INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemática

Álgebra Moderna I

Apuntes Álgebra Moderna I

Profesor:
Escobar Gracia César Alberto

Alumnos:
Ramírez León Christian Yael
Silva Sierra Joshua Joaquín

5FM1

25 de diciembre de 2025

Índice general

1. Conceptos Previos **1**
1.1. Divisibilidad 1
1.2. Cardinalidad de conjuntos 2
1.3. Enteros Módulo n 4
1.4. Función φ de Euler 4

2. Grupos **7**
2.1. Grupos 7
2.2. Subgrupos 10
2.3. Grupo de permutaciones 14

3. Productos Directos **17**
3.1. Productos Directos 17
3.2. El grupo Simétrico S_n 22

4. Acciones de Grupos **37**
4.1. Acciones de Grupo 37
4.2. Grupos Sylow 48

5. Automorfismos de Grupos **55**
5.1. Automorfismos de Grupos 55

CAPÍTULO 1

Conceptos Previos

1.1. Divisibilidad

Definición 1.1.1 (Divisibilidad). *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$, se dice que $a|b$ si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ak$.*

Definición 1.1.2 (Máximo Común Divisor). *Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, al menos uno distinto de cero, definimos a $d \in \mathbb{Z}$ un máximo común divisor de a y b, denotado por (a, b), si cumple:*

i) $d > 0$.

ii) $d|a$ *y* $d|b$.

iii) *Si* $c|a$ *y* $c|b$, *entonces* $c|d$.

Proposición 1.1.1 (Propiedades de la Divisibilidad). *Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con $a, b \neq 0$, entonces:*

i) *Si* $a|b$ *y* $b|c$, *entonces* $a|c$.

ii) *Si* $a|b$ *y* $a|c$, *entonces* $a|(b + c)$.

iii) *Si* $a|b$, *entonces* $a|bk$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

iv) *Si* $a|b$ *y* $b \neq 0$, *entonces* $|a| \leq |b|$.

v) *Si* $a|b$ *y* $b|a$, *entonces* $a = \pm b$.

vi) *Si* $a|b$, *entonces* $(a, b) = |a|$.

vii) *Si* $c|a$ *y* $c|b$, *entonces* $c = ax + by$ *para algunos* $x, y \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.1.2. *Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, al menos uno distinto de cero, entonces existe un único máximo común divisor de a y b.*

Teorema 1.1.1 (Algoritmo de la división). *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b > 0$, entonces existen únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que:*

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

1.2. Cardinalidad de conjuntos

Dado un conjunto A, se denotará su cardinalidad (número de elementos) como $|A|$. Si A es un conjunto finito, entonces $|A|$ es un número natural. Si A es infinito, entonces $|A| = \infty$.

Observación 1.1. *Sean A, B, conjuntos finitos, con $B \subseteq A$. Entonces:*

$$|A \setminus B| = |A| - |B|$$

En efecto, basta notar que $B \cup (A \setminus B) = A$ y que $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$, luego $|A| = |B \cup (A \setminus B)| = |B| + |A \setminus B|$, así $|A \setminus B = |A| - |B|$. $\square$

Observación 1.2. *Sean A y B dos conjuntos finitos, entonces:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

En efecto, Sean A y B conjuntos finitos, note que:

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$

Además: $(A \setminus (A \cap B))$, $(B \setminus (A \cap B))$, $(A \cap B)$, son disjuntos, más aún:

$$\begin{aligned} |A \setminus (A \cap B)| &= |A| - |A \cap B| \\ |B \setminus (A \cap B)| &= |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \setminus (A \cap B)| + |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B| \\ &= |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.2.1 (Principio de inclusión exclusión). *Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos, se tiene:*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

Observación 1.3. *Suponga que C_1 es la condición que cumplen los elementos A y C_2 los de B, i.e.:*

$$A = \{x \in \Omega : x \text{ cumple } C_1\}$$
$$B = \{x \in \Omega : x \text{ cumple } C_2\}$$

Denotemos $N(C_i)$ a la cantidad de elementos que cumplen C_i, $N(C_1, C_2)$ a los que cumplen ambas, $N(\bar{C}_i)$ a los que no cumplen y $N(\bar{C}_1, \bar{C}_2)$ los que no cumplen C_1 ni C_2, entonces:

$$N(\bar{C}_1, \bar{C}_2) = |\Omega| - (N(C_1) + N(C_2) - N(C_1, C_2))$$

En efecto, Note que:

$$\begin{aligned} N(\bar{C}_1, \bar{C}_2) &= |A^c \cap B^c| = |(A \cup B)^c| = |\Omega \setminus (A \cup B)| = |\Omega| - |A \cup B| \\ &= |\Omega| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\ &= |\Omega| - (N(C_1) + N(C_2) - N(C_1, C_2)) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.1. *Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 1000\}$ ¿Cuántos enteros de estos no son divisibles por 3 o 5?*

Sol. Consideremos:

$$C_1 : x \text{ sea divisible por } 3$$
$$C_2 : x \text{ sea divisible por } 5$$

Así $N(C_1) = 333$, $N(C_2) = 200$, $N(C_1, C_2) = 66$.
Luego:

$$\begin{aligned} N(\bar{C}_1, \bar{C}_2) &= |\Omega| - (N(C_1) + N(C_2) - N(C_1, C_2)) \\ &= 1000 - (333 + 200 - 66) \\ &= 533 \end{aligned}$$

Sea $A_1, \ldots, A_n$ una colección finita de conjuntos finitos, definidos:

$$A_i = \{x \in \Omega : x \text{ cumpla } C_i\}, \quad C_i \text{ condición.}$$

Definamos de este modo:

$$\begin{aligned} S_1 &= N(C_1) + \cdots + N(C_n) \\ S_2 &= N(C_1, C_2) + \cdots + N(C_1, C_n) + N(C_2, C_3) + \cdots + N(C_{n-1}, C_n) \\ &\vdots \\ S_i &= \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq n} N(C_{j_1}, \ldots, C_{j_i}) \\ &\vdots \\ S_n &= N(C_1, \ldots, C_n) \end{aligned}$$

Por el principio de inclusión exclusión generalizado:

$$N(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n) = |\Omega| - \Big(S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n\Big)$$

1.3. Enteros Módulo n

Definición 1.3.1. *Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, se define la relación de $a \sim b$ si y sólo si $n \mid (a-b)$, es decir, a es congruente con b módulo n.*

Es fácil ver que esta es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. Ahora, definamos en el conjunto cociente $(\mathbb{Z}/\sim)$ las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= \overline{a+b} \\ \bar{a} \cdot \bar{b} &= \overline{a \cdot b} \end{aligned}$$

Con $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces las operaciones están bien definidas, i.e., no dependen del representante de clase.

En efecto, sea $\bar{a} = \bar{a}_1$, $\bar{b} = \bar{b}_1 \iff a \sim a_1$ y $b \sim b_1 \iff n \mid (a - a_1) \wedge n \mid (b - b_1)$.

Esto implica:

$$n \mid (a - a_1) + (b - b_1) = (a+b) - (a_1 + b_1) \iff (a+b) \sim (a_1 + b_1) \iff \overline{a+b} = \overline{a_1 + b_1}$$

Análogamente para el producto.

□

Al conjunto de clases de equivalencia módulo n junto con las operaciones definidas se les denotará por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}_n$.

1.4. Función φ de Euler

Definición 1.4.1 (Función φ de Euler)**.** *Definimos la función $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como:*

$$n \mapsto |\{a \in \mathbb{N} : (a, n) = 1 \wedge a \leq n\}|$$

Proposición 1.4.1. *Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$ primos distintos:*

I) $\varphi(p) = p - 1$

II) $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1), \quad k \in \mathbb{N}$

III) $\varphi(p^k q^t) = \varphi(p^k) \cdot \varphi(q^t), \quad k, t \in \mathbb{N}$

Demostración. .

I) Es evidente.

II) Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{N} : x \leq p^k\}$, sea $a \in \Omega$ tal que $(a, p^k) \neq 1$.

Así $(a, p) \neq 1$, más aún $a = pl$ para algún $l \in \mathbb{N}$. Luego, como $a \in \Omega$, $a = pl \leq p^k$, por lo cual $l \leq p^{k-1}$. De este modo:

$$|\{a \in \Omega : p \mid a\}| = |\{a \in \Omega : a = pl, l \in \mathbb{N}\}| = |\{l \in \mathbb{N} : l \leq p^{k-1}\}| = p^{k-1}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \varphi(p^k) &= |\{a \in \Omega : (a, p^k) = 1\}| \\ &= |\Omega| - |\{a \in \Omega : p \mid a\}| \\ &= p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1) \end{aligned}$$

III) Consideremos $\Omega = \{x \in \mathbb{N} : x \leq p^k q^t, k, t \in \mathbb{N}\}$, $A = \{a \in \Omega : p \mid a\}$ y $B = \{b \in \Omega : q \mid b\}$.

Ahora $A \cap B = \{a \in \Omega : p \mid a \wedge q \mid a\}$. Note que de manera análoga a ii), tenemos:

$$|A| = p^{k-1}q^t, \quad |B| = p^k q^{t-1}$$

Por otro lado si $a \in A \cap B$, tenemos $p \mid a \wedge q \mid a \implies \exists l \in \mathbb{N}$ tal que $a = pql$. Además como $pql = a \leq p^k q^t$, se sigue que $l \leq p^{k-1}q^{t-1}$, por lo cual:

$$|A \cap B| = p^{k-1}q^{t-1}$$

Por último, sabemos que $\varphi(p^k q^t) = |\{a \in \Omega : (a, p^k q^t) = 1\}|$. Por la proposición 1.2.1 tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi(p^k q^t) &= |\Omega| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\ &= p^k q^t - p^{k-1}q^t - p^k q^{t-1} + p^{k-1}q^{t-1} \\ &= q^t(p^k - p^{k-1}) - q^{t-1}(p^k - p^{k-1}) \\ &= (p^k - p^{k-1})(q^t - q^{t-1}) \\ &= [p^{k-1}(p-1)][q^{t-1}(q-1)] \\ &= \varphi(p^k) \cdot \varphi(q^t) \end{aligned}$$

□

Proposición 1.4.2. *Sean $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos, sean $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:*

$$\begin{aligned} \varphi(p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}) &= p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \\ &= \varphi(p_1^{k_1}) \ldots \varphi(p_n^{k_n}) \end{aligned}$$

Demostración. Falta demostrar. □

Observación 1.4. *Observe que dados* $n, m \in \mathbb{N}$, *tales que* $(m, n) = 1$, *entonces:*

$$\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$$

En efecto, Por el teorema fundamental de la aritmética, podemos expresar $n = p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l}$, $m = q_1^{t_1} \dots q_r^{t_r}$, con $p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_r \in \mathbb{N}$ primos distintos y $k_1, \dots, k_l, t_1, \dots, t_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, así:

$$\begin{aligned} \varphi(n \cdot m) &= \varphi(p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l} q_1^{t_1} \dots q_r^{t_r}) \\ &= \varphi(p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l}) \cdot \varphi(q_1^{t_1} \dots q_r^{t_r}) \\ &= \varphi(n) \cdot \varphi(m) \end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 2

Grupos

2.1. Grupos

Definición 2.1.1 (Grupo)**.** *Un grupo es un conjunto no vacío G junto con una operación $\circ : G \times G \to G$, que satisface:*

I) *font Asociatividad:* $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall a, b, c \in G$

II) *font Elemento neutro:* $\exists e \in G : a \circ e = a \quad \forall a \in G$

III) *font Inverso:* $\forall a \in G \quad \exists b \in G : a \circ b = e$

Se denota a esta estructura: $(G, \circ, e)$, en caso de no conocer la identidad $(G, \circ)$. Además, para facilitar la notación el inverso de a elemento de un grupo se denota como a^{-1}.

Ejemplo 2.1. *Sea $\mathbb{Z}$, y la suma usual en los números enteros, es claro que es un grupo.*

Ejemplo 2.2. $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{C}, +)$ *son grupos.*

Ejemplo 2.3. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ *es un grupo.*

En efecto, Anteriormente se había probado que $+$ es cerrado y está bien definida $\bar{a}+\bar{b} = \overline{a+b}$.

I) $+$ es asociativa, pues:

$$\bar{a} + \overline{(b+c)} = \overline{a + (b+c)} = \overline{(a+b)+c} = \overline{(a+b)} + \bar{c}$$

II) Note que la identidad es $\bar{0}$, ya que:

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{a+0} = \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

III) Ahora dado $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, note que $a + (-a) = 0$, luego:

$$\begin{aligned} \overline{a + (-a)} &= \bar{0} \\ \bar{a} + \overline{(-a)} &= \bar{0} \end{aligned}$$

Así $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \exists \overline{(-a)} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \bar{a} + \overline{(-a)} = \bar{0}$.

□

Ejemplo 2.4. *Sean A un conjunto no vacío, sea V un espacio vectorial, sea $\mathcal{H}$ el conjunto de funciones $f : A \to V$, definamos la operación suma sobre $\mathcal{H}$ como:*

$$\begin{aligned} &+ : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \\ &(f + g)(a) \mapsto f(a) + g(a) \quad \forall a \in A \end{aligned}$$

En efecto, note:

I) Sean $f, g, h \in \mathcal{H}$, sea $a \in A$:

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](a) &= (f + g)(a) + h(a) \\ &= (f(a) + g(a)) + h(a) \\ &= f(a) + (g(a) + h(a)) \\ &= f(a) + (g + h)(a) \\ &= [f + (g + h)](a) \end{aligned}$$

$\therefore (f + g) + h = f + (g + h)$

II) Tenemos $\underline{0} \in \mathcal{H}$, definida por: $\underline{0}(a) = 0 \quad \forall a \in A$, sea $f \in \mathcal{H}$, sea $a \in A$,

$$(f + \underline{0})(a) = f(a) + \underline{0}(a) = f(a) + 0 = f(a)$$

Así $f + \underline{0} = f$, i.e. $\underline{0}$ es el elemento neutro.

III) Sea $f \in \mathcal{H}$, sea $a \in A$, note que existe $-f(a)$, tal que:

$$f(a) + (-f(a)) = 0 \quad \forall a \in A,$$

entonces $-f$ es inverso de f.

□

Ejemplo 2.5. *Sea V un espacio vectorial real, entonces $(V, +)$ es un grupo.*

Ejemplo 2.6. $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ *es un grupo.*

Ejemplo 2.7. *Sea $GL_{(n)}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$, con el producto de matrices forma un grupo.*

Ejemplo 2.8. *Considere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sea $G \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, el conjunto*

$$G = \{\bar{a} : (a,n) = 1\}$$

entonces $(G, \cdot)$ con la op. definida por el producto de clases es un grupo.

En efecto, Note:

I) $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in G, \quad \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c}) = \bar{a}(\overline{b \cdot c}) = \overline{a(b \cdot c)} = \overline{(ab)c} = \overline{(ab)} \cdot \bar{c} = (\bar{a}\bar{b})\bar{c}.$

II) $\bar{1} \in G$, pues $(1,n) = 1$, además $\forall \bar{a} \in G \quad \bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a}.$

III) Sea $\bar{a} \in G$, entonces $(a,n) = 1$, por tanto $\exists x, y \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$ax + ny = 1$$

Tomando la clase:

$$\bar{1} = \overline{ax + ny} = \overline{ax} + \overline{ny} = \bar{a}\bar{x} + \bar{n}\bar{y} = \bar{a}\bar{x} + \bar{0}\bar{y} = \bar{a}\bar{x} + \bar{0} = \bar{a}\bar{x}$$

i.e. existe $\bar{x} \in G$, tal que $\bar{a} \cdot \bar{x} = 1$.

□

Definición 2.1.2 (Grupo abeliano)**.** *Sea $(G, \circ, e)$ un grupo, si cumple que $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$, diremos que es un grupo abeliano.*

Ejemplo 2.9. $(\mathbb{Z}, +, 0)$ *es abeliano.*

Ejemplo 2.10. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \bar{0})$ *es abeliano.*

Ejemplo 2.11. $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot, \bar{1})$ *es abeliano.*

Proposición 2.1.1. *Sea $(G, \circ)$ un grupo, sea $g \in G$ tal que $g \circ g = g$ entonces $g = e$.*

Demostración. Como $g \in G \implies \exists g' \in G$ tal que $g \circ g' = e$, luego:

$$g = g \circ e = g \circ (g \circ g') = (g \circ g) \circ g' = g \circ g' = e$$

□

Proposición 2.1.2. *Sea $(G, \circ)$ grupo, $g \in G$, entonces:*

$$g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$$

Demostración.

$$(g^{-1} \circ g) \circ (g^{-1} \circ g) = (g^{-1} \circ (g \circ g^{-1})) \circ g = (g^{-1} \circ e) \circ g = g^{-1} \circ g$$

Luego por la prop. anterior:

$$g^{-1} \circ g = e, \quad \text{i.e. } g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$$

□

Proposición 2.1.3. *Si* $(G, \circ)$ *es un grupo y* $g \in G$*, entonces:*

$$e \circ g = g \circ e = g$$

Demostración.

$$e \circ g = (g \circ g^{-1}) \circ g = g \circ (g^{-1} \circ g) = g \circ e = g = g \circ e$$

□

Proposición 2.1.4. *Sea* $(G, \circ)$ *un grupo, el elemento neutro* e*, es único.*

Demostración. Supongamos que existe $e' \in G$ tal que $g \circ e' = g, \quad \forall g \in G$, en particular:

$$e = e \circ e' = e' \circ e = e', \quad \text{i.e. } e \text{ es único.}$$

□

Ejemplo 2.12. *Sea* $G_1 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*, sea* $G_2 = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : (a, n) = 1\}$*, entonces se tienen los grupos:* $(G_1, +, \bar{0})$*,* $(G_2, \cdot, \bar{1})$*, es claro que no son iguales ya que:* $|G_1| = n$*,* $|G_2| = \varphi(n)$*.*

Proposición 2.1.5. *Si* $(G, \circ)$ *es un grupo y* $g \in G$*, entonces* g^{-1} *es único.*

Demostración. Suponga $g' \in G$ tal que $g \circ g' = e$, entonces:

$$g^{-1} = g^{-1} \circ e = g^{-1} \circ (g \circ g') = (g^{-1} \circ g) \circ g' = e \circ g' = g'$$

□

2.2. Subgrupos

Definición 2.2.1 (Subgrupo)**.** *Sea* $(G, \circ, e)$ *un grupo, sea* $H \subseteq G$ *un subconjunto de* G*, diremos que* H *es un subgrupo de* G*, si con la misma operación* $\circ$*, definida en* G*, forma un grupo. Se denotará* $H \leq G$*.*

Ejemplo 2.13. *Sea* $(G = \mathbb{Z}, +, 0)$*, para algún* $a \in \mathbb{Z}$*, definamos:*

$$H_a = \{t \in \mathbb{Z} : t = na, n \in \mathbb{Z}\}$$

entonces $(H_a, +, 0)$ *es un subgrupo de* G*.*

Demostración. Claramente $H_a \subseteq G$, además $+$ es cerrada en H_a, pues si $n_1 a, n_2 a \in H_a \implies n_1 a + n_2 a = (n_1 + n_2)a \in H_a$.

I) $+$ es asociativa, porque hereda la asociatividad de G.

II) $0 \in H_a$, ya que $0 = 0 \cdot a \in H_a$, además $na + 0 = na \quad \forall na \in H_a$.

III) Si $na \in H_a$, como $n \in \mathbb{Z} \implies -n \in \mathbb{Z}$, así $\exists -na \in H_a \implies na + (-na) = 0$.

$\square$

Ejemplo 2.14. *Sea* $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$, *entonces* $SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$, *este es llamado el grupo especial lineal.*

Observación 2.1. *Sea* $(G, \circ, e)$ *grupo, sea* $H \leq G$, *entonces* $e \in H$.

