Potensvækst og proportionalitet

Potensvækst

Vi har set, hvordan lineær vækst udvikler sig, og vi har set, hvordan eksponentiel vækst udvikler sig. Begge dele fremgår af Fig. 1.

Lineær vækst

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{+1}{\curvearrowright}} \\ x & x+1 \\ \hline f(x) & f(x)+a \\ \multicolumn{2}{c}{\underset{+a}{\curvearrowright}} \end{array}$$

Eksponentiel vækst

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{+1}{\curvearrowright}} \\ x & x+1 \\ \hline f(x) & af(x) \\ \multicolumn{2}{c}{\underset{\cdot a}{\curvearrowright}} \end{array}$$

Figur 1: Udvikling af lineær og eksponentiel vækst

Vi kan desværre ikke få noget helt tilsvarende for potensvækst, da en øgning af x med en vil give forskellige fremskrivninger af $f(x)$ alt efter hvad x er. Vi kan derimod beskrive potensvækst ved følgende sætning.

Sætning 1.1. *Lad f være en potensfunktion, altså*

$$f(x) = b \cdot a^x.$$

Så vil en multiplikation af x med en faktor k tilsvare en stigning af $f(x)$ med en faktor k^a. Mere præcist gælder der, at

$$f(k \cdot x) = k^a \cdot f(x).$$

Bevis. Vi betragter

$$f(k \cdot x) = b \cdot (k \cdot x)^a = b \cdot k^a \cdot x^a = k^a \cdot \underbrace{b \cdot x^a}_{=f(x)} = k^a \cdot f(x),$$

hvilket beviser sætningen. ∎

Det er værd at bemærke, at det at gange med k tilsvarer at øge x med $(k-1)\cdot 100\%$. Tilsvarende svarer multiplikation med k^a til at øge $f(x)$ med $(k^a - 1) \cdot 100\%$, så når vi øger x med en hvis procent, så fås en tilsvarende procentvis øgning til $f(x)$. Derfor kaldes potensvækst til tider for %%-vækst. Lineær vækst kaldes til tider for $\Delta\Delta$-vækst og eksponentiel vækst kaldes til tider for $\Delta\%$-vækst. Potensvækst illustreres på Figur 2.

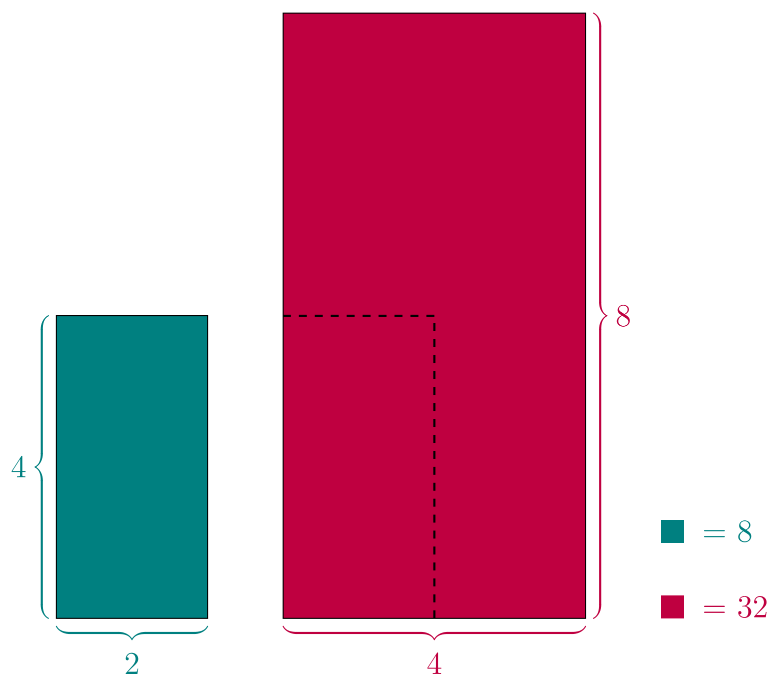
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{\cdot k}{\curvearrowright}} \\ x & k \cdot x \\ \hline f(x) & k^a \cdot f(x) \\ \multicolumn{2}{c}{\underset{\cdot k^a}{\curvearrowright}} \end{array}$$

Figur 2: Udvikling af potensvækst

Eksempel 1.2. Arealet af et rektangel med højde $2x$ og bredde x har vi tidligere set kunne beskrives ved potensfunktionen A givet ved

$$A(x) = 2x^2.$$

Hvis $x = 2$, så er bredden 2, højden 4 og arealet 8. Tilsvarende giver $x = 4$ os bredden 4, højden 8 og arealet 32. Dette kan ses på Figur 3.



