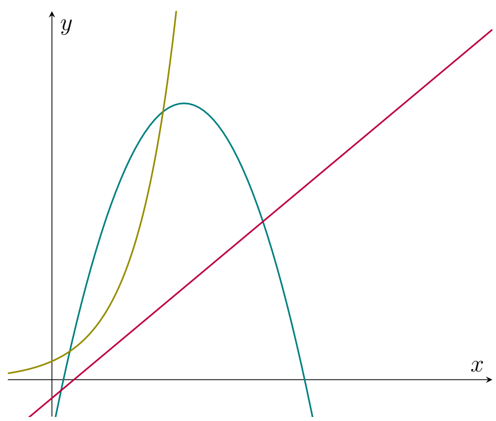
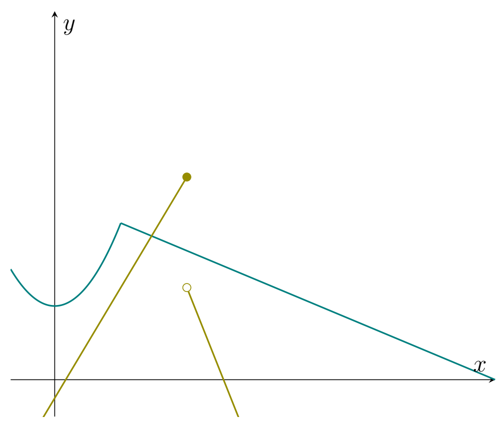
Monotoniforhold og hældninger

Tangenter og differentialkvotienten

Vores næste emne hedder *differentialregning*. Differentialregning omhandler at beskrive vækst og hældninger af *glatte* funktioner - altså funktioner, der ikke har ”knæk”og ”hop”. De fleste funktioner, vi arbejder med i gymnasiet er glatte funktioner - eksempelvis polynomier og eksponentialfunktioner.



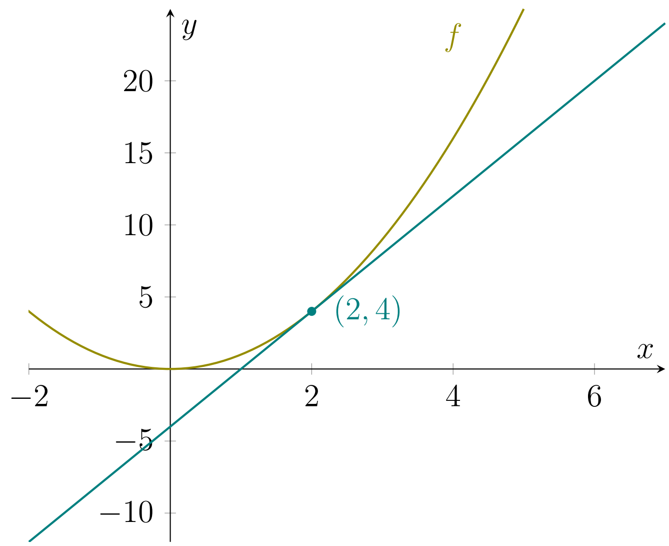
Figur 1: Glatte funktioner.



Figur 2: Ikke-glatte funktioner.

Hvis en funktion er glat i et punkt - altså at den ikke har nogle knæk eller hop i punktet, siges funktionen at være *differentiabel* i dette punkt. Vi vil senere komme ind på, hvad det helt præcist betyder, men for nu vil det blot være et mere heuristisk begreb. Hvis en funktion er differentiabel i et punkt, kan vi finde differentialkvotienten i punktet. For at definere begrebet differentialkvotient skal vi dog have en fornemmelse for, hvad en tangent til en funktion er.

Eksempel 1.1. På Figur 3 ses grafen for polynomiet $f(x) = x^2$ samt tangenten til grafen i punktet $(2, 4)$.

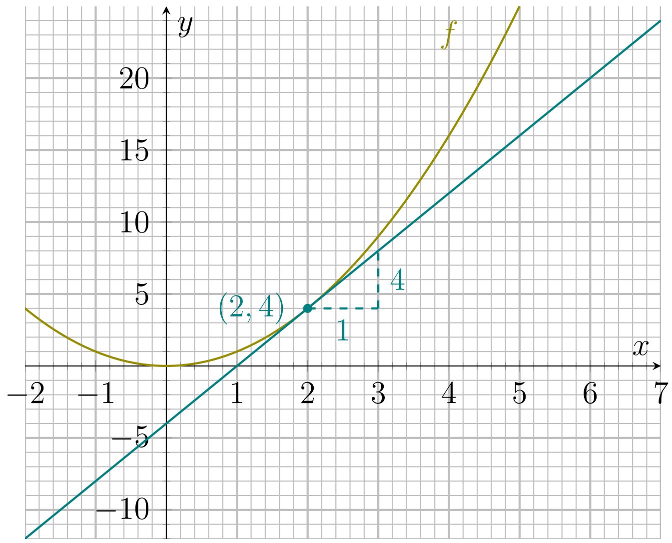


Figur 3: Graf for f samt tangent til grafen.

