

Funktioner af to variable

Indledende eksempler

Vi betragtede sidst planer og kugler i rummet. På samme måde som at en linje både kan beskrives som en funktion og ved en ligning kan et plan også beskrives som en funktion.

Eksempel 1.1. En funktion f er givet ved

$$f(x, y) = ax + by + c.$$

Denne funktion beskriver en plan i rummet. Dette kan ses ved at sætte $f(x, y) = z$. Så har vi

$$\begin{aligned} f(x, y) = ax + by + c &\Leftrightarrow z = ax + by + c \\ &\Leftrightarrow ax + by - z + c = 0, \end{aligned}$$

hvilket vi har set er ligningen for en plan.

Eksempel 1.2. En plan L skærer gennem punktet $(1, 2, 3)$ og har vektoren \vec{n} givet ved

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som normalvektor. Vi kan bestemme en funktion, der har denne plan som graf. Vi bestemmer først planens ligning.

$$\begin{aligned} -2(x - 1) + 5(y - 2) + 3(z - 3) = 0 &\Leftrightarrow -2x + 2 + 5y - 10 + 3z - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x + 5y - 17 = -3z \\ &\Leftrightarrow z = f(x, y) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}y + \frac{17}{3}. \end{aligned}$$

Denne funktion vil altså have L som graf.

Eksempel 1.3. Kuglens ligning har vi set er givet ved

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

hvor r er kuglens radius og $C(0, 0, 0)$ er kuglens centrum. Vi kan ikke beskrive kuglens overflade ved et funktionsudtryk af samme grund som vi ikke kan beskrive

cirklen ved et funktionsudtryk - vi kan ikke have to funktionsværdier til samme input i funktionen. Vi vælger derfor at beskrive den øvre halvkugle af kuglen, og vi tager udgangspunkt i kuglens ligning.

$$\begin{aligned}(x)^2 + (y)^2 + (z)^2 &= r^2 \Leftrightarrow r^2 - x^2 - y^2 = z^2 \\ \Leftrightarrow \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} &= z.\end{aligned}$$

Vi er interesserede i den øvre halvkugle. Derfor bruger vi den positive løsning. Dette giver os funktionen

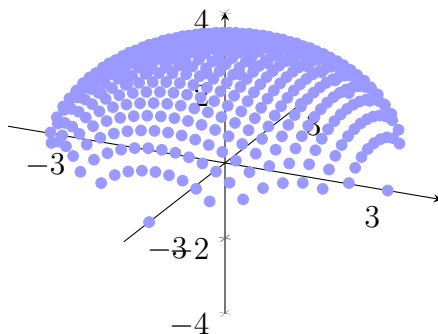
$$z = f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

hvis graf består af den øvre halvkugle af kuglen med radius r og centrum i origo. Det er desuden et krav, at $r^2 \geq x^2 + y^2$.

Eksempel 1.4. En kugle har radius 3 og centrum i $(0, 0, 0)$. Den øvre halvkugle af denne kugle kan beskrives af funktionen f givet ved

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Grafen for denne funktion kan ses af Fig. ??.

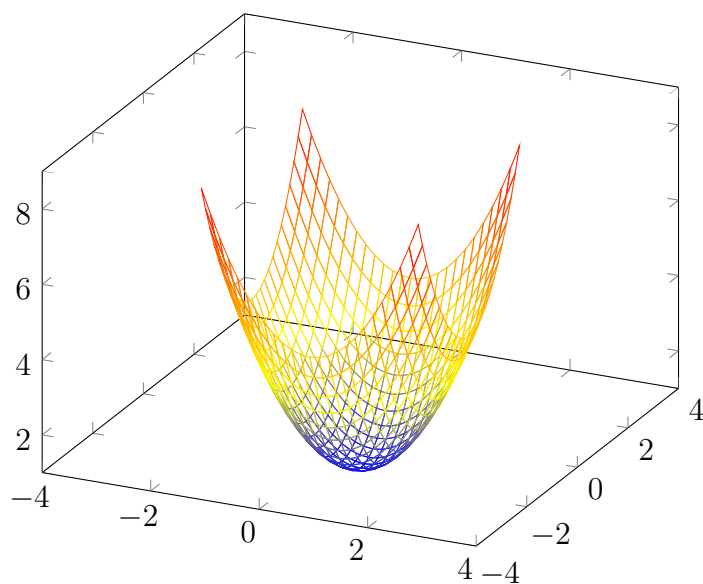


Figur 1: Øvre halvkugle

Eksempel 1.5. En vigtig funktion af to variable er funktionen f givet ved

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Grafen for denne funktion er en slags tredimensionel parabel - en *paraboloide*. Denne kan ses af Fig. 2.



Figur 2: Paraboloide

Opgave 1

En funktion f er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + 2y.$$

- i) Bestem $f(2, 4)$, $f(-3, 3)$ og $f(3, -3)$.
- ii) Bestem to løsninger til ligningen $f(x, y) = 0$. Hvor mange løsninger har den?

Opgave 2

En funktion f er givet ved

$$f(x, y) = \sqrt{x} + 3y^2.$$

- i) Hvilke af punkterne $(4, 1, 5)$, $(1, 2, 3)$ og $(2, 1, \sqrt{2} + 3)$ ligger på grafen for f ?
- ii) Bestem en løsning til ligningen $f(x, y) = 0$. Kan du bestemme antallet af løsninger til ligningen?

Opgave 3

- i) En plan L går gennem punktet $(-5, 4, 2)$ og har vektoren \vec{n} givet ved

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestem en funktion f , der har L som graf. Brug denne funktion til at afgøre, om punktet $(1, 1, 1)$ ligger på L .

- ii) En plan L går gennem punktet $(2, 4, 8)$ og har vektoren \vec{n} givet ved

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestem en funktion f , der har L som graf. Brug denne funktion til at afgøre, om punktet $(0, 1, 4)$ ligger på L .

Opgave 4

- i) En kugle K med centrum i origo har radius 7. Bestem en funktion f , der har den øvre halvkugle af K som graf for funktionen. Brug denne funktion til at afgøre, om punktet $(0, 0, 9)$ ligger på kuglen.
- ii) En kugle K med centrum i origo har radius $\sqrt{3}$. Bestem en funktion f , der har den nedre halvkugle af K som graf for funktionen. Brug denne funktion til at afgøre, om punktet $(-1, 1, -\sqrt{3})$ ligger på kuglen.

Opgave 5

- i) Vis, at den øvre halvkugle for en kugle med centrum i (x_0, y_0, z_0) og radius r kan beskrives ved grafen for funktionen f givet ved

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - x_0^2 + 2xx_0 - y^2 - y_0^2 + 2yy_0 + z_0}$$

- ii) Brug dette til at bestemme en funktion, hvis graf er den øvre halvkugle for en kugle med centrum i $(1, 4, 3)$ og radius 2.