Figur 3: To ligedannede rektangler

Dette passer også med vores forventning, da ved at gange vores x-værdi med 2 (2 til 4) gør, at vi skal gange vores samlede areal med $2^a = 2^2 = 4$, hvilket som kan ses af Figur 3 er fra 8 til 32.

Ligefrem proportionalitet

Definition 2.1 (Ligefrem proportionalitet)**.** To variable x og y siges at være *ligefrem proportionale* eller blot proportionale, hvis $y = a \cdot x$. Konstanten a kaldes for *proportionalitetsfaktoren* eller *proportionalitetskonstanten*.

Eksempel 2.2. Prisen på 100g bland-selv-slik er 12 kr. Prisen på bland-selv-slik i kr er dermed proportional med vægten i gram. Proportionalitetsfaktoren er 0.12. Derfor kan prisen P opskrives som funktion af vægten x som

$$P(x) = 0.12 \cdot x$$

Eksempel 2.3. Hvis vi har en sammenhæng mellem x og y givet ved

$$\frac{y}{x} = 2,$$

så vil x og y være proportionale med proportionalitetsfaktoren 2, da vi kan omskrive ligningen til

$$y = 2x.$$

Omvendt proportionalitet

Definition 3.1 (Omvendt proportionalitet)**.** To variable x og y siges at være *omvendt proportionale*, hvis $y \cdot x = a$.

Vi bemærker, at vi i tilfældet af, at x og y er omvendt proportionale kan skrive

$$y = a \cdot \frac{1}{x}.$$

Da $\frac{1}{x} = x^{-1}$, så er omvendt proportionalitet faktisk et særtilfælde af en potenssammenhæng, da

$$\begin{aligned} y &= a \cdot \frac{1}{x} \\ &= a \cdot x^{-1}, \end{aligned}$$

hvor b-værdien er lig a, og a-værdien er lig -1 for omvendt proportionalitet som en potenssammenhæng.

Eksempel 3.2. Sammenhængen mellem y og x givet ved

$$y \cdot x = 10$$

er omvendt proportional.

Eksempel 3.3. Sammenhængen mellem y og x givet ved

$$y = -4 \cdot \frac{1}{x}$$

er omvendt proportional, da vi kan omskrive den til

$$y \cdot x = -4.$$

Opgave 1

En potensfunktion f er givet ved

$$f(x) = 4 \cdot x^2.$$

i) Afgør, hvad $f(x)$ ganges med, hvis vi ganger x med 2.

ii) Afgør, hvad $f(x)$ ganges med, hvis vi ganger x med 4.

Opgave 2

En potensfunktion f er givet ved

$$f(x) = 5 \cdot x^{-1.5}.$$

i) Hvad ganges funktionsværdien med, hvis x ganges med 2?

ii) Hvad ganges funktionsværdien med, hvis x ganges med 1.5?

Opgave 3

En potensfunktion f er givet ved

$$f(x) = 10 \cdot x^{0.6}$$

i) Hvad ganges $f(x)$ med, hvis x ganges med 3?

ii) Hvor mange procent øges $f(x)$ med, hvis x øges med 50%?

Opgave 4

For en bestemt bil er sammenhængen mellem hastigheden x (i km/t) og den aktuelle motoreffekt f (i hk) givet ved

$$f(x) = 0.00005x^3$$

i) Hvis hastigheden øges med 100%, hvor meget øges den krævede motoreffekt så?

ii) Hvis motoreffekten ganges med 2, hvad skal hastigheden så ganges med?