Vi kan se, at tangenten følger langs grafen for f og rører grafen i netop ét punkt; navnligt punktet $(2, 4)$. Tangenter opfylder den egenskab, at de følger langs grafen og rører grafen for funktion lokalt i netop ét punkt.

Definition 1.2 (Differentialkvotient)**.** Differentialkvotienten til en funktion f i et punkt $(x_0, f(x_0))$ defineres som hældningen af tangenten til f i punktet $(x_0, f(x_0))$. Differentialkvotienten betegnes $f'(x_0)$. Hvis differentialkvotienten kan findes for alle x, så siges f at være *differentiabel*.

Eksempel 1.3. Betragter vi igen situationen fra Figur 3, så kan vi bestemme hældningen af tangenten til f i punktet $(2, 4)$ ved aflæsning. Af Figur 4 aflæses hældningen af tangenten til $f'(2) = 4$.



Figur 4: Graf for f samt tangent til grafen.

Monotoni

Vi skal i differentialregning kunne beskrive, når funktioner er voksende og aftagende. Vi har allerede en intuitiv forståelse for, hvornår funktioner er voksende og aftagende - navnligt, når deres grafer går op og ned henholdsvis. Denne forståelse vil i stort omfang være tilstrækkelig for os, men vi vil alligevel give en mere stringent definition.

Definition 2.1 (Voksende og aftagende)**.** En funktion f siges at være voksende på et interval $[a, b]$, hvis det for to tal x_1 og x_2 på intervallet $[a, b]$ gælder, at

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

En funktion g siges tilsvarende at være aftagende på et interval $[a, b]$, hvis der for to tal x_1 og x_2 på intervallet $[a, b]$ gælder, at

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow g(x_1) \geq g(x_2).$$

Det vil intuitivt nok vise sig, at man kan bruge differentialkvotienten til at afgøre, om en funktion er voksende eller aftagende på et interval. Sammenhængen mellem en funktions vækstegenskaber og differentialkvotienten for en funktion kaldes for *monotonisætningen*, som vi dog ikke vil bevise.

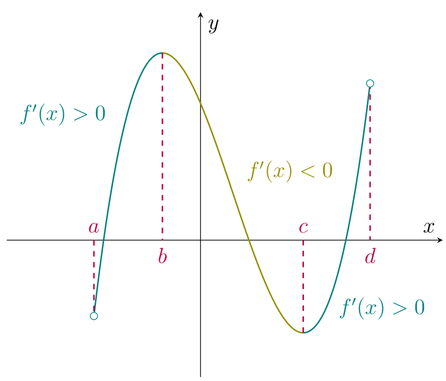
Sætning 2.2 (Monotonisætningen)**.** *En differentiabel funktion f er voksende på et interval $[a, b]$, hvis og kun hvis det for alle x på intervallet gælder, at*

$$f'(x) \geq 0.$$

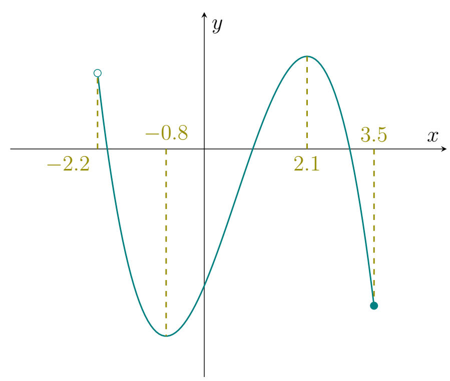
Tilsvarende er en differentiabel funktion g aftagende på et interval $[a, b]$, hvis og kun hvis det for alle x på intervallet gælder, at

$$g'(x) \leq 0.$$

Eksempel 2.3. Betragter vi Figur 5, så kan vi se, at den betragtede funktion f er voksende på intervallet $]a, b]$, aftagende på intervallet $[b, c]$ og igen voksende på intervallet $[c, d[$.



Figur 5: Monotoniforhold for funktion f.



Figur 6: Aflæsning af monotoniforhold for funktion g.

