Eksponentiel vækst og eksponentialfunktioner

Har vi en sammenhæng af typen $b \cdot a^x = y$, og ønsker vi at bestemme x for et bestemt y, så er det oplagt at anvende enten den naturlige logaritme eller titalslogaritmen. Vi isolerer x som følgende

$$\begin{aligned} b \cdot a^x = y &\Leftrightarrow a^x = \frac{y}{b} \\ &\Leftrightarrow \ln(a^x) = \ln\left(\frac{y}{b}\right) \\ &\Leftrightarrow x\ln(a) = \ln(y) - \ln(b) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln(y) - \ln(b)}{\ln(a)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Eksempel 1.1. Vi ønsker at løse ligningen

$$3e^x = 1.$$

Vi følger fremgangsmåden fra (1.1), og får

$$\begin{aligned} 3e^x = 1 &\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow x\ln(e) = \ln(1) - \ln(3) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln(1) - \ln(3)}{\ln(e)} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{0 - \ln(3)}{1} \\ &\Leftrightarrow x = -\ln(3) \end{aligned}$$

Eksponentiel vækst

Vi vil hovedsagligt bruge logaritmebegrebet i forbindelse med eksponentiel vækst.

Definition 1.2. Hvis vi har en sammenhæng $y = b \cdot a^x$ for konstanter $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$, så siges sammenhængen mellem x og y at være eksponentiel. En funktion f med forskriften

$$f(x) = b \cdot a^x$$

siges at være en eksponentiel funktion.

Eksponentiel vækst vokser ved at gange med fremskrivningsfaktoren a efter hver tidsenhed.

Eksempel 1.3. Lad os sige, at vi har en bakteriekoloni med ubegrænset næringsstof og plads, og lad os se på væksten af en enkelt bakterie i kolonien. Lad os sige, at den en gang per time deler sig i to. Så vil den efter 1 time være to bakterier, efter to timer være 4 bakterier, efter 3 timer være 8 bakterier osv. Efter hver time ganger vi altså bakterieantallet med 2. Antallet af bakterier B må derfor kunne beskrives som

$$B(t) = B_0 \cdot 2^t,$$

hvor t er tiden i timer, og B_0 er antallet af bakterier til tid $t = 0$, da $B(0) = B_0 2^0 = B_0$. Dette er eksponentiel vækst, da $a = 2$, og $b = B_0$.

Eksempel 1.4. Vi tager et lån i banken og låner 100000kr. Banken giver os en månedlig rente på 1%. Efter hver måned skal vi altså gange med $1,01$, og en model for mængden vi skylder, hvis vi ikke afdrager på lånet er

$$f(x) = 100.000 \cdot (1,01)^t,$$

hvor t er tiden efter vores lån i måneder. Efter 3 år vil vi derfor skylde

$$f(36) = 100.000 \cdot (1,01)^{36} \approx 143.000$$

Opgave 1

Løs følgende ligninger:

1) $e^x = 1$
2) $10 \cdot 2^x = 4$
3) $3 \cdot 10^x = 300$
4) $1,5 \cdot e^{2x+1} = 2$

Opgave 2

i) En person låner 40000 som forbrugslån. Han skal betale 19% i årlig rente. Opstil en model for de penge han skylder som funktion af tiden målt i år, hvis han ikke afdrager på lånet. Hvornår skylder han 100.000? Hvor mange procent er hans lån steget med på 5 år?

ii) En radioaktiv isotop har en halveringstid på 2 sekunder, og vi starter med et kilo af isotopen. Opstil en model for massen af isotopen som funktion af tiden målt i sekunder. Hvornår er der 10 gram tilbage? Hvornår er der 0?

Opgave 3

Følgende funktioner er alle eksponentialfunktioner. Vis, hvorfor. Hint: Omskriv dem til formen $f(x) = b \cdot a^x$.

1) $f_1(x) = e^{2x}$
2) $f_2(x) = 2 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x$
3) $f_3(x) = 100000 \cdot 2^{\frac{t}{60}}$
4) $f_4(x) = 5x^2 + 7e^{10x}$

Opgave 4

Omskriv de eksponentielle modeller fra Eksemplerne 1.3 og 1.4 så vi får væksten per minut og per år henholdsvist.

Opgave 5

i) Bevis, at $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

ii) Bevis, at $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

iii) Bevis, at $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Hint: Skriv $a = e^{\ln(a)}$ og $b = e^{\ln(b)}$ og anvend potensregneregler.