UNIVERSITAS INDONESIA

ANALISIS KESTABILAN GLOBAL PADA MODEL INFEKSI HIV

SKRIPSI / TESIS / DISERTASI

NURDINI K.
1006673613

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA / STATISTIKA / ILMU AKTUARIA
DEPOK
JUNI 2025

UNIVERSITAS INDONESIA

ANALISIS KESTABILAN GLOBAL PADA MODEL INFEKSI HIV

SKRIPSI / TESIS / DISERTASI
Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana / Magister / Doktor

NURDINI K.
1006673613

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA / STATISTIKA / ILMU AKTUARIA
DEPOK
JUNI 2025

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi / Tesis / Disertasi ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Nurdini K.
NPM	:	1006673613
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	17 Juli 2025

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi / Tesis / Disertasi ini diajukan oleh	:	
Nama	:	Nurdini K.
NPM	:	1006673613
Program Studi	:	Sarjana Matematika / Statistika / Ilmu Aktuaria
Judul Skripsi / Tesis / Disertasi	:	Analisis Kestabilan Global pada Model Infeksi HIV

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana / Magister / Doktor pada Program Studi Sarjana Matematika / Statistika / Ilmu Aktuaria, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	:	Dr. Hengki Tasman	( )
Pembimbing II	:	Nama Pembimbing II	( )
Penguji I	:	Nama Penguji I	( )
Penguji II	:	Nama Penguji II	( )

Ditetapkan di	:	Depok
Tanggal	:	17 Juli 2025

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat dan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan sebaik-baiknya. Selama masa penulisan skripsi ini, penulis telah mendapat banyak dukungan, doa, bantuan, inspirasi, dan motivasi dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis ingin berterima kasih kepada:

1. Semua staf pengajar atas ilmu pengetahuan yang telah diberikan kepada penulis selama masa kuliah.
2. Seluruh staf karyawan yang selalu melakukan tugas mereka dengan baik, sehingga memberikan kenyamanan pelayanan bagi siapa saja.
3. Seluruh teman-teman angkatan 2009 atas semangat, canda tawa dan banyak hal penting selama masa kuliah.
4. Kakak-kakak angkatan 2008, 2007, dan 2006 serta adik-adik angkatan 2010, dan 2011 yang terus memberi semangat.

Nurdini K.

2025

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Nurdini K.
NPM	:	1006673613
Program Studi	:	Sarjana Matematika / Statistika / Ilmu Aktuaria
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Skripsi / Tesis / Disertasi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Analisis Kestabilan Global pada Model Infeksi HIV

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini, Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*data base*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di	:	Depok
Pada tanggal	:	17 Juli 2025

Yang menyatakan

(Nurdini K.)

ABSTRAK

Nama	:	Nurdini K.
Program Studi	:	Sarjana Matematika / Statistika / Ilmu Aktuaria
Judul	:	Analisis Kestabilan Global pada Model Infeksi HIV

Secara matematis, melipat dapat dilakukan dengan merotasi bidang kertas yang ingin dilipat terhadap sumbu garis lipatan. Pemetaan dari kertas ke hasil lipatan origami dilakukan dengan merotasi bidang kertas yang sesuai. Apabila sebuah origami yang telah selesai dibuka kembali, terdapat garis-garis bekas lipatan pada kertas. Garis-garis lipatan ini disebut sebagai pola lipatan. Jika sebuah pola lipatan dapat dilipat, perkalian matriks-matriks rotasi sesuai merupakan matriks identitas. Hal ini berlaku pada origami simpul tunggal, dan berlaku secara lokal pada origami simpul jamak, namun dapat diperluas sehingga berlaku secara global pada origami simpul jamak.

Kata kunci:
Origami, rotasi, transformasi, lipatan tak datar.