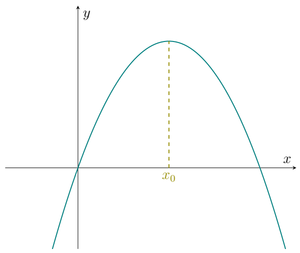
Betragter vi i stedet Figur 6 kan vi opskrive *monotoniforholdene* for g.

- Funktionen g er voksende for alle x på intervallet $]-2.2, -0.8]$.
- Funktionen g er aftagende for alle x på intervallet $[-0.8, 2.1]$.
- Funktionen g er voksende for alle x på intervallet $[2.1, 3.5]$.

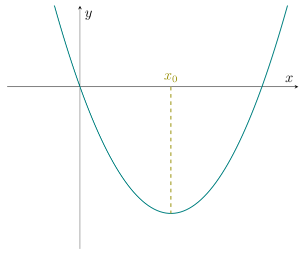
Bemærk, at intervalklammen i første interval $]-2.2, -0.8]$ vender væk fra tallet, da tallet ikke er en del af definitionsmængden for g. Dette kan ses ved at punktet på Figur 6 er udhulet.

Vi kalder stederne, hvor funktioner skifter fra at være voksende til aftagende og vice versa for *ekstrema*. Disse kan både være *maksima* og *minima*. Vi har følgende sætning, der siger noget om betingelserne for ekstrema

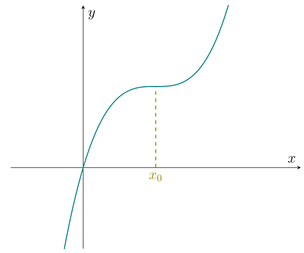
Sætning 2.4 (Ekstrema)**.** *Hvis $f'(x_0) = 0$, så har f enten et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller en vandret vendetangent i x_0.*



Figur 7: Maksimum i x_0.



Figur 8: Minimum i x_0.



Figur 9: Vendetangent i x_0.

Eksempel 2.5. Funktionen g, der fremgår af Figur 6 har et minimum i $x = -0.8$. Dette er desuden et *globalt minimum*, da der ikke er andre værdier for x, der giver g en mindre funktionsværdi. g har desuden et globalt maksimum i $x = 2.1$.

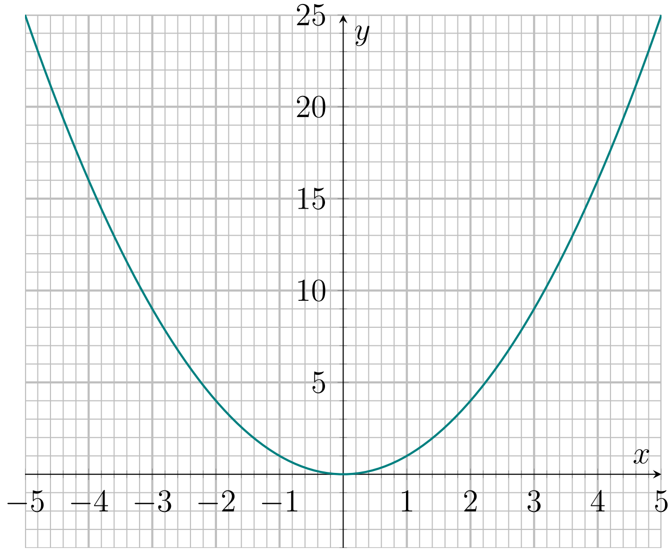
Eksempel 2.6. Vi kan ikke se hele definitionsmængden for grafen på Figur 7. Vi antager, at det er en parabel. I dette tilfælde vil monotoniforholdene lyde:

- Funktionen f er voksende på intervallet $]-\infty, x_0]$.
- Funktionen f er aftagende på intervallet $[x_0, +\infty[$.

Opgave 1

Følgende er grafen for polynomiet f givet ved

$$f(x) = x^2.$$



i) Bestem hældningen af tangenten gennem punktet $(1, f(1))$ ved brug af en lineal.

ii) Bestem en ligning på formen $y = ax + b$ for tangenten gennem dette punkt.

iii) For hvilke værdier af x er $f'(x) > 0$?

