



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICA

### ÁLGEBRA MODERNA I

---

## Apuntes Álgebra Moderna I

---

**Profesor:**

**Escobar Gracia**

**César Alberto**

**Alumnos:**

**Ramírez León Christian Yael**

**Silva Sierra Joshua Joaquín**

**5FM1**

---

**23 de diciembre de 2025**



# Índice general

<b>1. Conceptos Previos</b>	<b>1</b>
1.1. Divisibilidad . . . . .	1
1.2. Cardinalidad de conjuntos . . . . .	2
1.3. Enteros Módulo $n$ . . . . .	4
1.4. Función $\varphi$ de Euler . . . . .	5
<b>2. Grupos</b>	<b>7</b>
2.1. Grupos . . . . .	7
2.2. Subgrupos . . . . .	10



# CAPÍTULO 1

## Conceptos Previos

---

### 1.1. Divisibilidad

**Definición 1.1.1** (Divisibilidad). Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ , con  $a \neq 0$ , se dice que  $a|b$  si  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = ak$ .

**Definición 1.1.2** (Máximo Común Divisor). Sea  $a, b \in \mathbb{Z}$ , al menos uno distinto de cero, definimos a  $d \in \mathbb{Z}$  un máximo común divisor de  $a$  y  $b$ , denotado por  $(a, b)$ , si cumple:

- I)  $d > 0$ .
- II)  $d|a$  y  $d|b$ .
- III) Si  $c|a$  y  $c|b$ , entonces  $c|d$ .

**Proposición 1.1.1** (Propiedades de la Divisibilidad). Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , con  $a, b \neq 0$ , entonces:

- I) Si  $a|b$  y  $b|c$ , entonces  $a|c$ .
- II) Si  $a|b$  y  $a|c$ , entonces  $a|(b + c)$ .
- III) Si  $a|b$ , entonces  $a|bk$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .
- IV) Si  $a|b$  y  $b \neq 0$ , entonces  $|a| \leq |b|$ .
- V) Si  $a|b$  y  $b|a$ , entonces  $a = \pm b$ .
- VI) Si  $a|b$ , entonces  $(a, b) = |a|$ .
- VII) Si  $c|a$  y  $c|b$ , entonces  $c = ax + by$  para algunos  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

**Proposición 1.1.2.** Sea  $a, b \in \mathbb{Z}$ , al menos uno distinto de cero, entonces existe un único máximo común divisor de  $a$  y  $b$ .

**Teorema 1.1.1** (Algoritmo de la división). Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ , con  $b > 0$ , entonces existen únicos  $q, r \in \mathbb{Z}$  tales que:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

## 1.2. Cardinalidad de conjuntos

Dado un conjunto  $A$ , se denotará su cardinalidad (número de elementos) como  $|A|$ . Si  $A$  es un conjunto finito, entonces  $|A|$  es un número natural. Si  $A$  es infinito, entonces  $|A| = \infty$ .

**Observación 1.1.** Sean  $A, B$ , conjuntos finitos, con  $B \subseteq A$ . Entonces:

$$|A \setminus B| = |A| - |B|$$

En efecto, basta notar que  $B \cup (A \setminus B) = A$  y que  $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$ , luego  $|A| = |B \cup (A \setminus B)| = |B| + |A \setminus B|$ , así  $|A \setminus B| = |A| - |B|$ .  $\square$

**Observación 1.2.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos finitos, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

En efecto, Sean  $A$  y  $B$  conjuntos finitos, note que:

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$

Además:  $(A \setminus (A \cap B))$ ,  $(B \setminus (A \cap B))$ ,  $(A \cap B)$ , son disjuntos, más aún:

$$\begin{aligned} |A \setminus (A \cap B)| &= |A| - |A \cap B| \\ |B \setminus (A \cap B)| &= |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \setminus (A \cap B)| + |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B| \\ &= |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

$\square$

**Proposición 1.2.1** (Principio de inclusión exclusión). Sean  $A_1, \dots, A_n$  conjuntos finitos, se tiene:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

