Ekstrema og monotoni

Ekstrema

Et *ekstremum* for en funktion er løst beskrevet det lokalt højeste eller laveste punkt på grafen for en funktion. Vi definerer to klasser af ekstrema mere præcist.

Definition 1.1 (Ekstremum)**.** Lad $f : A \to \mathbb{R}$ være givet. Hvis der for et $x_0 \in A$ gælder, at der findes et interval $[x_0 - k, x_0 + k] \subseteq A$ så

$$f(x_0) \geq f(x)$$

for alle $x \in [x_0 - k, x_0 + k]$, så siges x_0 at være et *lokalt maksimumssted* for f. Punktet $(x_0, f(x_0))$ kaldes for et *lokalt maksimum*. Hvis det gælder, at

$$f(x_0) \geq f(x)$$

for alle $x \in A$, så siges x_0 at være et *globalt maksimumssted* for f. Punktet $(x_0, f(x_0))$ kaldes for et *lokalt maksimum*. Gælder det modsat for et $x_0 \in A$, at der findes et interval $[x_0 - k, x_0 + k]$ så

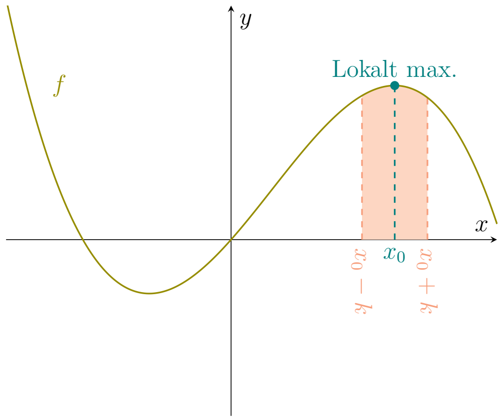
$$f(x_0) \leq f(x)$$

for alle $x \in [x_0 - k, x_0 + k]$, så siges x_0 at være et *lokalt minimumssted* for f. Punktet $(x_0, f(x_0))$ kaldes for et *lokalt minimum*. Hvis det gælder, at

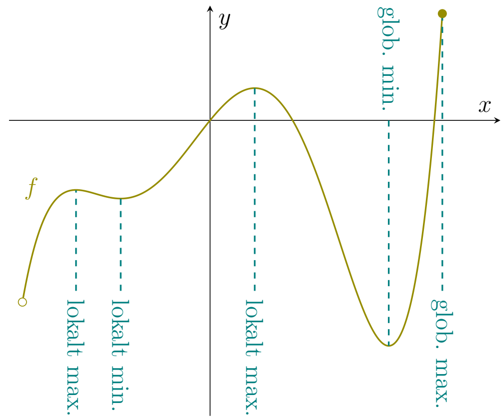
$$f(x_0) \leq f(x)$$

for alle $x \in A$, så siges x_0 af være et *globalt minimumssted*. Punktet $(x_0, f(x_0))$ kaldes for et *globalt minimum*.

På Figur 1 kan vi se et interval omkring et lokalt maksimum og på Figur 2 kan vi se en række forskellige typer af ekstrema for en funktion.



Figur 1: Lokalt maksimum og interval omkring maksimum.



Figur 2: Forskellige ekstrema for en funktion.

Monotoni

Det kan være meningsfuldt at beskrive funktioner på intervaller, hvor de enten kun vokser eller kun aftager fx. i forbindelse med inverse funktioner. Hvis en funktion kun er voksende eller aftagende på et interval, siges funktionen at være *monoton* på intervallet. Vi definerer det mere præcist.

