

LICENCE SCIENCE DE LA MATIÈRE
École Normale Supérieure de Lyon
Université Claude Bernard Lyon I



Stage 2020–2021
Verollet Christian
L3 Physique

Simulation numérique d'un circuit supraconducteur compteur de photons uniques

Résumé : L'objectif du stage est de simuler numériquement la dynamique quantique d'un circuit supraconducteur compteur de photons uniques. Le principe est simple, l'absorption d'un photon entraîne une variation importante du flux magnétique propre du système, ce flux subit en permanence une mesure continue faible qui permet de détecter cette variation. La simulation numérique commence par trouver la dynamique du système en fonction du signal correspondant au photon qui lui en envoyé, ensuite la dissipation du système est rajouté et finalement la prise en compte de la mesure continue faible. En ouverture des idées pour modéliser les courants parasites et le bain thermique dans lequel se trouve le système ($10 \sim 30$ mK) sont proposés.

Mots clefs : *circuits supraconducteurs, SQUID, qubit de flux, jonction Josephson, weak continuous measurement*

Stage encadré par :

Pascal Febvre

Pascal.Febvre@univ-smb.fr / tél. +33-4-79-75-88-64

Université Savoie Mont Blanc IMEP-LAHC – CNRS UMR5130

73376 Le Bourget du Lac Cedex France
<https://imep-lahc.grenoble-inp.fr/>



Remerciements

Je remercie mon maître de stage Pascal Febvre pour son encadrement ainsi que ses conseils tout au long de mon stage.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Situation du travail	2
2.1	Présentation du circuit	2
2.2	Modèle RCSJ	3
2.3	Principe de fonctionnement	4
2.4	Mesure continue du système	5
3	Travail de recherche : Simulation numérique du circuit	5
3.1	Signal d'entrée	5
3.2	Oscillations de Rabi	7
3.3	Mesures du circuit	11
3.3.1	Moyenne de l'observable flux	11
3.3.2	Mesure continue	13
3.4	Ajout du frottement	15
3.5	Initialisation du circuit	16
4	Conclusion et perspectives	17

1 Introduction

Mon stage porte sur le domaine de l'électronique supraconductrice. Dans ce domaine l'objectif principal des chercheurs est de fabriquer des atomes artificiels à partir de circuits électriques à très basse température. Dans les bonnes conditions, ces circuits électriques ont un comportement quantique et peuvent être considérés comme des systèmes à deux niveaux, des qubits. Ces qubits sont aujourd'hui majoritairement utilisés pour le calcul quantique. Dans mon cas, le système que j'étudie a pour but de détecter des photons uniques d'une fréquence particulière réglable. Mon but est d'aider à la compréhension de ce système en proposant des simulations numériques permettant de visualiser la dynamique du système et les résultats qui seront attendus. Le circuit repose sur l'utilisation de SQUIDs (Superconducting Quantum Interference Device) et est décrit dans l'article [9]. Le système repose sur le principe suivant : le système est placé dans un état d'énergie auquel la fonction d'onde associée donne des probabilités de mesures du flux propre du système autour de valeurs assez faibles, quand un photon de la bonne fréquence est absorbé le système a plus de chance d'être dans l'état d'énergie au dessus et qui donne des probabilités de mesures du flux autour de valeurs plus hautes. Le système étant continuellement mesuré par un faible couplage entre le champ magnétique du système et un autre circuit à côté, la variation de flux magnétique propre du système est détectée. L'avantage de ce système est que ses niveaux d'énergies sont réglables par l'application de flux magnétique constant, ce qui permet d'ajuster le système suivant l'énergie des photons que l'on souhaite détecter. Un autre avantage est que le circuit de mesure n'a pas besoin d'être relié physiquement au circuit principal et peut se trouver à une température plus haute et moins contraignante (de l'ordre du Kelvin).

Pour la suite du rapport on s'appuie sur deux grandes idées de l'électronique supraconductrice : la théorie BCS et les jonctions Josephson.

La théorie BCS explique que la supraconductivité est due au fait qu'à très basse température les électrons forment des paires dites de Cooper de spin 1 et circulent dans le métal sans dissipation, elles obéissent alors à la statistique de Bose-Einstein et peuvent-être décrites par une fonction d'ondes macroscopique représentant leur densité dans le circuit.

Les jonctions Josephson sont l'ingrédient indispensables de tout circuit supraconducteurs. Ce sont des fines couches d'isolants de quelques dizaines d'angström entre deux morceaux d'un matériau supraconducteurs (comme un condensateur mais en beaucoup plus fin) et permettent le passage par effet tunnel de paires de Cooper. Elles sont caractérisées par deux relations dites de Josephson, qui permettent de relier le courant et la tension au bornes d'une jonction à la différence de phase et à la dérivée de la différence de phase respectivement de la fonction d'onde macroscopique dans les deux morceaux de supraconducteurs. Elles sont souvent caractérisées d'inductances non linéaire car le courant est une fonction périodique de la différence de phase (donc du flux). Elles sont caractérisées par leur courant critique, qui représente le courant maximum pouvant les traverser.

2 Situation du travail

Dans cette première partie je vais présenter de manière brève le système que j'étudie. Dans un premier temps je vais décrire schématiquement le circuit et les grandeurs utiles. Dans un second temps j'expliquerai le modèle et les hypothèses utilisés pour décrire les jonctions Josephson intervenants dans le circuit qui permettent de trouver les équations de la dynamique du système. Finalement je parlerai de son principe de fonctionnement ainsi que du phénomène de mesure continue faible.

2.1 Présentation du circuit

Le schéma de la partie principale du circuit que j'étudie peut-être vu Fig.(1a). Celui-ci est composé d'une grande boucle d'auto-inductance L (en noir sur le schéma) dans laquelle est inséré une plus petite boucle d'auto-inductance l (en rouge sur le schéma) comportant deux jonctions Josephson symbolisées par des croix. Au dessus de la petite boucle rouge un système permet de produire un champs magnétique qui crée un flux Φ_{e1} constant à l'intérieur de la petite boucle rouge. De la même manière un flux Φ_{e2} constant est créé dans la grande boucle noire par l'intermédiaire d'un second champ magnétique. On néglige totalement le flux du premier champs magnétique dans la grande boucle noire et le flux du second champs magnétique dans la petite boucle rouge. A noter que le schéma n'est pas à l'échelle, la boucle rouge est beaucoup plus petite que la boucle noire afin d'avoir $L \ll l$. A l'intérieur dans la grande boucle noire, le système produit son propre flux magnétique Φ . En dessous de cette boucle se trouve une ligne micro-ruban (Signal d'entrée), c'est par cette voie que les photons seront envoyés au système, celle-ci produira un champ magnétique supplémentaire non constant qui viendra perturber la dynamique du circuit et lui ajouter de l'énergie. Le flux propre Φ du circuit sera mesuré continuement par l'intermédiaire d'un autre circuit (non représenté sur le schéma) situé à coté qui sera couplé faiblement au système mais j'y reviendrai plus tard. Dans la suite on note $\Phi_0 = \frac{\hbar}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-15}$ Wb le quantum de flux magnétique.

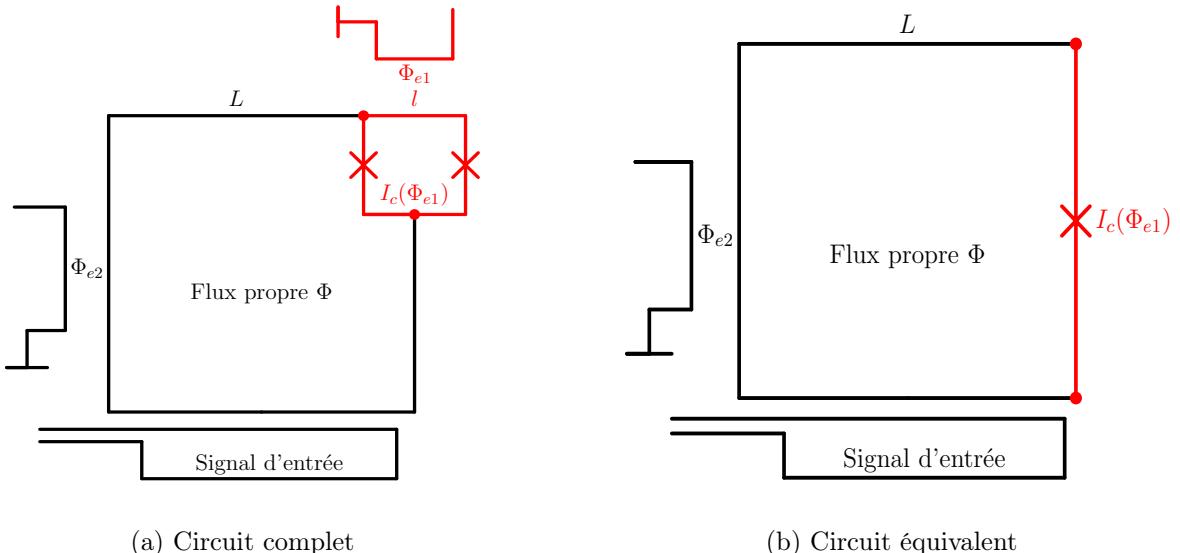


FIGURE 1: Représentations schématiques du circuit

Pour la petite boucle rouge dans le cas où les deux jonctions Josephson sont identiques (chacune de courant critique I_{cj}) et $\beta_l = \frac{2\pi I_{cj}l}{\Phi_0} \ll 1$, on peut montrer [3] que le courant critique pouvant traverser la boucle dépendant du flux Φ_{e1} et varie entre I_{cj} et $2I_{cj}$. Le circuit de la Fig(1a) peut alors être ramener au circuit de la Fig.(1b) où la boucle rouge est devenu l'équivalent d'une seule jonction Josephson au courant critique I_c réglable. L'équation décrivant la dynamique de ce circuit s'obtient en utilisant le modèle RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Jonction) pour les jonctions Josephson.

