

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICA

ÁLGEBRA MODERNA I

Apuntes Álgebra Moderna I

Profesor:

Escobar Gracia Cé-
sar Alberto

Alumnos:

Ramírez León Christian Yael
Silva Sierra Joshua Joaquín

5FM1

26 de diciembre de 2025

Índice general

1. Conceptos Previos	1
1.1. Divisibilidad	1
1.2. Cardinalidad de conjuntos	2
1.3. Enteros Módulo n	4
1.4. Función φ de Euler	4
2. Grupos	7
2.1. Grupos	7
2.2. Subgrupos	10
2.3. Grupo de permutaciones	14
2.4. Grupo Cociente	16
3. Productos Directos	23
3.1. Productos Directos	23
3.2. El grupo Simétrico S_n	28
4. Acciones de Grupos	43
4.1. Acciones de Grupo	43
4.2. Grupos Sylow	54
5. Automorfismos de Grupos	61
5.1. Automorfismos de Grupos	61

CAPÍTULO 1

Conceptos Previos

1.1. Divisibilidad

Definición 1.1.1 (Divisibilidad). Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$, se dice que $a|b$ si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ak$.

Definición 1.1.2 (Máximo Común Divisor). Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, al menos uno distinto de cero, definimos a $d \in \mathbb{Z}$ un máximo común divisor de a y b , denotado por (a, b) , si cumple:

- I) $d > 0$.
- II) $d|a$ y $d|b$.
- III) Si $c|a$ y $c|b$, entonces $c|d$.

Proposición 1.1.1 (Propiedades de la Divisibilidad). Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con $a, b \neq 0$, entonces:

- I) Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.
- II) Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(b + c)$.
- III) Si $a|b$, entonces $a|bk$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- IV) Si $a|b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$.
- V) Si $a|b$ y $b|a$, entonces $a = \pm b$.
- VI) Si $a|b$, entonces $(a, b) = |a|$.
- VII) Si $c|a$ y $c|b$, entonces $c = ax + by$ para algunos $x, y \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.1.2. Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, al menos uno distinto de cero, entonces existe un único máximo común divisor de a y b .

Teorema 1.1.1 (Algoritmo de la división). Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b > 0$, entonces existen únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

1.2. Cardinalidad de conjuntos

Dado un conjunto A , se denotará su cardinalidad (número de elementos) como $|A|$. Si A es un conjunto finito, entonces $|A|$ es un número natural. Si A es infinito, entonces $|A| = \infty$.

Observación 1.1. Sean A, B , conjuntos finitos, con $B \subseteq A$. Entonces:

$$|A \setminus B| = |A| - |B|$$

En efecto, basta notar que $B \cup (A \setminus B) = A$ y que $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$, luego $|A| = |B \cup (A \setminus B)| = |B| + |A \setminus B|$, así $|A \setminus B| = |A| - |B|$. \square

Observación 1.2. Sean A y B dos conjuntos finitos, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

En efecto, Sean A y B conjuntos finitos, note que:

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$

Además: $(A \setminus (A \cap B))$, $(B \setminus (A \cap B))$, $(A \cap B)$, son disjuntos, más aún:

$$\begin{aligned} |A \setminus (A \cap B)| &= |A| - |A \cap B| \\ |B \setminus (A \cap B)| &= |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \setminus (A \cap B)| + |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B| \\ &= |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

\square

Proposición 1.2.1 (Principio de inclusión exclusión). Sean A_1, \dots, A_n conjuntos finitos, se tiene:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Observación 1.3. Suponga que C_1 es la condición que cumplen los elementos A y C_2 los de B , i.e.:

$$A = \{x \in \Omega : x \text{ cumple } C_1\}$$

$$B = \{x \in \Omega : x \text{ cumple } C_2\}$$

Denotemos $N(C_i)$ a la cantidad de elementos que cumplen C_i , $N(C_1, C_2)$ a los que cumplen ambas, $N(\bar{C}_i)$ a los que no cumplen y $N(\bar{C}_1, \bar{C}_2)$ los que no cumplen C_1 ni C_2 , entonces:

$$N(\bar{C}_1, \bar{C}_2) = |\Omega| - (N(C_1) + N(C_2) - N(C_1, C_2))$$

En efecto, Note que:

$$\begin{aligned} N(\bar{C}_1, \bar{C}_2) &= |A^c \cap B^c| = |(A \cup B)^c| = |\Omega \setminus (A \cup B)| = |\Omega| - |A \cup B| \\ &= |\Omega| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\ &= |\Omega| - (N(C_1) + N(C_2) - N(C_1, C_2)) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.1. Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 1000\}$ ¿Cuántos enteros de estos no son divisibles por 3 o 5?

Sol. Consideremos:

$C_1 : x$ sea divisible por 3

$C_2 : x$ sea divisible por 5

Así $N(C_1) = 333$, $N(C_2) = 200$, $N(C_1, C_2) = 66$.

Luego:

$$\begin{aligned} N(\bar{C}_1, \bar{C}_2) &= |\Omega| - (N(C_1) + N(C_2) - N(C_1, C_2)) \\ &= 1000 - (333 + 200 - 66) \\ &= 533 \end{aligned}$$

Sea A_1, \dots, A_n una colección finita de conjuntos finitos, definidos:

$$A_i = \{x \in \Omega : x \text{ cumpla } C_i\}, \quad C_i \text{ condición.}$$

Definamos de este modo:

$$S_1 = N(C_1) + \dots + N(C_n)$$

$$S_2 = N(C_1, C_2) + \dots + N(C_1, C_n) + N(C_2, C_3) + \dots + N(C_{n-1}, C_n)$$

\vdots

$$S_i = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} N(C_{j_1}, \dots, C_{j_i})$$

\vdots

$$S_n = N(C_1, \dots, C_n)$$

Por el principio de inclusión exclusión generalizado:

$$N(\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_n) = |\Omega| - (S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{n-1} S_n)$$

1.3. Enteros Módulo n

Definición 1.3.1. Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, se define la relación de $a \sim b$ si y sólo si $n \mid (a - b)$, es decir, a es congruente con b módulo n .

Es fácil ver que esta es una relación de equivalencia en \mathbb{Z} . Ahora, definamos en el conjunto cociente (\mathbb{Z}/\sim) las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= \overline{a + b} \\ \bar{a} \cdot \bar{b} &= \overline{a \cdot b}\end{aligned}$$

Con $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces las operaciones están bien definidas, i.e., no dependen del representante de clase.

En efecto, sea $\bar{a} = \bar{a}_1$, $\bar{b} = \bar{b}_1 \iff a \sim a_1$ y $b \sim b_1 \iff n \mid (a - a_1) \wedge n \mid (b - b_1)$.

Esto implica:

$$n \mid (a - a_1) + (b - b_1) = (a + b) - (a_1 + b_1) \iff (a + b) \sim (a_1 + b_1) \iff \overline{a + b} = \overline{a_1 + b_1}$$

Análogamente para el producto.

□

Al conjunto de clases de equivalencia módulo n junto con las operaciones definidas se les denotará por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ o \mathbb{Z}_n .

1.4. Función φ de Euler

Definición 1.4.1 (Función φ de Euler). Definimos la función $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como:

$$n \mapsto |\{a \in \mathbb{N} : (a, n) = 1 \wedge a \leq n\}|$$

Proposición 1.4.1. Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$ primos distintos:

- I) $\varphi(p) = p - 1$
- II) $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$, $k \in \mathbb{N}$
- III) $\varphi(p^k q^t) = \varphi(p^k) \cdot \varphi(q^t)$, $k, t \in \mathbb{N}$

Demostración.

i) Es evidente.

ii) Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{N} : x \leq p^k\}$, sea $a \in \Omega$ tal que $(a, p^k) \neq 1$.

Así $(a, p) \neq 1$, más aún $a = pl$ para algún $l \in \mathbb{N}$. Luego, como $a \in \Omega$, $a = pl \leq p^k$, por lo cual $l \leq p^{k-1}$. De este modo:

$$|\{a \in \Omega : p \mid a\}| = |\{a \in \Omega : a = pl, l \in \mathbb{N}\}| = |\{l \in \mathbb{N} : l \leq p^{k-1}\}| = p^{k-1}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \varphi(p^k) &= |\{a \in \Omega : (a, p^k) = 1\}| \\ &= |\Omega| - |\{a \in \Omega : p \mid a\}| \\ &= p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1) \end{aligned}$$

iii) Consideremos $\Omega = \{x \in \mathbb{N} : x \leq p^k q^t, k, t \in \mathbb{N}\}$, $A = \{a \in \Omega : p \mid a\}$ y $B = \{b \in \Omega : q \mid b\}$.

Ahora $A \cap B = \{a \in \Omega : p \mid a \wedge q \mid a\}$. Note que de manera análoga a ii), tenemos:

$$|A| = p^{k-1} q^t, \quad |B| = p^k q^{t-1}$$

Por otro lado si $a \in A \cap B$, tenemos $p \mid a \wedge q \mid a \implies \exists l \in \mathbb{N}$ tal que $a = pql$. Además como $pql = a \leq p^k q^t$, se sigue que $l \leq p^{k-1} q^{t-1}$, por lo cual:

$$|A \cap B| = p^{k-1} q^{t-1}$$

Por último, sabemos que $\varphi(p^k q^t) = |\{a \in \Omega : (a, p^k q^t) = 1\}|$. Por la proposición 1.2.1 tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi(p^k q^t) &= |\Omega| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\ &= p^k q^t - p^{k-1} q^t - p^k q^{t-1} + p^{k-1} q^{t-1} \\ &= q^t (p^k - p^{k-1}) - q^{t-1} (p^k - p^{k-1}) \\ &= (p^k - p^{k-1})(q^t - q^{t-1}) \\ &= [p^{k-1}(p - 1)][q^{t-1}(q - 1)] \\ &= \varphi(p^k) \cdot \varphi(q^t) \end{aligned}$$

□

Proposición 1.4.2. Sean $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos, sean $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{aligned}\varphi(p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}) &= p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \\ &= \varphi(p_1^{k_1}) \dots \varphi(p_n^{k_n})\end{aligned}$$

Demostración.

Falta demostrar. □

Observación 1.4. Observe que dados $n, m \in \mathbb{N}$, tales que $(m, n) = 1$, entonces:

$$\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$$

En efecto, Por el teorema fundamental de la aritmética, podemos expresar $n = p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l}$, $m = q_1^{t_1} \dots q_r^{t_r}$, con $p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_r \in \mathbb{N}$ primos distintos y $k_1, \dots, k_l, t_1, \dots, t_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, así:

$$\begin{aligned}\varphi(n \cdot m) &= \varphi(p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l} q_1^{t_1} \dots q_r^{t_r}) \\ &= \varphi(p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l}) \cdot \varphi(q_1^{t_1} \dots q_r^{t_r}) \\ &= \varphi(n) \cdot \varphi(m)\end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 2

Grupos

2.1. Grupos

Definición 2.1.1 (Grupo). *Un grupo es un conjunto no vacío G junto con una operación $\circ : G \times G \rightarrow G$, que satisface:*

- I) *font Asociatividad:* $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall a, b, c \in G$
- II) *font Elemento neutro:* $\exists e \in G : a \circ e = a \quad \forall a \in G$
- III) *font Inverso:* $\forall a \in G \quad \exists b \in G : a \circ b = e$

Se denota a esta estructura: (G, \circ, e) , en caso de no conocer la identidad (G, \circ) . Además, para facilitar la notación el inverso de a elemento de un grupo se denota como a^{-1} .

Ejemplo 2.1. *Sea \mathbb{Z} , y la suma usual en los números enteros, es claro que es un grupo.*

Ejemplo 2.2. $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{C}, +)$ son grupos.

Ejemplo 2.3. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ es un grupo.

En efecto, Anteriormente se había probado que $+$ es cerrado y está bien definida $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$.

I) $+$ es asociativa, pues:

$$\bar{a} + \overline{(b + c)} = \overline{a + (b + c)} = \overline{(a + b) + c} = \overline{(a + b)} + \bar{c}$$

II) Note que la identidad es $\bar{0}$, ya que:

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

III) Ahora dado $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, note que $a + (-a) = 0$, luego:

$$\begin{aligned}\overline{a + (-a)} &= \bar{0} \\ \bar{a} + \overline{(-a)} &= \bar{0}\end{aligned}$$

$$\text{Así } \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \exists \overline{(-a)} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \bar{a} + \overline{(-a)} = \bar{0}.$$

□

Ejemplo 2.4. Sean A un conjunto no vacío, sea V un espacio vectorial, sea \mathcal{H} el conjunto de funciones $f : A \rightarrow V$, definamos la operación suma sobre \mathcal{H} como:

$$\begin{aligned}+ : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ (f + g)(a) &\mapsto f(a) + g(a) \quad \forall a \in A\end{aligned}$$

En efecto, note:

I) Sean $f, g, h \in \mathcal{H}$, sea $a \in A$:

$$\begin{aligned}[(f + g) + h](a) &= (f + g)(a) + h(a) \\ &= (f(a) + g(a)) + h(a) \\ &= f(a) + (g(a) + h(a)) \\ &= f(a) + (g + h)(a) \\ &= [f + (g + h)](a)\end{aligned}$$

$$\therefore (f + g) + h = f + (g + h)$$

II) Tenemos $\underline{0} \in \mathcal{H}$, definida por: $\underline{0}(a) = 0 \quad \forall a \in A$, sea $f \in \mathcal{H}$, sea $a \in A$,

$$(f + \underline{0})(a) = f(a) + \underline{0}(a) = f(a) + 0 = f(a)$$

Así $f + \underline{0} = f$, i.e. $\underline{0}$ es el elemento neutro.

III) Sea $f \in \mathcal{H}$, sea $a \in A$, note que existe $-f(a)$, tal que:

$$f(a) + (-f(a)) = 0 \quad \forall a \in A,$$

entonces $-f$ es inverso de f .

□

Ejemplo 2.5. Sea V un espacio vectorial real, entonces $(V, +)$ es un grupo.

Ejemplo 2.6. $(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), +)$ es un grupo.

Ejemplo 2.7. Sea $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$, con el producto de matrices forma un grupo.

Ejemplo 2.8. Considere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sea $G \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, el conjunto

$$G = \{\bar{a} : (a, n) = 1\}$$

entonces (G, \cdot) con la op. definida por el producto de clases es un grupo.

En efecto, Note:

$$\text{I)} \quad \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in G, \quad \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c}) = \bar{a}(\overline{b \cdot c}) = \overline{a(b \cdot c)} = \overline{(ab)c} = \overline{(ab)} \cdot \bar{c} = (\bar{a}\bar{b})\bar{c}.$$

$$\text{II)} \quad \bar{1} \in G, \text{ pues } (1, n) = 1, \text{ además } \forall \bar{a} \in G \quad \bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a}.$$

III) Sea $\bar{a} \in G$, entonces $(a, n) = 1$, por tanto $\exists x, y \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$ax + ny = 1$$

Tomando la clase:

$$\bar{1} = \overline{ax + ny} = \overline{ax} + \overline{ny} = \bar{a}\bar{x} + \bar{n}\bar{y} = \bar{a}\bar{x} + \bar{0}\bar{y} = \bar{a}\bar{x} + \bar{0} = \bar{a}\bar{x}$$

i.e. existe $\bar{x} \in G$, tal que $\bar{a} \cdot \bar{x} = 1$.

□

Definición 2.1.2 (Grupo abeliano). Sea (G, \circ, e) un grupo, si cumple que $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$, diremos que es un grupo abeliano.

Ejemplo 2.9. $(\mathbb{Z}, +, 0)$ es abeliano.

Ejemplo 2.10. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \bar{0})$ es abeliano.

Ejemplo 2.11. $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot, \bar{1})$ es abeliano.

Proposición 2.1.1. Sea (G, \circ) un grupo, sea $g \in G$ tal que $g \circ g = g$ entonces $g = e$.

Demostración.

Como $g \in G \implies \exists g' \in G$ tal que $g \circ g' = e$, luego:

$$g = g \circ e = g \circ (g \circ g') = (g \circ g) \circ g' = g \circ g' = e$$

□

Proposición 2.1.2. Sea (G, \circ) grupo, $g \in G$, entonces:

$$g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$$

Demostración.

$$(g^{-1} \circ g) \circ (g^{-1} \circ g) = (g^{-1} \circ (g \circ g^{-1})) \circ g = (g^{-1} \circ e) \circ g = g^{-1} \circ g$$

Luego por la prop. anterior:

$$g^{-1} \circ g = e, \quad \text{i.e. } g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$$

□

Proposición 2.1.3. Si (G, \circ) es un grupo y $g \in G$, entonces:

$$e \circ g = g \circ e = g$$

Demostración.

$$e \circ g = (g \circ g^{-1}) \circ g = g \circ (g^{-1} \circ g) = g \circ e = g = g \circ e$$

□

Proposición 2.1.4. Sea (G, \circ) un grupo, el elemento neutro e , es único.

Demostración.

Supongamos que existe $e' \in G$ tal que $g \circ e' = g$, $\forall g \in G$, en particular:

$$e = e \circ e' = e' \circ e = e', \quad \text{i.e. } e \text{ es único.}$$

□

Ejemplo 2.12. Sea $G_1 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sea $G_2 = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : (a, n) = 1\}$, entonces se tienen los grupos: $(G_1, +, \bar{0})$, $(G_2, \cdot, \bar{1})$, es claro que no son iguales ya que: $|G_1| = n$, $|G_2| = \varphi(n)$.

Proposición 2.1.5. Si (G, \circ) es un grupo y $g \in G$, entonces g^{-1} es único.

Demostración.

Suponga $g' \in G$ tal que $g \circ g' = e$, entonces:

$$g^{-1} = g^{-1} \circ e = g^{-1} \circ (g \circ g') = (g^{-1} \circ g) \circ g' = e \circ g' = g'$$

□

2.2. Subgrupos

Definición 2.2.1 (Subgrupo). Sea (G, \circ, e) un grupo, sea $H \subseteq G$ un subconjunto de G , diremos que H es un subgrupo de G , si con la misma operación \circ , definida en G , forma un grupo. Se denotará $H \leq G$.

Ejemplo 2.13. Sea $(G = \mathbb{Z}, +, 0)$, para algún $a \in \mathbb{Z}$, definamos:

$$H_a = \{t \in \mathbb{Z} : t = na, n \in \mathbb{Z}\}$$

entonces $(H_a, +, 0)$ es un subgrupo de G .

Demostración.

Claramente $H_a \subseteq G$, además $+$ es cerrada en H_a , pues si $n_1a, n_2a \in H_a \implies n_1a + n_2a = (n_1 + n_2)a \in H_a$.

1) $+$ es asociativa, porque hereda la asociatividad de G .

II) $0 \in H_a$, ya que $0 = 0 \cdot a \in H_a$, además $na + 0 = na \quad \forall na \in H_a$.

III) Si $na \in H_a$, como $n \in \mathbb{Z} \implies -n \in \mathbb{Z}$, así $\exists -na \in H_a \implies na + (-na) = 0$.

□

Ejemplo 2.14. Sea $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$, entonces $SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$, este es llamado el grupo especial lineal.

Observación 2.1. Sea (G, \circ, e) grupo, sea $H \leq G$, entonces $e \in H$.

En efecto, como $H \neq \emptyset$, $\exists g \in H$, además $\exists g^{-1} \in H$ al ser un subgrupo, así:

$$g \circ g^{-1} = e, \quad \text{i.e. } e \in H.$$

□

Proposición 2.2.1. Si (G, \circ, e) es un grupo y $\{H_\lambda\}_{\lambda \in I}$ es una colección arbitraria de subgrupos, entonces:

$$\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda, \text{ es un subgrupo de } G.$$

Demostración.

Como $H_\lambda \leq G \quad \forall \lambda \in I$, $\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda \neq \emptyset$ pues $e \in H_\lambda \quad \forall \lambda \in I$. Sean $a, b \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$, entonces $a, b \in H_\lambda \quad \forall \lambda \in I$, además \circ es cerrada en $\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$, ya que $a \circ b \in H_\lambda \quad \forall \lambda \in I$, así $a \circ b \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$. Luego:

I) \circ es asociativa en $\bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$, ya que es asociativa en $H_\lambda, \forall \lambda \in I$.

II) $e \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$.

III) Dado que $a \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$, entonces $a \in H_\lambda \forall \lambda \in I$, así $\exists a^{-1} \in H_\lambda \forall \lambda \in I$ tal que $a \circ a^{-1} = e$, luego $a^{-1} \in \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda$.

□

Proposición 2.2.2. Sea (G, \circ, e) un grupo, sean $H, K \leq G$, entonces $H \cup K$ es un subgrupo de G si y sólo si $H \subseteq K \vee K \subseteq H$.

Demostración.

Será demostrada primero la reciprocidad.

(\Leftarrow) Basta notar que si $H \subseteq K$, $H \cup K = K$ y $K \leq G$, así $H \cup K \leq G$. Análogo si $K \subseteq H$.

(\Rightarrow) Sea $H \cup K \leq G$. Supongamos que $H \not\subseteq K \wedge K \not\subseteq H$, sean $a \in H \setminus K$ y $b \in K \setminus H$. Sea $c = a \circ b$. Como $H \cup K \leq G$, entonces $c \in H \cup K$, así $c \in H \vee c \in K$.

Si $c \in H \implies a^{-1} \circ c = b \in H$, lo cual no puede ser (pues $b \in K \setminus H$). Si $c \in K \implies c \circ b^{-1} = a \in K$, lo cual no puede ser (pues $a \in H \setminus K$).

Por lo cual $H \subseteq K \vee K \subseteq H$.

□

Definición 2.2.2 (Orden de un grupo). Sea (G, \circ, e) un grupo, el orden del grupo será la cardinalidad de G y se denota $|G|$.

Definición 2.2.3. Sea (G, \circ, e) un grupo, diremos que es un grupo finito si G es un conjunto finito. En caso contrario se le dice infinito.

Definición 2.2.4. Sea (G, \circ, e) un grupo, sea $S \subseteq G$, con $S \neq \emptyset$, el grupo generado por S en G denotado por $\langle S \rangle$ es el menor de los subgrupos que lo contiene, i.e.:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{S \subseteq H \\ H \leq G}} H$$

Si S es finito, y sea $H = \langle S \rangle$, diremos que H es finitamente generado.

Ejemplo 2.15. Todo subgrupo finito de G es finitamente generado, más aún, si $H \leq G$ y es finito $\langle H \rangle = H$.

Demostración.

