Methoden der Algorithmik WS1011
Prof. Dr. Michael Kaufmann

Christian Kniep

November 11, 2010

1 Vorlesung 10.11.2010

1.1 Wiederholung

- Anzahl sättigende Pushes : $\leq n * m$
- Anzahl nichtsättigende Pushes : $\leq O(n^2 * m)$
- Anzahl Relabel: $\leq 2n$

1.2 Lemma

Wir haben höchstens $\leq O(n^2 * m)$ nichtsättigende Pushes .

1.3 Beweis

Benutzen Potentialfunktion $\phi = \sum_{v \in A} d(v)$.(A=Menge aller aktiven Knoten)
Da $|A| \leq n, d(v) \leq$ für alle $v\ inV$ und $\phi \leq 2n^2$ anfangs.
Am Ende ist $\phi = 0$.

1. **Relabel**
   ϕ steigt um $\leq \epsilon$, wenn d(v) um ϵ steigt.
   Insgesamt steigt d(v) um $\leq 2n$, also insgesamt steigt ϕ um $\leq 2n^2$.

2. **sättigende Pushes**
   Diese erzeugen über (v,w) vtl. neuen Überfluss an w, w wird somit aktiv, ϕ steigt um $d(w) \leq 2n$. Also steigt ϕ durch sättigende Pushes um $\leq 2n^2 * m$.

3. **nichtsättigende Pushes**
   ϕ wird um d(v) erniedrigt, evtl. jedoch noch um d(w) erhöht, falls w vorher nicht aktiv war.
   Es gilt jedoch $d(v) \geq d(w) + 1 \Rightarrow \phi$ erniedrigt sich um ≥ 1.

Insgesammt:
Erhöhung von ϕ von $\leq 2n^2$ um $2n^2 + 2n^2 * m$ und k Erniedrigungen von ϕ um ≥ 1,
führen zusammen zu 0-Potential.
$\Rightarrow k = O(n^2 * m), k = \#$ nichtsättigende Pushes

1.4 Satz

Der generische Preflow-Push-Algorithmus läuft in $O(n^2 * m)$.

1.5 Varianten

Wahl der aktiven Knoten.

1. **FIFO**
   Warteschlange aktiver Knoten $O(n^3)$

2. **Highest Label**
   'höchster' Knoten im Netz $O(n^2\sqrt{m})$

3. **Excess Scaling**
   'höchster' Füllstand zuerst $O(n * m + logc)$, c=grösste Kapazität

1.6 FIFO

1.6.1 Regel

Wende Push/Relabel solange auf denselben Knoten an, bis entweder e(v)=0 oder Relabel-Operation angewendet wurde.
DIe Liste der Knoten wird als FIFO-Queue gehalten.
Wird v relabelt, wird es hinten wieder angefügt.

1.6.2 Phasen

Arbeiten die Liste ab, bis um ersten Mal ein Knoten erscheint, der an dieser Phase schon teilgenommen hat.

1.6.3 Behauptung

Es gibt $\leq 4n^2 + 2n$ Phasen

1.6.4 Beweis

Betrachte jeweils die Änderung der Potentialfunktion.
$\phi = max\{d(v)|vistaktiv\}$

1. **Fall 1**
   Während einer Phase gibt es mindestens eine Relabel-Operation.
   ϕ steigt höchstens so viel wie der d-Wert max. (?). $\Rightarrow \phi$ steigt in solchen Fällen um $\leq 2n^2$.

2. **Fall 2**
   Alle aktiven Knoten mit max. Distanz werden inaktiv, der maximale Distanzwert sinkt um mindestens 1.

Insgesamt gibt es also $\leq \underbrace{n + 2n^2 + (n + 2n^2)}_{2n+4n^2}$ Pushes.

1.6.5 Satz

Der FIFO-Preflow-Push-Algorithmus läuft in $O(n^3)$

1.7 Highest-Label

1.7.1 Regel

Schicke immer Fluss von einem aktiven Knoten mit höchstem Distanzwert.

1. Es gibt $O(n^3)$ nichtsättigende Pushes .
   Sei $h = max\{d(v)|vaktiv\}$
   Zuerst werden aktive Knoten v mit $d(v) = h$ betrachtet,
   dann $h - 1, h - 2, usw.$ Bei Relabelings fängt das ganze neu an.
   Es gibt jedoch nur $\leq 2n^2$ Relabelings.
   Gibt es n nichtsättigende Pushes hintereinander, dann sind wir fertig.
   Alle Knoten sind dann inaktiv.

Wie findet man aktive Knoten mit höchstem DIstanzlabel?
Halten Liste $(k) = v|vaktivundd(v) = k.$
Merken max. Index der den höchsten d-Wert angibt. Betrachte Listen (max), Listen $(max - 1)$, usw...
Relabel erhöht max.

1.8 Satz

Der Highest-Label-Preflow-Push macht $O(n^2\sqrt{m}$ nichtsättigende Pushes und hat somit $O(n^3)$ Gesamtlaufzeit.