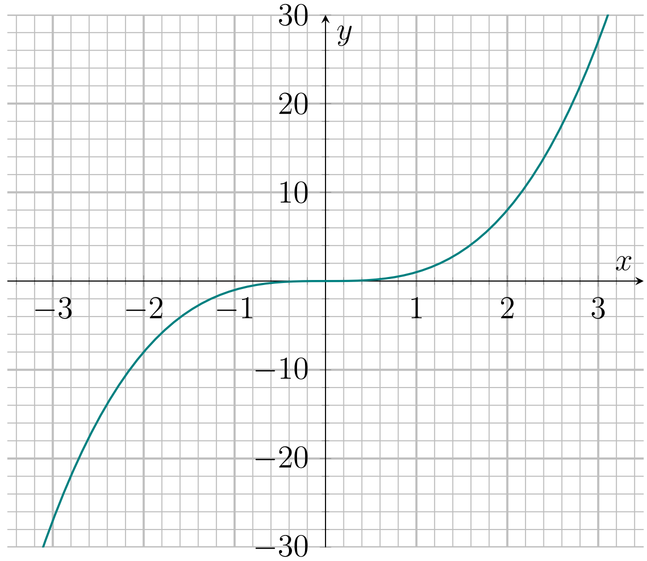
iv) Bestem differentialkvotienten i punkterne $(-4, f(-4))$, $(-3, f(-3))$ osv. frem til $(5, f(5))$.

v) Kan du gennemskue en formel til at bestemme differentialkvotient for f, hvis $f(x) = x^2$?

Opgave 2

Følgende er grafen for polynomiet f givet ved

$$f(x) = x^3.$$



i) Bestem hældningen af tangenten gennem punktet $(-2, f(-2))$ ved brug af en lineal.

ii) Bestem $f'(x_0)$ for $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ved brug af lineal

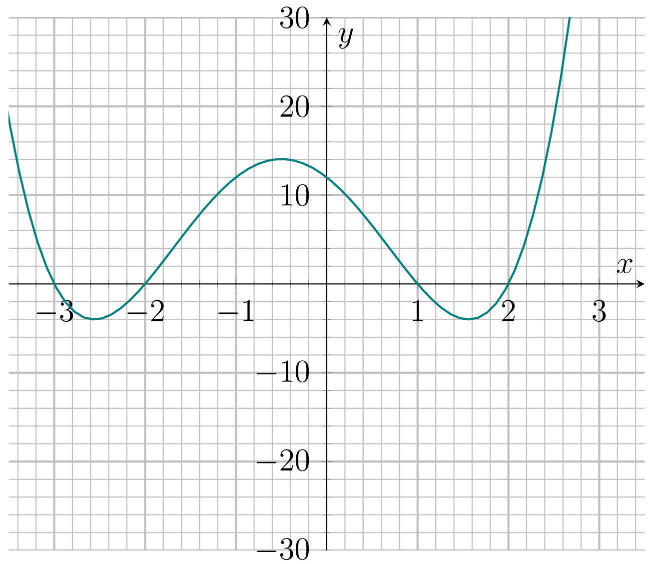
iii) Kan du gennemskue en formel til at bestemme f', hvis $f(x) = x^3$?

iv) Hvad ville formlen for f' være, hvis $f(x) = x^4$?

v) Hvad ville formlen for f' være, hvis $f(x) = x^n$?

Opgave 3

Følgende er grafen for en funktion f.



i) Bestem $f'(-3)$, $f'(-0.5), f'(1)$ og $f'(2.2)$.

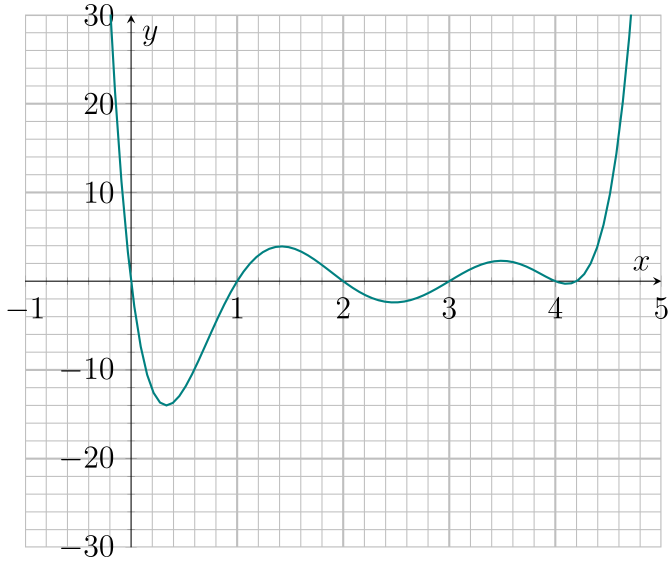
ii) Hvor har f ekstrema og hvilke typer af ekstrema er det?

iii) Bestem differentialkvotienten i ekstremaerne for f.

iv) Opskriv monotoniforholdene for f.

Opgave 4

Grafen for en funktion f er givet:



i) Bestem ekstrema for f og afgør, hvilken type ekstrema, de er.

ii) Bestem monotoniforholdene for f.