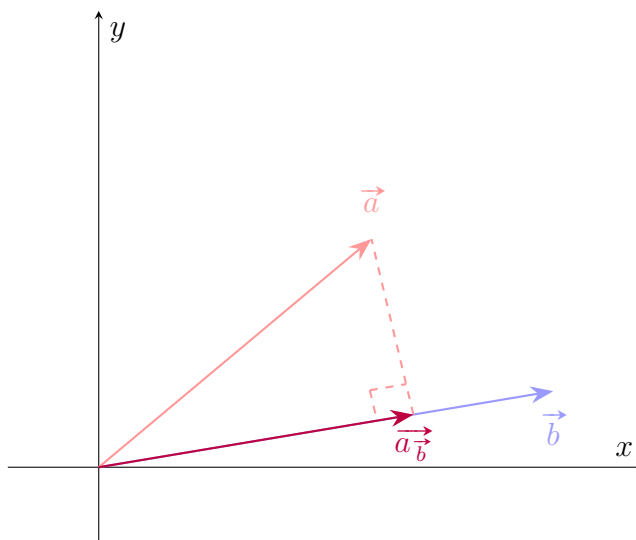


Projektioner af vektorer

Projektioner

Har vi to vektorer \vec{a} og \vec{b} , så kan vi være interesserede i at bestemme den vektor $\vec{a}_{\vec{b}}$, der peger i samme retning som \vec{b} og som i en forstand er så tæt på \vec{a} som muligt. Vi kalder i et sådant tilfælde vektoren $\vec{a}_{\vec{b}}$ for projektionen af \vec{a} på \vec{b} . Vi skriver også

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a}_{\vec{b}}.$$



Vi starter med at vise, hvordan vi finder projektionen af en vektor på en anden vektor.

Sætning 1.1 (Projektionssætningen). *For to vektorer \vec{a} og \vec{b} er projektionen af \vec{a} på \vec{b} , som vi betegner*

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a}_{\vec{b}},$$

givet ved

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}.$$

Længden af $\vec{a}_{\vec{b}}$ er givet ved

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Bevis. Af konstruktionen af projektionen $\vec{a_b}$ så findes der et tal k , så

$$k \vec{b} = \vec{a_b}.$$

Lad \vec{n} være en normalvektor til \vec{b} , der opfylder, at

$$\vec{a_b} + \vec{n} = \vec{a}.$$

Vi har så, at

$$\vec{n} = \vec{a} - \vec{a_b}.$$

Da \vec{n} er en normalvektor til \vec{b} , så får vi følgende prikprodukt.

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{b} &= 0 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{a_b}) \cdot \vec{b} = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a_b} \cdot \vec{b} = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a_b} \cdot \vec{b} = k \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \end{aligned}$$

Derfor får vi, at

$$\begin{aligned} \vec{a_b} &= k \vec{b} \\ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}. \end{aligned}$$

Vi kan nu bestemme længden af vektoren:

$$\begin{aligned} |\vec{a_b}| &= \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right| \\ &= \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right| |\vec{b}| \\ &= \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} \end{aligned}$$

■

Eksempel 1.2. Vi skal bestemme projektionen af vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

på vektoren

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi bestemmer først

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 10$$

Vi bestemmer så

$$|\vec{b}|^2 = (\sqrt{3^2 + 4^2})^2 = 25$$

Vi kan nu bestemme projektionen $\vec{a}_{\vec{b}}$ som

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\vec{b}} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \\ &= \frac{10}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eksempel 1.3. Vi skal projicere vektoren \vec{u} givet ved

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ned på linjen med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi skal først projicere ned på retningsvektoren

