Partikulære løsninger og integralkurver

Partikulære løsninger og integralkurver

Vi så sidst, at differentialligninger kan have uendeligt mange løsninger nøjagtigt som integraler kan have det. Vi skal i dag arbejde med, hvordan man bestemmer differentialligningsløsninger, der går gennem bestemte punkter.

Eksempel 1.1. Vi betragter differentialligningen

$$y' = xy,$$

som vi fra sidst husker har den generelle løsning

$$y(x) = ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Vi ønsker at bestemme den differentialligningsløsning, der går gennem punktet $(0,4)$. Dette indsættes derfor i løsningen, og vi får

$$4 = y(0) = ce^{-\frac{1}{2}0^2} = ce^0 = c,$$

så vi ved, at $c = 4$. Vi har derfor den partikulære løsning

$$y(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Grafen for en partikulær løsning kaldes for en *integralkurve*, og $y(x)$ er altså bestemt, så integralkurven går gennem punktet $(0,4)$.

Eksempel 1.2. Vi betragter den simple differentialligning

$$f'(x) = 6x. \tag{1.1}$$

Vi skal bestemme en løsning til ligningen, så integralkurven for f går gennem $(2,15)$. Vi bestemmer først den generelle løsning ved at integrere

$$\int 6x\mathrm{d}x = 3x^2 + k.$$

Vi indsætter nu punktet.

$$15 = f(3) = 3(2)^2 + k = 12 + k,$$

så $k = 3$. Vi har altså bestemt, at den partikulære løsning til (1.1) med en integralkurve, der går gennem $(2,15)$ er givet ved

$$f(x) = 3x^2 + 3.$$

Opgave 1

i) Bestem en partikulær løsning til følgende differentialligning, hvis integralkurve går gennem punktet $(2, 6)$.

$$f'(x) = 5$$

ii) Bestem en partikulær løsning til følgende differentialligning, hvis integralkurve går gennem punktet $(e^3, 16)$.

$$f'(x) = \frac{5}{x}$$

Opgave 2

Det oplyses, at

$$y(x) = ce^x - x - 1$$

er den generelle løsning til differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + x. \tag{1.2}$$

i) Vis, at $y(x) = ce^x - x - 1$ er en løsning til (1.2).

ii) Bestem en løsning til (1.2), der går gennem punktet $(2, 3)$.

Opgave 3

Det oplyses, at

$$y(x) = cx$$

er den generelle løsning til differentialligningen

$$y' = \frac{y}{x} \tag{1.3}$$

i) Vis, at $y(x) = cx$ er en løsning til (1.3).

ii) Bestem en løsning til (1.3), der går gennem punktet $(-4, 5)$.

Opgave 4

Det oplyses, at

$$y(x) = \pm\sqrt{c + x^2}$$

er den generelle løsning til differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}. \tag{1.4}$$

i) Vis, at $y(x) = \pm\sqrt{c + x^2}$ er en løsning til (1.4).

ii) Bestem en løsning til (1.4), der går gennem punktet $(-4, 6)$. (Vælg den positive løsning).

Opgave 5

Det oplyses, at

$$y(x) = -\ln(c - e^x)$$

er den generelle løsning til differentialligningen

$$y'(x) = e^{y+x}. \tag{1.5}$$

i) Vis, at $y(x) = -\ln(c - e^x)$ er en løsning til (1.5).

ii) Bestem en løsning til (1.5), der går gennem punktet $(2, -2)$.

Opgave 6

Det oplyses, at

$$y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$$

er den generelle løsning til differentialligningen

$$y'' = y. \tag{1.6}$$

i) Vis, at $y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$ er en løsning til (1.6).

ii) Bestem en løsning til (1.6), der går gennem punkterne $(0, 4)$ og $\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$.

Opgave 7

Opgaver fra sidst.