Numeric Cheat Sheet

Zerlegung

Cholesky

Die Cholesky-Zerlegung erstellt eine Matrix G und G^T, so dass folgendes gilt:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ g_{gk1} & \cdots & g_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{k1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & g_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Formeln

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$g_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{kj}^2}$$

$$g_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{ij} g_{kj}}{g_{kk}}$$

LR ohne Pivot

Die LR-Zerlegung ist im Grunde ein Gauss, bei welchem die Umformungen von einer Matrix A nach R in einer Matrix L gespeichert werden.
Anschliessend werden folgende LGS gelöst:

$$\begin{aligned} LRx &= b \\ Lc &= b \\ Rx &= c \end{aligned}$$

2x2 Beispiel

$$\begin{array}{c} I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \quad II' = II - \tfrac{6}{3} I = II - 2I, l_{21} = 2$$

$$\begin{array}{c} I \\ II' \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit gilt dann: $A = LR = \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix}$

3x3 Beispiel

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} II' = II - \tfrac{6}{3} I = II - 2I, l_{21} = 2 \\ III' = III - \tfrac{9}{3} I = III - 3I, l_{31} = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} I \\ II' \\ III' \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad III'' = III' - \tfrac{4}{2} II', l_{32} = 2$$

$$\begin{array}{c} I \\ II' \\ III'' \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Interpolationspolynomen

Newton

In der Newton-Darstellung entsteht ein Polynom dessen Koeffizienten durch divergierten Differenzen definiert sind. Die Polynome sind die Newton-Polynome $w_i(x)$.

$$p(x) = f[x_0]w_0(x) + f[x_0, x_1]w_1(x) + ... + f[x0, ..., x_n]w_n(x)$$

Newton-Polynome

Die Newton-Polynome haben alle folgende Form:

$$w_i(x) = \sum_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

dividierte Differenzen

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f_i \\ f[x_0, x_1] &= \tfrac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_n} \\ f[x_0, ..., x_n] &= \tfrac{f[x_0, ..., x_{n-1}] - f[x_1, ..., x_n]}{x_0 - x_n} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} f_0 := f[x_0] & & & & \\ & \searrow & & & \\ f_1 := f[x_1] & \rightarrow & f[x_0, x_1] & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ f_2 := f[x_2] & \rightarrow & f[x_1, x_2] & \rightarrow & f[x_0, ..., x_2] \end{array}$$

Lagrange

Die Lagrange-Darstellung besteht aus den Stützwerten als Koeffizienten und den Lagrange-Polynomen.
$p(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + ... + f_n L_n(x)$

Lagrange-Polynome

$$L_i(x) = \sum_{j=0, i \neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j}$$

Nullstellen durch Fixpunktiteration

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

`$Revision: 0.9 $, $Date: 2010/07/18$.`