En efecto, como $H \neq \emptyset$, $\exists g \in H$, además $\exists g^{-1} \in H$ al ser un subgrupo, así:

$$g \circ g^{-1} = e, \quad \text{i.e. } e \in H.$$

$\square$

Proposición 2.2.1. *Si* $(G, \circ, e)$ *es un grupo y* $\{H_\lambda\}_{\lambda \in I}$ *es una colección arbitraria de subgrupos, entonces:*

$$\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda, \ \textit{es un subgrupo de } G.$$

Demostración. Como $H_\lambda \leq G \quad \forall \lambda \in I$, $\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda \neq \emptyset$ pues $e \in H_\lambda \quad \forall \lambda \in I$. Sean $a, b \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$, entonces $a, b \in H_\lambda \quad \forall \lambda \in I$, además $\circ$ es cerrada en $\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$, ya que $a \circ b \in H_\lambda \quad \forall \lambda \in I$, así $a \circ b \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$. Luego:

I) $\circ$ es asociativa en $\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$, ya que es asociativa en $H_\lambda, \forall \lambda \in I$.

II) $e \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$.

III) Dado que $a \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$, entonces $a \in H_\lambda \forall \lambda \in I$, así $\exists a^{-1} \in H_\lambda \forall \lambda \in I$ tal que $a \circ a^{-1} = e$, luego $a^{-1} \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$.

$\square$

Proposición 2.2.2. *Sea* $(G, \circ, e)$ *un grupo, sean* $H, K \leq G$, *entonces* $H \cup K$ *es un subgrupo de* G *si y sólo si* $H \subseteq K \vee K \subseteq H$.

Demostración. Será demostrada primero la reciprocidad.

($\Leftarrow$) Basta notar que si $H \subseteq K$, $H \cup K = K$ y $K \leq G$, así $H \cup K \leq G$. Análogo si $K \subseteq H$.

($\Rightarrow$) Sea $H \cup K \leq G$. Supongamos que $H \not\subseteq K \wedge K \not\subseteq H$, sean $a \in H \setminus K$ y $b \in K \setminus H$. Sea $c = a \circ b$. Como $H \cup K \leq G$, entonces $c \in H \cup K$, así $c \in H \vee c \in K$.

Si $c \in H \implies a^{-1} \circ c = b \in H$, lo cual no puede ser (pues $b \in K \setminus H$). Si $c \in K \implies c \circ b^{-1} = a \in K$, lo cual no puede ser (pues $a \in H \setminus K$).

Por lo cual $H \subseteq K \vee K \subseteq H$. $\square$

Definición 2.2.2 (Orden de un grupo)**.** *Sea* $(G, \circ, e)$ *un grupo, el orden del grupo será la cardinalidad de* G *y se denota* $|G|$.

Definición 2.2.3. *Sea* $(G, \circ, e)$ *un grupo, diremos que es un grupo finito si* G *es un conjunto finito. En caso contrario se le dice infinito.*

Definición 2.2.4. *Sea* $(G, \circ, e)$ *un grupo, sea* $S \subseteq G$*, con* $S \neq \emptyset$*, el grupo generado por* S *en* G *denotado por* $\langle S \rangle$ *es el menor de los subgrupos que lo contiene, i.e.:*

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{S \subseteq H \\ H \leq G}} H$$

Si S *es finito, y sea* $H = \langle S \rangle$*, diremos que* H *es finitamente generado.*

Ejemplo 2.15. *Todo subgrupo finito de* G *es finitamente generado, más aún, si* $H \leq G$ *y es finito* $\langle H \rangle = H$*.*

Demostración. Dado que:

$$\langle H \rangle = \bigcap_{\substack{H' \leq G \\ H \subseteq H'}} H' \subseteq H' \quad \forall H' \leq G \text{ tales que } H \subseteq H',$$

además como $H \leq G$ y $H \subseteq H$, entonces H es uno de los términos de la intersección, así:

$$\langle H \rangle \subseteq H \wedge H \subseteq \bigcap_{\substack{H' \leq G \\ H \subseteq H'}} H' = \langle H \rangle$$

Por lo tanto $\langle H \rangle = H$. □

Ejemplo 2.16. $(\mathbb{Z}, +, 1)$ *es finitamente generado, basta notar que:*

$$\mathbb{Z} = \langle \{1\} \rangle$$

Ejemplo 2.17. $(\mathbb{Q}, +, 1)$, $\mathbb{Q}$ *no es finito ni es finitamente generado.*

Proposición 2.2.3. *Sea* $(G, \circ, e)$ *un grupo,* $H \subseteq G$ *no vacío, entonces las cond. son equivalentes:*

I) $H \leq G$

II) $\forall x, y \in H$ *se tiene que* $x \circ y \in H \wedge x^{-1} \in H$.

III) $\forall x, y \in H$ *se tiene que* $x \circ y^{-1} \in H$.

Demostración. Se probarán las implicaciones en ciclo.

- I $\Rightarrow$ II) Se sigue de la definición ya que la operación en G debe ser una operación en H, además de que si H es un subgrupo $\forall x \in H \implies \exists x^{-1} \in H$.
- II $\Rightarrow$ III) Si $x, y \in H$ por ii) $y^{-1} \in H$, luego $x \circ y^{-1} \in H$ (por ii).

- III $\Rightarrow$ I) Sea $x \in H$, entonces $x \circ x^{-1} = e$, luego, note que si $x \in H$ entonces $x^{-1} = e \circ x^{-1} \in H$.

  Ahora probemos que la operación es cerrada: sea $x, y \in H$, entonces $y^{-1} \in H$, más aún $(y^{-1})^{-1} = y$, ya que $y^{-1} \circ y = y^{-1} \circ (y^{-1})^{-1} = e$ y por la unicidad del inverso $(y^{-1})^{-1} = y$. Por lo cual $x \circ y = x \circ (y^{-1})^{-1} \in H$, por lo tanto la operación es cerrada en H.

$\square$

Observación 2.2. *Sea $(G, \circ, e)$ un grupo, sean $a, b \in G$ entonces:*

$$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$$

En efecto,

$$(a \circ b)(b^{-1} \circ a^{-1}) = a(b \circ b^{-1}) \circ a^{-1} = (a \circ e) \circ a^{-1} = a \circ a^{-1} = e$$

Por la unicidad del inverso se sigue $b^{-1} \circ a^{-1} = (a \circ b)^{-1}$. $\square$

Cuando no haya perdida de generalidad para facilitar la escritura de la operación $\circ$ en un grupo G, se denotará expresará como el producto, es decir: $a \circ b := ab$. Además, se podrá expresar la potencia de un elemento $a \in G$ como:

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n-\text{veces}}$$

para $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $n = 0$, $a^0 = e$ y podemos observar que $a^{-n} = (a^n)^{-1}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.3. *Si $S \neq \emptyset$, es un subconjunto de un grupo G, entonces:*

$$\langle S \rangle = \{s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n} : s_j \in S, i_j = \pm 1, j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

Demostración. Sea $H = \{s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n} : s_i \in S, i_j = \pm 1, j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$. Sean $s, t \in H$, tales que $s = s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n}$, $t = t_1^{j_1} \dots t_m^{j_m}$, con $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m \in S$, $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m \in \{1, -1\}$. Notemos que:

$$st^{-1} = s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n} (t_1^{j_1} \dots t_m^{j_m})^{-1} = s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n} t_m^{-j_m} \dots t_1^{-j_1} \in H$$

Así por la proposición 2.2.3 $H \leq G$, así $\langle S \rangle \subseteq H$. Ahora sea $N \leq G$, tal que $S \subseteq N$, es claro que $s \in N$ (cualquier elemento de esa forma está en N), así $H \subseteq N$, así $H = \langle S \rangle$. $\square$

2.3. Grupo de permutaciones

Definición 2.3.1 (Grupo de Permutaciones). *Sea X un conjunto no vacío, sea $\mathcal{H} = \{f : X \to X : f \text{ es biyectiva}\}$, consideremos la composición de funciones, entonces $\mathcal{H}$ forma un grupo llamado el grupo de permutaciones del conjunto X denotado por S_X.*

En caso de que X sea finito, podemos enlistar los elementos de X por $a_1, \dots, a_n$, podemos representar con un arreglo bidimensional de renglones colocando:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{\sigma(1)} & a_{\sigma(2)} & \dots & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

Donde $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, tal que $\sigma(i) = j$, si $f(a_i) = a_j$, de este modo podemos prescindir de los elementos de X y fijarnos solo en los subíndices e identificar a f con:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

En este caso se escribirá como S_n con $n = |X|$.

Ejemplo 2.18. *S_3 es el grupo formado por los elementos:*

$$\{e, \sigma, \theta, \sigma \cdot \theta, \theta \cdot \sigma, \theta^2\}$$

Donde:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\theta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma \cdot \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \theta \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\circ$	e	θ	σ	θ^2	$\sigma \cdot \theta$	$\theta \cdot \sigma$
e	e	θ	σ	θ^2	$\sigma \cdot \theta$	$\theta \cdot \sigma$
θ	θ	θ^2	$\theta \cdot \sigma$	e	σ	$\sigma \cdot \theta$
σ	σ	$\sigma \cdot \theta$	e	$\theta \cdot \sigma$	θ	θ^2
θ^2	θ^2	e	$\sigma \cdot \theta$	θ	$\theta \cdot \sigma$	σ
$\sigma \cdot \theta$	$\sigma \cdot \theta$	$\theta \cdot \sigma$	θ^2	σ	e	θ
$\theta \cdot \sigma$	$\theta \cdot \sigma$	σ	θ	$\sigma \cdot \theta$	θ^2	e

Es evidente que S_3 no es abeliano, basta notar $\theta \circ \sigma \neq \sigma \circ \theta$. Además observe que si el orden de X es n, $|S_n| = n!$.

Observación 2.4. *Si $n \geq 3$, entonces S_n no es abeliano.*

En efecto, Basta tomar:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i+1 & i & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & j & j+1 & \dots & n \end{pmatrix} \quad \text{con } i \neq j$$

y notar que $\sigma \circ \theta \neq \theta \circ \sigma$.

Además podemos notar que trivialmente S_1 y S_2 son un grupo abeliano. $\square$

CAPÍTULO 3
Productos Directos

3.1. Productos Directos

Definición 3.1.1. *Sea* $(H, \circ), (K, *)$ *dos grupos, definamos en* $G = H \times K$*, la función* $\odot : G \times G \to G$*, dada por:*

$$(h_1, k_1) \odot (h_2, k_2) = (h_1 \circ h_2, k_1 * k_2)$$

Claramente $\odot$ *es una operación en* G *y se verifica que con esta operación,* G *forma un grupo con identidad* (e_H, e_K)*.*

También se tiene que $\bar{H} = H \times \{e_K\}$ *y* $\{e_H\} \times K = \bar{K}$ *son subgrupos normales de* G *tales que* $\bar{H} \cap \bar{K} = e_G = (e_H, e_K)$ *y* $G = \bar{H}\bar{K}$ *en este caso a* G *se le llama el producto directo externo de* H *con* K

Definición 3.1.2. *Si* G *es un grupo tal que existen* $H, K \leq G$ *con* $H \triangleleft G$*,* $K \triangleleft G$*,* $G = HK$*,* $H \cap K = \{e\}$*, diremos que* G *es el producto directo interno de* H *y* K*.*

Observación 3.1. *El producto directo de una cantidad finita de grupos es asociativo (la igualdad se da salvo isomorfismo); es decir,*

$$(H_1 \times H_2) \times H_3 \cong H_1 \times (H_2 \times H_3) \qquad (\textit{Se escribe } H_1 \times H_2 \times H_3)$$

Verificarlo.

Teorema 3.1.1 (Teorema chino del residuo)**.** *Sea* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$*. Entonces* $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{e_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{e_k}}$ *en donde* $n = p_1^{e_1} \ldots p_k^{e_k}$ *es la factorización en primos de* n*.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{p_1^{e_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{e_k}}$ la función definida por:

$$[a]_n \mapsto ([a]_{p_1^{e_1}}, \ldots, [a]_{p_k^{e_k}})$$

La función φ está bien definida. Supongamos que $[a]_n = [b]_n$, entonces $n \mid a - b$. Dado que $p_i^{e_i} \mid n$, por transitividad se tiene que $p_i^{e_i} \mid a - b$, es decir $[a]_{p_i^{e_i}} = [b]_{p_i^{e_i}}$, de donde se concluye que $\varphi([a]_n) = \varphi([b]_n)$.

- φ es inyectiva: $\varphi([a]_n) = \varphi([b]_n)$ si y solo si $[a]_{p_i^{e_i}} = [b]_{p_i^{e_i}}$ para todo $1 \leq i \leq k$. Esto implica que $p_i^{e_i} \mid a - b$ para todo $1 \leq i \leq k$. Como los p_i son primos distintos, tenemos que $(p_i^{e_i}, p_j^{e_j}) = 1$ para todo $i \neq j$. En consecuencia, el producto $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ divide a $a - b$, de donde $[a]_n = [b]_n$.

  Nótese además que las cardinalidades coinciden: $n = |\mathbb{Z}_n| = |\mathbb{Z}_{p_1^{e_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{e_k}}| = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$. Al ser una función inyectiva entre conjuntos finitos del mismo tamaño, φ es biyectiva.

- φ es un homomorfismo:

$$\begin{aligned}
\varphi([a]_n + [b]_n) &= \varphi([a+b]_n) = ([a+b]_{p_1^{e_1}}, \dots, [a+b]_{p_k^{e_k}}) \\
&= ([a]_{p_1^{e_1}} + [b]_{p_1^{e_1}}, \dots, [a]_{p_k^{e_k}} + [b]_{p_k^{e_k}}) \\
&= ([a]_{p_1^{e_1}}, \dots, [a]_{p_k^{e_k}}) + ([b]_{p_1^{e_1}}, \dots, [b]_{p_k^{e_k}}) \\
&= \varphi([a]_n) + \varphi([b]_n)
\end{aligned}$$

Finalmente, φ es un isomorfismo y por lo tanto $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{e_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{e_k}}$. □

Ejemplo 3.1. *Sea G un grupo de orden pq con p, q primos distintos. Si H, K son subgrupos normales de G con $|H| = p$ y $|K| = q$, entonces $G \cong H \times K$.*

Demostración. Como $H, K \trianglelefteq G$, si tomamos $g \in H \cap K$ entonces $o(g) \mid |H| = p$ y $o(g) \mid |K| = q$. Dado que p y q son distintos, $o(g) = 1$, lo que implica que $H \cap K = \{e\}$.

Más aún, el orden del producto es $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{pq}{1} = |G|$, luego $G = HK$. Además, si $g \in HK$ tuviera dos representaciones $g = h_1 k_1 = h_2 k_2$ con $h_1, h_2 \in H$ y $k_1, k_2 \in K$, entonces $h_1^{-1} h_2 = k_1 k_2^{-1}$. Este elemento pertenecería a la intersección $H \cap K = \{e\}$, lo que implica $h_1 = h_2$ y $k_1 = k_2$. Es decir, la representación de $g \in G$ como producto de un elemento de H y uno de K es única.

Definimos la función $\varphi : G \to H \times K$ mediante:

$$g = hk \mapsto (h, k)$$

Note que si $h \in H$ y $k \in K$, tenemos que $hkh^{-1}k^{-1}$ pertenece a $H \cap K$ (pues H y K son normales), y como la intersección es trivial, $hkh^{-1}k^{-1} = e$, luego $hk = kh$.

- φ es un homomorfismo: Sean $g = hk$ y $g_1 = h_1 k_1$ en G con $h, h_1 \in H$ y $k, k_1 \in K$. Usando que los elementos de H y K conmutan:

$$\begin{aligned}
\varphi(gg_1) &= \varphi(hkh_1k_1) = \varphi(hh_1kk_1) = (hh_1, kk_1) \\
&= (h, k)(h_1, k_1) = \varphi(g)\varphi(g_1)
\end{aligned}$$

- φ es inyectiva: Si $g = hk$, $g_1 = h_1k_1$ y $\varphi(g) = \varphi(g_1)$, entonces $(h, k) = (h_1, k_1)$, luego $h = h_1$ y $k = k_1$, de donde $g = g_1$.

- φ es sobreyectiva: Dado un par $(h, k) \in H \times K$, existe el elemento $g = hk \in G$ tal que $\varphi(g) = (h, k)$.

Por lo tanto $G \cong H \times K$; de hecho, G es el producto directo interno de H y K. □

Corolario 3.1.1. *Sea G un grupo abeliano de orden pq con p, q primos distintos, entonces:*

$$G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$$

Demostración. Basta ver que existe un elemento de orden p y un elemento de orden q, lo cual nos lo dará el teorema de Cauchy (Ver más adelante). □

Teorema 3.1.2 (Teorema de Cayley)**.** *Todo grupo G es isomorfo a un subgrupo de permutaciones.*

Demostración. Sea S_G el grupo de todas las permutaciones del conjunto G (biyeciones de G en sí mismo). Definimos la función $\varphi : G \to S_G$ dada por $\varphi(g) = f_g$, donde $f_g : G \to G$ es la función de multiplicación por la izquierda:

$$f_g(h) = gh \quad \forall h \in G$$

Veamos que φ es un isomorfismo sobre su imagen, en efecto:

- φ está bien definida (es decir, $f_g \in S_G$): Para cualquier $g \in G$, la función f_g es biyectiva. En efecto, tiene inversa, la cual es $f_{g^{-1}}$, ya que para todo $h \in G$:

  $$(f_g \circ f_{g^{-1}})(h) = f_g(g^{-1}h) = g(g^{-1}h) = h = \mathrm{id}(h)$$

  De manera análoga, $f_{g^{-1}} \circ f_g = \mathrm{id}$. Al ser biyectiva, f_g es una permutación de G, por lo que $f_g \in S_G$.

- φ es un homomorfismo: Sean $g, k \in G$. Queremos ver que $\varphi(gk) = \varphi(g) \circ \varphi(k)$. Evaluamos ambas funciones en un elemento arbitrario $h \in G$:

  $$\varphi(gk)(h) = f_{gk}(h) = (gk)h$$
  $$(\varphi(g) \circ \varphi(k))(h) = f_g(f_k(h)) = f_g(kh) = g(kh)$$

  Por asociatividad, $(gk)h = g(kh)$, por lo tanto $f_{gk} = f_g \circ f_k$, lo que implica que φ preserva la operación.

- φ es inyectiva: Supongamos que $\varphi(g) = \varphi(k)$. Esto significa que las funciones son idénticas, es decir, $f_g = f_k$.

  $$f_g(h) = f_k(h) \quad \forall h \in G \implies gh = kh \quad \forall h \in G$$

  En particular, tomando $h = e$ (neutro de G), obtenemos $ge = ke$, lo que implica $g = k$.

Concluimos que φ es un isomorfismo entre G e $\mathrm{Im}(\varphi)$. Dado que $\mathrm{Im}(\varphi)$ es un subgrupo de S_G, hemos demostrado que G es isomorfo a un subgrupo de permutaciones. □

Ejemplo 3.2. *Para ilustrar el teorema anterior, consideremos el grupo $S_3 = \{id, \theta, \sigma, \theta\sigma, \sigma\theta, \theta^2\}$. La función $\varphi : S_3 \to S_{S_3}$ asocia a cada $g \in S_3$ una permutación de los elementos de S_3.*

Por ejemplo, si tomamos $g = \theta$, la función asociada $f_\theta : S_3 \to S_3$ definida por $h \mapsto \theta h$ permuta los elementos de S_3 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} id &\mapsto \theta \\ \theta &\mapsto \theta^2 \\ \sigma &\mapsto \theta\sigma \\ \theta\sigma &\mapsto \theta^2\sigma \\ \sigma\theta &\mapsto \sigma \\ \theta^2 &\mapsto id \end{aligned}$$

Corolario 3.1.2. *Sea G un grupo de orden finito n, entonces $G \hookrightarrow S_n$.*

Demostración. Sabemos que $G \hookrightarrow S_X$ y $S_X \cong S_n$. En efecto, si $G = \{a_1, \dots, a_n\}$, definimos $\psi : S_X \to S_n$ dada por $f \mapsto \bar{f}$, en donde si $f(a_i) = a_j$, entonces $\bar{f}(i) = j$, con $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $\{1, \dots, n\}$.