ABSTRACT

Name	:	Nurdini K.
Program	:	Undergraduate Study Program of Mathematics / Statistics / Actuarial Science
Title	:	Global Stability Analysis of an HIV Infection Model

Mathematically, to fold a paper is to rotate the paper along a crease line as the axis. The mapping from the paper to the finished origami fold is done by rotating parts of the paper to the appropriate locations. Unfolding finished origami reveals a pattern of crease lines, known as crease pattern. If the crease pattern is foldable, then the product of the associated rotational matrices is the identity matrix. This condition holds in a single vertex crease pattern and holds locally in a multiple vertex crease pattern and can be adapted to a global condition in a multiple vertex crease pattern

Keywords:
Origami, rotation, transformation, non-flat folding.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Telah ditemukan model matematika untuk mempelajari bagaimana dinamika penularan penyakit dari waktu ke waktu. Model menggunakan pendekatan persamaan diferensial biasa untuk mempelajari bagaimana penyakit menyebar di suatu populasi dari waktu ke waktu. Populasi dibagi menjadi tiga kompartemen, yaitu *susceptible* (orang rentan penyakit), *infected* (orang terinfeksi), dan *recovered* (orang kebal penyakit).Model Kermack-McKendrick diberikan oleh sistem persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned} \tag{1.1}$$

dengan β adalah *rate* menginfeksi dan γ adalah *rate* penyembuhan. Kemudian model (1.1) berkembang tidak hanya untuk satu populasi, melainkan untuk beberapa populasi.

Oleh karena itu, pada skripsi ini akan dikonstruksi model multi grup SIS dengan pembagian kompartemen adalah pasif dan aktif. Individu dikatakan pasif jika ia tidak beraktivitas di kota lain, sedangkan individu dikatakan aktif jika ia beraktivitas di kota lain. Untuk penginterpretasian menggunakan simulasi numerik, akan ditinjau kasus untuk dua kota, kota besar (metropolitan) dan kota kecil, dimana fasilitas pengobatan kedua kota berbeda. Pendekatan matematika yang diterapkan adalah teori kontrol optimal, untuk menentukan opsi efisien dalam mengontrol penyakit. Selain itu juga akan ditinjau bagaimana hubungan antara penyebaran infeksi terhadap kontrol pengobatan, lamanya seseorang menetap di kota asal, atau lamanya seseorang menetap di kota lain.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, adapun rumusan masalah yang dibahas pada skripsi ini yaitu:

1. Bagaimana model matematika yang merepresentasikan mobilitas antar populasi dengan pembagian kompartemen aktif dan pasif ?

1.3 Ruang Lingkup Penelitian

Untuk menyederhanakan permasalahan tanpa mengurangi esensi dari permasalahan, maka dibuatlah pembatasan masalah. Adapun ruang lingkup permasalahan yang dibahas pada skripsi ini yaitu:

1. Populasi manusia (yang berasal dari kota-i) konstan.
2. Tidak ada individu yang meninggal karena penyakit.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penulisan skripsi ini yaitu:

1. Membangun model penyebaran penyakit dua kota dengan intervensi pengobatan

1.5 Metodologi Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur dan simu-lasi numerik terhadap model yang didapat.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini membahas mengenai model SIS, *Basic Reproduction Number*, teori kontrol optimal, prinsip Pontryagin, dan metode *Gradient Descent*.

2.1 Model SIS

Model epidemik penyebaran penyakit adalah representasi sederhana bagaimana infeksi menyebar di seluruh populasi dari waktu ke waktu. Sebagian besar model berdasarkan pada pembagian populasi menjadi beberapa kompartemen (Lenhart, 2007). Salah satu model epidemik penyebaran penyakit adalah model SIS, dimana individu rentan akan menjadi terinfeksi kemudian akan rentan kembali setelah pulih dari penyakit. Secara rinci, kedua kompartemen pada model SIS sebagai berikut.

1. *Susceptible* (S): individu yang tidak terinfeksi penyakit, namun rentan terhadap infeksi penyakit.

2. *Infected* (I): individu yang terinfeksi penyakit dan berpotensi menularkan penyakitnya ke individu rentan lainnya.