2.2 Modèle RCSJ

Afin de décrire les jonctions Josephson il faut tenir compte d'un courant de quasi-particule (brièvement des électrons de paires de Cooper qui se sont séparés) ainsi que d'un courant de déplacement, ces deux phénomènes peuvent-être approximés par une résistance et un condensateur en parallèle de la jonction Josephson [3]. Le schéma du circuit dans ce modèle est représenté Fig.(2). Ce modèle est celui couramment utilisé car il simplifie grandement les calculs en supposant une résistance linéaire (d'autres modèles non linéaires plus précis existent). A cela il faut normalement rajouter un bruit sur le courant, en effet avec la température le courant a tendance à osciller autours de sa valeur moyenne mais pour le moment nous négligeons cet effet.

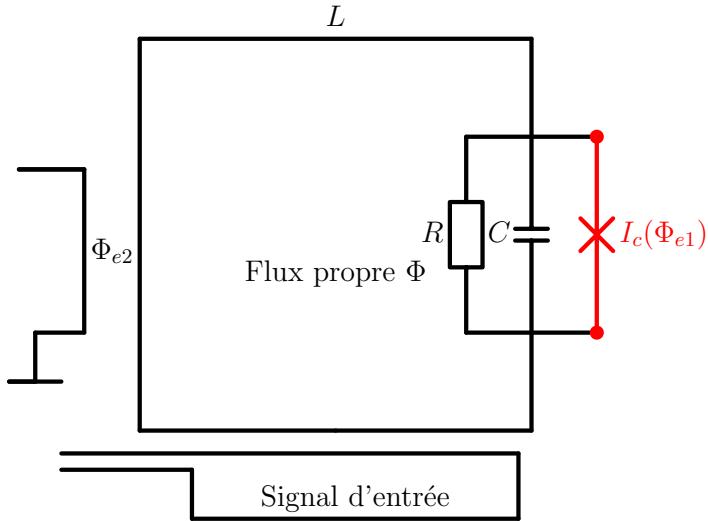


FIGURE 2: Schéma du modèle RCSJ du circuit

L'équation de la dynamique du système équ.(1) est une équation différentielle du second ordre sur le flux du système qui dépend du paramètre ajustable $\beta_L = \frac{2\pi L I_c(\Phi_{e1})}{\Phi_0}$. Il est important ici de souligner l'analogie électro-mécanique qui existe entre les grandeurs électriques et mécaniques. En effet le flux propre Φ est l'équivalent de la position x , la charge Q du condensateur l'équivalent de la quantité de mouvement p et la capacité C l'équivalent de la masse m [4].

$$C \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d}{d\Phi} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{L} \left[2\pi^2 \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - \frac{\Phi_{e2}}{\Phi_0} \right)^2 - \beta_L \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right] = 0 \quad (1)$$

Dans le cas où l'on néglige la terme de frottement du à la résistance, l'Hamiltonien du système s'exprime comme la somme d'un oscillateur harmonique (OH) décalé en Φ_{e2} et d'un terme périodique du flux équ.(2) avec $C\dot{\Phi} = Q$.

$$\mathcal{H}(Q, \Phi) = \underbrace{\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2L} (\Phi - \Phi_{e2})^2}_{\mathcal{H}_{OH}} - \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{\beta_L}{L} \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (2)$$

2.3 Principe de fonctionnement

Ce circuit va fonctionner à une température d'approximativement 30 mK, à cette température la dynamique du système est quantique et il faut utiliser l'équation de Schrödinger stationnaire équ.(3) associé à l'Hamiltonien indépendant du temps du système équ.(2) afin de connaître ses énergies propres E_i et les fonctions d'ondes $\Psi_i(x)$ associés.

$$\hat{\mathcal{H}} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (3)$$

On pose $x = \frac{\Phi}{\Phi_0}$ et on normalise l'énergie du système en Kelvin en divisant chaque terme énergétique par $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ la constante de Boltzmann, les valeurs de capacité et d'inductance utilisées sont celles données dans l'article [9] à savoir $C = 76 \cdot 10^{-15} \text{ F}$ et $L = 2 \cdot 10^{-10} \text{ H}$. Pour plus de lisibilité on pose $M = \frac{C k_B \Phi_0^2}{\hbar^2}$, $V(x, x_{e2}, \beta_L) = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{Lk_B} \left[2\pi^2 (x - x_{e2})^2 - \beta_L \cos(2\pi x)\right]$ et $\epsilon = \frac{E}{k_B}$. En prenant le produit avec le vecteur $|x\rangle$, l'équation (3) s'écrit alors comme équ.(4).

$$-\frac{1}{2M} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + [V(x, x_{e2}, \beta_L) - \epsilon] \Psi(x) = 0 \quad (4)$$

On résout cette équation avec le module PySlise de Python [1] sur intervalle $[0, 1]$ en prenant comme conditions limites $\Psi(0) = 0$ et $\Psi(1) = 0$ ainsi que $\beta_L = 1.325$ et $x_{e2} = 0.5135$ les valeurs utilisées dans [9]. On peut voir Fig.(3) les huit premiers niveaux d'énergie du système ainsi que les densités de probabilités (non normées) associés aux énergies ϵ_6 (en orange) et ϵ_7 (en rouge). Les densités de probabilités n'ont bien sûr pas d'unité elles ont été représenté sur les niveaux d'énergie afin de permettre une meilleure lecture. Les densités de probabilités des niveaux inférieurs à 6 n'ont pas été représenté pour ne pas surcharger la figure mais elles sont très semblables à celle d'un oscillateur harmonique.

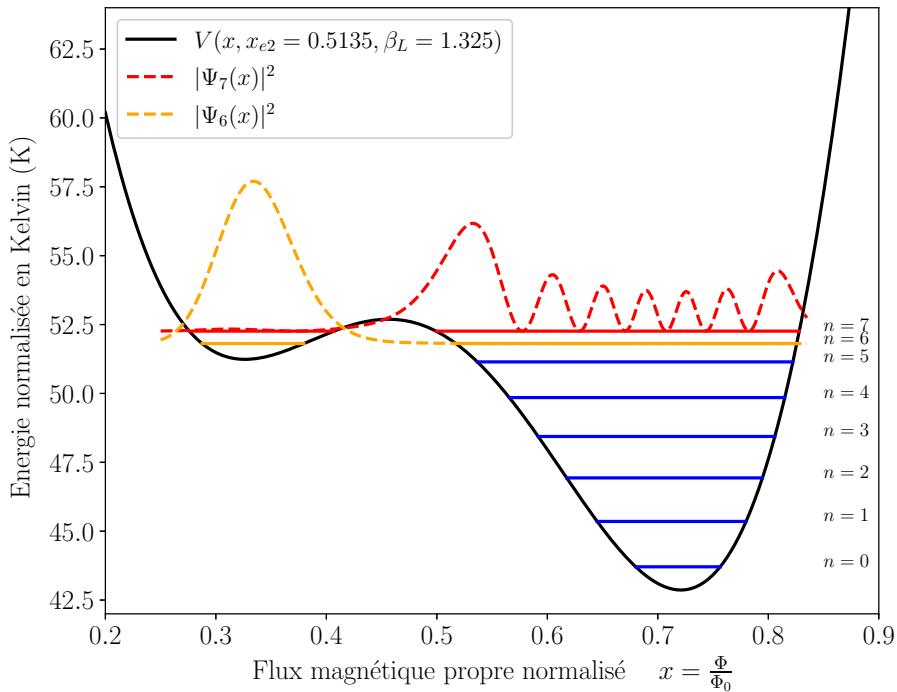


FIGURE 3: Energies et fonctions propres du système

Tout le principe du système repose sur le fait que si le système est dans l'état $|6\rangle$ associé à ϵ_6 et reçoit un photon d'énergie $\hbar\omega = k_B(\epsilon_7 - \epsilon_6)$ lui augmentant sa probabilité d'être en $|7\rangle$, alors la moyenne des mesures du flux augmentera et l'on pourra détecter cette absorption d'énergie. Les amplitudes

de probabilités associés aux niveaux inférieurs à 6 donnent des moyennes de mesures du flux autours de $0.7\Phi_0$. A noter que malgré que le flux du circuit puissent prendre des valeurs continues celui est bien quantifié, les deux jonctions Josephson de la Fig.(1a) ont toutes deux des valeurs de différence de phases qui une fois converti en terme de flux et sommé à Φ donnent une valeur entière de Φ_0 .

