

# Tværvektorer og determinanter

## Tværvektor

Ønsker vi at bestemme en vektor, der står vinkelret på en vektor, kan vi konstruere den vektor, vi kalder for tværvektoren.

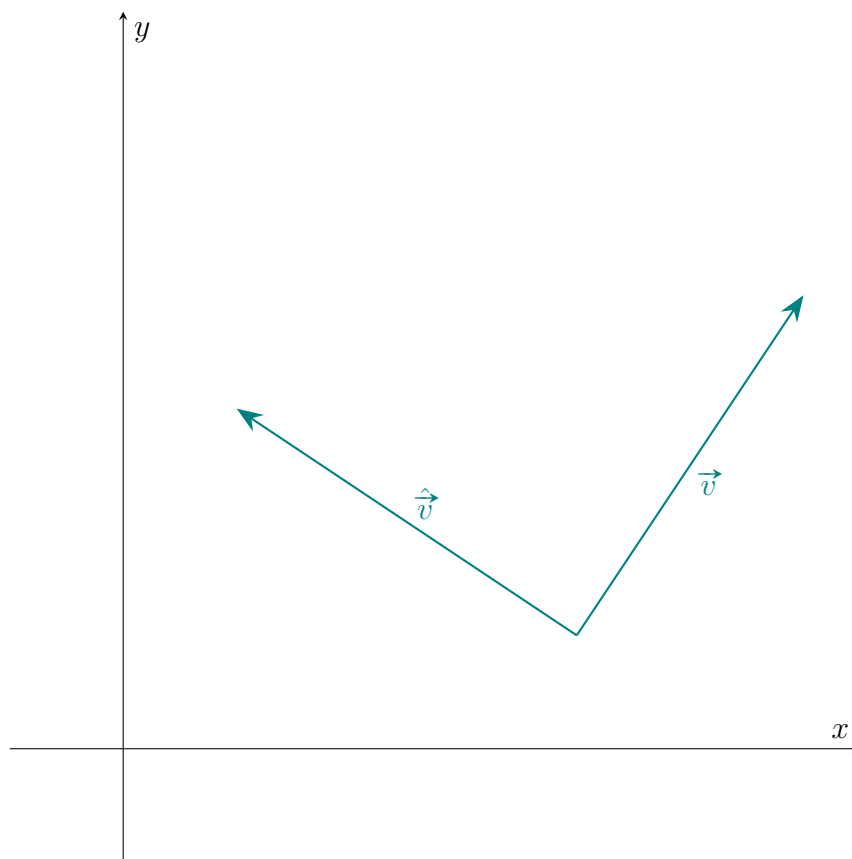
**Definition 1.1** (Tværvektor). For en vektor  $\vec{v}$  med koordinaterne

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

defineret *tværvektoren* til  $\vec{v}$  som

$$\hat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

På Figur 1 kan vi se, tværvektoren for en vektor.



Figur 1: En vektor og dens tværvektor

**Eksempel 1.2.** Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

har vektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

som tværvektor.

## Determinanter

**Definition 2.1** (Determinanter). For to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

defineres *determinanten* mellem  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  som

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Dette skrives også til tider

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

**Eksempel 2.2.** For vektorerne

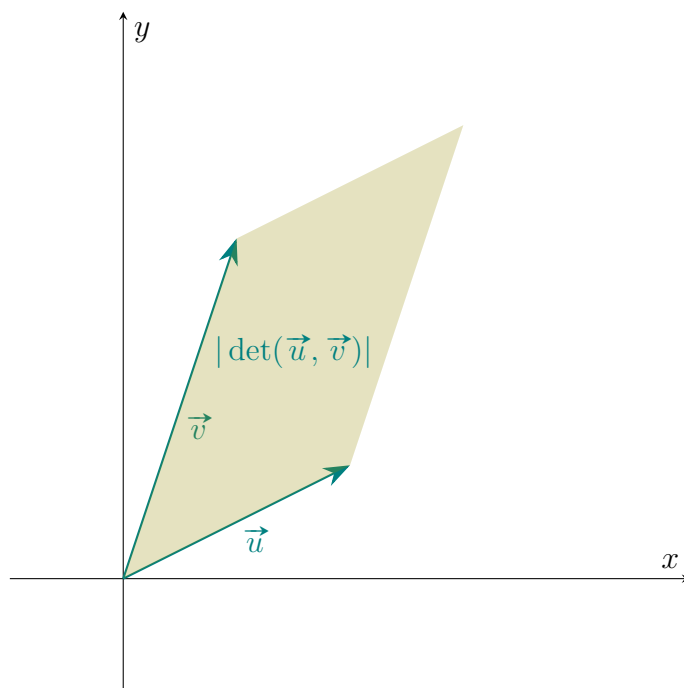
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

er determinanten givet ved

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot (-3) = 10 + 3 = 13$$

**Sætning 2.3** (Areal og determinant). *For to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  gælder der, at arealet af deres udspændende parallelogram er lig  $|\det(\vec{u}, \vec{v})|$ .*