Dado que:

$$\langle H \rangle = \bigcap_{\substack{H' \leq G \\ H \subseteq H'}} H' \subseteq H' \quad \forall H' \leq G \text{ tales que } H \subseteq H',$$

además como $H \leq G$ y $H \subseteq H$, entonces H es uno de los términos de la intersección, así:

$$\langle H \rangle \subseteq H \wedge H \subseteq \bigcap_{\substack{H' \leq G \\ H \subseteq H'}} H' = \langle H \rangle$$

Por lo tanto $\langle H \rangle = H$. □

Ejemplo 2.16. $(\mathbb{Z}, +, 1)$ es finitamente generado, basta notar que:

$$\mathbb{Z} = \langle \{1\} \rangle$$

Ejemplo 2.17. $(\mathbb{Q}, +, 1)$, \mathbb{Q} no es finito ni es finitamente generado.

Proposición 2.2.3. Sea (G, \circ, e) un grupo, $H \subseteq G$ no vacío, entonces las cond. son equivalentes:

- I) $H \leq G$
- II) $\forall x, y \in H$ se tiene que $x \circ y \in H \wedge x^{-1} \in H$.
- III) $\forall x, y \in H$ se tiene que $x \circ y^{-1} \in H$.

Demostración.

Se probarán las implicaciones en ciclo.

- I \Rightarrow II) Se sigue de la definición ya que la operación en G debe ser una operación en H , además de que si H es un subgrupo $\forall x \in H \Rightarrow \exists x^{-1} \in H$.
- II \Rightarrow III) Si $x, y \in H$ por ii) $y^{-1} \in H$, luego $x \circ y^{-1} \in H$ (por ii).
- III \Rightarrow I) Sea $x \in H$, entonces $x \circ x^{-1} = e$, luego, note que si $x \in H$ entonces $x^{-1} = e \circ x^{-1} \in H$.

Ahora probemos que la operación es cerrada: sea $x, y \in H$, entonces $y^{-1} \in H$, más aún $(y^{-1})^{-1} = y$, ya que $y^{-1} \circ y = y^{-1} \circ (y^{-1})^{-1} = e$ y por la unicidad del inverso $(y^{-1})^{-1} = y$. Por lo cual $x \circ y = x \circ (y^{-1})^{-1} \in H$, por lo tanto la operación es cerrada en H .

□

Observación 2.2. Sea (G, \circ, e) un grupo, sean $a, b \in G$ entonces:

$$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$$

En efecto,

$$(a \circ b)(b^{-1} \circ a^{-1}) = a(b \circ b^{-1}) \circ a^{-1} = (a \circ e) \circ a^{-1} = a \circ a^{-1} = e$$

Por la unicidad del inverso se sigue $b^{-1} \circ a^{-1} = (a \circ b)^{-1}$.

□

Cuando no haya pérdida de generalidad para facilitar la escritura de la operación \circ en un grupo G , se denotará expresará como el producto, es decir: $a \circ b := ab$. Además, se podrá expresar la potencia de un elemento $a \in G$ como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{veces}}$$

para $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $n = 0$, $a^0 = e$ y podemos observar que $a^{-n} = (a^n)^{-1}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.3. Si $S \neq \emptyset$, es un subconjunto de un grupo G , entonces:

$$\langle S \rangle = \{s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n} : s_j \in S, i_j = \pm 1, j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

Demostración.

Sea $H = \{s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n} : s_i \in S, i_j = \pm 1, j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$. Sean $s, t \in H$, tales que $s = s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n}$, $t = t_1^{j_1} \dots t_m^{j_m}$, con $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m \in S$, $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m \in \{1, -1\}$. Notemos que:

$$st^{-1} = s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n} (t_1^{j_1} \dots t_m^{j_m})^{-1} = s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n} t_m^{-j_m} \dots t_1^{-j_1} \in H$$

Así por la proposición 2.2.3 $H \leq G$, así $\langle S \rangle \subseteq H$. Ahora sea $N \leq G$, tal que $S \subseteq N$, es claro que $s \in N$ (cualquier elemento de esa forma está en N), así $H \subseteq N$, así $H = \langle S \rangle$. □

Definición 2.2.5 (Grupo cíclico). Sea G un grupo, si $\exists g \in G$, tal que $\langle g \rangle = G$ diremos que G es cíclico.

Ejemplo 2.18. $(\mathbb{Z}, +, 0)$ es cíclico, pues:

$$\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$$

Ejemplo 2.19. S_3 no es cíclico.

Ejemplo 2.20. $(\mathbb{Q}, +, 0)$ no es cíclico.

Observación 2.4 (Nota). Note que si G es cíclico:

$$\langle g \rangle = \{g^t : t \in \mathbb{Z}\}$$

Proposición 2.2.4. Si (G, \circ, e) es cíclico, entonces G es abeliano.

Demostración.

Sea (G, \circ, e) cíclico, entonces $\exists g \in G$, tal que $\langle g \rangle = G$. Sean $a, b \in G$, tal que $a = g^n$, $b = g^m$, con $n, m \in \mathbb{Z}$. Es fácil probar que $g^p g^q = g^{p+q} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}$, así:

$$ab = g^n g^m = g^{n+m} = g^{m+n} = g^m g^n = ba$$

□

Observación 2.5 (Observación). El recíproco del teorema anterior es falso. En efecto, tome los contraejemplos:

1. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, no primo (por ejemplo $n = 8$), $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$ es abeliano, pero no cíclico.
2. (\mathbb{R}^+, \cdot) es abeliano pero no cíclico.

2.3. Grupo de permutaciones

Definición 2.3.1 (Grupo de Permutaciones). Sea X un conjunto no vacío, sea $\mathcal{H} = \{f : X \rightarrow X : f \text{ es biyectiva}\}$, consideremos la composición de funciones, entonces \mathcal{H} forma un grupo llamado el grupo de permutaciones del conjunto X denotado por S_X .

En caso de que X sea finito, podemos enlistar los elementos de X por a_1, \dots, a_n , podemos representar con un arreglo bidimensional de renglones colocando:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{\sigma(1)} & a_{\sigma(2)} & \dots & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

Donde $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, tal que $\sigma(i) = j$, si $f(a_i) = a_j$, de este modo podemos prescindir de los elementos de X y fijarnos solo en los subíndices e identificar a f con:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

En este caso se escribirá como S_n con $n = |X|$.

Ejemplo 2.21. S_3 es el grupo formado por los elementos:

$$\{e, \sigma, \theta, \sigma \cdot \theta, \theta \cdot \sigma, \theta^2\}$$

Donde:

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \theta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \theta^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \sigma \cdot \theta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \theta \cdot \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\circ	e	θ	σ	θ^2	$\sigma \cdot \theta$	$\theta \cdot \sigma$
e	e	θ	σ	θ^2	$\sigma \cdot \theta$	$\theta \cdot \sigma$
θ	θ	θ^2	$\theta \cdot \sigma$	e	σ	$\sigma \cdot \theta$
σ	σ	$\sigma \cdot \theta$	e	$\theta \cdot \sigma$	θ	θ^2
θ^2	θ^2	e	$\sigma \cdot \theta$	θ	$\theta \cdot \sigma$	σ
$\sigma \cdot \theta$	$\sigma \cdot \theta$	$\theta \cdot \sigma$	θ^2	σ	e	θ
$\theta \cdot \sigma$	$\theta \cdot \sigma$	σ	θ	$\sigma \cdot \theta$	θ^2	e

Es evidente que S_3 no es abeliano, basta notar $\theta \circ \sigma \neq \sigma \circ \theta$. Además observe que si el orden de X es n , $|S_n| = n!$.

Observación 2.6. Si $n \geq 3$, entonces S_n no es abeliano.

En efecto, Basta tomar:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i+1 & i & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & j & j+1 & \dots & n \end{pmatrix} \quad \text{con } i \neq j$$

y notar que $\sigma \circ \theta \neq \theta \circ \sigma$.

Además podemos notar que trivialmente S_1 y S_2 son un grupo abeliano. □

2.4. Grupo Cociente

Definición 2.4.1 (Producto de Subgrupos). Sea (G, \circ, e) un grupo, sean $S, T \leq G$, definimos el producto de S y T como:

$$ST = \{st : s \in S, t \in T\}$$

Observación 2.7. Sea (G, \circ, e) un grupo, $S, T \subseteq G$, ST , no es necesariamente un subgrupo.

Proposición 2.4.1. Sea (G, \circ, e) un grupo, sean $H, K \leq G$ entonces HK es un subgrupo si y sólo si $HK = KH$.

Demostración.

\Rightarrow) Suponga que $HK \leq G$, sean $hk \in HK$, entonces $h \in H$ y $k \in K$, entonces: $k^{-1}h^{-1} = (hk)^{-1} \in HK$, por otro lado, como $k^{-1}h^{-1} \in KH$, así: $HK = (k^{-1}h^{-1})^{-1} \in KH$, luego $HK \subseteq KH$, análogamente $KH \subseteq HK$, por lo tanto $HK = KH$.

\Leftarrow) Supongamos que $HK = KH$, notemos que $HK \neq \emptyset$, ya que $e \circ e \in HK$. Sean $x, y \in HK$, entonces existe $h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K$, tal que $x = h_1k_1, y = h_2k_2$, es claro que $y^{-1} \in HK$, pues $y^{-1} = k_2^{-1}h_2^{-1} \in KH = HK$, así que probemos que $xy^{-1} \in HK$. En efecto, $xy^{-1} = h_1k_1(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$. Note que $k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in KH = HK$, entonces digamos $h_3k_3 = k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$ con $h_3 \in H, k_3 \in K$. Luego: $h_1(k_1k_2^{-1}h_2^{-1}) = h_1(h_3k_3) \in HK$, por lo tanto $xy^{-1} \in HK$, y por una proposición anterior HK es un subgrupo de G . \square

Definición 2.4.2. Sea (G, \circ, e) un grupo, sean $H, K \leq G$, HK se llama el producto de H con K .

Corolario 2.4.1. Si (G, \circ, e) es un grupo abeliano el producto finito de subgrupos es un subgrupo.

En efecto, es inmediato usando inducción y el hecho que el producto de subgrupos es asociativo. \square

Observación 2.8. Sea (G, \circ, e) un grupo, sea $H \leq G$, entonces $Hg = H$ si y sólo si $g \in H$.

Demostración.

\Rightarrow) Supongamos que $Hg = H$, entonces $\forall hg \in Hg, hg \in H$, en particular tome $h = e$, así $eg = g \in H$.

\Leftarrow) Suponga que $g \in H$, entonces $Hg = \{hg : h \in H\} \subseteq H$, ahora dado $h \in H$, note que $hg^{-1} \in H$, luego $h = (hg^{-1})g \in Hg$, por lo cual $H \subseteq Hg$. $\therefore Hg = H$. \square

Proposición 2.4.2. Sea (G, \circ, e) un grupo, $H \leq G$, entonces $Hg = Hg_1$ si y sólo si $gg_1^{-1} \in H$.

En efecto, $gg_1^{-1} \in H \iff H = Hgg_1^{-1} \iff Hg_1 = (Hgg_1^{-1})g_1 = Hg$. \square

Definición 2.4.3. Sea (G, \circ, e) un grupo, sea $H \leq G$, sea $g \in G$, a Hg se le llama clase derecha, análogamente gH se le llama clase izquierda.

Definición 2.4.4. Sea (G, \circ, e) un grupo, sea $H \leq G$, sea $\mathcal{L} = \{gH : g \in G\}$ se le llama conjunto de clases izquierdas y $\mathcal{R} = \{Hg : g \in G\}$ se le llama conjunto de clases derechas.

Proposición 2.4.3. Sea (G, \circ, e) un grupo, sea $H \leq G$, entonces \mathcal{L} y \mathcal{R} forman una partición de G .

Demostración.

Basta probar que \mathcal{R} induce una relación de equivalencia, i.e. la relación \sim definida por $a \sim b \iff a, b \in Hg$ es de equivalencia.

- I) REFLEXIVIDAD: $a \sim a \iff a, a \in Hg$. (Esto se cumple pues $a \in Ha$).
- II) SIMÉTRICA: $a \sim b \implies a, b \in Hg \implies b, a \in Hg \implies b \sim a$.
- III) TRANSITIVIDAD: Si $a \sim b \wedge b \sim c \implies a, b \in Hg_1 \wedge b, c \in Hg_2$. Sea $a = h_1g_1$, $b = h_2g_1$, $b = h_3g_2$, $c = h_4g_2$, así note que $g_1 = (h_2^{-1}h_3)g_2$. Luego podemos expresar $a = h_1(h_2^{-1}h_3)g_2$, como $(h_1h_2^{-1}h_3) \in H$, $a \in Hg_2$, así $a, c \in Hg_2 \implies a \sim c$.

\therefore Las clases derechas forman una partición de G .

Análogamente las clases izquierdas forman una partición de G . \square

Observación 2.9. Si (G, \circ, e) es abeliano cada clase izquierda es la misma clase derecha.

En efecto, Sea $H \leq G$, sea $\mathcal{L} = \{gH : g \in G\}$, sea $\mathcal{R} = \{Hg : g \in G\}$, sea $Hg \in \mathcal{R}$, sea $hg \in Hg$, $hg = gh \in gH \in \mathcal{L}$, así $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$, análogamente $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$, por lo cual $\mathcal{L} = \mathcal{R}$. \square

Observación 2.10. El recíproco es no necesariamente cierto.

Ejemplo 2.22. En S_3 , sea $H = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, e \right\} = \langle \sigma \rangle \leq G$.

Veamos cuáles son las clases derechas de H :

$$\mathcal{R} = \{H, H\theta = \{\theta, \sigma \circ \theta\}, H\theta^2 = \{\theta^2, \sigma \circ \theta^2 = \theta \circ \sigma\}\}$$

Ahora las clases izquierdas:

$$\mathcal{L} = \{H, \theta H = \{\theta, \theta \circ \sigma\}, \theta^2 H = \{\theta^2, \theta^2 \circ \sigma\}\}$$

Proposición 2.4.4. Sea (G, \circ, e) un grupo, entonces la cardinalidad de cada clase izquierda o derecha es la misma e igual a $|H|$.

Demostración.

Sea $Hg \in \mathcal{R}$, definamos $\varphi : H \rightarrow Hg$, $h \mapsto hg$, probemos que es una función biyectiva.

En efecto, sean $h_1, h_2 \in H$, tal que $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$, entonces $h_1g = h_2g \iff h_1 = h_2$, por lo tanto es inyectiva.

Sea $hg \in Hg \implies \exists h \in H$ tal que $\varphi(h) = hg$, por lo tanto es suprayectiva.

$\therefore \varphi$ es biyectiva, así $|H| = |Hg|$. Análogamente se prueba que $|H| = |gH|$. \square

Teorema 2.4.1 (Índice de Lagrange). *Sea (G, \circ, e) un grupo sea $H \leq G$, entonces $|H| \mid |G|$ y además:*

$$|G| = |H| \cdot [G : H]$$

Donde $[G : H] := |\mathcal{L}| = |\mathcal{R}|$ se llama índice de Lagrange de H en G .

Demostración.

Primero veamos que $|\mathcal{L}| = |\mathcal{R}|$. Sea $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{L}$, $Ha \mapsto a^{-1}H$, probemos que es un isomorfismo (biyección entre conjuntos).

Sean $g_1H, g_2H \in \mathcal{R}$, tal que $\varphi(Hg_1) = \varphi(Hg_2)$, entonces:

$$g_1^{-1}H = g_2^{-1}H \iff g_1(g_2^{-1})^{-1} \in H \iff g_1g_2^{-1} \in H \iff Hg_1 = Hg_2$$

Por lo tanto es inyectiva. (Nota: en la imagen la cadena de equivalencias usa propiedades de clases laterales).

Ahora sea $g^{-1}H \in \mathcal{L}$, como existe $g = (g^{-1})^{-1} \in G$, se sigue que $\exists Hg \in \mathcal{R}$, tal que $\varphi(Hg) = g^{-1}H$, por lo cual es biyectiva.

$\therefore \varphi$ es biyectiva y así es un isomorfismo (de conjuntos). $\therefore |\mathcal{R}| = |\mathcal{L}|$.

Ahora como las clases son una partición de G , entonces:

$$\begin{aligned} |G| &= \left| \bigcup_{a \in G} Ha \right| \\ &= \sum_{a \in G} |Ha| = \sum_{a \in G} |H| \\ &= |\mathcal{R}| |H| = |H| [G : H] \end{aligned}$$

Así: $|H| \mid |G|$ y $[G : H] \mid |G|$. \square

En particular si G es finito, se cumple que:

$$\frac{|G|}{|H|} = [G : H]$$

Definición 2.4.5. *Sea (G, \circ, e) un grupo, sea $g \in G$, se denota por $o(g)$ como el menor entero no negativo tal que $g^{o(g)} = e$, si existe ese entero, en caso contrario, diremos $o(g) = +\infty$.*

Ejemplo 2.23. *En $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $o(a) = 0$ (o infinito según la convención).*

Ejemplo 2.24. En (S_3, \circ, e) $o(\sigma) = 2$, $o(\theta) = 3$.

Ejemplo 2.25. En $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +, 0)$, $o(2) = 4$, $o(3) = 8$, $o(4) = 2$.

Observación 2.11. Sea (G, \circ, e) un grupo finito $\forall g \in G, \exists m \in \mathbb{Z}^+$, tal que $o(g) \leq m$.

Demostración.

Sea $|G| = n$, tome el conjunto $\{g^{i_1}, \dots, g^{i_{n+1}}\}$, con $i_1, \dots, i_{n+1} \in \mathbb{Z}^+$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1}$. Entonces al menos 2 son iguales, i.e. $g^{i_j} = g^{i_k}$, para $1 \leq j < k \leq n+1$. Luego:

$$g^{i_k - i_j} = g^{i_k} \cdot g^{-i_j} = g^{i_j} g^{-i_j} = e, \quad \text{tomemos } m = i_k - i_j > 0.$$

$\therefore \exists m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $g^m = e$, luego como $o(g)$ es el mínimo entero positivo tal que $g^{o(g)} = e$, entonces $o(g) \leq m$. \square

Observación 2.12. Sea (G, \circ, e) un grupo finito, sea $g \in G$, $o(g) = |\langle g \rangle|$, más aún $o(g) \mid |G|$.

Demostración.

Sea $H = \{e, g, g^2, \dots, g^{o(g)-1}\}$, claramente $H \subseteq \langle g \rangle$, además notemos que es un subgrupo.

En efecto: sean $g^i, g^j \in H$, $0 \leq i < j \leq o(g) - 1$, entonces $g^i g^j = g^{i+j}$, se tiene que $0 \leq i+j \leq o(g) - 1 \vee o(g) \leq i+j$. Si se cumple la primera condición es evidente que $g^{i+j} \in H$. Por lo cual tomemos el caso $o(g) \leq i+j$, por el algoritmo de Euclides $\exists k, r \in \mathbb{Z}^+$ tal que: $i+j = k \cdot o(g) + r$, con $0 \leq r < o(g)$, así:

$$g^{i+j} = g^{k \cdot o(g) + r} = (g^{o(g)})^k g^r = (e)^k g^r = g^r \in H,$$

por lo tanto es cerrada, además se hereda de G las propiedades del grupo.

Ahora sea $a \in \langle g \rangle$, podemos expresar $a = g^i, i \in \mathbb{Z}$, así por Euclides $\exists k, r \in \mathbb{Z}$, con $0 \leq r < o(g)$ tal que $g^i = o(g)k + r$, de este modo podemos expresar $a = g^i = g^r \in H$.

$\therefore \langle g \rangle \subseteq H$, así $|\langle g \rangle| = |H| = o(g)$, más aún como H es subgrupo de G , $|H| \mid |G|$, así $o(g) \mid |G|$. \square

Corolario 2.4.2. Sea (G, \circ, e) un grupo finito entonces $g^{|G|} = e \quad \forall g \in G$.

Demostración.

Dado que $o(g) \mid |G|$, entonces $\exists s$ tal que $o(g)s = |G|$ y

$$g^{|G|} = g^{o(g)s} = (g^{o(g)})^s = (e)^s = e$$

\square

Corolario 2.4.3 (Teorema de Euler). Sea $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ entonces $a^{\varphi(n)} = 1 \pmod{n}$.

Demostración.

$|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = \varphi(n)$ y por el corolario anterior

$$a^{\varphi(n)} = 1 \pmod{n}$$

□

Corolario 2.4.4 (Teorema Pequeño de Fermat). Si $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ con p primo, entonces: $a^p \equiv a \pmod{p}$ y $a^{p-1} = 1$.

En efecto, Por el corolario anterior dado $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, $a^{\varphi(p)} = 1 \pmod{p}$, como $\varphi(p) = p-1$, se sigue $a^{p-1} = 1 \pmod{p}$, luego $a^p = a$. □

Definición 2.4.6. Sea (G, \circ, e) un grupo sea $N \leq G$, diremos que N es un subgrupo normal en G denotado por $N \trianglelefteq G$, si $gNg^{-1} = N, \forall g \in G$.

Observación 2.13. Si (G, \circ, e) es un grupo, sea $N \subseteq G$, arbitrario entonces $gNg^{-1} \subseteq G$. En este caso diremos que gNg^{-1} es subgrupo conjugado de N .

En efecto, Es claro que $gNg^{-1} \neq \emptyset$ pues $N \neq \emptyset$. Además para $h_1, h_2 \in gNg^{-1}$, $\exists n_1, n_2 \in N$ tal que $h_1 = gn_1g^{-1}$, $h_2 = gn_2g^{-1}$, luego:

$$h_1h_2^{-1} = gn_1g^{-1}(gn_2g^{-1})^{-1} = gn_1g^{-1}(g^{-1})^{-1}n_2^{-1}g^{-1} = gn_1n_2^{-1}g^{-1} \in gNg^{-1}$$

\therefore es un subgrupo de G . □

Teorema 2.4.2. Sea (G, \circ, e) un grupo, $N \leq G$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) $N \trianglelefteq G$.
- ii) $gNg^{-1} \subseteq N \quad \forall g \in G$.
- iii) $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$. (Nota: en la imagen dice $gN \subseteq Ng$, pero el punto iii suele referirse a la igualdad de conjugación o conmutación de clases. Transcribo lo que dice la imagen literalmente en la demostración: $gNg^{-1} \subseteq N \implies gN \subseteq Ng$).
- iv) $gN = Ng \quad \forall g \in G$.
- v) El único subgrupo conjugado de N es N .

Demostración.