**Observación 1.3.** Suponga que  $C_1$  es la condición que cumplen los elementos  $A$  y  $C_2$  los de  $B$ , i.e.:

$$A = \{x \in \Omega : x \text{ cumple } C_1\}$$

$$B = \{x \in \Omega : x \text{ cumple } C_2\}$$

Denotemos  $N(C_i)$  a la cantidad de elementos que cumplen  $C_i$ ,  $N(C_1, C_2)$  a los que cumplen ambas,  $N(\bar{C}_i)$  a los que no cumplen y  $N(\bar{C}_1, \bar{C}_2)$  los que no cumplen  $C_1$  ni  $C_2$ , entonces:

$$N(\bar{C}_1, \bar{C}_2) = |\Omega| - (N(C_1) + N(C_2) - N(C_1, C_2))$$

En efecto, Note que:

$$\begin{aligned} N(\bar{C}_1, \bar{C}_2) &= |A^c \cap B^c| = |(A \cup B)^c| = |\Omega \setminus (A \cup B)| = |\Omega| - |A \cup B| \\ &= |\Omega| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\ &= |\Omega| - (N(C_1) + N(C_2) - N(C_1, C_2)) \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 1.1.** Sea  $\Omega = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 1000\}$  ¿Cuántos enteros de estos no son divisibles por 3 o 5?

*Sol.* Consideremos:

$C_1 : x$  sea divisible por 3

$C_2 : x$  sea divisible por 5

Así  $N(C_1) = 333$ ,  $N(C_2) = 200$ ,  $N(C_1, C_2) = 66$ .

Luego:

$$\begin{aligned} N(\bar{C}_1, \bar{C}_2) &= |\Omega| - (N(C_1) + N(C_2) - N(C_1, C_2)) \\ &= 1000 - (333 + 200 - 66) \\ &= 533 \end{aligned}$$

Sea  $A_1, \dots, A_n$  una colección finita de conjuntos finitos, definidos:

$$A_i = \{x \in \Omega : x \text{ cumpla } C_i\}, \quad C_i \text{ condición.}$$

Definamos de este modo:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= N(C_1) + \cdots + N(C_n) \\
 S_2 &= N(C_1, C_2) + \cdots + N(C_1, C_n) + N(C_2, C_3) + \cdots + N(C_{n-1}, C_n) \\
 &\vdots \\
 S_i &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} N(C_{j_1}, \dots, C_{j_i}) \\
 &\vdots \\
 S_n &= N(C_1, \dots, C_n)
 \end{aligned}$$

Por el principio de inclusión exclusión generalizado:

$$N(\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_n) = |\Omega| - (S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n)$$

### 1.3. Enteros Módulo $n$

**Definición 1.3.1.** Sea  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 1$ , se define la relación de  $a \sim b$  si y sólo si  $n \mid (a - b)$ , es decir,  $a$  es congruente con  $b$  módulo  $n$ .

Es fácil ver que esta es una relación de equivalencia en  $\mathbb{Z}$ . Ahora, definamos en el conjunto cociente  $(\mathbb{Z}/\sim)$  las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
 \bar{a} + \bar{b} &= \overline{a + b} \\
 \bar{a} \cdot \bar{b} &= \overline{a \cdot b}
 \end{aligned}$$

Con  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Entonces las operaciones están bien definidas, i.e., no dependen del representante de clase.

En efecto, sea  $\bar{a} = \bar{a}_1$ ,  $\bar{b} = \bar{b}_1 \iff a \sim a_1$  y  $b \sim b_1 \iff n \mid (a - a_1) \wedge n \mid (b - b_1)$ .

Esto implica:

$$n \mid (a - a_1) + (b - b_1) = (a + b) - (a_1 + b_1) \iff (a + b) \sim (a_1 + b_1) \iff \overline{a + b} = \overline{a_1 + b_1}$$

Análogamente para el producto.

□

Al conjunto de clases de equivalencia módulo  $n$  junto con las operaciones definidas se les denotará por  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{Z}_n$ .



## 1.4. Función $\varphi$ de Euler

**Definición 1.4.1** (Función  $\varphi$  de Euler). *Definimos la función  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  como:*

$$n \mapsto |\{a \in \mathbb{N} : (a, n) = 1 \wedge a \leq n\}|$$

**Proposición 1.4.1.** *Sean  $p, q \in \mathbb{Z}^+$  primos distintos:*

- I)  $\varphi(p) = p - 1$
- II)  $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1), \quad k \in \mathbb{N}$
- III)  $\varphi(p^k q^t) = \varphi(p^k) \cdot \varphi(q^t), \quad k, t \in \mathbb{N}$

*Demostración.* .

I) Es evidente.

