

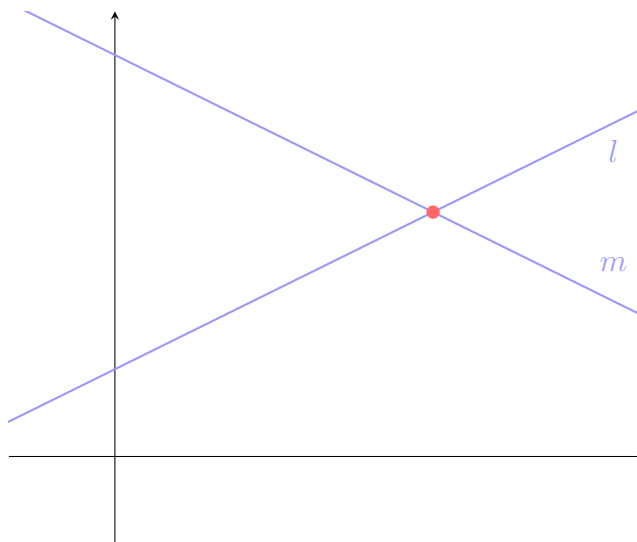
Skæring mellem linjer

Skæring givet linjens ligning

Vi har tidligere set på, hvordan man finder skæringspunkter mellem to linjer l og m , hvis de har været repræsenteret på formen $y = ax + b$. Hvis linjerne er repræsenteret på formen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

så er fremgangsmåden helt tilsvarende.



Figur 1: Skæring mellem to linjer.

Lad os betragte et eksempel.

Eksempel 1.1. To linjer l og m har ligningerne

$$\begin{aligned} l : 2(x - 1) + 3(y + 1) &= 0, \\ m : -4(x + 3) + 1(y - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Vi hæver parenteserne i ligningerne:

$$\begin{aligned} 2(x - 1) + 3(y + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x - 2 + 3y + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x + 3y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} & -4(x+3) + 1(y-2) = 0 \\ \Leftrightarrow & -4x - 12 + y - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & -4x - 14 = -y \\ \Leftrightarrow & y = 4x + 14. \end{aligned}$$

Dette indsættes nu på y 's plads i første ligning:

$$\begin{aligned} & 2x + 3y + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2x + 3(4x + 14) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2x + 12x + 42 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 14x + 43 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = -\frac{43}{14}. \end{aligned}$$

Dette indsættes nu i udtrykket for y :

$$\begin{aligned} y &= 4x + 14 \\ &= 4\left(-\frac{43}{14}\right) + 14 \\ &= \frac{-172}{14} + \frac{196}{14} \\ &= \frac{24}{14} = \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

Skæringspunktet mellem linjerne l og m er derfor $\left(-\frac{43}{14}, \frac{12}{7}\right)$.

Skæring givet parametrisering

Tilsvarende kan vi også bestemme et skæringspunkt mellem to linjer l og m , hvis deres parametrisering er givet.

Eksempel 2.1. Lad l og m være linjer med følgende parametriseringer:

$$\begin{aligned} l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi skal bestemme skæringen mellem disse linjer. Vi sætter dem derfor lig hinanden:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dette giver os to lineære ligninger med to ubekendte, som vi enten kan løse med substitution eller ved lige store koefficienters metode. Vi bruger substitutionsmetoden. Ligningerne lyder:

$$4 + 2t_1 = -4 + 5t_2$$

og

$$4 - 2t_1 = t_2.$$

Anden ligning indsættes i første ligning:

$$\begin{aligned} 4 + 2t_1 &= -4 + 5t_2 \\ \Leftrightarrow 4 + 2t_1 &= -4 + 5(4 - 2t_1) \\ \Leftrightarrow 4 + 2t_1 &= -4 + 20 - 10t_1 \\ \Leftrightarrow 8 + 2t_1 &= 20 - 10t_1 \\ \Leftrightarrow 12t_1 &= 12 \\ \Leftrightarrow t_1 &= 12. \end{aligned}$$

Dette indsættes i første parameterfremstilling:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 12 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Derfor skærer linjerne l og m hinanden i punktet $(6, 2)$.

Opgave 1

- i) To linjer l og m har ligningerne

$$\begin{aligned} l : 2(x - 2) + 2(y - 6) &= 0, \\ m : -1(x - 11) + 5(y - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Bestem skæringspunktet mellem l og m .

- ii) To linjer l og m har ligningerne

$$\begin{aligned} l : 2x + 4(y - 1) &= 0, \\ m : 2(x - 5) - (y - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Bestem skæringspunktet mellem l og m .

Opgave 2

- i) Bestem skæringen mellem linjerne l og m , der har følgende parametriseringer henholdsvis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ii) Bestem skæringen mellem linjerne l og m , der har følgende parametriseringer henholdsvis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Opgave 3

- i) En linje l går gennem punkterne $(1, 1)$ og $(2, 3)$. Bestem en parametrisering for l .
- ii) En linje m går gennem punkterne $(-2, -4)$ og $(3, 5)$. Bestem en ligning for m .

Opgave 4

- i) En linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og en anden linje m har ligningen

$$(x - 3) + 7(y + 2) = 0$$

Bestem skæringspunktet mellem l og m .

ii) En linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

og en anden linje m har ligningen

$$-5(x + 3) + 2(y - 2) = 0$$

Bestem skæringspunktet mellem l og m .