Differentialligninger i Maple

Hældningsfelter

Vi genopfrisker, hvad vi mener med et hældningsfelt for en differentialligning. Lad os betragte en differentialligning

$$y' = f(x, y).$$

Vi definerer et *linjeelement* til differentialligningen som et punkt i (x, y)-planet samt hældningen af løsningen til differentialligningen i dette punkt. Vi noterer et linjeelement som

$$(x_0, y_0; a),$$

hvor (x_0, y_0) er punktet i (x, y)-planen og $a = y'(x_0)$ for en løsning $y(x)$ til differentialligningen.

Eksempel 1.1. Vi betragter differentialligningen

$$y' = \frac{x}{y^2}.$$

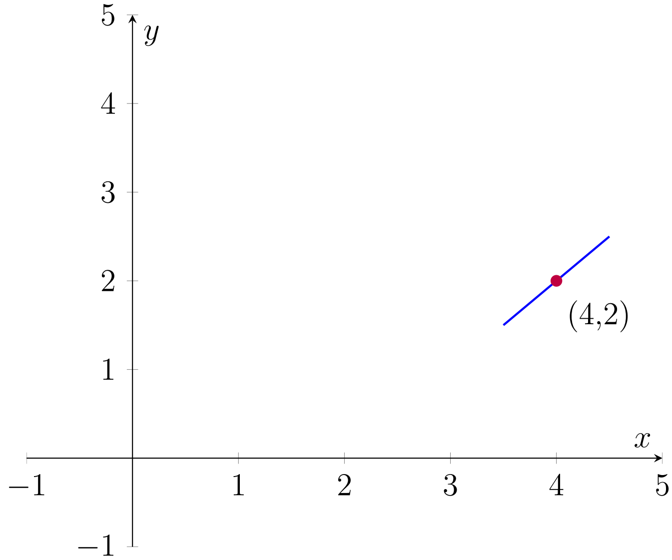
Så længe $y \neq 0$, så kan vi bestemme linjelementer for løsningskurver til denne differentialligning. Vælger vi punktet $(4, 2)$, så kan vi finde linjeelemenentet i dette punkt ved at indsætte i differentialligningen:

$$y' = \frac{4}{2^2} = 1,$$

og et linjeelement til denne differentialligning lyder

$$(4, 2; 1).$$

Dette linjeelement er illustreret på Fig. 1.



Figur 1: Linjeelementet $(4, 2; 1)$

Sammensætter vi mange af disse linjeelementer så får vi et hældningsfelt. I Maple gøres dette ved følgende kommando:

```
restart
with(Gym):
linjeelementer(y=f(x,y),y,x=xmin..xmax,y=ymin..ymax)
```

Lad os betragte et eksempel:

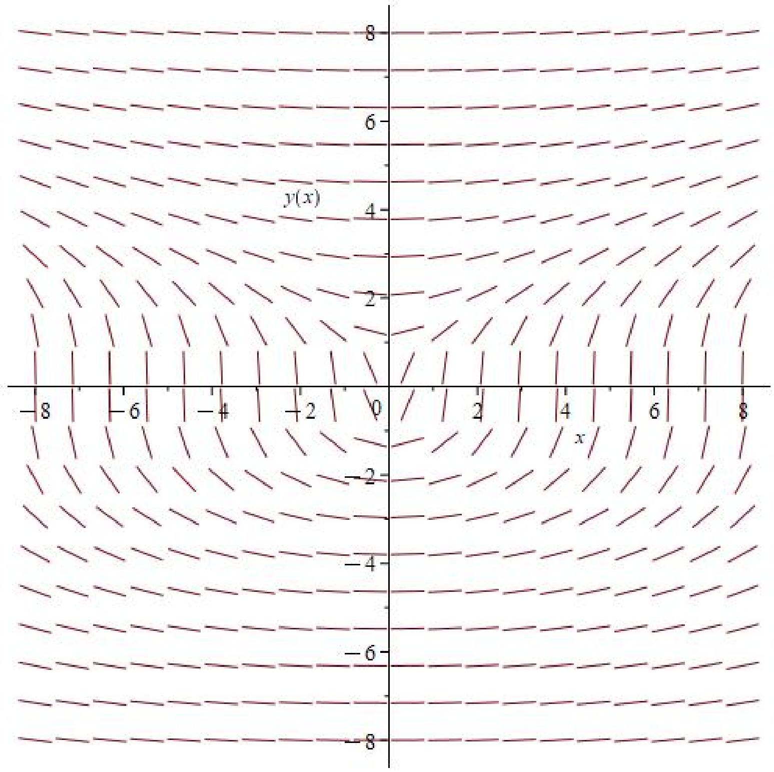
Eksempel 1.2. Vi ser på differentialligningen