- ψ está bien definida: Pues si $f : X \to X$ es biyectiva, en efecto:
  - $\bar{f}$ inyectiva: $\bar{f}(i) = \bar{f}(j) \implies f(a_i) = f(a_j) \implies a_i = a_j \implies i = j$ (pues f es inyectiva).
  - $\bar{f}$ es sobre: Dado $j \in \{1, \dots, n\}$, tenemos $a_j \in G$. Como f es biyectiva, $\exists a_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $f(a_i) = a_j$, luego $\bar{f}(i) = j$.
- ψ es homomorfismo: $\psi(g \circ f) = \psi(g) \circ \psi(f)$. En efecto, $\overline{g \circ f}(i) = j$ si $(g \circ f)(a_i) = a_j$. Suponga que $f(a_i) = a_k$ y $g(a_k) = a_j$, entonces $\bar{f}(i) = k$ y $\bar{g}(k) = j$. Más aún, $(g \circ f)(a_i) = g(f(a_i)) = g(a_k) = a_j$, así que $\overline{g \circ f}(i) = j$. Luego $(\bar{g} \circ \bar{f})(i) = \bar{g}(\bar{f}(i)) = \bar{g}(k) = j$. Así que $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$, de donde $\psi(g \circ f) = \overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f} = \psi(g) \circ \psi(f)$.
- ψ es inyectiva: $\psi(f) = \psi(g) \implies \bar{f} = \bar{g} \implies \bar{f}(i) = \bar{g}(i)\ \forall 1 \leq i \leq n \implies f(a_i) = g(a_i)\ \forall 1 \leq i \leq n \implies f = g$.

- ψ es sobre: Sea $h \in S_n$, entonces $\exists f : S_X \to S_X$ dada por $f(a_i) = a_{h(i)}$ tal que $(\psi(f))(i) = \bar{f}(i) = h(i)\ \forall 1 \leq i \leq n$. Por lo tanto $h = \bar{f} = \psi(f)$.

Luego $S_X \cong S_n$ y $G \hookrightarrow S_n$. □

Teorema 3.1.3. *Sea G un grupo finito, $H \leq G$. $X = \{Hg \mid g \in G\} = (G/H)$ entonces existe $\varphi : G \to S_X$ un homomorfismo tal que $N = Ker\ \varphi$ es el mayor subgrupo normal en G contenido en H.*

Demostración. Sea $\varphi : G \to S_X$ definida por $\varphi(g) = f_g$ con $f_g : X \to X$ dada por:

$$f_g(Hk) = Hkg^{-1}$$

Veamos que f_g no depende del representante de clase (f_g es función). En efecto, Si $Hk = Hk_1$, entonces $kk_1^{-1} \in H$, luego $kgg^{-1}k_1^{-1} \in H$ o $Hkg^{-1} = Hk_1g^{-1}$, así que $f(Hk) = Hkg^{-1} = f(Hk_1)$, por lo cual, f_g es función.

Note que $f_g \in S_X$ pues,

- f_g es inyectiva: $f_g(Hk) = f_g(Hk_1)$ si y solo si $Hkg^{-1} = Hk_1g^{-1}$ si y solo si $Hk = Hk_1$.
- f_g es sobreyectiva: Dado $Hk \in X$ se tiene $f_g(Hkg) = Hkgg^{-1} = Hk$.

Veamos que φ es homomorfismo:

$$\varphi(gg_1) = f_{gg_1} \stackrel{?}{=} f_g \circ f_{g_1} = \varphi(g)\varphi(g_1)$$

pues

$$f_{gg_1}(Hk) = Hk(gg_1)^{-1} = H(kg_1^{-1})g^{-1} = f_g(Hkg_1^{-1}) = f_g(f_{g_1}(Hk)) = (f_g \circ f_{g_1})(Hk)$$

Sea $N = \text{Ker } \varphi$, claramente $N \trianglelefteq G$, además para $n \in N$ tenemos:

$$\text{Id} = \varphi(n) = f_n \quad \text{con } f_n(Hk) = Hkn^{-1}$$

Así que $Hkn^{-1} = Hk \quad \forall Hk \in X$ o $Hkn^{-1} = Hk \quad \forall k \in G$, en particular para $k \in H$, $H = Hk$ y $Hn^{-1} = Hkn^{-1} = Hk = H$ de donde $n \in H$. Luego $N \subseteq H$.

Sea $N_1 \trianglelefteq G$ con $N_1 \subseteq H$, veamos que $N_1 \subseteq N$. Sea $n_1 \in N_1$, $\varphi(n_1) = f_{n_1}$ con $f_{n_1}(Hk) = Hkn_1^{-1} = Hkn_1^{-1}k^{-1}k \quad \forall k \in G$. Como $N_1 \trianglelefteq G$, $kn_1^{-1}k^{-1} \in N_1 \subseteq H$ así que $H(kn_1^{-1}k^{-1})k = Hk$, es decir $f_{n_1}(Hk) = Hk$ de donde $f_{n_1} = \text{Id}$, es decir $n_1 \in \text{Ker } \varphi$ y $N_1 \subseteq N$. □

Corolario 3.1.3. *Sea G finito $H \leq G$, $H \neq G$ tal que $|G| \nmid [G : H]!$ entonces H contiene un subgrupo normal en G no trivial.*

Demostración. Si φ fuera inyectiva entonces $G \cong \varphi(G) \leq S_X$ así que $|G| \mid |S_X| = [G : H]!$ lo cual por hipótesis no se cumple. Luego $\{e\} \neq \text{Ker } \varphi \subseteq H$, y como $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$, concluimos que H contiene un subgrupo normal no trivial (y $\text{Ker } \varphi \neq G$ pues $H \neq G$). □

Corolario 3.1.4. *Sea p primo, G un grupo finito tal que p es el menor primo que divide a $|G|$ y $H \leq G$, $H \neq G$ con $[G : H] = p$, entonces $H \trianglelefteq G$.*

Demostración. Sea $|G| = pm$.

Si $m = 1$, como $[G : H] = p$, entonces $|H| = \frac{|G|}{[G:H]} = \frac{p}{p} = 1$, luego $H = \{e\}$, el cual es normal en G.

Si $m \neq 1$, los factores primos de m son mayores o iguales a p. Veamos que esto implica que $|G| \nmid [G : H]!$, es decir, $pm \nmid p!$. Procedemos por reducción al absurdo para justificar esta afirmación: Supongamos que $|G| \mid p!$, entonces $pm \mid p!$, lo que implica que $m \mid (p-1)!$. Si q es un factor primo de m, entonces $q \mid (p-1)!$, lo cual implica que $q \leq p - 1$. Sin embargo, q es un factor de $|G|$ (a través de m), y por hipótesis p es el menor primo que divide a $|G|$, por lo que $q \geq p$. Tenemos así que $q \leq p - 1$ y $q \geq p$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $|G| \nmid p!$. (La demostración concluye aplicando el corolario anterior). □

3.2. El grupo Simétrico S_n

Recordemos que S_n con la composición de funciones es un grupo. Cada elemento de S_n se llama una permutación (la cual es una función biyectiva de $\{1, \ldots, n\}$ en sí mismo). En este caso si $\sigma \in S_n$ se denotará:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Definición 3.2.1. *Un ciclo de longitud $1 \leq k \leq n$ en S_n es un elemento de S_n tal que existen $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ con $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$ y $\sigma(j) = j \ \forall j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$.*

Note que en este caso:

$$\begin{aligned} &\sigma^2(i_1) = \sigma(\sigma(i_1)) = \sigma(i_2) = i_3 \quad \text{y} \quad \sigma^k(i_1) = i_1 \\ &\sigma^3(i_1) = \sigma(\sigma^2(i_1)) = \sigma(i_3) = i_4 \\ &\qquad \vdots \\ &\sigma^l(i_1) = i_{1+l} \qquad \text{si } 1 \leq l + 1 \leq k,\ l \leq k - 1,\ \sigma^k(i_j) = i_{j+k-k} = i_j \end{aligned}$$

Más aún:

$$\sigma^l(i_j) = i_{j+l} \qquad 1 \leq j + l \leq k$$

$$\sigma^l(i_j) = i_{j+l-k} \qquad j + l > k \quad (1 \leq l \leq k - j)$$

En este caso, en lugar de escribir

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i_1 & i_2 & \cdots & i_k & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Escribiremos $\sigma = (i_1\ i_2\ i_3\ \dots\ i_k)$ y se tiene que σ se puede denotar de k diferentes formas, a saber:

$$\sigma = (i_1, \dots, i_k) = (i_2, i_3, \dots, i_k, i_1) = \cdots = (i_k, i_1, i_2, \dots, i_{k-1})$$

Si $k = 1$, $\sigma(i) = i\ \forall i$, es decir, $\sigma = id$ y se denota por $\sigma = (1) = (2) = \cdots = (k) = (n)$.

Si $k = 2$, $\sigma(i_1, i_2)$ y se llama una transposición. En este caso:

$$\sigma^2(i_1) = \sigma(i_2) = i_1$$
$$\sigma^2(i_2) = \sigma(i_1) = i_2$$

Así, $\sigma^2 = id$, es decir, $\sigma = \sigma^{-1}$.

Si σ es un ciclo de longitud k también se le llama un k-ciclo. Observe que si σ es un k-ciclo, $\sigma^k = id$, de hecho $|\sigma| = k$.

$$\sigma^l(i_j) = \begin{cases} i_{j+l} & \text{si } 1 \leq l \leq k-j \\ i_{l-k+j} & \text{si } k-j < l \leq k \end{cases}$$

En particular si $k = l$, $\sigma^k(i_j) = i_{k-k+j} = i_j$. Así $|\sigma| \mid k$. Además $\sigma^l(i_1) \neq i_1, \forall 1 \leq l < k$ así que $|\sigma| \geq k$, de donde $|\sigma| = k$.

Definición 3.2.2. *Diremos que dos ciclos $\sigma, \tau \in S_n$ son disjuntos si:*

i) Cuando $\sigma(i_1) = i_2$ con $i_1 \neq i_2$ se tiene que $\tau(i_1) = i_1$.

ii) Cuando $\tau(i_1) = i_2$ con $i_1 \neq i_2$ se tiene que $\sigma(i_1) = i_1$.

(Parafraseando, los elementos que mueve σ, τ los fija y recíprocamente).

Ejemplo 3.3. *Consideremos S_5, entonces $\sigma = (1\ 2)$ y $\tau = (3\ 4\ 5)$ son disjuntos.*

Nota 3.2.1. *Si $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ y $\tau = (j_1, \dots, j_l)$, entonces σ y τ son disjuntos si y sólo si*

$$\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \emptyset$$

Observación 3.2. *Si σ, τ son ciclos disjuntos, entonces $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$, es decir, conmutan.*

Demostración. Sea $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ y $\tau = (j_1, \dots, j_l)$. Claramente $\sigma \circ \tau$ y $\tau \circ \sigma$ tienen el mismo dominio. Ahora si $s \notin \{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l\}$:

$$(\sigma \circ \tau)(s) = \sigma(\tau(s)) = \sigma(s) = s$$
$$(\tau \circ \sigma)(s) = \tau(\sigma(s)) = \tau(s) = s$$

Si $s \in \{i_1, \dots, i_k\}$ entonces $s \notin \{j_1, \dots, j_l\}$, así que:

$$(\sigma \circ \tau)(s) = \sigma(\tau(s)) = \sigma(s)$$

Más aún $\sigma(s) \in \{i_1, \ldots, i_k\}$, luego $\sigma(s) \notin \{j_1, \ldots, j_l\}$ y $\tau(\sigma(s)) = \sigma(s)$, por lo tanto $(\tau \circ \sigma)(s) = (\sigma \circ \tau)(s)$.

Por simetría si $s \in \{j_1, \ldots, j_l\}$, $(\tau \circ \sigma)(s) = (\sigma \circ \tau)(s)$ en cualquier caso se tiene la igualdad y por lo tanto $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. □

Teorema 3.2.1. *Sea $\theta \in S_n$, entonces θ se puede representar de manera única como producto de ciclos ajenos (disjuntos) salvo orden.*

Demostración. Sea $\{i_1, \ldots, i_k\}$ los elementos que mueve θ y procedamos por inducción sobre k.

Para $k = 1$, $\theta = id$ no hay nada que ver $id = (1)$.

Para $k = 2$, $\theta = (i_1, i_2)$ y ya se tiene.

Suponga el resultado para todo $1 \leq l \leq k$ y considere que θ mueve a los elementos $\{i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}\}$. Considere que θ mueve a los elementos $\{i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}\}$. Observe que $i_1, \theta(i_1), \theta^2(i_1), \ldots, \theta^{k+1}(i_1) \in \{i_1, \ldots, i_{k+1}\}$, por lo tanto $\{i_1, \theta(i_1), \ldots, \theta^{k+1}(i_1)\} \subseteq \{i_1, \ldots, i_{k+1}\}$, luego existen $1 \leq l, l' \leq k + 2$ y $\theta^l(i_1) = \theta^{l'}(i_1)$ y podemos suponer $l > l'$, en este caso $\theta^{l-l'}(i_1) = i_1$, y $1 \leq l - l' \leq k + 2 - l' \leq k + 1$, es decir existe p tal que $\theta^p(i_1) = i_1$, $1 \leq p \leq k + 1$.

Sea p el mínimo entero para el cual pasa esto.

Sea $\sigma = (i_1, \theta(i_1), \ldots, \theta^{p-1}(i_1))$. $\{i_1, \theta(i_1), \ldots, \theta^{p-1}(i_1)\} \subseteq \{i_1, \ldots, i_{k+1}\}$ y definamos

$$\tau(i_j) = \begin{cases} \sigma(i_j) & \text{si } \sigma(i_j) = \theta^l(i_1) \text{ para algún } 1 \leq l \leq p - 1 \\ \theta(i_j) & \text{si } i_j \neq \theta^l(i_1) \ \forall 1 \leq l \leq p - 1 \end{cases}$$

Entonces $\sigma \circ \tau = \theta$. Si $j \notin \{i_1, \ldots, i_{k+1}\}$ entonces $j \neq \theta^l(i_1)$ $\forall 1 \leq l \leq p - 1$ y entonces

$$(\sigma \circ \tau)(j) = \sigma(\tau(j)) = \sigma(\theta(j)) = \sigma(j) = j = \theta(j)$$

Si $j \in \{i_1, \ldots, i_{k+1}\} \cap \{i_1, \theta(i_1), \ldots, \theta^{p-1}(i_1)\}$, entonces $j = \theta^l(i_1)$ con $0 \leq l \leq p - 1$.

$$\theta(j) = \theta^{l+1}(i_1) \quad \text{y} \quad \sigma \circ \tau(j) = \sigma(\tau(j)) = \sigma(\theta^l(i_1)) = \theta^{l+1}(i_1) = \theta(j)$$

(Definición: Como j está en el soporte de σ, $\tau(j) = \theta(j)$, luego $\sigma(\theta(j)) = \theta(j)$. Y como σ es el ciclo $(i_1, \ldots, \theta^{p-1}(i_1))$, $\sigma(j) = \theta(j)$). En cualquier caso $\theta(j) = (\sigma \circ \tau)(j)$ por lo tanto $\theta = \sigma \circ \tau$.

Ahora τ mueve a los elementos $\{i_1, \ldots, i_{k+1}\} \setminus \{i_1, \sigma(i_1), \ldots, \sigma^{p-1}(i_1)\}$ cuya cardinalidad es menor o igual a k. Por hipótesis de inducción τ es producto de ciclos disjuntos y por lo tanto θ lo es.

Unicidad: Suponga ahora que

$$\theta = \sigma_1 \ldots \sigma_k = \tau_1 \ldots \tau_l$$

Con los σ_i's ciclos disjuntos a pares y los τ_i's ciclos disjuntos a pares.

Si $\theta = id$ no hay nada que ver, si no, sea i_1 un elemento que mueve θ, entonces existen $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq l$ tales que σ_i, τ_j mueven a i_1, de hecho i, j son únicos pues los σ_i's y los τ_i's son disjuntos o más aún como son disjuntos conmutan, por lo que podemos pensar que $i = 1 = j$, en este caso $\sigma_2, \ldots, \sigma_k, \tau_2, \ldots, \tau_l$ no mueven a i_1.

Además $\sigma_1 = (i_1, \sigma_1(i_1), \ldots, \sigma_1^{s-1}(i_1))$, $\tau_1 = (i_1, \tau(i_1), \ldots, \tau^{r-1}(i_1))$ con s y r los órdenes de σ_1 y τ_1 respectivamente. Como los σ_i's son disjuntos σ_j no mueve a ninguno de $\{i_1, \sigma(i_1), \ldots, \sigma^{k-1}(i_1)\}$ $\forall 1 < j \leq k$. Análogamente τ_j no mueve a ninguno de

$\{i_1, \tau(i_1), \ldots, \tau^{l-1}(i_1)\}$ $\forall 1 < j \leq l$. Por tanto para $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \theta^m(i_1) &= (\sigma_1 \ldots \sigma_k)^m(i_1) = (\sigma_1 \ldots \sigma_k)^{m-1}((\sigma_1 \ldots \sigma_k)(i_1)) \\ &= (\sigma_1 \ldots \sigma_k)^{m-1}(\sigma_1(i_1)) = \cdots = \sigma_1^m(i_1) \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \theta^m(i_1) &= \tau_1^m(i_1) \\ \sigma_1^m(i_1) &= \tau_1^m(i_1) \end{aligned}$$

Ahora podemos suponer que $s \leq r$, entonces

$$i_1 = \sigma_1^s(i_1) = \tau_1^s(i_1)$$

$s > r - 1$ o $s \geq r$, de donde $s = r$.

Más aún, como $\sigma_1^m(i_1) = \tau_1^m(i_1)$ $\forall m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sigma_1 = \tau_1$. Ahora de la igualdad $\theta = \sigma_1 \ldots \sigma_k = \tau_1 \ldots \tau_l$ se obtiene $\sigma_2 \ldots \sigma_k = \tau_2 \ldots \tau_l$. Podemos suponer $k \leq l$. En cuyo caso realizando el mismo proceso obtenemos $\sigma_k = \tau_k$ y $Id = \tau_{k+1} \ldots \tau_l$. Como los τ_j son disjuntos a pares necesariamente $\tau_{k+1} \ldots \tau_l$ tienen longitud uno. Por lo tanto $l = k$. $\square$

Corolario 3.2.1. *Sea $\theta \in S_n$, entonces el orden de θ es el mínimo común múltiplo de los órdenes de los ciclos que aparecen en su factorización.*

Demostración. Sea $\theta = \sigma_1 \ldots \sigma_k$ con los σ_i's ciclos disjuntos a pares y $n_i = o(\sigma_i)$, $m = [n_1, \ldots, n_k]$ entonces

$$\theta^m = (\sigma_1 \ldots \sigma_k)^m = \sigma_1^m \ldots \sigma_k^m = id$$

De donde $o(\theta) \mid m$. Si $o(\theta) < m$, $Id = \theta^{o(\theta)} = \sigma_1^{o(\theta)} \ldots \sigma_k^{o(\theta)}$, por lo cual $n_i \mid o(\theta)$ $\forall i$, de donde $m = [n_1, \ldots, n_k] \mid o(\theta)$ de donde $m = o(\theta)$. $\square$

Observación 3.3. *1. Sea $(i\ j)$ una transposición de S_n, entonces $(i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$.*

2. Sean $x_1, \dots, x_n$ variables. Definimos

$$P_n = P_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j) \quad \forall n \ge 2$$

y hagamos actuar el grupo de permutaciones sobre P_n de la siguiente forma. Para $\theta \in S_n$:

$$\theta(P_n) = P_n^{\theta} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_{\theta(i)} - x_{\theta(j)})$$

3. Si $1 < k \le n$ y $\theta = (1, k)$, entonces $\theta(P_n) = -P_n$.

4. Si $\theta = (i\ j)$ es una transposición, $\theta(P_n) = -P_n$.

5. Sea $\theta \in S_n$ un r-ciclo, entonces θ es producto de transposiciones (se puede representar como un producto de transposiciones, no necesariamente única).