II) Sea  $\Omega = \{x \in \mathbb{N} : x \leq p^k\}$ , sea  $a \in \Omega$  tal que  $(a, p^k) \neq 1$ .

Así  $(a, p) \neq 1$ , más aún  $a = pl$  para algún  $l \in \mathbb{N}$ . Luego, como  $a \in \Omega$ ,  $a = pl \leq p^k$ , por lo cual  $l \leq p^{k-1}$ . De este modo:

$$|\{a \in \Omega : p \mid a\}| = |\{a \in \Omega : a = pl, l \in \mathbb{N}\}| = |\{l \in \mathbb{N} : l \leq p^{k-1}\}| = p^{k-1}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \varphi(p^k) &= |\{a \in \Omega : (a, p^k) = 1\}| \\ &= |\Omega| - |\{a \in \Omega : p \mid a\}| \\ &= p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1) \end{aligned}$$

III) Consideremos  $\Omega = \{x \in \mathbb{N} : x \leq p^k q^t, k, t \in \mathbb{N}\}$ ,  $A = \{a \in \Omega : p \mid a\}$  y  $B = \{b \in \Omega : q \mid b\}$ .

Ahora  $A \cap B = \{a \in \Omega : p \mid a \wedge q \mid a\}$ . Note que de manera análoga a ii), tenemos:

$$|A| = p^{k-1} q^t, \quad |B| = p^k q^{t-1}$$

Por otro lado si  $a \in A \cap B$ , tenemos  $p \mid a \wedge q \mid a \implies \exists l \in \mathbb{N}$  tal que  $a = pql$ . Además como  $pql = a \leq p^k q^t$ , se sigue que  $l \leq p^{k-1} q^{t-1}$ , por lo cual:

$$|A \cap B| = p^{k-1} q^{t-1}$$

Por último, sabemos que  $\varphi(p^k q^t) = |\{a \in \Omega : (a, p^k q^t) = 1\}|$ . Por la proposición 1.2.1 tenemos:

$$\begin{aligned}
 \varphi(p^k q^t) &= |\Omega| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\
 &= p^k q^t - p^{k-1} q^t - p^k q^{t-1} + p^{k-1} q^{t-1} \\
 &= q^t (p^k - p^{k-1}) - q^{t-1} (p^k - p^{k-1}) \\
 &= (p^k - p^{k-1})(q^t - q^{t-1}) \\
 &= [p^{k-1}(p - 1)][q^{t-1}(q - 1)] \\
 &= \varphi(p^k) \cdot \varphi(q^t)
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.2.** Sean  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$  primos distintos, sean  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ :

$$\begin{aligned}
 \varphi(p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}) &= p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \\
 &= \varphi(p_1^{k_1}) \dots \varphi(p_n^{k_n})
 \end{aligned}$$

*Demostración.* Falta demostrar.

□

**Observación 1.4.** Observe que dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , tales que  $(m, n) = 1$ , entonces:

$$\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$$

*En efecto,* Por el teorema fundamental de la aritmética, podemos expresar  $n = p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l}$ ,  $m = q_1^{t_1} \dots q_r^{t_r}$ , con  $p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_r \in \mathbb{N}$  primos distintos y  $k_1, \dots, k_l, t_1, \dots, t_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , así:

$$\begin{aligned}
 \varphi(n \cdot m) &= \varphi(p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l} q_1^{t_1} \dots q_r^{t_r}) \\
 &= \varphi(p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l}) \cdot \varphi(q_1^{t_1} \dots q_r^{t_r}) \\
 &= \varphi(n) \cdot \varphi(m)
 \end{aligned}$$

□

# CAPÍTULO 2

## Grupos

---

### 2.1. Grupos

**Definición 2.1.1** (Grupo). *Un grupo es un conjunto no vacío  $G$  junto con una operación  $\circ : G \times G \rightarrow G$ , que satisface:*

- I) *font Asociatividad:*  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall a, b, c \in G$
- II) *font Elemento neutro:*  $\exists e \in G : a \circ e = a \quad \forall a \in G$
- III) *font Inverso:*  $\forall a \in G \quad \exists b \in G : a \circ b = e$

Se denota a esta estructura:  $(G, \circ, e)$ , en caso de no conocer la identidad  $(G, \circ)$ . Además, para facilitar la notación el inverso de  $a$  elemento de un grupo se denota como  $a^{-1}$ .

