



LICENCE SCIENCE DE LA MATIÈRE  
*École Normale Supérieure de Lyon*  
*Université Claude Bernard Lyon I*

Stage 2020–2021  
Verollet Christian  
L3 Physique

---

## Simulation numérique d'un circuit supraconducteur compteur de photons uniques

---

**Résumé :** L'objectif de mon stage est de simuler numériquement la dynamique quantique d'un circuit supraconducteur compteur de photons uniques. Le principe est simple, l'absorption d'un photon entraîne une variation importante du flux magnétique propre du système, ce flux subit en permanence une mesure continue faible qui permet de détecter cette variation. La simulation numérique commence par trouver la dynamique du système en fonction du signal correspondant au photon qui lui est envoyé, ensuite l'impact de la mesure est pris en compte, enfin la dissipation du système est rajouté.

**Mots clefs :** *circuits supraconducteurs, SQUID, qubit de flux, jonction Josephson, weak continuous measurement*

Stage encadré par :

**Pascal Febvre**

[Pascal.Febvre@univ-smb.fr](mailto:Pascal.Febvre@univ-smb.fr) / tél. +33-4-79-75-88-64

Université Savoie Mont Blanc IMEP-LAHC – CNRS UMR5130

73376 Le Bourget du Lac Cedex France

<https://imep-lahc.grenoble-inp.fr/>



# Remerciements

Je remercie mon maître de stage Pascal Febvre pour son encadrement et ses conseils tout au long de mon stage.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Situation du travail</b>	<b>2</b>
2.1	Présentation du circuit . . . . .	2
2.2	Modèle RCSJ . . . . .	3
2.3	Principe de fonctionnement . . . . .	4
2.4	Mesure continue du système . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Travail de recherche : Simulation numérique du circuit</b>	<b>5</b>
3.1	Signal d'entrée . . . . .	5
3.2	Oscillations de Rabi . . . . .	7
3.3	Mesure du circuit . . . . .	11
3.3.1	Moyenne de l'observable flux . . . . .	11
3.3.2	Mesure continue . . . . .	14
3.4	Ajout du frottement . . . . .	16
3.5	Initialisation du circuit . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>17</b>

# 1 Introduction

Mon stage porte sur le domaine de l'électronique supraconductrice. Dans ce domaine l'objectif principal des chercheurs est de fabriquer des atomes artificiels à partir de circuits électriques à très basse température. Dans les bonnes conditions, ces circuits électriques ont un comportement quantique et peuvent être considérés comme des systèmes à deux niveaux, des qubits. Ces qubits sont aujourd'hui majoritairement utilisés pour le calcul quantique. Dans mon cas, le système que j'étudie a pour but de détecter des photons uniques d'une fréquence particulière réglable. Mon but est d'aider à la compréhension de ce système en proposant des simulations numériques permettant de visualiser la dynamique du système et les résultats qui seront attendus. Le circuit repose sur l'utilisation de SQUIDS (Superconducting QUantum Interference Device), il est décrit dans l'article [9]. Le système repose sur le principe suivant : le système est placé dans un état d'énergie auquel la fonction d'onde associée donne des probabilités de mesures du flux propre du système autour de valeurs assez faibles, quand un photon de la bonne fréquence est absorbé, le système a plus de chance d'être dans l'état d'énergie supérieur, ce qui donne des probabilités de mesures du flux autour de valeurs plus hautes. Le système étant continuellement mesuré par un faible couplage entre le champ magnétique du système et un autre circuit voisin, la variation de flux magnétique propre du système est détectée. L'avantage de ce système est que ses niveaux d'énergies sont réglables par l'application de flux magnétique constant, ce qui permet d'ajuster le système suivant l'énergie des photons que l'on souhaite détecter. Un autre avantage est que le circuit de mesure n'a pas besoin d'être relié physiquement au circuit principal et peut se trouver à une température plus haute et moins contraignante (de l'ordre du Kelvin).

Pour la suite du rapport on s'appuie sur deux éléments principaux de l'électronique supraconductrice : la théorie BCS et les jonctions Josephson.

La théorie BCS explique que la supraconductivité est due au fait qu'à très basse température les électrons forment des paires dites de Cooper de spin 1 et circulent dans le métal sans dissipation, elles obéissent alors à la statistique de Bose-Einstein et peuvent-être décrites par une fonction d'ondes macroscopique représentant leur densité dans le circuit.

