Numeric Cheat Sheet

Zerlegung

Cholesky

Die Cholesky-Zerlegung erstellt eine Matrix G und G^T, so dass folgendes gilt:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ g_{gk1} & \cdots & g_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{k1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & g_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Formeln

$g_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$$g_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{kj}^2}$$

$$g_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{ij} g_{kj}}{g_{kk}}$$

LR ohne Pivot

Die LR-Zerlegung ist im Grunde ein Gauss, bei welchem die Umformungen von einer Matrix A nach R in einer Matrix L gespeichert werden.
Anschliessend werden folgende LGS gelöst:

$$\begin{aligned} LRx &= b \\ Lc &= b \\ Rx &= c \end{aligned}$$

2x2 Beispiel

$$\begin{array}{cc} I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \quad II' = II - \tfrac{6}{3} I = II - 2I, l_{21} = 2$$

$$\begin{array}{cc} I \\ II' \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit gilt dann: $A = LR = \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix}$

3x3 Beispiel

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} II' &= II - \tfrac{6}{3} I = II - 2I, l_{21} = 2 \\ III' &= III - \tfrac{9}{3} I = III - 3I, l_{31} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} I \\ II' \\ III' \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad III'' = III' - \tfrac{4}{2} II', l_{32} = 2$$

$$\begin{array}{c} I \\ II' \\ III'' \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

LR mit Pivot

Wird zusätzlich eine Pivotwahl vorgenommen, so wird die Wahl in einer Permutationsmatrix zwischengespeichert.
Dann wird es irgendwie ziemlich hässlich, da sowohl b und x auch permutiert werden müssen.

$$\begin{aligned} LRx &= Pb \\ Lc &= Pb \\ Rx &= c \end{aligned}$$

Eliminieren R, merke L

$$\begin{aligned} r_{ik}' &= r_{ik} - l_{ik} r_{i-1,k} \\ l_{ik} &= \tfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \end{aligned}$$

3x3 Beispiel

Count	L R	P
I II III	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
III II I	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$
III II I	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ \frac{2}{3} & 6 & 3 \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$
III II I	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 2/3 & -2/3 & -1 \\ 1/3 & -4/3 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$
III I II	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 1/3 & -4/3 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$
III I II	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 1/3 & -4/3 & -1 \\ 2/3 & 1/2 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$

Interpolationspolynomen

Newton

In der Newton-Darstellung entsteht ein Polynom dessen Koeffizienten durch divergierten Differenzen definiert sind.
Die Polynome sind die Newton-Polynome $w_i(x)$.
$p(x) = f[x_0]w_0(x) + f[x_0, x_1]w_1(x) + ... + f[x0, ..., x_n]w_n(x)$

Newton-Polynome

Die Newton-Polynome haben alle folgende Form:

$$w_i(x) = \sum_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

dividierte Differenzen

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f_i \\ f[x_0, x_1] &= \tfrac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_n} \\ f[x_0, ..., x_n] &= \tfrac{f[x_0, ..., x_{n-1}] - f[x_1, ..., x_n]}{x_0 - x_n} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lclcl} f_0 := f[x_0] & & & & \\ & \searrow & & & \\ f_1 := f[x_1] & \rightarrow & f[x_0, x_1] & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ f_2 := f[x_2] & \rightarrow & f[x_1, x_2] & \rightarrow & f[x_0, ..., x_2] \end{array}$$

Lagrange

Die Lagrange-Darstellung besteht aus den Stützwerten als Koeffizienten und den Lagrange-Polynomen.
$p(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + ... + f_n L_n(x)$

Lagrange-Polynome

$$L_i(x) = \sum_{j=0, i \neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j}$$

Nullstellen durch Fixpunktiteration

Rekursivität

Durch rekursives Ausführen ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 \\ x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(f(x_0)) = f \circ f(x_0) = f^2(x_0) \\ &\vdots \\ x_n &= \underbrace{f \circ f \circ f \circ ... \circ f}_{n \text{ n-mal}}(x_0) = f^n(x_0) \end{aligned}$$

Iterationsverfahren

Um ein Iterationsverfahren durchzufuhren, wird $f(x)$ auf null gesetzt und in zwei Funktionen F_1 und F_2 aufgeteilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - e^{-x} \\ 0 &= 2x - e^{-x} \\ e^{-x} &= 2x \\ F_1(x) &= \tfrac{e^{-x}}{2} \\ F_2(x) &= -ln(2x) \end{aligned}$$

Test

Um zu testen, ob alles geklappt hat, werden die Funktionen $F_{1,2}$ in einander eingesetzt. Kommt x heraus, ist alles in Butter.

Kontraktion

Eine Funktion $f : R^n \rightarrow R^n$ heit kontrahierend, wenn fr alle $x, y \in R^n$ gilt:
$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, 0 < c < 1$

MWS

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Quadraturformel

b_i sind die Gewichte und geben in der Summe 0. Ferner sind sie symetrisch, also ist $b_0 = b_n, b_1 = b_{n-1}, ...$

Die c_i sind die jeweiligen Knoten der Quadraturformel. (Was auch immer das heisst) $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{s} b_i f(a+c_i(b-a))$

Rechteckregel:	$s=1$	$b_1=1$	$c_1=0$
Mittelpunktregel:	$s=1$	$b_1=1$	$c_1=\frac{1}{2}$
Trapezregel:	$s=2$	$b_1=b_2=\frac{1}{2}$	$c_1=0, c_2=1$
Simponregel:	$s=3$	$b_{1,2}=\frac{1}{6}, b_2=\frac{4}{6}$	$c_1=0, c_2=\frac{1}{2}, c_3=1$

relativer Fehler

Der Relative Fehler wird aus folgender Formel hergeleitet:
$|\frac{f(\tilde{x},\tilde{y})-f(x,y)}{f(x,y)}|$

Beispiel

$\tilde{x}=x(1+E_x), \tilde{y}=y(1+E_y), (|E_x|, |E_y|) \leq EPS$
$f(x,y)=\frac{x}{y}$
$|\frac{f(\tilde{x},\tilde{y})-f(x,y)}{f(x,y)}|$
$|\frac{\frac{x(1+E_x)}{y(1+E_y)}-\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}|$
$=|\frac{1(1+E_x)}{1(1+E_y)}-1|=|\frac{1+E_x}{1+E_y}-\frac{1+E_y}{1+E_y}|$
$=|\frac{E_x-E_y}{1+E_y}| \leq \frac{|E_x|+|E_y|}{|1+E_y|} \leq \frac{2EPS}{|1+E_y|}$