Numeric Cheat Sheet

Zerlegung

Cholesky

Die Cholesky-Zerlegung erstellt eine Matrix G und G^T, so dass folgendes gilt:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ g_{gk1} & \cdots & g_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{k1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & g_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Formeln

$g_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$$g_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{kj}^2}$$

$$g_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{ij} g_{kj}}{g_{kk}}$$

Herleitung

$$\begin{pmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ & g_{22} & g_{32} \\ & & g_{33} \end{pmatrix}$$

$G \cdot G^T$ ist symetrisch:

$$\begin{pmatrix} g_{11}^2 & & \\ g_{11}g_{21} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{11}g_{31} & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
g_{11}^2 &= a_{11} \Rightarrow g_{11} = \sqrt{a_{11}} \\
g_{11}g_{21} &= a_{21} \Rightarrow g_{21} = a_{21}/g_{11} \\
g_{11}g_{31} &= a_{31} \Rightarrow g_{31} = a_{31}/g_{11} \\
g_{22}^2 g_{21}^2 &= a_{22} \Rightarrow g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2} \\
g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} &= a_{32} \Rightarrow g_{32} = (a_{32} - g_{31}g_{21})/g_{22} \\
g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 &= a_{33} \Rightarrow g_{33} = \sqrt{a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2}
\end{aligned}$$

LR ohne Pivot

Die LR-Zerlegung ist im Grunde ein Gauss, bei welchem die Umformungen von einer Matrix A nach R in einer Matrix L gespeichert werden.
Anschliessend werden folgende LGS gelöst:

$$\begin{aligned} LRx &= b \\ Lc &= b \\ Rx &= c \end{aligned}$$

2x2 Beispiel

$$\begin{array}{c} I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \quad II' = II - \frac{6}{3} I = II - 2I, l_{21} = 2$$

$$\begin{array}{c} I \\ II' \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit gilt dann: $A = LR = \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix}$

3x3 Beispiel

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} II' &= II - \tfrac{6}{3} I = II - 2I, l_{21} = 2 \\ III' &= III - \tfrac{9}{3} I = III - 3I, l_{31} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} I \\ II' \\ III' \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad III'' = III' - \tfrac{4}{2} II', l_{32} = 2$$

$$\begin{array}{c} I \\ II' \\ III'' \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

LR mit Pivot

Wird zusätzlich eine Pivotwahl vorgenommen, so wird die Wahl in einer Permutationsmatrix zwischengespeichert. Dann wird es irgendwie ziemlich hässlich, da sowohl b und x auch permutiert werden müssen.

$$\begin{aligned} LRx &= Pb \\ Lc &= Pb \\ Rx &= c \end{aligned}$$

Eliminieren R, merke L

$$\begin{aligned} r'_{ik} &= r_{ik} - l_{ik} r_{i-1,k} \\ l_{ik} &= \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \end{aligned}$$

3x3 Beispiel

LR-Zerlegung

Count	L R	P
I II III	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
III II I	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$
III II I	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ \frac{2}{3} & 6 & 3 \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$
III II I	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 2/3 & -2/3 & -1 \\ 1/3 & -4/3 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$
III I II	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 1/3 & -4/3 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$
III I II	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 1/3 & -4/3 & -1 \\ 2/3 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$

LGS

$Lc = Pb$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/3 & 1 & \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/3 & 1 & \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2 \\
\hline
\tfrac{1}{3} c_1 + c_2 &= 3 \\
\tfrac{2}{3} + c_2 &= 3 \\
c_2 &= \tfrac{7}{3} \\
\hline
\tfrac{2}{3} c_1 + \tfrac{1}{2} c_2 + c_3 &= 1 \\
\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{2} \tfrac{7}{3} + c_3 &= 1 \\
c_3 &= 1 - \tfrac{8}{6} - \tfrac{7}{6} \\
c_3 &= 1 - \tfrac{15}{6} \\
c_3 &= -\tfrac{9}{6} = \tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

$Rx = c$

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ & -4/3 & -1 \\ & & -1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 7/3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
-1/2 \cdot x_3 &= 3/2 \\
x3 &= 3/2 \cdot -2 = 3 \\
\hline
-4/3 \cdot x_2 - x_3 &= 7/3 \\
+4/3 \cdot x_2 + 3 &= -7/3 \\
+4/3 \cdot x_2 &= -7/3 - 3 \\
x_2 &= -16/3 \cdot 3/4 = -4 \\
\hline
9 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 6x_3 &= 2 \\
9 \cdot x_1 + -40 + 18 &= 2 \\
9 \cdot x_1 + -22 &= 2 \\
9 \cdot x_1 &= 24 \\
x_1 &= 24/9 = 8/3
\end{aligned}$$

