Separable differentialligninger

Separable differentialligninger

Vi har tidligere set på differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = xy,$$

som vi påstod havde den fuldstændige løsning

$$y(x) = ce^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Denne differentialligning tilhører en stor klasse af differentialligninger kaldet *separable differentialligninger*, og vi skal i dag se på, hvordan man går til denne differentialligningstype.

Definition 1.1 (Separabel differentialligning)**.** En differentialligning på formen

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$$

for kontinuerte funktioner g og h kaldes for en separabel differentialligning.

Sætning 1.2 (Separation af variable)**.** *Lad f og g være kontinuerte funktioner, samt $g \neq 0$. Så har differentialligningen*

$$y' = h(x)g(y)$$

den fuldstændige løsning $y = f(x)$, der opfylder, at

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx.$$

Bevis. Vi antager, at $y = f(x)$ er en løsning til differentialligningen

$$y' = h(x)g(y).$$

Vi definerer nu

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{g(x)},$$

så

$$g(x) = \frac{1}{\tilde{g}(x)}.$$

Vi får derfor

$$\begin{aligned} y' = h(x)g(y) \ \Leftrightarrow \ f'(x) &= \frac{h(x)}{\tilde{g}(f(x))} \\ \Leftrightarrow \tilde{g}(f(x))f'(x) &= h(x). \end{aligned}$$

Vi integrerer med hensyn til x på begge sider af lighedstegnet.

$$\int \tilde{g}(f(x))f'(x)dx = \int h(x)dx. \tag{1.1}$$

Vi integrerer nu venstresiden ved integration ved substitution og får

$$\int \tilde{g}(f(x))f'(x)dx = \tilde{G}(f(x)) + k$$

hvor $\tilde{G}$ er en stamfunktion til $\tilde{g}$. Vi indsætter nu $y = f(x)$ og får

$$\begin{aligned} \int \tilde{g}(f(x))f'(x)dx &= \tilde{G}(f(x)) + k \\ &= \tilde{G}(y) + k \\ &= \int \tilde{g}(y)dy \\ &= \int \frac{1}{g(y)}dy. \end{aligned}$$

Dette er lig venstresiden i (1.1), så det indsættes og vi får

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx,$$

og vi er færdige. ∎

Eksempel 1.3. Vi betragter differentialligningen

$$y' = xy$$

for $y > 0$. Vi har så, at

$$y' = h(x)g(y)$$

for $g(x) = x$ og $h(y) = y$. Vi løser denne ved separation af variable og får

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{g(y)}d(y) = \int h(x)dx \ &\Leftrightarrow \ \int \frac{1}{y}dy = \int xdx \\ &\Leftrightarrow \ \ln(y) = \frac{1}{2}x^2 + k \\ &\Leftrightarrow \ y = e^{\frac{1}{2}x^2+k} = e^k e^{\frac{1}{2}x^2} = ce^{\frac{1}{2}x^2}. \end{aligned}$$

Vi har nu fundet den generelle løsning til differentialligningen

$$y' = xy.$$

Opgave 1

i) Bestem en generel løsning til differentialligningen

$$y' = 2xy$$

ii) Bestem en generel løsning til differentialligningen

$$y' = x^2y$$

iii) Bestem en generel løsning til differentialligningen

$$y' = \frac{y}{x}$$

iv) Bestem en generel løsning til differentialligningen

$$y' = x^2e^{-y}$$

Opgave 2

i) Bestem en generel løsning til differentialligningen

$$y' = 2x\cos(x^2)y.$$

ii) Bestem en generel løsning til differentialligningen

$$y' = 4x(-y^2).$$

iii) Bestem en generel løsning til differentialligningen

$$y' = 3x^2e^{x^3}y^2.$$

Opgave 3

i) Bestem den partikulære løsning til differentialligningen

$$y' = 2xe^y,$$

der går gennem punktet $(0,1)$.

ii) Bestem den partikulære løsning til differentialligningen

$$y' = (2x+2)\sin(x^2+2x)y,$$

der går gennem punktet $(0,1)$.