$	$\sin(x) + k$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$

Tabel 1: Tabel med stamfunktioner  $\int f(x)dx$  for udvalgte integrable funktioner  $f(x)$ .

Vi har desuden følgende regneregler for ubestemte integraler.

**Sætning 1.1.** For integrable funktioner  $f$  og  $g$ , samt for en konstant  $c$  har vi, at

- i)  $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
- ii)  $\int f(x) - g(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx,$
- iii)  $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx.$

*Bevis.* Vi husker på, at symbolet  $\int f(x)dx$  betegner en stamfunktion til funktionen  $f$ . Derfor er

$$\int f(x) + g(x)dx$$

en stamfunktion til  $f(x) + g(x)$ . Men vi har også, at

$$\left( \int f(x)dx + \int g(x)dx \right)' = \left( \int f(x)dx \right)' + \left( \int g(x)dx \right)' = f(x) + g(x).$$

Derfor er  $\int f(x)dx + \int g(x)dx$  også en stamfunktion til  $f + g$ , og

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int f(x) + g(x)dx.$$

Vi har altså vist i). ii) vises tilsvarende. For iii) har vi

$$\left( c \int f(x)dx \right)' = cf(x).$$

Derfor er  $c \int f(x)dx$  stamfunktion til  $cf(x)$  og

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

■

## Opgave 1

- i) Bevis, at Tabel 1 er sand. Hint: Hvordan viser man, at en funktion er en stamfunktion?
- ii) Bevis del ii) i Sætning 1.1.

## Opgave 2

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 1) $\int af(x) + bg(x)dx$           | 2) $\int 10\sqrt{x}dx$                  |
| 3) $\int \frac{3}{x^2} + e^{27x}dx$ | 4) $\int x^{-1} + x^2 + x^{-3} + x^4dx$ |
| 5) $\int x^{\frac{1}{5}}dx$         | 6) $\int x^{2a}dx$                      |
| 7) $\int \cos(x) + \sin(x)dx$       | 8) $\int \int \cos(x) - \sin(x)dx^2$    |
| 9) $\int \sqrt[3]{x^7}dx$           | 10) $\int (x^2)^5 dx$                   |