Numeric Cheat Sheet

Zerlegung

Cholesky

Die Cholesky-Zerlegung erstellt eine Matrix G und G^T, so dass folgendes gilt:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ g_{gk1} & \cdots & g_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{k1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & g_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Formeln

$g_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$$g_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{kj}^2}$$

$$g_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{ij} g_{kj}}{g_{kk}}$$

Herleitung

$$\begin{pmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ & g_{22} & g_{32} \\ & & g_{33} \end{pmatrix}$$

$G \cdot G^T$ ist symetrisch:

$$\begin{pmatrix} g_{11}^2 & & \\ g_{11}g_{21} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{11}g_{31} & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= a_{11} \Rightarrow g_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ g_{22}^2 g_{21}^2 &= a_{22} \Rightarrow g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2} \\ g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 &= a_{33} \Rightarrow g_{33} = \sqrt{a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2} \\ \hline g_{11}g_{21} &= a_{21} \Rightarrow g_{21} = a_{21}/g_{11} \\ g_{11}g_{31} &= a_{31} \Rightarrow g_{31} = a_{31}/g_{11} \\ \hline g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} &= a_{32} \Rightarrow g_{32} = (a_{32} - g_{31}g_{21})/g_{22} \end{aligned}$$

LR ohne Pivot

Die LR-Zerlegung ist im Grunde ein Gauss, bei welchem die Umformungen von einer Matrix A nach R in einer Matrix L gespeichert werden.
Anschliessend werden folgende LGS gelöst:

$$\begin{aligned} LRx &= b \\ Lc &= b \\ Rx &= c \end{aligned}$$

2x2 Beispiel

$$\begin{matrix} I \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \quad II' = II - \tfrac{6}{3} I = II - 2I, l_{21} = 2$$

$$\begin{matrix} I \\ II' \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit gilt dann: $A = LR = \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix}$

3x3 Beispiel

$$\begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} II' &= II - \tfrac{6}{3} I = II - 2I, l_{21} = 2 \\ III' &= III - \tfrac{9}{3} I = III - 3I, l_{31} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} I \\ II' \\ III' \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad III'' = III' - \tfrac{4}{2} II', l_{32} = 2$$

$$\begin{matrix} I \\ II' \\ III'' \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

LR mit Pivot

Wird zusätzlich eine Pivotwahl vorgenommen, so wird die Wahl in einer Permutationsmatrix zwischengespeichert.
Dann wird es irgendwie ziemlich hässlich, da sowohl b und x auch permutiert werden müssen.

$$\begin{aligned} LRx &= Pb \\ Lc &= Pb \\ Rx &= c \end{aligned}$$

Eliminieren R, merke L

$$\begin{aligned} r'_{ik} &= r_{ik} - l_{ik} r_{i-1,k} \\ l_{ik} &= \tfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \end{aligned}$$

3x3 Beispiel

LR-Zerlegung

Count	L R	P
$\begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{matrix} III \\ II \\ I \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$
$\begin{matrix} III \\ II \\ I \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ \frac{2}{3} & 6 & 3 \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$
$\begin{matrix} III \\ II \\ I \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 2/3 & -2/3 & -1 \\ 1/3 & -4/3 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$
$\begin{matrix} III \\ I \\ II \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 1/3 & -4/3 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$
$\begin{matrix} III \\ I \\ II \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 1/3 & -4/3 & -1 \\ 2/3 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$

LGS

$Lc = Pb$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/3 & 1 & \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/3 & 1 & \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 \\ \hline \tfrac{1}{3} c_1 + c_2 &= 3 \\ \tfrac{2}{3} + c_2 &= 3 \\ c_2 &= \tfrac{7}{3} \\ \hline \tfrac{2}{3} c_1 + \tfrac{1}{2} c_2 + c_3 &= 1 \\ \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{2}\tfrac{7}{3} + c_3 &= 1 \\ c_3 &= 1 - \tfrac{8}{6} - \tfrac{7}{6} \\ c_3 &= 1 - \tfrac{15}{6} \\ c_3 &= -\tfrac{9}{6} = \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$Rx = c$

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ & -4/3 & -1 \\ & & -1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 7/3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -1/2 \cdot x_3 &= 3/2 \\ x3 &= 3/2 \cdot -2 = 3 \\ \hline -4/3 \cdot x_2 - x_3 &= 7/3 \\ +4/3 \cdot x_2 + 3 &= -7/3 \\ +4/3 \cdot x_2 &= -7/3 - 3 \\ x_2 &= -16/3 \cdot 3/4 = -4 \\ \hline 9 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 9 \cdot x_1 + -40 + 18 &= 2 \\ 9 \cdot x_1 + -22 &= 2 \\ 9 \cdot x_1 &= 24 \\ x_1 &= 24/9 = 8/3 \end{aligned}$$

