Eksponentiel vækst og fordobling/halvering

Fremskrivning og Vækstrate

Vi har tidligere set, at for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$, så gælder der, at hvis vi øger x med 1, så øger vi $f(x)$ med en faktor a. For at understrege denne pointe, viser vi dette igen.

$$f(x+1) = b \cdot a^{x+1} = b \cdot a^x \cdot a = f(x) \cdot a.$$

Vi kalder derfor a for *fremskrivningsfaktoren*, da dette er hvad vi fremskriver vores vækst med, hver gang vi øger x med 1. Tilsvarende definerer vi $r = a - 1$ som *vækstraten*. $r \cdot 100$ er den procentvise stigning/det procentvise fald i den eksponentielle vækst, hver gang vi øger x med 1. Udviklingen af eksponentiel vækst er præsenteret i Fig. 1

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{+1}{\curvearrowright}} \\ x & x+1 \\ \hline f(x) & af(x) \\ \multicolumn{2}{c}{\underset{\cdot a}{\curvearrowright}} \end{array}$$

Figur 1: Udvikling af eksponentiel vækst.

Eksempel 1.1. Betragt eksponentialfunktionen f givet ved

$$f(x) = 4 \cdot (0.5)^x$$

Denne har fremskrivningsfaktor på 0.5 og vækstrate på $0.5 - 1 = -0.5$. Vi øger altså funktionsværdien med -50 procent hver gang vi øger x med 1.

Betragt nu eksponentialfunktionen g med forskrift

$$g(x) = 2 \cdot (1.2)^x.$$

Fremskrivningsfaktoren for g er $a = 1.2$ og vækstraten er $r = 0.2$. Vi øger funktionsværdien med 20 procent hver gang vi øger x med 1

Eksempel 1.2. Befolkningstallet i et land stiger med 1 promille om året, og i år 2000 er er 10 mio mennesker i landet. Dette tilsvarer eksponentiel vækst med fremskrivningsfaktor $a = 1.001$ og vækstrate 0.001. Det giver os den eksponentielle model for antallet af personer i landet efter år 2000:

$$f(x) = b \cdot a^x = 10 \cdot (0.001)^x.$$

Fordoblings- og halveringskonstanter

Perspektivet var før at overveje, hvordan funktionsværdien af eksponentiel vækst udvikler sig, når vi øger x med 1. Vi kan tilsvarende betragte problemet fra den modsatte side: hvad skal vi øge x med for at fordoble/halvere funktionsværdien. Vi skal altså bestemme en størrelse T_2, så

$$f(x+T_2)=2f(x)$$

for en eksponentialfunktion f. Denne idé er præsenteret i Fig. 2.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{+T_2}{\curvearrowright}} \\ x & x+T_2 \\ \hline f(x) & 2f(x) \\ \multicolumn{2}{c}{\underset{\cdot 2}{\curvearrowright}} \end{array}$$

Figur 2: Fordoblingskonstant

For eksponentialvækst, hvor fremskrivningsfaktoren a er større end 1 er det muligt at finde et sådan tal $T_2>0$. Følgende sætning fortæller, hvordan vi skal finde dette tal, og vi kalder tallet for *Fordoblingskonstanten for f.*

Sætning 1.3. *For en eksponentialfunktion f gælder det, at fordoblingskonstanten T_2, der opfylder, at*

$$f(x+T_2)=2f(x)$$

er givet ved

$$T_2=\frac{\log(2)}{\log(a)}=\frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Tilsvarende er halveringskonstanten $T_{1/2}$, der opfylder, at

$$f(x+T_{1/2})=\frac{1}{2}f(x)$$

bestemt ved

$$T_{1/2}=\frac{\ln(1/2)}{\ln(a)}=\frac{\log(1/2)}{\log(a)}.$$

Desuden gælder der, at $a=\sqrt[T_2]{2}=\sqrt[T_{1/2}]{1/2}$

Bevis. Vi beviser tilfældet for fordoblingskonstanten. Tilfældet for halveringskonstanten beviset fuldstændig analogt. Lad os derfor for en eksponentialfunktion f givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x$$

antage, at tallet T_2 opfylder, at $f(x + T_2) = 2f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi har så, at

$$\begin{aligned} f(x + T_2) = 2f(x) &\Leftrightarrow b \cdot a^x a^{T_2} = 2b \cdot a^x \\ &\Leftrightarrow a^{T_2} = 2 \\ &\Leftrightarrow \ln(a^{T_2}) = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow T_2 \ln(a) = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}, \end{aligned}$$

og vi har givet et bevis for fordoblingskonstanten. Siden vi har, at $a^{T_2} = 2$, så må der desuden gælde, at $a = \sqrt[T_2]{2}$, da $a > 0$. ■

Opgave 1

i) Bevis, at halveringskonstanten $T_{1/2}$ er givet ved

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\ln(a)}$$

for en eksponentialfunktion $f(x) = ba^x$. (Hint: Brug beviset for fordoblingskonstanten som skabelon.)

Opgave 2

i) Du har 50.000kr på en konto i banken og får 1 procent i årlig rente. Hvor meget står der på din konto efter 12 år?

ii) Hvis en bakteriekoloni vokser med 200 procent på et døgn, hvor mange procent vokser den så med på en time?

iii) Væksten af en bestemt infektionssygdom er på 2 procent om ugen. Hvad er den månedlige vækst?

Opgave 3

Bestem enten fordoblings eller halveringskonstanten for følgende eksponentialfunktioner

1) $f_1(x) = 0.5 \cdot 2^x$
2) $f_2(x) = 2 \cdot 0.5^x$
3) $f_3(x) = 2000 \cdot (0.003)^x$
4) $4e^{27x}$

Opgave 4

En bakteriekoloni vokser med 30 procent i timen. Hvad der fordoblingskonstanten for den eksponentialfunktion, der beskriver antallet af bakterier? Hvad er fordoblingskonstanten, hvis vi ændrer enheden fra timer til dage? Hvad med minutter?