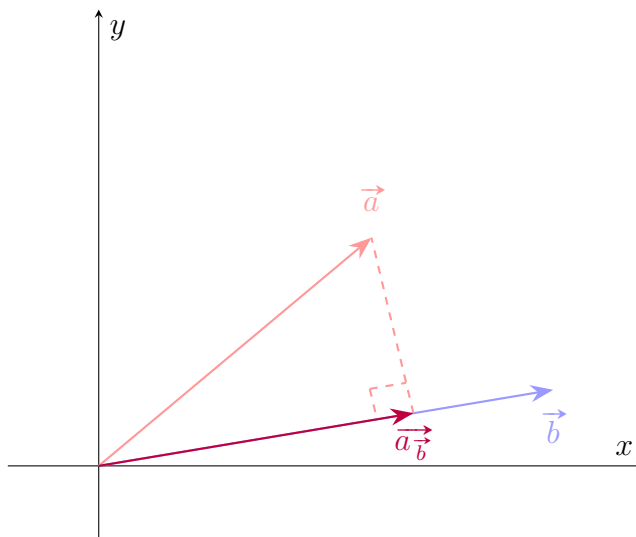


Projektioner af vektorer

Projektioner

Har vi to vektorer \vec{a} og \vec{b} , så kan vi være interesserede i at bestemme den vektor $\vec{a}_{\vec{b}}$, der peger i samme retning som \vec{b} og som i en forstand er så tæt på \vec{a} som muligt. Vi kalder i et sådant tilfælde vektoren $\vec{a}_{\vec{b}}$ for projektionen af \vec{a} på \vec{b} . Vi skriver også

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a}_{\vec{b}}.$$



Figur 1: Projektion af vektor på vektor.

Vi starter med at vise, hvordan vi finder projektionen af en vektor på en anden vektor.

Sætning 1.1 (Projektionssætningen). *For to vektorer \vec{a} og \vec{b} er projektionen af \vec{a} på \vec{b} , som vi betegner*

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a}_{\vec{b}},$$

givet ved

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}.$$

Længden af \vec{a}_b er givet ved

$$|\vec{a}_b| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Bevis for projektionssætningen

Vi skal gennem en række små opgaver bevise projektionssætningen.

- i) Tegn en skitse af Figur 1.
- ii) Tegn en normalvektor \vec{n} til \vec{b} , der går langs den stiplede linje på Figur 1 op til \vec{a} .

Vi skal bruge tre kendsgerninger, som I skal overbevise jer selv om sandheden af.

- iii) Overbevis jer selv om, at

$$\vec{a}_b + \vec{n} = \vec{a}. \quad (1.1)$$

- iv) Overbevis jer selv om, at

$$\vec{a}_b = k \vec{b} \quad (1.2)$$

for et tal k .

- v) Overbevis jer selv om, at

$$\vec{n} \cdot \vec{b} = 0. \quad (1.3)$$

- vi) Isolér \vec{n} i (1.1).
- vii) Indsæt dette udtryk for \vec{n} i (1.3) (vink: husk parentes).
- viii) Prik \vec{b} ind i parentesen (Hæv parentesen).
- ix) Indsæt udtrykket for \vec{a}_b fra (1.2) i udtrykket.
- x) Isolér k i udtrykket.
- xi) Udnyt, at $\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2$ til at omskrive udtrykket.
- xii) Indsæt dette udtryk for k i (1.2).
- xiii) Sammenlign med projektionssætningen.

Ekstraudfordring: Bestem længden af projektionsvektoren og bevis anden del af projektionssætningen.