

Vinkler mellem linjer

Vinkler mellem linjer

I 1.g lærte vi, hvordan vi bestemte vinklen mellem to vektorer. Givet to vektorer \vec{a} og \vec{b} , så gælder der følgende forhold mellem vinklen v mellem \vec{a} og \vec{b} og deres indbyrdes prikprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(v) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Vi kan derfor finde vinklen v ved

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow v = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right).$$

Typisk vil vi blot bruge ligningen til venstre og så løse med `solve`-kommandoen i Maple. Vi kan også anvende funktionen `vinkel` i Maple. Lad os betragte et par eksempler.

Eksempel 1.1. En linje l er givet ved ligningen

$$l : 2(x - 1) + 3(y - 2) = 0,$$

og en linje m er givet ved ligningen

$$m : -1(x + 2) - 5(y - 1) = 0,$$

Linjen l har derfor normalvektoren \vec{n}_l givet ved

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

og linjen m har normalvektoren \vec{n}_m givet ved

$$\vec{n}_m = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Vinklen mellem linjerne l og m må være lig vinklen mellem deres normalvektorer. Vinklen v mellem linjerne bestemmes derfor ved at løse ligningen

$$\cos(v) = \frac{2(-1) + 3(-5)}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2}}.$$

Dette løses i Maple, og vinklen mellem linjerne fås til at være $157,62^\circ$. Dette er klart den stumpe vinkel. Den spidse vinkel mellem linjerne er derfor

$$180 - 157.62 = 22.38^\circ.$$

Vi kan også bruge `vinkel`-kommandoen. Dette gøres ved at skrive

```
with(Gym):  
u := <2,3>  
v := <-1,-5>  
vinkel(u,v)
```

Dette giver også vinklen 157.62° .

Eksempel 1.2. To linjer l og m er givet ved følgende to parameterfremstillinger henholdsvis.

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Tilsvarende eksemplet med linjens ligning må vinklen mellem to linjer være lig vinklen mellem linjernes retningsvektorer \vec{r}_l og \vec{r}_m . Derfor findes vinklen mellem l og m som vinklen mellem

$$\vec{r}_l = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og

$$\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dette gøres igen i Maple, og vi får, at vinklen mellem linjerne l og m er givet ved $v = 91.22^\circ$.

Opgave 1

- i) Bestem vinklen mellem linjernen l og m , der har følgende parameterfremstillinger henholdsvis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ii) Bestem vinklen mellem linjerne l og m , der har følgende parametriseringer henholdsvis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Opgave 2

- i) To linjer l og m har følgende ligninger:

$$\begin{aligned} l : 4(x - 1) + 4(y - 1) &= 0, \\ m : 2(x + 1) - 2(y - 7) &= 0. \end{aligned}$$

Bestem den spidse vinkel mellem l og m .

- ii) To linjer l og m har følgende ligninger:

$$\begin{aligned} l : -7(x + 13) - 20(y - 1) &= 0, \\ m : \frac{1}{3}(x + 4) + \sqrt{2}(y - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Bestem den stumpe vinkel mellem l og m .

Opgave 3

- i) To linjer l og m har følgende parameterfremstillinger:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0.6 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$

Bestem den stump vinkel v mellem l og m .

- ii) To linjer l og m har følgende parameterfremstillinger:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Bestem den spidse vinkel v mellem l og m .

Opgave 4

- i) En linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og en anden linje m har ligningen

$$(x - 3) + 7(y + 2) = 0$$

Bestem vinklen mellem l og m .

- ii) En linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

og en anden linje m har ligningen

$$-5(x + 3) + 2(y - 2) = 0.$$

Bestem vinklen mellem l og m .

Opgave 5

- i) En linje l er givet ved ligningen

$$6(x - 6) + 8(y - 8) = 0,$$

og en linje m er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Bestem vinklen mellem l og m

Opgave 6

- i) En linje l går gennem punkterne $(1, 1)$ og $(2, 3)$. Bestem en parameterfremstilling for l .
- ii) En linje m går gennem punkterne $(-2, -4)$ og $(3, 5)$. Bestem en ligning for m .
- iii) Bestem vinklen mellem l og m .