Definition 2.1 (Monotoni)**.** En funktion f siges at være *voksende* på et interval $[a, b]$, hvis det for $x_1, x_2 \in [a, b]$, hvor $x_2 > x_1$, gælder, at

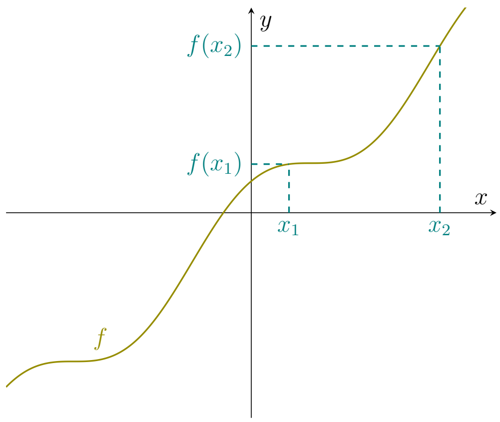
$$f(x_2) \geq f(x_1).$$

Hvis uligheden er skarp ($>$), siges funktionen at være *strengt voksende.* Modsat siges f at være aftagende på intervallet $[a, b]$, hvis det for $x_1, x_2 \in [a, b]$, hvor $x_2 > x_1$, gælder, at

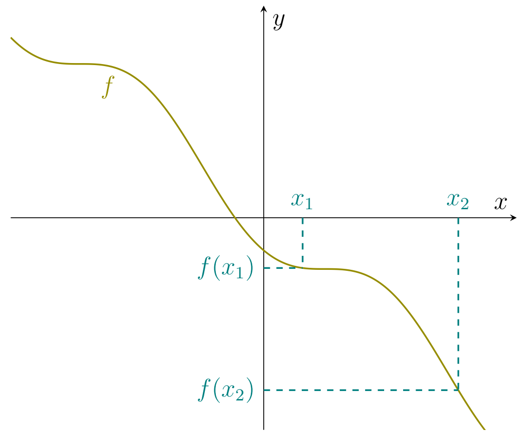
$$f(x_2) \leq f(x_1).$$

Hvis uligheden er skarp ($<$), siges funktionen at være *strengt aftagende.*

Vi kan se grafen for en voksende funktion på Figur 3 og en aftagende funktion på Figur 4.



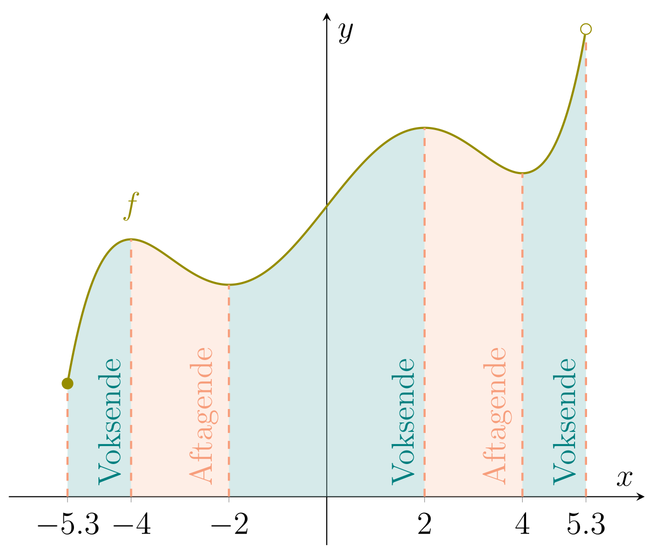
Figur 3: Graf for voksende funktion.



Figur 4: Graf for aftagende funktion.

Vi kan for en funktion opskrive *monotoniforholdene*, der er de intervaller, hvor en funktion f er enten voksende eller aftagende. Vi betragter et eksempel.

Eksempel 2.2. Grafen for en funktion f kan ses på Figur 5.



Figur 5: Graf for f med monotone intervaller markeret.

Vi kan nu opskrive monotoniforholdene for funktionen f.

- f er voksende for $x \in [-5.3, -4]$.
- f er aftagende for $x \in [-4, -2]$.
- f er voksende for $x \in [-2, 2]$.

- f er aftagende for $x \in [2, 4]$.
- f er voksende for $x \in [4, 5.3[$.