Les jonctions Josephson sont l'ingrédient indispensable de tout circuit supraconducteur. Ce sont de fines couches d'isolant de quelques dizaines d'angström entre deux matériaux supraconducteurs (comme un condensateur mais en beaucoup plus fin) qui permettent le passage par effet tunnel de paires de Cooper. Elles sont décrites par deux relations dites de Josephson, qui permettent de relier le courant et la tension aux bornes d'une jonction à la différence de phase de la fonction d'onde macroscopique entre les deux matériaux. Elles sont souvent nommées inductances non linéaires car le courant est une fonction périodique de la différence de phase (donc du flux). Elles sont caractérisées par leur courant critique, qui représente le courant maximum pouvant les traverser.

## 2 Situation du travail

Dans cette première partie je vais présenter de manière brève le système que j'étudie. Dans un premier temps je vais décrire schématiquement le circuit et les grandeurs utiles. Dans un second temps j'expliquerai le modèle et les hypothèses utilisées pour décrire les jonctions Josephson intervenants dans le circuit qui permettent de trouver les équations de la dynamique du système. Enfin je parlerai de son principe de fonctionnement ainsi que du phénomène de mesure continue faible.

### 2.1 Présentation du circuit

Le schéma de la partie principale du circuit que j'étudie peut être vu Figure (1a). Celui-ci est composé d'une grande boucle d'auto-inductance  $L$  (en noir sur le schéma) dans laquelle est insérée une plus petite boucle d'auto-inductance  $l$  (en rouge sur le schéma) comportant deux jonctions Josephson symbolisées par des croix. Au dessus de la petite boucle rouge, un système permet de produire un champ magnétique qui crée un flux  $\Phi_{e1}$  constant à l'intérieur de la petite boucle rouge. De la même manière un flux  $\Phi_{e2}$  constant est créé dans la grande boucle noire par l'intermédiaire d'un second champ magnétique. On néglige totalement le flux du premier champ magnétique dans la grande boucle noire et le flux du second champ magnétique dans la petite boucle rouge. A noter que le schéma n'est pas à l'échelle, la boucle rouge est beaucoup plus petite que la boucle noire afin d'avoir  $L \ll l$ . A l'intérieur dans la grande boucle noire, le système produit son propre flux magnétique  $\Phi$ . En dessous de cette boucle se trouve une ligne micro-ruban (Signal d'entrée), c'est par cette voie que les photons seront envoyés au système, celle-ci produira un champ magnétique supplémentaire non constant qui viendra perturber la dynamique du circuit et lui ajouter de l'énergie. Le flux propre  $\Phi$  du circuit sera mesuré continûment par l'intermédiaire d'un autre circuit (non représenté sur le schéma) situé à côté qui sera couplé faiblement au système qui sera évoqué plus loin. Dans la suite on note  $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2,07.10^{-15}$  Wb le quantum de flux magnétique.

