Proportionalitet og recap. om vækst

Recap. om vækst

Vi har beskæftiget os med tre vigtige væksttyper; lineær vækst, eksponentiel vækst og nu potensvækst. Vi husker på, at en lineær funktion er en funktion f med forskrift

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

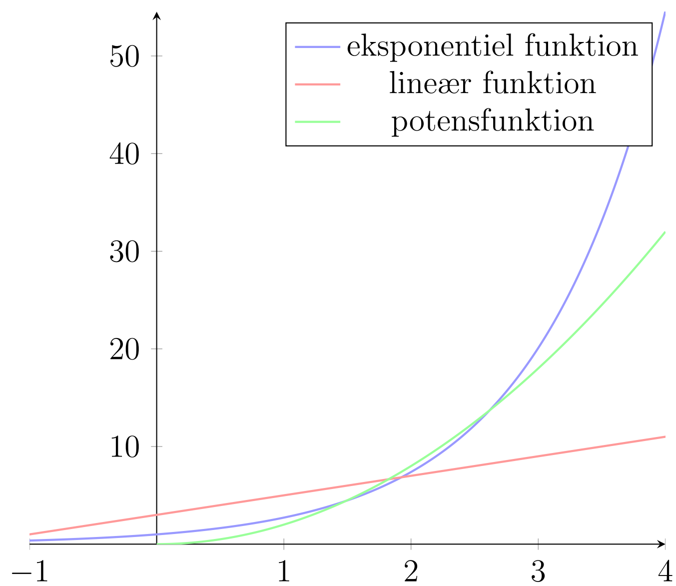
en eksponentialfunktion g er en funktion på formen

$$g(x) = b \cdot a^x,$$

og en potensfunktion er en funktion h på formen

$$h(x) = b \cdot x^a.$$

Eksempler på hver af de tre funktionstyper kan ses af Fig. 1



Figur 1: Eksempler på lineær funktion, eksponentiel funktion og potensfunktion.

I alle tre væksttyper er det muligt at finde en entydig funktion af væksttypen, der går gennem to punkter. Formlerne for at finde a og b kaldes for topunktsformlerne, og vi repeterer her, hvordan man finder a. Konstanten b kan så findes tilsvarende ved at løse en simpel ligning. Den lineære funktion $f(x) = ax + b$, der går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) har hældning

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Den eksponentialfunktion $g(x) = b \cdot a^x$, der går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) har fremskrivningsfaktor

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}.$$

Den potensfunktion $h(x) = b \cdot x^a$, der går gennem punkternen (x_1, y_1) og (x_2, y_2) har følgende udtryk for a.

$$a = \frac{log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}.$$

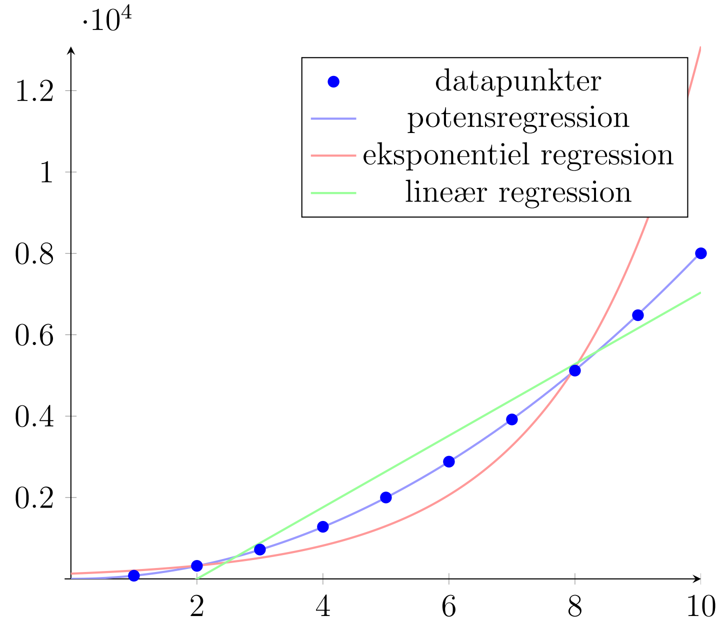
Regression

Vi har i forbindelse med de tre veksttyper set regression på et datasæt for hver type af vækst. Det er dog ikke helt klart, hvordan vi i fald vi støder ind i virkelighedsnær data afgør, hvilken type regression, vi skal bruge. Lad os sige, at vi har datasættet, der fremgår af Tabel 1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V(x)$	78.1	319.9	720.5	1280.4	2000.5	2881.1	3918.4	5119.4	6480.6	8001.6

Tabel 1: Vægt af papirkvadrater med bredde x, hvor bredden er i meter og vægten er i gram.

Uden yderligere information om, hvor data kommer fra er der ikke andet for end at prøve forskellige regressionstyper og se, om regressionen passer godt på datasættet. På Fig. **??** fremgår alle tre regressioner på datasættet



Betragter vi regressionerne, ser det klart ud til at potensregression passer bedst på datapunkterne, men det er ikke altid sikkert, at det er så klart som i dette tilfælde. Mere generelt skal vi have information om, hvad den underliggende forklarende model til det, vi har målt på er. I dette tilfælde måler vi på vægten af papirkvadrater som funktion af bredden. Arealet af et papirkvadrat er $A(x) = K \cdot x^2$, hvor ,x er bredden og K er en passende konstant. Derfor giver det god mening at en potensfunktion $b \cdot x^a$, hvor $a \approx 2$ beskriver vægten af papirkvadraterne som funktion af bredden.

Ligefrem og omvendt proportionalitet

Definition 3.1 (Ligefrem proportionalitet)**.** To variable x og y siges at være *ligefrem proportionale* eller blot proportionale, hvis $y = a \cdot x$. Konstanten a kaldes for *proportionalitetsfaktoren*

Definition 3.2 (Omvendt proportionalitet)**.** To variable x og y siges at være *omvendt proportionale*, hvis $x \cdot y = k$.

Hvis to variable er omvendt proportionale, er der en potenssammenhæng mellem dem, da $x \cdot y = k$ medfører, at $y = k \cdot x^{-1}$.

Eksempel 3.3. Lad os betragte et rektangel med areal 10. Så er længden og bredden af rektanglet omvendt proportionale, da $b \cdot l = 10$

Opgave 1

Find en lineær funktion, en eksponentialfunktion og en potensfunktion, der går gennem følgende par af punkter:

1) $(2,2)$ og $(3,3)$
2) $(1,5)$ og $(6,100)$
3) $(1,7)$ og $(2,9)$

Opgave 2

Lav selv potensregression på datasættet fra Tabel 1 og bestem, hvad et papirkvadrat på $20m^2$ vejer. Hvad er vægten af papir per kvadratmeter i følge regressionen?

Opgave 3

Hvilke af følgende variabelsammenhænge er proportionale, omvendt proportionale eller ingen af delene

1) $y = \frac{1}{x}$
2) $x \cdot y = 27$
3) $\frac{y}{x} = 27$
4) $y = x^2$
5) $2y = 3x$
6) $10x^3 = x^2y$