Den naturlige logaritme

Den naturlige logaritme

Vi så sidst på titalslogaritmen log, der opfyldte at

$$\log(10^x) = x,$$

og

$$10^{\log(x)} = x.$$

Vi skal i dag arbejde med den naturlige logaritme ln, der kan bruges i forbindelse med *den naturlige eksponentialfunktion*

$$f(x) = \mathrm{e}^x,$$

hvor $\mathrm{e} \approx 2.72$ er *Eulers tal*. Vi kommer til at arbejde med Eulers tal igen senere.

Definition 1.1 (Den naturlige logaritme)**.** Den naturlige logaritme ln er funktionen, der opfylder at

$$\ln(\mathrm{e}^x) = x,$$

og

$$\mathrm{e}^{\ln(x)} = x.$$

Eksempel 1.2. Det gælder eksempelvis, at

$$\ln(\mathrm{e}^7) = 7,$$

eller

$$\mathrm{e}^{\ln(3)} = 3.$$

Som for titalslogaritmen gælder der tilsvarende nogle regneregler

Sætning 1.3 (Logaritmeregneregler)**.** *For $a, b > 0$ gælder der, at*

i) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$,

ii) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$, *iii)* $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Bevis. Vi vil løbende udnytte, at $\ln(\mathrm{e}^a) = a$ og $\mathrm{e}^{\ln(a)} = a$. Vi betragter udtrykkene.
i)

$$\begin{aligned}\ln(a \cdot b) &= \ln(\mathrm{e}^{\log(a)}\mathrm{e}^{\ln(b)})\\ &= \ln(\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)})\\ &\ln(a) + \ln(b).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}\right)\\ &= \ln(\mathrm{e}^{\ln(a)-\ln(b)})\\ &= \ln(a) - \ln(b).\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\ln(a^x) &= \ln\left(\left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^x\right)\\ &= \ln\left(\mathrm{e}^{\ln(a)x}\right)\\ &= x\ln(a),\end{aligned}$$

og vi er færdige med beviset. ■

Opgave 1

En tabel med funktionsværdier for 10^x er givet.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
e^x	0.018	0.049	0.135	0.368	1	2.718	7.389	20.085	54.598	148.413

Brug tabellen til at bestemme følgende.

1) $\ln(20.085)$
2) $\ln(54.598)$
3) $\ln(1)$
4) $\ln(0.018)$
5) $\ln(0.049)$
6) $\ln(148.413)$

Opgave 2

Bestem følgende udtryk

1) $\ln(e^3)$	2) $\ln(e^17)$
3) $\ln(e^{\sqrt{4}})$	4) $\ln(e)$
5) $\ln(1)$	6) $\ln(e^{-0.157})$

Opgave 3

Vi har set på logaritmerne ln og log, der er den omvendte funktion til e^x og 10^x henholdsvist. For hver eksponentialfunktion a^x findes en tilsvarende logaritme $\log_a$. Der gælder eksempelvist at

$$\log_5(5^3) = 3$$

eller

$$\log_2(8) = 3.$$

Vi skal altså for $\log_a(x) = y$ finde det tal y, som vi skal opløfte a i for at få x.

Brug dette til at bestemme følgende.

1) $\log_{10}(1000)$	2) $\log_5(25)$
3) $\log_2(16)$	4) $\log_3(9)$
5) $\log_3(27)$	6) $\log_7(1)$
7) $\log_8(1)$	8) $\log_2(1024)$
9) $\log_{10}(1000000)$	10) $\log_4(64)$

Opgave 4

Aflevering