Logaritmer

Logaritmer

Har vi et udtryk som $2^3 = 8$, så kan vi tage $\sqrt[3]{8}$ for at finde det tal, som skal opløftes i 3 for at få 8, navnligt $\sqrt[3]{8} = 2$. Udtrykkende $2^3 = 8$ og $\sqrt[3]{8} = 2$ er derfor to forskellige måder at skrive den samme kendsgerning. Vi bruger altså 2^3, hvis vi ikke kender 8 og $\sqrt[3]{8}$, hvis vi ikke kender 2. Man kan derfor overveje, om der ikke også er en måde at opskrive, hvis vi ikke kender 3. Til dette introducerer vi *logaritmefunktionen* $\log_2(x)$. Denne opfylder, at

$$\log_2(8) = 3.$$

Vi kalder derfor $\log_2$ for den *omvendte* eller *inverse funktion* til 2^x på samme måde som $\sqrt[3]{x}$ er den inverse funktion til x^3. Logaritmefunktioner er derfor omvendte funktioner til eksponentialfunktioner.

Før vi går videre til en særligt vigtig logaritme, så vil vi definere præcist hvad logaritmefunktionen opfylder.

Definition 1.1 (Logaritmefunktionen)**.** Logaritmefunktionen $\log_a(x)$ er den entydige funktion, der opfylder, at

$$\log_a(a^x) = x,$$

og

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

Titalslogaritmen

Titalslogaritmen $\log_{10}$ har en særlig rolle særligt i naturvidenskaben, og den får derfor også en særlig rolle i gymnasieundervisningen. Titalslogaritmen er den inverse funktion til

$$f(x) = 10^x.$$

Vi kan se nogle funktionsværdier for 10^x i følgende tabel.

x	0	1	2	3	4	5
10^x	1	10	100	1000	10000	100000

Da $\log_{10}(x)$ gør det omvendte af 10^x, så vil en tilsvarende tabel se ud som følgende.

x	1	10	100	1000	10000	100000
$\log_{10}(x)$	0	1	2	3	4	5

Eksempel 2.1. Vi har, at

$$\log_{10}(100) = \log_{10}(10^2) = 2.$$

For alle logaritmer gælder der en række regneregler.

Sætning 2.2 (Logaritmeregneregler)**.** *For $a, b > 0$ gælder der, at*

i) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$,

ii) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$,

iii) $\log(a^x) = x\log(a)$.

Bevis. Vi beviser resultatet for $\log_{10}()$ og lader generaliseringen være op til læseren. For at lette notationen lader vi desuden $\log(x)$ betegne $\log_{10}(x)$. Vi vil løbende udnytte, at $\log(10^a) = a$ og $10^{\log(a)} = a$. Vi betragter udtrykkene.
i)

$$\begin{aligned} \log(a \cdot b) &= \log(10^{\log(a)}10^{\log(b)}) \\ &= \log(10^{\log(a)+\log(b)}) \\ &= \log(a) + \log(b). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log\left(\frac{10^a}{10^b}\right) \\ &= \log(10^{\log(a)-\log(b)}) \\ &= \log(a) - \log(b). \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \log(a^x) &= \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) \\ &= \log\left(10^{\log(a)x}\right) \\ &= x\log(a), \end{aligned}$$

og vi er færdige med beviset. ■

Eksempel 2.3. Vi ønsker at løse ligningen $10^{x+5} = 1000$. Vi tager derfor logaritmen på begge sider af lighedstegnet:

$$\log_{10}\left(10^{x+5}\right) = \log_{10}(1000) \;\Leftrightarrow\; x+5 = \log_{10}(1000) = 3 \;\Leftrightarrow\; x = -2.$$

Eksempel 2.4. Vi ønsker at løse ligningen

$$\log_{10}(4x) = 4.$$

Vi opløfter derfor 10 i begge sider af lighedstegnet.

$$10^{\log_{10}(4x)} = 10^4 \;\Leftrightarrow\; 4x = 10000 \;\Leftrightarrow\; x = 2500.$$

Opgave 1

En tabel med funktionsværdier for 10^x er givet.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
10^x	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000	100000

Brug tabellen til at bestemme følgende.

1) $\log_{10}(10)$
2) $\log_{10}(1)$
3) $\log_{10}(0.001)$
4) $\log_{10}(100000)$

Opgave 2

Bestem følgende udtryk

1) $\log_{10}(10^7)$
2) $\log_{10}(10000)$
3) $\log_{10}(10^{1.5})$
4) $\log_{10}(10^{\sqrt{2}})$
5) $\log_{10}(10000000)$
6) $\log_{10}(1)$
7) $\log_{10}(100)$
8) $\log_{10}(1000)$
9) $\log_{10}(10^{-4})$
10) $\log_{10}(0.00001)$

Opgave 3

Bestem følgende udtryk

1) $\log_2(4)$
2) $\log_2(16)$
3) $\log_3(9)$
4) $\log_4(16)$
5) $\log_5(25)$
6) $\log_4(256)$
7) $\log_2(1024)$
8) $\log_5(125)$
9) $\log_6(216)$
10) $\log_{16}(256)$
11) $\log_{\sqrt{2}}(2)$
12) $\log_{\sqrt[3]{2}}(5)$

Opgave 4

1) $\log_{10}(2 \cdot 10^3)$
2) $\log_{10}(3000)$
3) $\log_{10}(500)$
4) $\log_{10}(10) + \log_{10}(1000)$
5) $\log_{10}(2500)$
6) $\log_{10}(20) + \log_{10}(5)$
7) $\log_{10}(5^6)$
8) $\log_{10}(4000) - \log_{10}(4)$
9) $\log_{10}(2) + \log_{10}(2) + \log_{10}(5) + \log_{10}(5)$
10) $\log_{10}(50) - \log_{10}(5)$

Opgave 5

Isolér x i følgende ligninger

1) $2^{5+x} = 512$
2) $5^{x-7} = 25$
3) $3^{\frac{x}{2}} = 27$
4) $7^{2x-10} = 49$
5) $2^{7x+28} = 1$
6) $3^{x-13} = 81$
7) $6^{\sqrt{x}} = 36$
8) $10^{\sqrt{x}+1} = 100000$

Opgave 6

Isolér x i følgende ligninger

1) $\log_2(4 + x) = 3$
2) $\log_5(x - 1) = 2$
3) $\log_{10}(2x) = 4$
4) $\log_4(8x) = 3$

Opgave 7

Læs beviset for $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ og prøv at bevise regnereglerne $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$ og $\log(a^x) = x\log(a)$ på samme vis.