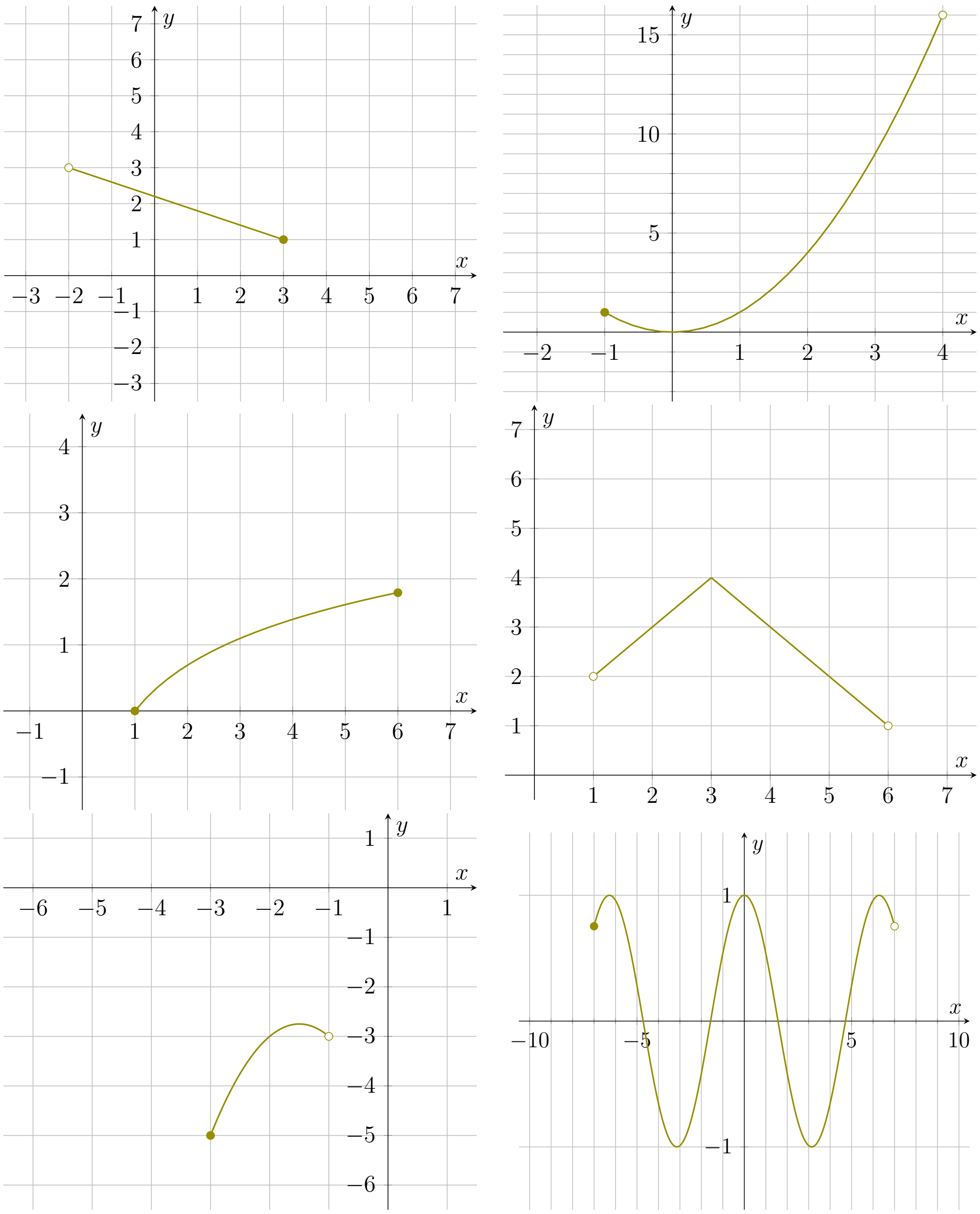
Vi kan også bruge foreningsmængden $\cup$ til at opskrive monotoniforholdene lidt mere kompakt.

- f er voksende for $x \in [-5.3, -4] \cup [-2, 2] \cup [4, 5.3[$.
- f er aftagende for $x \in [-4, -2] \cup [2, 4]$.

I fald funktionen f ikke er afgrænset til et begrænset interval, så ville funktionen blive ved med at vokse. I så fald ville vi skrive f er voksende for $x \in [4, +\infty[$.

Opgave 1

Bestem ekstremumsstederne for følgende funktioner og afgør, om de er lokale eller globale minima.