**Ejemplo 2.1.** *Sea  $\mathbb{Z}$ , y la suma usual en los números enteros, es claro que es un grupo.*

**Ejemplo 2.2.**  $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{C}, +)$  son grupos.

**Ejemplo 2.3.**  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  es un grupo.

*En efecto,* Anteriormente se había probado que  $+$  es cerrado y está bien definida  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ .

- I)  $+$  es asociativa, pues:

$$\bar{a} + \overline{(b + c)} = \overline{a + (b + c)} = \overline{(a + b) + c} = \overline{(a + b)} + \bar{c}$$

- II) Note que la identidad es  $\bar{0}$ , ya que:

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

III) Ahora dado  $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , note que  $a + (-a) = 0$ , luego:

$$\begin{aligned}\overline{a + (-a)} &= \bar{0} \\ \bar{a} + \overline{(-a)} &= \bar{0}\end{aligned}$$

$$\text{Así } \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \exists \overline{(-a)} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \bar{a} + \overline{(-a)} = \bar{0}.$$

□

**Ejemplo 2.4.** Sean  $A$  un conjunto no vacío, sea  $V$  un espacio vectorial, sea  $\mathcal{H}$  el conjunto de funciones  $f : A \rightarrow V$ , definamos la operación suma sobre  $\mathcal{H}$  como:

$$\begin{aligned}+ : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ (f + g)(a) &\mapsto f(a) + g(a) \quad \forall a \in A\end{aligned}$$

En efecto, note:

I) Sean  $f, g, h \in \mathcal{H}$ , sea  $a \in A$ :

$$\begin{aligned}[(f + g) + h](a) &= (f + g)(a) + h(a) \\ &= (f(a) + g(a)) + h(a) \\ &= f(a) + (g(a) + h(a)) \\ &= f(a) + (g + h)(a) \\ &= [f + (g + h)](a)\end{aligned}$$

$$\therefore (f + g) + h = f + (g + h)$$

II) Tenemos  $\underline{0} \in \mathcal{H}$ , definida por:  $\underline{0}(a) = 0 \quad \forall a \in A$ , sea  $f \in \mathcal{H}$ , sea  $a \in A$ ,

$$(f + \underline{0})(a) = f(a) + \underline{0}(a) = f(a) + 0 = f(a)$$

Así  $f + \underline{0} = f$ , i.e.  $\underline{0}$  es el elemento neutro.

III) Sea  $f \in \mathcal{H}$ , sea  $a \in A$ , note que existe  $-f(a)$ , tal que:

$$f(a) + (-f(a)) = 0 \quad \forall a \in A,$$

entonces  $-f$  es inverso de  $f$ .

□

**Ejemplo 2.5.** Sea  $V$  un espacio vectorial real, entonces  $(V, +)$  es un grupo.

**Ejemplo 2.6.**  $(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), +)$  es un grupo.

**Ejemplo 2.7.** Sea  $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ , con el producto de matrices forma un grupo.

**Ejemplo 2.8.** Considere  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , sea  $G \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , el conjunto

$$G = \{\bar{a} : (a, n) = 1\}$$

entonces  $(G, \cdot)$  con la op. definida por el producto de clases es un grupo.

En efecto, Note:

$$\text{I) } \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in G, \quad \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c}) = \bar{a}(\overline{b \cdot c}) = \overline{a(b \cdot c)} = \overline{(ab)c} = \overline{(ab)} \cdot \bar{c} = (\bar{a}\bar{b})\bar{c}.$$

$$\text{II) } \bar{1} \in G, \text{ pues } (1, n) = 1, \text{ además } \forall \bar{a} \in G \quad \bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a}.$$

III) Sea  $\bar{a} \in G$ , entonces  $(a, n) = 1$ , por tanto  $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ , tal que:

$$ax + ny = 1$$

Tomando la clase:

$$\bar{1} = \overline{ax + ny} = \overline{ax} + \overline{ny} = \bar{a}\bar{x} + \bar{n}\bar{y} = \bar{a}\bar{x} + \bar{0}\bar{y} = \bar{a}\bar{x} + \bar{0} = \bar{a}\bar{x}$$

i.e. existe  $\bar{x} \in G$ , tal que  $\bar{a} \cdot \bar{x} = 1$ .

