Linjens ligning

Linjens ligning

I analytisk geometri ønsker vi at beskrive geometriske objekter ved brug af ligninger og koordinatsystemer i stedet for at analysere geometriske objekter ved hjælp af lineal, passer og lignende. Vi vil eksempelvis se på ligninger for linjer og cirkler - desuden skal vi se, hvordan vi kan *parametrisere* en linje. Vi lægger ud med at udlede linjens ligning.

Vi lader l være en vilkårlig linje og vi lader $P(x_0, y_0)$ være et punkt på denne linje. Vi kan danne en forbindelsesvektor $\vec{v}$ fra (x_0, y_0) til ethvert andet punkt (x, y) på l ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

For en normalvektor $\vec{n}$ til l givet ved

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

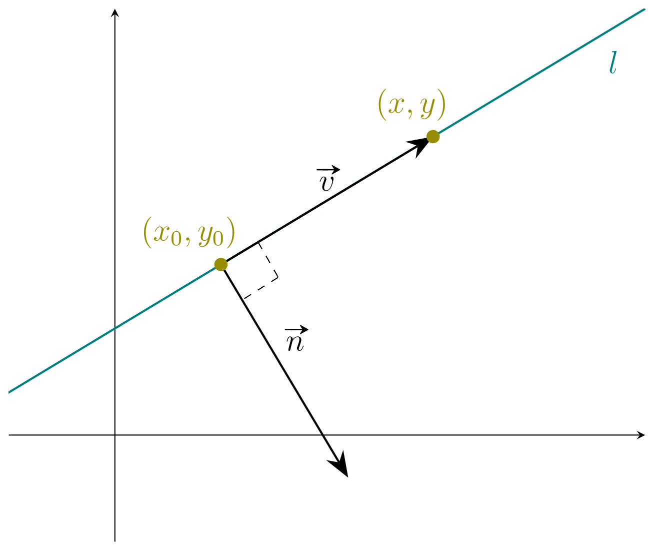
vil det gælde, at prikproduktet mellem $\vec{v}$ og $\vec{n}$ er lig 0, altså at $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Mere specifikt har vi, at

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

hvilket medfører, at

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Linjen l samt vektorerne $\vec{v}$ og $\vec{n}$ kan ses af Fig. 1.



Figur 1: Retningsvektor og normalvektor til linjen l.

Vi kan nu konkludere med en sætning.

Sætning 1.1 (Linjens ligning)**.** *Lad l være en linje med en normalvektor $\vec{n}$ givet ved*

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

og lad $P(x_0, y_0)$ være et punkt på linjen. Så opfylder ethvert punkt (x, y), der ligger på linjen l, at

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{1.2}$$

Vi kalder ligningen (1.2) *for linjens ligning. Mere præcist er* (1.2) *ligningen for linjen l.*

Eksempel 1.2. På linjen l kender vi punktet $P(-1, 3)$ og normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ligningen for l er derfor givet

$$2(x + 1) + 4(y - 3) = 0.$$

Eksempel 1.3. En linje l har ligningen

$$3(x + 1) + 4(y - 1) = 0. \tag{1.3}$$

Vi vil undersøge, om punkterne $(3,-2)$ og $(1,0)$ ligger på l. Vi indsætter derfor punkterne i (1.3) og regner efter. Det første punkt giver

$$\begin{aligned} 3(x+1)+4(y-1)=0 \;&\Leftrightarrow\; 3(3+1)+4(-2-1)=0 \\ &\Leftrightarrow\; 3\cdot 4+4\cdot(-3)=0 \end{aligned}$$

og derfor ligger punktet $(3,-2)$ på l. Tilsvarende for det andet punkt fås

$$3(1+1)+4(0-1)=0 \;\Leftrightarrow\; 2=0,$$

hvilket tydelige er et falsk udsagn. Derfor ligger punktet $(1,0)$ ikke på linjen l.

Eksempel 1.4. En linje j er givet ved ligningen

$$j:\; 2(x-3)+5(y-2)=0,$$

og vi ønsker at omskrive den til formen

$$y=ax+b$$

for to tal a og b. Vi hæver parenteserne og omskriver

$$\begin{aligned} 2(x-3)+5(y-2)=0 \;&\Leftrightarrow\; 2x-6+5y-10=0 \\ &\Leftrightarrow\; 2x+5y-16=0 \\ &\Leftrightarrow\; 5y=-2x+16 \\ &\Leftrightarrow\; y=\frac{-2}{5}x+\frac{16}{5}, \end{aligned}$$

og ligningen er omskrevet, så vi kan se hældningen og skæringen med andenaksen for linjen.