2.4 Mesure continue du système

Comme dit précédemment la mesure du flux du système se fait par un faible couplage magnétique et entre le système et un autre circuit situé à coté fonctionnant comme un gradiomètre pour le champ magnétique. Très brièvement la mesure est fait en regardant la variation de la fréquence de résonance d'un circuit RLC qui est modifié par le champs créée par le gradiomètre lui même couplé au système quantique. On sait qu'en mécanique quantique la mesure d'un système dans un état le projette dans le vecteur propre associé à cet état, ceci est appelé une mesure de von Neumann. Ici la mesure est faite de manière continu durant le temps d'utilisation du circuit.

3 Travail de recherche : Simulation numérique du circuit

Le but de mon travail est de commencer une simulation du fonctionnement de ce système quand il sera testé en laboratoire, c'est à dire que le signal énergétique envoyé au circuit sera choisi extérieurement et ne correspondra pas à un photon naturel. Une simulation entièrement réaliste du circuit serait impossible car il y a trop de paramètres. Dans ma simulation je me suis d'abord attaché à décrire la dynamique du système après la réception d'un ou plusieurs photons sans prendre en compte le terme dissipatif de équ.(1). Ensuite j'ai essayé de modéliser les résultats de mesures qui pourrait-être obtenu par le système en prenant en compte le phénomène de mesure continu. Finalement pour aller plus loin j'ai essayé j'ai essayer d'ajouter le phénomène de dissipation en passant à des équations matricielles. D'autres paramètres devront être ajouter afin de rendre la simulation plus réaliste, en particulier le courant parasite dans le circuit du à la température non nulle du système ainsi que le bain thermique dans lequel il est plongé. En effet le circuit, très sensible aux champs magnétiques externes est isolé dans un environnement à sa température (~ 30 mK) qui peut émettre des photons tel un corps noir. Des idées pour les intégrer à la simulation seront proposés en ouverture. Afin d'illustrer mon travail mon rapport contient deux animations Fig.(9) et Fig.(12), normalement les lecteurs de pdf classiques Adobe Reader et Foxit Reader lisent les animations sans soucis (sous Window 10 en tout cas). Si jamais ce n'est pas le cas elles sont présentes dans le dossier github à l'adresse https://github.com/ChristianVerollet/Stage_L3_ENS ainsi que le code python utilisé pour effectuer les différentes simulations, des liens sont mit sous les figures en question.

3.1 Signal d'entrée

Je sais que l'énergie apporté au système va l'être par l'intermédiaire du flux produit par la ligne signal d'entré que l'on peut observer Fig.(2). En m'inspirant de l'ajout du flux Φ_{e2} dans l'équ.(2), j'ai ajouté un flux $\Phi_E(t)$ à l'équation (2) de sorte que l'Hamiltonien du système prenne la forme 5.

$$\mathcal{H}(\mathcal{Q}, \Phi) = \frac{\mathcal{Q}^2}{2C} + \frac{1}{2L}(\Phi - \Phi_{e2} + \Phi_E(t))^2 - \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{\beta_L}{L} \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (5)$$

Pour résoudre la dynamique du système je me suis appuyer sur le système stationnaire que nous j'ai déjà résolu précédemment. En développant le terme quadratique, l'Hamiltonien prends la forme (6), ou on retrouve l'Hamiltonien du système stationnaire \mathcal{H}_0 , un terme linéaire en Φ qui va perturber le système et un dernier terme qui sera diagonale une fois l'Hamiltonien quantifié et qui après plusieurs simulations ne semblent pas modifier la dynamique du système (je retrouve le même avis dans [8]).

$$\mathcal{H}(\mathcal{Q}, \Phi) = \underbrace{\frac{\mathcal{Q}^2}{2C} + \frac{1}{2L}(\Phi - \Phi_{e2})^2}_{\mathcal{H}_0} - \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{\beta_L}{L} \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + \underbrace{\frac{1}{L}\Phi_E(t)\Phi}_{\text{perturbation}} + \underbrace{\frac{1}{2L}[\Phi_E^2(t) - 2\Phi_E(t)]}_{\text{terme superflu}} \quad (6)$$

Le terme $\Phi_E(t)$ va s'écrire $\alpha \frac{V(t)}{\omega_0}$ où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2,56 \cdot 10^{11} \text{ rad/s}$ est la pulsation correspondant à la partie oscillateur harmonique de (1), et $V(t)$ correspond à un signal en Volt (7) qui sera contrôler extérieurement grâce à la ligne micro-onde. α représente le couplage entre la ligne micro-onde et le circuit, ce coefficient est supposé ajustable en modifiant la distance entre la ligne et le circuit tant que cela ne dépasse des valeurs raisonnables de l'ordre de quelques pourcents. Le signal $V(t)$ corresponds à une tension produite par une jonction Josephson, on a $R_s = 10 \Omega$, $I_v = 1 \times 10^{-4} \text{ A}$, $\omega_c = \frac{2\pi R_s I_v}{\Phi_0} = 3,03 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$ la pulsation caractéristique du signal et $i > 1$ le paramètre ajustable du signal.

$$V(t) = R_s I_v \frac{i^2 - 1}{i + \cos(\sqrt{i^2 - 1} \omega_c t)} \quad (7)$$

Dans la suite je travaille en temps normalisé T telle que $t = \frac{T}{\omega_0}$ ce qui donne $t = 3,89 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ pour $T = 1$. Une visualisation de $V(T)$ pour différentes valeurs de i peut-être vu Fig.(??), une propriété remarquable de $V(t)$ est que l'aire sous chacun des "piques" vaut toujours Φ_0 quel que soit i . Dans la simulation numérique une distribution porte centrée en T_0 et de largeur ΔT (tout deux modifiables) sera ajouter pour modéliser le début et la fin du pulse envoyé.

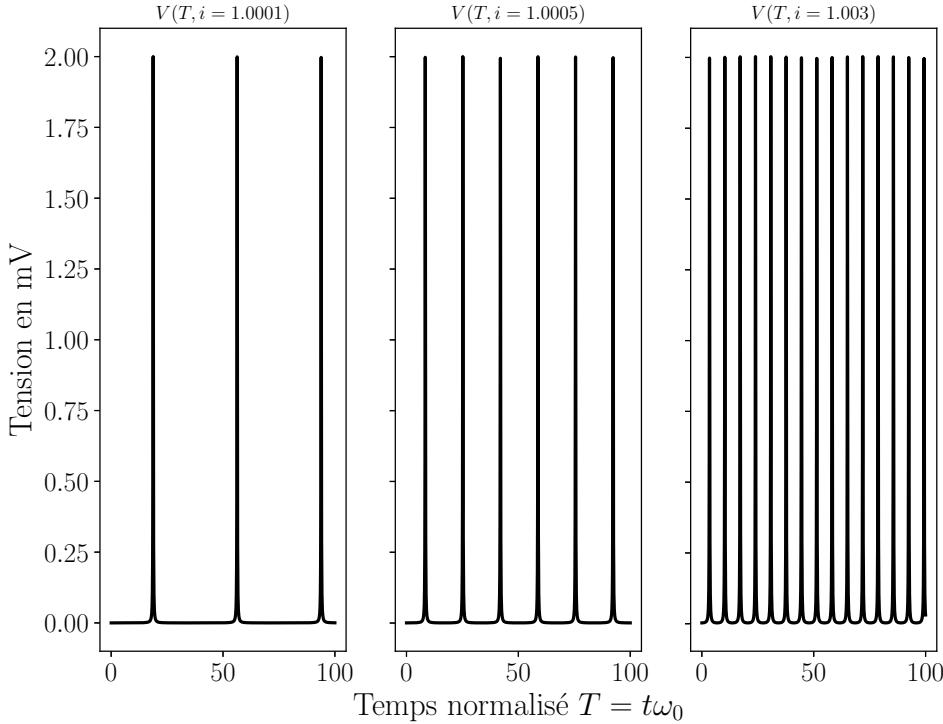


FIGURE 4: $V(T)$ pour différentes valeurs du paramètre ajustable i

3.2 Oscillations de Rabi

Pour trouver la dynamique il faut d'abord quantifier l'Hamiltonien (6), comme dit précédemment j'ai choisi de travailler dans la base des valeurs propres de $\hat{\mathcal{H}}_0$. De plus l'Hamiltonien (2) étant celui d'un oscillateur harmonique décalé pour $\beta_L = 0$ on définit de la même façon les opérateurs créations et anhilations de sorte qu'on ait $\hat{\Phi} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0 L}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ avec $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Js. L'Hamiltonien (6) prends alors la forme (8) où $P(T)/\omega_0$ est l'énergie transmise au système chaque instant.

$$\hat{\mathcal{H}} = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} E_j |j\rangle \langle j|}_{\hat{\mathcal{H}}_0} + \underbrace{\alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2L}} \frac{V(T)}{\omega_0} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)}_{P(T)/\omega_0} \quad (8)$$

L'énergie totale reçue par le système durant la durée du signal s'exprime alors comme (9). Il est important de pouvoir connaître l'énergie du système afin de comparer à l'énergie d'un photon correspondant à la différence d'énergie des deux niveaux $|6\rangle$ et $|7\rangle$ qui nous intéressent.

$$E_{tot} = \int P(t) dt = \int_{T_0 - \frac{\Delta T}{2}}^{T_0 + \frac{\Delta T}{2}} \frac{P(T)}{\omega_0} dT = \sum_{\text{"piques"}} \alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2L}} \Phi_0 \quad (9)$$

On va alors résoudre numériquement l'équation de Schrödinger (10) dépendante du temps en ne considérant que les dix premiers niveaux d'énergies, ce qui fait que les opérateurs et l'état du système prennent la forme (11) où on note les $a_j(t)$ le coefficient complexe du j -ème vecteur de base. Comme condition initiale on suppose pour le moment que $|\Psi(T=0)\rangle = |6\rangle$.

