Matematik-aflevering

2023

3.e MA

Opgavesætter er delt i to dele:
Delprøve 1 kun med den centralt udmeldte formelsamling.
Delprøve 2 med alle hjælpemidler.

Krav til formidling af din besvarelse

Ved bedømmelse af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- **Redegørelse og dokumentation for metode**
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstragegi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger *eller* matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.

- **Figurer, grafer og andre illustrationer**
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.

- **Notation og layout**
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog, og med en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres stil standardviden.

- **Formidling og forklaring**
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.

  Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve uden hjælpemidler

Opgave 1

En stokastisk variabel X har sandsynlighedsfunktion P og udfaldsrum $U = \{a, b, c, d, e\}$. Fordelingen for X kan ses af Tab. 1.

U	a	b	c	d	e
$P(X = x)$	0.5	0.1	0.05	0.05	$P(X = e)$

Tabel 1: Fordeling for den stokastiske variabel X.

a) Bestem $P(X = e)$.

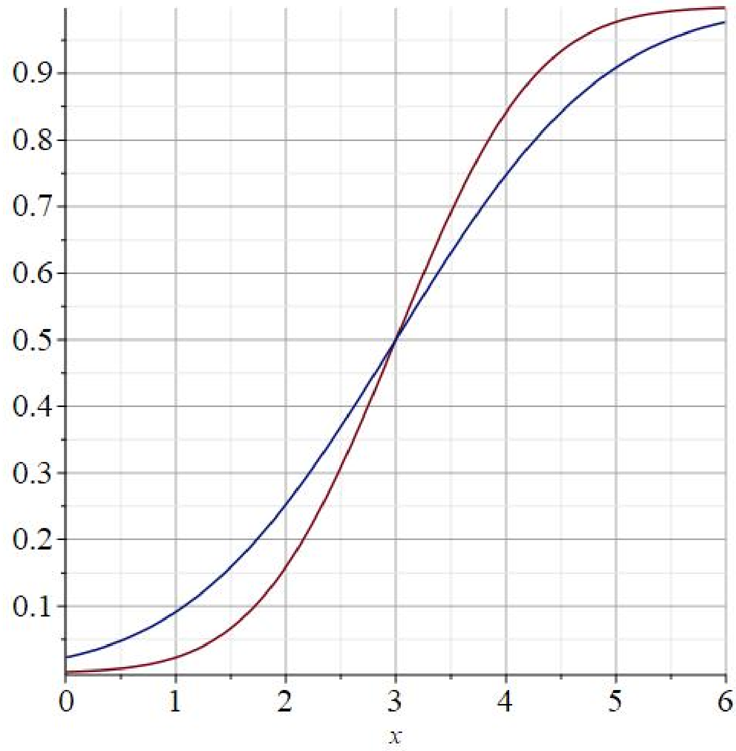
Opgave 2

Af Fig. 1 ses fordelingsfunktionerne F og G for to normalfordelte stokastiske variable

$$X \sim N(\mu, 1)$$

og

$$Y \sim N(\mu, 1.5).$$



Figur 1: Fordelingsfunktionerne F og G.

a) Bestem middelværdien μ for de to stokastiske variable.

b) Hvilken af de to kurver tilsvarer fordelingsfunktionen for henholdsvist X og Y?

c) Bestem sandsynlighederne

$$P(2 < X < 4) \text{ og } P(1 < Y).$$

Opgave 3

For en bestemt type stafylokok-bakterie gælder det, at væksten af dem S' (i mio. pr. minut) i fødevarer ved stuetemperatur er proportional med antallet af bakterier S (i mio.).

a) Opstil en differentialligningsmodel, der beskriver væksten af stafylokokbakterien i fødevarer, når det oplyses at proportionalitetskonstanten er 0.024.

b) Opskriv en partikulær løsning til differentialligningsmodellen, hvis det oplyses, at antallet af bakterier til $t = 0$ er 792 mio.