Opgave 1

i) Afgør, om punkterne $(0,2)$ og $(-2,3)$ ligger på linjen med ligningen

$$(x-2)+2(y-1)=0.$$

ii) Afgør, om punkterne $(-4,-1)$ og $(-3,6)$ ligger på linjen med ligningen

$$5(x+5)-2(y-1)=0.$$

Opgave 2

Bestem linjens ligning for følgende punkter $P(x_0, y_0)$ og normalvektorer

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

1) $P(1,1),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

2) $P(-5,-3),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

3) $P\left(\frac{-2}{5}, 13\right),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \end{pmatrix}.$

4) $P(\sqrt{2}, \sqrt{3}),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$

5) $P(0,0),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

6) $P(-100,5),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -9 \end{pmatrix}.$

Opgave 3

Vi har tidligere set linjer repræsenteret på formen $y = ax + b$, og har vi en ligning på formen $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, så kan denne omskrives til formen $y = ax + b$ (bemærk, at konstanterne a og b uheldigvis ikke her har samme betydning). Omskriv følgende ligninger fra formen $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ til formen $y = ax + b$. Tjek at dit resultatet er korrekt ved at tegne begge linjer i eksempelvis Geogebra.

1) $2(x+2) + 3(y+3) = 0$

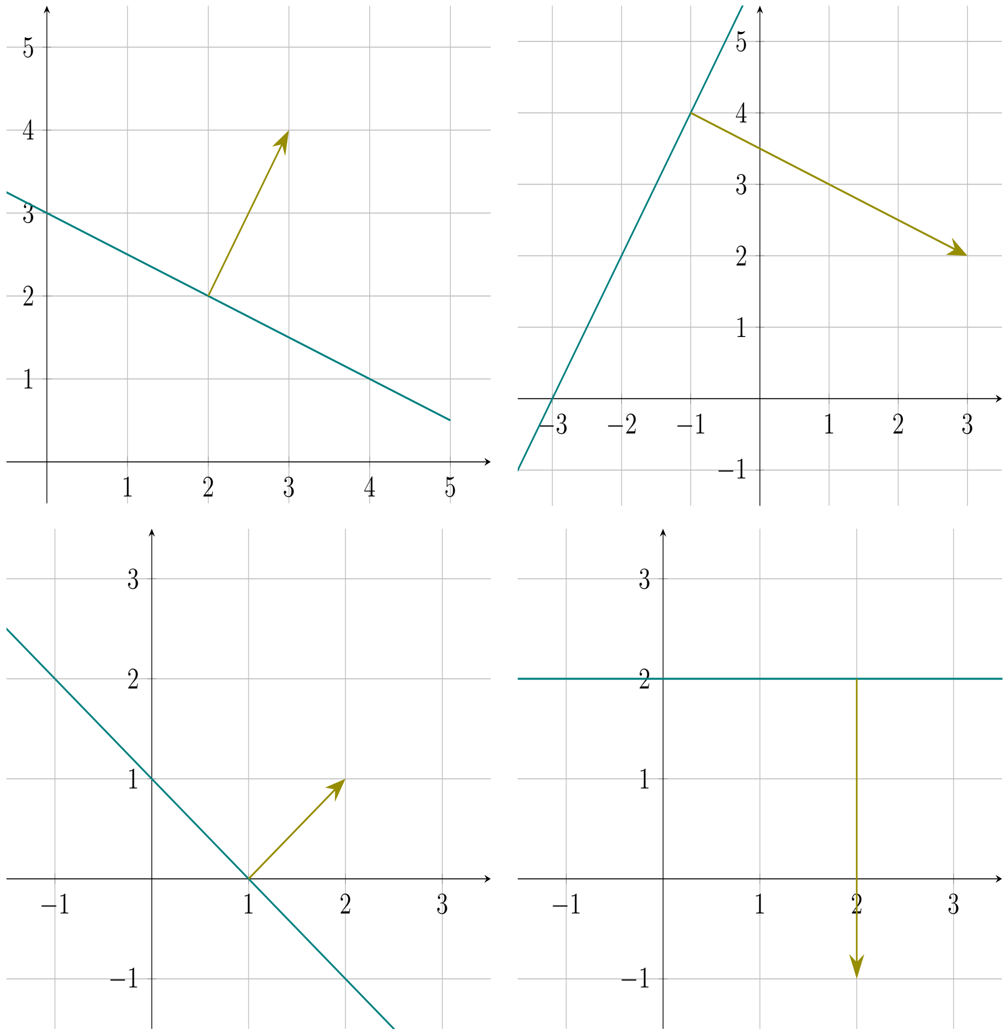
2) $-7(x-1) + 6(y-1) = 0$

3) $(x+10) + (y-9) = 0$

4) $5(x-5) + 4(y-0.5) = 0$

Opgave 4

I følgende koordinatsystemer er tegnet en linje l samt en normalvektor til linjen. Brug koordinatsystemerne til at bestemme linjens ligning for hver af linjerne.



Opgave 5

Følgende linjer er repræsenteret på formen $y = ax + b$. Tegn dem i GeoGebra og bestem så et punkt $P(x_0, y_0)$ på linjen samt en normalvektor $\vec{n}$ til linjerne. Brug punktet P og normalvektoren $\vec{n}$ til at omskrive ligningen for linjen fra formen $y = ax + b$ til formen $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

1) $y = 2x + 1$	2) $y = -\dfrac{1}{4}x - 2$
3) $y = x - 7$	4) $y = 5x + 0.6$
5) $y = 12x - 13$	6) $y = -4x$