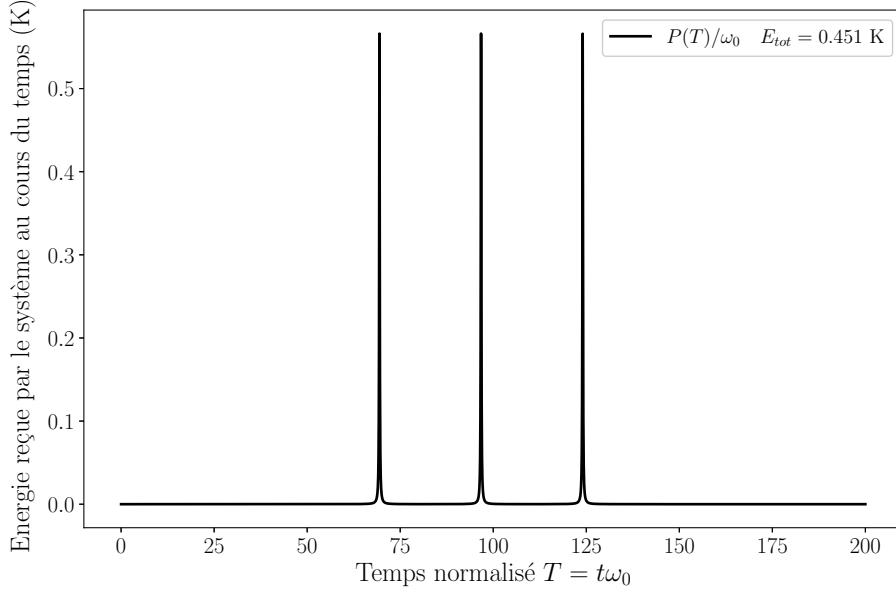
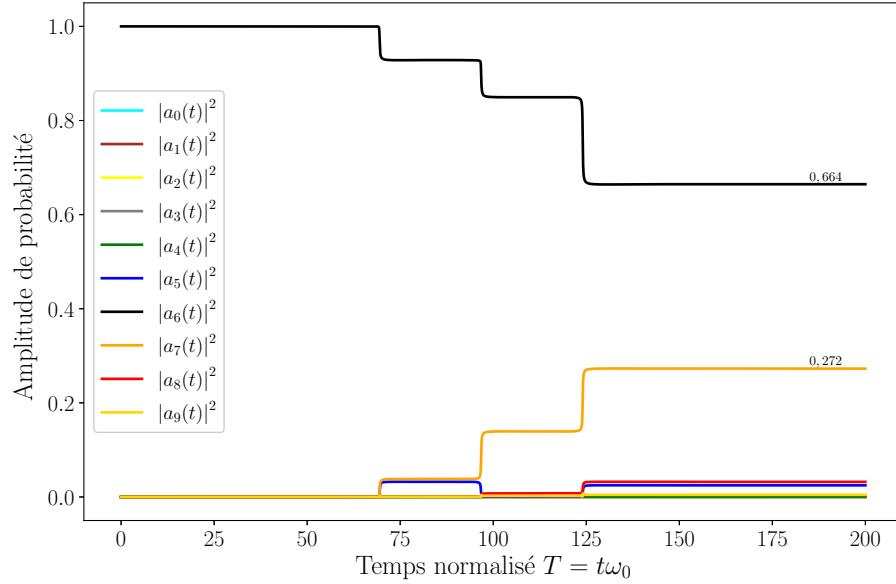
$$\hat{\mathcal{H}} |\Psi(T)\rangle = i\hbar\omega_0 \frac{d}{dT} |\Psi(T)\rangle \quad (10)$$

$$|\Psi(T)\rangle = \sum_{j=0}^9 a_j(T) |j\rangle \quad \text{et} \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \sqrt{2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \sqrt{10} \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

L'idée du circuit est de mesurer l'énergie d'un photon d'énergie $\epsilon_7 - \epsilon_6 \simeq 0,4508$ K et de pulsation $\omega_{6 \rightarrow 7} = \frac{k_B}{\hbar} (\epsilon_7 - \epsilon_6) \simeq 5,9 \cdot 10^{10}$ rad/s. Au repos on a que $a_j = \exp(-i\frac{k_B\epsilon_j}{\hbar\omega_0} T)$, afin d'exciter correctement le système, i va être choisi de sorte qu'on ait $\sqrt{i^2 - 1}\omega_c = \omega_{6 \rightarrow 7}$. Cependant pour la même énergie $E_{tot} = k_B (\epsilon_7 - \epsilon_6)$, en s'imaginant qu'on peut faire varier légèrement α , on peut soit envoyer un signal long avec un α faible soit envoyer un signal court avec un α plus important. Par exemple Fig.(5) on envoie un signal correspondant à l'énergie $\frac{\hbar\omega_{6 \rightarrow 7}}{k_B}$ (on ne travaille dans la suite qu'avec des valeurs d'énergie normalisé en Kelvin) avec $\alpha = 0,385\%$ (cette valeur permet d'avoir l'énergie attendu en trois "piques"), on peut voir Fig.(5a) le signal envoyé et Fig.(5b) la dynamique du système. La dynamique est celle attendu, le système commence dans la condition initiale qu'on lui a donné et au fur et à mesure des "piques" il a un peu plus de chance d'être dans l'état $|7\rangle$.

Maintenant on va lui envoyer la même quantité d'énergie mais plus étalé temporellement, on va simplement diviser par deux α et multiplier par deux la durée du signal afin d'avoir six "piques". On peut voir les résultats Fig.(6), sur Fig.(6a) on voit le signal envoyé qui est corresponds à un photon et sur Fig.(6b) la dynamique du système.

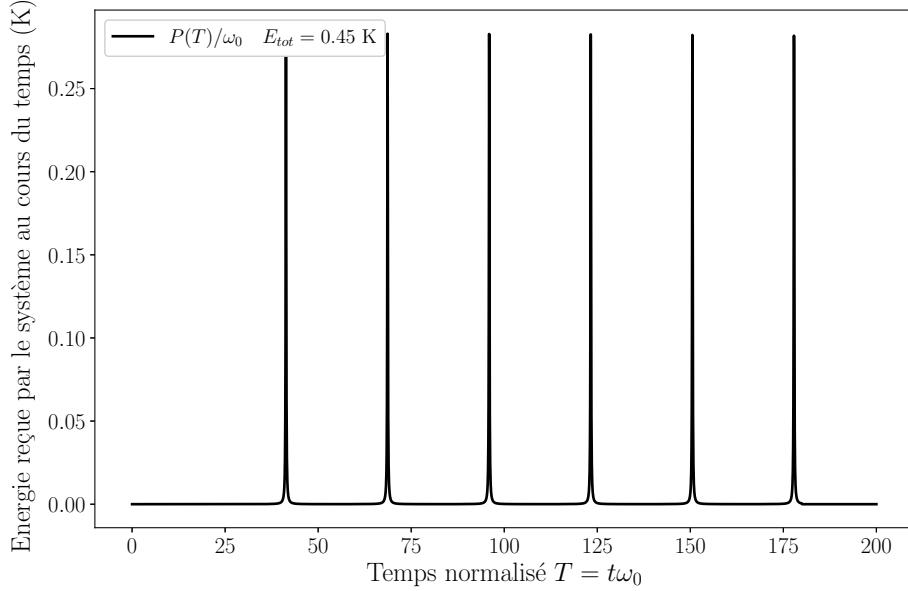
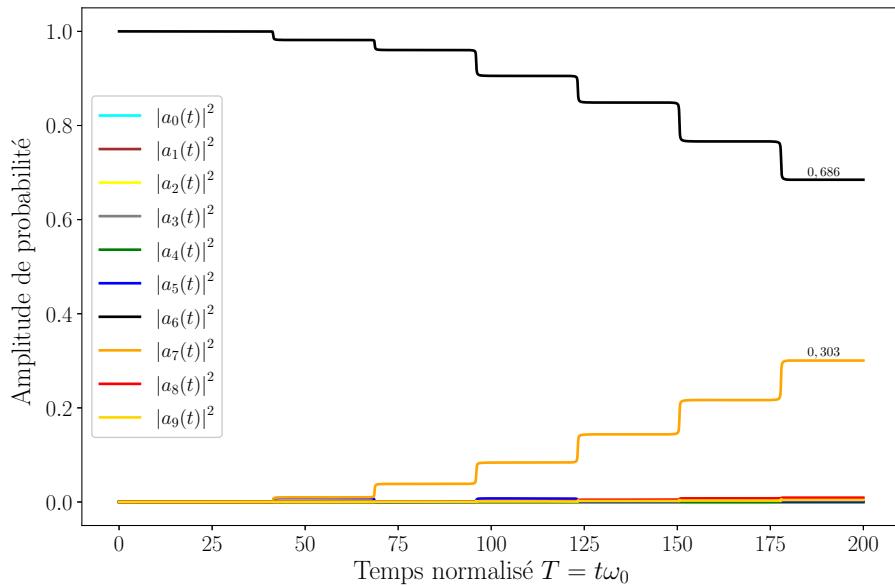
Il est intéressant d'observer que malgré que l'énergie apporté soit la même, l'augmentation de $|a_7(t)|^2$ semble meilleur si le signal envoyé contient un grand nombre de "piques" d'amplitude faible plutôt qu'un faible nombre de "piques" avec une forte amplitude (0,272 contre 0,303). Après plusieurs simulations, j'ai en conclu que les rôles de l'amplitude et de l'étalement temporel étaient les suivants : pour