- I \Rightarrow II) De la definición $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$, en particular $gNg^{-1} \subseteq N \quad \forall g \in G$.
- II \Rightarrow III) $gNg^{-1} \subseteq N \implies (gNg^{-1})g \subseteq Ng$ y $g(gNg^{-1}) = gN$, así $gN \subseteq Ng \quad \forall g \in G$.
(Nota: Aquí la transcripción se ajusta a la lógica del manuscrito que parece deducir la igualdad de clases o contención).
- III \Rightarrow IV) Resta ver que $Ng \subseteq gN$. Tenemos que $gN \subseteq Ng \quad \forall g \in G$, se sigue: $g^{-1}N \subseteq Ng^{-1} \quad \forall g \in G \implies g(g^{-1}N) \subseteq gNg^{-1} \implies N \subseteq gNg^{-1} \quad \forall g \in G$, así: $Ng \subseteq (gNg^{-1})g = gN \quad \forall g \in G$.
- IV \Rightarrow V) Sea H el conjugado de N entonces $H = gNg^{-1}$ para algún $g \in G$, entonces:

$$Hg = (gNg^{-1})g = gN = Ng$$

de donde

$$H = (Hg)g^{-1} = (Ng)g^{-1} = N$$

- V \Rightarrow I) Se sigue de la definición.

□

Observación 2.14. Si $N \trianglelefteq G$ y $H \leq G$ entonces $HN = NH$ y por tanto $NH \leq G$.

En efecto, $HN = \bigcup_{h \in H} hN = \bigcup_{h \in H} Nh = NH$.

□

Ejemplo 2.26. Dado el grupo S_3 , calcule los subgrupos: $S_3 = \{e, \sigma, \theta, \theta^2, \sigma\theta, \theta\sigma\}$

Sol.

$$\begin{aligned} H_0 &= \langle e \rangle = \{e\} \\ H_1 &= \langle \sigma \rangle = \{e, \sigma\} \\ H_2 &= \langle \theta \rangle = \{e, \theta, \theta^2\} = \{e, \theta^2, \theta\} \\ H_3 &= \langle \sigma \circ \theta \rangle = \{e, \sigma \circ \theta\} \\ H_4 &= \langle \theta \circ \sigma \rangle = \{e, \theta \circ \sigma\} \\ H_5 &= \langle \{\sigma, \theta\} \rangle = S_3 \end{aligned}$$

Además podemos notar:

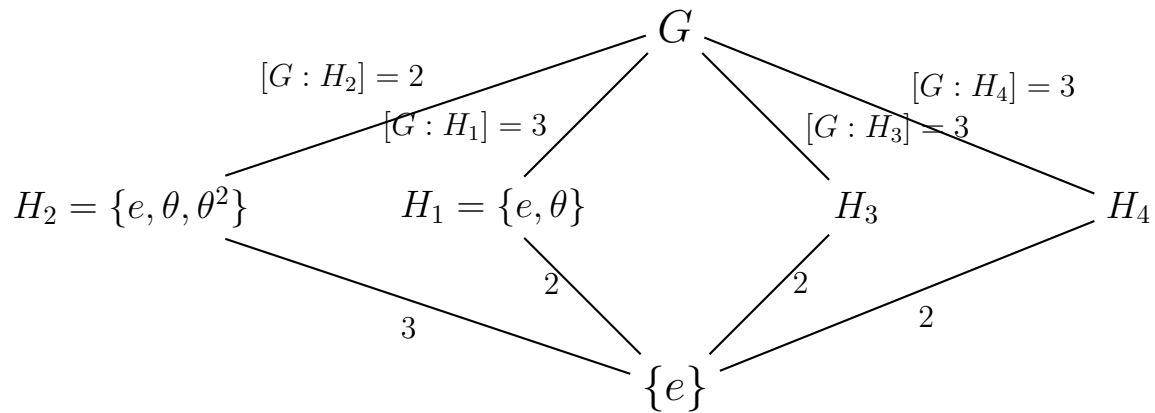
- $H_0 \trianglelefteq G$, de manera trivial.
- $H_1 \not\trianglelefteq G$, ya que $H_1\theta \neq \theta H_1$.
- $H_2 \trianglelefteq G$, $H_2\sigma = \{\sigma, \theta \circ \sigma, \theta^2 \circ \sigma\} = \{\sigma, \theta \circ \sigma, \sigma \circ \theta\} = \sigma H_2$.

- $H_3 \not\trianglelefteq G$, $H_3\theta \neq \theta H_3$.
- $H_4 \not\trianglelefteq G$, $H_4\theta \neq \theta H_4$.
- $H_5 \trianglelefteq G$, ya que $H_5 = S_3$.

Por otro lado note:

$$\theta H_1 \theta^{-1} = \theta H_1 \theta^2 = \{e, \theta \circ \sigma \circ \theta^2\} = \{e, \theta \circ \theta \circ \sigma\} = \{e, \theta^2 \circ \sigma\} = \{e, \sigma \circ \theta\} = H_3.$$

$$\theta H_3 \theta^{-1} = \theta H_3 \theta^2 = \{e, \theta \circ (\sigma \circ \theta) \circ \theta^2\} = \{e, \theta \circ \sigma\} = H_4$$



CAPÍTULO 3

Productos Directos

3.1. Productos Directos

Definición 3.1.1. Sea $(H, \circ), (K, *)$ dos grupos, definamos en $G = H \times K$, la función $\odot : G \times G \rightarrow G$, dada por:

$$(h_1, k_1) \odot (h_2, k_2) = (h_1 \circ h_2, k_1 * k_2)$$

Claramente \odot es una operación en G y se verifica que con esta operación, G forma un grupo con identidad (e_H, e_K) .

También se tiene que $\bar{H} = H \times \{e_K\}$ y $\{e_H\} \times K = \bar{K}$ son subgrupos normales de G tales que $\bar{H} \cap \bar{K} = e_G = (e_H, e_K)$ y $G = \bar{H}\bar{K}$ en este caso a G se le llama el producto directo externo de H con K

Definición 3.1.2. Si G es un grupo tal que existen $H, K \leq G$ con $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, $G = HK$, $H \cap K = \{e\}$, diremos que G es el producto directo interno de H y K .

Observación 3.1. El producto directo de una cantidad finita de grupos es asociativo (la igualdad se da salvo isomorfismo); es decir,

$$(H_1 \times H_2) \times H_3 \cong H_1 \times (H_2 \times H_3) \quad (\text{Se escribe } H_1 \times H_2 \times H_3)$$

Verificarlo.

Teorema 3.1.1 (Teorema chino del residuo). Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Entonces $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{e_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{e_k}}$ en donde $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ es la factorización en primos de n .

Demostración.

Sea $\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{p_1^{e_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{e_k}}$ la función definida por:

$$[a]_n \mapsto ([a]_{p_1^{e_1}}, \dots, [a]_{p_k^{e_k}})$$

La función φ está bien definida. Supongamos que $[a]_n = [b]_n$, entonces $n \mid a - b$. Dado que $p_i^{e_i} \mid n$, por transitividad se tiene que $p_i^{e_i} \mid a - b$, es decir $[a]_{p_i^{e_i}} = [b]_{p_i^{e_i}}$, de donde se concluye que $\varphi([a]_n) = \varphi([b]_n)$.

- φ es inyectiva: $\varphi([a]_n) = \varphi([b]_n)$ si y solo si $[a]_{p_i^{e_i}} = [b]_{p_i^{e_i}}$ para todo $1 \leq i \leq k$. Esto implica que $p_i^{e_i} \mid a - b$ para todo $1 \leq i \leq k$. Como los p_i son primos distintos, tenemos que $(p_i^{e_i}, p_j^{e_j}) = 1$ para todo $i \neq j$. En consecuencia, el producto $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ divide a $a - b$, de donde $[a]_n = [b]_n$.

Nótese además que las cardinalidades coinciden: $n = |\mathbb{Z}_n| = |\mathbb{Z}_{p_1^{e_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{e_k}}| = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$. Al ser una función inyectiva entre conjuntos finitos del mismo tamaño, φ es biyectiva.

- φ es un homomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi([a]_n + [b]_n) &= \varphi([a + b]_n) = ([a + b]_{p_1^{e_1}}, \dots, [a + b]_{p_k^{e_k}}) \\ &= ([a]_{p_1^{e_1}} + [b]_{p_1^{e_1}}, \dots, [a]_{p_k^{e_k}} + [b]_{p_k^{e_k}}) \\ &= ([a]_{p_1^{e_1}}, \dots, [a]_{p_k^{e_k}}) + ([b]_{p_1^{e_1}}, \dots, [b]_{p_k^{e_k}}) \\ &= \varphi([a]_n) + \varphi([b]_n) \end{aligned}$$

Finalmente, φ es un isomorfismo y por lo tanto $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{e_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{e_k}}$. □

Ejemplo 3.1. Sea G un grupo de orden pq con p, q primos distintos. Si H, K son subgrupos normales de G con $|H| = p$ y $|K| = q$, entonces $G \cong H \times K$.

Demostración.

Como $H, K \trianglelefteq G$, si tomamos $g \in H \cap K$ entonces $o(g) \mid |H| = p$ y $o(g) \mid |K| = q$. Dado que p y q son distintos, $o(g) = 1$, lo que implica que $H \cap K = \{e\}$.

Más aún, el orden del producto es $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{pq}{1} = |G|$, luego $G = HK$. Además, si $g \in HK$ tuviera dos representaciones $g = h_1 k_1 = h_2 k_2$ con $h_1, h_2 \in H$ y $k_1, k_2 \in K$, entonces $h_1^{-1} h_2 = k_1 k_2^{-1}$. Este elemento pertenecería a la intersección $H \cap K = \{e\}$, lo que implica $h_1 = h_2$ y $k_1 = k_2$. Es decir, la representación de $g \in G$ como producto de un elemento de H y uno de K es única.

Definimos la función $\varphi : G \rightarrow H \times K$ mediante:

$$g = hk \mapsto (h, k)$$

Note que si $h \in H$ y $k \in K$, tenemos que $hkh^{-1}k^{-1}$ pertenece a $H \cap K$ (pues H y K son normales), y como la intersección es trivial, $hkh^{-1}k^{-1} = e$, luego $hk = kh$.

- φ es un homomorfismo: Sean $g = hk$ y $g_1 = h_1 k_1$ en G con $h, h_1 \in H$ y $k, k_1 \in K$. Usando que los elementos de H y K conmutan:

$$\begin{aligned} \varphi(gg_1) &= \varphi(hkh_1 k_1) = \varphi(hh_1 k k_1) = (hh_1, k k_1) \\ &= (h, k)(h_1, k_1) = \varphi(g)\varphi(g_1) \end{aligned}$$

- φ es inyectiva: Si $g = hk$, $g_1 = h_1k_1$ y $\varphi(g) = \varphi(g_1)$, entonces $(h, k) = (h_1, k_1)$, luego $h = h_1$ y $k = k_1$, de donde $g = g_1$.
- φ es sobreyectiva: Dado un par $(h, k) \in H \times K$, existe el elemento $g = hk \in G$ tal que $\varphi(g) = (h, k)$.

Por lo tanto $G \cong H \times K$; de hecho, G es el producto directo interno de H y K . \square

Corolario 3.1.1. *Sea G un grupo abeliano de orden pq con p, q primos distintos, entonces:*

$$G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$$

Demostración.

Basta ver que existe un elemento de orden p y un elemento de orden q , lo cual nos lo dará el teorema de Cauchy (Ver más adelante). \square

Teorema 3.1.2 (Teorema de Cayley). *Todo grupo G es isomorfo a un subgrupo de permutaciones.*

Demostración.

Sea S_G el grupo de todas las permutaciones del conjunto G (biyecciones de G en sí mismo). Definimos la función $\varphi : G \rightarrow S_G$ dada por $\varphi(g) = f_g$, donde $f_g : G \rightarrow G$ es la función de multiplicación por la izquierda:

$$f_g(h) = gh \quad \forall h \in G$$

Veamos que φ es un isomorfismo sobre su imagen, en efecto:

- φ está bien definida (es decir, $f_g \in S_G$): Para cualquier $g \in G$, la función f_g es biyectiva. En efecto, tiene inversa, la cual es $f_{g^{-1}}$, ya que para todo $h \in G$:

$$(f_g \circ f_{g^{-1}})(h) = f_g(g^{-1}h) = g(g^{-1}h) = h = \text{id}(h)$$

De manera análoga, $f_{g^{-1}} \circ f_g = \text{id}$. Al ser biyectiva, f_g es una permutación de G , por lo que $f_g \in S_G$.

- φ es un homomorfismo: Sean $g, k \in G$. Queremos ver que $\varphi(gk) = \varphi(g) \circ \varphi(k)$. Evaluamos ambas funciones en un elemento arbitrario $h \in G$:

$$\begin{aligned} \varphi(gk)(h) &= f_{gk}(h) = (gk)h \\ (\varphi(g) \circ \varphi(k))(h) &= f_g(f_k(h)) = f_g(kh) = g(kh) \end{aligned}$$

Por asociatividad, $(gk)h = g(kh)$, por lo tanto $f_{gk} = f_g \circ f_k$, lo que implica que φ preserva la operación.

- φ es inyectiva: Supongamos que $\varphi(g) = \varphi(k)$. Esto significa que las funciones son idénticas, es decir, $f_g = f_k$.

$$f_g(h) = f_k(h) \quad \forall h \in G \implies gh = kh \quad \forall h \in G$$

En particular, tomando $h = e$ (neutro de G), obtenemos $ge = ke$, lo que implica $g = k$.

Concluimos que φ es un isomorfismo entre G e $\text{Im}(\varphi)$. Dado que $\text{Im}(\varphi)$ es un subgrupo de S_G , hemos demostrado que G es isomorfo a un subgrupo de permutaciones. \square

Ejemplo 3.2. Para ilustrar el teorema anterior, consideremos el grupo $S_3 = \{id, \theta, \sigma, \theta\sigma, \sigma\theta, \theta^2\}$. La función $\varphi : S_3 \rightarrow S_{S_3}$ asocia a cada $g \in S_3$ una permutación de los elementos de S_3 .

Por ejemplo, si tomamos $g = \theta$, la función asociada $f_\theta : S_3 \rightarrow S_3$ definida por $h \mapsto \theta h$ permuta los elementos de S_3 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} id &\mapsto \theta \\ \theta &\mapsto \theta^2 \\ \sigma &\mapsto \theta\sigma \\ \theta\sigma &\mapsto \theta^2\sigma \\ \sigma\theta &\mapsto \sigma \\ \theta^2 &\mapsto id \end{aligned}$$

Corolario 3.1.2. Sea G un grupo de orden finito n , entonces $G \hookrightarrow S_n$.

Demostración.

Sabemos que $G \hookrightarrow S_X$ y $S_X \cong S_n$. En efecto, si $G = \{a_1, \dots, a_n\}$, definimos $\psi : S_X \rightarrow S_n$ dada por $f \mapsto \bar{f}$, en donde si $f(a_i) = a_j$, entonces $\bar{f}(i) = j$, con $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $\{1, \dots, n\}$.

- ψ está bien definida: Pues si $f : X \rightarrow X$ es biyectiva, en efecto:
 - \bar{f} inyectiva: $\bar{f}(i) = \bar{f}(j) \implies f(a_i) = f(a_j) \implies a_i = a_j \implies i = j$ (pues f es inyectiva).
 - \bar{f} es sobre: Dado $j \in \{1, \dots, n\}$, tenemos $a_j \in G$. Como f es biyectiva, $\exists a_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $f(a_i) = a_j$, luego $\bar{f}(i) = j$.
- ψ es homomorfismo: $\psi(g \circ f) = \psi(g) \circ \psi(f)$. En efecto, $\overline{g \circ f}(i) = j$ si $(g \circ f)(a_i) = a_j$. Suponga que $f(a_i) = a_k$ y $g(a_k) = a_j$, entonces $\bar{f}(i) = k$ y $\bar{g}(k) = j$. Más aún, $(g \circ f)(a_i) = g(f(a_i)) = g(a_k) = a_j$, así que $\overline{g \circ f}(i) = j$. Luego $(\bar{g} \circ \bar{f})(i) = \bar{g}(\bar{f}(i)) = \bar{g}(k) = j$. Así que $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$, de donde $\psi(g \circ f) = \overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f} = \psi(g) \circ \psi(f)$.
- ψ es inyectiva: $\psi(f) = \psi(g) \implies \bar{f} = \bar{g} \implies \bar{f}(i) = \bar{g}(i) \quad \forall 1 \leq i \leq n \implies f(a_i) = g(a_i) \quad \forall 1 \leq i \leq n \implies f = g$.

- ψ es sobre: Sea $h \in S_n$, entonces $\exists f : S_X \rightarrow S_X$ dada por $f(a_i) = a_{h(i)}$ tal que $(\psi(f))(i) = \bar{f}(i) = h(i) \forall 1 \leq i \leq n$. Por lo tanto $h = \bar{f} = \psi(f)$.

Luego $S_X \cong S_n$ y $G \hookrightarrow S_n$. □

Teorema 3.1.3. Sea G un grupo finito, $H \leq G$. $X = \{Hg \mid g \in G\} = (G/H)$ entonces existe $\varphi : G \rightarrow S_X$ un homomorfismo tal que $N = \text{Ker } \varphi$ es el mayor subgrupo normal en G contenido en H .

Demostración.

Sea $\varphi : G \rightarrow S_X$ definida por $\varphi(g) = f_g$ con $f_g : X \rightarrow X$ dada por:

$$f_g(Hk) = Hkg^{-1}$$

Veamos que f_g no depende del representante de clase (f_g es función). En efecto, Si $Hk = Hk_1$, entonces $kk_1^{-1} \in H$, luego $kgg^{-1}k_1^{-1} \in H$ o $Hkg^{-1} = Hk_1g^{-1}$, así que $f(Hk) = Hkg^{-1} = f(Hk_1)$, por lo cual, f_g es función.

Note que $f_g \in S_X$ pues,

- f_g es inyectiva: $f_g(Hk) = f_g(Hk_1)$ si y solo si $Hkg^{-1} = Hk_1g^{-1}$ si y solo si $Hk = Hk_1$.
- f_g es sobreyectiva: Dado $Hk \in X$ se tiene $f_g(Hkg) = Hkgg^{-1} = Hk$.

Veamos que φ es homomorfismo:

$$\varphi(gg_1) = f_{gg_1} \stackrel{?}{=} f_g \circ f_{g_1} = \varphi(g)\varphi(g_1)$$

pues

$$f_{gg_1}(Hk) = Hk(gg_1)^{-1} = H(kg_1^{-1})g^{-1} = f_g(Hkg_1^{-1}) = f_g(f_{g_1}(Hk)) = (f_g \circ f_{g_1})(Hk)$$

Sea $N = \text{Ker } \varphi$, claramente $N \trianglelefteq G$, además para $n \in N$ tenemos:

$$\text{Id} = \varphi(n) = f_n \quad \text{con } f_n(Hk) = Hkn^{-1}$$

Así que $Hkn^{-1} = Hk \quad \forall Hk \in X$ o $Hkn^{-1} = Hk \quad \forall k \in G$, en particular para $k \in H$, $H = Hk$ y $Hn^{-1} = Hkn^{-1} = Hk = H$ de donde $n \in H$. Luego $N \subseteq H$.

Sea $N_1 \trianglelefteq G$ con $N_1 \subseteq H$, veamos que $N_1 \subseteq N$. Sea $n_1 \in N_1$, $\varphi(n_1) = f_{n_1}$ con $f_{n_1}(Hk) = Hkn_1^{-1} = Hkn_1^{-1}k^{-1}k \quad \forall k \in G$. Como $N_1 \trianglelefteq G$, $kn_1^{-1}k^{-1} \in N_1 \subseteq H$ así que $H(kn_1^{-1}k^{-1})k = Hk$, es decir $f_{n_1}(Hk) = Hk$ de donde $f_{n_1} = \text{Id}$, es decir $n_1 \in \text{Ker } \varphi$ y $N_1 \subseteq N$. □

Corolario 3.1.3. Sea G finito $H \leq G$, $H \neq G$ tal que $|G| \nmid [G : H]!$ entonces H contiene un subgrupo normal en G no trivial.

Demostración.

Si φ fuera inyectiva entonces $G \cong \varphi(G) \leq S_X$ así que $|G| \mid |S_X| = [G : H]!$ lo cual por hipótesis no se cumple. Luego $\{e\} \neq \text{Ker } \varphi \subseteq H$, y como $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$, concluimos que H contiene un subgrupo normal no trivial (y $\text{Ker } \varphi \neq G$ pues $H \neq G$). \square

Corolario 3.1.4. *Sea p primo, G un grupo finito tal que p es el menor primo que divide a $|G|$ y $H \leq G$, $H \neq G$ con $[G : H] = p$, entonces $H \trianglelefteq G$.*

Demostración.

Sea $|G| = pm$.

Si $m = 1$, como $[G : H] = p$, entonces $|H| = \frac{|G|}{[G:H]} = \frac{p}{p} = 1$, luego $H = \{e\}$, el cual es normal en G .

Si $m \neq 1$, los factores primos de m son mayores o iguales a p . Veamos que esto implica que $|G| \nmid [G : H]!$, es decir, $pm \nmid p!$. Procedemos por reducción al absurdo para justificar esta afirmación: Supongamos que $|G| \mid p!$, entonces $pm \mid p!$, lo que implica que $m \mid (p-1)!$. Si q es un factor primo de m , entonces $q \mid (p-1)!$, lo cual implica que $q \leq p-1$. Sin embargo, q es un factor de $|G|$ (a través de m), y por hipótesis p es el menor primo que divide a $|G|$, por lo que $q \geq p$. Tenemos así que $q \leq p-1$ y $q \geq p$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $|G| \nmid p!$. (La demostración concluye aplicando el corolario anterior). \square

3.2. El grupo Simétrico S_n

Recordemos que S_n con la composición de funciones es un grupo. Cada elemento de S_n se llama una permutación (la cual es una función biyectiva de $\{1, \dots, n\}$ en sí mismo). En este caso si $\sigma \in S_n$ se denotará:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Definición 3.2.1. *Un ciclo de longitud $1 \leq k \leq n$ en S_n es un elemento de S_n tal que existen $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ con $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$ y $\sigma(j) = j \ \forall j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$.*

Note que en este caso:

$$\begin{aligned} \sigma^2(i_1) &= \sigma(\sigma(i_1)) = \sigma(i_2) = i_3 & \text{y} & \quad \sigma^k(i_1) = i_1 \\ \sigma^3(i_1) &= \sigma(\sigma^2(i_1)) = \sigma(i_3) = i_4 \\ &\vdots \\ \sigma^l(i_1) &= i_{1+l} & \text{si } 1 \leq l+1 \leq k, \ l \leq k-1, & \quad \sigma^k(i_j) = i_{j+k-k} = i_j \end{aligned}$$

Más aún:

$$\sigma^l(i_j) = i_{j+l} \quad 1 \leq j+l \leq k$$

$$\sigma^l(i_j) = i_{j+l-k} \quad j+l > k \quad (1 \leq l \leq k-j)$$

En este caso, en lugar de escribir

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i_1 & i_2 & \cdots & i_k & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Escribiremos $\sigma = (i_1 \ i_2 \ i_3 \ \dots \ i_k)$ y se tiene que σ se puede denotar de k diferentes formas, a saber:

$$\sigma = (i_1, \dots, i_k) = (i_2, i_3, \dots, i_k, i_1) = \cdots = (i_k, i_1, i_2, \dots, i_{k-1})$$

Si $k = 1$, $\sigma(i) = i \ \forall i$, es decir, $\sigma = id$ y se denota por $\sigma = (1) = (2) = \cdots = (k) = (n)$.

