

Vinkler og prikproduktet

Vinkel mellem vektorer

Vi kan bruge prikproduktet til at bestemme vinklen mellem to vektorer.

Sætning 1.1. *Vinklen $v = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ mellem to vektorer \vec{u} og \vec{v} kan bestemmes ved følgende forhold:*

$$\cos(v) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Vi kan også se, hvorfor to vektorer er orthogonale, hvis deres prikprodukt er 0, siden $\cos(90) = 0$.

Eksempel 1.2. Lad os bestemme vinklen mellem følgende vektorer:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Prikproduktet mellem vektorerne er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 + 8 = 11.$$

Længderne af vektorerne er

$$|\vec{v}| = \sqrt{5} \approx 2.23, \text{ og } |\vec{w}| = 5.$$

Dette samler vi og får

$$\cos(v) = \frac{11}{2.23 \cdot 5} \approx 0.98.$$

Vi skal så løse ligningen $\cos(v) = 0.98$. Dette kan gøres med funktionen \arccos , der er en "lokal" invers funktion til \cos . Dette giver $\arccos(0.98) = 11.4^\circ$, og vinklen v mellem \vec{v} og \vec{w} er derfor 11.4° .

Opgave 1

Bestem følgende prikprodukter:

$$1) \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Opgave 2

Bestem vinklen mellem følgende vektorer:

$$1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 3

En trekant ABC har hjørner i punkterne $A = (5, -5)$, $B = (4, 1)$ og $C = (-2, 2)$.

i) Skitsér trekanten ABC .

ii) Bestem vektorerne \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} samt vektorerne \overrightarrow{BA} og \overrightarrow{BC} .

iii) Brug resultatet fra ii) til at bestemme hjørnevinklerne i A og B .

iv) Bestem vinklen i det sidste hjørne af ABC .

Opgave 4

Brug Sætning 1.1 til at afgøre, hvordan fortegnet af prikproduktet hænger sammen med vinklen mellem to vektorer.