Funktioner

Hvad er en funktion

De eksempler på funktioner, vi indtil videre har stiftet bekendtskab med har været funktioner, vi har kunnet beskrive med en forskrift. Dette kunne være funktioner som $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 5x^2$ eller $h(x) = \log_2(x)$. Vi kan bruge mængdebegrebet til at definere funktioner mere generelt, om end vi dog ikke vil definere funktionsbegrebet i sin fulde abstraktion.

For en funktion f definerer vi det, vi kalder for *definitionsmængden* og *værdimængden* for f.

Definition 1.1 (Definitions- og værdimængde)**.** For en funktion f består definitionsmængden $\mathrm{Dm}(f)$ af de x-værdier, vi kan anvende f på. Værdimængden $\mathrm{Vm}(f)$ består af alle de værdier, f afbilder over i. Mere præcist

$$\{y \mid y = f(x) \text{ for et } x \in \mathrm{Dm}(f)\}.$$

Det vil ikke altid være klart, hvad værdimængden for en funktion er. Derfor skal vi bruge et begreb for den mængde, som en funktion f antager værdier i.

Definition 1.2 (Dispositionsmængde)**.** Dispositionsmængden for en funktion f er den mængde, funktionen afbilder sine værdier ind i. Værdimængden for f er altså en delmængde af denne mængde.

For en funktion f med definitionsmængde $\mathrm{Dm}(f) = A$ og dispositionsmængde B skriver vi ofte $f : A \to B$, når vi definerer funktionen.

Eksempel 1.3. Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ givet ved

$$f(x) = \sqrt{x}$$

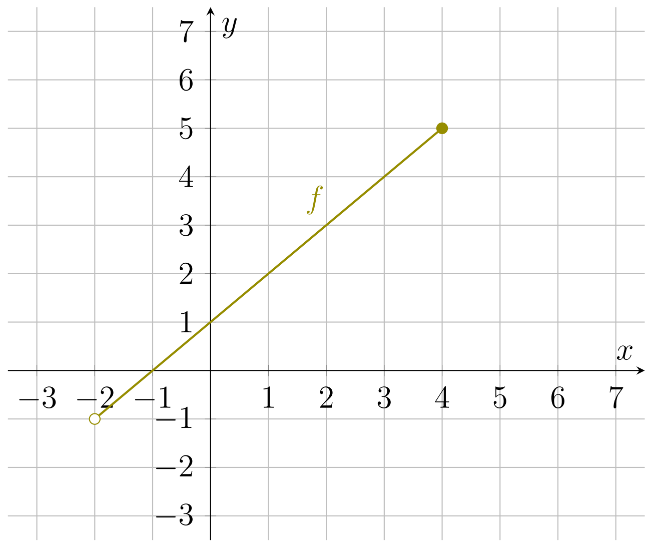
kalder vi typisk for kvadratrodsfunktionen. Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$g(x) = 2x + 3$$

er en lineær funktion.

Sammenhængende delmængder af $\mathbb{R}$ kalder vi for intervaller. Et lukket interval fra a til b skrives $[a, b]$, og hvis a og b ikke er med i intervallet, skrives intervallet $]a, b[$ og intervallet kaldes åbent. I tilfældet af at kun a er i intervallet, men ikke b skrives $[a, b[$ og vice versa.

Eksempel 1.4. På Figur 1 ses grafen for en funktion f.



Figur 1: Graf for funktionen f

Vi kan se, at $\mathrm{Dm}(f) =]-2, 4]$ og $\mathrm{Vm}(f) =]-1, 5]$.

Med begreberne defitionsmængde og værdimængde, kan vi nu definere en funktion lidt mere præcist.

Definition 1.5 (Funktion)**.** En funktion f er en relation mellem $\mathrm{Dm}(f)$ og $\mathrm{Vm}(f)$, der relaterer ethvert element $x \in \mathrm{Dm}(f)$ med et entydigt element $y \in \mathrm{Vm}(f)$ som $f(x) = y$.

Der må altså kun være én y-værdi til hver x-værdi, men der kan godt være flere x-værdier til samme y-værdi. (Som det eksempelvis er tilfældet med $f(x) = x^2$.)

Eksempel 1.6. Vi lader A betegne alle varer i et supermarked. Vi kan så definere en funktion $p : A \to \mathbb{R}$, der for enhver vare $x \in A$ giver os prisen på varen i kr. som $p(x)$. Vi har fx. $p(\text{Mælk}) = 14.75$ eller $p(\text{Banan}) = 2.75$. Det er i dette tilfælde ikke let at bestemme $\mathrm{Vm}(f)$, da vi så skal slå alle priserne i supermarkedet op. Vi skal selvfølgelig have en entydig y-værdi for hver x-værdi, da én vare ikke kan have to forskellige priser.