Si $k = 2$, $\sigma(i_1, i_2)$ y se llama una transposición. En este caso:

$$\begin{aligned} \sigma^2(i_1) &= \sigma(i_2) = i_1 \\ \sigma^2(i_2) &= \sigma(i_1) = i_2 \end{aligned}$$

Así, $\sigma^2 = id$, es decir, $\sigma = \sigma^{-1}$.

Si σ es un ciclo de longitud k también se le llama un k -ciclo. Observe que si σ es un k -ciclo, $\sigma^k = id$, de hecho $|\sigma| = k$.

$$\sigma^l(i_j) = \begin{cases} i_{j+l} & \text{si } 1 \leq l \leq k-j \\ i_{l-k+j} & \text{si } k-j < l \leq k \end{cases}$$

En particular si $k = l$, $\sigma^k(i_j) = i_{k-k+j} = i_j$. Así $|\sigma| \mid k$. Además $\sigma^l(i_1) \neq i_1, \forall 1 \leq l < k$ así que $|\sigma| \geq k$, de donde $|\sigma| = k$.

Definición 3.2.2. Diremos que dos ciclos $\sigma, \tau \in S_n$ son disjuntos si:

i) Cuando $\sigma(i_1) = i_2$ con $i_1 \neq i_2$ se tiene que $\tau(i_1) = i_1$.

ii) Cuando $\tau(i_1) = i_2$ con $i_1 \neq i_2$ se tiene que $\sigma(i_1) = i_1$.

(Parafraseando, los elementos que mueve σ , τ los fija y recíprocamente).

Ejemplo 3.3. Consideremos S_5 , entonces $\sigma = (1 \ 2)$ y $\tau = (3 \ 4 \ 5)$ son disjuntos.

Nota 3.2.1. Si $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ y $\tau = (j_1, \dots, j_l)$, entonces σ y τ son disjuntos si y sólo si

$$\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \emptyset$$

Observación 3.2. Si σ, τ son ciclos disjuntos, entonces $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$, es decir, conmutan.

Demostración.

Sea $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ y $\tau = (j_1, \dots, j_l)$. Claramente $\sigma \circ \tau$ y $\tau \circ \sigma$ tienen el mismo dominio. Ahora si $s \notin \{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l\}$:

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \tau)(s) &= \sigma(\tau(s)) = \sigma(s) = s \\(\tau \circ \sigma)(s) &= \tau(\sigma(s)) = \tau(s) = s\end{aligned}$$

Si $s \in \{i_1, \dots, i_k\}$ entonces $s \notin \{j_1, \dots, j_l\}$, así que:

$$(\sigma \circ \tau)(s) = \sigma(\tau(s)) = \sigma(s)$$

Más aún $\sigma(s) \in \{i_1, \dots, i_k\}$, luego $\sigma(s) \notin \{j_1, \dots, j_l\}$ y $\tau(\sigma(s)) = \sigma(s)$, por lo tanto $(\tau \circ \sigma)(s) = (\sigma \circ \tau)(s)$.

Por simetría si $s \in \{j_1, \dots, j_l\}$, $(\tau \circ \sigma)(s) = (\sigma \circ \tau)(s)$ en cualquier caso se tiene la igualdad y por lo tanto $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. \square

Teorema 3.2.1. *Sea $\theta \in S_n$, entonces θ se puede representar de manera única como producto de ciclos ajenos (disjuntos) salvo orden.*

Demostración.

Sea $\{i_1, \dots, i_k\}$ los elementos que mueve θ y procedamos por inducción sobre k .

Para $k = 1$, $\theta = id$ no hay nada que ver $id = (1)$.

Para $k = 2$, $\theta = (i_1, i_2)$ y ya se tiene.

Suponga el resultado para todo $1 \leq l \leq k$ y considere que θ mueve a los elementos $\{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}\}$. Considere que θ mueve a los elementos $\{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}\}$. Observe que $i_1, \theta(i_1), \theta^2(i_1), \dots, \theta^{k+1}(i_1) \in \{i_1, \dots, i_{k+1}\}$, por lo tanto $\{i_1, \theta(i_1), \dots, \theta^{k+1}(i_1)\} \subseteq \{i_1, \dots, i_{k+1}\}$, luego existen $1 \leq l, l' \leq k+2$ y $\theta^l(i_1) = \theta^{l'}(i_1)$ y podemos suponer $l > l'$, en este caso $\theta^{l-l'}(i_1) = i_1$, y $1 \leq l - l' \leq k+2 - l' \leq k+1$, es decir existe p tal que $\theta^p(i_1) = i_1$, $1 \leq p \leq k+1$.

Sea p el mínimo entero para el cual pasa esto.

Sea $\sigma = (i_1, \theta(i_1), \dots, \theta^{p-1}(i_1))$. $\{i_1, \theta(i_1), \dots, \theta^{p-1}(i_1)\} \subseteq \{i_1, \dots, i_{k+1}\}$ y definamos

$$\tau(i_j) = \begin{cases} \sigma(i_j) & \text{si } \sigma(i_j) = \theta^l(i_1) \text{ para algún } 1 \leq l \leq p-1 \\ \theta(i_j) & \text{si } i_j \neq \theta^l(i_1) \forall 1 \leq l \leq p-1 \end{cases}$$

Entonces $\sigma \circ \tau = \theta$. Si $j \notin \{i_1, \dots, i_{k+1}\}$ entonces $j \neq \theta^l(i_1) \forall 1 \leq l \leq p-1$ y entonces

$$(\sigma \circ \tau)(j) = \sigma(\tau(j)) = \sigma(\theta(j)) = \sigma(j) = j = \theta(j)$$

Si $j \in \{i_1, \dots, i_{k+1}\} \cap \{i_1, \theta(i_1), \dots, \theta^{p-1}(i_1)\}$, entonces $j = \theta^l(i_1)$ con $0 \leq l \leq p-1$.

$$\theta(j) = \theta^{l+1}(i_1) \quad \text{y} \quad \sigma \circ \tau(j) = \sigma(\tau(j)) = \sigma(\theta^l(i_1)) = \theta^{l+1}(i_1) = \theta(j)$$

(Definición: Como j está en el soporte de σ , $\tau(j) = \theta(j)$, luego $\sigma(\theta(j)) = \theta(j)$. Y como σ es el ciclo $(i_1, \dots, \theta^{p-1}(i_1))$, $\sigma(j) = \theta(j)$). En cualquier caso $\theta(j) = (\sigma \circ \tau)(j)$ por lo tanto $\theta = \sigma \circ \tau$.

Ahora τ mueve a los elementos $\{i_1, \dots, i_{k+1}\} \setminus \{i_1, \sigma(i_1), \dots, \sigma^{p-1}(i_1)\}$ cuya cardinalidad es menor o igual a k . Por hipótesis de inducción τ es producto de ciclos disjuntos y por lo tanto θ lo es.

Unicidad: Suponga ahora que

$$\theta = \sigma_1 \dots \sigma_k = \tau_1 \dots \tau_l$$

Con los σ_i 's ciclos disjuntos a pares y los τ_i 's ciclos disjuntos a pares.

Si $\theta = id$ no hay nada que ver, si no, sea i_1 un elemento que mueve θ , entonces existen $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq l$ tales que σ_i, τ_j mueven a i_1 , de hecho i, j son únicos pues los σ_i 's y los τ_i 's son disjuntos o más aún como son disjuntos conmutan, por lo que podemos pensar que $i = 1 = j$, en este caso $\sigma_2, \dots, \sigma_k, \tau_2, \dots, \tau_l$ no mueven a i_1 .

Además $\sigma_1 = (i_1, \sigma_1(i_1), \dots, \sigma_1^{s-1}(i_1))$, $\tau_1 = (i_1, \tau_1(i_1), \dots, \tau_1^{r-1}(i_1))$ con s y r los órdenes de σ_1 y τ_1 respectivamente. Como los σ_i 's son disjuntos σ_j no mueve a ninguno de $\{i_1, \sigma(i_1), \dots, \sigma^{k-1}(i_1)\} \forall 1 < j \leq k$. Análogamente τ_j no mueve a ninguno de $\{i_1, \tau(i_1), \dots, \tau^{l-1}(i_1)\} \forall 1 < j \leq l$. Por tanto para $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \theta^m(i_1) &= (\sigma_1 \dots \sigma_k)^m(i_1) = (\sigma_1 \dots \sigma_k)^{m-1}((\sigma_1 \dots \sigma_k)(i_1)) \\ &= (\sigma_1 \dots \sigma_k)^{m-1}(\sigma_1(i_1)) = \dots = \sigma_1^m(i_1) \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \theta^m(i_1) &= \tau_1^m(i_1) \\ \sigma_1^m(i_1) &= \tau_1^m(i_1) \end{aligned}$$

Ahora podemos suponer que $s \leq r$, entonces

$$i_1 = \sigma_1^s(i_1) = \tau_1^s(i_1)$$

$s > r - 1$ o $s \geq r$, de donde $s = r$.

Más aún, como $\sigma_1^m(i_1) = \tau_1^m(i_1) \forall m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sigma_1 = \tau_1$. Ahora de la igualdad $\theta = \sigma_1 \dots \sigma_k = \tau_1 \dots \tau_l$ se obtiene $\sigma_2 \dots \sigma_k = \tau_2 \dots \tau_l$. Podemos suponer $k \leq l$. En cuyo caso realizando el mismo proceso obtenemos $\sigma_k = \tau_k$ y $Id = \tau_{k+1} \dots \tau_l$. Como los τ_j son disjuntos a pares necesariamente $\tau_{k+1} \dots \tau_l$ tienen longitud uno. Por lo tanto $l = k$. \square

Corolario 3.2.1. Sea $\theta \in S_n$, entonces el orden de θ es el mínimo común múltiplo de los órdenes de los ciclos que aparecen en su factorización.

Demostración.

Sea $\theta = \sigma_1 \dots \sigma_k$ con los σ_i 's ciclos disjuntos a pares y $n_i = o(\sigma_i)$, $m = [n_1, \dots, n_k]$ entonces

$$\theta^m = (\sigma_1 \dots \sigma_k)^m = \sigma_1^m \dots \sigma_k^m = id$$

De donde $o(\theta) \mid m$. Si $o(\theta) < m$, $Id = \theta^{o(\theta)} = \sigma_1^{o(\theta)} \dots \sigma_k^{o(\theta)}$, por lo cual $n_i \mid o(\theta) \forall i$, de donde $m = [n_1, \dots, n_k] \mid o(\theta)$ de donde $m = o(\theta)$. \square

Observación 3.3. 1. Sea $(i\ j)$ una transposición de S_n , entonces $(i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$.

2. Sean x_1, \dots, x_n variables. Definimos

$$P_n = P_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \quad \forall n \geq 2$$

y hagamos actuar el grupo de permutaciones sobre P_n de la siguiente forma.
Para $\theta \in S_n$:

$$\theta(P_n) = P_n^\theta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\theta(i)} - x_{\theta(j)})$$

3. Si $1 < k \leq n$ y $\theta = (1, k)$, entonces $\theta(P_n) = -P_n$.

4. Si $\theta = (i\ j)$ es una transposición, $\theta(P_n) = -P_n$.

5. Sea $\theta \in S_n$ un r -ciclo, entonces θ es producto de transposiciones (se puede representar como un producto de transposiciones, no necesariamente única).

Demostración de 1).

Queremos demostrar que la transposición $(i\ j)$ es igual al producto $(1\ i)(1\ j)(1\ i)$. Llamemos $\sigma = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$ y evaluemos su acción sobre los elementos de $\{1, \dots, n\}$ actuando de derecha a izquierda (orden de composición de funciones). Asumimos $1, i, j$ distintos (si alguno es igual, la igualdad es trivial).

- Para el elemento 1:

$$1 \xrightarrow{(1\ i)} i \xrightarrow{(1\ j)} i \xrightarrow{(1\ i)} 1$$

Luego $\sigma(1) = 1$. (El 1 queda fijo, lo cual es correcto pues $(i\ j)$ no mueve al 1).

- Para el elemento i :

$$i \xrightarrow{(1\ i)} 1 \xrightarrow{(1\ j)} j \xrightarrow{(1\ i)} j$$

Luego $\sigma(i) = j$.

- Para el elemento j :

$$j \xrightarrow{(1\ i)} j \xrightarrow{(1\ j)} 1 \xrightarrow{(1\ i)} i$$

Luego $\sigma(j) = i$.

- Para cualquier otro elemento $k \notin \{1, i, j\}$: Todas las transposiciones en el producto fijan a k , por lo tanto $\sigma(k) = k$.

Como σ intercambia i con j y deja fijos a los demás elementos (incluido el 1), concluimos que $\sigma = (i\ j)$. \square

Demostración de 2).

Queremos verificar que la acción definida cumple con la propiedad de grupo $(\tau \circ \theta)(P_n) = \tau(\theta(P_n))$.

Recordemos que la acción de una permutación σ sobre un polinomio en variables x_1, \dots, x_n consiste en reemplazar cada subíndice k por $\sigma(k)$. Es decir, σ actúa sobre las posiciones de las variables.

Sea $P_n = \prod (x_i - x_j)$. Primero aplicamos θ :

$$\theta(P_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\theta(i)} - x_{\theta(j)})$$

Llamemos $Q(x_1, \dots, x_n)$ a este nuevo polinomio. Notemos que el término que ocupaba la posición asociada al índice k ahora tiene el índice $\theta(k)$.

Ahora aplicamos τ al polinomio Q . La regla dice que τ reemplaza cualquier variable con índice m por la variable con índice $\tau(m)$. En Q , tenemos variables de la forma $x_{\theta(i)}$. Aquí el índice es $m = \theta(i)$. Al aplicar τ , reemplazamos $x_{\theta(i)}$ por $x_{\tau(\theta(i))}$.

$$\tau(\theta(P_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\tau(\theta(i))} - x_{\tau(\theta(j))})$$

Por otro lado, consideremos la permutación compuesta $\rho = \tau \circ \theta$. Si aplicamos ρ directamente a P_n , reemplazamos cada índice k por $\rho(k) = \tau(\theta(k))$.

$$(\tau \circ \theta)(P_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{(\tau \circ \theta)(i)} - x_{(\tau \circ \theta)(j)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\tau(\theta(i))} - x_{\tau(\theta(j))})$$

Comparando ambas expresiones, tenemos que $(\tau \circ \theta)(P_n) = \tau(\theta(P_n))$. □

Demostración de 3).

Procedamos por inducción sobre n .

Para $n = 2$, tenemos $1 < k \leq 2 \implies k = 2$, luego $\theta = (1, 2)$.

$$\theta(P_2) = \theta(x_1 - x_2) = x_{\theta(1)} - x_{\theta(2)} = x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2) = -P_2$$

Suponga el resultado cierto para n , es decir, para $1 < k \leq n$. Note que:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \\ &= P_n \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \end{aligned}$$

Caso A: Si $1 < k \leq n$, entonces $\theta = (1, k) \in S_n \subseteq S_{n+1}$ (fija a $n+1$).

$$\begin{aligned} \theta(P_{n+1}) &= \theta \left(P_n \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \right) \\ &= \theta(P_n) \cdot \theta \left(\prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \right) \\ &\stackrel{\text{H.I.}}{=} (-P_n) \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (x_{\theta(i)} - x_{n+1}) \end{aligned}$$

Como θ solo permuta los elementos $\{1, \dots, n\}$, el conjunto de factores en la productoria es el mismo (solo cambia el orden), por lo tanto el producto permanece invariante.

$$= -P_n \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{n+1}) = -P_{n+1}$$

Caso B: Si $k = n + 1$, entonces $\theta = (1, n + 1)$. Descomponemos P_{n+1} cuidadosamente:

$$\begin{aligned} \theta(P_{n+1}) &= \theta \left[\prod_{1 < i < j \leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1 < j \leq n} (x_1 - x_j) \cdot \prod_{1 < i < n+1} (x_i - x_{n+1}) \cdot (x_1 - x_{n+1}) \right] \\ &= \prod_{1 < i < j \leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1 < j \leq n} (x_{n+1} - x_j) \cdot \prod_{1 < i < n+1} (x_i - x_1) \cdot (x_{n+1} - x_1) \\ &= \prod_{1 < i < j \leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1 < j \leq n} [-(x_j - x_{n+1})] \cdot \prod_{1 < i < n+1} [-(x_1 - x_i)] \cdot [-(x_1 - x_{n+1})] \\ &\quad - \left[\prod_{1 < i < j \leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1 < j \leq n} (x_j - x_{n+1}) \cdot \prod_{1 < i < n+1} (x_1 - x_i) \cdot (x_1 - x_{n+1}) \right] \\ &= - \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{n+1}) \right) \\ &= P_n \cdot \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{n+1}) = -P_{n+1} \end{aligned}$$

□

Demostración de 4).

Si $\theta = (i \ j)$ es una transposición, por la observación 1 sabemos que $(i \ j) = (1 \ i)(1 \ j)(1 \ i)$. Usando la propiedad 3 repetidamente:

$$\begin{aligned} \theta(P_n) &= [(1 \ j)(1 \ i)(1 \ j)]P_n \\ &= (1 \ j)((1 \ i)((1 \ j)P_n)) \\ &= (1 \ j)((1 \ i)(-P_n)) \\ &= (1 \ j)(-(-P_n)) \\ &= (1 \ j)(P_n) = -P_n \end{aligned}$$

□

Demostración de 5).

Sea $\theta = (i_1, \dots, i_k)$ un k -ciclo. Podemos descomponerlo verificando la acción sobre los elementos:

$$(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{k-2}, i_{k-1})(i_{k-1}, i_k)$$

□

Ejemplo 3.4. $(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 2)(2 \ 3)$. También se puede escribir de forma no única, por ejemplo: $(1 \ 2 \ 3) = (4 \ 5)(1 \ 2)(2 \ 3)(4 \ 5) = (1 \ 2)(1 \ 2)(1 \ 2)(2 \ 3)(3 \ 2)(3 \ 2)$.

Teorema 3.2.2. *Sea $\theta \in S_n$, entonces θ se representa siempre como un producto de una cantidad par de transposiciones ó siempre como un producto de una cantidad impar de transposiciones.*

Demostración.

Por un teorema anterior θ es producto de ciclos disjuntos y cada ciclo es producto de transposiciones, luego θ es producto de transposiciones. Suponga que:

$$\theta = \sigma_1 \dots \sigma_k = \tau_1 \dots \tau_s \quad \text{con}$$

σ_i 's y τ_j 's transposiciones, entonces para P_n el polinomio definido anteriormente

$$\theta(P_n) = (\sigma_1 \dots \sigma_k)(P_n) = (-1)^k P_n = (\tau_1 \dots \tau_s)P_n = (-1)^s P_n$$

De donde $(-1)^k = (-1)^s$ o $(-1)^{k-s} = 1$, es decir, $k - s$ siempre es par, luego ambos son pares o ambos son impares. \square

Definición 3.2.3. *Sea $\theta \in S_n$ diremos que θ es par si al representarla como producto de transposiciones consta de un número par de ellas. Es impar en caso contrario.*

Observación 3.4. *Sea $A_n = \{\theta \in S_n \mid \theta \text{ es par}\} \forall n \geq 2$, entonces $A_n \leq S_n$, con $[S_n : A_n] = 2$ y por lo tanto $A_n \trianglelefteq S_n$.*

Demostración.

Primero probemos que es un subgrupo ($A_n \leq S_n$). Si $\theta \in A_n$, entonces $\theta = \tau_1 \dots \tau_s$ con $s = 2k$ y los τ_i 's son transposiciones. Luego, el inverso es $\theta^{-1} = (\tau_1 \dots \tau_s)^{-1} = \tau_s^{-1} \dots \tau_1^{-1}$. Como la inversa de una transposición es ella misma ($\tau_i^{-1} = \tau_i$), tenemos $\theta^{-1} = \tau_s \dots \tau_1$, que sigue teniendo $s = 2k$ transposiciones. Así, $\theta^{-1} \in A_n$.

Si además $\theta_1 \in A_n$, digamos $\theta_1 = \rho_1 \dots \rho_r$ con $r = 2l$ y ρ_j 's transposiciones. Entonces el producto $\theta \circ \theta_1 = \tau_1 \dots \tau_s \rho_1 \dots \rho_r$ consta de $s + r = 2k + 2l = 2(k + l)$ transposiciones. Como $2(k + l)$ es par, $\theta \circ \theta_1 \in A_n$. Por lo tanto $A_n \leq S_n$.

Ahora analicemos el índice. Si $\theta \in S_n$, entonces: Si θ es par, $\theta \in A_n$. Si θ es impar, entonces $\theta \notin A_n$, es decir, $\theta A_n \neq A_n$.

Más aún, para cualquier otra permutación impar $\theta_1 \in S_n$, veamos que definen la misma clase lateral, es decir $\theta A_n = \theta_1 A_n$. Esto ocurre si y solo si $\theta_1^{-1} \theta \in A_n$. Como θ y θ_1 son impares, podemos escribirlas como:

$$\theta = \tau_1 \dots \tau_{2k+1} \quad \text{y} \quad \theta_1 = \rho_1 \dots \rho_{2m+1}$$

con los τ_i y ρ_j transposiciones. Entonces:

$$\theta_1^{-1} \theta = (\rho_1 \dots \rho_{2m+1})^{-1} (\tau_1 \dots \tau_{2k+1}) = \rho_{2m+1} \dots \rho_1 \tau_1 \dots \tau_{2k+1}$$

El número total de transposiciones es $(2m + 1) + (2k + 1) = 2m + 2k + 2 = 2(m + k + 1)$, que es un número par. Por lo tanto $\theta_1^{-1} \theta \in A_n$, lo que implica $\theta A_n = \theta_1 A_n$.