Demostración de 1). Queremos demostrar que la transposición $(i\ j)$ es igual al producto $(1\ i)(1\ j)(1\ i)$. Llamemos $\sigma = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$ y evaluemos su acción sobre los elementos de $\{1, \dots, n\}$ actuando de derecha a izquierda (orden de composición de funciones). Asumimos $1, i, j$ distintos (si alguno es igual, la igualdad es trivial).

- Para el elemento 1:
$$1 \xrightarrow{(1\ i)} i \xrightarrow{(1\ j)} i \xrightarrow{(1\ i)} 1$$
Luego $\sigma(1) = 1$. (El 1 queda fijo, lo cual es correcto pues $(i\ j)$ no mueve al 1).

- Para el elemento i:
$$i \xrightarrow{(1\ i)} 1 \xrightarrow{(1\ j)} j \xrightarrow{(1\ i)} j$$
Luego $\sigma(i) = j$.

- Para el elemento j:
$$j \xrightarrow{(1\ i)} j \xrightarrow{(1\ j)} 1 \xrightarrow{(1\ i)} i$$
Luego $\sigma(j) = i$.

- Para cualquier otro elemento $k \notin \{1, i, j\}$: Todas las transposiciones en el producto fijan a k, por lo tanto $\sigma(k) = k$.

Como σ intercambia i con j y deja fijos a los demás elementos (incluido el 1), concluimos que $\sigma = (i\ j)$. $\square$

Demostración de 2). Queremos verificar que la acción definida cumple con la propiedad de grupo $(\tau \circ \theta)(P_n) = \tau(\theta(P_n))$.

Recordemos que la acción de una permutación σ sobre un polinomio en variables $x_1, \ldots, x_n$ consiste en reemplazar cada subíndice k por $\sigma(k)$. Es decir, σ actúa sobre las posiciones de las variables.

Sea $P_n = \prod(x_i - x_j)$. Primero aplicamos θ:

$$\theta(P_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\theta(i)} - x_{\theta(j)})$$

Llamemos $Q(x_1, \ldots, x_n)$ a este nuevo polinomio. Notemos que el término que ocupaba la posición asociada al índice k ahora tiene el índice $\theta(k)$.

Ahora aplicamos τ al polinomio Q. La regla dice que τ reemplaza cualquier variable con índice m por la variable con índice $\tau(m)$. En Q, tenemos variables de la forma $x_{\theta(i)}$. Aquí el índice es $m = \theta(i)$. Al aplicar τ, reemplazamos $x_{\theta(i)}$ por $x_{\tau(\theta(i))}$.

$$\tau(\theta(P_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\tau(\theta(i))} - x_{\tau(\theta(j))})$$

Por otro lado, consideremos la permutación compuesta $\rho = \tau \circ \theta$. Si aplicamos ρ directamente a P_n, reemplazamos cada índice k por $\rho(k) = \tau(\theta(k))$.

$$(\tau \circ \theta)(P_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{(\tau\circ\theta)(i)} - x_{(\tau\circ\theta)(j)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\tau(\theta(i))} - x_{\tau(\theta(j))})$$

Comparando ambas expresiones, tenemos que $(\tau \circ \theta)(P_n) = \tau(\theta(P_n))$. $\square$

Demostración de 3). Procedamos por inducción sobre n.

Para $n = 2$, tenemos $1 < k \leq 2 \implies k = 2$, luego $\theta = (1, 2)$.

$$\theta(P_2) = \theta(x_1 - x_2) = x_{\theta(1)} - x_{\theta(2)} = x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2) = -P_2$$

Suponga el resultado cierto para n, es decir, para $1 < k \leq n$. Note que:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \\ &= P_n \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \end{aligned}$$

Caso A: Si $1 < k \leq n$, entonces $\theta = (1, k) \in S_n \subseteq S_{n+1}$ (fija a $n + 1$).

$$\begin{aligned} \theta(P_{n+1}) &= \theta\left(P_n \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{n+1})\right) \\ &= \theta(P_n) \cdot \theta\left(\prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{n+1})\right) \\ &\overset{\text{H.I.}}{=} (-P_n) \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (x_{\theta(i)} - x_{n+1}) \end{aligned}$$

Como θ solo permuta los elementos $\{1, \ldots, n\}$, el conjunto de factores en la productoria es el mismo (solo cambia el orden), por lo tanto el producto permanece invariante.

$$= -P_n \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{n+1}) = -P_{n+1}$$

Caso B: Si $k = n+1$, entonces $\theta = (1, n+1)$. Descomponemos P_{n+1} cuidadosamente:

$$\begin{aligned}
\theta(P_{n+1}) &= \theta \left[\prod_{1<i<j\leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1<j\leq n} (x_1 - x_j) \cdot \prod_{1<i<n+1} (x_i - x_{n+1}) \cdot (x_1 - x_{n+1}) \right] \\
&= \prod_{1<i<j\leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1<j\leq n} (x_{n+1} - x_j) \cdot \prod_{1<i<n+1} (x_i - x_1) \cdot (x_{n+1} - x_1) \\
&= \prod_{1<i<j\leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1<j\leq n} [-(x_j - x_{n+1})] \cdot \prod_{1<i<n+1} [-(x_1 - x_i)] \cdot [-(x_1 - x_{n+1})] \\
&- \left[\prod_{1<i<j\leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1<j\leq n} (x_j - x_{n+1}) \cdot \prod_{1<i<n+1} (x_1 - x_i) \cdot (x_1 - x_{n+1}) \right] \\
&= - \left(\prod_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1\leq j\leq n} (x_j - x_{n+1}) \right) \\
&= P_n \cdot \prod_{1\leq i\leq n} (x_i - x_{n+1}) = -P_{n+1}
\end{aligned}$$

□

Demostración de 4). Si $\theta = (i\ j)$ es una transposición, por la observación 1 sabemos que $(i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$. Usando la propiedad 3 repetidamente:

$$\begin{aligned}
\theta(P_n) &= [(1\ j)(1\ i)(1\ j)]P_n \\
&= (1\ j)((1\ i)((1\ j)P_n)) \\
&= (1\ j)((1\ i)(-P_n)) \\
&= (1\ j)(-(-P_n)) \\
&= (1\ j)(P_n) = -P_n
\end{aligned}$$

□

Demostración de 5). Sea $\theta = (i_1, \ldots, i_k)$ un k-ciclo. Podemos descomponerlo verificando la acción sobre los elementos:

$$(i_1, \ldots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_{k-2}, i_{k-1})(i_{k-1}, i_k)$$

□

Ejemplo 3.4. $(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)$. *También se puede escribir de forma no única, por ejemplo:* $(1\ 2\ 3) = (4\ 5)(1\ 2)(2\ 3)(4\ 5) = (1\ 2)(1\ 2)(1\ 2)(2\ 3)(3\ 2)(3\ 2)$.

Teorema 3.2.2. *Sea $\theta \in S_n$, entonces θ se representa siempre como un producto de una cantidad par de transposiciones ó siempre como un producto de una cantidad impar de transposiciones.*

Demostración. Por un teorema anterior θ es producto de ciclos disjuntos y cada ciclo es producto de transposiciones, luego θ es producto de transposiciones. Suponga que:

$$\theta = \sigma_1 \dots \sigma_k = \tau_1 \dots \tau_s \quad \text{con}$$

σ_i's y τ_j's transposiciones, entonces para P_n el polinomio definido anteriormente

$$\theta(P_n) = (\sigma_1 \dots \sigma_k)(P_n) = (-1)^k P_n = (\tau_1 \dots \tau_s)P_n = (-1)^s P_n$$

De donde $(-1)^k = (-1)^s$ o $(-1)^{k-s} = 1$, es decir, $k - s$ siempre es par, luego ambos son pares o ambos son impares. $\square$

Definición 3.2.3. *Sea $\theta \in S_n$ diremos que θ es par si al representarla como producto de transposiciones consta de un número par de ellas. Es impar en caso contrario.*

Observación 3.4. *Sea $A_n = \{\theta \in S_n \mid \theta \text{ es par}\}$ $\forall n \geq 2$, entonces $A_n \leq S_n$, con $[S_n : A_n] = 2$ y por lo tanto $A_n \trianglelefteq S_n$.*

Demostración. Primero probemos que es un subgrupo ($A_n \leq S_n$). Si $\theta \in A_n$, entonces $\theta = \tau_1 \dots \tau_s$ con $s = 2k$ y los τ_i's son transposiciones. Luego, el inverso es $\theta^{-1} = (\tau_1 \dots \tau_s)^{-1} = \tau_s^{-1} \dots \tau_1^{-1}$. Como la inversa de una transposición es ella misma ($\tau_i^{-1} = \tau_i$), tenemos $\theta^{-1} = \tau_s \dots \tau_1$, que sigue teniendo $s = 2k$ transposiciones. Así, $\theta^{-1} \in A_n$.

Si además $\theta_1 \in A_n$, digamos $\theta_1 = \rho_1 \dots \rho_r$ con $r = 2l$ y ρ_j's transposiciones. Entonces el producto $\theta \circ \theta_1 = \tau_1 \dots \tau_s \rho_1 \dots \rho_r$ consta de $s + r = 2k + 2l = 2(k + l)$ transposiciones. Como $2(k + l)$ es par, $\theta \circ \theta_1 \in A_n$. Por lo tanto $A_n \leq S_n$.

Ahora analicemos el índice. Si $\theta \in S_n$, entonces: Si θ es par, $\theta \in A_n$. Si θ es impar, entonces $\theta \notin A_n$, es decir, $\theta A_n \neq A_n$.

Más aún, para cualquier otra permutación impar $\theta_1 \in S_n$, veamos que definen la misma clase lateral, es decir $\theta A_n = \theta_1 A_n$. Esto ocurre si y solo si $\theta_1^{-1}\theta \in A_n$. Como θ y θ_1 son impares, podemos escribirlas como:

$$\theta = \tau_1 \dots \tau_{2k+1} \quad \text{y} \quad \theta_1 = \rho_1 \dots \rho_{2m+1}$$

con los τ_i y ρ_j transposiciones. Entonces:

$$\theta_1^{-1}\theta = (\rho_1 \dots \rho_{2m+1})^{-1}(\tau_1 \dots \tau_{2k+1}) = \rho_{2m+1} \dots \rho_1 \tau_1 \dots \tau_{2k+1}$$

El número total de transposiciones es $(2m + 1) + (2k + 1) = 2m + 2k + 2 = 2(m + k + 1)$, que es un número par. Por lo tanto $\theta_1^{-1}\theta \in A_n$, lo que implica $\theta A_n = \theta_1 A_n$.

Así que las clases laterales izquierdas son exactamente dos: A_n (las pares) y θA_n (las impares, donde θ es cualquier permutación impar fija). Luego, $[S_n : A_n] = 2$.

En particular, como 2 es el menor primo que divide a $|S_n| = n!$ (para $n \geq 2$), sabemos por un resultado anterior que cualquier subgrupo de índice igual al menor primo divisor del orden del grupo es normal. Así que $A_n \trianglelefteq S_n$. □

Teorema 3.2.3. $A_n = \langle \{\theta \in S_n \mid \theta \textit{ es un } 3\textit{-ciclo}\} \rangle, \ n \geq 3.$

Demostración. Sea $H = \langle \{\theta \in S_n \mid \theta \text{ es 3-ciclo}\} \rangle$. Sea θ un 3-ciclo, es decir, $\theta = (a_1, a_2, a_3)$, entonces

$$\theta = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \in A_n$$

luego

$$\langle \{\theta \in S_n \mid \theta \text{ es 3-ciclo}\} \rangle \subseteq A_n$$

Para la contensión inversa basta ver que cada producto de 2 transposiciones es un producto de 3-ciclos. Consideremos (a_1, a_2) y (b_1, b_2) 2 transposiciones.

Si $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$, entonces:

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1, a_2)(a_1, a_2) = id = (a_1, a_2, a_3)(a_1, a_3, a_2)$$

Si tiene un solo elemento distinto podemos suponer que son $(a_1, a_2), (a_2, b_2)$ con $a_1 \neq b_2$ y:

$$(a_1, a_2)(a_2, b_2) = (a_1, a_2, b_2)$$

Si no tienen elementos en común, es decir $(a_1, a_2)(b_1, b_2)$:

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1, a_2, b_1)(a_2, b_1, b_2)$$

En cualquier caso cada par de transposiciones es el producto de 3-ciclos, luego, cada permutación par es producto de 3-ciclos, así

$$A_n \subseteq \langle \{\theta \in S_n \mid \theta \text{ es 3-ciclo}\} \rangle \quad \text{y} \quad A_n = H$$

□

Teorema 3.2.4. *Sea $n \geq 2$, entonces A_n es el único subgrupo de índice 2 de S_n.*

Demostración. Si $n = 2$, $A_2 = \{e\}$ y es claro el resultado. Suponga $n \geq 3$ y sea $H \leq S_n$ tal que $[S_n : H] = 2$.

Probemos que H contiene a todos los 3-ciclos. Sea σ un 3-ciclo. Como $[S_n : H] = 2$, sabemos que H es un subgrupo normal de S_n ($H \trianglelefteq S_n$). Consideremos el grupo cociente S_n/H, el cual tiene orden 2. Por lo tanto, el cuadrado de cualquier elemento en el cociente es la identidad del cociente (H). Es decir:

$$(\sigma H)^2 = \sigma^2 H = H \implies \sigma^2 \in H$$

Ahora, dado que σ es un 3-ciclo, su orden es 3, por lo que $\sigma^3 = id$. Esto implica que $\sigma^4 = \sigma$. Podemos escribir σ como:

$$\sigma = \sigma^4 = (\sigma^2)^2$$

Como ya demostramos que $\sigma^2 \in H$ y H es un subgrupo (cerrado bajo la operación), entonces el cuadrado de σ^2 también debe estar en H. Por lo tanto, $\sigma \in H$.

Esto demuestra que H contiene a todos los 3-ciclos. Como sabemos por un teorema anterior que A_n está generado por los 3-ciclos, concluimos que $A_n \subseteq H$.

Finalmente, utilizamos la multiplicidad del índice:

$$[S_n : A_n] = [S_n : H][H : A_n]$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$2 = 2 \cdot [H : A_n] \implies [H : A_n] = 1$$

Lo cual implica que $H = A_n$. $\square$

Observación 3.5. *Consideremos el grupo multiplicativo* $\{1, -1\}$ *con la operación definida por:*

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1(-1) = -1, \quad (-1)(-1) = 1$$

Definamos la función $\varphi : S_n \to \{1, -1\}$ *como:*

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 1 & si\ \theta\ es\ par \\ -1 & si\ \theta\ es\ impar \end{cases}$$

Demostración. φ es homomorfismo. a) Si θ, θ_1 son pares, $\theta \cdot \theta_1$ es par y $\varphi(\theta \cdot \theta_1) = 1 = \varphi(\theta)\varphi(\theta_1)$. Si θ es par y θ_1 impar o viceversa, $\theta \cdot \theta_1$ es impar, luego $\varphi(\theta\theta_1) = -1 = \varphi(\theta)\varphi(\theta_1)$. Si θ y θ_1 son impares $\varphi(\theta) = -1 = \varphi(\theta_1)$ y $\theta\theta_1$ es par y

$$\varphi(\theta\theta_1) = 1 = (-1)(-1) = \varphi(\theta)\varphi(\theta_1)$$

En cualquier caso $\varphi(\theta\theta_1) = \varphi(\theta)\varphi(\theta_1)$. Más aún $\theta \in \text{Ker}\ \varphi$ si y solo si $\varphi(\theta) = 1$ si y solo si θ es par si y solo si $\theta \in A_n$ si y solo si $\text{Ker}\ \varphi = A_n$. $\square$

Nota 3.2.2. φ *es sobreyectiva.*

$$\frac{S_n}{A_n} \cong \{1, -1\} \implies [S_n : A_n] = 2 \quad y\ A_n \trianglelefteq S_n$$

Definición 3.2.4. *Sea* $\theta, \theta_1 \in G$, G *grupo diremos que* θ *y* θ_1 *son conjugados si existe* $\sigma \in G$ *tal que* $\theta = \sigma\theta_1\sigma^{-1}$ *(conjugación).*

Observación 3.6. *Ser conjugado determina una relación de equivalencia, es decir, la relación* $\theta \sim \theta_1$ *si y solo si* θ *y* θ_1 *son conjugados es de equivalencia.*

i) Reflexiva: $\theta \sim \theta$ *pues* $\theta = e\theta e^{-1}$.

ii) Simétrica: $\theta \sim \theta_1$ *si y solo si existe* $\sigma \in G$ *tal que* $\theta = \sigma\theta_1\sigma^{-1}$ *si y solo si existe* $\sigma \in G$ *tal que* $\theta_1 = \sigma^{-1}\theta\sigma$ *si y solo si existe* $\sigma^{-1} \in G$ *tal que* $\theta_1 = \sigma^{-1}\theta(\sigma^{-1})^{-1}$ *si y solo si* $\theta_1 \sim \theta$.

iii) Transitiva: $\theta \sim \theta_1$ *y* $\theta_1 \sim \theta_2$ *entonces existen* $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ *tales que* $\theta = \sigma_1\theta_1\sigma_1^{-1}$, $\theta_1 = \sigma_2\theta_2\sigma_2^{-1}$, *entonces*

$$\theta = \sigma_1(\sigma_2\theta_2\sigma_2^{-1})\sigma_1^{-1} = (\sigma_1\sigma_2)(\theta_2)(\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}) = (\sigma_1\sigma_2)(\theta_2)(\sigma_1\sigma_2)^{-1}$$

y $\sigma_1\sigma_2 \in G$, *luego* $\theta \sim \theta_2$.

A las clases de equivalencia correspondientes las llamaremos clases de conjugación. Denotemos a la clase de conjugación de θ *por* $[\theta]$. *Entonces para* $\theta \in G$, $[\theta] = \{\theta\}$ *si y solo si* $\theta \in Z(G)$, $[\theta] = \{\sigma\theta\sigma^{-1} \mid \sigma \in G\} = \{\theta\}$ *si y solo si* $\sigma\theta\sigma^{-1} = \theta \ \forall\sigma \in G$ *si y solo si* $\sigma\theta = \theta\sigma \ \forall\sigma \in G$ *si y solo si* $\theta \in Z(G)$.

Definición 3.2.5. *Sean* $\theta_1, \theta_2 \in S_n$, *diremos que* θ_1 *y* θ_2 *tienen la misma estructura en ciclos cuando* $\theta_1 = \sigma_1 \dots \sigma_s$, $\theta_2 = \tau_1 \dots \tau_k$ *son las respectivas factorizaciones de* θ_1 *y* θ_2 *como producto de ciclos disjuntos, entonces* $s = k$ *y salvo el orden* σ_i *y* τ_i *son conjugados (tienen la misma longitud)* $\forall 1 \leq i \leq s = k$.

Ejemplo 3.5.

1. *Considere* S_6. $\theta_1 = (1\ 3)(4\ 5\ 6)$, $\theta_2 = (2\ 4)(1\ 3\ 5)$. θ_1 *y* θ_2 *tienen la misma estructura en ciclos.*

2. *Considere* S_{10}. $\theta_1 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)$, $\theta_2 = (3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10)$. θ_1 *y* θ_2 *tienen la misma estructura en ciclos.*

Observación 3.7. *Si* $\theta = (a_1, \dots, a_r)$ *es un* r*-ciclo y* $\gamma \in S_n$, *entonces:*

$$\gamma\theta\gamma^{-1} = (\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_r))$$

Es decir, conjugar un ciclo θ *por* γ *resulta en un ciclo de la misma longitud obtenido aplicando* γ *a los elementos de* θ.

Demostración. En efecto. Si $a = \gamma(a_i)$ para algún $1 \leq i \leq r$, entonces $\gamma^{-1}(a) = a_i$.

$$(\gamma\theta\gamma^{-1})(a) = (\gamma \circ \theta)(\gamma^{-1}(a)) = \gamma(\theta(a_i)) = \gamma(a_{i+1})$$

(Con la convención $a_{r+1} = a_1$). Esto coincide con la acción del ciclo $(\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_r))$ sobre el elemento $a = \gamma(a_i)$.

