Den naturlige logaritme

Bevis for regneregler for titalslogaritmen

Vi så sidste gang følgende regneregler for titalslogaritmen. Vi vil her give et bevis.

Sætning 1.1 (Logaritmeregneregler)**.** *For $a, b > 0$ gælder der, at*

i) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$,

ii) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$,

iii) $\log(a^x) = x\log(a)$.

Bevis. Vi vil løbende udnytte, at $\log(10^a) = a$ og $10^{\log(a)} = a$. Vi betragter udtrykkene.
i)

$$\begin{aligned}\log(a \cdot b) &= \log(10^{\log(a)}10^{\log(b)}) \\ &= \log(10^{\log(a)+\log(b)}) \\ &\log(a) + \log(b).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log\left(\frac{10^a}{10^b}\right) \\ &= \log(10^{\log(a)-\log(b)}) \\ &= \log(a) - \log(b).\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\log(a^x) &= \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) \\ &= \log\left(10^{\log(a)x}\right) \\ &= x\log(a),\end{aligned}$$

og vi er færdige med beviset. ∎

Den naturlige logaritme

Definition 2.1. Den naturlige logaritme er den entydige funktion ln, der opfylder, at

$$\ln(e^x) = x,$$

og

$$e^{\ln(x)} = x,$$

hvor e er Euler's tal. ($e \approx 2.7182$)

Funktionen e^x kaldes for den naturlige eksponentialfunktion, og vi vil senere beskrive den nærmere.

Sætning 2.2 (Regneregler for ln)**.** *For den naturlige logaritme* ln *gælder der for* $a, b > 0$*, at*

i) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$*,*

ii) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$*,*

iii) $\ln(a^x) = x\ln(a)$*.*

Opgave 1

Løs følgende ligninger

1) $\ln(x) = 1$ 2) $\ln(x) = e$
3) $\ln(3x + 7) = 3$ 4) $\ln(x^2) = e^4$

Opgave 2

Bestem følgende:

1) $\ln(e)$ 2) $\ln(e^3)$
3) $\ln(\sqrt{e})$ 4) $\ln(\sqrt[5]{e^4})$

Opgave 3

i) Bevis, at $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

ii) Bevis, at $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

iii) Bevis, at $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

(Vink: Brug beviset for regnereglerne for titalslogaritmen som skabelon.)