Así que las clases laterales izquierdas son exactamente dos: A_n (las pares) y θA_n (las impares, donde θ es cualquier permutación impar fija). Luego, $[S_n : A_n] = 2$.

En particular, como 2 es el menor primo que divide a $|S_n| = n!$ (para $n \geq 2$), sabemos por un resultado anterior que cualquier subgrupo de índice igual al menor primo divisor del orden del grupo es normal. Así que $A_n \trianglelefteq S_n$. \square

Teorema 3.2.3. $A_n = \langle \{\theta \in S_n \mid \theta \text{ es un 3-ciclo}\} \rangle$, $n \geq 3$.

Demostración.

Sea $H = \langle \{\theta \in S_n \mid \theta \text{ es 3-ciclo}\} \rangle$. Sea θ un 3-ciclo, es decir, $\theta = (a_1, a_2, a_3)$, entonces

$$\theta = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \in A_n$$

luego

$$\langle \{\theta \in S_n \mid \theta \text{ es 3-ciclo}\} \rangle \subseteq A_n$$

Para la contención inversa basta ver que cada producto de 2 transposiciones es un producto de 3-ciclos. Consideremos (a_1, a_2) y (b_1, b_2) 2 transposiciones.

Si $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$, entonces:

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1, a_2)(a_1, a_2) = id = (a_1, a_2, a_3)(a_1, a_3, a_2)$$

Si tiene un solo elemento distinto podemos suponer que son $(a_1, a_2), (a_2, b_2)$ con $a_1 \neq b_2$ y:

$$(a_1, a_2)(a_2, b_2) = (a_1, a_2, b_2)$$

Si no tienen elementos en común, es decir $(a_1, a_2)(b_1, b_2)$:

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1, a_2, b_1)(a_2, b_1, b_2)$$

En cualquier caso cada par de transposiciones es el producto de 3-ciclos, luego, cada permutación par es producto de 3-ciclos, así

$$A_n \subseteq \langle \{\theta \in S_n \mid \theta \text{ es 3-ciclo}\} \rangle \quad \text{y} \quad A_n = H$$

\square

Teorema 3.2.4. Sea $n \geq 2$, entonces A_n es el único subgrupo de índice 2 de S_n .

Demostración.

Si $n = 2$, $A_2 = \{e\}$ y es claro el resultado. Suponga $n \geq 3$ y sea $H \leq S_n$ tal que $[S_n : H] = 2$.

Probemos que H contiene a todos los 3-ciclos. Sea σ un 3-ciclo. Como $[S_n : H] = 2$, sabemos que H es un subgrupo normal de S_n ($H \trianglelefteq S_n$). Consideremos el grupo cociente S_n/H , el cual tiene orden 2. Por lo tanto, el cuadrado de cualquier elemento en el cociente es la identidad del cociente (H). Es decir:

$$(\sigma H)^2 = \sigma^2 H = H \implies \sigma^2 \in H$$

Ahora, dado que σ es un 3-ciclo, su orden es 3, por lo que $\sigma^3 = id$. Esto implica que $\sigma^4 = \sigma$. Podemos escribir σ como:

$$\sigma = \sigma^4 = (\sigma^2)^2$$

Como ya demostramos que $\sigma^2 \in H$ y H es un subgrupo (cerrado bajo la operación), entonces el cuadrado de σ^2 también debe estar en H . Por lo tanto, $\sigma \in H$.

Esto demuestra que H contiene a todos los 3-ciclos. Como sabemos por un teorema anterior que A_n está generado por los 3-ciclos, concluimos que $A_n \subseteq H$.

Finalmente, utilizamos la multiplicidad del índice:

$$[S_n : A_n] = [S_n : H][H : A_n]$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$2 = 2 \cdot [H : A_n] \implies [H : A_n] = 1$$

Lo cual implica que $H = A_n$. □

Observación 3.5. Consideremos el grupo multiplicativo $\{1, -1\}$ con la operación definida por:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1(-1) = -1, \quad (-1)(-1) = 1$$

Definamos la función $\varphi : S_n \rightarrow \{1, -1\}$ como:

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \text{ es par} \\ -1 & \text{si } \theta \text{ es impar} \end{cases}$$

Demostración.

φ es homomorfismo. a) Si θ, θ_1 son pares, $\theta \cdot \theta_1$ es par y $\varphi(\theta \cdot \theta_1) = 1 = \varphi(\theta)\varphi(\theta_1)$. Si θ es par y θ_1 impar o viceversa, $\theta \cdot \theta_1$ es impar, luego $\varphi(\theta\theta_1) = -1 = \varphi(\theta)\varphi(\theta_1)$. Si θ y θ_1 son impares $\varphi(\theta) = -1 = \varphi(\theta_1)$ y $\theta\theta_1$ es par y

$$\varphi(\theta\theta_1) = 1 = (-1)(-1) = \varphi(\theta)\varphi(\theta_1)$$

En cualquier caso $\varphi(\theta\theta_1) = \varphi(\theta)\varphi(\theta_1)$. Más aún $\theta \in \text{Ker } \varphi$ si y solo si $\varphi(\theta) = 1$ si y solo si θ es par si y solo si $\theta \in A_n$ si y solo si $\text{Ker } \varphi = A_n$. □

Nota 3.2.2. φ es sobreyectiva.

$$\frac{S_n}{A_n} \cong \{1, -1\} \implies [S_n : A_n] = 2 \quad \text{y} \quad A_n \trianglelefteq S_n$$

Definición 3.2.4. Sea $\theta, \theta_1 \in G$, G grupo diremos que θ y θ_1 son conjugados si existe $\sigma \in G$ tal que $\theta = \sigma\theta_1\sigma^{-1}$ (conjugación).

Observación 3.6. Ser conjugado determina una relación de equivalencia, es decir, la relación $\theta \sim \theta_1$ si y solo si θ y θ_1 son conjugados es de equivalencia.

- i) Reflexiva: $\theta \sim \theta$ pues $\theta = e\theta e^{-1}$.
- ii) Simétrica: $\theta \sim \theta_1$ si y solo si existe $\sigma \in G$ tal que $\theta = \sigma\theta_1\sigma^{-1}$ si y solo si existe $\sigma \in G$ tal que $\theta_1 = \sigma^{-1}\theta\sigma$ si y solo si existe $\sigma^{-1} \in G$ tal que $\theta_1 = \sigma^{-1}\theta(\sigma^{-1})^{-1}$ si y solo si $\theta_1 \sim \theta$.
- iii) Transitiva: $\theta \sim \theta_1$ y $\theta_1 \sim \theta_2$ entonces existen $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ tales que $\theta = \sigma_1\theta_1\sigma_1^{-1}$, $\theta_1 = \sigma_2\theta_2\sigma_2^{-1}$, entonces

$$\theta = \sigma_1(\sigma_2\theta_2\sigma_2^{-1})\sigma_1^{-1} = (\sigma_1\sigma_2)(\theta_2)(\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}) = (\sigma_1\sigma_2)(\theta_2)(\sigma_1\sigma_2)^{-1}$$

y $\sigma_1\sigma_2 \in G$, luego $\theta \sim \theta_2$.

A las clases de equivalencia correspondientes las llamaremos clases de conjugación. Denotemos a la clase de conjugación de θ por $[\theta]$. Entonces para $\theta \in G$, $[\theta] = \{\theta\}$ si y solo si $\theta \in Z(G)$, $[\theta] = \{\sigma\theta\sigma^{-1} \mid \sigma \in G\} = \{\theta\}$ si y solo si $\sigma\theta\sigma^{-1} = \theta \forall \sigma \in G$ si y solo si $\sigma\theta = \theta\sigma \forall \sigma \in G$ si y solo si $\theta \in Z(G)$.

Definición 3.2.5. Sean $\theta_1, \theta_2 \in S_n$, diremos que θ_1 y θ_2 tienen la misma estructura en ciclos cuando $\theta_1 = \sigma_1 \dots \sigma_s$, $\theta_2 = \tau_1 \dots \tau_k$ son las respectivas factorizaciones de θ_1 y θ_2 como producto de ciclos disjuntos, entonces $s = k$ y salvo el orden σ_i y τ_i son conjugados (tienen la misma longitud) $\forall 1 \leq i \leq s = k$.

Ejemplo 3.5. 1. Considere S_6 . $\theta_1 = (1 \ 3)(4 \ 5 \ 6)$, $\theta_2 = (2 \ 4)(1 \ 3 \ 5)$. θ_1 y θ_2 tienen la misma estructura en ciclos.

2. Considere S_{10} . $\theta_1 = (1 \ 2)(3 \ 4)(5 \ 6 \ 7)$, $\theta_2 = (3 \ 4)(5 \ 6 \ 7)(8 \ 9 \ 10)$. θ_1 y θ_2 tienen la misma estructura en ciclos.

Observación 3.7. Si $\theta = (a_1, \dots, a_r)$ es un r -ciclo y $\gamma \in S_n$, entonces:

$$\gamma\theta\gamma^{-1} = (\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_r))$$

Es decir, conjugar un ciclo θ por γ resulta en un ciclo de la misma longitud obtenido aplicando γ a los elementos de θ .

Demostración.

En efecto. Si $a = \gamma(a_i)$ para algún $1 \leq i \leq r$, entonces $\gamma^{-1}(a) = a_i$.

$$(\gamma\theta\gamma^{-1})(a) = (\gamma \circ \theta)(\gamma^{-1}(a)) = \gamma(\theta(a_i)) = \gamma(a_{i+1})$$

(Con la convención $a_{r+1} = a_1$). Esto coincide con la acción del ciclo $(\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_r))$ sobre el elemento $a = \gamma(a_i)$.

Si $a \notin \{\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_r)\}$, entonces $\gamma^{-1}(a) \notin \{a_1, \dots, a_r\}$. Como θ fija los elementos fuera de su soporte:

$$\theta(\gamma^{-1}(a)) = \gamma^{-1}(a)$$

Así:

$$(\gamma \circ \theta \circ \gamma^{-1})(a) = \gamma(\theta(\gamma^{-1}(a))) = \gamma(\gamma^{-1}(a)) = a$$

Por lo tanto, $\gamma\theta\gamma^{-1}$ fija a todo elemento fuera de $\{\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_r)\}$.

En conclusión:

$$\gamma\theta\gamma^{-1} = (\gamma(a_1) \dots \gamma(a_r))$$

□

Teorema 3.2.5. Sean $\theta_1, \theta_2 \in S_n$, entonces θ_1 y θ_2 tienen la misma estructura en ciclos si y solo si θ_1 y θ_2 son conjugados.

Demostración.

\Rightarrow) Supongamos que θ_1 y θ_2 tienen la misma estructura en ciclos. Sean $\theta_1 = \sigma_1 \dots \sigma_k$ y $\theta_2 = \tau_1 \dots \tau_k$ sus respectivas descomposiciones en ciclos disjuntos (incluyendo los ciclos de longitud 1 para cubrir todo el conjunto $\{1, \dots, n\}$). Podemos ordenar los ciclos de tal manera que σ_i y τ_i tengan la misma longitud para todo $1 \leq i \leq k$.

Denotemos los elementos de cada ciclo como:

$$\sigma_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,r_i}) \quad \text{y} \quad \tau_i = (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,r_i})$$

donde r_i es la longitud del ciclo i .

Definamos la permutación $\gamma \in S_n$ tal que aplique cada elemento de σ_i en el elemento correspondiente de τ_i . Es decir:

$$\gamma(a_{i,j}) = b_{i,j} \quad \forall 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r_i$$

Como los ciclos son disjuntos y cubren todo el conjunto, γ es una biyección bien definida.

Ahora verifiquemos la conjugación para cada ciclo. Por la observación anterior:

$$\gamma\sigma_i\gamma^{-1} = (\gamma(a_{i,1}), \dots, \gamma(a_{i,r_i})) = (b_{i,1}, \dots, b_{i,r_i}) = \tau_i$$

Entonces:

$$\gamma\theta_1\gamma^{-1} = \gamma(\sigma_1 \dots \sigma_k)\gamma^{-1} = (\gamma\sigma_1\gamma^{-1}) \dots (\gamma\sigma_k\gamma^{-1}) = \tau_1 \dots \tau_k = \theta_2$$

Por lo tanto, θ_1 y θ_2 son conjugados.

\Leftarrow) Supongamos ahora que θ_1 y θ_2 son conjugados. Es decir, existe $\gamma \in S_n$ tal que $\theta_2 = \gamma\theta_1\gamma^{-1}$. Sea $\theta_1 = \sigma_1 \dots \sigma_k$ la descomposición de θ_1 en ciclos disjuntos. Entonces:

$$\theta_2 = \gamma(\sigma_1 \dots \sigma_k)\gamma^{-1} = (\gamma\sigma_1\gamma^{-1}) \dots (\gamma\sigma_k\gamma^{-1})$$

Por la observación anterior, cada término $(\gamma\sigma_i\gamma^{-1})$ es un ciclo de la misma longitud que σ_i . Además, como los σ_i son disjuntos a pares, sus conjugados también lo son (si σ_i y σ_j no mueven elementos en común, sus conjugados tampoco).

Por la unicidad de la descomposición en ciclos disjuntos (salvo el orden), concluimos que la estructura de ciclos de θ_2 es exactamente la misma que la de θ_1 (los mismos ciclos transformados, conservando sus longitudes). \square

Corolario 3.2.2. *Sea $n \geq 3$.*

- a) *Si $N \trianglelefteq A_n$ y N contiene un 3-ciclo, entonces $N = A_n$.*
- b) *Si $N \trianglelefteq S_n$ y N contiene una transposición (2-ciclo), entonces $N = S_n$.*

Demostración.

a) Supongamos que $N \trianglelefteq A_n$ contiene un 3-ciclo $\theta_1 = (a_1 a_2 a_3)$. Queremos ver que N contiene a cualquier otro 3-ciclo $\theta_2 = (b_1 b_2 b_3)$, y dado que los 3-ciclos generan A_n , esto implicará $N = A_n$.

Sabemos que en S_n todos los 3-ciclos son conjugados. Es decir, existe $\gamma \in S_n$ tal que:

$$\theta_2 = \gamma\theta_1\gamma^{-1}$$

Analicemos si podemos garantizar que el conjugador esté en A_n (es decir, que sea par):

Caso $n \geq 5$: Si $\gamma \in A_n$, entonces $\theta_2 \in N$ por la normalidad de N en A_n . Si $\gamma \notin A_n$ (es impar), como $n \geq 5$, existen al menos dos elementos $\{c_1, c_2\}$ en $\{1, \dots, n\}$ que no están en el soporte de θ_1 (que tiene 3 elementos). Definimos $\gamma' = \gamma(c_1 c_2)$. Como $(c_1 c_2)$ es una transposición disjunta de θ_1 , conmuta con θ_1 . Además, γ' es par (producto de impar por impar). Entonces:

$$\gamma'\theta_1(\gamma')^{-1} = \gamma(c_1 c_2)\theta_1(c_1 c_2)^{-1}\gamma^{-1} = \gamma\theta_1\gamma^{-1} = \theta_2$$

Como $\gamma' \in A_n$ y $N \trianglelefteq A_n$, concluimos que $\theta_2 \in N$.

Caso $n = 3$: $A_3 = \{(1), (1 2 3), (1 3 2)\}$. Si N contiene un 3-ciclo, por ejemplo $(1 2 3)$, al ser subgrupo debe contener a su inverso $(1 3 2)$ y a la identidad. Por lo tanto, N contiene a todos los elementos de A_3 , así que $N = A_3$.

Caso $n = 4$: En A_4 , los 3-ciclos se dividen en dos clases de conjugación (por ejemplo, la clase de $(1 2 3)$ y la de $(1 3 2)$). Supongamos que N contiene a $\theta = (1 2 3)$. Como $N \trianglelefteq A_4$, N contiene a toda la clase de conjugación de θ en A_4 (que son 4 elementos: $(1 2 3), (1 4 2), (1 3 4), (2 4 3)$). Además, N debe contener a los inversos de estos elementos (por ejemplo, $(1 3 2)$). Al contener elementos de ambas clases de 3-ciclos y ser cerrado bajo productos, N contendrá a todos los 3-ciclos. Como los 3-ciclos generan A_4 , entonces $N = A_4$.

En todos los casos, $N = A_n$.

b) Sea $N \trianglelefteq S_n$ tal que contiene una transposición $\tau = (a b)$. Como N es normal en S_n , contiene a todos los conjugados de τ . Sabemos que en S_n cualquier transposición es conjugada de τ (tienen la misma estructura de ciclos). Por lo tanto, N contiene a todas las transposiciones. Como todo elemento de S_n se puede escribir como producto de transposiciones, concluimos que $N = S_n$. \square

Definición 3.2.6. Sea G un grupo. Diremos que G es simple si sus únicos subgrupos normales son $\{e\}$ y el mismo G .

Teorema 3.2.6. Sea $n \geq 5$, entonces el grupo alternante A_n es simple.

Demostración.

Sea $H \trianglelefteq A_n$ con $H \neq \{e\}$. Probaremos que H contiene un 3-ciclo. Por el corolario anterior, esto implicará que $H = A_n$. Sea $\alpha \in H$ con $\alpha \neq e$. Analicemos la descomposición de α en ciclos disjuntos:

Caso 1: α contiene un ciclo de longitud $r \geq 4$. Sea $\alpha = (a_1 a_2 a_3 \dots a_r)\tau$, donde τ son los demás ciclos disjuntos. Sea $\beta = (a_1 a_2 a_3) \in A_n$. Consideremos el conmutador $\rho = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in H$ (pues $H \trianglelefteq A_n$).

$$\begin{aligned}\rho &= \alpha(a_1 a_2 a_3)\alpha^{-1}(a_1 a_3 a_2) \\ &= (\alpha(a_1) \alpha(a_2) \alpha(a_3))(a_1 a_3 a_2) \\ &= (a_2 a_3 a_4)(a_1 a_3 a_2) \\ &= (a_1 a_4 a_2)\end{aligned}$$

Así, $\rho = (a_1 a_4 a_2)$ es un 3-ciclo que pertenece a H .

Caso 2: α contiene 3-ciclos en su descomposición. Si α es un 3-ciclo, ya terminamos. Si no, $\alpha = (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6) \dots$. Sea $\beta = (a_1 a_2 a_4) \in A_n$. Consideremos $\rho = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in H$:

$$\begin{aligned}\rho &= (\alpha(a_1) \alpha(a_2) \alpha(a_4))(a_1 a_4 a_2) \\ &= (a_2 a_3 a_5)(a_1 a_4 a_2) \\ &= (a_1 a_4 a_3 a_5 a_2)\end{aligned}$$

ρ es un 5-ciclo. Aplicando el Caso 1 a ρ , concluimos que H contiene un 3-ciclo.

Caso 3: α es producto de transposiciones disjuntas.

- i) $\alpha = (a_1 a_2)(a_3 a_4)$. (Solo dos transposiciones). Como $n \geq 5$, existe $a_5 \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Sea $\beta = (a_1 a_2 a_5) \in A_n$.

$$\rho = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = (a_2 a_1 a_5)(a_1 a_5 a_2) = (a_1 a_5)(a_2 a_5) = (a_1 a_2 a_5)$$

Obtenemos directamente un 3-ciclo en H .

- ii) $\alpha = (a_1 a_2)(a_3 a_4)(a_5 a_6) \dots$ (Más de dos transposiciones). Sea $\beta = (a_1 a_2 a_3) \in A_n$.

$$\rho = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = (a_2 a_1 a_4)(a_1 a_3 a_2) = (a_1 a_4)(a_2 a_3)$$

Ahora ρ tiene la forma del subcaso (i) anterior. Aplicando el argumento de (i) a ρ , obtenemos un 3-ciclo.

En cualquier caso, H contiene un 3-ciclo. Por lo tanto, $H = A_n$. □

Teorema 3.2.7. A_4 no tiene subgrupos de orden 6.

Demostración.

Sabemos que $|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$. Supongamos que existe $H \leq A_4$ tal que $|H| = 6$. Entonces el índice es $[A_4 : H] = \frac{12}{6} = 2$.

Sabemos que todo subgrupo de índice 2 es normal, por lo tanto $H \trianglelefteq A_4$. Además, en el grupo cociente A_4/H (que es de orden 2), el cuadrado de cualquier elemento es la identidad. Esto significa que para todo $\sigma \in A_4$, $\sigma^2 H = H$, es decir, $\sigma^2 \in H$.

Consideremos los 3-ciclos de A_4 . Sea θ un 3-ciclo. Entonces $\theta^3 = e$, de donde $\theta^4 = \theta$. Podemos escribir $\theta = (\theta^2)^2$. Como $\theta^2 \in H$ (por la propiedad del índice 2), y H es subgrupo, entonces $(\theta^2)^2 \in H$, luego $\theta \in H$.

Esto implica que H debe contener a **todos** los 3-ciclos de A_4 . Los 3-ciclos en A_4 son: $(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)$. Hay 8 3-ciclos en total.

Por lo tanto, $|H| \geq 8$, lo cual contradice la hipótesis de que $|H| = 6$. Concluimos que no existe tal subgrupo. \square

CAPÍTULO 4

Acciones de Grupos

4.1. Acciones de Grupo

Definición 4.1.1. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Diremos que G actúa en X (o que X es un G -conjunto) si existe un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow S_X$, donde S_X es el grupo de permutaciones de X (biyecciones de X en sí mismo).

Ejemplo 4.1. Teorema de Cayley: Todo grupo G actúa en sí mismo. Sea $X = G$ y definamos $\varphi : G \rightarrow S_G$ dada por $\varphi(g) = f_g$, donde $f_g : G \rightarrow G$ se define como $f_g(a) = ga$ para todo $a \in G$ (traslación izquierda).

Veamos que $f_g \in S_G$:

1. f_g es inyectiva: Si $f_g(a) = f_g(b)$, entonces $ga = gb$. Multiplicando por g^{-1} a la izquierda, obtenemos $a = b$.
2. f_g es sobreyectiva: Sea $b \in G$. Queremos encontrar a tal que $f_g(a) = b$. Tomamos $a = g^{-1}b$, entonces $f_g(g^{-1}b) = g(g^{-1}b) = (gg^{-1})b = b$.

