Logistisk vækst

Logistisk vækst

Logistisk vækst er en veksttype, der meget ofte optræder i forbindelse med voksende eksponentiel vækst, hvor der er et naturligt loft for væksten. Dette kan være vækst af bakterier, hvor plads, næring og giftstoffer sætter en øvre grænse for antallet af bakterier. Det kan også være befolkningstilvækst i et land, hvor parametre som velstand, plads og lignende sætter et loft for befolkningen i et land eller en by.

Definition 1.1 (Logistisk differentialligning)**.** En differentialligning på formen

$$y' = ay(M-y)$$

kaldes for en *logistisk differentialligning*. En løsning y til differentialligningen siges at have logistisk vækst.

Betragtes den *relative væksthastighed* y'/y for denne differentialligning, så vil den aftage lineært som funktion af y, da

$$\frac{y'}{y} = aM - ay.$$

Bemærk desuden, at differentialligningen

$$y' = ay(M-y)$$

har den trivielle løsning $y(x) = 0$. Denne løsning vil vi se bort fra.

Sætning 1.2 (Logistisk differentialligning)**.** *Den logistiske differentialligning*

$$y' = ay(M-y)$$

har den ikke-trivielle fuldstændige løsning

$$y(x) = \frac{M}{1+ce^{-aMx}},$$

for $c \in \mathbb{R}$.

Bevis. Igen deles beviset i to dele: Vis, at y givet ved

$$y(x) = \frac{M}{1+ce^{-aMx}}$$

er en løsning. Dette viser vi først. Vi ser først på venstresiden i differentialligning, hvor vi indsætter vores løsning.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{M}{1+ce^{-aMx}}\right)' \\ &= -\frac{M}{(1+ce^{-aMx})^2}ce^{-aMx}(-aM) \\ &= \frac{M^2a}{(1+ce^{-aMx})^2}ce^{-aMx}. \end{aligned}$$

Vi betragter nu højresiden i differentialligningen.

$$\begin{aligned} ay(M-y) &= aMy - ay^2 \\ &= aM\frac{M}{(1+ce^{-aMx})} - a\frac{M^2}{(1+ce^{-aMx})^2} \\ &= \frac{aM^2}{(1+ce^{-aMx})^2}(1+ce^{-aMx}) - \frac{aM^2}{(1+ce^{-aMx})^2} \\ &= \frac{aM^2}{(1+ce^{-aMx})^2} + \frac{aM^2}{(1+ce^{-aMx})^2}ce^{-aMx} - \frac{aM^2}{(1+ce^{-aMx})^2} \\ &= \frac{aM^2}{(1+ce^{-aMx})^2}ce^{-aMx}, \end{aligned}$$

og da dette er lig venstresiden har vi vist, at $y(x)$ er en løsning til den logistiske differentialligning. Vi skal nu vise, at enhver løsning er på denne form. Antag derfor, at $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en løsning til differentialligningen

$$y' = ay(M-y).$$

Antag desuden, at $y(x) \neq 0$ (vi ser bort fra den trivielle løsning). Vi definerer så hjælpefunktionen $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$z(x) = \frac{1}{y(x)},$$

som vi differentierer.

$$\begin{aligned} z'(x) &= -\frac{1}{y(x)^2}y'(x) \\ &= -\frac{1}{y(x)^2}(ay(x)(M-y(x))) \\ &= -\frac{1}{y(x)}(a(M-y(x))) \\ &= -aM\frac{1}{y(x)} + a \\ &= a - aMz(x). \end{aligned}$$

Dermed har vi, at

$$z(x) = \frac{a}{aM} + \tilde{c}e^{-aMx},$$

for $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Da vi definerede, at

$$z(x) = \frac{1}{y(x)},$$

så har vi da, at

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{z(x)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{M} + \tilde{c}e^{-aMx}} \\ &= \frac{M}{1 + ce^{-aMx}}, \end{aligned}$$

hvor $c = \tilde{c}/M$. ■

Eksempel 1.3. En differentialligning er givet ved

$$y' = 0.03y(14 - y).$$

Den generelle løsning til differentialligningen er derfor givet ved

$$y(x) = \frac{14}{1 + ce^{-0.03 \cdot 14x}}.$$

Opgave 1

i) En differentialligning er givet ved

$$y' = 0.5y(6 - y).$$

Bestem en generel løsning til differentialligningen.

ii) En differentialligning er givet ved

$$f'(x) = 0.04f(x)(1000523 - f(x)).$$

Bestem en generel løsning til differentialligningen.

iii) En differentialligning er givet ved

$$\frac{dy'}{dt} = 2y(999 - y).$$

Bestem en generel løsning til differentialligningen.

iv) En differentialligning er givet ved

$$\frac{dy}{dx} = 0.00000001y(x)(0.2 - y(x)).$$

Bestem en generel løsning til differentialligningen.

Opgave 2

i) En differentialligning er givet ved

$$y' = y(2 - y).$$

Bestem en partikulær løsning $y(x)$, der går gennem punktet $(0, 2)$.

ii) En differentialligning er givet ved

$$y' = 0.1y(100 - y).$$

Bestem en partikulær løsning $y(x)$, der går gennem punktet $(0, 50)$.

iii) En differentialligning er givet ved

$$\frac{dy}{dt} = 0.5y(120 - y).$$

Bestem en partikulær løsning $y(t)$, der går gennem punktet $(0, 1)$.

iv) En differentialligning er givet ved

$$\frac{dy}{dt} = 0.01y(200 - y).$$

Bestem en partikulær løsning $y(t)$, der går gennem punktet $(-\ln(2), 8)$.

Opgave 3

Vis, at

$$y(x) = \frac{10}{1 + 13e^{-x}}$$

er en partikulær løsning til differentialligningen

$$y' = 0.1y(10 - y).$$

Opgave 4

Aflevering