

Renteformlen og opsparingsannuitet

Renteformlen

Som det sidste emne i vækstforløbet skal vi se på opsparing og gæld. Det første vi skal introduceres for er renteformlen.

Definition 1.1. Renteformlen er givet ved

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n,$$

hvor K_0 er startkapitalen, r er rentefoden, n er antal terminer, og K_n er slutkapitalen.

Renteformlen skal forstås som følgende: Vi indsætter startkapital K_0 på en konto, der lover os p procent i rente per termin. Dette er eksponentiel vækst (men kun defineret, når $n \in \mathbb{N}$), og vi husker på, at vækstraten r tilsvarede den procentvise stigning per gået enhed. Derfor findes vækstraten som $r = \frac{p}{100}$, og dermed frem skriver vi med $a = r + 1$, hver gang der er gået en termin. Vi har altså, at kapitalen K_1 efter første termin må være

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot (1 + r).$$

Vækstraten kaldes også for *rentefoden*, når vi taler om renteformlen. Tilsvarende vil renten efter n terminer være givet

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n.$$

Eksempel 1.2. Vi indsætter 20.000kr på en konto. Dette er vores startkapital. Vi får $p = 2\%$ i rente. Rentefoden er derfor givet $r = \frac{2}{100} = 0,02$, og renteformlen lyder i dette tilfælde

$$K_n = 20.000 \cdot (1,02)^n.$$

Skal vi bestemme, hvor meget der står på kontoen efter 10 år, skal vi bestemme

$$K_{10} = 20.000 \cdot (1,02)^{10}.$$

Skal vi bestemme hvornår der står 30.000 på kontoen skal vi løse ligningen

$$30.000 = 20.000 \cdot (1,02)^n,$$

hvilket vi kan gøre ved at bruge \ln eller blot løse ligningen i Maple.

Opsparingsannuitet

Hvis vi skal beskrive et opsparet beløb på en konto, hvor vi hver termin indsætter et fast beløb A , så skal vi bruge en formel for at beskrive det opsparede beløb. Lad os først betragte et eksempel.

Eksempel 2.1. Vi indsætter hvert år 1000kr på en konto, der giver en årlig rente på 2%. Vi vil gerne vide, hvad der står på kontoen efter fire år. I år 0 indsættes 1000 kr. I år 1 står der på grund af renteindtægt $1000 \cdot 1.02 = 1020$ kr, og der indsættes igen 1000 kr. Dette fortsættes indtil fire år er forløbet. Beskriver vi det opsparede beløb efter A_n år med n , så kan vi beskrive det opsparede beløb som:

$$\begin{aligned}A_0 &= 1000 \\A_1 &= 1000 \cdot 1,02 + 1000 = 2020 \\A_2 &= 2020 \cdot 1,02 + 1000 = 3060,4 \\A_3 &= 3060,4 \cdot 1,02 + 1000 = 4121,6 \\A_4 &= 4121,6 \cdot 1,02 + 1000 = 5204,0\end{aligned}$$

Derfor står der efter fire år 5204,0kr på kontoen.

Mere generelt har vi, at det n . beløb er givet på følgende form:

$$A_n = (1 + r) \cdot A_{n-1} + A,$$

hvor A er beløbet, der indbetales per termin og r er den terminsvise rente. Dette kan bruges til at vise, at formelen for opsparingsannuitet er givet som følgende sætning beskriver.

Sætning 2.2 (Opsparingsannuitet). *Indsættes der et beløb A på en konto hver termin med en terminsvise rente r , så vil det opsparede beløb efter n terminer være*

$$A_n = A \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

Eksempel 2.3. Betragter vi eksemplet fra før, kan vi nu lettere bestemme det opsparede beløb efter fire år. Da er der gået n terminer og beløbet er derfor

$$A_5 = A \frac{(1 + r)^n - 1}{r} = 1000 \frac{(1,02)^5 - 1}{0,02} = 5204,0.$$

Vil vi i stedet bestemme, hvad der står efter ti år kan vi også let gøre det:

$$A_{11} = 1000 \frac{(1,02)^{11} - 1}{0,02} = 12168,7.$$

Der vil altså efter ti år/elleve terminer stå $A_{11} = 12168,7$ kr på kontoen.

Opgave 1

Der indsættes 100.000 på en konto med en årlig rente på 3%.

- i) Hvad står der på kontoen efter 5 år?
- ii) Hvornår står der 110.000 på kontoen?
- iii) Hvor længe går der, før pengene på kontoen er fordoblet?
- iv) Hvad tilsvarende denne rente til i månedlig rente?

Opgave 2

På en konto får du 0% i rente på de første 100.000 kr. og en kvartalsvis rente på -1% i rente på alt derofter. Vi indsætter 200.000 på kontoen.

- i) Hvor meget står der på kontoen efter 10 år?
- ii) Hvornår står der 150.000 på kontoen?
- iii) Hvad er det mindste beløb, der kan stå på kontoen, hvis vi bare efterlader den?

Opgave 3

Vi indsætter 25000kr årligt på en konto, der giver os 5 procent i rente.

- i) Hvor meget står der på kontoen efter 10 år? Hvad med efter 20?
- ii) Hvornår står der 500.000kr på kontoen?
- iii) Hvor meget har vi tjent på renten på kontoen?

Opgave 4

Vi indsætter månedligt 1000kr på en konto, der giver os en ÅRLIG rente på -3%.

- i) Hvor meget står der på kontoen efter et årti.
- ii) Hvor meget betaler vi i rente, når der er gået 20 år?