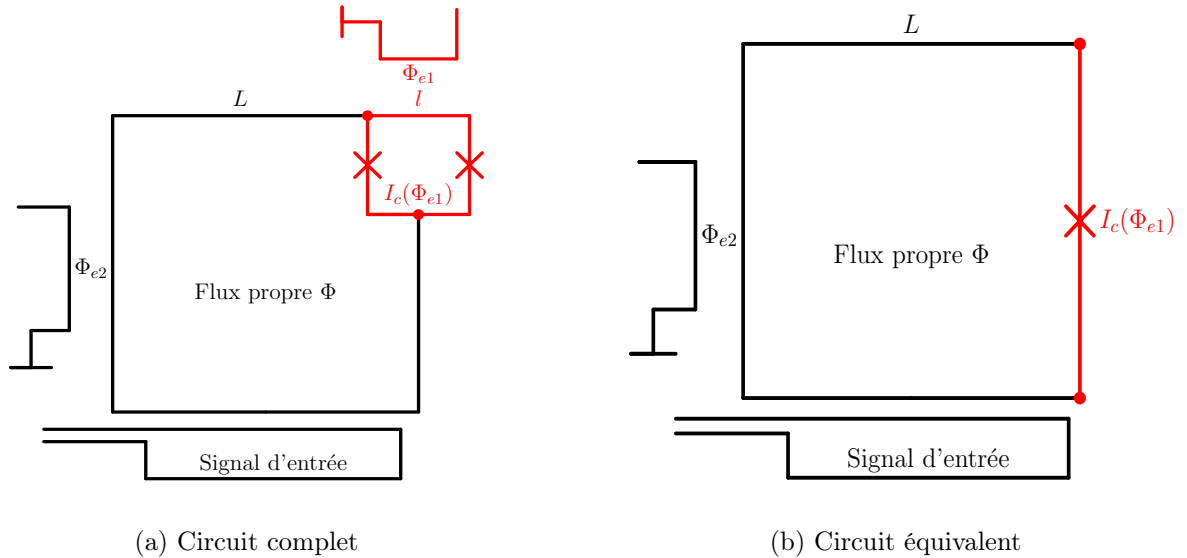


FIGURE 1: Représentations schématiques du circuit

Pour la petite boucle rouge dans le cas où les deux jonctions Josephson sont identiques (chacune de courant critique  $I_{cj}$ ) et  $\beta_l = \frac{2\pi I_{cj} l}{\Phi_0} \ll 1$ , on peut montrer [3] que le courant critique pouvant traverser la boucle dépendant du flux  $\Phi_{e1}$  et varie entre  $I_{cj}$  et  $2I_{cj}$ . Le circuit de la Figure (1a) peut alors être ramené au circuit de la Figure (1b) où la boucle rouge est devenue l'équivalent d'une seule jonction Josephson au courant critique  $I_c$  réglable. L'équation décrivant la dynamique de ce circuit s'obtient en utilisant le modèle RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction) pour les jonctions Josephson.

## 2.2 Modèle RCSJ

Afin de décrire les jonctions Josephson il faut tenir compte d'un courant de quasi-particules (assimilables succinctement à des électrons de paires de Cooper qui se sont séparés) ainsi que d'un courant de déplacement, ces deux phénomènes peuvent-être approximés par une résistance et un condensateur en parallèle de la jonction Josephson [3]. Le schéma du circuit dans ce modèle est représenté Figure (2). Ce modèle est celui couramment utilisé car il simplifie grandement les calculs en supposant une résistance linéaire (d'autres modèles non linéaires plus précis existent [3]). A cela il faut normalement rajouter un bruit sur le courant, en effet avec la température le courant a tendance à osciller autour de sa valeur moyenne mais pour cette première approche on néglige cet effet.

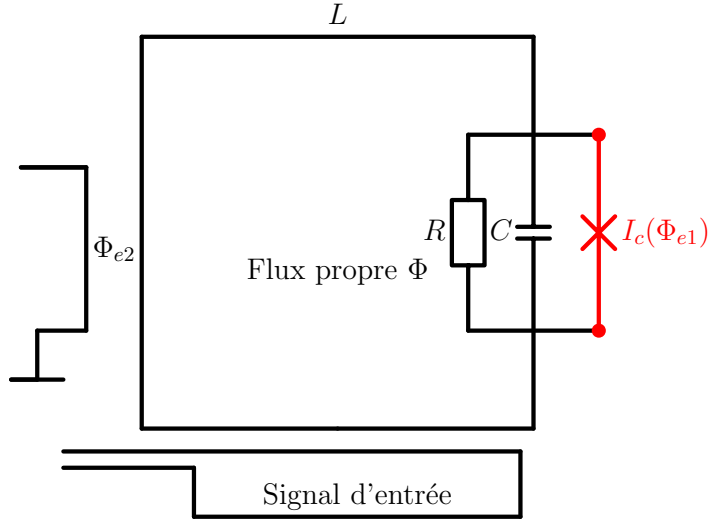


FIGURE 2: Schéma du modèle RCSJ du circuit

L'équation de la dynamique du système -équation (1)- est une équation différentielle du second ordre sur le flux du système qui dépend du paramètre ajustable  $\beta_L = \frac{2\pi L I_c(\Phi_{e1})}{\Phi_0}$ . Il est important ici de souligner l'analogie électro-mécanique qui existe entre les grandeurs électriques et mécaniques. En effet le flux propre  $\Phi$  est l'équivalent de la position  $x$ , la charge  $Q$  du condensateur l'équivalent de la quantité de mouvement  $p$  et la capacité  $C$  l'équivalent de la masse  $m$  [4].

$$C \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d}{d\Phi} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{L} \left[ 2\pi^2 \left( \frac{\Phi}{\Phi_0} - \frac{\Phi_{e2}}{\Phi_0} \right)^2 - \beta_L \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right] = 0 \quad (1)$$

Dans le cas où l'on néglige le terme de frottement dû à la résistance, l'Hamiltonien du système s'exprime comme la somme d'un oscillateur harmonique (OH) décalé en  $\Phi_{e2}$  et d'un terme périodique du flux -équation (2)- avec  $C\dot{\Phi} = Q$ .

$$\mathcal{H}(Q, \Phi) = \underbrace{\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2L} (\Phi - \Phi_{e2})^2}_{\mathcal{H}_{OH}} - \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{\beta_L}{L} \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (2)$$