(a) Signal envoyé avec $\alpha = 0,385\%$ 

(b) Dynamique du système correspond au signal envoyé

FIGURE 5: Signal envoyé et dynamique associé correspondant à l'énergie $\frac{\hbar\omega_{6 \rightarrow 7}}{k_B}$ avec $\alpha = 0,385\%$

une pulsation donnée $\omega_{a \rightarrow b}$ qui permet de passer d'un niveau $|a\rangle$ à $|b\rangle$, considérons un signal de même énergie, plus celui-ci est étalé temporellement plus il sera précis mais moins il sera efficace c'est à dire qu'il excitera seulement le niveau qui nous intéresse mais avec une faible ratio probabilité/énergie. Au contraire si le signal est très court avec de très forte amplitude alors il sera peu précis et commencera à exciter des niveaux supérieurs. C'est ce que l'on retrouve sur les Fig.(5b) et Fig.(6b), la différence 0,31 entre les deux $|a_7(t)|^2$ est du au fait que les niveaux $|5\rangle$ et $|6\rangle$ ont été légèrement excité. Il faut trouver donc un bon équilibre entre les deux, cependant avoir un α élevé permet de faire monter plus rapidement le système dans l'état qui nous intéresse or si le système dissipe il sera important d'exciter le système plus rapidement que celui-ci ne perd son énergie. Dans tous les cas quand des signaux de

(a) Signal envoyé avec $\alpha = 0,1925\%$ 

(b) Dynamique du système correspond au signal envoyé

FIGURE 6: Signal envoyé et dynamique associé correspondant à l'énergie $\frac{\hbar\omega_{6 \rightarrow 7}}{k_B} \simeq 0,45\text{K}$ avec $\alpha = 0,1925\%$

"vrais" photons seront reçus par le système on ne choisira pas l'étalement de leur paquet d'onde, et α sera fixé à la fabrication du circuit mais pourra quand même être choisi au départ ; je pense alors que le mieux sera de le choisir le plus grand possible car ici pour simplifier la simulation on a supposé que l'on recevait un flux qui apportait directement l'énergie que l'on souhaitait mais dans la réalité le photon circulera dans la ligne micro-onde et qu'une petite partie de son énergie sera transmise au circuit.

On va maintenant considérer un $\alpha = 0,1\%$ et regarder ce qu'il se passe si l'on envoie un long signal Fig.(7) avec une énergie totale correspondant à un grand nombre de photons $\simeq 12$. On voit sur

la Fig.(8) qu'une fois atteint une certaine probabilité très proche de 1, $|a_7(T)|^2$ redescend au fur et à mesure qu'on renvoie de l'énergie, ce sont des oscillations de Rabi. Elle sont semblables à celles qu'on pourrait créer en couplant capacitivement un qubit [7]

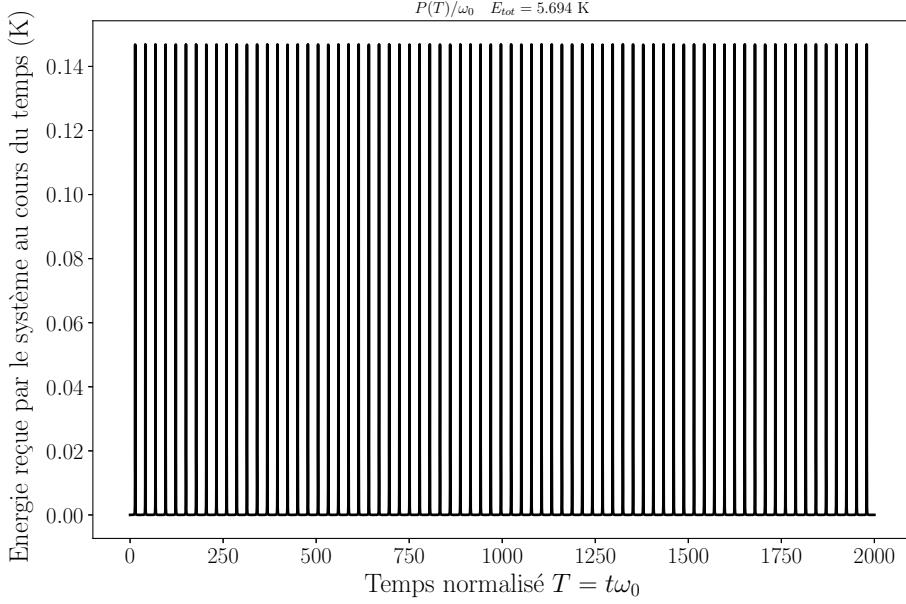


FIGURE 7: Signal envoyé d'énergie $5,69\text{K} \simeq 12,6 \times \frac{\hbar\omega_{6\rightarrow7}}{k_B}$ avec $\alpha = 0,1\%$

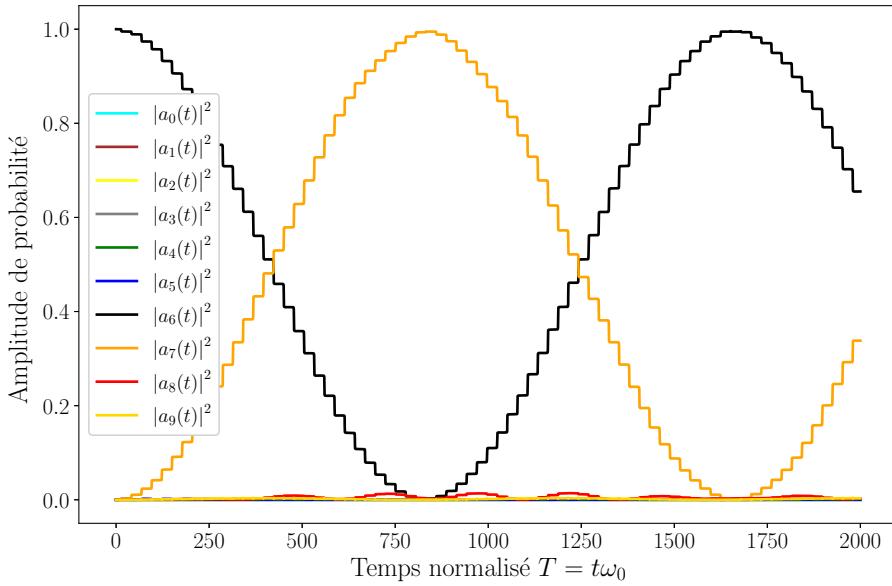


FIGURE 8: Dynamique du système correspondant à Fig.(7)

On a pu voir au travers des différents graphiques que si l'on envoie un signal à la bonne pulsation $\omega_{6\rightarrow7}$ et avec une amplitude pas trop élevé alors les seuls niveaux vraiment excité sont le $|6\rangle$ et le $|7\rangle$. On peut donc tronquer le système à un qubit en ne considérant que ces deux niveaux et représenter leur évolution sur la sphère de Bloch Fig.(9), ce qui permet de voir la partie complexe des coefficients qui était totalement invisible sur les précédents graphes. Sur la sphère de Bloch le qubit tourne naturellement.

ment autours de l'axe z à la pulsation $\omega_{6 \rightarrow 7}$ et chaque "piques" qu'il reçoit le fait descendre d'un cran vers le bas. L'animation est courte pour éviter qu'elle soit trop lourde mais si on fait la même chose avec la dynamique de la Fig.(8) alors une fois arrivé en bas le qubit commencera à remonter et ainsi de suite.

FIGURE 9: Oscillation de Rabi du qubit correspondant au signal Fig.(5a) https://github.com/ChristianVerollet/Stage_L3_ENS/blob/main/6_7_Bloch.gif

3.3 Mesures du circuit

La dynamique quantique du système dans un cas parfait (sans interaction avec environnement) on peut essayer de prédire l'allure des mesure qui seront faites sur le système. Dans un premier temps on va tracer la moyenne de l'observable au cours du temps sans se soucier de l'impact de la mesure, puis dans un second temps on rajoutera le phénomène de mesure continue.