Si $a \notin \{\gamma(a_1), \ldots, \gamma(a_r)\}$, entonces $\gamma^{-1}(a) \notin \{a_1, \ldots, a_r\}$. Como θ fija los elementos fuera de su soporte:

$$\theta(\gamma^{-1}(a)) = \gamma^{-1}(a)$$

Así:

$$(\gamma \circ \theta \circ \gamma^{-1})(a) = \gamma(\theta(\gamma^{-1}(a))) = \gamma(\gamma^{-1}(a)) = a$$

Por lo tanto, $\gamma\theta\gamma^{-1}$ fija a todo elemento fuera de $\{\gamma(a_1), \ldots, \gamma(a_r)\}$.

En conclusión:

$$\gamma\theta\gamma^{-1} = (\gamma(a_1) \ldots \gamma(a_r))$$

□

Teorema 3.2.5. *Sean $\theta_1, \theta_2 \in S_n$, entonces θ_1 y θ_2 tienen la misma estructura en ciclos si y solo si θ_1 y θ_2 son conjugados.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que θ_1 y θ_2 tienen la misma estructura en ciclos. Sean $\theta_1 = \sigma_1 \ldots \sigma_k$ y $\theta_2 = \tau_1 \ldots \tau_k$ sus respectivas descomposiciones en ciclos disjuntos (incluyendo los ciclos de longitud 1 para cubrir todo el conjunto $\{1, \ldots, n\}$). Podemos ordenar los ciclos de tal manera que σ_i y τ_i tengan la misma longitud para todo $1 \leq i \leq k$.

Denotemos los elementos de cada ciclo como:

$$\sigma_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,r_i}) \quad \text{y} \quad \tau_i = (b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots, b_{i,r_i})$$

donde r_i es la longitud del ciclo i.

Definamos la permutación $\gamma \in S_n$ tal que aplique cada elemento de σ_i en el elemento correspondiente de τ_i. Es decir:

$$\gamma(a_{i,j}) = b_{i,j} \quad \forall 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq r_i$$

Como los ciclos son disjuntos y cubren todo el conjunto, γ es una biyección bien definida.

Ahora verifiquemos la conjugación para cada ciclo. Por la observación anterior:

$$\gamma\sigma_i\gamma^{-1} = (\gamma(a_{i,1}), \ldots, \gamma(a_{i,r_i})) = (b_{i,1}, \ldots, b_{i,r_i}) = \tau_i$$

Entonces:

$$\gamma\theta_1\gamma^{-1} = \gamma(\sigma_1 \ldots \sigma_k)\gamma^{-1} = (\gamma\sigma_1\gamma^{-1}) \ldots (\gamma\sigma_k\gamma^{-1}) = \tau_1 \ldots \tau_k = \theta_2$$

Por lo tanto, θ_1 y θ_2 son conjugados.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que θ_1 y θ_2 son conjugados. Es decir, existe $\gamma \in S_n$ tal que $\theta_2 = \gamma\theta_1\gamma^{-1}$. Sea $\theta_1 = \sigma_1 \ldots \sigma_k$ la descomposición de θ_1 en ciclos disjuntos. Entonces:

$$\theta_2 = \gamma(\sigma_1 \ldots \sigma_k)\gamma^{-1} = (\gamma\sigma_1\gamma^{-1}) \ldots (\gamma\sigma_k\gamma^{-1})$$

Por la observación anterior, cada término $(\gamma\sigma_i\gamma^{-1})$ es un ciclo de la misma longitud que σ_i. Además, como los σ_i son disjuntos a pares, sus conjugados también lo son (si σ_i y σ_j no mueven elementos en común, sus conjugados tampoco).

Por la unicidad de la descomposición en ciclos disjuntos (salvo el orden), concluimos que la estructura de ciclos de θ_2 es exactamente la misma que la de θ_1 (los mismos ciclos transformados, conservando sus longitudes). $\square$

Corolario 3.2.2. *Sea $n \geq 3$.*

a) Si $N \trianglelefteq A_n$ y N contiene un 3-ciclo, entonces $N = A_n$.

b) Si $N \trianglelefteq S_n$ y N contiene una transposición (2-ciclo), entonces $N = S_n$.

Demostración. **a)** Supongamos que $N \trianglelefteq A_n$ contiene un 3-ciclo $\theta_1 = (a_1\ a_2\ a_3)$. Queremos ver que N contiene a cualquier otro 3-ciclo $\theta_2 = (b_1\ b_2\ b_3)$, y dado que los 3-ciclos generan A_n, esto implicará $N = A_n$.

Sabemos que en S_n todos los 3-ciclos son conjugados. Es decir, existe $\gamma \in S_n$ tal que:

$$\theta_2 = \gamma\theta_1\gamma^{-1}$$

Analicemos si podemos garantizar que el conjugador esté en A_n (es decir, que sea par):

Caso $n \geq 5$: Si $\gamma \in A_n$, entonces $\theta_2 \in N$ por la normalidad de N en A_n. Si $\gamma \notin A_n$ (es impar), como $n \geq 5$, existen al menos dos elementos $\{c_1, c_2\}$ en $\{1, \ldots, n\}$ que no están en el soporte de θ_1 (que tiene 3 elementos). Definimos $\gamma' = \gamma(c_1\ c_2)$. Como $(c_1\ c_2)$ es una transposición disjunta de θ_1, conmuta con θ_1. Además, γ' es par (producto de impar por impar). Entonces:

$$\gamma'\theta_1(\gamma')^{-1} = \gamma(c_1\ c_2)\theta_1(c_1\ c_2)^{-1}\gamma^{-1} = \gamma\theta_1\gamma^{-1} = \theta_2$$

Como $\gamma' \in A_n$ y $N \trianglelefteq A_n$, concluimos que $\theta_2 \in N$.

Caso $n = 3$: $A_3 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Si N contiene un 3-ciclo, por ejemplo $(1\ 2\ 3)$, al ser subgrupo debe contener a su inverso $(1\ 3\ 2)$ y a la identidad. Por lo tanto, N contiene a todos los elementos de A_3, así que $N = A_3$.

Caso $n = 4$: En A_4, los 3-ciclos se dividen en dos clases de conjugación (por ejemplo, la clase de $(1\ 2\ 3)$ y la de $(1\ 3\ 2)$). Supongamos que N contiene a $\theta = (1\ 2\ 3)$. Como $N \trianglelefteq A_4$, N contiene a toda la clase de conjugación de θ en A_4 (que son 4 elementos: $(1\ 2\ 3), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)$). Además, N debe contener a los inversos de estos elementos (por ejemplo, $(1\ 3\ 2)$). Al contener elementos de ambas clases de 3-ciclos y ser cerrado bajo productos, N contendrá a todos los 3-ciclos. Como los 3-ciclos generan A_4, entonces $N = A_4$.

En todos los casos, $N = A_n$.

b) Sea $N \trianglelefteq S_n$ tal que contiene una transposición $\tau = (a\ b)$. Como N es normal en S_n, contiene a todos los conjugados de τ. Sabemos que en S_n cualquier transposición es conjugada de τ (tienen la misma estructura de ciclos). Por lo tanto, N contiene a todas las transposiciones. Como todo elemento de S_n se puede escribir como producto de transposiciones, concluimos que $N = S_n$. $\square$

Definición 3.2.6. *Sea G un grupo. Diremos que G es simple si sus únicos subgrupos normales son $\{e\}$ y el mismo G.*

Teorema 3.2.6. *Sea $n \geq 5$, entonces el grupo alternante A_n es simple.*

Demostración. Sea $H \trianglelefteq A_n$ con $H \neq \{e\}$. Probaremos que H contiene un 3-ciclo. Por el corolario anterior, esto implicará que $H = A_n$. Sea $\alpha \in H$ con $\alpha \neq e$. Analicemos la descomposición de α en ciclos disjuntos:

Caso 1: α contiene un ciclo de longitud $r \geq 4$. Sea $\alpha = (a_1\ a_2\ a_3\ \dots\ a_r)\tau$, donde τ son los demás ciclos disjuntos. Sea $\beta = (a_1\ a_2\ a_3) \in A_n$. Consideremos el conmutador $\rho = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in H$ (pues $H \trianglelefteq A_n$).

$$\begin{aligned}\rho &= \alpha(a_1\ a_2\ a_3)\alpha^{-1}(a_1\ a_3\ a_2)\\ &= (\alpha(a_1)\ \alpha(a_2)\ \alpha(a_3))(a_1\ a_3\ a_2)\\ &= (a_2\ a_3\ a_4)(a_1\ a_3\ a_2)\\ &= (a_1\ a_4\ a_2)\end{aligned}$$

Así, $\rho = (a_1\ a_4\ a_2)$ es un 3-ciclo que pertenece a H.

Caso 2: α contiene 3-ciclos en su descomposición. Si α es un 3-ciclo, ya terminamos. Si no, $\alpha = (a_1\ a_2\ a_3)(a_4\ a_5\ a_6)\dots$. Sea $\beta = (a_1\ a_2\ a_4) \in A_n$. Consideremos $\rho = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in H$:

$$\begin{aligned}\rho &= (\alpha(a_1)\ \alpha(a_2)\ \alpha(a_4))(a_1\ a_4\ a_2)\\ &= (a_2\ a_3\ a_5)(a_1\ a_4\ a_2)\\ &= (a_1\ a_4\ a_3\ a_5\ a_2)\end{aligned}$$

ρ es un 5-ciclo. Aplicando el Caso 1 a ρ, concluimos que H contiene un 3-ciclo.

Caso 3: α es producto de transposiciones disjuntas.

i) $\alpha = (a_1\ a_2)(a_3\ a_4)$. (Solo dos transposiciones). Como $n \geq 5$, existe $a_5 \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Sea $\beta = (a_1\ a_2\ a_5) \in A_n$.

$$\rho = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = (a_2\ a_1\ a_5)(a_1\ a_5\ a_2) = (a_1\ a_5)(a_2\ a_5) = (a_1\ a_2\ a_5)$$

Obtenemos directamente un 3-ciclo en H.

ii) $\alpha = (a_1\ a_2)(a_3\ a_4)(a_5\ a_6)\dots$. (Más de dos transposiciones). Sea $\beta = (a_1\ a_2\ a_3) \in A_n$.

$$\rho = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = (a_2\ a_1\ a_4)(a_1\ a_3\ a_2) = (a_1\ a_4)(a_2\ a_3)$$

Ahora ρ tiene la forma del subcaso (i) anterior. Aplicando el argumento de (i) a ρ, obtenemos un 3-ciclo.

En cualquier caso, H contiene un 3-ciclo. Por lo tanto, $H = A_n$. □

Teorema 3.2.7. *A_4 no tiene subgrupos de orden 6.*

Demostración. Sabemos que $|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$. Supongamos que existe $H \leq A_4$ tal que $|H| = 6$. Entonces el índice es $[A_4 : H] = \frac{12}{6} = 2$.

Sabemos que todo subgrupo de índice 2 es normal, por lo tanto $H \trianglelefteq A_4$. Además, en el grupo cociente A_4/H (que es de orden 2), el cuadrado de cualquier elemento es la identidad. Esto significa que para todo $\sigma \in A_4$, $\sigma^2 H = H$, es decir, $\sigma^2 \in H$.

Consideremos los 3-ciclos de A_4. Sea θ un 3-ciclo. Entonces $\theta^3 = e$, de donde $\theta^4 = \theta$. Podemos escribir $\theta = (\theta^2)^2$. Como $\theta^2 \in H$ (por la propiedad del índice 2), y H es subgrupo, entonces $(\theta^2)^2 \in H$, luego $\theta \in H$.

Esto implica que H debe contener a **todos** los 3-ciclos de A_4. Los 3-ciclos en A_4 son: $(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)$. Hay 8 3-ciclos en total.

Por lo tanto, $|H| \geq 8$, lo cual contradice la hipótesis de que $|H| = 6$. Concluimos que no existe tal subgrupo. $\square$

CAPÍTULO 4

Acciones de Grupos

4.1. Acciones de Grupo

Definición 4.1.1. *Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Diremos que G actúa en X (o que X es un G-conjunto) si existe un homomorfismo $\varphi : G \to S_X$, donde S_X es el grupo de permutaciones de X (biyeciones de X en sí mismo).*

Ejemplo 4.1. ***Teorema de Cayley:*** *Todo grupo G actúa en sí mismo. Sea $X = G$ y definamos $\varphi : G \to S_G$ dada por $\varphi(g) = f_g$, donde $f_g : G \to G$ se define como $f_g(a) = ga$ para todo $a \in G$ (traslación izquierda).*

Veamos que $f_g \in S_G$:

1. *f_g es inyectiva: Si $f_g(a) = f_g(b)$, entonces $ga = gb$. Multiplicando por g^{-1} a la izquierda, obtenemos $a = b$.*

2. *f_g es sobreyectiva: Sea $b \in G$. Queremos encontrar a tal que $f_g(a) = b$. Tomamos $a = g^{-1}b$, entonces $f_g(g^{-1}b) = g(g^{-1}b) = (gg^{-1})b = b$.*

Además, φ es un homomorfismo de grupos: Para $g, h \in G$, queremos ver que $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$. Evaluando en un elemento $a \in G$:

$$\varphi(gh)(a) = f_{gh}(a) = (gh)a = g(ha) = f_g(ha) = f_g(f_h(a)) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(a)$$

Por lo tanto, $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$.

Teorema 4.1.1. *Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *G actúa en X (existe un homomorfismo $\varphi : G \to S_X$).*
2. *Existe una función $\cdot : G \times X \to X$, denotada por $(g, x) \mapsto g \cdot x$, tal que:*
   a) *$e \cdot x = x$ para todo $x \in X$.*
   b) *$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que existe un homomorfismo $\varphi : G \to S_X$. Para cada $g \in G$, $\varphi(g)$ es una permutación de X, es decir, una función biyectiva $\varphi(g) : X \to X$. Definamos la función $\cdot : G \times X \to X$ mediante:

$$g \cdot x = (\varphi(g))(x)$$

para todo $g \in G$ y $x \in X$.

Verifiquemos las dos condiciones de la definición de acción:

(i) Como φ es un homomorfismo de grupos, envía el neutro de G al neutro de S_X. Es decir, $\varphi(e) = Id_X$ (la función identidad en X). Entonces, para cualquier $x \in X$:

$$e \cdot x = (\varphi(e))(x) = Id_X(x) = x$$

(ii) Sean $g, h \in G$ y $x \in X$. Por la definición de la operación y la propiedad de homomorfismo de φ:

$$(gh) \cdot x = (\varphi(gh))(x)$$

Como φ es homomorfismo, $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$. Así:

$$(\varphi(gh))(x) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x)$$

Por la definición de composición de funciones:

$$(\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) = \varphi(g)(\varphi(h)(x))$$

Usando nuevamente la definición de la acción ($g \cdot y = \varphi(g)(y)$):

$$\varphi(g)(\varphi(h)(x)) = g \cdot (\varphi(h)(x)) = g \cdot (h \cdot x)$$

Por lo tanto, $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe una función $\cdot : G \times X \to X$ que satisface las condiciones (a) y (b). Queremos construir un homomorfismo $\varphi : G \to S_X$. Para cada $g \in G$, definamos la función $\sigma_g : X \to X$ dada por:

$$\sigma_g(x) = g \cdot x$$

Primero, debemos demostrar que σ_g es una biyección (es decir, $\sigma_g \in S_X$).

1. σ_g es inyectiva: Supongamos que $\sigma_g(x) = \sigma_g(y)$ para $x, y \in X$.

$$g \cdot x = g \cdot y$$

   Operamos con g^{-1} por la izquierda (usando la propiedad (b)):

$$g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot y)$$
$$(g^{-1}g) \cdot x = (g^{-1}g) \cdot y$$
$$e \cdot x = e \cdot y$$

   Usando la propiedad (a) ($e \cdot x = x$):

$$x = y$$

2. σ_g es sobreyectiva: Sea $y \in X$ arbitrario. Queremos encontrar $x \in X$ tal que $\sigma_g(x) = y$. Proponemos $x = g^{-1} \cdot y$. Evaluamos $\sigma_g(x)$:

$$\sigma_g(g^{-1} \cdot y) = g \cdot (g^{-1} \cdot y)$$

   Por la propiedad (b):

$$g \cdot (g^{-1} \cdot y) = (gg^{-1}) \cdot y = e \cdot y$$

   Por la propiedad (a):

$$e \cdot y = y$$

   Así, σ_g es sobreyectiva.

Al ser inyectiva y sobreyectiva, $\sigma_g \in S_X$.

Ahora definimos la función $\varphi : G \to S_X$ como $\varphi(g) = \sigma_g$. Veamos que φ es un homomorfismo de grupos. Sean $g, h \in G$. Queremos ver que $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$. Dos funciones son iguales si toman el mismo valor para todo elemento del dominio. Sea $x \in X$:

$$(\varphi(gh))(x) = \sigma_{gh}(x) = (gh) \cdot x$$

Por otro lado:

$$(\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) = \varphi(g)(\varphi(h)(x)) = \sigma_g(\sigma_h(x))$$
$$\sigma_g(\sigma_h(x)) = \sigma_g(h \cdot x) = g \cdot (h \cdot x)$$

Como la propiedad (b) nos dice que $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, concluimos que:

$$(\varphi(gh))(x) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) \quad \forall x \in X$$

Por lo tanto, $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$, y φ es un homomorfismo. □

Ejemplo 4.2. *1. G actúa en sí mismo por multiplicación izquierda (o simplemente por la operación del grupo). La acción está dada por* $\varphi : G \to S_G$ *o equivalentemente* $\tilde{\varphi} : G \times G \to G$ *definida por:*

$$(g, h) \mapsto gh$$

2. *Sea G un grupo, $H \leq G$ y $X = \{aH \mid a \in G\}$ el conjunto de clases laterales izquierdas. G actúa en X por traslación izquierda. La acción está definida por $\varphi : G \to S_X$, donde para cada $g \in G$, la función $f_g : X \to X$ es:*

$$f_g(aH) = (ga)H$$

   Equivalentemente, $\tilde{\varphi}(g, aH) = gaH$.

3. *Sea G un grupo y $X = \{H \mid H \leq G\}$ el conjunto de subgrupos de G. G actúa en X por conjugación. Definimos $\varphi : G \to S_X$ tal que $g \mapsto f_g$, con $f_g(H) = gHg^{-1}$. Verifiquemos que es una acción:*

   - $e \cdot H = eHe^{-1} = H$.
   - $(gh) \cdot H = (gh)H(gh)^{-1} = g(hHh^{-1})g^{-1} = g(h \cdot H)g^{-1}$.

4. *Sea G un grupo y $X = G$. G actúa en sí mismo por conjugación. Definimos la acción $\cdot : G \times G \to G$ como:*

$$g \cdot h = ghg^{-1}$$

5. *Sea $G = SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ y sea $X = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ el semiplano superior. Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, definimos la acción:*

$$A \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

   Se verifica que $I \cdot z = z$ y $A \cdot (B \cdot z) = (AB) \cdot z$.

6. *Sea $X = \mathbb{R}^2$ y G el grupo de rotaciones del plano (isomorfo a $SO(2)$):*

$$G = \{T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\}$$

   Entonces, para un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, su órbita es:

$$\mathcal{O}_{(x_0,y_0)} = \{T_\theta(x_0, y_0) \mid T_\theta \in G\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2\}$$

   Es decir, las órbitas son circunferencias centradas en el origen.

Definición 4.1.2. *Diremos que una acción de G en X es transitiva si existe $x \in X$ tal que su órbita cubre todo el conjunto, es decir:*

$$\mathcal{O}_x = G \cdot x = X$$

(Esto implica que solo existe una única órbita).

Definición 4.1.3. *Sea X un G-conjunto. Diremos que $x \in X$ es un punto fijo si $g \cdot x = x$ para todo $g \in G$. Esto es equivalente a cualquiera de las siguientes condiciones:*

- *La órbita de x es trivial:* $\mathcal{O}_x = \{x\}$.
- *El estabilizador de x es todo el grupo:* $St_G(x) = G$.

