Planen og kuglens ligning

Planens ligning

Vi har tidligere set, at linjens ligning er givet ved

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

hvor vektoren $\vec{n}$ givet ved

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

er en normalvektor til linjen og punktet $P(x_0, y_0)$ ligger på linjen. Udledningen af denne ligning består i at betragte alle vektorer, der er orthogonale til $\vec{n}$ og som starter i punktet P må beskrive punktmængden for linjen. Vi kan gøre noget tilsvarende i rummet.

Vi lader $\vec{n}$ være en normalvektor til en plan, hvor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Desuden lader vi $P(x_0, y_0, z_0)$ være et punkt på planen. Vi konstruerer nu planens ligning som følgende: Ethvert punkt (x, y, z) på planen giver os en vektor langs planen, der er orthogonal til normalvektoren $\vec{n}$ givet ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0. \end{pmatrix}$$

Der må derfor gælde, at $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Skrives dette ud fås

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

Denne ligning kaldes for *planens ligning*.

Sætning 1.1 (Planens ligning)**.** *Lad $P(x_0, y_0, z_0)$ være et punkt på en plan og lad*

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

være en normalvektor til planen. Så er planens ligning givet ved

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Eksempel 1.2. Lad $P(1, 2, 3)$ være et punkt på en plan, og lad

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

være en normalvektor til planen. Så har planen ligningen

$$-2(x - 1) + 4(y - 2) - 3(z - 3) = 0.$$

Kuglens ligning

Som det er tilfældet med cirklens ligning i planen kan vi også bestemme kuglens ligning i rummet. Vi lader K være en kugle med centrum i $C(x_0, y_0, z_0)$ og med radius r. Ethvert punkt $P(x, y, z)$ på kuglens overflade vil så opfylde, at afstanden fra centrum til (x, y, z) vil være r. Vektoren, der går fra C til P skal derfor have længde r. Skrives dette ud fås

$$\left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right| = r \quad \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$
$$\Leftrightarrow \; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Vi kan nu konkludere med en sætning:

Sætning 2.1 (Kuglens ligning)**.** *Lad K være en kugle med centrum i $C(x_0, y_0, z_0)$ og radius r. Så er kuglens ligning givet ved*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Eksempel 2.2. Kuglen med radius i $C(4, 2, -3)$ og radius 3 har ligningen

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$$

Eksempel 2.3. En kugle har ligningen

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z = 2. \tag{2.1}$$

Vi skal bestemme centrum og radius for kuglen, og skal derfor kvadratkomplettere som i tilfældet med cirklens ligning. Da vi har

$$\begin{aligned} -2xx_0 &= -2x, \\ -2yy_0 &= -4y, \\ -2zz_0 &= -6z, \end{aligned}$$

så må $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ og $z_0 = 3$. Vi lægger derfor $1^2 + 2^2 + 3^2$ til på begge sider af lighedstegnet i (2.1) og får

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 14 = 2 + 14 = 16,.$$

og derfor at cirklens radius er $\sqrt{16} = 4$.

Opgave 1

i) På en plan L ligger punktet $P(5, 4, -2)$ og den har

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

som normalvektor. Bestem en ligning for K.

ii) På en plan L ligger punktet $P(1, 10, 5)$ og den har

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

som normalvektor. Bestem en ligning for K.

Opgave 2

i) En plan L har ligningen

$$2(x-2)+3(y+3)+5(z-1)=0.$$

Afgør om punkterne $(1,1,1)$ og $(1,6,-4)$ ligger på L.

ii) En plan L har ligningen

$$z=0.$$

Afgør, om punkterne $(10000,4,2)$ og $(\pi,e,0)$ ligger på L.

Opgave 3

i) En kugle K har centrum i $(0,0,0)$ og radius 1. Bestem ligningen for K.

ii) En kugle K har centrum i $(-2,4,8)$ og radius 5. Bestem ligningen for K.

Opgave 4

i) En kugle K har ligningen

$$x^2-4x+y^2+4y+z^2-8z=1.$$

Bestem centrum og radius for K.

ii) En kugle K har ligningen

$$x^2-6x+y^2-6y+z^2-10z=21.$$

Bestem centrum og radius for K.

iii) Tjek i GeoGebra, at du har fundet de rigtige kugler. (-:

Opgave 5

i) En plan L er givet ved ligningen

$$2x+3y+6z=45.$$

Omskriv ligningen for L til formen

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

ii) En plan L er givet ved ligningen

$$-4x + 9y + 7z = 9.$$

Omskriv ligningen for L til formen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$