

Faktorisering af polynomier

Faktorisering

Vi har tidligere set på kvadratsætninger. Disse er relateret til faktorisering af polynomier. Med faktorisering af polynomier menes der, at polynomier opskrives som faktorer i stedet for led. Dette kan dog kun gøres, hvis polynomiet har rødder nok.

Eksempel 1.1. Vi kan opskrive andengradspolynomiet $f(x) = x^2 - x - 2$ som $f(x) = (x - 2)(x + 1)$. Dette kan ses ved at gange parenteser ud. Vi siger også, at vi har faktoriseret polynomiet i forhold til dets rødder, da det er let at se, at f har rødder i 2 og -1 på den faktorerede form.

Sætning 1.2. *Lad f være et andengradspolynomium med to rødder x_1 og x_2 på formen*

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Så kan vi faktorisere f som

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{1.1}$$

Bevis. Vi ved, at $x_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$ og $x_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$. Dette indsætter vi i (1.1), og får

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) \\ &= ax^2 - ax_2x - ax_1x + ax_1x_2 \\ &= ax^2 - a\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}x - a\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}x + a\frac{(-b+\sqrt{d})(-b-\sqrt{d})}{2a} \\ &= ax^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b}{2}x + a\frac{b^2 + b\sqrt{d} - b\sqrt{d} - d}{4a^2} \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

■

Opgave 1

Bestem rødderne til følgende faktorerede polynomier:

1) $x - 4$

2) $(x + 1)(x + 7)$

3) $4(x - 6)(2x - 2)$

4) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4)$

5) $(2x - 4)(x - 2)$

6) $(x + 3)^{10}$

7) $3(x - 1) \cdot 2(x - 2) \cdot 5(x - 5)$

8) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3})(10x - 3)$

Opgave 2

Faktoriser følgende andengradspolynomier ved at bestemme deres rødder:

1) $3x^2 - 15x + 18$

2) $2x^2 - 8x + 8$

3) $x^2 - 4$

4) $4x^2 + 4x - 8$

5) $x^2 - 5x + 6$

6) $2x^2 - 18$

Opgave 3

Et polynomium skærer punkterne $(-3, 0)$, $(4, 0)$ og $(0, -24)$. Bestem koefficienterne for dette polynomium.

Opgave 4

Opgaver fra sidst.