Topunktsformlen for potensfunktioner og potensvækst

Topunktsformlen for potensfunktioner

Som det var tilfældet med både lineære funktioner og eksponentialfunktioner, så er det også muligt at finde en entydig potensfunktion, der går gennem to givne punkter. Formlen for denne potensfunktion kalder vi for topunktsformlen for potensfunktioner.

Sætning 1.1 (Topunktsformlen for potensfunktioner)**.** *Lad* (x_1, y_1) *og* (x_2, y_2) *være to punkter i første kvadrant. Så er der en entydig potensfunktion* f*, der skærer gennem disse punkter givet ved*

$$f(x) = b \cdot x^a.$$

Konstanterne a *og* b *er givet ved henholdsvist*

$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

og

$$b = \frac{y_1}{x_1^a}.$$

Bevis. Fremgangsmåden er tilsvarende den, vi anvendte, da vi skulle udlede topunktsformlen for eksponentialfunktion. Vi antager derfor, at potensfunktionen f givet ved

$$f(x) = b \cdot x^a$$

går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2). Vi må så have, at

$$\begin{aligned} y_1 &= b \cdot x_1^a \text{ og} \\ y_2 &= b \cdot x_2^a. \end{aligned}$$

Vi bestemmer nu forholdet mellen de to y-værdier:

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{y_1} &= \frac{b \cdot x_2^a}{b \cdot x_1^a} \\ &= \frac{x_2^a}{x_1^a} \\ &= \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a. \end{aligned}$$

Vi kan nu isolere a ved hjælp af totalslogaritmen $\log(x)$. (I princippet kunne vi også bruge $\ln(x)$ - det ville ingen forskel gøre.):

$$\begin{aligned}\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a &\Leftrightarrow \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \log\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a\right) = a\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\\ &\Leftrightarrow \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = a\\ &\Leftrightarrow \frac{\log(y_2)-\log(y_1)}{\log(x_2)-\log(x_1)} = a,\end{aligned}$$

og vi har nu bestemt a. For at bestemme b udnytter vi igen, at

$$y_1 = b \cdot x_1^a \Leftrightarrow b = \frac{y_1}{x_1^a}.$$

■

Eksempel 1.2. Lad os betragte et eksempel. Vi ønsker at finde den potensfunktion, der går gennem punkterne $(2, 16)$ og $(3, 36)$. Vi bruger topunktsformlen til først at bestemme a.

$$a = \frac{\log(36)-\log(16)}{\log(3)-\log(2)} = 2.$$

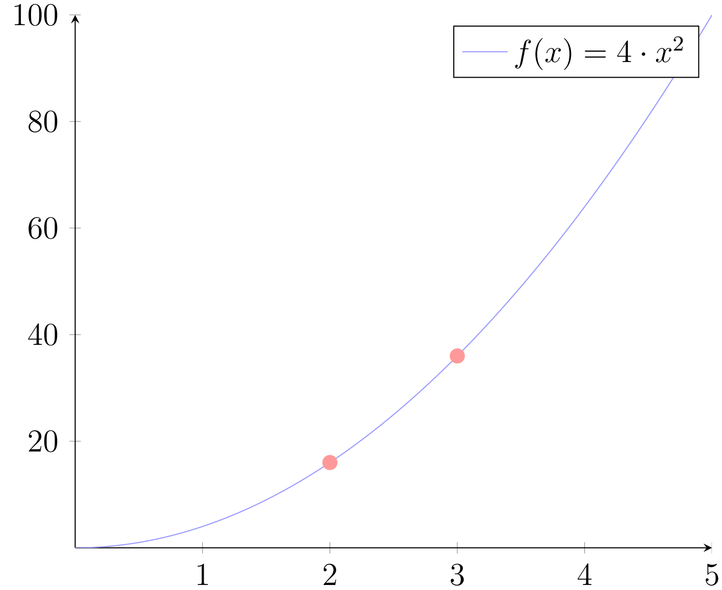
Dette bestemmes med CAS-værktøj som eksempelvist Maple. Vi bestemmer nu b:

$$b = \frac{16}{2^2} = \frac{16}{4} = 4.$$

Potensfunktionen, der går gennem punkterne $(2, 16)$ og $(3, 36)$ er derfor bestemt ved

$$f(x) = 4 \cdot x^2.$$

På Fig. 1 ses funktionen $f(x)$ samt de to regressionspunkter.



Figur 1: Regression på de to punkter $(2, 16)$ og $(3, 36)$.