3.3.1 Moyenne de l'observable flux

Maintenant que l'on connaît la dynamique du système, on peut exprimer la fonction d'onde totale du système (12) ainsi que sa norme carré qui représente la probabilité de mesure du flux (13). La probabilité de mesure du flux fait intervenir des interférences entre les différentes fonctions propres du système.

$$\Psi(x, T) = \langle x | \Psi(T) \rangle = \sum_{j=0}^9 a_j(T) \underbrace{\langle x | j \rangle}_{\Psi_j(x)} \quad (12)$$

$$|\Psi(x, T)|^2 = \langle x | \Psi(T) \rangle \langle \Psi(T) | x \rangle = \sum_{j,k=0}^9 a_j a_k^* \Psi_j(x) \Psi_k(x)^* \quad (13)$$

Pour la simulation de l'évolution de la fonction d'onde du signal on va travailler avec le signal Fig.(10) et la dynamique visible Fig.(11), la valeur de α choisi permet de faire monter assez rapidement le système en $|7\rangle$ sans trop exciter $|8\rangle$. On peut donc dans les équations 12 et 13 sommer j seulement de 6 à 8 tout en gardant une très bonne précision.

L'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde et de sa norme carré peut-être vu sur les animation Fig.(12). Pour que celle-ci ne soit pas trop lourde l'échantillonnage temporel a été grandement réduit pour diminuer le nombre de trames totale, cependant la dynamique n'en est pas affecté.

Maintenant que la dynamique du système est connu on peut prédire l'évolution de la moyenne de l'observable $\hat{x} = \frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0}$ (en supposant que l'on peut l'observer sans lui faire perdre sa cohérence). On

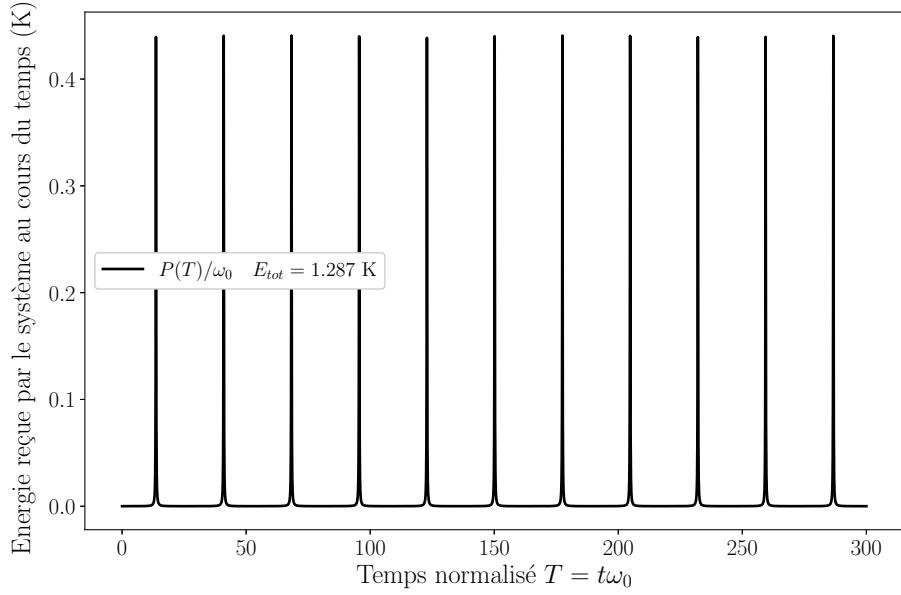
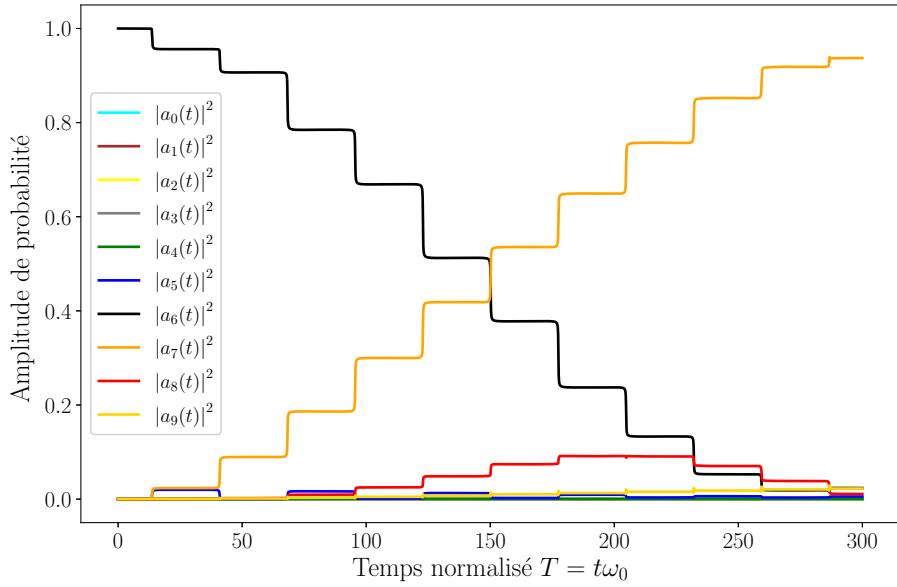
FIGURE 10: Signal envoyé avec $\alpha = 0,3\%$ 

FIGURE 11: Dynamique associée à Fig.(10)

calcule celle-ci avec la formule classique équation.(14) utilisant la densité de probabilité qu'on a calculé précédemment. Les résultats sont visible Fig.(13), la courbe orange est un fit linéaire et la courbe bleu un fit utilisant la méthode des moindres carrés avec la forme $at + b + c \sin(2\pi d + e)$.

$$\langle x \rangle(T) = \langle \Psi(T) | \hat{x} | \Psi(T) \rangle = \int_0^1 x |\Psi(x, T)|^2 dx \quad (14)$$

FIGURE 12: Évolution spatio-temporelle de la fonction d’onde du système et de sa norme carré par rapport au signal envoyé Fig.(10) https://github.com/ChristianVerollet/Stage_L3_ENS/blob/main/fct_onde.gif

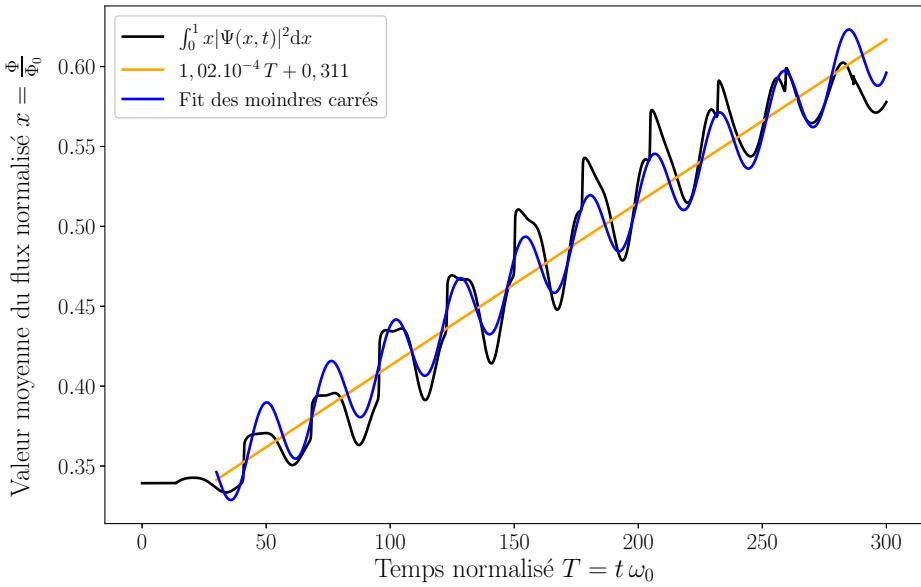


FIGURE 13: Moyenne de l’observable \hat{x} au cours du temps

3.3.2 Mesure continue

En réalité le système est continuellement soumis à une mesure faible qui permet d’extraire de l’information de façon continue. Ce phénomène nécessite un traitement particulier, en m’appuyant sur les calculs fait dans [6] j’ai essayé de modéliser l’impact de la mesure continue sur la dynamique du

système et l'allure des mesures qui pourraient-être faites. Pour modéliser la mesure continue on suppose qu'on divise le temps de mesure en une série d'intervalle Δt , dans chaque intervalle une mesure est fait qui est décrit par les opérateurs équ.(15) (on cherche ici à mesurer l'opérateur \hat{x}) où β est un index continu de telle sorte qu'il y ait une continuité de mesure toutes référencé par β . k est un paramètre dépendant de l'appareil de mesure, il est dit que si k est grand alors la mesure est forte et si il est petit alors la mesure est faible.

$$\hat{A}(\beta) = \left(\frac{4k\Delta t}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k\Delta t(x-\beta)^2} |x\rangle \langle x| dx \quad (15)$$

Il est montré dans l'article que β se comporte comme une quantité stochastique équ.(16), ΔW est une variable aléatoire issu d'une Gaussienne de moyenne nulle et de variance Δt , la lettre W fait référence au processus de Wiener. Ce phénomène est très proche de celui que l'on retrouve dans le mouvement Brownien.