Además, φ es un homomorfismo de grupos: Para $g, h \in G$, queremos ver que $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$. Evaluando en un elemento $a \in G$:

$$\varphi(gh)(a) = f_{gh}(a) = (gh)a = g(ha) = f_g(ha) = f_g(f_h(a)) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(a)$$

Por lo tanto, $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$.

Teorema 4.1.1. *Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. G actúa en X (existe un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow S_X$).
2. Existe una función $\cdot : G \times X \rightarrow X$, denotada por $(g, x) \mapsto g \cdot x$, tal que:
 - a) $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$.
 - b) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

Demostración.

\Rightarrow) Supongamos que existe un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow S_X$. Para cada $g \in G$, $\varphi(g)$ es una permutación de X , es decir, una función biyectiva $\varphi(g) : X \rightarrow X$. Definamos la función $\cdot : G \times X \rightarrow X$ mediante:

$$g \cdot x = (\varphi(g))(x)$$

para todo $g \in G$ y $x \in X$.

Verifiquemos las dos condiciones de la definición de acción:

- (i) Como φ es un homomorfismo de grupos, envía el neutro de G al neutro de S_X . Es decir, $\varphi(e) = Id_X$ (la función identidad en X). Entonces, para cualquier $x \in X$:

$$e \cdot x = (\varphi(e))(x) = Id_X(x) = x$$

- (ii) Sean $g, h \in G$ y $x \in X$. Por la definición de la operación y la propiedad de homomorfismo de φ :

$$(gh) \cdot x = (\varphi(gh))(x)$$

Como φ es homomorfismo, $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$. Así:

$$(\varphi(gh))(x) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x)$$

Por la definición de composición de funciones:

$$(\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) = \varphi(g)(\varphi(h)(x))$$

Usando nuevamente la definición de la acción ($g \cdot y = \varphi(g)(y)$):

$$\varphi(g)(\varphi(h)(x)) = g \cdot (\varphi(h)(x)) = g \cdot (h \cdot x)$$

Por lo tanto, $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

\Leftarrow) Supongamos que existe una función $\cdot : G \times X \rightarrow X$ que satisface las condiciones (a) y (b). Queremos construir un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow S_X$. Para cada $g \in G$, definamos la función $\sigma_g : X \rightarrow X$ dada por:

$$\sigma_g(x) = g \cdot x$$

Primero, debemos demostrar que σ_g es una biyección (es decir, $\sigma_g \in S_X$).

1. σ_g es inyectiva: Supongamos que $\sigma_g(x) = \sigma_g(y)$ para $x, y \in X$.

$$g \cdot x = g \cdot y$$

Operamos con g^{-1} por la izquierda (usando la propiedad (b)):

$$g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot y)$$

$$(g^{-1}g) \cdot x = (g^{-1}g) \cdot y$$

$$e \cdot x = e \cdot y$$

Usando la propiedad (a) ($e \cdot x = x$):

$$x = y$$

2. σ_g es sobreyectiva: Sea $y \in X$ arbitrario. Queremos encontrar $x \in X$ tal que $\sigma_g(x) = y$. Proponemos $x = g^{-1} \cdot y$. Evaluamos $\sigma_g(x)$:

$$\sigma_g(g^{-1} \cdot y) = g \cdot (g^{-1} \cdot y)$$

Por la propiedad (b):

$$g \cdot (g^{-1} \cdot y) = (gg^{-1}) \cdot y = e \cdot y$$

Por la propiedad (a):

$$e \cdot y = y$$

Así, σ_g es sobreyectiva.

Al ser inyectiva y sobreyectiva, $\sigma_g \in S_X$.

Ahora definimos la función $\varphi : G \rightarrow S_X$ como $\varphi(g) = \sigma_g$. Veamos que φ es un homomorfismo de grupos. Sean $g, h \in G$. Queremos ver que $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$. Dos funciones son iguales si toman el mismo valor para todo elemento del dominio. Sea $x \in X$:

$$(\varphi(gh))(x) = \sigma_{gh}(x) = (gh) \cdot x$$

Por otro lado:

$$(\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) = \varphi(g)(\varphi(h)(x)) = \sigma_g(\sigma_h(x))$$

$$\sigma_g(\sigma_h(x)) = \sigma_g(h \cdot x) = g \cdot (h \cdot x)$$

Como la propiedad (b) nos dice que $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, concluimos que:

$$(\varphi(gh))(x) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) \quad \forall x \in X$$

Por lo tanto, $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$, y φ es un homomorfismo. □

Ejemplo 4.2. 1. G actúa en sí mismo por multiplicación izquierda (o simplemente por la operación del grupo). La acción está dada por $\varphi : G \rightarrow S_G$ o equivalentemente $\tilde{\varphi} : G \times G \rightarrow G$ definida por:

$$(g, h) \mapsto gh$$

2. Sea G un grupo, $H \leq G$ y $X = \{aH \mid a \in G\}$ el conjunto de clases laterales izquierdas. G actúa en X por traslación izquierda. La acción está definida por $\varphi : G \rightarrow S_X$, donde para cada $g \in G$, la función $f_g : X \rightarrow X$ es:

$$f_g(aH) = (ga)H$$

Equivalentemente, $\tilde{\varphi}(g, aH) = gaH$.

3. Sea G un grupo y $X = \{H \mid H \leq G\}$ el conjunto de subgrupos de G . G actúa en X por conjugación. Definimos $\varphi : G \rightarrow S_X$ tal que $g \mapsto f_g$, con $f_g(H) = gHg^{-1}$. Verifiquemos que es una acción:

- $e \cdot H = eHe^{-1} = H$.
- $(gh) \cdot H = (gh)H(gh)^{-1} = g(hHh^{-1})g^{-1} = g(h \cdot H)g^{-1}$.

4. Sea G un grupo y $X = G$. G actúa en sí mismo por conjugación. Definimos la acción $\cdot : G \times G \rightarrow G$ como:

$$g \cdot h = ghg^{-1}$$

5. Sea $G = SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ y sea $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior. Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, definimos la acción:

$$A \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Se verifica que $I \cdot z = z$ y $A \cdot (B \cdot z) = (AB) \cdot z$.

6. Sea $X = \mathbb{R}^2$ y G el grupo de rotaciones del plano (isomorfo a $SO(2)$):

$$G = \{T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid T_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)\}$$

Entonces, para un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, su órbita es:

$$\mathcal{O}_{(x_0, y_0)} = \{T_\theta(x_0, y_0) \mid T_\theta \in G\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2\}$$

Es decir, las órbitas son circunferencias centradas en el origen.

Definición 4.1.2. Diremos que una acción de G en X es transitiva si existe $x \in X$ tal que su órbita cubre todo el conjunto, es decir:

$$\mathcal{O}_x = G \cdot x = X$$

(Esto implica que solo existe una única órbita).

Definición 4.1.3. Sea X un G -conjunto. Diremos que $x \in X$ es un punto fijo si $g \cdot x = x$ para todo $g \in G$. Esto es equivalente a cualquiera de las siguientes condiciones:

- La órbita de x es trivial: $\mathcal{O}_x = \{x\}$.
- El estabilizador de x es todo el grupo: $St_G(x) = G$.

Observación 4.1. Si X es un G -conjunto y $x \in X$, entonces el estabilizador $St_G(x)$ es un subgrupo de G .

Demostración.

Sean $g, h \in St_G(x)$. Entonces $g \cdot x = x$ y $h \cdot x = x$. Esto implica que $h^{-1} \cdot x = x$ (multiplicando por h^{-1}). Luego:

$$(gh^{-1}) \cdot x = g \cdot (h^{-1} \cdot x) = g \cdot x = x$$

Por lo tanto $gh^{-1} \in St_G(x)$, lo que prueba que es un subgrupo. □

Nota 4.1.1. El conjunto de todos los puntos fijos de X bajo la acción de G se denota por X^G .

Observación 4.2. Sea X un G -conjunto, entonces las órbitas forman una partición de X . Para ver esto basta verificar que inducen una relación de equivalencia, es decir, la relación en X definida por $x \sim y$ si y solo si y y x están en la misma órbita (si y solo si $y = g \cdot x$ para algún $g \in G$) es de equivalencia.

1. Reflexiva: Existe $e \in G$ tal que $e \cdot x = x$, así $x \sim x$.
2. Simétrica: $x \sim y$, entonces existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$. Entonces $g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = e \cdot x = x$. Así, $x = g^{-1} \cdot y$, de donde $y \sim x$.
3. Transitiva: $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $y = g_1 \cdot x$, $z = g_2 \cdot y$. Entonces

$$z = g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x$$

luego $x \sim z$.

En particular si $\mathcal{O}_x = Orb(x) = G \cdot x$, tenemos:

$$X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x = \left(\bigcup_{x \in X^G} \mathcal{O}_x \right) \cup \left(\bigcup_{x \notin X^G} \mathcal{O}_x \right) = \left(\bigcup_{x \in X^G} \{x\} \right) \cup \left(\bigcup_{x \notin X^G} \mathcal{O}_x \right)$$

En particular, si X es finito:

$$|X| = |X^G| + \left| \bigcup_{x \notin X^G} \mathcal{O}_x \right|$$

Ejemplo 4.3. Consideremos la acción de G en sí mismo por conjugación, es decir, la acción definida por:

$$g \cdot h = ghg^{-1} \quad \forall g, h \in G$$

En este caso, un elemento $h \in G$ es un punto fijo si y solo si su órbita tiene tamaño 1, es decir:

$$g \cdot h = h \quad \forall g \in G$$

Esto equivale a:

$$ghg^{-1} = h \iff gh = hg \quad \forall g \in G$$

Por lo tanto, el conjunto de puntos fijos de esta acción es exactamente el Centro de G :

$$G^G = Z(G) = \{h \in G \mid gh = hg, \forall g \in G\}$$

Aplicando la ecuación de las órbitas (vista anteriormente) a esta acción específica, obtenemos la ***Ecuación de Clase***:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} [G : C_G(x_i)]$$

donde $C_G(x_i)$ es el centralizador de x_i (que corresponde al estabilizador bajo esta acción).

Teorema 4.1.2 (Teorema). Sea X un G -conjunto, $x \in X$, entonces existe una biyección entre las clases laterales de $S_t(x) \leq G$ y \mathcal{O}_x .

Demostración.

Definamos $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_x$ (donde \mathcal{L} es el conjunto de clases laterales izquierdas) dada por:

$$gS_t(x) \mapsto g \cdot x$$

Note que esta asignación no depende del representante de clase. Si $gS_t(x) = g_1S_t(x)$, entonces $g^{-1}g_1 \in S_t(x)$, si y solo si $(g^{-1}g_1) \cdot x = x$, si y solo si $g_1 \cdot x = g \cdot x$. Es decir, $\varphi(gS_t(x)) = \varphi(g_1S_t(x))$. Luego, φ está bien definida.

φ es inyectiva:

$$\begin{aligned} \varphi(gS_t(x)) = \varphi(g_1S_t(x)) &\iff g \cdot x = g_1 \cdot x \iff g^{-1}g_1 \cdot x = x \\ &\iff g^{-1}g_1 \in S_t(x) \iff gS_t(x) = g_1S_t(x) \end{aligned}$$

φ es sobreyectiva: Dado $y \in \mathcal{O}_x$, existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$, luego:

$$\varphi(gS_t(x)) = g \cdot x = y$$

Por lo tanto φ es biyectiva y en particular:

$$|\mathcal{O}_x| = |\mathcal{L}| = |\mathcal{G}| = [G : S_t(x)]$$

□

Observación 4.3. *Más aún, de la ecuación de las órbitas tenemos:*

$$|X| = |X^G| + \sum_{x \notin X^G} [G : St_G(x)]$$

Todavía más, si G actúa en sí mismo por conjugación. En este caso $X^G = Z(G)$ y al estabilizador $St_G(x)$ se le denomina el Centralizador de x en G y se denota por $C_G(x)$. La ecuación se convierte en:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \notin Z(G)} [G : C_G(x)]$$

donde la suma corre sobre un sistema de representantes de las clases de conjugación no triviales.

Ejemplo 4.4. *Sea G un grupo y $X = \{H \mid H \leq G\}$ el conjunto de subgrupos de G . Hagamos actuar a G en X por conjugación, es decir, la acción dada por:*

$$g \cdot H = gHg^{-1}$$

En este caso, al estabilizador de un elemento $H \in X$ se le llama el Normalizador de H en G y se denota por $N_G(H)$.

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

Observación 4.4. *Si $H \leq G$, entonces se cumplen las siguientes propiedades del normalizador $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$:*

1. $H \trianglelefteq G$ si y solo si $N_G(H) = G$.
2. $H \leq N_G(H)$ (es decir, H es un subgrupo del normalizador).
3. En general, no siempre ocurre que $N_G(H) = G$. (Ver ejemplo en S_3).
4. $H \trianglelefteq N_G(H)$ (es decir, H es un subgrupo normal de su propio normalizador).

Demostración de 1.

Queremos probar que $H \trianglelefteq G \iff N_G(H) = G$.

\Rightarrow) Supongamos que $H \trianglelefteq G$. Por definición de subgrupo normal, para todo $g \in G$ se cumple que $gHg^{-1} = H$. La definición del normalizador es $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. Como la condición se cumple para todo $g \in G$, entonces todo elemento de G pertenece a $N_G(H)$. Por lo tanto, $G \subseteq N_G(H)$. Como $N_G(H) \subseteq G$ es siempre cierto, concluimos que $N_G(H) = G$.

\Leftarrow) Supongamos que $N_G(H) = G$. Esto significa que para todo $g \in G$, $g \in N_G(H)$. Por la definición del conjunto $N_G(H)$, esto implica que para todo $g \in G$, se cumple $gHg^{-1} = H$. Esta es exactamente la definición de que H sea un subgrupo normal de G . Por lo tanto, $H \trianglelefteq G$. \square

Demostración de 2.

Queremos probar que $H \subseteq N_G(H)$. Sea $h \in H$ un elemento arbitrario. Queremos ver que $h \in N_G(H)$, es decir, que $hHh^{-1} = H$.

Como H es un subgrupo (cerrado bajo la operación):

- Para cualquier $x \in H$, el conjugado $h x h^{-1}$ es producto de elementos de H , por lo que $h x h^{-1} \in H$. Esto muestra que $hHh^{-1} \subseteq H$.
- Para la contención inversa, dado $y \in H$, podemos escribir $y = h(h^{-1}yh)h^{-1}$. Como $h^{-1}yh \in H$, entonces y es un conjugado por h de un elemento de H .

(Más simplemente: conjugación por un elemento del mismo subgrupo es un automorfismo interno restringido que envía H en H).

Por lo tanto, $hHh^{-1} = H$ para todo $h \in H$. Así, todo elemento de H cumple la condición de estar en el normalizador. Conclusión: $H \leq N_G(H)$. \square

Demostración de 3 (Ejemplo en S_3).

Consideremos el grupo simétrico S_3 . Sea $N = \langle (1, 2, 3) \rangle = \{e, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$. Sabemos que $|S_3| = 6$ y $|N| = 3$. El índice es $[S_3 : N] = 2$, por lo que $N \trianglelefteq S_3$. Usando la propiedad 1, como es normal, su normalizador es todo el grupo: $N_{S_3}(N) = S_3$.

Ahora consideremos $H = \langle (1, 2) \rangle = \{e, (1, 2)\}$. Calculemos su normalizador $N_{S_3}(H)$. Buscamos los $g \in S_3$ tales que $gHg^{-1} = H$.

- Claramente $H \subseteq N_{S_3}(H)$ (por la propiedad 2), así que e y $(1, 2)$ están en el normalizador.
- Probemos con otro elemento, por ejemplo $\sigma = (1, 3)$. Conjugamos el generador de H :

$$(1, 3)(1, 2)(1, 3)^{-1} = (1, 3)(1, 2)(1, 3) = (2, 3)$$

Como $(2, 3) \notin H$, entonces $(1, 3)H(1, 3)^{-1} \neq H$. Por lo tanto, $(1, 3) \notin N_{S_3}(H)$.

De hecho, haciendo las cuentas para los demás elementos, vemos que el único subgrupo que normaliza a H es el mismo H . Así que $N_{S_3}(H) = H \neq S_3$. Esto demuestra que $N_G(H)$ no siempre es todo G . \square

Demostración de 4.

Queremos probar que $H \trianglelefteq N_G(H)$. Ya sabemos por la propiedad 2 que H es un subgrupo de $N_G(H)$. Solo falta probar la normalidad dentro de este grupo.

Sea $g \in N_G(H)$ un elemento cualquiera del normalizador. Por la definición misma de $N_G(H)$, este g cumple la condición:

$$gHg^{-1} = H$$

Esta igualdad nos dice directamente que conjugando H por cualquier elemento de $N_G(H)$, obtenemos H nuevamente.

Esta es, textualmente, la definición de ser subgrupo normal. Por lo tanto, H es normal en $N_G(H)$. \square

Teorema 4.1.3 (de Cauchy). *Sea G un grupo finito y p un número primo tal que p divide al orden de G ($p \mid |G|$). Entonces, G contiene al menos un elemento de orden p . Más precisamente, la cantidad de elementos de G de orden p es congruente con -1 módulo p .*

Demostración.

Consideremos el conjunto X formado por las p -tuplas de elementos de G cuyo producto es la identidad:

$$X = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 x_2 \dots x_p = e\}$$

Paso 1: Calcular la cardinalidad de X . Para formar una tupla en X , podemos elegir los primeros $p - 1$ elementos (x_1, \dots, x_{p-1}) arbitrariamente en G . Una vez elegidos, el último elemento x_p está forzado, pues debe cumplir:

$$x_1 \dots x_{p-1} x_p = e \implies x_p = (x_1 \dots x_{p-1})^{-1}$$

Dado que x_p es único para cada elección de los primeros $p - 1$ términos, el tamaño de X es:

$$|X| = |G|^{p-1}$$

Como por hipótesis p divide a $|G|$, entonces p divide a $|G|^{p-1}$ (para $p - 1 \geq 1$), por lo que:

$$|X| \equiv 0 \pmod{p}$$

Paso 2: Definir la acción de grupo. Sea $\mathbb{Z}_p = \langle \sigma \rangle$ el grupo cíclico de orden p . Hacemos actuar a \mathbb{Z}_p sobre el conjunto X mediante permutación cíclica de las componentes:

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_2, x_3, \dots, x_p, x_1)$$

Verifiquemos que esta acción está bien definida, es decir, que si $(x_1, \dots, x_p) \in X$, entonces su permutación cíclica también está en X . Si $x_1 x_2 \dots x_p = e$, multiplicando por x_1^{-1} a la izquierda y por x_1 a la derecha (conjugando por x_1), obtenemos:

$$x_1^{-1} (x_1 x_2 \dots x_p) x_1 = x_1^{-1} e x_1 = e$$

Simplificando el lado izquierdo:

$$(x_1^{-1} x_1) x_2 \dots x_p x_1 = x_2 \dots x_p x_1 = e$$

Por lo tanto, la tupla rotada (x_2, \dots, x_p, x_1) cumple la condición de producto identidad y pertenece a X .

Paso 3: Analizar las órbitas y los puntos fijos. Por el Teorema Órbita-Estabilizador, el tamaño de cualquier órbita divide al orden del grupo que actúa. Aquí, $|\mathbb{Z}_p| = p$ (primo). Por tanto, el tamaño de cualquier órbita $|\mathcal{O}_x|$ solo puede ser 1 o p .

Las órbitas de tamaño 1 corresponden a los puntos fijos de la acción $(X^{\mathbb{Z}_p})$. Una tupla $x = (x_1, \dots, x_p)$ es un punto fijo si:

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_2, x_3, \dots, x_p, x_1)$$

Esto implica que $x_1 = x_2 = \dots = x_p$. Además, como la tupla está en X , el producto debe ser la identidad:

$$x_1 \cdot x_1 \dots x_1 = x_1^p = e$$

Así, los puntos fijos son precisamente las tuplas de la forma (g, g, \dots, g) donde $g^p = e$.

Paso 4: Conclusión usando la Ecuación de Clase. La ecuación de clase para esta acción es:

$$|X| = |X^{\mathbb{Z}_p}| + \sum |\mathcal{O}_{\text{tamaño } p}|$$

Tomando módulo p :

$$|X| \equiv |X^{\mathbb{Z}_p}| \pmod{p}$$

(Pues las órbitas de tamaño p son congruentes con 0 módulo p).

Sabemos por el Paso 1 que $|X| \equiv 0 \pmod{p}$. Entonces:

$$|X^{\mathbb{Z}_p}| \equiv 0 \pmod{p}$$

Sabemos que existe al menos un punto fijo trivial: la tupla (e, e, \dots, e) , donde $e^p = e$. Por lo tanto, $|X^{\mathbb{Z}_p}| \geq 1$. Como $|X^{\mathbb{Z}_p}|$ es un múltiplo de p y es al menos 1, debe ser al menos p (es decir, $|X^{\mathbb{Z}_p}| \geq p$).

Esto significa que existen al menos $p-1$ tuplas fijas distintas de la trivial. Sea (a, a, \dots, a) una de estas tuplas con $a \neq e$. Entonces $a \in G$ satisface $a^p = e$ y $a \neq e$. Por lo tanto, a es un elemento de orden p . \square

Definición 4.1.4. Sea G un grupo y p un número primo. Diremos que G es un p -grupo si todo elemento de G tiene orden igual a una potencia de p . Es decir, para todo $g \in G$, existe $k \geq 0$ tal que $o(g) = p^k$.

Observación 4.5. Si G es un p -grupo, no necesariamente es finito. (Existen p -grupos infinitos, como por ejemplo el grupo de Prüfer \mathbb{Z}_{p^∞}).

Corolario 4.1.1. Si G es un p -grupo finito, entonces $|G| = p^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Supongamos que $|G|$ no es una potencia de p . Entonces, por el Teorema Fundamental de la Aritmética, existe un primo q tal que $q \mid |G|$ y $q \neq p$. Por el Teorema de Cauchy, como q divide al orden del grupo, existe un elemento $g \in G$ tal que $o(g) = q$. Pero q no es una potencia de p (pues $q \neq p$ son primos). Esto contradice la hipótesis de que G es un p -grupo (todos sus elementos deben tener orden potencia de p). Por lo tanto, el único divisor primo de $|G|$ es p , lo que implica que $|G| = p^n$. \square

Corolario 4.1.2. *Sea G un grupo finito. Entonces G es un p -grupo si y solo si $|G| = p^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

\Rightarrow) Ya fue probado en el corolario anterior.

