

To ligning med to ubekendte

To ligninger med to ubekendte

Vi har i grundforløbet arbejdet ganske kort med at løse to ligninger med to ubekendte i særligt lette tilfælde. Dette kunne være to ligninger i stil med

$$\begin{aligned}y &= 2x + 5 \\ y &= -3x + 15.\end{aligned}$$

Vi løste disse ligninger ved at sætte dem lig hinanden og løse ligningen for x .

$$2x + 5 = -3x + 15 \Leftrightarrow 5x = 5,$$

så løsningen for x er $x = 2$. Vi indsætter nu dette i én af de oprindelige ligninger.

$$y = 2x + 5 \Leftrightarrow y = 2 \cdot 2 + 5 = 9,$$

så løsningen på ligningssystemet er $x = 2, y = 9$, hvilket også tilsvare de to linjers skæringspunkt.

Vi skal nu se på, hvordan vi løser to ligninger med to ubekendte, når vi får ligninger, der ikke med det samme kan sættes lig hinanden.

Lad os se på et par eksempler:

Eksempel 1.1 (Lige store koefficienters metode). Vi har to ligninger

$$\begin{aligned}2x + 3y &= -4, \\ 4x + 8y &= 8.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Der er to umiddelbare fremgangsmetoder, når man har sådan et ligningssystem. Den første vi skal se på er lige store koefficienters metode. Vi ganger (1.1) igennem med 2 og får systemet

$$\begin{aligned}2x + 3y &= -8, \\ 4x + 8y &= 8.\end{aligned}$$

Vi kan nu trække de to ligninger fra hinanden og få

$$\begin{aligned}4x + 6y - (4x + 8y) &= -8 - 8 \Leftrightarrow \\ 6y - 8y &= -16 \Leftrightarrow \\ -2y &= -16 \Leftrightarrow \\ y &= 8\end{aligned}$$

Dette kan vi så stoppe ind i en af de oprindelige ligninger og få

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot 8 &= -4 \Leftrightarrow \\ 2x + 24 &= -4 \Leftrightarrow \\ 2x &= -28 \Leftrightarrow \\ x &= -14, \end{aligned}$$

og en løsning på ligningssystemet er derfor $(x, y) = (-14, 8)$.

Eksempel 1.2 (Substitutionsmetoden). Vi betragter igen ligningssystemet

$$2x + 3y = -4, \quad (1.2)$$

$$4x + 8y = 8. \quad (1.3)$$

I substitutionsmetoden isolerer vi enten x eller y i en af ligningerne. Lad os isolere x i (1.3):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 8 \Leftrightarrow \\ 4x &= 8 - 8y \Leftrightarrow \\ x &= 2 - 2y. \end{aligned}$$

Dette sættes nu ind i (1.2):

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= -4 \Leftrightarrow \\ 2(2 - 2y) + 3y &= -4 \Leftrightarrow \\ 4 - 4y + 3y &= -4 \Leftrightarrow \\ 4 - y &= -4 \Leftrightarrow \\ -y &= -8 \Leftrightarrow \\ y &= 8 \end{aligned}$$

Vi kan nu stoppe $y = 8$ ind i udtrykket $x = 2 - 2y$ og vi får

$$x = 2 - 2 \cdot 8 = 2 - 16 = -14$$

Og vi er igen kommet frem til løsningen for ligningssystemet $(x, y) = (-14, 8)$.

Eksempel 1.3. Skal vi løse ligningssystemet i Maple skal vi skrive følgende:

```
with(Gym):  
solve([2x+3y = -4, 4x+8y = 8], [x, y])
```

Dette giver også løsningen $(x = -14, y = 8)$.

Nulreglen

Vi skal i dag bruge kvadratsætningerne i forbindelse med nulreglen.

Sætning 2.1 (Nulreglen). *Hvis $ab = 0$ for to tal a og b , så medfører det, at enten $a = 0$ eller $b = 0$.*

Vi vil ofte anvende nulreglen sammen med kvadratsætninger for hurtigt at løse 2.gradsligninger.

Eksempel 2.2. Andengradsligningen $(x-3)(x+2) = 0$ må have løsningerne $x = 3$ og $x = -2$, da disse hver i sær er løsninger til faktorernes ligning $x - 3 = 0$ og $x + 2 = 0$ henholdsvis.

Opgave 1

Løs følgende ligningssystemer ved brug af både substitution og lige store koefficienters metode.

i)

$$\begin{aligned}x + y &= 0, \\ -3x + 6y &= 0.\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}2x - 10y &= 2, \\ -x + 6y &= 3.\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}1x - 2y &= 3, \\ 4x - 5y &= 6.\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}4x - 6y &= 8, \\ 5x - 2y &= 10.\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}2x + 4y &= 8, \\ 3x - 9y &= 27.\end{aligned}$$

vi)

$$-7x - 4y = 4$$

$$3x + 6y = 9$$

vii) Brug lige store koefficienters metode til at løse følgende.

$$x + y + z = 0,$$

$$x - y + 2z = 0,$$

$$2x - 2y + 8z = 0.$$

Opgave 2

Brug nulreglen til at løse følgende ligninger.

1) $(x - 3)(x - 5) = 0$

2) $4(x - 3)2(x - 6) = 0$

3) $x(x + 5) = 0$

4) $(x^2 - 4)(x + 4) = 0$

Opgave 3

Brug kvadratsætningen $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ samt nulreglen til at løse følgende ligninger.

1) $x^2 + 4x + 4 = 0$

2) $x^2 + 8x + 16 = 0$

3) $x^2 + 6x + 9 = 0$

4) $4x^2 - 32x + 64 = 0$