Observación 4.1. *Si X es un G-conjunto y $x \in X$, entonces el estabilizador $St_G(x)$ es un subgrupo de G.*

Demostración. Sean $g, h \in St_G(x)$. Entonces $g \cdot x = x$ y $h \cdot x = x$. Esto implica que $h^{-1} \cdot x = x$ (multiplicando por h^{-1}). Luego:

$$(gh^{-1}) \cdot x = g \cdot (h^{-1} \cdot x) = g \cdot x = x$$

Por lo tanto $gh^{-1} \in St_G(x)$, lo que prueba que es un subgrupo. □

Nota 4.1.1. *El conjunto de todos los puntos fijos de X bajo la acción de G se denota por X^G.*

Observación 4.2. *Sea X un G-conjunto, entonces las órbitas forman una partición de X. Para ver esto basta verificar que inducen una relación de equivalencia, es decir, la relación en X definida por $x \sim y$ si y solo si y y x están en la misma órbita (si y solo si $y = g \cdot x$ para algún $g \in G$) es de equivalencia.*

1. *Reflexiva: Existe $e \in G$ tal que $e \cdot x = x$, así $x \sim x$.*
2. *Simétrica: $x \sim y$, entonces existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$. Entonces $g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = e \cdot x = x$. Así, $x = g^{-1} \cdot y$, de donde $y \sim x$.*
3. *Transitiva: $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $y = g_1 \cdot x$, $z = g_2 \cdot y$. Entonces*
$$z = g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x$$
luego $x \sim z$.

En particular si $\mathcal{O}_x = Orb(x) = G \cdot x$, tenemos:

$$X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x = \left(\bigcup_{x \in X^G} \mathcal{O}_x \right) \cup \left(\bigcup_{x \notin X^G} \mathcal{O}_x \right) = \left(\bigcup_{x \in X^G} \{x\} \right) \cup \left(\bigcup_{x \notin X^G} \mathcal{O}_x \right)$$

En particular, si X es finito:

$$|X| = |X^G| + \left| \bigcup_{x \notin X^G} \mathcal{O}_x \right|$$

Ejemplo 4.3. *Consideremos la acción de G en sí mismo por conjugación, es decir, la acción definida por:*

$$g \cdot h = ghg^{-1} \quad \forall g, h \in G$$

En este caso, un elemento $h \in G$ es un punto fijo si y solo si su órbita tiene tamaño 1, es decir:

$$g \cdot h = h \quad \forall g \in G$$

Esto equivale a:

$$ghg^{-1} = h \iff gh = hg \quad \forall g \in G$$

Por lo tanto, el conjunto de puntos fijos de esta acción es exactamente el Centro de G:

$$G^G = Z(G) = \{h \in G \mid gh = hg, \forall g \in G\}$$

*Aplicando la ecuación de las órbitas (vista anteriormente) a esta acción específica, obtenemos la **Ecuación de Clase**:*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} [G : C_G(x_i)]$$

donde $C_G(x_i)$ es el centralizador de x_i (que corresponde al estabilizador bajo esta acción).

Teorema 4.1.2 (Teorema)**.** *Sea X un G-conjunto, $x \in X$, entonces existe una biyección entre las clases laterales de $S_t(x) \leq G$ y $\mathcal{O}_x$.*

Demostración. Definamos $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{O}_x$ (donde $\mathcal{L}$ es el conjunto de clases laterales izquierdas) dada por:

$$gS_t(x) \mapsto g \cdot x$$

Note que esta asignación no depende del representante de clase. Si $gS_t(x) = g_1S_t(x)$, entonces $g^{-1}g_1 \in S_t(x)$, si y solo si $(g^{-1}g_1) \cdot x = x$, si y solo si $g_1 \cdot x = g \cdot x$. Es decir, $\varphi(gS_t(x)) = \varphi(g_1S_t(x))$. Luego, φ está bien definida.

φ es inyectiva:

$$\varphi(gS_t(x)) = \varphi(g_1S_t(x)) \iff g \cdot x = g_1 \cdot x \iff g^{-1}g_1 \cdot x = x$$

$$\iff g^{-1}g_1 \in S_t(x) \iff gS_t(x) = g_1S_t(x)$$

φ es sobreyectiva: Dado $y \in \mathcal{O}_x$, existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$, luego:

$$\varphi(gS_t(x)) = g \cdot x = y$$

Por lo tanto φ es biyectiva y en particular:

$$|\mathcal{O}_x| = |\mathcal{L}| = |\mathcal{G}| = [G : S_t(x)]$$

$\square$

Observación 4.3. *Más aún, de la ecuación de las órbitas tenemos:*

$$|X| = |X^G| + \sum_{x \notin X^G} [G : St_G(x)]$$

Todavía más, si G actúa en sí mismo por conjugación. En este caso $X^G = Z(G)$ y al estabilizador $St_G(x)$ se le denomina el Centralizador de x en G y se denota por $C_G(x)$. La ecuación se convierte en:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \notin Z(G)} [G : C_G(x)]$$

donde la suma corre sobre un sistema de representantes de las clases de conjugación no triviales.

Ejemplo 4.4. *Sea G un grupo y $X = \{H \mid H \leq G\}$ el conjunto de subgrupos de G. Hagamos actuar a G en X por conjugación, es decir, la acción dada por:*

$$g \cdot H = gHg^{-1}$$

En este caso, al estabilizador de un elemento $H \in X$ se le llama el Normalizador de H en G y se denota por $N_G(H)$.

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

Observación 4.4. *Si $H \leq G$, entonces se cumplen las siguientes propiedades del normalizador $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$:*

1. *$H \trianglelefteq G$ si y solo si $N_G(H) = G$.*
2. *$H \leq N_G(H)$ (es decir, H es un subgrupo del normalizador).*
3. *En general, no siempre ocurre que $N_G(H) = G$. (Ver ejemplo en S_3).*
4. *$H \trianglelefteq N_G(H)$ (es decir, H es un subgrupo normal de su propio normalizador).*

Demostración de 1. Queremos probar que $H \trianglelefteq G \iff N_G(H) = G$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $H \trianglelefteq G$. Por definición de subgrupo normal, para todo $g \in G$ se cumple que $gHg^{-1} = H$. La definición del normalizador es $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. Como la condición se cumple para todo $g \in G$, entonces todo elemento de G pertenece a $N_G(H)$. Por lo tanto, $G \subseteq N_G(H)$. Como $N_G(H) \subseteq G$ es siempre cierto, concluimos que $N_G(H) = G$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $N_G(H) = G$. Esto significa que para todo $g \in G$, $g \in N_G(H)$. Por la definición del conjunto $N_G(H)$, esto implica que para todo $g \in G$, se cumple $gHg^{-1} = H$. Esta es exactamente la definición de que H sea un subgrupo normal de G. Por lo tanto, $H \trianglelefteq G$. $\square$

Demostración de 2. Queremos probar que $H \subseteq N_G(H)$. Sea $h \in H$ un elemento arbitrario. Queremos ver que $h \in N_G(H)$, es decir, que $hHh^{-1} = H$.

Como H es un subgrupo (cerrado bajo la operación):

- Para cualquier $x \in H$, el conjugado hxh^{-1} es producto de elementos de H, por lo que $hxh^{-1} \in H$. Esto muestra que $hHh^{-1} \subseteq H$.

- Para la contención inversa, dado $y \in H$, podemos escribir $y = h(h^{-1}yh)h^{-1}$. Como $h^{-1}yh \in H$, entonces y es un conjugado por h de un elemento de H.

(Más simplemente: conjugación por un elemento del mismo subgrupo es un automorfismo interno restringido que envía H en H).

Por lo tanto, $hHh^{-1} = H$ para todo $h \in H$. Así, todo elemento de H cumple la condición de estar en el normalizador. Conclusión: $H \leq N_G(H)$. □

Demostración de 3 (Ejemplo en S_3). Consideremos el grupo simétrico S_3. Sea $N = \langle(1,2,3)\rangle = \{e, (1,2,3), (1,3,2)\}$. Sabemos que $|S_3| = 6$ y $|N| = 3$. El índice es $[S_3 : N] = 2$, por lo que $N \trianglelefteq S_3$. Usando la propiedad 1, como es normal, su normalizador es todo el grupo: $N_{S_3}(N) = S_3$.

Ahora consideremos $H = \langle(1,2)\rangle = \{e, (1,2)\}$. Calculemos su normalizador $N_{S_3}(H)$. Buscamos los $g \in S_3$ tales que $gHg^{-1} = H$.

- Claramente $H \subseteq N_{S_3}(H)$ (por la propiedad 2), así que e y $(1,2)$ están en el normalizador.

- Probemos con otro elemento, por ejemplo $\sigma = (1,3)$. Conjugamos el generador de H:

$$(1,3)(1,2)(1,3)^{-1} = (1,3)(1,2)(1,3) = (2,3)$$

  Como $(2,3) \notin H$, entonces $(1,3)H(1,3)^{-1} \neq H$. Por lo tanto, $(1,3) \notin N_{S_3}(H)$.

De hecho, haciendo las cuentas para los demás elementos, vemos que el único subgrupo que normaliza a H es el mismo H. Así que $N_{S_3}(H) = H \neq S_3$. Esto demuestra que $N_G(H)$ no siempre es todo G. □

Demostración de 4. Queremos probar que $H \trianglelefteq N_G(H)$. Ya sabemos por la propiedad 2 que H es un subgrupo de $N_G(H)$. Solo falta probar la normalidad dentro de este grupo.

Sea $g \in N_G(H)$ un elemento cualquiera del normalizador. Por la definición misma de $N_G(H)$, este g cumple la condición:

$$gHg^{-1} = H$$

Esta igualdad nos dice directamente que conjugando H por cualquier elemento de $N_G(H)$, obtenemos H nuevamente.

Esta es, textualmente, la definición de ser subgrupo normal. Por lo tanto, H es normal en $N_G(H)$. □

Teorema 4.1.3 (de Cauchy)**.** *Sea G un grupo finito y p un número primo tal que p divide al orden de G ($p \mid |G|$). Entonces, G contiene al menos un elemento de orden p. Más precisamente, la cantidad de elementos de G de orden p es congruente con -1 módulo p.*

Demostración. Consideremos el conjunto X formado por las p-tuplas de elementos de G cuyo producto es la identidad:

$$X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G^p \mid x_1 x_2 \ldots x_p = e\}$$

Paso 1: Calcular la cardinalidad de X. Para formar una tupla en X, podemos elegir los primeros $p-1$ elementos $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ arbitrariamente en G. Una vez elegidos, el último elemento x_p está forzado, pues debe cumplir:

$$x_1 \ldots x_{p-1} x_p = e \implies x_p = (x_1 \ldots x_{p-1})^{-1}$$

Dado que x_p es único para cada elección de los primeros $p-1$ términos, el tamaño de X es:

$$|X| = |G|^{p-1}$$

Como por hipótesis p divide a $|G|$, entonces p divide a $|G|^{p-1}$ (para $p-1 \geq 1$), por lo que:

$$|X| \equiv 0 \pmod{p}$$

Paso 2: Definir la acción de grupo. Sea $\mathbb{Z}_p = \langle \sigma \rangle$ el grupo cíclico de orden p. Hacemos actuar a $\mathbb{Z}_p$ sobre el conjunto X mediante permutación cíclica de las componentes:

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1)$$

Verifiquemos que esta acción está bien definida, es decir, que si $(x_1, \ldots, x_p) \in X$, entonces su permutación cíclica también está en X. Si $x_1 x_2 \ldots x_p = e$, multiplicando por x_1^{-1} a la izquierda y por x_1 a la derecha (conjugando por x_1), obtenemos:

$$x_1^{-1}(x_1 x_2 \ldots x_p) x_1 = x_1^{-1} e x_1 = e$$

Simplificando el lado izquierdo:

$$(x_1^{-1} x_1) x_2 \ldots x_p x_1 = x_2 \ldots x_p x_1 = e$$

Por lo tanto, la tupla rotada $(x_2, \ldots, x_p, x_1)$ cumple la condición de producto identidad y pertenece a X.

Paso 3: Analizar las órbitas y los puntos fijos. Por el Teorema Órbita-Estabilizador, el tamaño de cualquier órbita divide al orden del grupo que actúa. Aquí, $|\mathbb{Z}_p| = p$ (primo). Por tanto, el tamaño de cualquier órbita $|\mathcal{O}_x|$ solo puede ser 1 o p.

Las órbitas de tamaño 1 corresponden a los puntos fijos de la acción ($X^{\mathbb{Z}_p}$). Una tupla $x = (x_1, \ldots, x_p)$ es un punto fijo si:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1)$$

Esto implica que $x_1 = x_2 = \cdots = x_p$. Además, como la tupla está en X, el producto debe ser la identidad:

$$x_1 \cdot x_1 \ldots x_1 = x_1^p = e$$

Así, los puntos fijos son precisamente las tuplas de la forma $(g, g, \ldots, g)$ donde $g^p = e$.

Paso 4: Conclusión usando la Ecuación de Clase. La ecuación de clase para esta acción es:

$$|X| = |X^{\mathbb{Z}_p}| + \sum |\mathcal{O}_{\text{tamaño } p}|$$

Tomando módulo p:

$$|X| \equiv |X^{\mathbb{Z}_p}| \pmod{p}$$

(Pues las órbitas de tamaño p son congruentes con 0 módulo p).

Sabemos por el Paso 1 que $|X| \equiv 0 \pmod{p}$. Entonces:

$$|X^{\mathbb{Z}_p}| \equiv 0 \pmod{p}$$

Sabemos que existe al menos un punto fijo trivial: la tupla $(e, e, \ldots, e)$, donde $e^p = e$. Por lo tanto, $|X^{\mathbb{Z}_p}| \geq 1$. Como $|X^{\mathbb{Z}_p}|$ es un múltiplo de p y es al menos 1, debe ser al menos p (es decir, $|X^{\mathbb{Z}_p}| \geq p$).

Esto significa que existen al menos $p-1$ tuplas fijas distintas de la trivial. Sea $(a, a, \ldots, a)$ una de estas tuplas con $a \neq e$. Entonces $a \in G$ satisface $a^p = e$ y $a \neq e$. Por lo tanto, a es un elemento de orden p. $\square$

Definición 4.1.4. *Sea G un grupo y p un número primo. Diremos que G es un p-grupo si todo elemento de G tiene orden igual a una potencia de p. Es decir, para todo $g \in G$, existe $k \geq 0$ tal que $o(g) = p^k$.*

Observación 4.5. *Si G es un p-grupo, no necesariamente es finito. (Existen p-grupos infinitos, como por ejemplo el grupo de Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$).*

Corolario 4.1.1. *Si G es un p-grupo finito, entonces $|G| = p^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $|G|$ no es una potencia de p. Entonces, por el Teorema Fundamental de la Aritmética, existe un primo q tal que $q \mid |G|$ y $q \neq p$. Por el Teorema de Cauchy, como q divide al orden del grupo, existe un elemento $g \in G$ tal que $o(g) = q$. Pero q no es una potencia de p (pues $q \neq p$ son primos). Esto contradice la hipótesis de que G es un p-grupo (todos sus elementos deben tener orden potencia de p). Por lo tanto, el único divisor primo de $|G|$ es p, lo que implica que $|G| = p^n$. $\square$

Corolario 4.1.2. *Sea G un grupo finito. Entonces G es un p-grupo si y solo si $|G| = p^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Ya fue probado en el corolario anterior.

$\Leftarrow$) Supongamos que $|G| = p^n$. Sea $g \in G$ un elemento cualquiera. Por el Teorema de Lagrange, el orden del elemento divide al orden del grupo, es decir, $o(g) \mid |G|$. Como $|G| = p^n$, los únicos divisores son de la forma p^k con $0 \leq k \leq n$. Por lo tanto, $o(g) = p^k$. Como esto vale para todo $g \in G$, concluimos que G es un p-grupo. □

Ejemplo 4.5. *Sea G un grupo de orden pq, con p, q primos distintos. Sin pérdida de generalidad, supongamos $p < q$. Por el Teorema de Cauchy, existen elementos $a, b \in G$ tales que $o(a) = p$ y $o(b) = q$. Sean $H = \langle a \rangle$ y $K = \langle b \rangle$ los subgrupos generados.*

Observamos que:

- $[G : K] = p$. *Como p es el menor primo que divide al orden de G (pues $p < q$), sabemos por un resultado anterior que $K \trianglelefteq G$.*
- $H \cap K = \{e\}$, *pues los órdenes de sus elementos son coprimos (salvo la identidad).*
- $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = pq = |G|$, *por lo tanto $G = HK$.*

Ahora analizamos la normalidad de H:

i) Si $H \trianglelefteq G$, como ya tenemos $K \trianglelefteq G$ y intersección trivial, entonces G es el producto directo interno:

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$$

En este caso, G es cíclico y abeliano.

ii) Si H no es normal en G, entonces G no es abeliano (pues en un grupo abeliano todo subgrupo es normal). Sabemos que siempre existe el grupo cíclico $\mathbb{Z}_{pq}$. Si G no es abeliano, su estructura es un producto semidirecto no trivial.

Corolario 4.1.3. *Sea G un grupo de orden p^2, con p primo. Entonces G es abeliano.*

Demostración. Por el Teorema de Cauchy, existe $a \in G$ tal que $o(a) = p$. Sea $H = \langle a \rangle$. Como $|H| = p$ y $|G| = p^2$, el índice es $[G : H] = p$. Como p es el menor primo que divide a $|G|$, entonces $H \trianglelefteq G$.

Consideremos un elemento $b \in G \setminus H$.

- **Caso 1:** Si $o(b) = p^2$, entonces $G = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2}$, el cual es abeliano.
- **Caso 2:** Si todo elemento en $G \setminus H$ tiene orden p. Sea $K = \langle b \rangle$. Como $b \notin H$ y $|H| = p$ (primo), $H \cap K = \{e\}$. Al ser H normal y $H \cap K = \{e\}$, el subgrupo HK es isomorfo al producto directo. Como $|HK| = p^2 = |G|$, entonces $G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. El producto directo de grupos abelianos es abeliano.

En cualquier caso, G es abeliano. $\square$

Teorema 4.1.4. *Sea G un p-grupo finito no trivial (es decir, $|G| = p^n$ con $n \geq 1$). Entonces su centro es no trivial:*

$$Z(G) \neq \{e\}$$

Demostración. Hagamos actuar a G en sí mismo por conjugación:

$$g \cdot x = gxg^{-1}$$

La Ecuación de Clase para esta acción es:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} [G : C_G(x_i)]$$

donde la suma recorre un sistema de representantes de las clases de conjugación no triviales (aquellas con más de un elemento).

Analicemos la divisibilidad por p:

1. $|G| = p^n$, por lo que $|G|$ es divisible por p (pues $n \geq 1$).

2. Para cada $x_i \notin Z(G)$, su centralizador $C_G(x_i)$ es un subgrupo propio de G (si fuera todo G, x_i estaría en el centro). Por el Teorema de Lagrange, $[G : C_G(x_i)] = \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}$. Como $|G|$ es potencia de p, este índice también debe ser una potencia de p. Como $x_i \notin Z(G)$, el índice es mayor que 1. Por lo tanto, p divide a $[G : C_G(x_i)]$.

Entonces, en la ecuación de clase:

$$\underbrace{|G|}_{\text{divisible por } p} = |Z(G)| + \underbrace{\sum [G : C_G(x_i)]}_{\text{divisible por } p}$$

Esto implica que p debe dividir a $|Z(G)|$.

