

Cirkels ligning

Cirkels ligning

Præcist som det er tilfældet for linjen kan vi bestemme en ligning for en cirkel.

Sætning 1.1 (Cirkels ligning). *Cirklen C med centrum i (x_0, y_0) og radius r har ligningen*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Bevis. Lad (x, y) være et punkt på cirklen C , og lad (x_0, y_0) være cirkels centrum. Så er forbindelsesvektoren \vec{v} mellem (x, y) og (x_0, y_0) givet ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Da radius for C er r , så skal længden af \vec{v} være r . Dette medfører

$$r = |\vec{v}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Vi opløfter nu begge sider af lighedstegnet i anden og får

$$r^2 = \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

■

Eksempel 1.2. En cirkel har centrum i $(3, 2)$ og radius 2. Cirkels ligning er så

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

Eksempel 1.3. En cirkel har ligningen

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 16. \tag{1.1}$$

Vi skal afgøre, om punktet $(5, 4)$ ligger på cirklen. Vi indsætter derfor dette i (1.1) og får

$$(5 - 1)^2 + (4 - 4)^2 = 4^2 = 16,$$

og da denne lighed er korrekt, så er punktet på cirklen.

Opgave 1

- i) Bestem cirkels ligning for cirklen, der har centrum i $(1, 2)$ og radius $r = 1$.
- ii) Bestem cirkels ligning for cirklen, der har centrum i $(0, 0)$ og radius $r = 1$.
- iii) Bestem cirkels ligning for cirklen, der har centrum i $(-4, 2)$ og radius $r = 3$.
- iv) Bestem cirkels ligning for cirklen, der har centrum i $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ og radius $r = \sqrt{5}$.
- v) Bestem cirkels ligning for cirklen, der har centrum i $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{7})$ og radius $r = \frac{2}{3}$.

Opgave 2

- i) Afgør, om punktet $(1, 1)$ ligger på cirklen med ligningen

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

- ii) Afgør, om punktet $(2, 4)$ ligger på cirklen med ligningen

$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 49$$

- iii) Afgør, om punktet $(1, 6)$ ligger på cirklen med ligningen

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 11$$

- iv) Afgør, om punktet $(-2, 2)$ ligger på cirklen med ligningen

$$x^2 + 8x + y^2 - 8y = 32$$

Opgave 3

- i) En cirkel C har centrum i $(-2, -3)$ og radius $r = 4$. Afgør, om punktet $(-2, -2)$ ligger på C .
- ii) En cirkel C har centrum i $(-5, 4)$ og radius $r = 6$. Afgør, om punktet $(-5, 10)$ ligger på C .

Opgave 4

- i) En cirkel C er givet ved ligningen

$$(x + 1)^2 + (y - t)^2 = 4.$$

Bestem t , så punktet $(1, 2)$ ligger på C .

- ii) En cirkel C er givet ved ligningen

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = r^2.$$

Bestem r , så punktet $(4, 8)$ ligger på C .

- iii) En cirkel C er givet ved ligningen

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y = -1.$$

Bestem k , så punktet $(k, 1)$ ligger på C .