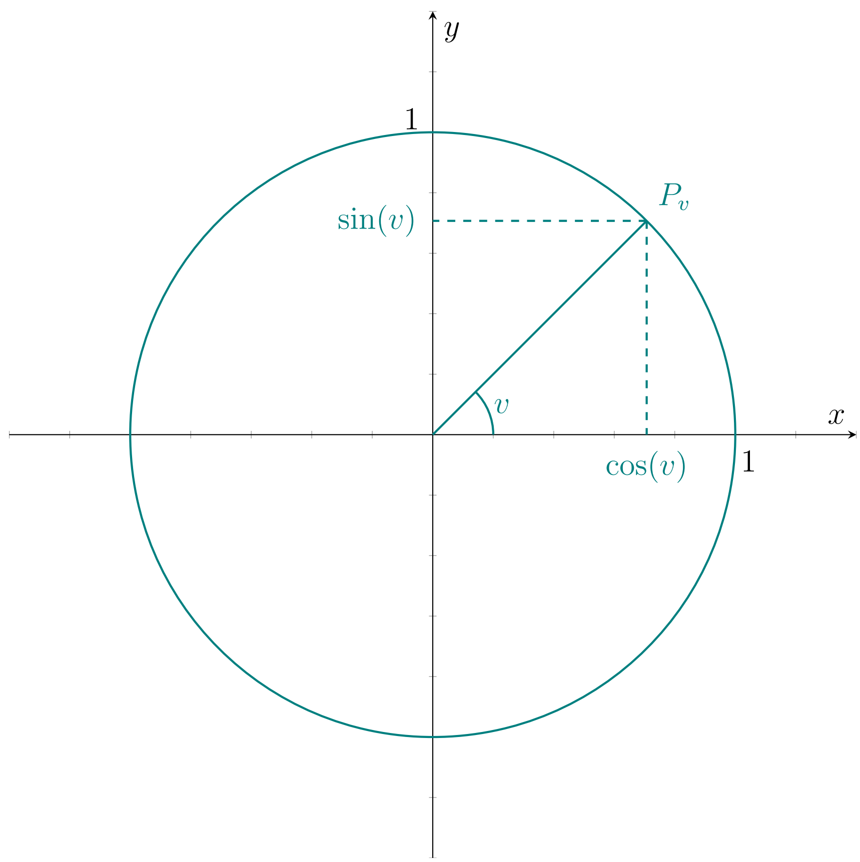
Vektorer og trigonometri

Enhedscirklen

Trigonometri omhandler regning med trekanter. Til at regne på trekanter har vi såkaldte trigonometriske funktioner, der relaterer sidelængder og vinkler i retvinklede trekanter. De mest kendte trigonometriske funktioner er I formentlig bekendte med: $\cos(v)$ og $\sin(v)$. Vi vil bruge enhedscirklen til at definere disse funktioner. Enhedscirklen kan ses på Figur 1



Figur 1: Definition af cos og sin ud fra enhedscirklen

Enhedscirklen er en cirkel med centrum i origo og radius 1. Vi kan bruge enhedscirklen til at definere cos og sin.

Definition 1.1. Lad P_v være et punkt på enhedscirklen, så vinklen mellem stedvektoren $\overrightarrow{OP_v}$ og x-aksen er v. Så defineres funktionerne $\cos(v)$ og $\sin(v)$ som koordinaterne til P_v:

$$P_v = (\cos(v), \sin(v)).$$

Eksempel 1.2. Det gælder, at $\cos(0) = 1$ og $\sin(0) = 0$, da koordinatsættet til P_0 er

$$P_0 = (1, 0) = (\cos(0), \sin(0)).$$

Skal vi anvende de trigonometriske funktioner i Maple og vi ønsker at anvende grader, så skal vi skrive

```
with(Gym):
Cos(v)
Sin(v)
```

Sætning 1.3 (Idiotformlen)**.** *For enhver vinkel v gælder der, at*

$$\cos(v)^2 + \sin(v)^2 = 1.$$

Bevis. Opgave ■

Tangens er den sidste trigonometriske funktion, vi skal betragte. Denne er defineret som

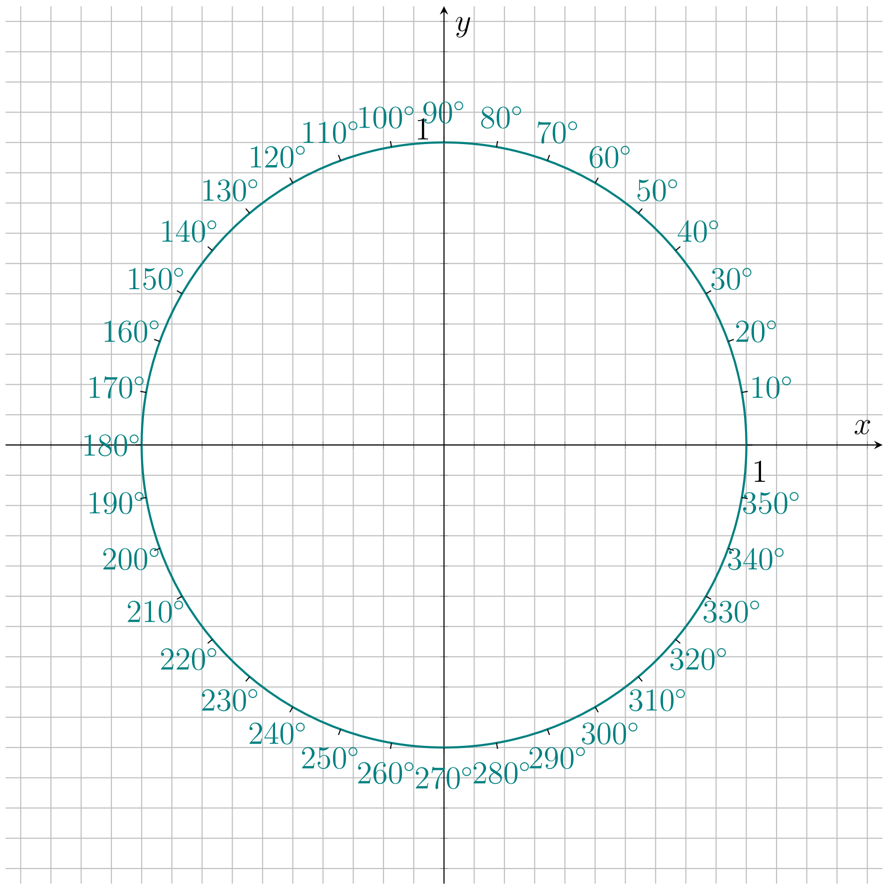
$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}.$$

