# Stationære punkter

## Stationære punkter i én variabel

Vi så sidste år på hvordan vi kunne bruge differentialregning til at bestemme ekstremumspunkter for funktioner. Sådanne punkter kaldes også for *stationære punkter*. Vi skal bruge de partielle afledede til at afgøre, hvilken type stationært punkt et stationært punkt er. Vi starter med at betragte funktioner af én variabel.

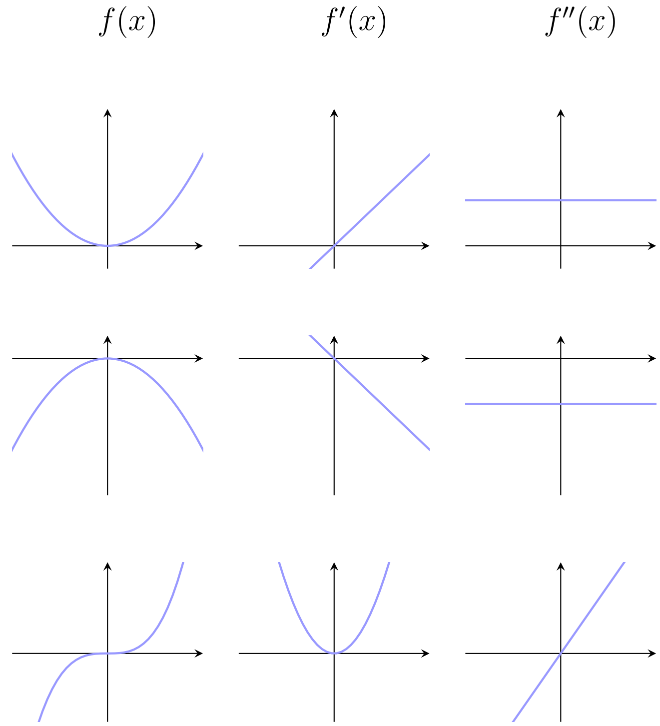
**Sætning 1.1** (Stationære punkter)**.** *Lad $f$ være differentiabel i $x_0$ og antag, at $f'(x_0) = 0$.*

*i) Hvis $f''(x_0) > 0$, så er $x_0$ et minimumspunkt.*

*ii) Hvis $f''(x_0) < 0$, så er $x_0$ et maksimumspunkt.*

*iii) Hvis $f''(x_0) = 0$, så kan intet konkluderes.*

Vi vil ikke bevise denne sætning, men en intuitiv forklaring kan ses af Fig. 1.


$f(x)$
$f'(x)$
$f''(x)$

**Eksempel 1.2.** Lad os bestemme stationære punkter for funktionen $f$ givet ved

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

Vi differentierer og sætter den afledede lig nul:

$$f'(x) = 6x + 2.$$

Dette sættes lig nul:

$$6x + 2 = 0,$$

så $f$ har et stationært punkt i $x = -1/3$. Vi differentierer igen:

$$f''(x) = 6,$$

Vi indsætter nu vores stationære punkt:

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 6,$$

og da dette tal er positivt ved vi fra Sætning 1.1, at $f$ har et minimum i $-1/3$.

# Stationære punkter i to variable

Vi definerer stationære punkter i to variable nøjagtigt som vi gjorde i én variabel:

**Definition 2.1** (Stationære punkter)**.** Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet. Hvis et punkt $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ opfylder, at

$$\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0},$$

så siges $P$ at være et stationært punkt.

Maksima og minima for funktioner af to variable vil også findes i stationære punkter, men ikke alle stationære punkter er maksima eller minima. Vi har et tilsvarende resultat som i tilfældet med én variabel.

**Sætning 2.2.** *Lad $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ være et stationært punkt for en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.*

*i) Hvis*

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) > (f_{xy}(x_0, y_0))^2,$$

*så er $P$ et ekstremumspunkt. Hvis $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, så er $P$ et minimum, og hvis $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, så er $P$ et maksimum.*

*ii) Hvis*

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) < (f_{xy}(x_0, y_0))^2,$$

*så er $P$ et saddelpunkt.*

*iii) Hvis*

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) = (f_{xy}(x_0, y_0))^2,$$

*så kan intet konkluderes.*

**Eksempel 2.3.** Vi skal bestemme, om funktionen $f$ givet ved

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y$$

har stationære punkter og i givet fald typen af dem. Vi starter med at bestemme gradienten.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2 \\ 2y - 4 \end{pmatrix}.$$

Gradienten er kun $\overrightarrow{0}$ i punktet $(-1, 2)$. Vi bestemmer $f_{xx}$, $f_{yy}$ og $f_(xy)$:

$$f_{xx}(-1, 2) = 2, f_{yy}(-1, 2) \qquad = 2, f_{xy}(-1, 2) = 0.$$

Da $2 \cdot 2 > 0$ er det klart, at dette er et ekstremumspunkt ifølge Sætning **??**. Da $f_{xx}(x_0, y_0) = 2 > 0$, så er det et minimumspunkt.

# Opgave 1

Bestem stationære punkter for følgende funktioner af én variabel, og afgør typen af de stationære punkter.

1) $-x^2 + 4x + 1$
2) $x^2 - 4$
3) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$
4) $\sqrt{x^2 + 1}$

# Opgave 2

Bestem stationære punkter for følgende funktioner af to variable, og afgør typen af de stationære punkter.

1) $x^2 - y^2$
2) $x^2 + yx + y^2$
3) $e^{3x^2+y^2+2x}$
4) $\sqrt{x(y^2 + 3y)}$
5) $\ln(3x^2 + 4y^2 + 2xy)$
6) $\cos(x^2 + yx + y^2)$