Opgave 5

Vi betragter nu rektanglet fra Figur 3. Vi tager udgangspunkt i, at sidelængden i rektanglet er 2.

i) Gang sidelængden i rektanglet med 3, så $x = 6$. Hvor mange gange større bliver arealet?

ii) Gang sidelængden i rektanglet med 4, så $x = 8$. Hvor mange gange større bliver arealet

Opgave 6

En kasse har længde, højde og bredde x.

i) Bestem forskriften for den potensfunktion f, der beskriver rumfanget af kassen.

ii) Bestem rumfanget, hvis $x = 2$.

iii) Gang sidelængden med 2, så $x = 4$. Hvor mange gange større bliver rumfanget?

iv) Gang sidelængden med 3, så $x = 6$. Hvor mange gange større bliver rumfanget?

v) Gang sidelængden med 4, så $x = 8$. Hvor mange gange større bliver rumfanget?

Opgave 7

Rumfanget af en kugle med radius x er givet ved

$$R(x) = \frac{4}{3}\pi x^3.$$

i) Bestem rumfanget, hvis $x = 2$.

ii) Gang radius med 2, så $x = 4$. Hvor mange gange større bliver rumfanget?

iii) Gang radius med 3, så $x = 6$. Hvor mange gange større bliver rumfanget?

iv) Gang radius med 4, så $x = 8$. Hvor mange gange større bliver rumfanget?

v) Gang radius med 5, så $x = 10$. Hvor mange gange større bliver rumfanget?

Opgave 8

En potensfunktion f er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot x^{1.7}$$

Udfyld følgende tabel uden at sætte x-værdierne ind i forskriften for f.

x	1	2	4	5	6	8	11
$f(x)$	3						

Opgave 9

Den effekt, det kræves at bevæge sig gennem luft med kan beskrives ved

$$P(v) = K \cdot v^3,$$

hvor v beskriver hastigheden og K er en konstant, der afhænger af en række forhold.

i) Hvis vi øger hastigheden v med 50%, hvor meget øges den effekt, der kræves for at bevæge sig gennem luften så med?

ii) Hvis vi øger vores effekt med 200%, hvor meget hurtigere kan vi så bevæge os gennem luften?

Opgave 10

Bremselængden for en bil kan beskrives ved D givet ved

$$D(v) = k \cdot v^2.$$

i) Hvis vi øger hastigheden med 20%, hvor meget øges bremselængden D så med?

ii) Hvis vi vil sænke vores bremselængde med 50%, hvor meget skal vi så sænke vores hastighed med?

Opgave 11

Hvilke af følgende variabelsammenhænge er proportionale, omvendt proportionale eller ingen af delene

1) $y = 3x$	2) $7 = -7.32x$
3) $\frac{y}{x} = 1.2$	4)$y \cdot x = -1$
5) $y = \frac{1}{x}$	6) $x \cdot y = 27$
7) $\frac{y}{x} = 27$	8) $y = x^2$
9) $2y = 3x$	10) $10x^3 = x^2 y$

Opgave 12

For følgende beskrivelser opskriv da en sammenhæng mellem de beskrevne variable lig Eksempel 2.2.

i) Prisen på tyggegummi er proportional med antallet af købte pakker. Proportionalitetskonstanten er 12.

ii) Den tid, det tager at køre 20km i en bil er omvendt proportional med den kørte hastighed.

iii) Den mængde mel, du kan købe for 100 kroner er omvendt proportional med kiloprisen på melet.

Opgave 13

For en person på 80kg er BMI (body-mass index) omvendt proportional med højden i meter h i anden. Dette kan skrives som

$$\mathrm{BMI} \cdot h^2 = 80$$

i) Hvad er BMI for en person på 1.7 meter med denne vægt?

ii) Hvad er BMI for en person på 2.0 meter med denne vægt?

iii) Hvor høj er man, hvis man har en BMI på 25?

Opgave 14

For en bil er bremselængden f (i meter) proportional med hastigheden x (i m/s) i anden. Proportionalitetskonstanten er 0.01.

i) Opstil en sammenhæng mellem f og x.

ii) Bestem bremselængden for en bil, der kører 30m/s

iii) Hvor stærkt kører en bil, der har en bremselængde på 100m?