Potensvækst

Vi har set, hvordan lineær vækst udvikler sig, og vi har set, hvordan eksponentiel vækst udvikler sig. Begge dele fremgår af Fig. 2.

Lineær vækst	Eksponentiel vækst
$\begin{array}{c\|c} x & x+1 \\ \hline f(x) & f(x)+a \end{array}$ $x \xrightarrow{+1} x+1$, $f(x) \xrightarrow{+a} f(x)+a$	$\begin{array}{c\|c} x & x+1 \\ \hline f(x) & af(x) \end{array}$ $x \xrightarrow{+1} x+1$, $f(x) \xrightarrow{\cdot a} af(x)$

Figur 2: Udvikling af lineær og eksponentiel vækst

Vi kan desværre ikke få noget helt tilsvarende for potensvækst, da en øgning af x med en vil give forskellige fremskrivninger af $f(x)$ alt efter hvad x er. Vi kan derimod beskrive potensvækst ved følgende sætning.

Sætning 2.1. *Lad f være en potensfunktion, altså*

$$f(x) = b \cdot a^x.$$

Så vil en multiplikation af x med en faktor k tilsvare en stigning af $f(x)$ med en faktor k^a. Mere præcist gælder der, at

$$f(k \cdot x) = k^a \cdot f(x).$$

Bevis. Vi betragter

$$f(k \cdot x) = b \cdot (k \cdot x)^a = b \cdot k^a \cdot x^a = k^a \cdot \underbrace{b \cdot x^a}_{=f(x)} = k^a \cdot f(x),$$

hvilket beviser sætningen. ■

Det er værd at bemærke, at det at gange med k tilsvarer at øge x med $(k-1)\cdot 100\%$. Tilsvarende svarer multiplikation med k^a til at øge $f(x)$ med $(k^a - 1)\cdot 100\%$, så når vi øger x med en hvis procent, så fås en tilsvarende procentvis øgning til $f(x)$. Derfor kaldes potensvækst til tider for %%-vækst. Lineær vækst kaldes til tider for ΔΔ-vækst og eksponentiel vækst kaldes til tider for Δ%-vækst. Fig. 3

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{\cdot k}{\curvearrowright}} \\ x & k \cdot x \\ \hline f(x) & k^a \cdot f(x) \\ \multicolumn{2}{c}{\underset{\cdot k^a}{\curvearrowright}} \end{array}$$

Figur 3: Udvikling af potensvækst

Opgave 1

i) Potensfunktionen $f(x) = 2 \cdot x^a$ går gennem punktet $(2, 18)$. Brug dette til at bestemme a.

ii) Potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^1$ går gennem punktet $(3, 3)$. Brug dette til at bestemme b.

iii) Brug topunktsformlen til at bestemme den potensfunktion, der går gennem punkterne $(0.5, 1)$, og $(1.5, 1.5)$.

iv) Brug topunktsformlen til at bestemme den potensfunktion, der går gennem punkterne $(1, 1)$ og $(2, 2)$.

v) Brug topunktsformlen til at bestemme den potensfunktion, der går gennem punkterne $(3, 6)$ og $(4, 5)$.

vi) Brug topunktsformlen til at bestemme den potensfunktion, der går gennem punkterne $(2.11, 13.5)$ og $(4.47, 30.11)$.

Opgave 2

1. En potensfunktion er givet ved $f(x) = 1.5 \cdot x^{1.5}$. Hvor meget stiger $f(x)$ med, hvis x stiger med 10%? Hvad med 25%?
2. En potensfunktion er givet ved $f(x) = 10 \cdot x^{-3}$. Hvor meget stiger $f(x)$ med, hvis x stiger med 50%?
3. En potensfunktion er givet ved $f(x) = \sqrt{x}$. Hvor meget stiger $f(x)$ med, hvis x stiger med 300%?

Opgave 3

Den effekt, det kræves at bevæge sig gennem luft med kan beskrives ved

$$P(v) = K \cdot v^3,$$

hvor v beskriver hastigheden og K er en konstant, der afhænger af en række forhold.

i) Hvis vi øger hastigheden v med 50%, hvor meget øges den effekt, der kræves for at bevæge sig gennem luften så med?

ii) Hvis vi øger vores effekt med 200%, hvor meget hurtigere kan vi så bevæge os gennem luften?

Opgave 4

Bremselængden for en bil kan beskrives ved D givet ved

$$D(v) = k \cdot v^2.$$

i) Hvis vi øger hastigheden med 20%, hvor meget øges bremselængden D så med?

ii) Hvis vi vil sænke vores bremselængde med 50%, hvor meget skal vi så sænke vores hastighed med?