□

**Proposición 2.1.1.** Sea  $(G, \circ)$  un grupo, sea  $g \in G$  tal que  $g \circ g = g$  entonces  $g = e$ .

*Demostración.* Como  $g \in G \implies \exists g' \in G$  tal que  $g \circ g' = e$ , luego:

$$g = g \circ e = g \circ (g \circ g') = (g \circ g) \circ g' = g \circ g' = e$$

□

**Proposición 2.1.2.** Sea  $(G, \circ)$  grupo,  $g \in G$ , entonces:

$$g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$$

*Demostración.*

$$(g^{-1} \circ g) \circ (g^{-1} \circ g) = (g^{-1} \circ (g \circ g^{-1})) \circ g = (g^{-1} \circ e) \circ g = g^{-1} \circ g$$

Luego por la prop. anterior:

$$g^{-1} \circ g = e, \quad \text{i.e. } g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$$

□

**Proposición 2.1.3.** Si  $(G, \circ)$  es un grupo y  $g \in G$ , entonces:

$$e \circ g = g \circ e = g$$

*Demostración.*

$$e \circ g = (g \circ g^{-1}) \circ g = g \circ (g^{-1} \circ g) = g \circ e = g = g \circ e$$

□

**Proposición 2.1.4.** *Sea  $(G, \circ)$  un grupo, el elemento neutro  $e$ , es único.*

*Demostración.* Supongamos que existe  $e' \in G$  tal que  $g \circ e' = g$ ,  $\forall g \in G$ , en particular:

$$e = e \circ e' = e' \circ e = e', \quad \text{i.e. } e \text{ es único.}$$

□

**Ejemplo 2.9.** *Sea  $G_1 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , sea  $G_2 = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : (a, n) = 1\}$ , entonces se tienen los grupos:  $(G_1, +, \bar{0})$ ,  $(G_2, \cdot, \bar{1})$ , es claro que no son iguales ya que:  $|G_1| = n$ ,  $|G_2| = \varphi(n)$ .*

**Proposición 2.1.5.** *Si  $(G, \circ)$  es un grupo y  $g \in G$ , entonces  $g^{-1}$  es único.*

*Demostración.* Suponga  $g' \in G$  tal que  $g \circ g' = e$ , entonces:

$$g^{-1} = g^{-1} \circ e = g^{-1} \circ (g \circ g') = (g^{-1} \circ g) \circ g' = e \circ g' = g'$$

□

## 2.2. Subgrupos

**Definición 2.2.1** (Subgrupo). *Sea  $(G, \circ, e)$  un grupo, sea  $H \subseteq G$  un subconjunto de  $G$ , diremos que  $H$  es un subgrupo de  $G$ , si con la misma operación  $\circ$ , definida en  $G$ , forma un grupo. Se denotará  $H \leq G$ .*

**Ejemplo 2.10.** *Sea  $(G = \mathbb{Z}, +, 0)$ , para algún  $a \in \mathbb{Z}$ , definamos:*

$$H_a = \{t \in \mathbb{Z} : t = na, n \in \mathbb{Z}\}$$

*entonces  $(H_a, +, 0)$  es un subgrupo de  $G$ .*

*Demostración.* Claramente  $H_a \subseteq G$ , además  $+$  es cerrada en  $H_a$ , pues si  $n_1a, n_2a \in H_a \implies n_1a + n_2a = (n_1 + n_2)a \in H_a$ .

- I)  $+$  es asociativa, porque hereda la asociatividad de  $G$ .
- II)  $0 \in H_a$ , ya que  $0 = 0 \cdot a \in H_a$ , además  $na + 0 = na \quad \forall na \in H_a$ .
- III) Si  $na \in H_a$ , como  $n \in \mathbb{Z} \implies -n \in \mathbb{Z}$ , así  $\exists -na \in H_a \implies na + (-na) = 0$ .

□

**Ejemplo 2.11.** Sea  $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ , entonces  $SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$ , este es llamado el grupo especial lineal.

