Matematik-aflevering

2022

3.e MA

Opgavesætter er delt i to dele:
Delprøve 1 kun med den centralt udmeldte formelsamling.
Delprøve 2 med alle hjælpemidler.

Krav til formidling af din besvarelse

Ved bedømmelse af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- **Redegørelse og dokumentation for metode**
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstragegi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger *eller* matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.

- **Figurer, grafer og andre illustrationer**
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.

- **Notation og layout**
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog, og med en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres stil standardviden.

- **Formidling og forklaring**
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.

  Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve uden hjælpemidler

Opgave 1

a) Reducér udtrykket

$$\frac{(a^3+b)ab^2 - a^4b^2}{b^2}.$$

Opgave 2

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 16.$$

a) Bestem $f(2,-3)$.

b) Bestem det stationære punkt for f.

c) Bestem arten af det stationære punkt.

Opgave 3

En linje l er givet ved

$$l : \; 3x - 4y + 6 = 0,$$

og et punkt P er givet ved $P(2,-2)$.

a) Bestem den korteste afstand fra l til P.

Opgave 4

a) Differentier følgende funktion.

$$\sqrt{x} \cdot e^{2x}.$$

b) Differentier følgende funktion.

$$e^{x^3-2x^2-1}.$$

Opgave 6

En differentialligning er givet ved

$$\frac{dy}{dx} = 7x^2 y. \tag{1.1}$$

a) Vis, at funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = e^{\frac{7}{3}x^3}.$$

er en partikulær løsning til (1.1).

Opgave 7

a) Udregn følgende ubestemte integral

$$\int e^{7\sin(x)+3\cos(x)}(7\cos(x) - 3\sin(x))dx.$$

Opgave 8

En differentialligning er givet ved

$$y' = 10y. \tag{1.2}$$

a) Bestem en partikulær løsning til (1.2), der går gennem punktet $(0, 4)$.

Delprøve med hjælpemidler

Opgave 9

Under den 2. Slesviske krig skulle de østrigske og preussiske kanoner skyde over Vemmingbund for at ramme de danske skanser ved Dybbøl mølle. Skudafstanden afhænger af affyringsvinklen på kanonen og for at skyde den rigtige afstand er det vigtigt at kende den korrekte affyringsvinkel. Af Tab. 1 kan sammenhængen mellem affyringsvinklen x (i grader) og skudafstanden D (i meter) ses.

x	10	20	30	40	50	60	70
D	1197	2089	2655	2968	3022	2659	2082

Tabel 1: Sammenhæng mellem skudafstand (i meter) og affyringsvinkel (i grader)

En model for affyringsafstanden D som funktion af affyringsvinklen x er givet ved

$$D(x) = ax^2 + bx + c$$

a) Brug tallende fra Tab. 1 til at bestemme en forskrift for D.

Det oplyses, at der er 1.8km fra de preussisk/østrigske skanser til Skanse 1 ved Vemmingbund.

b) Hvilken affyringsvinkel skal bruges for at ramme Skanse 1?

c) Hvad er ifølge modellen den maksimale skudafstand?

Opgave 10

For et bestemt lægemiddel har man målt nedbrydningshastigheden y' (i mg/l per time) i kroppen som funktion af koncentrationen y (i mg/l) af lægemiddelet. Disse tal kan ses af Tab. 2.

y (i mg/l)	998.6	835.7	670.6	505.4	340.7	175.6	9.5
y' (i mg/l/t)	-52.2	-44.5	-38.1	-29.2	-23.9	-19.7	-10.9

Tabel 2: Nedbrydningshastighed af lægemiddel som funktion af koncentration.

Det antages, at sammenhængen mellem y og y' er på formen

$$y' = b - ay. \tag{2.1}$$

a) Brug datasættet til at bestemme a og b.

b) Udnyt, at begyndelseskoncentrationen af lægemiddelet var 1000 mg/l til at bestemme en partikulær løsning til differentialligningen (2.1).

c) Afgør, hvornår koncentrationen af lægemiddelet er på 2 mg/l.

Opgave 11

En cirkel C er givet ved ligningen

$$C: \ x^2 - 6x + y^2 - 10y = 30$$

a) Bestem centrum og radius for C.

En linje l er givet ved ligningen

$$l: \; y = -2x + 5.$$

b) Bestem skæringspunkterne P og Q mellem l og C.

c) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i både P og Q.

Opgave 12

En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = x^3 + 7x^2 - 15.$$

a) Tegn f på intervallet $[-8, 4]$.

b) Bestem rødderne for f.

Grafen for f afgrænser sammen med x-aksen området A_1, der ligger over x-aksen og området A_2, der ligger under x-aksen.

c) Bestem det samlede areal af A_1 og A_2.