

Eksponentiel vækst og fordobling/halvering

Fordoblings- og halveringskonstanter

Perspektivet var før at overveje, hvordan funktionsværdien af eksponentiel vækst udvikler sig, når vi øger x med 1. Vi kan tilsvarende betragte problemet fra den modsatte side: hvad skal vi øge x med for at fordoble/halvere funktionsværdien. Vi skal altså bestemme en størrelse T_2 , så

$$f(x + T_2) = 2f(x)$$

for en eksponentialfunktion f . Denne idé er præsenteret i Fig. 1.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{+T_2} & \\ x & | & x + T_2 \\ f(x) & | & 2f(x) \\ & \xleftarrow{\cdot 2} & \end{array}$$

Figur 1: Fordoblingskonstant

For eksponentialvækst, hvor fremskrivningsfaktoren a er større end 1 er det muligt at finde et sådan tal $T_2 > 0$. Følgende sætning fortæller, hvordan vi skal finde dette tal, og vi kalder tallet for *Fordoblingskonstanten for f* .

Sætning 1.1. *For en eksponentialfunktion f gælder det, at fordoblingskonstanten T_2 , der opfylder, at*

$$f(x + T_2) = 2f(x)$$

er givet ved

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Tilsvarende er halveringskonstanten $T_{1/2}$, der opfylder, at

$$f(x + T_{1/2}) = \frac{1}{2}f(x)$$

bestemt ved

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\ln(a)} = \frac{\log(1/2)}{\log(a)}.$$

Desuden gælder der, at $a = \sqrt[2]{2} = \sqrt[1/2]{2}$

Bevis. Vi beviser tilfældet for fordoblingskonstanten. Tilfældet for halveringskonstanten beviset fuldstændig analogt. Lad os derfor for en eksponentialfunktion f givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x$$

antage, at tallet T_2 opfylder, at $f(x + T_2) = 2f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi har så, at

$$\begin{aligned} f(x + T_2) = 2f(x) &\Leftrightarrow b \cdot a^x a^{T_2} = 2b \cdot a^x \\ &\Leftrightarrow a^{T_2} = 2 \\ &\Leftrightarrow \ln(a^{T_2}) = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow T_2 \ln(a) = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}, \end{aligned}$$

og vi har givet et bevis for fordoblingskonstanten. Siden vi har, at $a^{T_2} = 2$, så må der desuden gælde, at $a = \sqrt[T_2]{2}$, da $a > 0$. ■

Opgave 1

Bestem fordoblingskonstanten eller halveringskonstanten for følgende eksponentialfunktioner

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $5 \cdot 2^x$ | 2) $7 \cdot 0.95^x$ |
| 3) $1.03 \cdot 1.004^x$ | 4) $6 \cdot 5.09^x$ |
| 5) $0.01 \cdot 1.75^x$ | 6) $7.19 \cdot 1.179^x$ |

Opgave 2

- Du har 50.000kr på en konto i banken og får 1 procent i årlig rente. Hvor meget står der på din konto efter 12 år?
- Hvis en bakteriekoloni vokser med 200 procent på et døgn, hvor mange procent vokser den så med på en time?
- Væksten af en bestemt infektionssygdom er på 2 procent om ugen. Hvad er den månedlige vækst?

Opgave 3

Bestem enten fordoblings eller halveringskonstanten for følgende eksponentialfunktioner

1) $f_1(x) = 0.5 \cdot 2^x$

2) $f_2(x) = 2 \cdot 0.5^x$

3) $f_3(x) = 2000 \cdot (0.003)^x$

4) $4e^{27x}$

Opgave 4

En bakteriekoloni vokser med 30 procent i timen. Hvad er fordoblingskonstanten for den eksponentialfunktion, der beskriver antallet af bakterier? Hvad er fordoblingskonstanten, hvis vi ændrer enheden fra timer til dage? Hvad med minutter?

Opgave 5

- i) Bevis, at halveringskonstanten $T_{1/2}$ er givet ved

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\ln(a)}$$

for en eksponentialfunktion $f(x) = ba^x$. (Hint: Brug beviset for fordoblingskonstanten som skabelon.)