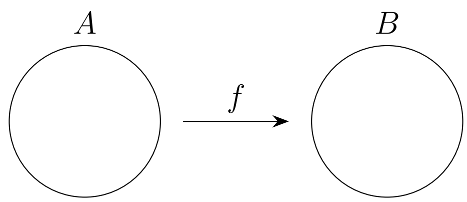
Eksempel 1.7. Lad U bestå af mængden af alle lange videregående uddannelser, og lad funktion $l : U \to \mathbb{R}$ være funktionen, der tager en uddannelse og giver gennemsnitsbruttoindkomsten efter afsluttet uddannelse. Så vil funktionen give os eksempelvis

$$l(\text{Samfundsfag}) = 660.500.$$

Værdimængden for denne funktion vil være

$$\text{Vm}(l) = [267.200, 1.383.200].$$

Vi kan også tænke på funktioner som diagrammer som set på Figur 2.



Figur 2: Funktionsdiagram for funktionen f.

Billede og urbillede

Vi definerer *billedet* og *urbilledet* for mængder.

Definition 1.8 (Billede og urbillede)**.** Lad $f : A \to B$ være en funktion, og lad $K \subseteq A$ være en delmængde af A. Så kalder vi mængden

$$f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$$

for billedet af K under f. Lad tilsvarende $L \subseteq B$. Så kaldes mængden

$$\{x \in A \mid f(x) \in K\}$$

for urbilledet af L under f.

Eksempel 1.9. Lad $K = [1, 2] \subseteq \mathbb{R}$, og lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = 2x + 1.$$

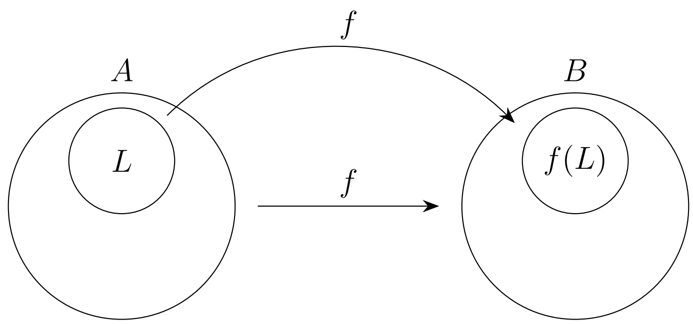
Så er billedet af K under f givet ved mængden

$$f([1, 2]) = [3, 5].$$

Lader vi tilsvarende $L = [-2, 0] \subseteq \mathbb{R}$, så vil urbilledet af L under f være givet ved mængden

$$[-1.5, -0.5].$$

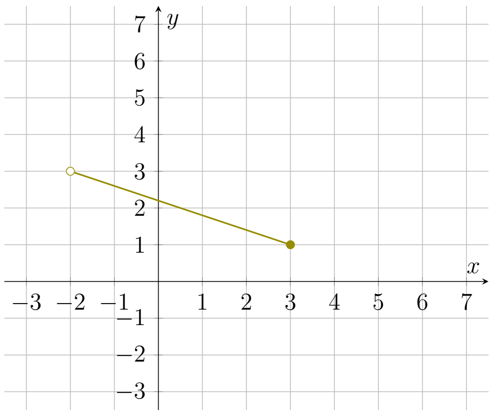
Et diagram, der illustrerer billedet af en mængde under en funktion kan ses på Fig. 3.

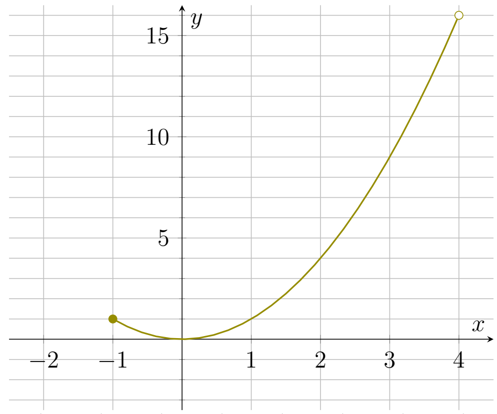


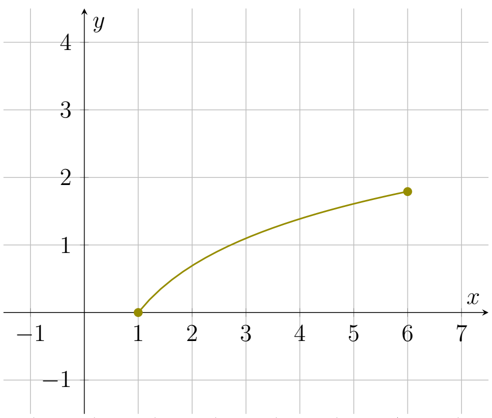
Figur 3: Funktionsdiagram for funktionen f.

