Integration ved substitution + hængeparti.

Grafer under x-aksen

Ønsker vi at bestemme arealet afgrænset af en negativ funktion f og x-aksen på et interval $[a, b]$ kan vi bruge sætningen om arealer mellem funktioner. Dette giver os følgende sætning.

Sætning 1.1. *Lad f være en kontinuert funktion, der opfylder, at $f(x) < 0$ for alle $x \in [a, b]$. Så er arealet af området afgrænset af f og x-aksen på intervallet $[a, b]$ givet ved*

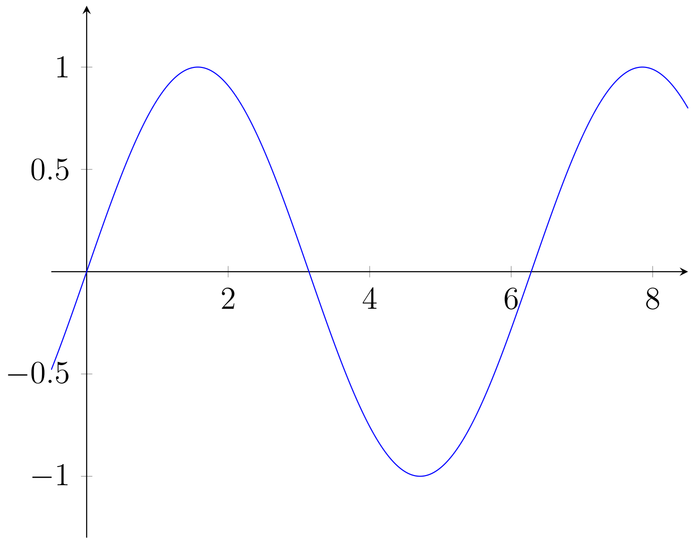
$$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Bevis. Vi betragter arealet mellem funktionen $g(x) = 0$ og $f(x)$. Dette er givet ved

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b g(x) - f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b 0 - f(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

hvilket konkluderer beviset. ■

Eksempel 1.2. Vi skal bestemme arealet mellem x-aksen og funktionen $\sin(x)$ på intervallet $[0, 4\pi]$. Vi starter med at plotte funktionen. Dette kan ses af Fig. 1



Figur 1: Grafen for $\sin(x)$

Af figuren kan vi se, at $\sin(x)$ er positiv på intervallet $[0, \pi]$ og negativ på intervallet $[\pi, 2\pi]$. Derfor skal vi dele integralet op i to for at bestemme integralet. Dette gøres:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x \\
&= [-\cos(x)]_0^{\pi} - [-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} \\
&= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) - (-\cos(2\pi) - (-\cos(\pi))) \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Integration ved substitution

Skal vi integrere en sammensat funktion, skal vi bruge en slags omvendt kæderegel. Dette kaldes ofte integration ved substitution. Vi starter med at bevise, at metoden virker.

Sætning 2.1. *Lad $f(g(x))$ være en kontinuert funktion i x, og antag, at $g(x)$ er differentiabel. Så gælder der, at*

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = F(g(x)) + k.$$

Bevis. Det er sådan set bare at gøre prøve. Vi tester, om $F(g(x))$ er en stamfunktion ved at differentiere:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

hvilket var hvad vi skulle vise. ■

Eksempel 2.2. Vi skal løse

$$\int \frac{2x}{x^2+1} \mathrm{d}x.$$

Vi har en indre funktion $x^2 + 1$, som vi betegner med $u = x^2 + 1$. Vi skal i følge sætningen bruge den differentierede til den indre funktion. Derfor bestemmes

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x.$$

Vi betragter $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ som en brøk (Det er det ikke!), og isolerer dx

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}.$$

Vi substituerer nu dx og u ind i integralet:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2+1} \mathrm{d}x &= \int \frac{2x}{u} \frac{\mathrm{d}u}{2x} \\ &= \int \frac{1}{u} \mathrm{d}u \\ &= \ln(u) + k. \end{aligned}$$

Vi substituerer nu tilbage:

$$\int \frac{2x}{x^2+1} \mathrm{d}x = \ln(x^2+1) + k.$$

Det er let at tjekke, at dette udtryk differentieret giver

$$(\ln(x^2+1) + k)' = \frac{2x}{x^2+1}$$

Opgave 1

Bestem arealet afgrænset af funktionen $f(x) = 4x^3 - 9x^2$ og x-aksen. Start med at tegne grafen.

Opgave 2

Bevis *ii*) og *iii*) fra Sætning 1.2 fra sidst.

Opgave 3

Løs følgende integraler ved integration ved substitution

1) $\int x \sin(x^2) \mathrm{d}x$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt{2x}} \mathrm{d}x$

3) $\int \frac{12x}{3x^2 - 1} \mathrm{d}x$ 4) $\int 2\sin(2x) - 2x\cos(x^2) \mathrm{d}x$

Opgave 4

Opgaver fra sidst