$$\beta = \langle \hat{x} \rangle + \frac{\Delta W}{\sqrt{8k\Delta t}} \quad (16)$$

Le phénomène de mesure continu correspond à la limite $\Delta t \rightarrow 0$ il est alors montré que l'évolution du système prends la forme d'une équation de Schrödinger stochastique équ.(17) que l'on normalise par rapport au temps T équ.(18). D'un point de vue mathématique le formalisme est utilisé est celui de l'analyse d'Itô que je ne maîtrise pas, la relation cependant très utile est le fait que $(dW)^2 = dt = \frac{dT}{\omega_0}$. Afin d'être rigoureux je note avec un tilde la nouveau terme stochastique qui avec la normalisation du temps n'est pas la même que précédemment mais cela ne change rien pour les calculs numériques car la distribution sera fixé sur le pas dT .

$$d|\Psi(t)\rangle = \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} dt - k(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 dt + \sqrt{2k}(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) d\tilde{W} \right\} |\Psi(t)\rangle \quad (17)$$

$$d|\Psi(T)\rangle = \left\{ -\frac{i}{\hbar\omega_0} \hat{\mathcal{H}} dT - \frac{k}{\omega_0}(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 dT + \sqrt{\frac{2k}{\omega_0}}(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) d\tilde{W} \right\} |\Psi(T)\rangle \quad (18)$$

Pendant ce temps l'observateur obtient l'information équ.(19) à chaque instant.

$$dy = \langle \hat{x} \rangle dt + \frac{dW}{\sqrt{8k}} \Leftrightarrow dy = \frac{\langle \hat{x} \rangle}{\omega_0} dT + \frac{dW}{\sqrt{8k\omega_0}} \quad (19)$$

J'ai essayé de simuler ces deux équation avec comme $dT = 0.5$, je ne sais pas comment rattacher la valeur de k aux grandeurs du système de mesure utilisé, je teste donc le paramètre et je regarde son influence. Sans même afficher les courbes, on devine le rôle de k , si celui est grand alors le terme de bruit sera important dans équ.(18) et la dynamique du système sera très aléatoire. Au contraire si k est faible alors la dynamique du système est peu affecté par le bruit qui vient de la mesure, mais l'information obtenu est très bruité. Pour les calculs et particulièrement pour le terme $\langle \hat{x} \rangle$ j'ai approximé le système comme un qubit car le package que j'utilise (Pytorchsde) ne traite pas les grandeurs complexes, il faut donc tout découpler et les temps de calculs commencent à être assez long. Pour la dynamique du système, j'ai fait une simulation avec un $k = 1.10^{11} \text{ s}^{-1}$ Fig.(14), ce qui me parait très grand mais au vu des autres grandeurs du système, en particulier ω_0 reste raisonnable. La dynamique est toujours basé sur le signal Fig.(10), j'ai choisi après résolution de l'équation de normaliser les coefficients, c'est pour cela que les deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe $x = 0, 5$. Il n'est pas utile de tracer la moyenne de $\langle \hat{x} \rangle$ car celle-ci sera tout aussi bruité.

Dans le cas ou k est très faible l'équation (18) redonne la même dynamique que Fig.(11) mais les résultats de mesures sont censé eux être différents. Cependant lorsque j'ai résolu l'équation (19) mes résultats prenaient des allure exponentielles. Je n'arrive pas très bien à comprendre cette dernière équation car dy n'est pas homogène à $\langle \hat{x} \rangle$, j'ai donc essayé de remplacer le terme $\langle \hat{x} \rangle$ par $\frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt}$ en utilisant l'approximation des moindres carrés Fig.(13). J'obtiens cette fois-ci des résultats plutôt cohérents voir Fig.(15) où trois échantillons de mesure différents sont tracés.

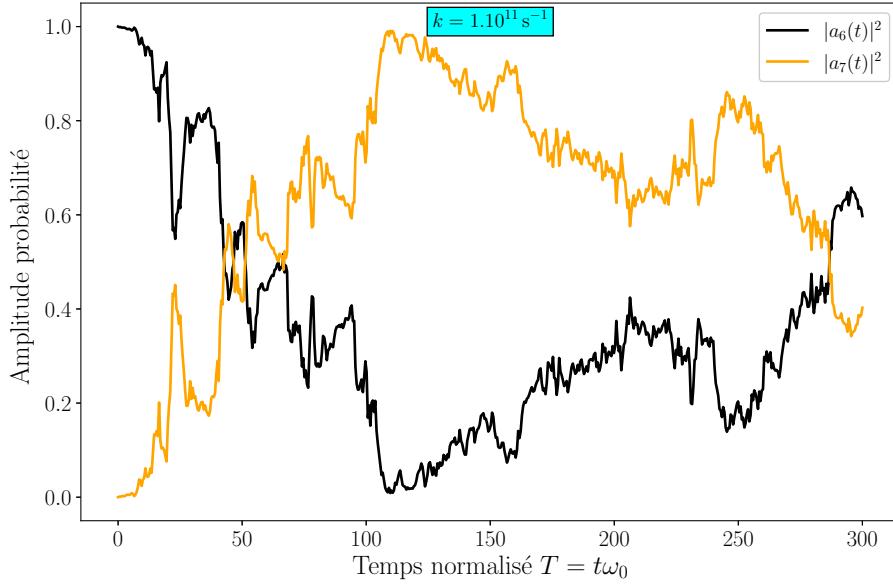
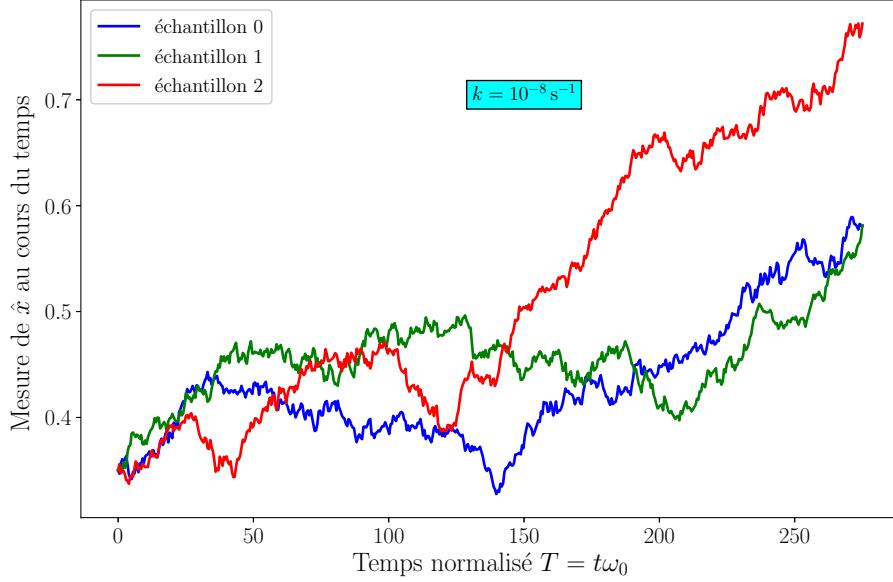


FIGURE 14: Dynamique du système perturbé par Fig.(10) et avec une mesure forte

FIGURE 15: Mesure faible de l'observable $\langle \hat{x} \rangle$

3.4 Ajout du frottement

Pour rendre la simulation plus réelle nous allons prendre en compte le terme dissipatif dans l'équation (1) du à l'ajout de la résistance en parallèle dans le modèle RCSJ. (Dans cette partie nous négligeons l'effet de la mesure sur le système). Pour cela j'ai trouvé deux solutions, la première consiste à résoudre un Hamiltonien non conservatif équ.(20) où $\gamma = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{Z}{R}$ avec $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 51 \Omega$ mais celui-ci étant non séparable il faudrait résoudre une EDP à deux variables, ce qui est numériquement très compliqué au vu de notre potentiel, même si des solutions existent dans des cas simples comme pour l'oscillateur harmonique [2]. La seconde solution est d'utiliser l'équation de Lindbald [5] équ.(21)

qui est une généralisation de l'équation de Schrödinger aux systèmes ouverts, celle-ci porte sur la matrice densité même si dans mon cas je vais continuer à ne considérer que des états purs. Dans cette équation $\hat{\mathcal{H}}(\mathcal{Q}, \Phi, T)$ est l'Hamiltonien (6) sans le terme diagonal superflu, $[., .]$ dénote le commutateur et $\{., .\}$ l'anti commutateur et $\hat{\rho} = |\Psi(T)\rangle \langle \Psi(T)| = a_i(T)a_i^*(T)|i\rangle\langle j|$

$$\mathcal{H}_{\text{dissi}}(\mathcal{Q}, \Phi, T) = e^{-\gamma T} \frac{\mathcal{Q}^2}{2C} + e^{\gamma T} \left[\frac{1}{2L} (\Phi - \Phi_{e2} + \Phi_E(T))^2 - \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{\beta_L}{L} \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right] \quad (20)$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dT} = -\frac{i}{\hbar\omega_0} [\hat{\mathcal{H}}(\mathcal{Q}, \Phi, T), \hat{\rho}] + \underbrace{\gamma \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho} \} \right)}_{\text{dissipation}} \quad (21)$$