\Leftarrow) Supongamos que $|G| = p^n$. Sea $g \in G$ un elemento cualquiera. Por el Teorema de Lagrange, el orden del elemento divide al orden del grupo, es decir, $o(g) \mid |G|$. Como $|G| = p^n$, los únicos divisores son de la forma p^k con $0 \leq k \leq n$. Por lo tanto, $o(g) = p^k$. Como esto vale para todo $g \in G$, concluimos que G es un p -grupo. \square

Ejemplo 4.5. *Sea G un grupo de orden pq , con p, q primos distintos. Sin pérdida de generalidad, supongamos $p < q$. Por el Teorema de Cauchy, existen elementos $a, b \in G$ tales que $o(a) = p$ y $o(b) = q$. Sean $H = \langle a \rangle$ y $K = \langle b \rangle$ los subgrupos generados.*

Observamos que:

- $[G : K] = p$. Como p es el menor primo que divide al orden de G (pues $p < q$), sabemos por un resultado anterior que $K \trianglelefteq G$.
- $H \cap K = \{e\}$, pues los órdenes de sus elementos son coprimos (salvo la identidad).
- $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = pq = |G|$, por lo tanto $G = HK$.

Ahora analizamos la normalidad de H :

i) Si $H \trianglelefteq G$, como ya tenemos $K \trianglelefteq G$ y intersección trivial, entonces G es el producto directo interno:

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$$

En este caso, G es cíclico y abeliano.

ii) Si H no es normal en G , entonces G no es abeliano (pues en un grupo abeliano todo subgrupo es normal). Sabemos que siempre existe el grupo cíclico \mathbb{Z}_{pq} . Si G no es abeliano, su estructura es un producto semidirecto no trivial.

Corolario 4.1.3. *Sea G un grupo de orden p^2 , con p primo. Entonces G es abeliano.*

Demostración.

Por el Teorema de Cauchy, existe $a \in G$ tal que $o(a) = p$. Sea $H = \langle a \rangle$. Como $|H| = p$ y $|G| = p^2$, el índice es $[G : H] = p$. Como p es el menor primo que divide a $|G|$, entonces $H \trianglelefteq G$.

Consideremos un elemento $b \in G \setminus H$.

- **Caso 1:** Si $o(b) = p^2$, entonces $G = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2}$, el cual es abeliano.

- **Caso 2:** Si todo elemento en $G \setminus H$ tiene orden p . Sea $K = \langle b \rangle$. Como $b \notin H$ y $|H| = p$ (primo), $H \cap K = \{e\}$. Al ser H normal y $H \cap K = \{e\}$, el subgrupo HK es isomorfo al producto directo. Como $|HK| = p^2 = |G|$, entonces $G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. El producto directo de grupos abelianos es abeliano.

En cualquier caso, G es abeliano. □

Teorema 4.1.4. *Sea G un p -grupo finito no trivial (es decir, $|G| = p^n$ con $n \geq 1$). Entonces su centro es no trivial:*

$$Z(G) \neq \{e\}$$

Demostración.

Hagamos actuar a G en sí mismo por conjugación:

$$g \cdot x = gxg^{-1}$$

La Ecuación de Clase para esta acción es:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} [G : C_G(x_i)]$$

donde la suma recorre un sistema de representantes de las clases de conjugación no triviales (aquellas con más de un elemento).

Analicemos la divisibilidad por p :

1. $|G| = p^n$, por lo que $|G|$ es divisible por p (pues $n \geq 1$).
2. Para cada $x_i \notin Z(G)$, su centralizador $C_G(x_i)$ es un subgrupo propio de G (si fuera todo G , x_i estaría en el centro). Por el Teorema de Lagrange, $[G : C_G(x_i)] = \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}$. Como $|G|$ es potencia de p , este índice también debe ser una potencia de p . Como $x_i \notin Z(G)$, el índice es mayor que 1. Por lo tanto, p divide a $[G : C_G(x_i)]$.

Entonces, en la ecuación de clase:

$$\underbrace{|G|}_{\text{divisible por } p} = |Z(G)| + \underbrace{\sum [G : C_G(x_i)]}_{\text{divisible por } p}$$

Esto implica que p debe dividir a $|Z(G)|$.

Como el neutro e siempre está en el centro, $|Z(G)| \geq 1$. Al ser múltiplo de p , concluimos que $|Z(G)| \geq p$, por lo que $Z(G) \neq \{e\}$. □

4.2. Grupos Sylow

Definición 4.2.1. *Sea G un grupo, diremos que H es un subgrupo maximal de G si cuando N es un subgrupo de G con $H \subseteq N \subseteq G$, entonces $N = G$ o $N = H$*

Definición 4.2.2. Sea G un grupo, p un primo que divide a $|G|$. Diremos que P es un p -subgrupo de Sylow de G si P es un p -grupo maximal (con respecto a la propiedad de ser p -grupo) es decir, si H es un p -grupo tal que $P \subseteq H \subseteq G$ entonces $H = G$ o $H = P$

Observación 4.6. Si G es un grupo finito, y p es primo que divide a $|G|$ entonces existe un p -subgrupo Sylow de G

Demostración.

Sea $\mathcal{A} = \{H \leq G \mid H \text{ es } p\text{-grupo}\}$. Por el teorema de Cauchy G tiene elementos de orden p , si $o(a) = p$, entonces $H = \langle a \rangle \in \mathcal{A}$. Luego, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sea $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una cadena en \mathcal{A} . Sea $H = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, entonces $H \in \mathcal{A}$ y en efecto si $a, b \in H$, existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tal que $a \in H_{\lambda_1}$ y $b \in H_{\lambda_2}$, como los $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ forman una cadena. Podemos suponer $H_{\lambda_1} \subseteq H_{\lambda_2}$ en cuyo caso $a, b \in H_{\lambda_2}$ y como $H_{\lambda_2} \leq G$, $ab^{-1} \in H_{\lambda_2} \subseteq H$, así $H \leq G$.

Más aún si $a \in H$, $a \in H_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$ así que $o(a) = p^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, luego H es p -grupo. Por lo tanto $H \in \mathcal{A}$, luego, \mathcal{A} tiene elementos maximales y por el lema de Zorn G los tiene. \square

Teorema 4.2.1 (Segundo y Tercer Teorema de Sylow). Sea G grupo finito, p primo que divide a $|G|$, ℓ_p la cantidad de p -grupos Sylow, entonces:

- i) $\ell_p \mid |G|$ y $\ell_p \equiv 1 \pmod{p}$.
- ii) Los p -grupos Sylow son conjugados.

Demostración.

Sea P un p -grupo Sylow de G y $X = \{gPg^{-1} \mid g \in G\}$ los subgrupos conjugados de P . (Note que $|X| < +\infty$). Hagamos actuar G en X por conjugación como sigue:

$$\tilde{\varphi} : G \times X \rightarrow X$$

$$(g, aPa^{-1}) \mapsto g(aPa^{-1})g^{-1}$$

$\tilde{\varphi}$ es acción pues:

$$\text{i) } e(aPa^{-1})e = eaPa^{-1}e = aPa^{-1}.$$

$$\text{ii) } (gh)(aPa^{-1}) = (gh)(aPa^{-1})(gh)^{-1}$$

$$= g(haPa^{-1}h^{-1})g^{-1}$$

$$= g \cdot (haPa^{-1})$$

$$= g \cdot (h \cdot aPa^{-1})$$

Además cada elemento de X es un p -grupo Sylow. Si Q es un p -subgrupo de G con $aPa^{-1} \subseteq Q \subsetneq G$ entonces $P = a^{-1}(aPa^{-1})a \subseteq a^{-1}Qa \subsetneq G$ y $a^{-1}Qa$ es un p -grupo (si $q \in a^{-1}Qa$, $g = a^{-1}qa$ con $q \in Q \implies g^{p^s} = (a^{-1}qa)^{p^s} = a^{-1}q^{p^s}a = a^{-1}ea = e$ si p^s es el orden de q , luego g tiene orden potencia de p). Por la maximalidad de P , $P = a^{-1}Qa$, luego $aPa^{-1} = Q$, así aPa^{-1} es maximal.

Restringiendo $\tilde{\varphi}$ a P , se tiene que P actúa en X . Sea $Q \in X$, entonces $[P : St_P(Q)] = p^s$ para algún s . Más aún si $s = 0$, entonces $P = St_P(Q) = \{p \in P \mid pQp^{-1} = Q\} = P \cap St_G(Q)$, de donde $P \subseteq St_G(Q)$. Además $Q \trianglelefteq St_G(Q) = N_G(Q)$, luego PQ es subgrupo de $St_G(Q)$, más aún es p -subgrupo de G y $P, Q \leq PQ$. Como P es Sylow, luego $PQ = G$ o $P = PQ = Q$. Si $G = PQ$ entonces $G = St_G(Q)$, luego $Q \trianglelefteq G$. Pero $Q = aPa^{-1}$ para algún $a \in G$, $Q = a^{-1}Qa = P$.

En cualquier caso entonces $P = Q$. Es decir, el único elemento de X que bajo la acción se queda fijo es P , por lo tanto

$$|X| = 1 + \sum_{Q \notin X^P} [P : St_P(Q)]$$

En particular $|X| \equiv 1 \pmod{p}$.

Sea ahora un Q p -subgrupo Sylow y suponga que $Q \notin X$, entonces restringiendo $\tilde{\varphi}$ a Q . Un argumento análogo muestra que

$$|X| \equiv 0 \pmod{p}$$

En efecto, si $Q_1 \in X$, entonces $[Q : St_Q(Q_1)] = p^s$ y $s = 0$ si y sólo si $Q = St_Q(Q_1) = St_G(Q_1) \cap Q$, luego $Q \subseteq St_G(Q_1)$ y como $Q_1 \trianglelefteq St_G(Q_1)$ entonces $QQ_1 \leq St_G(Q_1)$. Más aún QQ_1 es p -subgrupo. Así $Q \subseteq QQ_1 \subseteq G$ de donde $QQ_1 = G$ o $Q = QQ_1 = Q_1$. Si $QQ_1 = G$, $G = St_G(Q_1)$, luego $Q_1 \trianglelefteq G$, de donde $Q_1 = P \trianglelefteq G$. Luego $P \subsetneq QQ_1$ y QQ_1 es p -grupo lo cual no puede ser por la maximalidad de P . Por lo tanto $Q = Q_1 \# C$ (Contradicción) pues $Q_1 \in X$ y $Q \notin X$, es decir, con la acción $\tilde{\varphi}|_Q$, no hay puntos fijos y así

$$|X| = \sum_{Q_1 \notin X^G} [Q : St_Q(Q_1)] \equiv 0 \pmod{p}$$

Lo cual no puede ser pues contradice (i), luego $Q \in X$, es decir, es un conjugado de P y por tanto $\ell_p = |X|$ y se tiene $\ell_p \equiv 1 \pmod{p}$. Más aún

$$X = \{gPg^{-1} \mid g \in G\} = \{g \cdot P \mid g \in G\} = \mathcal{O}_P$$

Así,

$$\ell_p = |X| = |\mathcal{O}_P| = [G : St_G(P)] \mid |G|$$

□

Teorema 4.2.2 (Primer Teorema de Sylow). *Sea G un grupo de orden $|G| = p^s m$ con p primo, $(p, m) = 1$ entonces todo p -grupo Sylow tiene cardinalidad p^s .*

Demostración.

Sea P un p -Sylow de G . Para ver que $|P| = p^s$ basta probar que $[G : P] = m$ ($|G| = [G : P]|P|$) y para esto, basta ver que $([G : P], p) = 1$ pues si esto pasa $p^s m = |G| = [G : P]|P|$, $([G : P], p) = 1$, entonces $p^s \mid |P|$, además $|P| \mid |G| = p^s m$, luego, $|P| = p^s p^t$ y $|P| \leq p^s m$ (pues P es subgrupo), luego, $p^s p^t \ell = p^s m$ y $(p, m) = 1$, de donde $t = 0$ o $|P| = p^s$.

Veamos entonces que $([G : P], p) = 1$, tenemos que se sigue del teorema de Lagrange que $[G : P] = [G : N(P)][N(P) : P]$ así que basta ver $([G : N(P)], p) = 1$, $([N(P) : P], p) = 1$.

Pero por el teorema anterior $[G : N(P)] = [G : St_G(P)] = |\mathcal{O}_P| = \ell_p \equiv 1 \pmod{p}$, luego $([G : N(P)], p) = 1$.

Ahora, si $([N(P) : P], p) \neq 1$, $p \mid [N(P) : P]$ y como $P \trianglelefteq N(P)$, entonces p divide el orden del grupo $N(P)/P$, luego por el teorema de Cauchy, existe $\bar{X} = XP \in N(P)/P$ tal que $\bar{X}^p = \bar{e} = P$.

Observe que:

$$\begin{array}{ccc} \langle \bar{X} \rangle & = & \frac{\langle X, P \rangle}{P} \leq \frac{N(P)}{P} \quad \text{y} \quad (\bar{X})^p = e \\ & & \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ N(P)/P & \text{---} & N(P) \\ & & \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \langle \bar{X} \rangle & \text{---} & \langle X, P \rangle \\ & & \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ P = \bar{e} & \text{---} & P \end{array}$$

Por lo tanto, $\frac{\langle X, P \rangle}{P}$ es p -grupo, de donde $\langle X, P \rangle$ es p -grupo y

$$|\langle X, P \rangle| = [\langle X, P \rangle : P]|P| = \left| \frac{\langle X, P \rangle}{P} \right| |P|$$

Por la maximalidad de $P \subseteq \langle X, P \rangle$, $P = \langle X, P \rangle$ o $x \in P$ y $o(\bar{x}) = 1 \notin C$ (Contradicción), luego $([N(P) : P], p) = 1$. De donde se concluye que $|P| = p^s$. \square

Ejemplo 4.6. Sea $|G| = pq$ con $p < q$ números primos. Calculamos la cantidad de q -subgrupos de Sylow, n_q :

$$n_q \equiv 1 \pmod{q} \quad \text{y} \quad n_q \mid p$$

Los divisores de p son $\{1, p\}$.

- Si $n_q = p$, entonces $p \equiv 1 \pmod{q}$, lo cual implica que $q \mid (p - 1)$. Esto es imposible pues $p < q$ (un número mayor no puede dividir a uno menor positivo).

Por lo tanto, $n_q = 1$. Sea Q el único q -Sylow de G , entonces $Q \trianglelefteq G$.

Ahora analicemos n_p :

$$n_p \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{y} \quad n_p \mid q$$

Los divisores de q son $\{1, q\}$. Así que n_p puede ser 1 o q .

Sea P un p -Sylow de G . Como $Q \trianglelefteq G$ y $P \leq G$, y además $Q \cap P = \{e\}$ (pues $|Q| = q$, $|P| = p$ y son primos distintos), tenemos que:

$$|QP| = \frac{|Q||P|}{|Q \cap P|} = \frac{qp}{1} = pq = |G|$$

Por lo tanto $G = QP$. Como Q es normal y $Q \cap P = \{e\}$, G es un producto semidirecto:

$$G \cong Q \rtimes_{\varphi} P$$

donde $\varphi : P \rightarrow \text{Aut}(Q)$ es un homomorfismo.

Sabemos que $Q \cong \mathbb{Z}_q$, por lo que $\text{Aut}(Q) \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}_q) \cong \mathbb{Z}_{q-1}$. El orden del grupo de automorfismos es $|\text{Aut}(Q)| = q - 1$. El homomorfismo φ está determinado por la imagen de un generador de P . El orden de la imagen debe dividir tanto al orden de P (p) como al orden de $\text{Aut}(Q)$ ($q - 1$).

Caso 1: $p \nmid (q - 1)$. En este caso, $\gcd(p, q - 1) = 1$. El único elemento de orden que divide a p en $\text{Aut}(Q)$ es la identidad. Por lo tanto, φ es el homomorfismo trivial ($\varphi(g) = \text{Id}_Q$ para todo g). Esto implica que el producto es directo:

$$G \cong Q \times P \cong \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{pq}$$

Así, si $p \nmid (q - 1)$, el único grupo de orden pq es el cíclico \mathbb{Z}_{pq} .

Caso 2: $p \mid (q - 1)$. Por el Teorema de Cauchy, como p divide al orden de $\text{Aut}(Q)$, existe un subgrupo de orden p en $\text{Aut}(Q)$. Esto permite definir un homomorfismo φ no trivial. Por lo tanto, existe un producto semidirecto no abeliano:

$$G \cong Q \rtimes P$$

Este grupo es único salvo isomorfismo (todos los homomorfismos no triviales dan lugar a grupos isomorfos en este caso). **Ejemplo:** S_3 tiene orden $6 = 2 \cdot 3$. Aquí $p = 2$, $q = 3$. Como $2 \mid (3 - 1)$, existe el grupo no abeliano $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 4.7. Sea $|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Analicemos los subgrupos de Sylow:

- $n_5 \equiv 1 \pmod{5}$ y $n_5 \mid 6 \implies n_5 \in \{1, 6\}$.
- $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$ y $n_3 \mid 10 \implies n_3 \in \{1, 10\}$.

Supongamos que G es simple (es decir, no tiene subgrupos normales propios). Entonces tendríamos $n_5 = 6$ y $n_3 = 10$ (pues si alguno fuera 1, ese Sylow sería normal).

Contemos los elementos:

- Si $n_5 = 6$, tenemos 6 subgrupos de orden 5. La intersección de cualesquiera dos de ellos es trivial (orden 1). Cada uno tiene $5 - 1 = 4$ elementos de orden 5. Total de elementos de orden 5: $6 \times 4 = 24$.
- Si $n_3 = 10$, tenemos 10 subgrupos de orden 3. Cada uno tiene $3 - 1 = 2$ elementos de orden 3. Total de elementos de orden 3: $10 \times 2 = 20$.

Sumando los elementos:

$$24 \text{ (orden 5)} + 20 \text{ (orden 3)} = 44 \text{ elementos}$$

Esto es imposible pues $|G| = 30$. Por lo tanto, nuestra suposición es falsa. Debe ocurrir que $n_5 = 1$ o $n_3 = 1$. Conclusión: Un grupo de orden 30 no puede ser simple (siempre tiene un subgrupo normal de orden 5 o de orden 3).

Ejemplo 4.8. Sea $|G| = 12 = 2^2 \cdot 3$.

- $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$ y $n_3 \mid 4 \implies n_3 \in \{1, 4\}$.
- $n_2 \equiv 1 \pmod{2}$ y $n_2 \mid 3 \implies n_2 \in \{1, 3\}$.

Supongamos que G no es simple. Si $n_3 = 1$, ya terminamos ($P_3 \trianglelefteq G$). Supongamos entonces que $n_3 = 4$. El número de elementos de orden 3 es:

$$4 \times (3 - 1) = 8 \text{ elementos.}$$

Los elementos restantes son $12 - 8 = 4$. Estos 4 elementos deben formar el único 2-Sylow de G (que tiene orden 4). Por lo tanto, si $n_3 \neq 1$, obligatoriamente $n_2 = 1$.

En cualquier caso, G tiene un subgrupo normal (ya sea el 3-Sylow o el 2-Sylow).

Ejemplo 4.9. Sea $|G| = p^2q$ con p, q primos distintos. (El análisis suele ser similar: mostrar que no es simple contando elementos. Por ejemplo, si $p > q$, $n_p = 1$).

CAPÍTULO 5

Automorfismos de Grupos

5.1. Automorfismos de Grupos

Definición 5.1.1. Un **automorfismo** de un grupo G es un isomorfismo de G en sí mismo. Al conjunto de automorfismos se le denota por $\text{Aut}(G)$. Así:

$$\text{Aut}(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ es un isomorfismo}\}$$

Observación 5.1. Si G es finito y $f : G \rightarrow G$ es un homomorfismo, entonces f es inyectivo si y solo si f es suprayectivo.

Demostración.

Como G es un grupo finito, denotemos su orden por $|G| = n < \infty$.

\Rightarrow) Supongamos que f es inyectiva. Dado que f es una función inyectiva, la cantidad de elementos en su imagen es igual a la cantidad de elementos en su dominio. Es decir, $|\text{Im}(f)| = |G| = n$. Sabemos que $\text{Im}(f) \subseteq G$. Dado que $\text{Im}(f)$ es un subconjunto de G y tiene la misma cardinalidad finita que G , necesariamente $\text{Im}(f) = G$. Por lo tanto, f es suprayectiva.

\Leftarrow) Supongamos que f es suprayectiva. Consideremos el núcleo de f , $\ker(f)$. Por el Primer Teorema de Isomorfía, sabemos que:

$$G/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$$

Tomando cardinalidades:

$$\frac{|G|}{|\ker(f)|} = |\text{Im}(f)|$$

Como f es suprayectiva, $\text{Im}(f) = G$, por lo que $|\text{Im}(f)| = |G|$. Sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{|G|}{|\ker(f)|} = |G|$$

Como $|G|$ es finito y no nulo, podemos dividir ambos lados por $|G|$, obteniendo:

$$\frac{1}{|\ker(f)|} = 1 \implies |\ker(f)| = 1$$

El único subgrupo de orden 1 es el trivial, por lo tanto $\ker(f) = \{e\}$. Sabemos que un homomorfismo es inyectivo si y solo si su núcleo es trivial. Concluimos que f es inyectiva. \square

Proposición 5.1.1. *Sea G un grupo y $a \in G$. Definimos $f_a : G \rightarrow G$ por $f_a(g) = aga^{-1}$. Se verifica que f_a es un isomorfismo.*

Demostración.

i) f_a es homomorfismo: Sean $g_1, g_2 \in G$.

$$f_a(g_1g_2) = a(g_1g_2)a^{-1} = ag_1(a^{-1}a)g_2a^{-1} = (ag_1a^{-1})(ag_2a^{-1}) = f_a(g_1)f_a(g_2)$$

ii) f_a es inyectiva:

$$f_a(g) = f_a(g_1) \iff aga^{-1} = ag_1a^{-1} \iff g = g_1$$

iii) f_a es sobreyectiva: Dado $y \in G$, existe $x = a^{-1}ya \in G$ tal que:

$$f_a(x) = f_a(a^{-1}ya) = a(a^{-1}ya)a^{-1} = (aa^{-1})y(aa^{-1}) = eye = y$$

Por lo tanto, f_a es un isomorfismo de G en sí mismo (un automorfismo). \square

Definición 5.1.2. *Al conjunto de los automorfismos de la forma f_a se les llama automorfismos internos de G , y se denota por $\text{Im}(G)$.*

$$\text{Im}(G) = \{f_a : G \rightarrow G \mid f_a(g) = aga^{-1}, \text{ para algún } a \in G\}$$

Observación 5.2. *$\text{Aut}(G)$, con la operación de composición de funciones, es un grupo.*

Demostración.

