Glasspelet

Delpoäng

För att klara grupp 1, 2 och 3 behövs en lösning som är kvadratisk i N. Huvudidén kommer vara att först hitta vem som har en vinnande strategi för alla $O(N^2)$ intervall. Efter det är det ju enkelt att svara på de Q frågorna, vi behöver bara skriva ut svaret som vi förberäknade i början. För att hitta vem som vinner vid intervallet $[l, r]$ kan vi först hitta vem som vinner vid intervallen $[l + 1, r]$ och $[l, r - 1]$. Den första spelaren har nämligen en vinnande strategi vid $[l, r]$ om och endast om något av de andra två intervallen är giltiga och har den andra spelaren som vinnare. Vi kan nu använda dynamisk programmering för att hitta svaret.
Några implementationsdetaljer dyker även upp, t.ex. måste vi snabbt kunna svara på om ett intervall är giltigt eller inte. Det finns flera sätt att göra det på. Ett sätt är att först hitta för varje index $i \leq N$, det minsta index r_i sådant att intervallet $[i, r_i]$ är giltigt. Vi kan sedan enkelt svara på om ett intervall $[i, j]$ är giltigt eller inte, genom att kolla om $j \geq r_i$. Talen r_i kan vi förberäkna i början. För just de här delpoängsnivåerna går det bra att hitta dem i $O(N^2)$, men det går även att göra det i $O(N)$, vilket krävs för att få full poäng.

Full Poäng

Låt oss börja med delpoängsgrupp 7, vi vill alltså hitta vem som har en vinnande strategi vid hela intervallet $[1, N]$. Huvudtricket för att lyckas med det är följande:

Lemma 1. *Låt T vara det minsta giltiga intervallet på formen $[1 + x, N - x]$, dvs. det minsta giltiga intervallet med samma mittpunkt som hela intervallet. Låt oss kalla T för det kritiska intervallet. Den som har en vinnande strategi vid det kritiska intervallet har även en vinnande strategi vid hela intervallet.*

Proof. Låt oss säga att spelare 2 har en vinnande strategi vid T. Spelare 2 kan nu även vinna hela spelet, genom att spegla det spelare 1 gör. Så om spelare 1 gör ett drag till vänster så gör spelare 2 ett drag till höger, och tvärtom. Intervallet kommer då att krympa lika mycket från båda hållen, tills dess att T uppstår, och eftersom vi antog att spelare 2 hade en vinnande strategi vid T så vinner spelare 2.
Låt oss nu istället anta att spelare 1 har en vinnande strategi vid T. Detta gäller om och endast om spelare 1 har en vinnande stragi vid antingen $[2 + x, N - x]$, eller $[1 + x, N - x - 1]$. Spelare 1 kan nu tvinga ett av dessa intervall att uppstå med hjälp av en liknande speglingsstrategi. Så t.ex. om spelare 1 vill

att $[2+x, N-x]$ ska uppstå, så kan den börja med att ta den vänstraste glassen, och därefter spegla det spelare 2 gör. $\square$

För att lösa problemet behöver vi alltså bara hitta vem som har en vinnande strategi vid det kritiska intervallet T, och det visar sig vara inte alltför svårt. Eftersom T var det minsta intervall på formen $[1+x, N-x]$ är det omöjligt att ta glassar från båda ändarna, så det finns bara högst två olika möjligheter dit spelet kan ta vägen, och vi kan kolla båda för att se vem som vinner.

Nu har vi allt som krävs för att lösa grupp 7, och för att lösa grupp 8 är det mest lite implemtationsdetaljer att ta hand om. Först måste vi snabbt kunna hitta kritiska intervall. Det enklaste sättet att göra det på är att binärsöka, eftersom vi kan kolla i $O(1)$ om ett visst intervall är giltigt. För att se vem som vinner vid det kritiska intervallet kan vi också binärsöka för att hitta det minsta giltiga prefixet och suffixet av T. Den här lösningen har komplexitet $O(N + Q \log N)$. Det går även att undvika binärsökningar genom att förberäkna alla kritiska intervall med två-pekare, och på så sätt bli av med en log-faktor.