Les résultats de la simulation numérique pour $R = 5.10^3 \Omega$ peuvent-être vu Fig.(16), dans cette simulation pour bien voir le phénomène de cascade des différents niveaux d'énergies on enlève la partie perturbative de $\hat{\mathcal{H}}(\mathcal{Q}, \Phi, T)$, ce qui fait que $\hat{\mathcal{H}}(\mathcal{Q}, \Phi, T) = \hat{\mathcal{H}}_0$. On suppose toujours la même condition initiale à savoir $\hat{\rho}(T=0) = |6\rangle\langle 6|$

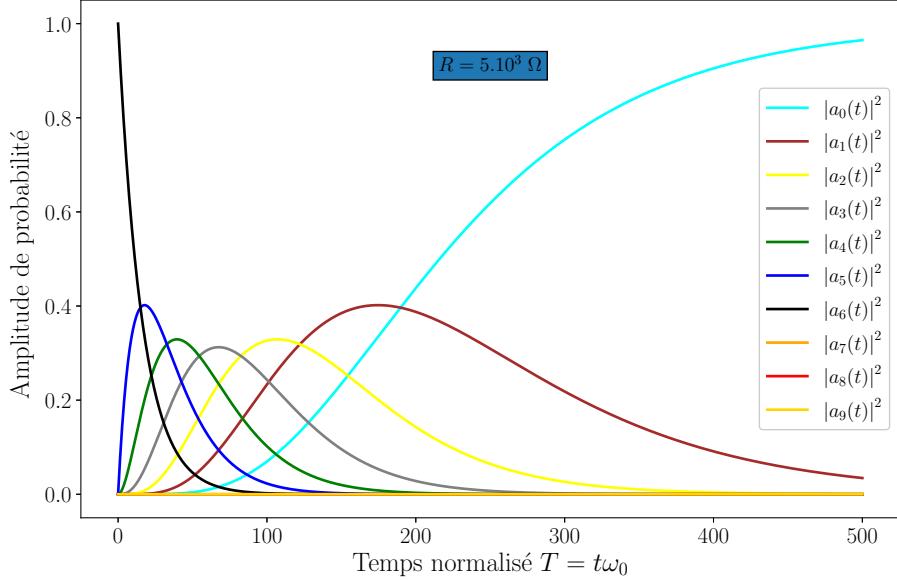


FIGURE 16: Dissipation du système non perturbé

On voit qu'avec $R = 5.10^3 \Omega$, la dissipation est très rapide si on l'on compare avec l'étalement temporel du signal Fig.(10) par exemple. Le signal est fait pour faire passer le système de $|6\rangle$ à $|7\rangle$ et le système ne sera déjà quasiment plus en $|6\rangle$ après le premier "pique" du signal. Il faut donc augmenter la valeur du résistance afin d'avoir une dissipation moindre et de pouvoir observer l'effet du signal d'entrée comme cela est fait sur la Fig.(17) où la résistance vaut $1.10^5 \Omega$. Cependant il faudra faire attention dans l'utilisation du système à ne pas confondre le signal d'un photon avec la désexcitation du système, en effet la fonction d'onde $\langle x|5\rangle$ est assez semblable à la fonction $\langle x|7\rangle$ sachant que l'on mesura que des moyennes de mesure il sera difficile de différencier les deux. C'est pour cela qu'il faut essayer d'avoir une résistance la plus haute possible afin que la variation de flux du à l'absorption du photon se fasse de manière beaucoup plus rapide que la dissipation du photon. Avec $R = 1.10^5 \Omega$ par exemple on retrouve quasiment la dynamique Fig.(11).

3.5 Initialisation du circuit

Jusqu'à maintenant à $T = 0$ on considérait le circuit dans l'état $|6\rangle$ cependant avec la dissipation et le bruit qui n'est pas traité dans ce rapport, au moment de l'utilisation du circuit il faudra que celui-ci

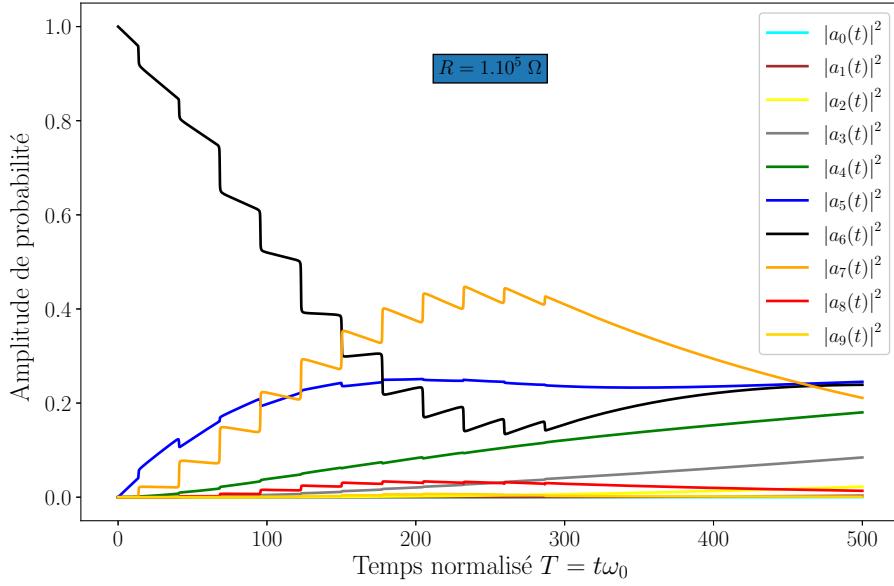


FIGURE 17: Dissipation du système perturbé

soit initialiser dans cette état. Si on considère qu'au repos le système est majoritairement en $|0\rangle$ alors il suffira de lui envoyer un signal avec une fréquence correspondant à $\frac{k_B}{\hbar}(\epsilon_6 - \epsilon_0)$, si cette fréquence est trop grande pour la matériel utilisé, il est également possible de le faire en $|3\rangle$ avant par exemple puis ensuite d'envoyer un signal de fréquence $\frac{k_B}{\hbar}(\epsilon_6 - \epsilon_3)$. La dynamique est sensiblement la même que celle des oscillations de Rabi.

4 Conclusion et perspectives

En conclusion mon rapport propose le début d'une simulation d'un système quantique et se propose d'explorer différentes pistes pour modéliser son interaction avec l'environnement et sa dynamique. Au fur et à mesure de l'avancement de mon stage je me suis rendu compte que le bon formalisme pour traiter ce système est celui des systèmes ouverts. J'ai essayé de commencer à l'aborder en utilisant la matrice densité, seulement je ne l'ai utilisé qu'avec un état pur, il faut maintenant que j'essaye de coder un système impure dans lequel la matrice représente la probabilité classique d'être dans plusieurs états quantiques. Également pour perfectionner ma simulation il faudrait rajouter un bain d'oscillateur harmonique correspondant aux émissions de photons de l'environnement ainsi que le bruit du aux fluctuations du courant et le couplage avec le système de lecture qui ajouterait un nouveau flux dans l'équation (5) avec une fréquence correspondant au circuit RLC de mesure.

Références

- [1] Toon Baeyens and Marnix Van Daele. The fast and accurate computation of eigenvalues and eigenfunctions of time-independent one-dimensional Schrödinger equations. 258 :107568.
- [2] Jeong Ryeol Choi. Analysis of quantum energy for Caldirola–Kanai Hamiltonian systems in coherent states. 3 :115–121.
- [3] John Clarke and Alex I. Braginski, editors. *Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems*. Number J. Clarke ; A. I. Braginski (eds.) ; Vol. 1 in The SQUID Handbook. Wiley-VCH.
- [4] Michel Devoret. CIRCUITS ET SIGNAUX QUANTIQUES. page 24.
- [5] Klaus Hornberger. Introduction to decoherence theory.
- [6] Kurt Jacobs and Daniel A. Steck. A Straightforward Introduction to Continuous Quantum Measurement. 47(5) :279–303.
- [7] Edward Leonard Jr., Matthew A. Beck, J. J. Nelson, Brad G. Christensen, Ted Thorbeck, Caleb Howington, Alexander Opremcak, Ivan V. Pechenezhskiy, Kenneth Dodge, Nicholas P. Dupuis, Jaseung Ku, Francisco Schlenker, Joseph Suttle, Christopher Wilen, Shaojiang Zhu, Maxim G. Vavilov, Britton L. T. Plourde, and Robert McDermott. Digital coherent control of a superconducting qubit. 11(1) :014009.
- [8] S. E. Rasmussen, K. S. Christensen, S. P. Pedersen, L. B. Kristensen, T. Bækkegaard, N. J. S. Loft, and N. T. Zinner. The superconducting circuit companion – an introduction with worked examples.
- [9] V. Shnyrkov, Wu Yangcao, Oleg Turutanov, V. Lyakhno, and A. Soroka. Scheme for Flux-Qubit-Based Microwave Single-Photon Counter with Weak Continuous Measurement. pages 737–742.