Como el neutro e siempre está en el centro, $|Z(G)| \geq 1$. Al ser múltiplo de p, concluimos que $|Z(G)| \geq p$, por lo que $Z(G) \neq \{e\}$. $\square$

4.2. Grupos Sylow

Definición 4.2.1. *Sea G un grupo, diremos que H es un subgrupo maximal de G si cuando N es un subgrupo de G con $H \subseteq N \subseteq G$, entonces $N = G$ o $N = H$*

Definición 4.2.2. *Sea G un grupo, p un primo que divide a $|G|$. Diremos que P es un p-subgrupo de Sylow de G si P es un p-grupo maximal (con respecto a la propiedad de ser p-grupo) es decir, si H es un p-grupo tal que $P \subseteq H \subseteq G$ entonces $H = G$ o $H = P$*

Observación 4.6. *Si G es un grupo finito, y p es primo que divide a $|G|$ entonces existe un p-subgrupo Sylow de G*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{H \leq G \mid H \text{ es } p\text{-grupo}\}$. Por el teorema de Cauchy G tiene elementos de orden p, si $o(a) = p$, entonces $H = \langle a \rangle \in \mathcal{A}$. Luego, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sea $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cadena en $\mathcal{A}$. Sea $H = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$, entonces $H \in \mathcal{A}$ y en efecto si $a, b \in H$, existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tal que $a \in H_{\lambda_1}$ y $b \in H_{\lambda_2}$, como los $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ forman una cadena. Podemos suponer $H_{\lambda_1} \subseteq H_{\lambda_2}$ en cuyo caso $a, b \in H_{\lambda_2}$ y como $H_{\lambda_2} \leq G$, $ab^{-1} \in H_{\lambda_2} \subseteq H$, así $H \leq G$.

Más aún si $a \in H$, $a \in H_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$ así que $o(a) = p^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, luego H es p-grupo. Por lo tanto $H \in \mathcal{A}$, luego, $\mathcal{A}$ tiene elementos maximales y por el lema de Zorn G los tiene. $\square$

Teorema 4.2.1 (Segundo y Tercer Teorema de Sylow)**.** *Sea G grupo finito, p primo que divide a $|G|$, ℓ_p la cantidad de p-grupos Sylow, entonces:*

i) $\ell_p \mid |G|$ *y* $\ell_p \equiv 1 \pmod{p}$.

ii) Los p-grupos Sylow son conjugados.

Demostración. Sea P un p-grupo Sylow de G y $X = \{gPg^{-1} \mid g \in G\}$ los subgrupos conjugados de P. (Note que $|X| < +\infty$). Hagamos actuar G en X por conjugación como sigue:

$$\tilde{\varphi} : G \times X \to X$$
$$(g, aPa^{-1}) \mapsto g(aPa^{-1})g^{-1}$$

$\tilde{\varphi}$ es acción pues:

i) $e(aPa^{-1})e = eaPa^{-1}e = aPa^{-1}$.

ii) $(gh)(aPa^{-1}) = (gh)(aPa^{-1})(gh)^{-1}$

$$= g(haPa^{-1}h^{-1})g^{-1}$$
$$= g \cdot (haPa^{-1})$$
$$= g \cdot (h \cdot aPa^{-1})$$

Además cada elemento de X es un p-grupo Sylow. Si Q es un p-subgrupo de G con $aPa^{-1} \subseteq Q \subsetneq G$ entonces $P = a^{-1}(aPa^{-1})a \subseteq a^{-1}Qa \subsetneq G$ y $a^{-1}Qa$ es un p-grupo (si $q \in a^{-1}Qa$, $g = a^{-1}qa$ con $q \in Q \implies g^{p^s} = (a^{-1}qa)^{p^s} = a^{-1}q^{p^s}a = a^{-1}ea = e$ si p^s es el orden de q, luego g tiene orden potencia de p). Por la maximalidad de P, $P = a^{-1}Qa$, luego $aPa^{-1} = Q$, así aPa^{-1} es maximal.

Restringiendo $\tilde{\varphi}$ a P, se tiene que P actúa en X. Sea $Q \in X$, entonces $[P : St_P(Q)] = p^s$ para algún s. Más aún si $s = 0$, entonces $P = St_P(Q) = \{p \in P \mid pQp^{-1} = Q\} = P \cap St_G(Q)$, de donde $P \subseteq St_G(Q)$. Además $Q \trianglelefteq St_G(Q) = N_G(Q)$, luego PQ es subgrupo de $St_G(Q)$, más aún es p-subgrupo de G y $P, Q \leq PQ$. Como P es Sylow, luego $PQ = G$ o $P = PQ = Q$. Si $G = PQ$ entonces $G = St_G(Q)$, luego $Q \trianglelefteq G$. Pero $Q = aPa^{-1}$ para algún $a \in G$, $Q = a^{-1}Qa = P$.

En cualquier caso entonces $P = Q$. Es decir, el único elemento de X que bajo la acción se queda fijo es P, por lo tanto

$$|X| = 1 + \sum_{Q \notin X^P} [P : St_P(Q)]$$

En particular $|X| \equiv 1 \pmod{p}$.

Sea ahora un Q p-subgrupo Sylow y suponga que $Q \notin X$, entonces restringiendo $\tilde{\varphi}$ a Q. Un argumento análogo muestra que

$$|X| \equiv 0 \pmod{p}$$

En efecto, si $Q_1 \in X$, entonces $[Q : St_Q(Q_1)] = p^s$ y $s = 0$ si y sólo si $Q = St_Q(Q_1) = St_G(Q_1) \cap Q$, luego $Q \subseteq St_G(Q_1)$ y como $Q_1 \trianglelefteq St_G(Q_1)$ entonces $QQ_1 \leq St_G(Q_1)$. Más aún QQ_1 es p-subgrupo. Así $Q \subseteq QQ_1 \subseteq G$ de donde $QQ_1 = G$ o $Q = QQ_1 = Q_1$. Si $QQ_1 = G$, $G = St_G(Q_1)$, luego $Q_1 \trianglelefteq G$, de donde $Q_1 = P \trianglelefteq G$. Luego $P \subsetneq QQ_1$ y QQ_1 es p-grupo lo cual no puede ser por la maximalidad de P. Por lo tanto $Q = Q_1$ # C (Contradicción) pues $Q_1 \in X$ y $Q \notin X$, es decir, con la acción $\tilde{\varphi}|_Q$, no hay puntos fijos y así

$$|X| = \sum_{Q_1 \notin X^G} [Q : St_Q(Q_1)] \equiv 0 \pmod{p}$$

Lo cuál no puede ser pues contradice (i), luego $Q \in X$, es decir, es un conjugado de P y por tanto $\ell_p = |X|$ y se tiene $\ell_p \equiv 1 \pmod{p}$. Más aún

$$X = \{gPg^{-1} \mid g \in G\} = \{g \cdot P \mid g \in G\} = \mathcal{O}_P$$

Así,

$$\ell_p = |X| = |\mathcal{O}_P| = [G : St_G(P)] \mid |G|$$

$\square$

Teorema 4.2.2 (Primer Teorema de Sylow)**.** *Sea G un grupo de orden $|G| = p^s m$ con p primo, $(p, m) = 1$ entonces todo p-grupo Sylow tiene cardinalidad p^s.*

Demostración. Sea P un p-Sylow de G. Para ver que $|P| = p^s$ basta probar que $[G : P] = m$ ($|G| = [G : P]|P|$) y para esto, basta ver que $([G : P], p) = 1$ pues si esto pasa $p^s m = |G| = [G : P]|P|$, $([G : P], p) = 1$, entonces $p^s \mid |P|$, además $|P| \mid |G| = p^s m$, luego, $|P| = p^s p^t$ y $|P| \leq p^s m$ (pues P es subgrupo), luego, $p^s p^t \ell = p^s m$ y $(p, m) = 1$, de donde $t = 0$ o $|P| = p^s$.

Veamos entonces que $([G : P], p) = 1$, tenemos que se sigue del teorema de Lagrange que $[G : P] = [G : N(P)][N(P) : P]$ así que basta ver $([G : N(P)], p) = 1$, $([N(P) : P], p) = 1$.

Pero por el teorema anterior $[G : N(P)] = [G : St_G(P)] = |\mathcal{O}_P| = \ell_p \equiv 1 \pmod{p}$, luego $([G : N(P)], p) = 1$.

Ahora, si $([N(P):P],p) \neq 1$, $p \mid [N(P):P]$ y como $P \trianglelefteq N(P)$, entonces p divide el orden del grupo $N(P)/P$, luego por el teorema de Cauchy, existe $\bar{X} = XP \in N(P)/P$ tal que $\bar{X}^p = \bar{e} = P$.

Observe que:

$$\langle \bar{X} \rangle = \frac{\langle X, P\rangle}{P} \leq \frac{N(P)}{P} \quad \text{y} \quad (\bar{X})^p = e$$

$$\begin{array}{ccc} N(P)/P & — & N(P) \\ | & & | \\ \langle \bar{X} \rangle & — & \langle X, P \rangle \\ | & & | \\ P = \bar{e} & — & P \end{array}$$

Por lo tanto, $\frac{\langle X,P\rangle}{P}$ es p-grupo, de donde $\langle X, P\rangle$ es p-grupo y

$$|\langle X, P\rangle| = [\langle X, P\rangle : P]|P| = \left|\frac{\langle X, P\rangle}{P}\right| |P|$$

Por la maximalidad de $P \subseteq \langle X, P\rangle$, $P = \langle X, P\rangle$ o $x \in P$ y $o(\bar{x}) = 1$ # C (Contradicción), luego $([N(P):P],p) = 1$. De donde se concluye que $|P| = p^s$. $\square$

Ejemplo 4.6. *Sea $|G| = pq$ con $p < q$ números primos. Calculamos la cantidad de q-subgrupos de Sylow, n_q:*

$$n_q \equiv 1 \pmod{q} \quad y \quad n_q \mid p$$

Los divisores de p son $\{1, p\}$.

- *Si $n_q = p$, entonces $p \equiv 1 \pmod{q}$, lo cual implica que $q \mid (p-1)$. Esto es imposible pues $p < q$ (un número mayor no puede dividir a uno menor positivo).*

Por lo tanto, $n_q = 1$. Sea Q el único q-Sylow de G, entonces $Q \trianglelefteq G$.

Ahora analicemos n_p:

$$n_p \equiv 1 \pmod{p} \quad y \quad n_p \mid q$$

Los divisores de q son $\{1, q\}$. Así que n_p puede ser 1 o q.

Sea P un p-Sylow de G. Como $Q \trianglelefteq G$ y $P \leq G$, y además $Q \cap P = \{e\}$ (pues $|Q| = q$, $|P| = p$ y son primos distintos), tenemos que:

$$|QP| = \frac{|Q||P|}{|Q \cap P|} = \frac{qp}{1} = pq = |G|$$

Por lo tanto $G = QP$. Como Q es normal y $Q \cap P = \{e\}$, G es un producto semidirecto:

$$G \cong Q \rtimes_{\varphi} P$$

donde $\varphi : P \to Aut(Q)$ es un homomorfismo.

Sabemos que $Q \cong \mathbb{Z}_q$, por lo que $Aut(Q) \cong Aut(\mathbb{Z}_q) \cong \mathbb{Z}_{q-1}$. El orden del grupo de automorfismos es $|Aut(Q)| = q - 1$. El homomorfismo φ está determinado por la imagen de *un generador de P. El orden de la imagen debe dividir tanto al orden de P (p) como al orden de Aut(Q) ($q-1$).*

Caso 1: $p \nmid (q-1)$. *En este caso,* $\gcd(p, q-1) = 1$. *El único elemento de orden que divide a p en Aut(Q) es la identidad. Por lo tanto, φ es el homomorfismo trivial ($\varphi(g) = Id_Q$ para todo g). Esto implica que el producto es directo:*

$$G \cong Q \times P \cong \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{pq}$$

Así, si $p \nmid (q-1)$, el único grupo de orden pq es el cíclico $\mathbb{Z}_{pq}$.

Caso 2: $p \mid (q-1)$. *Por el Teorema de Cauchy, como p divide al orden de Aut(Q), existe un subgrupo de orden p en Aut(Q). Esto permite definir un homomorfismo φ no trivial. Por lo tanto, existe un producto semidirecto no abeliano:*

$$G \cong Q \rtimes P$$

Este grupo es único salvo isomorfismo (todos los homomorfismos no triviales dan lugar a grupos isomorfos en este caso). ***Ejemplo:*** *S_3 tiene orden $6 = 2 \cdot 3$. Aquí $p = 2, q = 3$. Como $2 \mid (3-1)$, existe el grupo no abeliano $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$.*

Ejemplo 4.7. *Sea $|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Analicemos los subgrupos de Sylow:*

- $n_5 \equiv 1 \pmod 5$ *y* $n_5 \mid 6 \implies n_5 \in \{1, 6\}$.
- $n_3 \equiv 1 \pmod 3$ *y* $n_3 \mid 10 \implies n_3 \in \{1, 10\}$.

Supongamos que G es simple (es decir, no tiene subgrupos normales propios). Entonces tendríamos $n_5 = 6$ y $n_3 = 10$ (pues si alguno fuera 1, ese Sylow sería normal).

Contemos los elementos:

- *Si $n_5 = 6$, tenemos 6 subgrupos de orden 5. La intersección de cualesquiera dos de ellos es trivial (orden 1). Cada uno tiene $5-1 = 4$ elementos de orden 5. Total de elementos de orden 5: $6 \times 4 = 24$.*
- *Si $n_3 = 10$, tenemos 10 subgrupos de orden 3. Cada uno tiene $3-1 = 2$ elementos de orden 3. Total de elementos de orden 3: $10 \times 2 = 20$.*

Sumando los elementos:

$$24 \text{ (orden 5)} + 20 \text{ (orden 3)} = 44 \text{ elementos}$$

Esto es imposible pues $|G| = 30$. Por lo tanto, nuestra suposición es falsa. Debe ocurrir que $n_5 = 1$ o $n_3 = 1$. Conclusión: Un grupo de orden 30 no puede ser simple (siempre tiene un subgrupo normal de orden 5 o de orden 3).

Ejemplo 4.8. *Sea $|G| = 12 = 2^2 \cdot 3$.*

- $n_3 \equiv 1 \pmod 3$ *y* $n_3 \mid 4 \implies n_3 \in \{1, 4\}$.

- $n_2 \equiv 1 \pmod 2$ *y* $n_2 \mid 3 \implies n_2 \in \{1, 3\}$.

Supongamos que G *no es simple. Si* $n_3 = 1$*, ya terminamos (*$P_3 \trianglelefteq G$*). Supongamos entonces que* $n_3 = 4$*. El número de elementos de orden 3 es:*

$$4 \times (3 - 1) = 8 \ \textit{elementos.}$$

Los elementos restantes son $12 - 8 = 4$*. Estos 4 elementos deben formar el único* 2*-Sylow de* G *(que tiene orden 4). Por lo tanto, si* $n_3 \neq 1$*, obligatoriamente* $n_2 = 1$*.*

En cualquier caso, G *tiene un subgrupo normal (ya sea el 3-Sylow o el 2-Sylow).*

Ejemplo 4.9. *Sea* $|G| = p^2 q$ *con* p, q *primos distintos. (El análisis suele ser similar: mostrar que no es simple contando elementos. Por ejemplo, si* $p > q$*,* $n_p = 1$*).*

CAPÍTULO 5
Automorfismos de Grupos

5.1. Automorfismos de Grupos

Definición 5.1.1. *Un **automorfismo** de un grupo G es un isomorfismo de G en sí mismo. Al conjunto de automorfismos se le denota por $Aut(G)$. Así:*

$$Aut(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ es un isomorfismo}\}$$

Observación 5.1. *Si G es finito y $f : G \to G$ es un homomorfismo, entonces f es inyectivo si y solo si f es suprayectivo.*

Demostración. Como G es un grupo finito, denotemos su orden por $|G| = n < \infty$.

$\Rightarrow$) Supongamos que f es inyectiva. Dado que f es una función inyectiva, la cantidad de elementos en su imagen es igual a la cantidad de elementos en su dominio. Es decir, $|\mathrm{Im}(f)| = |G| = n$. Sabemos que $\mathrm{Im}(f) \subseteq G$. Dado que $\mathrm{Im}(f)$ es un subconjunto de G y tiene la misma cardinalidad finita que G, necesariamente $\mathrm{Im}(f) = G$. Por lo tanto, f es suprayectiva.

$\Leftarrow$) Supongamos que f es suprayectiva. Consideremos el núcleo de f, $\ker(f)$. Por el Primer Teorema de Isomorfía, sabemos que:

$$G/\ker(f) \cong \mathrm{Im}(f)$$

Tomando cardinalidades:

$$\frac{|G|}{|\ker(f)|} = |\mathrm{Im}(f)|$$

Como f es suprayectiva, $\mathrm{Im}(f) = G$, por lo que $|\mathrm{Im}(f)| = |G|$. Sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{|G|}{|\ker(f)|} = |G|$$

Como $|G|$ es finito y no nulo, podemos dividir ambos lados por $|G|$, obteniendo:

$$\frac{1}{|\ker(f)|} = 1 \implies |\ker(f)| = 1$$

El único subgrupo de orden 1 es el trivial, por lo tanto $\ker(f) = \{e\}$. Sabemos que un homomorfismo es inyectivo si y solo si su núcleo es trivial. Concluimos que f es inyectiva. □

Proposición 5.1.1. *Sea G un grupo y $a \in G$. Definimos $f_a : G \to G$ por $f_a(g) = aga^{-1}$. Se verifica que f_a es un isomorfismo.*

Demostración. i) f_a es homomorfismo: Sean $g_1, g_2 \in G$.

$$f_a(g_1g_2) = a(g_1g_2)a^{-1} = ag_1(a^{-1}a)g_2a^{-1} = (ag_1a^{-1})(ag_2a^{-1}) = f_a(g_1)f_a(g_2)$$

ii) f_a es inyectiva:

$$f_a(g) = f_a(g_1) \iff aga^{-1} = ag_1a^{-1} \iff g = g_1$$

iii) f_a es sobreyectiva: Dado $y \in G$, existe $x = a^{-1}ya \in G$ tal que:

$$f_a(x) = f_a(a^{-1}ya) = a(a^{-1}ya)a^{-1} = (aa^{-1})y(aa^{-1}) = eye = y$$

Por lo tanto, f_a es un isomorfismo de G en sí mismo (un automorfismo). □

Definición 5.1.2. *Al conjunto de los automorfismos de la forma f_a se les llama automorfismos internos de G, y se denota por $Im(G)$.*

$$Im(G) = \{f_a : G \to G \mid f_a(g) = aga^{-1},\ \textit{para algún } a \in G\}$$

Observación 5.2. *$Aut(G)$, con la operación de composición de funciones, es un grupo.*

Demostración. Sabemos que la composición de biyecciones es una biyección y la composición de homomorfismos es un homomorfismo. Sean $f, g \in \mathrm{Aut}(G)$. Entonces $f \circ g$ es biyectiva y es homomorfismo, luego $f \circ g \in \mathrm{Aut}(G)$. La asociatividad se hereda de la composición de funciones. La identidad es $Id_G(x) = x$, que trivialmente es un automorfismo. Si $f \in \mathrm{Aut}(G)$, su función inversa f^{-1} también es un isomorfismo, por lo que $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$. □

Ejemplo 5.1. *Si G es un grupo, definamos $\varphi : G \to Aut(G)$ como $\varphi(g) = f_g$, donde $f_g : G \to G$ está dado por $f_g(a) = gag^{-1}$. Entonces φ es un homomorfismo.*

En efecto:

$$f_{gg_1}(a) = (gg_1)a(gg_1)^{-1} = g(g_1ag_1^{-1})g^{-1} = gf_{g_1}(a)g^{-1} = f_g(f_{g_1}(a)) = (f_g \circ f_{g_1})(a)$$

Por lo tanto:

$$\varphi(gg_1) = f_{gg_1} = f_g \circ f_{g_1} = \varphi(g) \circ \varphi(g_1)$$

La imagen de φ es justamente $Im(G)$.