Retvinklede trekanter

Sætning 2.1. *Lad ABC være en trekant med punkterne A, B og C som hjørner, og lad C være en ret vinkel. Så gælder der for vinklen v, der er vinklen i enten hjørnet A eller B, at*

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenuse}}$$
$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenuse}}$$
$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

Opgave 1



Brug enhedscirklen til at aflæse $\cos(v)$ og $\sin(v)$ for følgende vinkler. Tjek dit resultat

1) 90	2) 45
3) 180	4) 270
5) 60	6) 120
7) 360	8) 450
9) 190	10) 350
11) 300	12) 220

Opgave 2

i) Aflæs $\sin(60)$ og $\sin(120)$.

ii) Kan du finde andre vinkler u og v, hvor $\sin(u) = \sin(v)$?

iii) Aflæs $\cos(10)$ og $cos(-10)$.

iv) Kan du finde andre vinkler u og v, hvor $\cos(u) = \cos(v)$?

v) Aflæs $\cos(45)$ og $\sin(45)$.

vi) Kan du finde andre vinkler v, så $\cos(v) = \sin(v)$

Opgave 3

i) Brug enhedscirklen til at løse ligningen $\cos(v) = 0.5$

ii) Brug enhedscirklen til at løse ligningen $\sin(v) = 0.8$

iii) Brug enhedscirklen til at løse ligningen $\cos(v) = -0.2$

Opgave 4

Vi skal bevise idiotformlen. Vi betragter derfor vektoren $\overrightarrow{OP_v}$, der går fra origo ud til randen af enhedscirklen.

i) Opskriv koordinaterne til vektoren $\overrightarrow{OP_v}$.

ii) Brug længdeformlen for vektorer til at opskrive længden af vektoren $\overrightarrow{OP_v}$

iii) Udnyt, at du allerede kender længden af $\overrightarrow{OP_v}$, og sæt dit udtryk fra ii) lig denne længde. (Vink: Hvad er radius for enhedscirklen?)

iv) Opløft begge sider af lighedstegnet i 2 og sammenlign med idiotformlen.

Opgave 5

Brug dit resultat fra Opgave 1 til at bestemme tangens for følgende vinkler

1) 0	2) 45
3) 180	4) 270
5) 60	6) 120
7) 360	8) 450

Opgave 6

Brug idiotformlen til at bestemme cos(45) eksakt.

Opgave 7

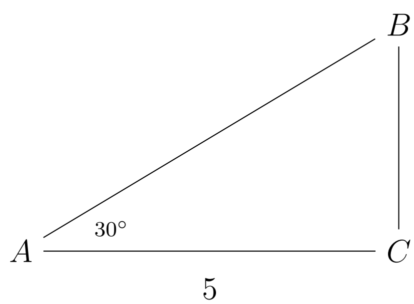
i) Brug enhedscirklen til at argumentere for, at $\cos(30) = 0.5$.

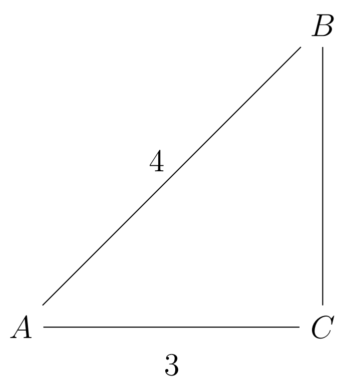
ii) Brug nu denne information samt idiotformlen til at bestemme $\sin(30)$.

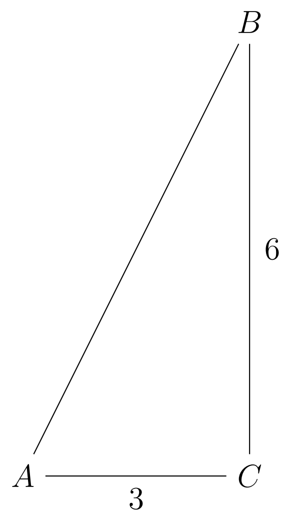
iii) Brug nu enhedscirklen til at bestemme $\sin(60)$ og $\cos(60)$.

Opgave 8

Bestem de ukendte sider og vinkler i følgende trekanter:







Opgave 9

Vi står foran en høj bygning og vil gerne bestemme, hvor høj den er. Vi står 300m fra bygningen og måler, at vinklen mellem jorden og sigtelinjen fra jorden til toppen af bygningen er $25°$.

i) Hvor langt er der i lige linje fra os til toppen af bygningen?

ii) Hvor høj er bygningen?