$$y' = \frac{x}{y^2}.$$

Vi ønsker at bestemme et hældningsfelt for denne differentialligning for $x \in [-8, 8]$ og $y \in [-8, 8]$. Vi skriver følgende i Maple:

```
restart
with(Gym):
linjeelementer(y=x/y^2,y,x=-8..8,y=-8..8)
```

Dette giver os hældningsfeltet på Fig. 2



Figur 2: Hældningsfelt for differentialligningen $y' = x/y^2$

Løsning af differentialligninger

Vi kan også løse differentialligninger i Maple. Har vi en differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

så kan den løses i Maple med følgende syntaks:

```
restart
with(Gym):
dsolve(y' = f(x,y))
```

Dette giver den fuldstændige løsning. Har vi ydermere en begyndelsesværdi $y_0 = y(x_0)$, hvor $y(x)$ er en løsning til differentialligningen, så kan vi løse begyndelsesværdiproblemet med følgende.

```
restart
with(Gym):
dsolve([y' = f(x,y),y(x_0)=y_0])
```

Lad os betragte et eksempel.

Eksempel 2.1. Vi ser på differentialligningen

$$y' = x^2 + y$$

Vi finder den fuldstændige løsning ved

`dsolve(y' = x^2+y),`

og vi får løsningen

$$y(x) = -x^2 - 2x - 2 + ce^x.$$

Har vi ydermere begyndelsesbetingelsen $y(0) = 10$, så skrives

`dsolve([y' = x^2+y,y(0)=10]),`

og vi får den partikulære løsning

$$y(x) = -x^2 - 2x - 2 + 12e^x.$$

Opgave 1

i) Bestem et linjeelement til differentialligningen

$$y' = xy + y^2$$

i punkterne $(-2, 4)$ og $(10, 3)$.

ii) Bestem et linjeelement til differentialligningen

$$y' = \frac{y}{x}$$

i punkterne $(1, 0)$ og $(-5, 7)$.

Opgave 2

i) Bestem et hældningsfelt til differentialligningen

$$y' = 7y$$

for $(x, y) \in [0, 5] \times [0, 5]$. Vurdér, om funktionen $y(x) = e^{-4x}$ kan være en løsning til differentialligningen.

ii) Bestem et hældningsfelt til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^3}.$$

Opgave 3

i) Bestem en partikulær løsning til differentialligningen

$$y' = \cos(x)\sin(x),$$

der går gennem punktet $(\pi, 4)$.

ii) Bestem en partikulær løsning til differentialligningen

$$y' = \sqrt{x} \cdot y^2,$$

der går gennem punktet $(0, 4)$.

iii) Bestem en fuldstændig løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \cos(xy)$$

iv) Bestem en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sqrt{\frac{1}{x}},$$

der går gennem punktet $(1, 1)$.

Opgave 4

Lad $B(x)$ betegne antallet at bakterier i mia. i en koloni som funktion af antal timer x og lad B' betegne bakterievæksten. Det maksimale antal bakterier i kolonien er 16.7 mia. I en model er bakterievæksten proportional med produktet mellem bakterieantallet og forskellen mellem bakterieantallet og det maksimale antal bakterier.

i) Opstil en differentialligning, der beskriver bakterievæksten.

ii) Udnyt, at antallet af bakterier, når der er 1 mia bakterier, tiltager med 130 mio bakterier i timen til at bestemme proportionalitetsfaktoren.

iii) Udnyt, at der til tidspunktet $x_0 = 0$ er 2.1 mia bakterier til at bestemme en partikulær løsning til differentialligningen.

iv) Bestem, hvornår der vil være 12 mia. bakterier i kolonien.