Sabemos que la composición de biyecciones es una biyección y la composición de homomorfismos es un homomorfismo. Sean $f, g \in \text{Aut}(G)$. Entonces $f \circ g$ es biyectiva y es homomorfismo, luego $f \circ g \in \text{Aut}(G)$. La asociatividad se hereda de la composición de funciones. La identidad es $\text{Id}_G(x) = x$, que trivialmente es un automorfismo. Si $f \in \text{Aut}(G)$, su función inversa f^{-1} también es un isomorfismo, por lo que $f^{-1} \in \text{Aut}(G)$. \square

Ejemplo 5.1. *Si G es un grupo, definamos $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ como $\varphi(g) = f_g$, donde $f_g : G \rightarrow G$ está dado por $f_g(a) = gag^{-1}$. Entonces φ es un homomorfismo.*

En efecto:

$$f_{gg_1}(a) = (gg_1)a(gg_1)^{-1} = g(g_1ag_1^{-1})g^{-1} = gf_{g_1}(a)g^{-1} = f_g(f_{g_1}(a)) = (f_g \circ f_{g_1})(a)$$

Por lo tanto:

$$\varphi(gg_1) = f_{gg_1} = f_g \circ f_{g_1} = \varphi(g) \circ \varphi(g_1)$$

La imagen de φ es justamente $\text{Im}(G)$.

Teorema 5.1.1. *Sea G un grupo, entonces $\text{Im}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$ y*

$$G/Z(G) \cong \text{Im}(G)$$

Demostración.

Sea $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ dada por $\varphi(g) = f_g$ (como en el ejemplo anterior). Entonces, φ es un homomorfismo con imagen $\text{Im}(G)$. Además:

$$\begin{aligned} g \in \ker \varphi &\iff \varphi(g) = \text{Id}_G \iff f_g(a) = a, \forall a \in G \\ &\iff gag^{-1} = a, \forall a \in G \iff ga = ag, \forall a \in G \iff g \in Z(G) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\ker \varphi = Z(G)$. Por el Primer Teorema de Isomorfía:

$$G/\ker \varphi = G/Z(G) \cong \text{Im}(\varphi) = \text{Im}(G)$$

Ahora, para ver la normalidad ($\text{Im}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$), sea $f_g \in \text{Im}(G)$ y $h \in \text{Aut}(G)$. Para $a \in G$:

$$(h \circ f_g \circ h^{-1})(a) = h(f_g(h^{-1}(a))) = h(gh^{-1}(a)g^{-1})$$

Como h es un homomorfismo:

$$= h(g)h(h^{-1}(a))h(g^{-1}) = h(g)ah(g)^{-1} = f_{h(g)}(a)$$

Luego, $h \circ f_g \circ h^{-1} = f_{h(g)}$. Como $h(g) \in G$, entonces $f_{h(g)} \in \text{Im}(G)$. De donde concluimos que $\text{Im}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$. \square

Observación 5.3. *Si $G \cong G_1$, entonces $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(G_1)$.*

Demostración.

Sea $\psi : G \rightarrow G_1$ un isomorfismo. Definamos $\Psi : \text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(G_1)$ dada por:

$$f \mapsto h_f = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$$

Es decir, $\Psi(f) = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$. Demostraremos que Ψ es un isomorfismo, en efecto:

1. Ψ está bien definida: Es decir, $\psi \circ f \circ \psi^{-1} \in \text{Aut}(G_1)$. En efecto, claramente $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ es biyectiva (composición de biyecciones). Además, para $g_1, g_2 \in G_1$:

$$\begin{aligned} h_f(g_1g_2) &= (\psi \circ f \circ \psi^{-1})(g_1g_2) = \psi(f(\psi^{-1}(g_1g_2))) \\ &= \psi(f(\psi^{-1}(g_1)\psi^{-1}(g_2))) \quad (\text{pues } \psi^{-1} \text{ es hom.}) \\ &= \psi(f(\psi^{-1}(g_1)) \cdot f(\psi^{-1}(g_2))) \quad (\text{pues } f \text{ es hom.}) \\ &= \psi(f(\psi^{-1}(g_1))) \cdot \psi(f(\psi^{-1}(g_2))) \quad (\text{pues } \psi \text{ es hom.}) \\ &= h_f(g_1)h_f(g_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h_f \in \text{Aut}(G_1)$.

2. Ψ es homomorfismo: Sean $f, \rho \in \text{Aut}(G)$.

$$\Psi(f \circ \rho) = h_{f \circ \rho} = \psi \circ (f \circ \rho) \circ \psi^{-1}$$

Por otro lado:

$$\Psi(f) \circ \Psi(\rho) = (\psi \circ f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \rho \circ \psi^{-1}) = \psi \circ f \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ \rho \circ \psi^{-1}$$

Como $\psi^{-1} \circ \psi = \text{Id}_G$, esto se reduce a:

$$= \psi \circ f \circ \rho \circ \psi^{-1} = h_{f \circ \rho}$$

Luego, $\Psi(f \circ \rho) = \Psi(f) \circ \Psi(\rho)$.

3. Ψ es inyectiva:

$$\Psi(f) = \Psi(\rho) \iff \psi \circ f \circ \psi^{-1} = \psi \circ \rho \circ \psi^{-1}$$

Componiendo con ψ^{-1} a la izquierda y ψ a la derecha:

$$\iff \psi^{-1}(\psi \circ f \circ \psi^{-1})\psi = \psi^{-1}(\psi \circ \rho \circ \psi^{-1})\psi \iff f = \rho$$

4. Ψ es sobreyectiva: Sea $g \in \text{Aut}(G_1)$. Existe $f = \psi^{-1} \circ g \circ \psi \in \text{Aut}(G)$ tal que:

$$\Psi(f) = \psi \circ (\psi^{-1} \circ g \circ \psi) \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \psi^{-1}) \circ g \circ (\psi \circ \psi^{-1}) = g$$

Por lo tanto, $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(G_1)$. □

Observación 5.4. *El recíproco es falso.*

Demostración.

Sea $G = S_3$. Sus elementos son:

$$S_3 = \{e, \theta = (123), \theta^2 = (132), \sigma = (12), \tau = (13), \rho = (23)\}$$

Sabemos que S_3 es generado por θ y σ ($\langle \theta, \sigma \rangle = S_3$) con las relaciones $\theta^3 = e, \sigma^2 = e, \sigma\theta = \theta^2\sigma$. Cualquier automorfismo $f \in \text{Aut}(S_3)$ queda determinado por sus valores en los generadores. Además, un isomorfismo preserva el orden de los elementos.

Los elementos de orden 3 son $\{\theta, \theta^2\}$. Los elementos de orden 2 son $\{\sigma, \tau, \rho\}$. Por lo tanto, para $f(\theta)$ tenemos 2 opciones (θ ó θ^2) y para $f(\sigma)$ tenemos 3 opciones (σ, τ ó ρ). En total hay a lo más $2 \times 3 = 6$ automorfismos.

Sabemos que $\text{Im}(S_3) \cong S_3/Z(S_3)$. Como $Z(S_3) = \{e\}$, entonces $\text{Im}(S_3) \cong S_3$, por lo que $|\text{Im}(S_3)| = 6$. Como $\text{Im}(S_3) \leq \text{Aut}(S_3)$ y $|\text{Aut}(S_3)| \leq 6$, concluimos que:

$$\text{Aut}(S_3) = \text{Im}(S_3) \cong S_3$$

(Nota: Existen grupos no isomorfos a S_3 , como $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, cuyo grupo de automorfismos es isomorfo a S_3 , mostrando que el recíproco falla). □

Teorema 5.1.2. Sean H_1 y H_2 grupos finitos tales que $\gcd(|H_1|, |H_2|) = 1$. Entonces:

$$\text{Aut}(H_1 \times H_2) \cong \text{Aut}(H_1) \times \text{Aut}(H_2)$$

Demostración.

Identificamos a H_1 con el subgrupo $H_1 \times \{e_2\}$ y a H_2 con $\{e_1\} \times H_2$ dentro de $G = H_1 \times H_2$.

Sea $f \in \text{Aut}(H_1 \times H_2)$. Probemos que $f(H_1) = H_1$ y $f(H_2) = H_2$.

Sea $(h, e_2) \in H_1$. Su orden k divide a $|H_1|$. Aplicando f , el elemento $f(h, e_2)$ debe tener el mismo orden k . Sea $f(h, e_2) = (x, y) \in H_1 \times H_2$. Entonces el orden de (x, y) es $(|x|, |y|) = k$. Esto implica que $|y|$ divide a k , y por tanto $|y|$ divide a $|H_1|$. Pero $y \in H_2$, por lo que $|y|$ divide a $|H_2|$. Como $(|H_1|, |H_2|) = 1$, la única posibilidad es que $|y| = 1$, es decir, $y = e_2$. Por lo tanto, $f(h, e_2) = (x, e_2) \in H_1$.

Esto demuestra que $f(H_1) \subseteq H_1$. Por ser f inyectiva y H_1 finito, $f(H_1) = H_1$. Análogamente se demuestra que $f(H_2) = H_2$.

Dado que f preserva los subgrupos H_1 y H_2 , podemos definir las restricciones: $f|_{H_1} : H_1 \rightarrow H_1$ y $f|_{H_2} : H_2 \rightarrow H_2$. Estas restricciones son automorfismos de H_1 y H_2 respectivamente.

Definimos la función $\Psi : \text{Aut}(H_1 \times H_2) \rightarrow \text{Aut}(H_1) \times \text{Aut}(H_2)$ dada por:

$$\Psi(f) = (f|_{H_1}, f|_{H_2})$$

Ψ es un homomorfismo. En efecto:

Sean $f, g \in \text{Aut}(H_1 \times H_2)$.

$$\Psi(f \circ g) = ((f \circ g)|_{H_1}, (f \circ g)|_{H_2}) = (f|_{H_1} \circ g|_{H_1}, f|_{H_2} \circ g|_{H_2})$$

(Esto es válido porque $g(H_1) = H_1$, así que la composición se restringe bien).

$$= (f|_{H_1}, f|_{H_2}) \cdot (g|_{H_1}, g|_{H_2}) = \Psi(f) \cdot \Psi(g)$$

Ψ es biyectiva. En efecto:

- **Inyectiva:** Si $\Psi(f) = (Id_{H_1}, Id_{H_2})$, entonces $f(h, e_2) = (h, e_2)$ y $f(e_1, k) = (e_1, k)$. Para un elemento arbitrario $(h, k) \in H_1 \times H_2$:

$$f(h, k) = f((h, e_2)(e_1, k)) = f(h, e_2)f(e_1, k) = (h, e_2)(e_1, k) = (h, k)$$

Luego $f = Id_{H_1 \times H_2}$, así que $\ker \Psi$ es trivial.

- **Sobreyectiva:** Dado $(\alpha, \beta) \in \text{Aut}(H_1) \times \text{Aut}(H_2)$, definimos $f : H_1 \times H_2 \rightarrow H_1 \times H_2$ como $f(h, k) = (\alpha(h), \beta(k))$. Es fácil verificar que f es un automorfismo y que $\Psi(f) = (\alpha, \beta)$.

Por lo tanto, $\text{Aut}(H_1 \times H_2) \cong \text{Aut}(H_1) \times \text{Aut}(H_2)$. □

Teorema 5.1.3. *Sea G un grupo cíclico de orden n . Entonces:*

$$\text{Aut}(G) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$$

Donde $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^$ es el grupo multiplicativo de las unidades módulo n . En particular, $|\text{Aut}(G)| = \varphi(n)$, donde φ es la función de Euler.*

Demostración.

Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico de orden n . Sea $f \in \text{Aut}(G)$. Como G es cíclico, f queda completamente determinado por la imagen del generador g . Sea $f(g) = g^{c_f}$ para algún entero c_f . Como f es un automorfismo, $f(g)$ debe ser otro generador de G . Sabemos que g^k es un generador de G si y solo si $\gcd(k, n) = 1$. Por lo tanto, $\gcd(c_f, n) = 1$, lo que implica que la clase $\overline{c_f}$ pertenece a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Definimos la función $\Psi : \text{Aut}(G) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ dada por:

$$\Psi(f) = \overline{c_f} \quad \text{donde } f(g) = g^{c_f}$$

1. Ψ es un homomorfismo: Sean $f_1, f_2 \in \text{Aut}(G)$ con $f_1(g) = g^{c_{f_1}}$ y $f_2(g) = g^{c_{f_2}}$.

$$(f_1 \circ f_2)(g) = f_1(f_2(g)) = f_1(g^{c_{f_2}}) = (f_1(g))^{c_{f_2}} = (g^{c_{f_1}})^{c_{f_2}} = g^{c_{f_1}c_{f_2}}$$

Por lo tanto, el exponente asociado a la composición es el producto de los exponentes:

$$\Psi(f_1 \circ f_2) = \overline{c_{f_1}c_{f_2}} = \overline{c_{f_1}} \cdot \overline{c_{f_2}} = \Psi(f_1)\Psi(f_2)$$

2. Ψ es inyectiva:

$$\Psi(f) = \overline{1} \implies c_f \equiv 1 \pmod{n} \implies f(g) = g^1 = g$$

Como el automorfismo fija al generador, fija a todo el grupo. Luego $f = \text{Id}_G$.

3. Ψ es sobreyectiva: Sea $\overline{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Entonces $\gcd(k, n) = 1$. Definimos $f : G \rightarrow G$ por $f(x) = x^k$. Como $\gcd(k, n) = 1$, la aplicación $x \mapsto x^k$ es una biyección en el grupo cíclico finito y es un homomorfismo ($f(xy) = (xy)^k = x^k y^k$ pues G es abeliano). Así, $f \in \text{Aut}(G)$ y $\Psi(f) = \overline{k}$.

Por lo tanto, $\text{Aut}(G) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. □

Corolario 5.1.1. *Si p es un número primo, entonces:*

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$$

Demostración.

Aplicando el teorema anterior con $G = \mathbb{Z}_p$ (cíclico de orden p), tenemos:

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_p) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$$

El orden de este grupo es $\varphi(p) = p - 1$. Sabemos por la teoría de grupos finitos (específicamente por la existencia de raíces primitivas módulo p) que el grupo multiplicativo de un cuerpo finito \mathbb{Z}_p es siempre cíclico. Por lo tanto:

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \cong C_{p-1} \cong \mathbb{Z}_{p-1}$$

Así concluimos que $\text{Aut}(\mathbb{Z}_p)$ es isomorfo al grupo cíclico de orden $p - 1$. □

Teorema 5.1.4. *Sea G un grupo cíclico de orden n . Entonces:*

$$\text{Aut}(G) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$$

Donde $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^$ es el grupo multiplicativo de las unidades módulo n . En particular, $|\text{Aut}(G)| = \varphi(n)$, donde φ es la función de Euler.*

Demostración.

Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico de orden n . Sea $f \in \text{Aut}(G)$. Como G es cíclico, f queda completamente determinado por la imagen del generador g . Sea $f(g) = g^{c_f}$ para algún entero c_f . Como f es un automorfismo, $f(g)$ debe ser otro generador de G . Sabemos que g^k es un generador de G si y solo si $\gcd(k, n) = 1$. Por lo tanto, $\gcd(c_f, n) = 1$, lo que implica que la clase $\overline{c_f}$ pertenece a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Definimos la función $\Psi : \text{Aut}(G) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ dada por:

$$\Psi(f) = \overline{c_f} \quad \text{donde } f(g) = g^{c_f}$$

1. Ψ es un homomorfismo: Sean $f_1, f_2 \in \text{Aut}(G)$ con $f_1(g) = g^{c_{f_1}}$ y $f_2(g) = g^{c_{f_2}}$.

$$(f_1 \circ f_2)(g) = f_1(f_2(g)) = f_1(g^{c_{f_2}}) = (f_1(g))^{c_{f_2}} = (g^{c_{f_1}})^{c_{f_2}} = g^{c_{f_1}c_{f_2}}$$

Por lo tanto, el exponente asociado a la composición es el producto de los exponentes:

$$\Psi(f_1 \circ f_2) = \overline{c_{f_1}c_{f_2}} = \overline{c_{f_1}} \cdot \overline{c_{f_2}} = \Psi(f_1)\Psi(f_2)$$

2. Ψ es inyectiva:

$$\Psi(f) = \overline{1} \implies c_f \equiv 1 \pmod{n} \implies f(g) = g^1 = g$$

Como el automorfismo fija al generador, fija a todo el grupo. Luego $f = \text{Id}_G$.

3. Ψ es sobreyectiva: Sea $\overline{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Entonces $\gcd(k, n) = 1$. Definimos $f : G \rightarrow G$ por $f(x) = x^k$. Como $\gcd(k, n) = 1$, la aplicación $x \mapsto x^k$ es una biyección en el grupo cíclico finito y es un homomorfismo ($f(xy) = (xy)^k = x^k y^k$ pues G es abeliano). Así, $f \in \text{Aut}(G)$ y $\Psi(f) = \overline{k}$.

Por lo tanto, $\text{Aut}(G) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. □

Corolario 5.1.2. *Si p es un número primo, entonces:*

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$$

Demostración.

Aplicando el teorema anterior con $G = \mathbb{Z}_p$ (cíclico de orden p), tenemos:

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_p) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$$

El orden de este grupo es $\varphi(p) = p - 1$. Sabemos por la teoría de grupos finitos (específicamente por la existencia de raíces primitivas módulo p) que el grupo multiplicativo de un cuerpo finito \mathbb{Z}_p es siempre cíclico. Por lo tanto:

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \cong C_{p-1} \cong \mathbb{Z}_{p-1}$$

Así concluimos que $\text{Aut}(\mathbb{Z}_p)$ es isomorfo al grupo cíclico de orden $p - 1$. \square

Ejemplo 5.2. Sea G un grupo y hagamos actuar G en sí mismo por conjugación. Entonces esta es una acción como grupo.

Definimos $\tilde{\varphi} : G \times G \rightarrow G$ por $\tilde{\varphi}(g, g_1) = gg_1g^{-1}$. Ya se tiene que es una acción (visto en el capítulo anterior). Veamos que actúa por automorfismos:

$$\begin{aligned} (k_1k_2)^g &= \tilde{\varphi}(g, k_1k_2) = g(k_1k_2)g^{-1} = gk_1(g^{-1}g)k_2g^{-1} \\ &= (gk_1g^{-1})(gk_2g^{-1}) = \tilde{\varphi}(g, k_1)\tilde{\varphi}(g, k_2) = k_1^gk_2^g \end{aligned}$$

Por lo tanto, la conjugación preserva el producto.

Observación 5.5. Sean H y K grupos. Entonces H actúa en K como grupo si y solo si $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ es un homomorfismo. (Nota: $\text{Aut}(K) \leq S_K$).

En efecto, \Rightarrow) Si H actúa como grupo en K , existe $\tilde{\varphi} : H \times K \rightarrow K$ que cumple las condiciones i), ii) de acción y la condición de compatibilidad iii). Definamos $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ por $\varphi(h) = f_h$, donde $f_h : K \rightarrow K$ está dada por $f_h(k) = \tilde{\varphi}(h, k)$.

1. φ está bien definida: Como $\tilde{\varphi}$ es acción, la función $\varphi : H \rightarrow S_K$ dada por $h \mapsto f_h$ es un homomorfismo de grupos (propiedad general de acciones). Basta ver que la imagen cae en $\text{Aut}(K)$, es decir, que $f_h \in \text{Aut}(K)$ para todo h . Sabemos que f_h es biyectiva (por ser acción). Además:

$$\begin{aligned} f_h(k_1k_2) &= \tilde{\varphi}(h, k_1k_2) = (k_1k_2)^h = k_1^hk_2^h \\ &= \tilde{\varphi}(h, k_1)\tilde{\varphi}(h, k_2) = f_h(k_1)f_h(k_2) \end{aligned}$$

Luego, f_h es homomorfismo y por tanto $f_h \in \text{Aut}(K)$. Así φ está bien definida.

\Leftarrow) Recíprocamente, sea $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ un homomorfismo. Definamos $\tilde{\varphi} : H \times K \rightarrow K$ por $\tilde{\varphi}(h, k) = (\varphi(h))(k)$. Notemos que como $\varphi(h) \in \text{Aut}(K)$, denotemos $f_h = \varphi(h)$, entonces $\tilde{\varphi}(h, k) = f_h(k)$.

Verifiquemos que es acción como grupo:

- $k^e = \tilde{\varphi}(e, k) = (\varphi(e))(k) = \text{Id}_K(k) = k$. (Pues φ es homomorfismo, $\varphi(e) = \text{Id}$).
- $(k^{h_1})^{h_2} = \tilde{\varphi}(h_2, k^{h_1}) = f_{h_2}(f_{h_1}(k)) = (f_{h_2} \circ f_{h_1})(k)$. Como φ es homomorfismo, $f_{h_2} \circ f_{h_1} = \varphi(h_2) \circ \varphi(h_1) = \varphi(h_2h_1) = f_{h_2h_1}$. Luego, $= f_{h_2h_1}(k) = k^{h_2h_1}$.

$$\blacksquare (k_1 k_2)^h = f_h(k_1 k_2) = f_h(k_1) f_h(k_2) \text{ (pues } f_h \in \text{Aut}(K)). = k_1^h k_2^h.$$

□

Ejemplo 5.3. Sea G un grupo y $K \trianglelefteq G$. Entonces G **no** actúa necesariamente en K como grupo por multiplicación a la izquierda. Es decir, sea $\tilde{\varphi}(g, k) = gk$.

Aunque $\tilde{\varphi}(e, k) = ek = k$ y $\tilde{\varphi}(g_1 g_2, k) = (g_1 g_2)k = g_1(g_2 k)$, la propiedad de automorfismo falla:

$$(k_1 k_2)^g = g(k_1 k_2)$$

mientras que:

$$k_1^g k_2^g = (gk_1)(gk_2) = gk_1 gk_2$$

En general $gk_1 k_2 \neq gk_1 gk_2$ (esto implicaría $e = g$, lo cual no es cierto para todo g). Además, gk no necesariamente está en K si K no es el grupo total (aunque si tomamos $K = G$, falla la condición de homomorfismo a menos que G sea trivial).