Logaritmer

Titalslogaritmen

Har vi en ligning af typen $x^2 = k$, så kan vi bestemme x ved at tage kvadratroden på begge sider af lighedstegnet og bestemme (en af) løsningerne til ligningen. I forbindelse med eksponentiel vækst vil vil gerne kunne løse ligninger af typen $10^x = k$ og $e^x = k$ (hvor e betegner Eulers tal, $e \approx 2.71$). Til dette vil vi introducere logaritmefunktionerne.

Logaritmefunktionen er en omvendt funktion til eksponentialfunktionen. I følgende tabel kan vi se eksponentialfunktionen f givet ved

$$f(x) = 10^x.$$

x	0	1	2	3	4	5
10^x	1	10	100	1000	10000	100000

Da $\log(x)$ gør det omvendte af 10^x, så vil en tilsvarende tabel se ud som følgende.

x	1	10	100	1000	10000	100000
$\log(x)$	0	1	2	3	4	5

Definition 1.1 (Titalslogaritmen)**.** Titalslogaritmen log er den entydige funktion, der opfylder, at

$$\log(10^x) = x$$

og

$$10^{\log(x)} = x.$$

Eksempel 1.2. Vi har, at

$$\log(100) = \log(10^2) = 2.$$

For titalslogaritmen gælder der en række regneregler.

Sætning 1.3 (Logaritmeregneregler)**.** *For $a, b > 0$ gælder der, at* *i)* $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$,

ii) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$,

iii) $\log(a^x) = x\log(a)$.

Bevis. Vi vil løbende udnytte, at $\log(10^a) = a$ og $10^{\log(a)} = a$. Vi betragter udtrykkene.
i)

$$\begin{aligned}\log(a \cdot b) &= \log(10^{\log(a)}10^{\log(b)})\\ &= \log(10^{\log(a)+\log(b)})\\ &\log(a) + \log(b).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log\left(\frac{10^a}{10^b}\right)\\ &= \log(10^{\log(a)-\log(b)})\\ &= \log(a) - \log(b).\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\log(a^x) &= \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right)\\ &= \log\left(10^{\log(a)x}\right)\\ &= x\log(a),\end{aligned}$$

og vi er færdige med beviset. ∎

Eksempel 1.4. Vi ønsker at løse ligningen $10^{x+5} = 1000$. Vi tager derfor logaritmen på begge sider af lighedstegnet:

$$\log\left(10^{x+5}\right) = \log(1000) \;\Leftrightarrow\; x + 5 = \log(1000) = 3 \;\Leftrightarrow\; x = -2.$$

Eksempel 1.5. Vi ønsker at løse ligningen

$$\log(4x) = 4.$$

Vi opløfter derfor 10 i begge sider af lighedstegnet.

$$10^{\log(4x)} = 10^4 \;\Leftrightarrow\; 4x = 10000 \;\Leftrightarrow\; x = 2500.$$

Opgave 1

En tabel med funktionsværdier for 10^x er givet.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
10^x	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000	100000

Brug tabellen til at bestemme følgende.

1) $\log(10)$
2) $\log(1)$
3) $\log(0.001)$
4) $\log(100000)$

Opgave 2

Bestem følgende udtryk

1) $\log(10^7)$
2) $\log(10000)$
3) $\log(10^{1.5})$
4) $\log(10^{\sqrt{2}})$
5) $\log(10000000)$
6) $\log(1)$
7) $\log(100)$
8) $\log(1000)$
9) $\log(10^{-4})$
10) $\log(0.00001)$

Opgave 3

1) $\log(2 \cdot 10^3)$
2) $\log(3000)$
3) $\log(500)$
4) $\log(10) + \log(1000)$
5) $\log(2500)$
6) $\log(20) + \log(5)$
7) $\log(5^6)$
8) $\log(4000) - \log(4)$
9) $\log(2) + \log(2) + \log(5) + \log(5)$
10) $\log(50) - \log(5)$

Opgave 4

Aflevering