Model SIS sederhana diberikan oleh sistem persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan β adalah *rate* menginfeksi dan γ adalah *rate* penyembuhan (Martcheva, 2015). Model (2.1) relatif mudah dianalisis secara analitik.

2.2 *Basic Reproduction Number*

Basic Reproduction Number ($\mathscr{R}_0$) adalah ekspektasi banyaknya infeksi sekunder yang di hasilkan secara langsung dari individu primer yang terinfeksi selama periode infeksi dalam suatu populasi *susceptible* tertutup (Diekmann & Heesterbeek, 2000). Tertutup artinya pengurangan atau penambahan jumlah populasi hanya dikarenakan kelahiran dan kematian.

Teorema 2.1. (Driescche & Watmough, 2002) Sebuah translasi $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ memiliki representasi matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

T^{-1} juga merupakan translasi dan memiliki representasi matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.1. (Driescche & Watmough, 2002) Misal $X \neq \{0\}$ adalah ruang ber-norm kompleks dan $T : D(T) \longrightarrow X$ adalah operator linear dengan $D(T) \subset X$. **Nilai biasa** (*regular value*) λ dari T adalah bilangan kompleks sedemikian sehingga

(R1) $R_\lambda(T)$ ada

(R2) $R_\lambda(T)$ terbatas

(R3) $R_\lambda(T)$ terdefinisi pada himpunan yang padat terhadap X.

Himpunan *resolvent* $\rho(T)$ dari T adalah kumpulan semua nilai biasa λ dari T. Komplemennya $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ di bidang kompleks $\mathbb{C}$ disebut **spektrum** dari T, dan $\lambda \in \sigma(T)$ disebut **nilai spektral** dari T. Lebih lanjut, spektrum $\sigma(T)$ dipartisi menjadi tiga himpunan yang saling bebas, yaitu:

1. **Spektrum titik** atau spektrum diskrit $\sigma_p(T)$ adalah himpunan dari λ yang sedemikian sehingga $R_\lambda(T)$ tidak ada. Nilai $\lambda \in \sigma_p(T)$ disebut **nilai eigen** dari T.
2. **Spektrum kontinu** $\sigma_c(T)$ adalah himpunan dari λ yang sedemikian sehingga $R_\lambda(T)$ ada dan memenuhi (R3) tapi tidak memenuhi (R2), yaitu $R_\lambda(T)$ tidak terbatas.
3. **Spektrum *residual*** $\sigma_r(T)$ adalah himpunan dari λ yang sedemikian sehingga $R_\lambda(T)$ ada (bisa sebagai operator linear terbatas atau tidak) namun tidak memenuhi (R3), yaitu domain dari $R_\lambda(T)$ tidak padat di X.

BAB 3
KONTROL OPTIMAL MODEL

Perlu dicatat bahwa penyakit yang dilibatkan pada laporan skripsi ini adalah influenza musiman, dimana individu yang terinfeksi masih mampu beraktivitas di kota asal ataupun di kota tujuan.

3.1 Proses Pemodelan Multi-Grup

3.1.1 Pembagian Populasi

Berdasarkan status kesehatannya, populasi manusia di kota tertentu dibagi menjadi 2 yaitu:

1. Kelompok individu rentan, yaitu kelompok individu yang belum terinfeksi penyakit influenza, namun rentan terhadap penularan penyakit tersebut
2. Kelompok individu terinfeksi, yaitu kelompok individu yang telah terinfeksi penyakit influenza dan dapat menularkan penyakitnya ke individu rentan lainnya

3.1.2 Asumsi Model

Pada konstruksi model ini, diperlukan beberapa asumsi sebagai berikut:

1. Populasi individu bersifat homogen yang artinya setiap individu bercampur secara rata dengan individu lainnya.
2. Populasi individu (yang berasal dari kota-i) konstan.
3. Transmisi penyakit hanya melalui kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi.