Interpolationspolynomen

Newton

In der Newton-Darstellung entsteht ein Polynom dessen Koeffizienten durch divergierten Differenzen definiert sind. Die Polynome sind die Newton-Polynome $w_i(x)$.
$p(x) = f[x_0]w_0(x) + f[x_0, x_1]w_1(x) + ... + f[x0, ..., x_n]w_n(x)$

Newton-Polynome

Die Newton-Polynome haben alle folgende Form:

$$w_i(x) = \sum_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

dividierte Differenzen

$$\begin{aligned}
f[x_i] &= f_i \\
f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_n} \\
f[x_0, ..., x_n] &= \frac{f[x_0, ..., x_{n-1}] - f[x_1, ..., x_n]}{x_0 - x_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
f_0 := f[x_0] & & & & \\
& \searrow & & & \\
f_1 := f[x_1] & \rightarrow & f[x_0, x_1] & & \\
& \searrow & & \searrow & \\
f_2 := f[x_2] & \rightarrow & f[x_1, x_2] & \rightarrow & f[x_0, ..., x_2]
\end{array}$$

Lagrange

Die Lagrange-Darstellung besteht aus den Stützwerten als Koeffizienten und den Lagrange-Polynomen.
$p(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + ... + f_n L_n(x)$

Lagrange-Polynome

$$L_i(x) = \sum_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j}$$

Nullstellen durch Fixpunktiteration

Rekursivität

Durch rekursives Ausführen ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} & x_0 = x_0 \\ & x_1 = f(x_0) \\ & x_2 = f(f(x_0)) = f \circ f(x_0) = f^2(x_0) \\ & \vdots \\ & x_n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ ... \circ f}_{n \text{ n-mal}}(x_0) = f^n(x_0) \end{aligned}$$

Iterationsverfahren

Um ein Iterationsverfahren durchzufhren, wird $f(x)$ auf null gesetzt und in zwei Funktionen F_1 und F_2 aufgeteilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - e^{-x} \\ 0 &= 2x - e^{-x} \\ e^{-x} &= 2x \\ F_1(x) &= \frac{e^{-x}}{2} \\ F_2(x) &= -ln(2x) \end{aligned}$$

Test

Um zu testen, ob alles geklappt hat, werden die Funktionen $F_{1,2}$ in einander eingesetzt. Kommt x heraus, ist alles in Butter.

Kontraktion

Eine Funktion $f : R^n \to R^n$ heit kontrahierend, wenn fr alle $x, y \in R^n$ gilt:
$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, 0 < c < 1$

MWS

$f(b) - f(a) = f^{'}(c)(b - a)$

Quadraturformel

b_i sind die Gewichte und geben in der Summe 0. Ferner sind sie symetrisch, also ist $b_0 = b_n, b_1 = b_{n-1}, ...$
Die c_i sind die jeweiligen Knoten der Quadraturformel. (Was auch immer das heisst) $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{s} b_i f(a+c_i(b-a))$

Rechteckregel:	$s = 1$	$b_1 = 1$	$c_1 = 0$
Mittelpunktregel:	$s = 1$	$b_1 = 1$	$c_1 = \frac{1}{2}$
Trapezregel:	$s = 2$	$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$	$c_1 = 0, c_2 = 1$
Simponregel:	$s = 3$	$b_{1,2} = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{4}{6}$	$c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = 1$

relativer Fehler

Der Relative Fehler wird aus folgender Formel hergeleitet:
$|\frac{f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(x,y)}{f(x,y)}|$

Beispiel

$$\begin{aligned} & \tilde{x} = x(1 + E_x), \tilde{y} = y(1 + E_y), (|E_x|, |E_y|) \leq EPS \\ & f(x, y) = \frac{x}{y} \\ & |\frac{f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(x,y)}{f(x,y)}| \\ & |\frac{\frac{x(1+E_x)}{y(1+E_y)} - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}| \\ & = |\frac{1(1+E_x)}{1(1+E_y)} - 1| = |\frac{1+E_x}{1+E_y} - \frac{1+E_y}{1+E_y}| \\ & = |\frac{E_x - E_y}{1+E_y}| \leq \frac{|E_x|+|E_y|}{|1+E_y|} \leq \frac{2EPS}{|1+E_y|} \end{aligned}$$

$Revision: 0.9 $, $Date: 2010/07/18$.