Regneregler for vektorer

Nulvektoren

Har vi en vektor $\vec{v}$, og den modsatrettede vektor $-\vec{v}$, så får vi, hvis vi lægger $\vec{v}$ og $-\vec{v}$ sammen

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kalder vi for *nulvektoren* og betegner med $\vec{0}$. Om den gælder der for alle vektorer $\vec{v}$, at

$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}.$$

Regneregler for vektorer

Hvis vi vil gøre en vektor k gange længere, kan vi gange vektoren med et tal k.

Definition 1.1 (Vektorskalering)**.** For en vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ og et tal k, kan vi skalere vektoren med k som

$$k\vec{v} = k \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}.$$

Det gælder rent faktisk, at længden af $\vec{v}$ bliver ganget med k, når vi skalerer med k. Dette kan ses, da

$$\begin{aligned} |k\vec{v}| &= \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2} \\ &= \sqrt{k^2 v_1^2 + k^2 v_2^2} \\ &= \sqrt{k^2(v_1^2 + v_2^2)} \\ &= \sqrt{k^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = k|\vec{v}|. \end{aligned}$$

Eksempel 1.2. Lad $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og lad $k = 3$. Vi bestemmer så

$$\begin{aligned} |3\vec{v}| &= \left| \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{3^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Men vi har lige argumenteret for at dette må være det samme som $3 \cdot |\vec{v}|$. Vi verificerer:

$$3|\vec{v}| = 3\sqrt{1^2 + 2^2} = 3\sqrt{5}.$$

Vi har følgende regneregler for vektorer.

Sætning 1.3 (Regneregler for vektorer)**.** *For tal a, b og vektorer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gælder der, at*

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,

iii) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{b}$,

iv) $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + v\vec{u}$,

v) $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$.

Bevis. Vi viser *iii*), og resten overlades til læseren. Betragt

$$\begin{aligned} a(\vec{u} + \vec{v}) &= a\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= a\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} au_1 + av_1 \\ au_2 + av_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} au_1 \\ au_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} av_1 \\ av_2 \end{pmatrix} = a\vec{u} + a\vec{v} \end{aligned}$$

■

Vi kan ikke gange vektorer sammen, og derfor kan vi heller ikke dividere to vektorer.

Opgave 1

Lad følgende vektorer være givet

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

i) Bestem

1) $|\vec{u}|$ 2) $2|v|$
3) $|10\vec{w}|$ 4) $|\vec{a}|$

ii) Bestem

1) $3\vec{u} + 2\vec{v}$ 2) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} + \sqrt{2}\vec{a}$
3) $|3\vec{w} + \vec{a}|$ 4) $|\vec{a}| + |\vec{u}| + |\vec{a} + \vec{u}|$

Opgave 2

Vis *i*), *ii*), *iv*) og *v*) i Sætning 1.3.