Geometrisk løsning af andengradsligninger

Vi husker på, at en andengradslignings er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Disse kan generelt løses med diskriminantformlen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

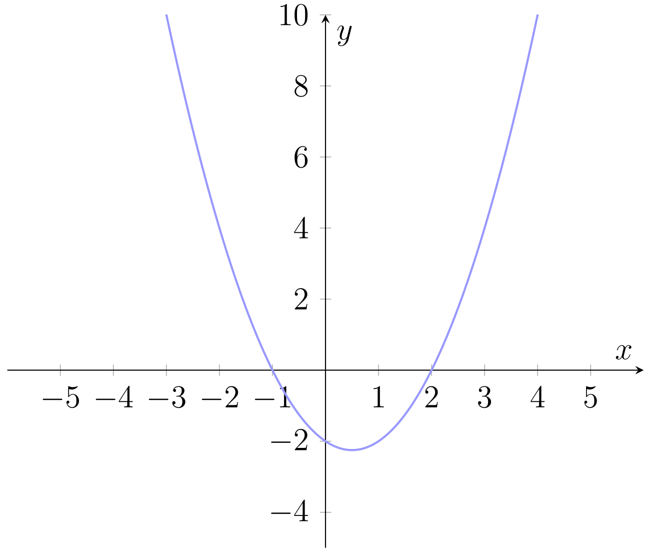
Dette giver os selvfølgelig en metode til at løse ligningen algebraisk, men det giver ikke meget intuition i forhold til hvad det rent faktisk er, vi løser. Som i så mange andre grene af matematik er der en række forskellige synspunkter, hvor det mest udbredte er at se løsningen til andengradsligninger som nulpunkter/rødder af en bestemt type funktioner. Vi fastlægger først, hvad vi mener med en rod/et nulpunkt.

Definition 1.1. Vi siger, at et punkt x er en rod for en funktion f, hvis det gælder, at $f(x) = 0$. Rødder kaldes også for nulpunkter.

Definition 1.2. En funktion på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ for $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ kaldes for et andengradspolynomium. Grafen for et andengradspolynomium kaldes for en parabel.

Det ses let, at det at finde rødder til et andengradspolynomium tilsvarer at løse en andengradsligning.

Eksempel 1.3. Vi betragter andengradspolynomiet $f(x) = x^2 - x - 2$. Grafen for f kan ses af Fig. 1



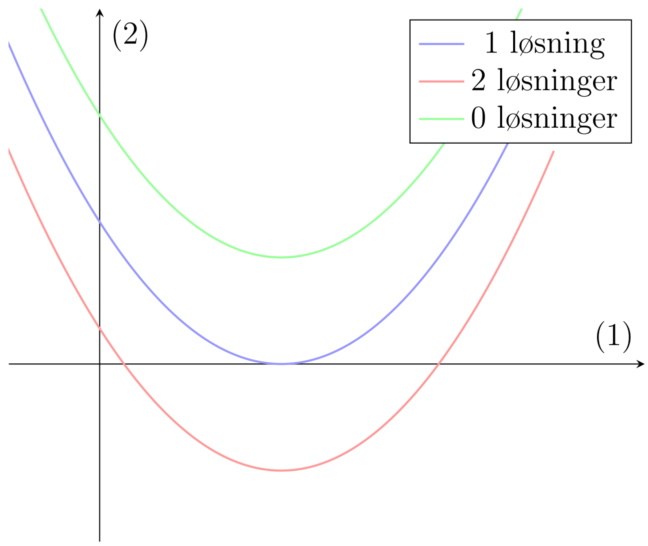
Figur 1: Parabel, der er graf for andengradspolynomiet $f(x) = x^2 - x - 2$.

At finde rødderne for f tilsvarer at finde de punkter, hvor grafen for f skærer x-aksen. Af Fig. 1 ser det ud til, at $f(x)$ har rødder i $x = -1$ og $x = 2$. Vi tjekker efter og får

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0, \\ f(2) &= 2^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Derfor har andengradsligningen $x^2 - x - 2 = 0$ løsningerne $x = -1$ og $x = 2$.

Vi husker på, at andengradsligninger enten har 0, 1 eller 2 løsninger. Dette tilsvarer at parablen til andengradspolynomiet skærer x-aksen enten 0, 1 eller 2 gange som vist på Fig. 2.



Figur 2: De tre muligheder for antallet af løsninger af andengradsligninger.

Vi kan udnytte dette til at afgøre, hvor mange løsninger en andengradsligning har ved at skitsere det tilsvarende andengradspolynomium. Til dette vil vi udnytte, hvad koefficienterne a, b og c betyder for et andengradspolynomium:

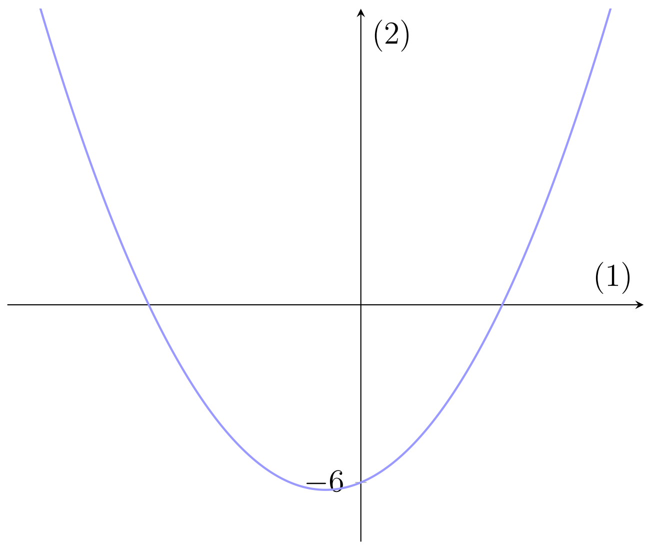
Sætning 1.4. *For koefficienterne a, b, c for et andengradspolynomium gælder der:*

i) *$a > 0$ medfører, at parablens "arme"peger op. $a < 0$ medfører, at parablens "arme"peger ned.*

ii) *b er hældningen af parablen der hvor parablen skærer y-aksen.*

iii) *c er parablens skæring med y-aksen.*

Eksempel 1.5. Vi kan skitsere parablen for polynomiet $f(x) = x^2 - x - 6$. Da $a = 1 > 0$, så peger armene op. Da $b = 1$, så er hældningen af funktionen 1, der hvor f skærer y-aksen. Parablen skærer y-aksen i -6. Vi kan derfor lave en skitse. Den kan ses på Fig. 3.



Figur 3: Skitse af $f(x) = x^2 + x - 6$

Af Fig. 3 kan vi se, at $x^2 + x - 6 = 0$ har to løsninger. En positiv løsning og en negativ løsning.

Opgave 1

Skitsér følgende andengradspolynomier og afgør, hvor mange rødder de har samt røddernes fortegn:

1) $-2x^2 + 3x + 5$	2) $4x^2 - 5x - 10$
3) $3x^2 + x + 20$	4) x^2
5) $-x^2 - x + 4$	6) $6x^2 - 6x - 6$
7) $-6x^2 - 6x - 6$	8) $(x-2)^2$