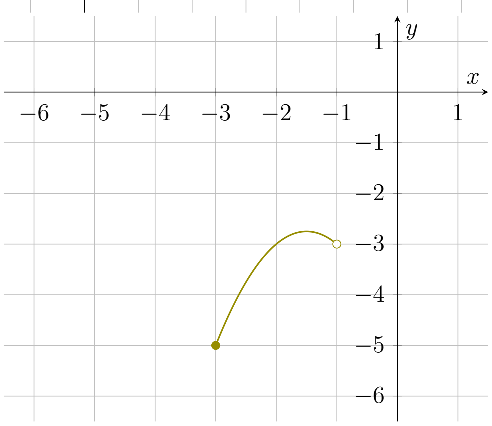
Opgave 1

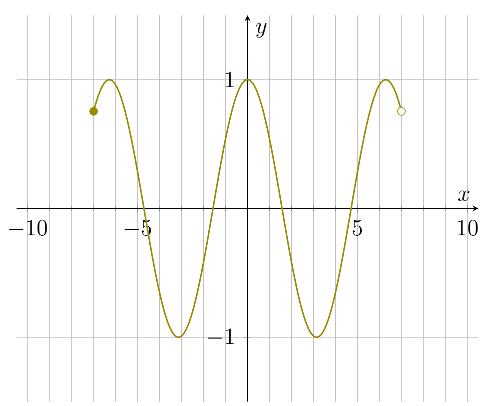
Bestem defitionsmængde og værdimængde for følgende funktioner.











Opgave 2

Bestem definitionsmængden og værdimængden for følgende funktioner ved evt. at tegne dem i Maple.

1) $f(x) = \sqrt{x}$ 2) $f(x) = x^2$
3) $f(x) = e^x$ 4) $f(x) = \ln(x)$
5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Opgave 3

Bestem definitionsmængde og værdimængde for følgende funktioner.

1) $f(x) = \sqrt{x-7}$ 2) $f(x) = x^2 - 10$
3) $f(x) = \sqrt{-2x}$ 4) $f(x) = \ln(4x - 20)$
5) $f(x) = \dfrac{1}{10x - 70}$ 6) $f(x) = 2^x + 9$

Opgave 4

1. Bestem værdimængden for funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved
$$f(x) = \lfloor x \rfloor,$$
der runder alle tal ned til nærmeste heltal.

Opgave 5

i) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved
$$f(x) = x + 4.$$
Bestem billedet af følgende delmængder af $\mathbb{R}$ under f:

1) $\{1, 2, 4\}$ 2) $[0, 5]$
3) $\emptyset$ 4) $\{20\}$

ii) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved
$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1.$$
Bestem billedet af følgende delmængder af $\mathbb{R}$ under f (det kan være en fordel at plotte f):

1) $[3, 8]$ 2) $\{1, \ldots, 8\}$;
3) $\emptyset$ 4) $[-2, 2]$;

iii) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ være givet ved

$$f(x) = \lceil x \rceil + 2.$$

Bestem billedet af følgende delmængder af $\mathbb{R}$ under f:

1) $[-4, 5]$
2) $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 1.85\}$
3) $[0, 1]$
4) $\{1, 2, 3, 4\}$

Opgave 6

Lad l være funktionen fra Eksempel 1.7. Bestem billedet af mængden

$$\{\text{Medicin, Tandlæge, Erhvervsøkonomi}\}.$$

Lønstatistik kan findes her.

Opgave 7

i) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = x - 5.$$

Bestem urbilledet af følgende mængder under f:

1) $[9, 12]$
2) $\{2\}$
3) $\{-4, -2, -1\}$
4) $\emptyset$

ii) Lad $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ være givet ved

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Bestem urbilledet af følgende mængder under f:

1) $\{2\}$
2) $[0, 4]$
3) $\{1, 3, 4, 5, 6\}$
4) $[8, 16]$

iii) Lad l være funktionen fra Eksempel 1.7. Bestem urbilledet af mængden $[700.000, 1.000.000]$.