Interpolationspolynomen

Newton

In der Newton-Darstellung entsteht ein Polynom dessen Koeffizienten durch divergierten Differenzen definiert sind.
Die Polynome sind die Newton-Polynome $w_i(x)$.
$p(x) = f[x_0]w_0(x) + f[x_0, x_1]w_1(x) + ... + f[x0, ..., x_n]w_n(x)$

Newton-Polynome

Die Newton-Polynome haben alle folgende Form:
$w_i(x) = \prod j = 0^{i-1}(x - x_j)$

dividierte Differenzen

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f_i \\ f[x_0, x_1] &= \tfrac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_n} \\ f[x_0, ..., x_n] &= \tfrac{f[x_0, ..., x_{n-1}] - f[x_1, ..., x_n]}{x_0 - x_n} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} f_0 := f[x_0] & & & & \\ & \searrow & & & \\ f_1 := f[x_1] & \rightarrow & f[x_0, x_1] & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ f_2 := f[x_2] & \rightarrow & f[x_1, x_2] & \rightarrow & f[x_0, ..., x_2] \end{matrix}$$

Nullstellen mit Newton

hmm

Interpolatino mit Neville-Aitken

So wie die Newton-Herleitung nut mit dieser Formel:
$p(f|x_i) = f_i$
$p(f|x_i,..,x_{i+k}) = \frac{(x-x_i)p(f|x_{i+1},...,x_{i+k})(x)-(x-x_{i+k})p(f|x_i,...,x_{i+k})(x)}{x_{i+k}-x_i}$

Lagrange

Die Lagrange-Darstellung besteht aus den Stützwerten als Koeffizienten und den Lagrange-Polynomen.
$p(x) = f_0L_0(x) + f_1L_1(x) + ... + f_nL_n(x)$

Lagrange-Polynome

$$L_i(x) = \sum_{j=0,i\neq j}^{n} \frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

Nullstellen durch Fixpunktiteration

Rekursivität

Durch rekursives Ausführen ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 \\ x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(f(x_0)) = f\circ f(x_0) = f^2(x_0) \\ &\vdots \\ x_n &= \underbrace{f\circ f\circ f\circ ...\circ f}_{n \text{ n-mal}}(x_0) = f^n(x_0) \end{aligned}$$

Iterationsverfahren

Um ein Iterationsverfahren durchzufhren, wird $f(x)$ auf null gesetzt und in zwei Funktionen F_1 und F_2 aufgeteilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - e^{-x} \\ 0 &= 2x - e^{-x} \\ e^{-x} &= 2x \\ F_1(x) &= \frac{e^{-x}}{2} \\ F_2(x) &= -ln(2x) \end{aligned}$$

Test

Um zu testen, ob alles geklappt hat, werden die Funktionen $F_{1,2}$ in einander eingesetzt. Kommt x heraus, ist alles in Butter.

Kontraktion

Eine Funktion $f : R^n \to R^n$ heit kontrahierend, wenn fr alle $x, y \in R^n$ gilt:
$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|, 0 < c < 1$

MWS

$f(b) - f(a) = f^{'}(c)(b-a)$

Quadraturformel

b_i sind die Gewichte und geben in der Summe 0. Ferner sind sie symetrisch, also ist $b_0 = b_n, b_1 = b_{n-1}, ...$

Die c_i sind die jeweiligen Knoten der Quadraturformel. (Was auch immer das heisst) $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{s} b_i f(a+c_i(b-a))$

Rechteckregel:	$s=1$	$b_1 = 1$	$c_1 = 0$
Mittelpunktregel:	$s=1$	$b_1 = 1$	$c_1 = \frac{1}{2}$
Trapezregel:	$s=2$	$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$	$c_1 = 0, c_2 = 1$
Simponregel:	$s=3$	$b_{1,2} = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{4}{6}$	$c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 1$

relativer Fehler

Der Relative Fehler wird aus folgender Formel hergeleitet:
$|\frac{f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(x,y)}{f(x,y)}|$

Beispiel

$\tilde{x} = x(1+E_x), \tilde{y} = y(1+E_y), (|E_x|, |E_y|) \leq EPS$
$f(x,y) = \frac{x}{y}$
$|\frac{f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(x,y)}{f(x,y)}|$
$|\frac{\frac{x(1+E_x)}{y(1+E_y)} - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}|$
$= |\frac{1(1+E_x)}{1(1+E_y)} - 1| = |\frac{1+E_x}{1+E_y} - \frac{1+E_y}{1+E_y}|$
$= |\frac{E_x - E_y}{1+E_y}| \leq \frac{|E_x|+|E_y|}{|1+E_y|} \leq \frac{2EPS}{|1+E_y|}$

$Revision: 0.9 $, $Date: 2010/07/18$.