

## Afstand mellem linje og punkt

Vi kan bruge projektioner af vektorer til at bestemme afstanden mellem et punkt  $P$  og en linje  $l$  i planen. Det er ikke umiddelbart klart ud fra formelen at det er projektioner, vi bruger, men det vil ses af beviset. Afstanden findes ved følgende sætning.

**Sætning 0.1** (Afstand mellem punkt og linje). *Har vi et punkt  $Q(x_1, y_1)$  og en linje  $l$  givet ved ligningen*

$$ax + by + c = 0,$$

*så kan vi bestemme afstanden mellem  $l$  og  $Q$  ved*

$$\text{dist}(Q, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

*Bevis.* Vi vælger et punkt  $P(x_0, y_0)$  på  $l$ . Da  $l$  har ligningen

$$ax + by + c = 0,$$

må der gælde, at

$$ax_0 + by_0 + c = 0,$$

' og derfor har vi et udtryk for  $c$  givet ved

$$c = -ax_0 + by_0.$$

Vektoren  $\overrightarrow{PQ}$  er givet ved

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

Vi har en normalvektor til  $l$  givet ved

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Vi bemærker nu, at længden af projektionen  $\overrightarrow{PQ_{\vec{n}}}$  må være afstanden fra  $l$  til  $Q$ . Vi bestemmer derfor længden af denne projektion:

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{PQ_{\vec{n}}} \right| &= \frac{|\overrightarrow{PQ_{\vec{n}}} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{\left| \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

■

**Eksempel 0.2.** Vi skal bestemme afstanden fra punktet  $P(1, 1)$  til linjen med ligningen  $4(x - 1) + 3(y + 1) = 0$ . Vi starter med at hæve parenteserne i ligningen:

$$4(x - 1) + 3(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 1 = 0.$$

Vi kan nu bruge formlen for afstand mellem punkt og linje og får:

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, l) &= \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{6}{5}, \end{aligned}$$

hvilket er afstanden fra punktet  $P$  til linjen  $l$ .

**Eksempel 0.3.** Vi skal bestemme  $k$ , så punktet  $P(4, k)$  og linjen  $l$  med ligningen

$$2x - 4y - 3 = 0$$

har afstand 1. Vi bruger afstandsformlen og får

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|2 \cdot 4 - 4 \cdot k - 3|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{|5 - 4k|}{\sqrt{20}} = 1.$$

Vi løser denne ligning og får, at  $k \approx 0.63$ .

## Opgave 1

Bestem afstanden mellem linjen  $l$  med ligningen

$$-1(x + 4) + 3(y - 1) = 0$$

og følgende punkter:

1)  $(-1, 1)$

2)  $(3, 4)$

3)  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

4)  $(-5, 6)$

5)  $(0, 0)$

6)  $(-\frac{1}{2}, 2)$

Tegn desuden situationen i Geogebra og tjek, at du har fundet den korrekte afstand.

## Opgave 2

i) Bestem  $k$ , så afstanden mellem linjen givet ved

$$x - 5y + 10 = 0$$

og punktet  $P(k, 1)$  har afstand 4. Start med at tegne det i Geogebra.

ii) Bestem  $b$ , så  $l$  med ligningen

$$y = 2x + b,$$

og punktet  $P(1, 1)$  har afstand 5. Start med at tegne i Geogebra.

## Opgave 3

Aflevering