Omdregningslegemer

Integralregning kan bruges til at bestemme rumfanget af mange forskellige typer af tre-dimensionelle objekter. Vi vil bestemme rumfang af *omdregningslegemer*. Disse opstår ved at rotere kontinuerte funktioner omkring x-aksen på et interval $[a, b]$. Rumfanget af et omdregningslegeme kan findes ved følgende sætning, som vi ikke vil bevise.

Sætning 1.1 (Rumfang af omdregningslegeme)**.** *Omdregningslegemet, der dannes ved at rotere en kontinuert funktion f omkring x-aksen på intervallet $[a, b]$ har rumfang V givet ved*

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x.$$

Vi kan bruge denne formel til at bestemme rumfanget af en kugle:

Sætning 1.2 (Rumfang af kugle)**.** *En kugle med radius r har rumfang V givet ved*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Bevis. Vi vil gerne bevise dette ved brug af omdregningslegemer. Vi skal derfor finde en funktion f, der - når den roteres omkring x-aksen giver os en kugle. Vi betragter derfor cirklens ligning for en cirkel med radius r og centrum i $(0, 0)$. Denne har ligning

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Vi vil gerne rotere den øvre halvcirkel omkring x-aksen, da dette så vil give os en kugle med radius r som omdregningslegeme. For at beskrive den øvre halvcirkel som funktion, isolerer vi y i cirklens ligning og får

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 \;&\Leftrightarrow\; y^2 = r^2 - x^2 \\ &\Leftrightarrow\; y = \sqrt{r^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Vi bestemmer nu rumfanget V af dette omdregningslegeme med Sætning 1.1. Dette giver

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r} \\
&= \pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) - \pi \left(-r^3 - \frac{1}{3} (-r)^3 \right) \\
&= \pi \left(2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right) \\
&= \frac{4}{3} \pi r^3
\end{aligned}
$$

■