Teorema 5.1.1. *Sea G un grupo, entonces $Im(G) \trianglelefteq Aut(G)$ y*

$$G/Z(G) \cong Im(G)$$

Demostración. Sea $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ dada por $\varphi(g) = f_g$ (como en el ejemplo anterior). Entonces, φ es un homomorfismo con imagen $Im(G)$. Además:

$$g \in \ker\varphi \iff \varphi(g) = Id_G \iff f_g(a) = a, \forall a \in G$$

$$\iff gag^{-1} = a, \forall a \in G \iff ga = ag, \forall a \in G \iff g \in Z(G)$$

Por lo tanto, $\ker\varphi = Z(G)$. Por el Primer Teorema de Isomorfía:

$$G/\ker\varphi = G/Z(G) \cong \mathrm{Im}(\varphi) = Im(G)$$

Ahora, para ver la normalidad ($Im(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$), sea $f_g \in Im(G)$ y $h \in \mathrm{Aut}(G)$. Para $a \in G$:

$$(h \circ f_g \circ h^{-1})(a) = h(f_g(h^{-1}(a))) = h(gh^{-1}(a)g^{-1})$$

Como h es un homomorfismo:

$$= h(g)h(h^{-1}(a))h(g^{-1}) = h(g)ah(g)^{-1} = f_{h(g)}(a)$$

Luego, $h \circ f_g \circ h^{-1} = f_{h(g)}$. Como $h(g) \in G$, entonces $f_{h(g)} \in Im(G)$. De donde concluimos que $Im(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$. □

Observación 5.3. *Si $G \cong G_1$, entonces $Aut(G) \cong Aut(G_1)$.*

Demostración. Sea $\psi : G \to G_1$ un isomorfismo. Definamos $\Psi : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(G_1)$ dada por:

$$f \mapsto h_f = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$$

Es decir, $\Psi(f) = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$. Demostraremos que Ψ es un isomorfismo, en efecto:

1. Ψ está bien definida: Es decir, $\psi \circ f \circ \psi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G_1)$. En efecto, claramente $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ es biyectiva (composición de biyecciones). Además, para $g_1, g_2 \in G_1$:

$$\begin{aligned} h_f(g_1g_2) &= (\psi \circ f \circ \psi^{-1})(g_1g_2) = \psi(f(\psi^{-1}(g_1g_2))) \\ &= \psi(f(\psi^{-1}(g_1)\psi^{-1}(g_2))) \quad \text{(pues } \psi^{-1} \text{ es hom.)} \\ &= \psi(f(\psi^{-1}(g_1)) \cdot f(\psi^{-1}(g_2))) \quad \text{(pues } f \text{ es hom.)} \\ &= \psi(f(\psi^{-1}(g_1))) \cdot \psi(f(\psi^{-1}(g_2))) \quad \text{(pues } \psi \text{ es hom.)} \\ &= h_f(g_1)h_f(g_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h_f \in \mathrm{Aut}(G_1)$.

2. Ψ es homomorfismo: Sean $f, \rho \in \mathrm{Aut}(G)$.

$$\Psi(f \circ \rho) = h_{f\circ\rho} = \psi \circ (f \circ \rho) \circ \psi^{-1}$$

Por otro lado:

$$\Psi(f) \circ \Psi(\rho) = (\psi \circ f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \rho \circ \psi^{-1}) = \psi \circ f \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ \rho \circ \psi^{-1}$$

Como $\psi^{-1} \circ \psi = Id_G$, esto se reduce a:

$$= \psi \circ f \circ \rho \circ \psi^{-1} = h_{f \circ \rho}$$

Luego, $\Psi(f \circ \rho) = \Psi(f) \circ \Psi(\rho)$.

3. Ψ es inyectiva:

$$\Psi(f) = \Psi(\rho) \iff \psi \circ f \circ \psi^{-1} = \psi \circ \rho \circ \psi^{-1}$$

Componiendo con ψ^{-1} a la izquierda y ψ a la derecha:

$$\iff \psi^{-1}(\psi \circ f \circ \psi^{-1})\psi = \psi^{-1}(\psi \circ \rho \circ \psi^{-1})\psi \iff f = \rho$$

4. Ψ es sobreyectiva: Sea $g \in \mathrm{Aut}(G_1)$. Existe $f = \psi^{-1} \circ g \circ \psi \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que:

$$\Psi(f) = \psi \circ (\psi^{-1} \circ g \circ \psi) \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \psi^{-1}) \circ g \circ (\psi \circ \psi^{-1}) = g$$

Por lo tanto, $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(G_1)$. □

Observación 5.4. *El recíproco es falso.*

Demostración. Sea $G = S_3$. Sus elementos son:

$$S_3 = \{e, \theta = (123), \theta^2 = (132), \sigma = (12), \tau = (13), \rho = (23)\}$$

Sabemos que S_3 es generado por θ y σ ($\langle \theta, \sigma \rangle = S_3$) con las relaciones $\theta^3 = e, \sigma^2 = e, \sigma\theta = \theta^2\sigma$. Cualquier automorfismo $f \in \mathrm{Aut}(S_3)$ queda determinado por sus valores en los generadores. Además, un isomorfismo preserva el orden de los elementos.

Los elementos de orden 3 son $\{\theta, \theta^2\}$. Los elementos de orden 2 son $\{\sigma, \tau, \rho\}$. Por lo tanto, para $f(\theta)$ tenemos 2 opciones (θ ó θ^2) y para $f(\sigma)$ tenemos 3 opciones (σ, τ ó ρ). En total hay a lo más $2 \times 3 = 6$ automorfismos.

Sabemos que $\mathrm{Im}(S_3) \cong S_3/Z(S_3)$. Como $Z(S_3) = \{e\}$, entonces $\mathrm{Im}(S_3) \cong S_3$, por lo que $|\mathrm{Im}(S_3)| = 6$. Como $\mathrm{Im}(S_3) \leq \mathrm{Aut}(S_3)$ y $|\mathrm{Aut}(S_3)| \leq 6$, concluimos que:

$$\mathrm{Aut}(S_3) = \mathrm{Im}(S_3) \cong S_3$$

(Nota: Existen grupos no isomorfos a S_3, como $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, cuyo grupo de automorfismos es isomorfo a S_3, mostrando que el recíproco falla). □

Teorema 5.1.2. *Sean H_1 y H_2 grupos finitos tales que* $\gcd(|H_1|, |H_2|) = 1$. *Entonces:*

$$Aut(H_1 \times H_2) \cong Aut(H_1) \times Aut(H_2)$$

Demostración. Identificamos a H_1 con el subgrupo $H_1 \times \{e_2\}$ y a H_2 con $\{e_1\} \times H_2$ dentro de $G = H_1 \times H_2$.

Sea $f \in \mathrm{Aut}(H_1 \times H_2)$. Probemos que $f(H_1) = H_1$ y $f(H_2) = H_2$.

Sea $(h, e_2) \in H_1$. Su orden k divide a $|H_1|$. Aplicando f, el elemento $f(h, e_2)$ debe tener el mismo orden k. Sea $f(h, e_2) = (x, y) \in H_1 \times H_2$. Entonces el orden de (x, y) es $(|x|, |y|) = k$. Esto implica que $|y|$ divide a k, y por tanto $|y|$ divide a $|H_1|$. Pero $y \in H_2$, por lo que $|y|$ divide a $|H_2|$. Como $(|H_1|, |H_2|) = 1$, la única posibilidad es que $|y| = 1$, es decir, $y = e_2$. Por lo tanto, $f(h, e_2) = (x, e_2) \in H_1$.

Esto demuestra que $f(H_1) \subseteq H_1$. Por ser f inyectiva y H_1 finito, $f(H_1) = H_1$. Análogamente se demuestra que $f(H_2) = H_2$.

Dado que f preserva los subgrupos H_1 y H_2, podemos definir las restricciones: $f|_{H_1} : H_1 \to H_1$ y $f|_{H_2} : H_2 \to H_2$. Estas restricciones son automorfismos de H_1 y H_2 respectivamente.

Definimos la función $\Psi : \mathrm{Aut}(H_1 \times H_2) \to \mathrm{Aut}(H_1) \times \mathrm{Aut}(H_2)$ dada por:

$$\Psi(f) = (f|_{H_1}, f|_{H_2})$$

Ψ es un homomorfismo. En efecto:

Sean $f, g \in \mathrm{Aut}(H_1 \times H_2)$.

$$\Psi(f \circ g) = ((f \circ g)|_{H_1}, (f \circ g)|_{H_2}) = (f|_{H_1} \circ g|_{H_1}, f|_{H_2} \circ g|_{H_2})$$

(Esto es válido porque $g(H_1) = H_1$, así que la composición se restringe bien).

$$= (f|_{H_1}, f|_{H_2}) \cdot (g|_{H_1}, g|_{H_2}) = \Psi(f) \cdot \Psi(g)$$

Ψ es biyectiva. En efecto:

- **Inyectiva:** Si $\Psi(f) = (Id_{H_1}, Id_{H_2})$, entonces $f(h, e_2) = (h, e_2)$ y $f(e_1, k) = (e_1, k)$. Para un elemento arbitrario $(h, k) \in H_1 \times H_2$:

  $$f(h, k) = f((h, e_2)(e_1, k)) = f(h, e_2)f(e_1, k) = (h, e_2)(e_1, k) = (h, k)$$

  Luego $f = Id_{H_1 \times H_2}$, así que $\ker \Psi$ es trivial.

- **Sobreyectiva:** Dado $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Aut}(H_1) \times \mathrm{Aut}(H_2)$, definimos $f : H_1 \times H_2 \to H_1 \times H_2$ como $f(h, k) = (\alpha(h), \beta(k))$. Es fácil verificar que f es un automorfismo y que $\Psi(f) = (\alpha, \beta)$.

Por lo tanto, $\mathrm{Aut}(H_1 \times H_2) \cong \mathrm{Aut}(H_1) \times \mathrm{Aut}(H_2)$. □

Teorema 5.1.3. *Sea G un grupo cíclico de orden n. Entonces:*

$$Aut(G) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$$

Donde $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ es el grupo multiplicativo de las unidades módulo n. En particular, $|Aut(G)| = \varphi(n)$, donde φ es la función de Euler.

Demostración. Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico de orden n. Sea $f \in \mathrm{Aut}(G)$. Como G es cíclico, f queda completamente determinado por la imagen del generador g. Sea $f(g) = g^{c_f}$ para algún entero c_f. Como f es un automorfismo, $f(g)$ debe ser otro generador de G. Sabemos que g^k es un generador de G si y solo si $\gcd(k, n) = 1$. Por lo tanto, $\gcd(c_f, n) = 1$, lo que implica que la clase $\overline{c_f}$ pertenece a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Definimos la función $\Psi : \mathrm{Aut}(G) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ dada por:

$$\Psi(f) = \overline{c_f} \quad \text{donde } f(g) = g^{c_f}$$

1. Ψ es un homomorfismo: Sean $f_1, f_2 \in \mathrm{Aut}(G)$ con $f_1(g) = g^{c_{f_1}}$ y $f_2(g) = g^{c_{f_2}}$.

$$(f_1 \circ f_2)(g) = f_1(f_2(g)) = f_1(g^{c_{f_2}}) = (f_1(g))^{c_{f_2}} = (g^{c_{f_1}})^{c_{f_2}} = g^{c_{f_1} c_{f_2}}$$

Por lo tanto, el exponente asociado a la composición es el producto de los exponentes:

$$\Psi(f_1 \circ f_2) = \overline{c_{f_1} c_{f_2}} = \overline{c_{f_1}} \cdot \overline{c_{f_2}} = \Psi(f_1)\Psi(f_2)$$

2. Ψ es inyectiva:

$$\Psi(f) = \overline{1} \implies c_f \equiv 1 \pmod{n} \implies f(g) = g^1 = g$$

Como el automorfismo fija al generador, fija a todo el grupo. Luego $f = Id_G$.

3. Ψ es sobreyectiva: Sea $\overline{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Entonces $\gcd(k, n) = 1$. Definimos $f : G \to G$ por $f(x) = x^k$. Como $\gcd(k, n) = 1$, la aplicación $x \mapsto x^k$ es una biyección en el grupo cíclico finito y es un homomorfismo ($f(xy) = (xy)^k = x^k y^k$ pues G es abeliano). Así, $f \in \mathrm{Aut}(G)$ y $\Psi(f) = \overline{k}$.

Por lo tanto, $\mathrm{Aut}(G) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. □

Corolario 5.1.1. *Si p es un número primo, entonces:*

$$Aut(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$$

Demostración. Aplicando el teorema anterior con $G = \mathbb{Z}_p$ (cíclico de orden p), tenemos:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$$

El orden de este grupo es $\varphi(p) = p - 1$. Sabemos por la teoría de grupos finitos (específicamente por la existencia de raíces primitivas módulo p) que el grupo multiplicativo de un cuerpo finito $\mathbb{Z}_p$ es siempre cíclico. Por lo tanto:

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \cong C_{p-1} \cong \mathbb{Z}_{p-1}$$

Así concluimos que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)$ es isomorfo al grupo cíclico de orden $p - 1$. □

Teorema 5.1.4. *Sea G un grupo cíclico de orden n. Entonces:*

$$Aut(G) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$$

Donde $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ es el grupo multiplicativo de las unidades módulo n. En particular, $|Aut(G)| = \varphi(n)$, donde φ es la función de Euler.

Demostración. Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico de orden n. Sea $f \in \text{Aut}(G)$. Como G es cíclico, f queda completamente determinado por la imagen del generador g. Sea $f(g) = g^{c_f}$ para algún entero c_f. Como f es un automorfismo, $f(g)$ debe ser otro generador de G. Sabemos que g^k es un generador de G si y solo si $\gcd(k, n) = 1$. Por lo tanto, $\gcd(c_f, n) = 1$, lo que implica que la clase $\overline{c_f}$ pertenece a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Definimos la función $\Psi : \text{Aut}(G) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ dada por:

$$\Psi(f) = \overline{c_f} \quad \text{donde } f(g) = g^{c_f}$$

1. Ψ es un homomorfismo: Sean $f_1, f_2 \in \text{Aut}(G)$ con $f_1(g) = g^{c_{f_1}}$ y $f_2(g) = g^{c_{f_2}}$.

$$(f_1 \circ f_2)(g) = f_1(f_2(g)) = f_1(g^{c_{f_2}}) = (f_1(g))^{c_{f_2}} = (g^{c_{f_1}})^{c_{f_2}} = g^{c_{f_1} c_{f_2}}$$

Por lo tanto, el exponente asociado a la composición es el producto de los exponentes:

$$\Psi(f_1 \circ f_2) = \overline{c_{f_1} c_{f_2}} = \overline{c_{f_1}} \cdot \overline{c_{f_2}} = \Psi(f_1)\Psi(f_2)$$

2. Ψ es inyectiva:

$$\Psi(f) = \overline{1} \implies c_f \equiv 1 \pmod{n} \implies f(g) = g^1 = g$$

Como el automorfismo fija al generador, fija a todo el grupo. Luego $f = Id_G$.

3. Ψ es sobreyectiva: Sea $\overline{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Entonces $\gcd(k, n) = 1$. Definimos $f : G \to G$ por $f(x) = x^k$. Como $\gcd(k, n) = 1$, la aplicación $x \mapsto x^k$ es una biyección en el grupo cíclico finito y es un homomorfismo ($f(xy) = (xy)^k = x^k y^k$ pues G es abeliano). Así, $f \in \text{Aut}(G)$ y $\Psi(f) = \overline{k}$.

Por lo tanto, $\text{Aut}(G) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. □

Corolario 5.1.2. *Si p es un número primo, entonces:*

$$Aut(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$$

Demostración. Aplicando el teorema anterior con $G = \mathbb{Z}_p$ (cíclico de orden p), tenemos:

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_p) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$$

El orden de este grupo es $\varphi(p) = p - 1$. Sabemos por la teoría de grupos finitos (específicamente por la existencia de raíces primitivas módulo p) que el grupo multiplicativo de un cuerpo finito $\mathbb{Z}_p$ es siempre cíclico. Por lo tanto:

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \cong C_{p-1} \cong \mathbb{Z}_{p-1}$$

Así concluimos que $\text{Aut}(\mathbb{Z}_p)$ es isomorfo al grupo cíclico de orden $p - 1$. □

Ejemplo 5.2. *Sea G un grupo y hagamos actuar G en sí mismo por conjugación. Entonces esta es una acción como grupo.*

Definimos $\tilde{\varphi} : G \times G \to G$ por $\tilde{\varphi}(g, g_1) = g g_1 g^{-1}$. Ya se tiene que es una acción (visto en el capítulo anterior). Veamos que actúa por automorfismos:

$$(k_1 k_2)^g = \tilde{\varphi}(g, k_1 k_2) = g(k_1 k_2)g^{-1} = g k_1 (g^{-1} g) k_2 g^{-1}$$
$$= (g k_1 g^{-1})(g k_2 g^{-1}) = \tilde{\varphi}(g, k_1)\tilde{\varphi}(g, k_2) = k_1^g k_2^g$$

Por lo tanto, la conjugación preserva el producto.

Observación 5.5. *Sean H y K grupos. Entonces H actúa en K como grupo si y solo si $\varphi : H \to Aut(K)$ es un homomorfismo. (Nota: $Aut(K) \leq S_K$).*

En efecto, $\Rightarrow$) Si H actúa como grupo en K, existe $\tilde{\varphi} : H \times K \to K$ que cumple las condiciones i), ii) de acción y la condición de compatibilidad iii). Definamos $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ por $\varphi(h) = f_h$, donde $f_h : K \to K$ está dada por $f_h(k) = \tilde{\varphi}(h,k)$.

1. φ está bien definida: Como $\tilde{\varphi}$ es acción, la función $\varphi : H \to S_K$ dada por $h \mapsto f_h$ es un homomorfismo de grupos (propiedad general de acciones). Basta ver que la imagen cae en $\mathrm{Aut}(K)$, es decir, que $f_h \in \mathrm{Aut}(K)$ para todo h. Sabemos que f_h es biyectiva (por ser acción). Además:

$$\begin{aligned} f_h(k_1k_2) &= \tilde{\varphi}(h, k_1k_2) = (k_1k_2)^h = k_1^h k_2^h \\ &= \tilde{\varphi}(h,k_1)\tilde{\varphi}(h,k_2) = f_h(k_1)f_h(k_2) \end{aligned}$$

Luego, f_h es homomorfismo y por tanto $f_h \in \mathrm{Aut}(K)$. Así φ está bien definida.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, sea $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ un homomorfismo. Definamos $\tilde{\varphi} : H \times K \to K$ por $\tilde{\varphi}(h,k) = (\varphi(h))(k)$. Notemos que como $\varphi(h) \in \mathrm{Aut}(K)$, denotemos $f_h = \varphi(h)$, entonces $\tilde{\varphi}(h,k) = f_h(k)$.

Verifiquemos que es acción como grupo:

- $k^e = \tilde{\varphi}(e,k) = (\varphi(e))(k) = Id_K(k) = k$. (Pues φ es homomorfismo, $\varphi(e) = Id$).
- $(k^{h_1})^{h_2} = \tilde{\varphi}(h_2, k^{h_1}) = f_{h_2}(f_{h_1}(k)) = (f_{h_2} \circ f_{h_1})(k)$. Como φ es homomorfismo, $f_{h_2} \circ f_{h_1} = \varphi(h_2) \circ \varphi(h_1) = \varphi(h_2h_1) = f_{h_2h_1}$. Luego, $= f_{h_2h_1}(k) = k^{h_2h_1}$.
- $(k_1k_2)^h = f_h(k_1k_2) = f_h(k_1)f_h(k_2)$ (pues $f_h \in \mathrm{Aut}(K)$). $= k_1^h k_2^h$.

$\square$

Ejemplo 5.3. *Sea G un grupo y $K \trianglelefteq G$. Entonces G **no** actúa necesariamente en K como grupo por multiplicación a la izquierda. Es decir, sea $\tilde{\varphi}(g,k) = gk$.*

Aunque $\tilde{\varphi}(e,k) = ek = k$ y $\tilde{\varphi}(g_1g_2, k) = (g_1g_2)k = g_1(g_2k)$, la propiedad de automorfismo falla:

$$(k_1k_2)^g = g(k_1k_2)$$

mientras que:

$$k_1^g k_2^g = (gk_1)(gk_2) = gk_1gk_2$$

En general $gk_1k_2 \neq gk_1gk_2$ (esto implicaría $e = g$, lo cual no es cierto para todo g). Además, gk no necesariamente está en K si K no es el grupo total (aunque si tomamos $K = G$, falla la condición de homomorfismo a menos que G sea trivial).