**Observación 2.1.** Sea  $(G, \circ, e)$  grupo, sea  $H \leq G$ , entonces  $e \in H$ .

En efecto, como  $H \neq \emptyset$ ,  $\exists g \in H$ , además  $\exists g^{-1} \in H$  al ser un subgrupo, así:

$$g \circ g^{-1} = e, \quad \text{i.e. } e \in H.$$

□

**Proposición 2.2.1.** Si  $(G, \circ, e)$  es un grupo y  $\{H_\lambda\}_{\lambda \in I}$  es una colección arbitraria de subgrupos, entonces:

$$\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda, \text{ es un subgrupo de } G.$$

*Demostración.* Como  $H_\lambda \leq G \quad \forall \lambda \in I$ ,  $\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda \neq \emptyset$  pues  $e \in H_\lambda \quad \forall \lambda \in I$ . Sean  $a, b \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$ , entonces  $a, b \in H_\lambda \quad \forall \lambda \in I$ , además  $\circ$  es cerrada en  $\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$ , ya que  $a \circ b \in H_\lambda \quad \forall \lambda \in I$ , así  $a \circ b \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$ . Luego:

- i)  $\circ$  es asociativa en  $\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$ , ya que es asociativa en  $H_\lambda, \forall \lambda \in I$ .
- ii)  $e \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$ .
- iii) Dado que  $a \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$ , entonces  $a \in H_\lambda \forall \lambda \in I$ , así  $\exists a^{-1} \in H_\lambda \forall \lambda \in I$  tal que  $a \circ a^{-1} = e$ , luego  $a^{-1} \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$ .

□

**Proposición 2.2.2.** Sea  $(G, \circ, e)$  un grupo, sean  $H, K \leq G$ , entonces  $H \cup K$  es un subgrupo de  $G$  si y sólo si  $H \subseteq K \vee K \subseteq H$ .

*Demostración.* Será demostrada primero la reciprocidad.

( $\Leftarrow$ ) Basta notar que si  $H \subseteq K$ ,  $H \cup K = K$  y  $K \leq G$ , así  $H \cup K \leq G$ . Análogo si  $K \subseteq H$ .

( $\Rightarrow$ ) Sea  $H \cup K \leq G$ . Supongamos que  $H \not\subseteq K \wedge K \not\subseteq H$ , sean  $a \in H \setminus K$  y  $b \in K \setminus H$ . Sea  $c = a \circ b$ . Como  $H \cup K \leq G$ , entonces  $c \in H \cup K$ , así  $c \in H \vee c \in K$ .

Si  $c \in H \Rightarrow a^{-1} \circ c = b \in H$ , lo cual no puede ser (pues  $b \in K \setminus H$ ). Si  $c \in K \Rightarrow c \circ b^{-1} = a \in K$ , lo cual no puede ser (pues  $a \in H \setminus K$ ).

Por lo cual  $H \subseteq K \vee K \subseteq H$ .

□

**Definición 2.2.2** (Orden de un grupo). Sea  $(G, \circ, e)$  un grupo, el orden del grupo será la cardinalidad de  $G$  y se denota  $|G|$ .

**Definición 2.2.3.** Sea  $(G, \circ, e)$  un grupo, diremos que es un grupo finito si  $G$  es un conjunto finito. En caso contrario se le dice infinito.

**Definición 2.2.4.** Sea  $(G, \circ, e)$  un grupo, sea  $S \subseteq G$ , con  $S \neq \emptyset$ , el grupo generado por  $S$  en  $G$  denotado por  $\langle S \rangle$  es el menor de los subgrupos que lo contiene, i.e.:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{S \subseteq H \\ H \leq G}} H$$

Si  $S$  es finito, y sea  $H = \langle S \rangle$ , diremos que  $H$  es finitamente generado.

**Ejemplo 2.12.** Todo subgrupo finito de  $G$  es finitamente generado, más aún, si  $H \leq G$  y es finito  $\langle H \rangle = H$ .

*Demostración.* Dado que:

$$\langle H \rangle = \bigcap_{\substack{H' \leq G \\ H \subseteq H'}} H' \subseteq H' \quad \forall H' \leq G \text{ tales que } H \subseteq H',$$

además como  $H \leq G$  y  $H \subseteq H$ , entonces  $H$  es uno de los términos de la intersección, así:

$$\langle H \rangle \subseteq H \wedge H \subseteq \bigcap_{\substack{H' \leq G \\ H \subseteq H'}} H' = \langle H \rangle$$

Por lo tanto  $\langle H \rangle = H$ . □

**Ejemplo 2.13.**  $(\mathbb{Z}, +, 1)$  es finitamente generado, basta notar que:

$$\mathbb{Z} = \langle \{1\} \rangle$$

**Ejemplo 2.14.**  $(\mathbb{Q}, +, 1)$ ,  $\mathbb{Q}$  no es finito ni es finitamente generado.