Opgave 4

En producent af chokoladebarer har undersøgt en bestemt slags af sine chokoladebarer og opdaget, at vægten af netop dén type chokoladebar er normalfordelt med en middelværdi på 51g og en spredning på 4.5g.

a) Afgør, om en chokoladebar på 57g er et normalt udfald.

Vi lader f betegne tæthedsfunktionen for den normalfordelte stokastiske variabel, der beskriver vægten af chokoladebarerne.

b) Hvad siger følgende integral om vægten af chokoladebarerne?

$$\int_{48}^{65} f(x)dx \approx 0.747.$$

Opgave 5

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

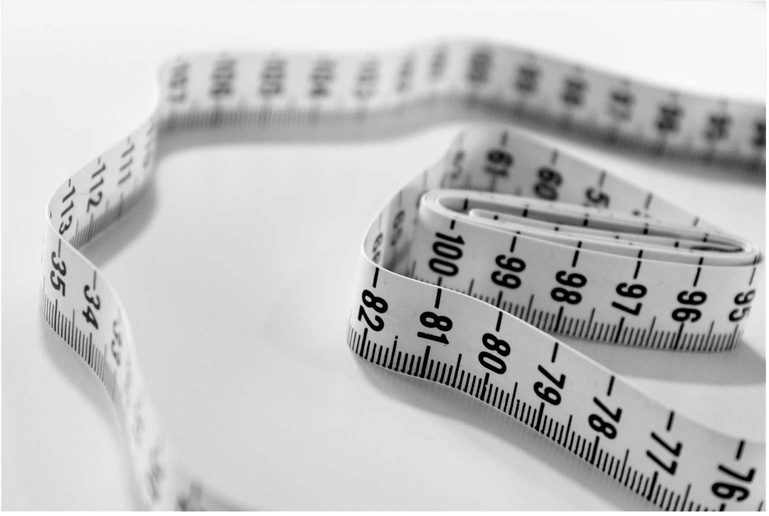
$$f(x, y) = \ln(x) \cdot (x - y) + y^2 x$$

a) Bestem $f(1, 2)$

b) Bestem $f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$

Delprøve med hjælpemidler

Opgave 6



I en by har man målt alle drenges højde på deres 12-års fødselsdag. Deres højde kan findes her.

a) Vis, at datasættet er approksimativt normalfordelt og bestem middelværdien og spredningen for datasættet.

b) Bestem sandsynligheden for at en tolvårig dreng har en højde på under 140cm.

c) Er en højde på 110cm et exceptionelt udfald?

Opgave 7

En vektorfunktion $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - t^2 + 7 \\ 4t^4 - 6t^2 - t - 9 \end{pmatrix}$$

a) Tegn $\vec{r}$ på parameterintervallet $[-2, 2]$.

b) Bestem parameterkurven for $\vec{r}$'s skæring med akserne.

Opgave 8

Lad f og g være givet ved

$$f(x) = \ln(x) - x^2 + 10$$

og

$$g(x) = x^2 - 1.$$

a) Tegn graferne for f og g på intervallet $[0, 4]$.

b) Bestem skæringspunkterne mellem graferne for de to funktioner.

Graferne for de to funktioner afgrænser sammen med x-aksen et trekantlignende område M.

c) Bestem arealet af M.

Opgave 9

Taget på en bestemt kvadratisk bygning er udformet, så taget tilsvarer grafen for funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = xy + y^2 - xy^2$$

for $(x, y) \in [-1, 2] \times [-0.4, 0]$. (Bemærk, at skaleringen på akserne ikke tilsvarer den virkelige skala.)

a) Tegn grafen for f så $(x, y) \in [-1, 2] \times [-0.4, 0]$.

b) Bestem de stationære punkter for f.

c) Bestem arten af de stationære punkter.

Snitkurven $f(x, -0.4)$ udgør siden af taget til en af siderne.

d) Bestem minimum af snitkurven $f(x, -0.4)$.