Linearitet af differentiation og mere optimering

Linearitet af differentiation

Vi skal til start se på linearitet af differentiation. Vi starter med en sætning, som vi vil bevise.

Sætning 1.1. *Lad f, g være to funktioner begge differentiable i x. Så er funktionen $f + g$ differentiabel i x og dens differentialkvotient er givet*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Bevis. Vi kigger på definitionen af differentialkvotienten i x

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \underbrace{\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)}_{=f'(x)} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)}_{g'(x)} \\ &= f'(x) + g'(x),\end{aligned}$$

siden vi har antaget, at f og g er differentiable i x. ■

Vi skal løse flere optimeringsopgaver, men nu i Maple.

Opgave 1

i) Bevis, at $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$. (Hint: Se på beviset for Sætning 1.1.)

ii) Bevis, at $(kf(x))' = kf'(x)$. (Hint: Brug som tidligere definitionen af differentialkvotienten.)

iii) Bevis, at $(2x^2)' = 4x$ ved at bruge definitionen af differentialkvotienten.

Opgave 2

Løs følgende opgaver i Maple.

i) En åben kasse skal have rektangulær bund. Bredde skal være x og længden skal være $2x$. Rumfanget skal være $144000cm^3$. Bestem højde, bredde og længde, så overfladearealet er minimeret

ii) Samme opgave som i), men nu med låg.

iii) En dåse med rumfang $500cm^3$ skal laves, så overfladearealet er minimeret. Højden på dåsen må maksimalt være $5cm$. Bestem dimensionerne på denne dåse.

iv) Hvad nu hvis dåsen skal være i et skab på $10cm \cdot 10cm$? Hvordan er dimensionerne så.

v) Spørg mig eller hold fri.