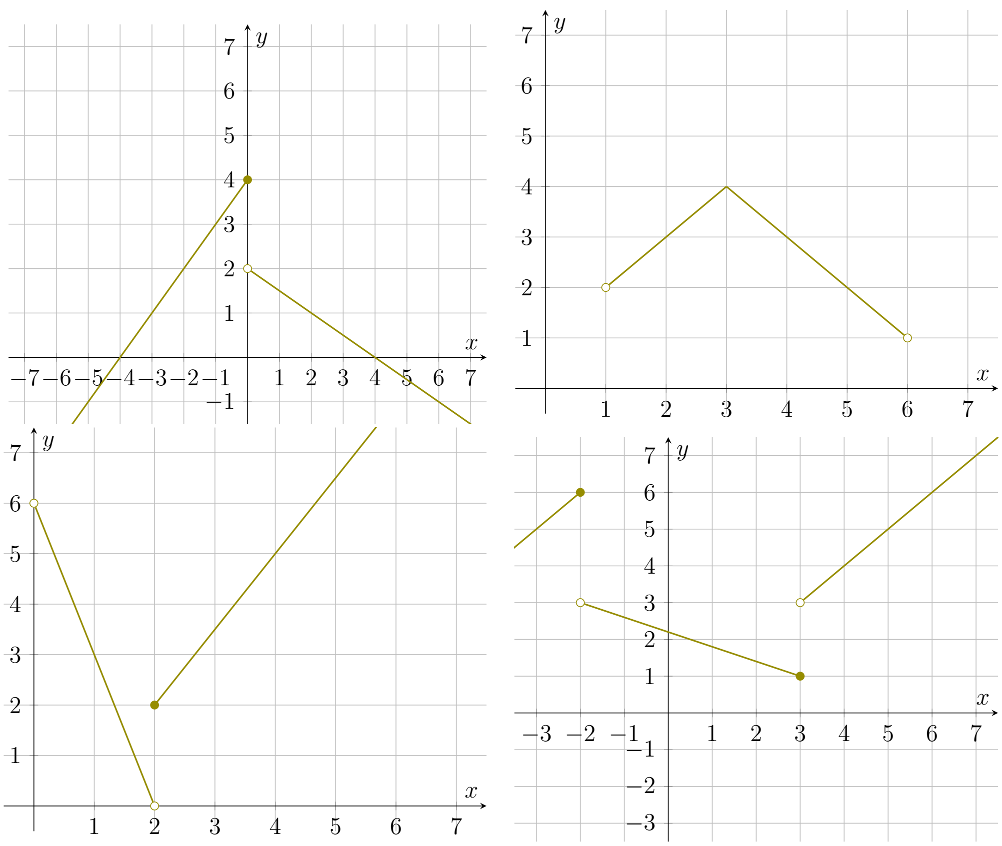
Opgave 2

Tegn følgende funktioner i Maple og bestem deres ekstrema. Afgør desuden, om de er lokale eller globale ekstrema.

1) $f(x) = x^2$
2) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 36$
3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 10}$
4) $f(x) = x \cdot \cos(x),\ -10 \leq x \leq 10$
5) $f(x) = \sin(x),\ 0 < x < 20$
6) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{hvis } x \geq 7, \\ -2x + 7, & \text{hvis } x < 7. \end{cases}$

Opgave 3

Bestem først ekstrema for følgende funktioner og opskriv derefter deres monotoniforhold.



Opgave 4

Tegn følgende funktioner i Maple og bestem monotoniforholdene for dem

1) $f(x) = -x^2 + 5x - 9$

2) $f(x) = -x^4 + 7x^3 - 36x^2 + 14x - 10$

3) $f(x) = \ln(x^5 - 9x^4)$

4) $f(x) = -x \cdot \sin(x),\ -10 \leq x \leq 10$

5) $f(x) = \sin(x),\ -10 < x < 4$

6) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{hvis } x \leq -5, \\ x^2, & \text{hvis } x > 5. \end{cases}$

Opgave 5

Hvis en funktion er strengt monoton på et interval, kan du så gennemskue, om funktionen er surjektiv, injektiv eller bijektiv?