Andengradsligninger

Hvad er en andengradsligning?

Vi har tidligere set, hvordan man kan udnytte nulreglen og kvadratsætninger til at gætte løsninger til andengradsligninger. Vi vil i dag se, hvordan man mere generelt kan udregne løsninger til andengradsligninger, men vi vil først definere helt præcist hvad en andengradsligning er.

Definition 1.1 (andengradsligning)**.** Hvis en ligning med ubekendt variabel x er på formen

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, så kalder vi ligningen for en andengradsligning.

Eksempel 1.2. Vi har følgende eksempler på andengradsligninger

$$2x^2 + 10x + 7 = 0, \tag{1.1}$$

$$\sqrt{3}x^2 + 4 = 0. \tag{1.2}$$

I (1.1) er $a = 2$, $b = 10$ og $c = 7$. I (1.2) er $a = \sqrt{3}$, $b = 0$ og $c = 4$.

Hvis ligninger kan omskrives til 2.gradsligninger vil vi ofte også kalde dem for andengradsligninger.

Eksempel 1.3 (Det gyldne snit)**.** Løsninger af andengradsligninger er blevet studeret siden før antikken, men det var først i 1600-tallet at algebraiske ligninger (brug af a, b, c til at betegne kendte størrelser og x, y, z til at betegne ubekendte størrelser) blev introduceret. (Formentlig første gang af René Descartes). Tidligere blev andengradsligninger beskrevet med ord som "retoriske ligninger". Et eksempel på dette er det gyldne snit:

Opdel et linjestykke i to stykker, så forholdet mellem det korte og det lange stykke er lig med forholdet mellem det lange stykke og hele linjestykket. Lad desuden det korte stykke have længde 1. Lad os kalde længden på det lange stykke for x og længden på det korte stykke for $y = 1$. Så får vi algebraisk

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{x+1}{x}.$$

Det er ikke umiddelbart klart, at dette er en andengradsligning, så vi ganger derfor igennem med x, og får

$$x^2 = x + 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 1 = 0,$$

som klart er en andengradsligning.

Løsninger af andengradsligninger

En andengradsligning har altid enten 0, 1 eller 2 løsninger. De kan findes ved brug af følgende sætning.

Sætning 1.4. *Løsningerne til en andengradsligning* $ax^2 + bx + c = 0$ *er givet ved formlen*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a},$$

hvor diskriminanten d *er givet ved*

$$d = b^2 - 4ac.$$

Bevis. Vi ser på ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Vi ganger igennem med $4a$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Vi lægger $d = b^2 - 4ac$ på begge sider af lighedstegnet:

$$\begin{aligned} 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 &\iff 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac \\ &\iff 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d \\ &\iff (b + 2ax)^2 = d. \end{aligned}$$

Vi kan nu isolere x i formlen.

$$\begin{aligned} (b + 2ax)^2 = d &\iff b + 2ax = \pm\sqrt{d} \\ &\iff 2ax = -b \pm \sqrt{d} \\ &\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}. \end{aligned}$$

■

Det er klart, at hvis $d > 0$, så må $ax^2 + bx + c = 0$ have to løsninger. Hvis $d = 0$, så har ligningen netop én løsning. Og hvis $d < 0$, så kan ligningen ingen reelle løsninger have.

Eksempel 1.5. Vi kan nu løse ligningen $x^2 - x - 1 = 0$ fra tidligere eksempel. I denne ligning er $a = 1$, $b = -1$, og $c = -1$. Dette indsætter vi i diskriminantformlen og får

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - (4 \cdot 1 \cdot (-1))}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

x skulle tilsvare længden på et linjestykke, og derfor må det være den positive løsning, vi har interesse i. Derfor skal x have længden

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6,$$

som er det, der nogle gange kaldes det gyldne snits forhold.

Opgave 1

Omskriv følgende ligninger til formen $ax^2 + bx + c = 0$

1) $ax^2 + bc = -c$	2) $x^2 = 7$
3) $9 - 5x = 3x^2$	4) $x(10 + 2x) = 5$
5) $(x - 3)^2 = 0$	6) $\sqrt{2}x^2 + 7^2 = 9$
7) $(x - 2)(x - 10) = 10$	8) $(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3}) = 0$
9) $3x^2 = x^2 - 2$	10) $5x = \frac{1}{2x} + 7$

Opgave 2

Brug diskriminantformlen til at løse andengradsligningerne fra Opgave 1.