Anvendelser af integraler

Integration ved substitution

Sætning 1.1. *For en differentiabel funktion g og en kontinuert funktion f gælder der, at*

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = F(g(x)) + k$$

Bevis. Det er blot at differentiere højresiden

$$(F(g(x)) + k)' = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

hvoraf resultatet følger direkte. ■

Kurvelængder

Sætning 2.1. *Kurvelængde s af grafen for en differentiabel funktion f på intervallet $[a, b]$ er givet ved*

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

Eksempel 2.2. Lad f være givet ved

$$f(x) = x^2.$$

Så kan vi finde længden af kurven på intervallet $[0, 2]$ ved følgende:

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\mathrm{d}x.$$

Med et CAS-værktøj bestemmer vi derfor s til at være

$$s \approx 4.64$$

Gennemsnit af funktioner

Skal vi bestemme et gennemsnit af højden af alle i en klasse, vil vi måle højden på alle i klassen, summere det og dele med antallet af studerende i klassen. Vi kan generalisere dette til kontinuerte funktioner ved hjælp af integraler.

Definition 3.1. Gennemsnittet af en kontinuert funktion f på intervallet $[a, b]$ defineres som integralet

$$I = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Eksempel 3.2. Koncentrationen af en bestemt type partikel i en by kan beskrives ved eksponentialfunktionen

$$f(x) = 22.145 \cdot (1.32)^x,$$

hvor f er i ppm og x er i år efter år 2000. Ønsker vi at bestemme den gennemsnitlige koncentration fra år 2002 til år 2010, så kan vi bestemme det som

$$I = \frac{1}{10-2}\int_2^{10} 22.145 \cdot (1.32)^x \mathrm{d}x,$$

som med et CAS-værktøj bestemmes til at være

$$I = 142.751 ppm.$$

Opgave 1

i) Bestem kurvelængden af funktionen $f(x) = 2x + 3$ på intervallet $[-5, 5]$.

ii) Bestem kurvelængden af funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet $[0, 10]$.

iii) Bestem kurvelængden af funktionen $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ på intervallet $[-1, 2]$.

Opgave 2

Et reb hænger mellem to punkter $A = (-10, 20)$ og $B = (10, 20)$. Den bue, rebet danner er tilnærmelsesvist en parabel for funktionen f med forskriften

$$f(x) = \frac{3}{20}x^2 + 5.$$

Bestem længden på rebet.

Opgave 3

i) Bestem gennemsnittet af funktionen x^2 på intervallet $[0, 10]$.

ii) Bestem gennemsnittet af funktionen $\cos(x)$ på intervallet $[-\pi, \pi]$.

iii) Bestem gennemsnittet af funktionen $3x^2 + 10x + 1$ på intervallet $[-1, 3]$.

Opgave 4

Vi skal bevise rumfangsformlen for en kugle med radius r. Formlen lyder som bekendt $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

i) ligningen for en cirkel med radius r og centrum i $(0,0)$ er $x^2 + y^2 = r^2$. Isolér y i dette udtryk.

ii) Brug dette udtryk for y til at bestemme rumfanget af omdregningslegemet dette udtryk danner på intervallet $[-r, r]$. Dette burde være rumfanget af kuglen. (Hint: Omdregningslegemets rumfang er givet ved $\pi \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$).