Vinkler mellem linjer + hængeparti

Skæring givet parametrisering

Tilsvarende kan vi også bestemme et skæringspunkt mellem to linjer l og m, hvis deres parametrisering er givet.

Eksempel 1.1. Lad l og m være linjer med følgende parametriseringer:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$
$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi skal bestemme skæringen mellem disse linjer. Vi sætter dem derfor lig hinanden:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dette giver os to lineære ligninger med to ubekendte, som vi enten kan løse med substitution eller ved lige store koefficienters metode. Vi bruger substitutionsmetoden. Ligningerne lyder:

$$4 + 2t_1 = -4 + 5t_2$$

og

$$4 - 2t_1 = t_2.$$

Anden ligning indsættes i første ligning:

$$\begin{aligned} & 4 + 2t_1 = -4 + 5t_2 \\ \Leftrightarrow\ & 4 + 2t_1 = -4 + 5(4 - 2t_1) \\ \Leftrightarrow\ & 4 + 2t_1 = -4 + 20 - 10t_1 \\ \Leftrightarrow\ & 8 + 2t_1 = 20 - 10t_1 \\ \Leftrightarrow\ & 12t_1 = 12 \\ \Leftrightarrow\ & t_1 = 1. \end{aligned}$$

Dette indsættes i første parameterfremstilling:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Derfor skærer linjerne l og m hinanden i punktet $(6, 2)$.

Vinkler mellem linjer

I 1.g lærte vi, hvordan vi bestemte vinklen mellem to vektorer. Givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så gælder der følgende forhold mellem vinklen v mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og deres indbyrdes prikprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(v) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Vi kan derfor finde vinklen v ved

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \;\Leftrightarrow\; v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right).$$

Typisk vil vi blot bruge ligningen til venstre og så løse med `solve`-kommandoen i Maple. Lad os betragte et par eksempler.

Eksempel 2.1. En linje l er givet ved ligningen

$$l: \; 2(x-1) + 3(y-2) = 0,$$

og en linje m er givet ved ligningen

$$m: \; -1(x+2) - 5(y-1) = 0,$$

Linjen l har derfor normalvektoren $\vec{n_l}$ givet ved

$$\vec{n_l} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

og linjen m har normalvektoren $\vec{n_m}$ givet ved

$$\vec{n_m} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Vinklen mellem linjerne l og m må være lig vinklen mellem deres normalvektorer. Vinklen v mellem linjerne bestemmes derfor ved at løse ligningen

$$\cos(v) = \frac{2(-1) + 3(-5)}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2}}.$$

Dette løses i Maple, og vinklen mellem linjerne fås til at være $157,62°$. Dette er klart den stumpe vinkel. Den spidse vinkel mellem linjerne er derfor

$$180 - 157,62 = 22,38°.$$

Eksempel 2.2. To linjer l og m er givet ved følgende to parameterfremstillinger henholdsvist.

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Tilsvarende eksemplet med linjens ligning må vinklen mellem to linjer være lig vinklen mellem linjernes retningsvektorer $\overrightarrow{r_l}$ og $\overrightarrow{r_m}$. Derfor findes vinklen mellem l og m som vinklen mellem

$$\overrightarrow{r_l} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og

$$\overrightarrow{r_m} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dette gøres igen i Maple, og vi får, at vinklen mellem linjerne l og m er givet ved $v = 91.22°$.

Opgave 1

i) Bestem skæringen mellem linjerne l og m, der har følgende parametriseringer henholdsvist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) Bestem skæringen mellem linjerne l og m, der har følgende parametriseringer henholdsvist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

iii) Undersøg i Maple om du har fundet de rigtige skæringspunkter.

Opgave 2

i) En linje l går gennem punkterne $(1,1)$ og $(2,3)$. Bestem en parametrisering for l.

ii) En linje m går gennem punkterne $(-2,-4)$ og $(3,5)$. Bestem en ligning for m.

Opgave 3

i) En linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og en anden linje m har ligningen

$$(x-3) + 7(y+2) = 0$$

Bestem skæringspunktet mellem l og m.

ii) En linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

og en anden linje m har ligningen

$$-5(x+3) + 2(y-2) = 0$$

Bestem skæringspunktet mellem l og m.

iii) Undersøg i Maple om du har fundet de rigtige skæringspunkter.

Opgave 4

i) To linjer l og m har følgende ligninger:

$$\begin{aligned} l:&\ \ 4(x-1)+4(y-1)=0,\\ m:&\ \ 2(x+1)-2(y-7)=0. \end{aligned}$$

Bestem den spidse vinkel mellem l og m.

ii) To linjer l og m har følgende ligninger:

$$\begin{aligned} l:&\ \ -7(x+13)-20(y-1)=0,\\ m:&\ \ \frac{1}{3}(x+4)+\sqrt{2}(y-2)=0. \end{aligned}$$

Bestem den stumpe vinkel mellem l og m.

Opgave 5

i) To linjer l og m har følgende parameterfremstillinger:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestem vinklen v mellem l og m.

ii) To linjer l og m har følgende parameterfremstillinger:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestem den spidse vinkel mellem l og m.

Opgave 6

i) En linje l er givet ved ligningen

$$6(x-6)+8(y-8)=0,$$

og en linje m er givet ved parametriseringen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Bestem vinklen mellem l og m