På Figur 2 kan vi se arealet, som determinanten tilsvare



Figur 2: Determinant som areal

Skal vi bestemme determinanten i Maple, så skal vi skrive

```
with(Gym):  
 $\vec{u} := \langle u_1, u_2 \rangle$   
 $\vec{v} := \langle v_1, v_2 \rangle$   
 $\det(\vec{u}, \vec{v})$ 
```

## Opgave 1

Bestem tværvektoren for følgende vektorer

$$a) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -27 \end{pmatrix}$$

## Opgave 2

Bestem determinanten for følgende par af vektorer

$$a) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

## Opgave 3

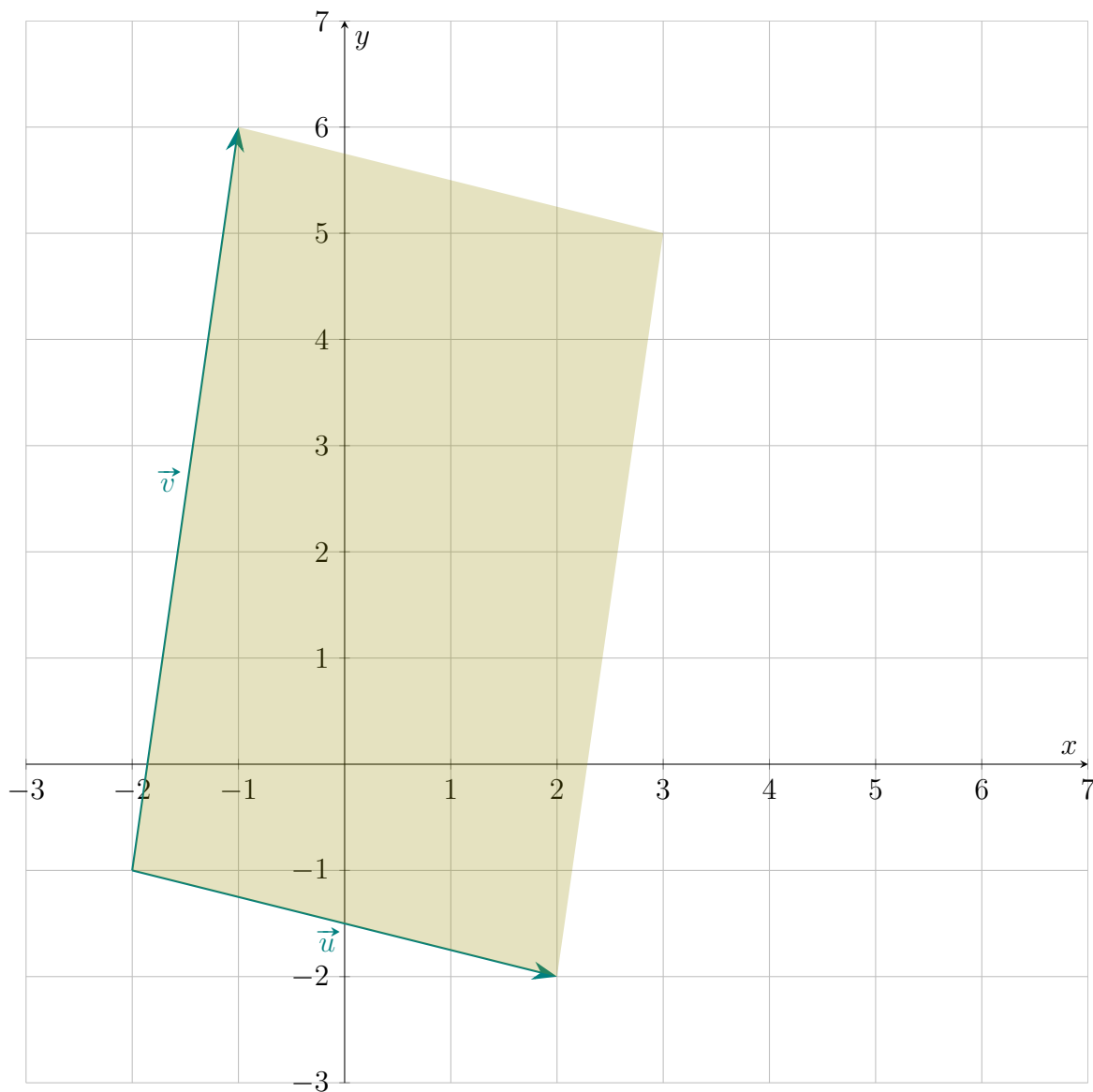
Udregn følgende

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

## Opgave 4

Beregn arealet af det skraverede område på følgende figur.



### Opgave 5

- i) Bevis, at en vektor  $\vec{v}$  og dens tværvektor  $\hat{\vec{v}}$  er orthogonale
- ii) Bevis, at der for to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

gælder, at

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \hat{\vec{u}} \cdot \vec{v}.$$

### Opgave 6

To vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -t+3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- i) Bestem  $\det(\vec{u}, \vec{v})$ , hvis  $t = 6$
- ii) Bestem  $t$ , så arealet af vektorernes udspændende parallelogram er 20.