

# Prikprodukt og vinkel mellem vektorer

## Vinkel og prikprodukt i Maple

Vi lægger ud med et eksempel, der viser hvordan vi definerer en vektor i Maple samt hvordan vi laver prikprodukt og bestemmer vinkler mellem vektorer.

**Eksempel 1.1.** Vi får givet vektorerne  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Skal vi definere vektorerne i Maple, så skal vi skrive

```
with(Gym):  
 $\vec{u} := \langle 2, 5 \rangle$   
 $\vec{v} := \langle -4, 3 \rangle$ 
```

Ønsker vi at lægge to vektorer sammen, skriver vi

$$\vec{u} + \vec{v}$$

Ønsker vi at trække dem fra hinanden, skriver vi

$$\vec{u} - \vec{v}$$

Og ønsker vi at skalere dem med et tal  $k$ , skriver vi

$$k\vec{u}$$

Skal vi bestemme prikproduktet mellem de to vektorer, så skal vi skrive

$$\text{dotP}(\vec{u}, \vec{v})$$

Ønsker vi at bestemme vinklen mellem vektorerne, så skal vi skrive

$$\text{vinkel}(\vec{u}, \vec{v})$$

Ønsker vi til slut at bestemme længden af en vektor, skal vi skrive

$$\text{len}(\vec{u})$$

Når Maple bestemmer vinklen mellem to vektorer, så bruger den følgende resultat.

**Sætning 1.2** (Vinkel mellem vektorer). *For to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  gælder der, at*

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \cos(\theta),$$

hvor  $\theta$  er vinklen mellem vektorerne  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$ .

Vi behøver dog ikke bruge denne sætning, da vi blot kan bruge **vinkel**-kommandoen i Maple.

## Opgave 1

### Opgave 7

Fire vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \end{pmatrix}$$

- i) Bestem  $4\vec{a}$ .
- ii) Bestem  $\vec{a} + \vec{b}$ .
- iii) Bestem  $2\vec{b} - \vec{c}$ .
- iv) Bestem  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ .
- v) Bestem  $-2\vec{d} - \vec{a}$ .
- vi) Bestem  $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d}$ .

## Opgave 2

Fire punkter er givet ved  $A(1, 3)$ ,  $B(-5, 6)$ ,  $C(-4, 1)$  og  $D(12, -7)$ .

- i) Bestem koordinaterne til vektorerne  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  og  $\overrightarrow{DA}$ .
- ii) Bestem længden af vektorerne  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  og  $\overrightarrow{DA}$ .
- iii) Bestem  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$ .
- iv) Bestem  $|2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}|$ .

### Opgave 3

i) Bestem prikproduktet og vinklen mellem følgende vektorer

1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  og  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

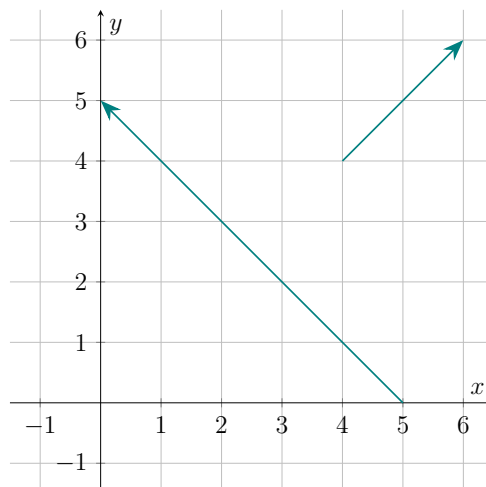
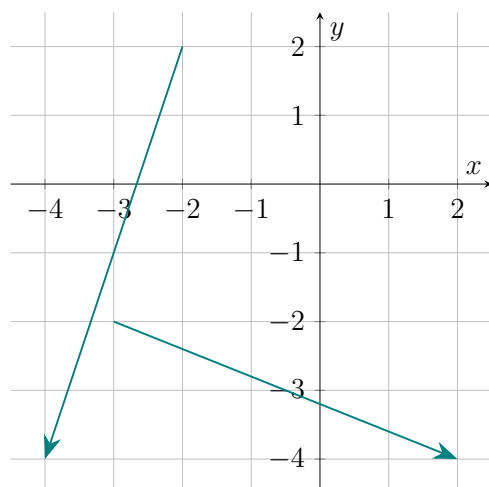
2)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  og  $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

3)  $\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$  og  $\begin{pmatrix} -3 \\ 14 \end{pmatrix}$

4)  $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$  og  $\begin{pmatrix} 0.5 \\ -12 \end{pmatrix}$

### Opgave 4

Afgør hvilke af følgende par af vektorer, der er orthogonale



### Opgave 5

Vi får givet følgende to vektorer

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -t+3 \end{pmatrix}$$

- Bestem prikproduktet mellem  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$ , hvis  $t = 4$ .
- Bestem  $t$  så  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er orthogonale.

## Opgave 6

To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x^2 - 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

- i) Bestem  $x$ , så  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er orthogonale.