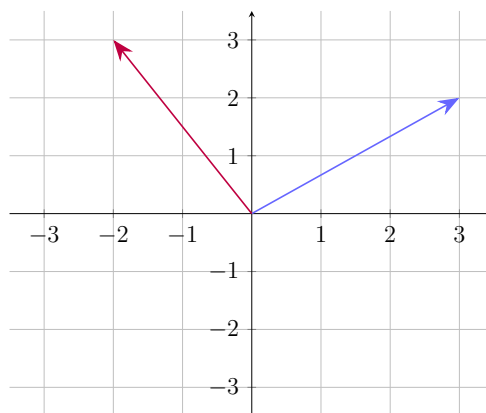
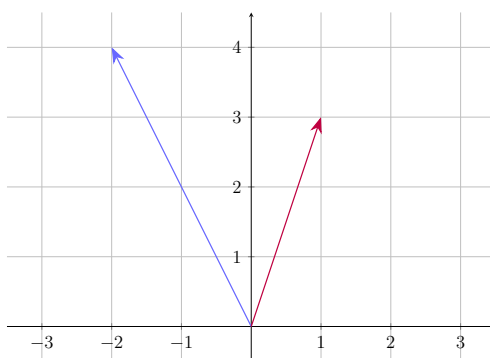
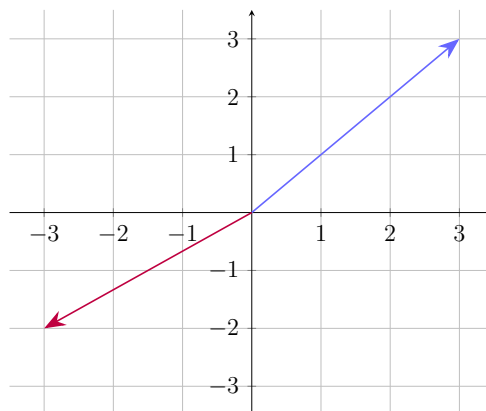
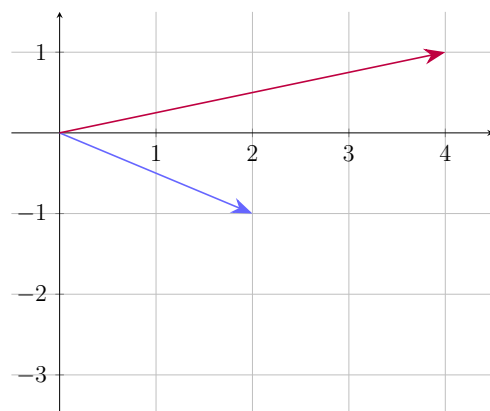
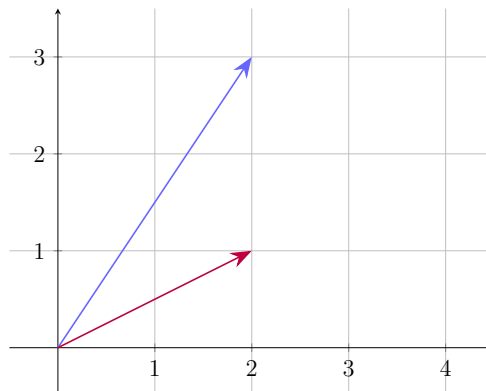
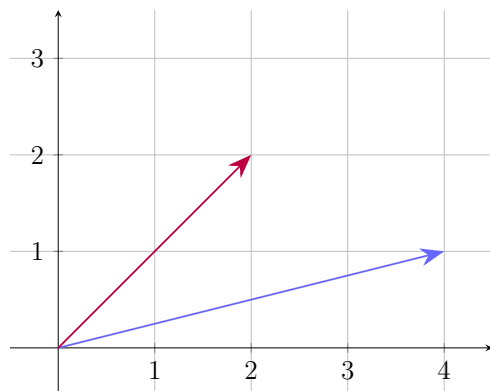
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dette gøres:

$$\vec{u}_{\vec{r}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{15}{26} \\ \frac{5}{26} \end{pmatrix}.$$

Opgave 1

Projicer følgende vektorer \vec{a} ned på vektorerne \vec{b} både ved at tegne projektionen på figuren og ved at beregne projektionen.



Opgave 2

i) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved ligningen

$$-1(x - 12) + 9(y - 1) = 0.$$

ii) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved ligningen

$$-7(x + 1) + 2(y - 2) = 0.$$

iii) Undersøg dit resultat i GeoGebra.

Opgave 3

i) Projicér vektoren \vec{v} givet ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ned på vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tegn vektorerne i GeoGebra og undersøg, om du har fundet den korrekte projektionsvektor.

ii) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ned på vektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tegn vektorerne i GeoGebra og undersøg, om du har fundet den korrekte projektionsvektor.

Opgave 4

i) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

iii) Undersøg dit resultat i GeoGebra.

Opgave 5

i) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved ligningen

$$-1(x - 12) + 9(y - 1) = 0.$$

ii) Projicér vektoren

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ned på linjen givet ved ligningen

$$-7(x + 1) + 2(y - 2) = 0.$$

iii) Undersøg dit resultat i GeoGebra.

Opgave 6

Argumentér både geometrisk og ved hjælp af projektionsformlen for, at projektionen af en vektor ned på en ortogonal vektor giver nulvektoren.