3.1.3 Konstruksi Model

Pendefinisian variabel dan parameter dapat dilihat pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2. Demi kemudahan penulisan, untuk selanjutnya $S_i(t), I_i(t), \bar{S}_i(t),$ dan $\bar{I}_i(t)$ ditulis sebagai $S_i, I_i, \bar{S}_i,$ dan $\bar{I}_i$.
Penjelasan mengenai pembentukan model penyebaran penyakit influenza di dua kota dengan intervensi pengobatan adalah sebagai berikut.

Tabel 3.1: Definisi variabel pada model multi grup dengan intervensi pengobatan.

Variabel	Definisi	Nilai	Satuan
$S_i(t)$	Banyaknya individu pasif yang rentan terhadap penyakit pada waktu ke-t	$S_i(t) \geqslant 0$	manusia
$I_i(t)$	Banyaknya individu pasif yang terinfeksi penyakit pada waktu ke-t	$I_i(t) \geqslant 0$	manusia

Tabel 3.2: Definisi parameter pada model multi grup dengan intervensi pengobatan.

Parameter	Definisi	Nilai	Satuan
A_i	Banyaknya individu yang lahir pada waktu-t	$A_i \in [0, \infty)$	manusia
β_i	Laju infeksi	$\beta_i \in [0, 1]$	$\frac{1}{\text{tahun}}$
μ	Laju kematian natural	$\mu \in [0, 1]$	$\frac{1}{\text{tahun}}$

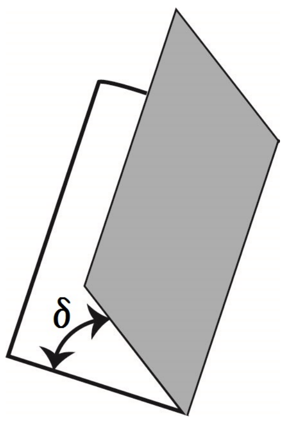
Berdasarkan penjelasan di atas, terbentuklah model penyebaran penyakit influenza di dua kota dengan intervensi pengobatan, sebagai sistem persamaan diferensial berdimensi delapan sebagai berikut.

$$\frac{dS_1}{dt} = A_1 - \frac{\beta_1 S_1(I_1 + \bar{I}_2)}{S_1 + I_1 + \bar{S}_2 + \bar{I}_2} - b_1 S_1 + d_1 \bar{S}_1 - \mu S_1 + (\delta_0(1 - u_1) + \delta_1 u_1)I_1, \tag{3.1}$$

$$\frac{d\bar{I}_1}{dt} = b_1 I_1 - d_1 \bar{I}_1 + \frac{\beta_2 \bar{S}_1(\bar{I}_1 + I_2)}{\bar{S}_1 + \bar{I}_1 + S_2 + I_2} - (\delta_0(1 - u_2) + \delta_1 u_2)\bar{I}_1, \tag{3.2}$$

$$\frac{dS_2}{dt} = A_2 - \frac{\beta_2 S_2(\bar{I}_1 + I_2)}{S_2 + I_2 + \bar{S}_1 + \bar{I}_1} - b_2 S_2 + d_2 \bar{S}_2 - \mu S_2 + (\delta_0(1 - u_2), \tag{3.3}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{\beta_2 S_2(\bar{I}_1 + I_2)}{S_2 + I_2 + \bar{S}_1 + \bar{I}_1} - (\delta_0(1 - u_2) + \delta_1 u_2)I_2 - b_2 I_2. \tag{3.4}$$



Gambar 3.1: Sudut δ

Gambar 3.1 memperlihat sudut antara 2 bidang.

DAFTAR REFERENSI

Diekmann, O. & Heesterbeek, J. (2000). *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analisis and Interpretation* (1 ed.). John Wiley and Sons.

Driescche, P. & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Math Biosci*, 98(2), 97–112.

Lenhart, S. adn Workman, J. (2007). *Optimal Control Applied to Biological Models* (1 ed.). Chapman & Hall.

Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology* (1 ed.). Springer.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Perhatikan penurunan model berikut.