

# Ligningen for en tangent.

## Hvordan vi finder ligningen for tangenten i et punkt

Hvis vi har en differentiabel funktion  $f$ , så kan vi bestemme hældningen af funktionen i punktet  $x_0$  ved at bestemme  $f'(x_0)$ . Vi vil gerne kunne bestemme ikke blot tangentens hældning i dette punkt, men hele ligningen for tangenten. Vi betragter følgende algoritme:

- i) Vi skal finde en ligning for tangenten på formen  $y = ax + b$ .
- ii) Vi ved, at hældningen skal være  $a = f'(x_0)$ , så vi bestemmer  $f'$  og evaluerer den i  $x_0$ .
- iii) Vi ved, at ligningen for tangenten skal gå igennem punktet  $(x_0, f(x_0))$ , så vi bestemmer  $f(x_0)$  og løser ligningen

$$\underbrace{f(x_0)}_{=y_0} = \underbrace{f'(x_0)}_{=a} x_0 + b \Leftrightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

- iv) Vi har nu bestemt tangentens ligning  $y = ax + b$ .

Vi kan samle denne algoritme til en sætning:

**Sætning 1.1** (Tangentens ligning). *Lad  $f$  være en differentiabel funktion i  $x_0$ . Så er ligningen for tangenten til  $f$  i punktet  $(x_0, f(x_0))$  givet ved*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

*Bevis.* Da  $a = f'(x_0)$  og  $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$  fås

$$y = ax + b = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



**Eksempel 1.2.** Vi ønsker at finde ligningen for tangenten til funktionen  $x^2$  i punktet  $(1, 1)$ . Vi finder først den afledede til  $x^2$ :

$$(x^2)' = 2x.$$

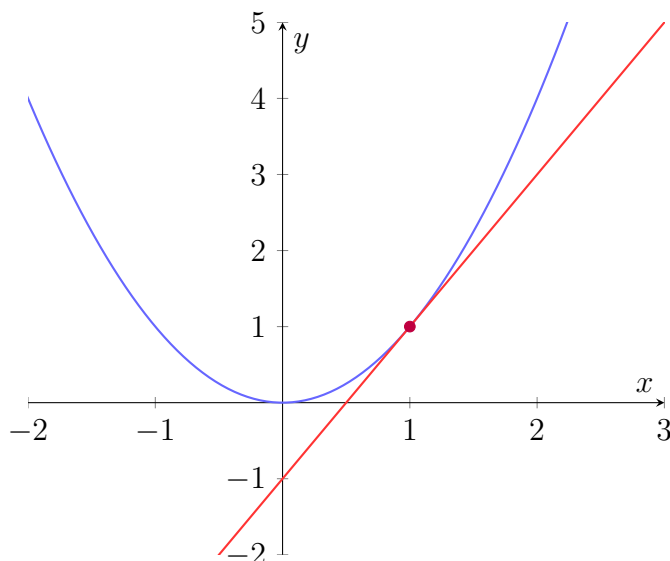
Derfor må hældningen af tangenten i punktet  $(1, 1)$  være  $a = f'(1) = 2$ . Vi skal nu finde  $b$  i ligningen  $y = 2x + b$ , så vi indsætter vores kendte punkt:

$$y = 2x + b \Leftrightarrow 1 = 2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -1,$$

og derfor må tangentens ligning i punktet  $(1, 1)$  være givet som

$$y = 2x - 1.$$

Funktionen  $x^2$  og tangenten i punktet  $(1, 1)$  til  $x^2$  fremgår af Fig. 1.



Figur 1: Funktion  $f(x) = x^2$  og tangentlinjen  $g(x) = 2x - 1$ .

## Opgave 1

Find ligningen for tangenten til følgende funktioner i de tilhørende punkter. Tegn desuden funktionerne og tangentlinjerne i Maple for at undersøge, om du har fundet de rigtige tangentlinjer.

- 1)  $f(x) = x^2$ ,  $P(-1, f(-1))$
- 2)  $f(x) = 2x^2 - 1x + 3$ ,  $P(0, f(0))$
- 3)  $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$ ,  $P(2, f(2))$
- 4)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $P(4, f(4))$
- 5)  $f(x) = 7x + 3$ ,  $P(3, f(3))$
- 6)  $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ ,  $P(1, f(1))$
- 7)  $f(x) = 27$ ,  $P(1000, f(1000))$
- 8)  $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x}$ ,  $P(9, f(9))$
- 9)  $f(x) = \frac{10}{x} + 3x^3$ ,  $P(2, f(2))$
- 10)  $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x + 1$ ,  $P(-2, f(-2))$