### 2.3 Principe de fonctionnement

Ce circuit va fonctionner à une température d'approximativement 30 mK, à cette température la dynamique du système est quantique et il faut utiliser l'équation de Schrödinger stationnaire -équation (3)- associée à l'Hamiltonien indépendant du temps du système -équation (2)- afin de connaître ses énergies propres  $E_i$  et les fonctions d'ondes  $\Psi_i(x)$  associées.

$$\hat{\mathcal{H}} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (3)$$

On pose  $x = \frac{\Phi}{\Phi_0}$  et on normalise l'énergie du système en Kelvin en divisant chaque terme énergétique par  $k_B = 1,38.10^{-23}$  J/K la constante de Boltzmann, les valeurs de capacité et d'inductance utilisées sont celles données dans l'article [9] à savoir  $C = 76.10^{-15}$  F et  $L = 2.10^{-10}$  H. Pour plus de lisibilité on pose  $M = \frac{Ck_B\Phi_0^2}{\hbar^2}$ ,  $V(x, x_{e2}, \beta_L) = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{Lk_B} \left[2\pi^2 (x - x_{e2})^2 - \beta_L \cos(2\pi x)\right]$  et  $\epsilon = \frac{E}{k_B}$ . En prenant le produit avec le vecteur  $|x\rangle$ , l'équation (3) devient alors l'équation (4).

$$-\frac{1}{2M} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + [V(x, x_{e2}, \beta_L) - \epsilon] \Psi(x) = 0 \quad (4)$$

On résout cette équation avec le module PySlise de Python [1] sur intervalle  $[0, 1]$  en prenant comme conditions limites  $\Psi(0) = 0$  et  $\Psi(1) = 0$  ainsi que  $\beta_L = 1.325$  et  $x_{e2} = 0.5135$  les valeurs utilisées dans [9]. On peut voir Figure (3) les huit premiers niveaux d'énergie du système ainsi que les densités de probabilités (non normées) associées aux énergies  $\epsilon_6$  (en orange) et  $\epsilon_7$  (en rouge). Les densités de probabilités n'ont bien sûr pas d'unité, elles ont été représentées sur les niveaux d'énergie afin de permettre une meilleure lecture. Les densités de probabilités des niveaux inférieurs à 6 n'ont pas été représentées pour ne pas surcharger la figure mais elles sont très semblables à celle d'un oscillateur harmonique.

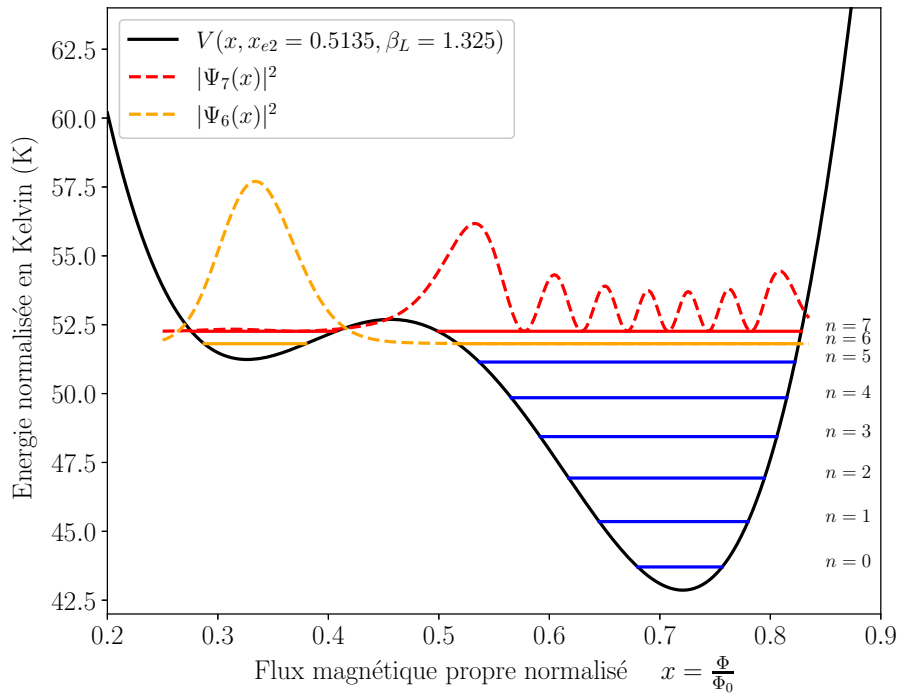


FIGURE 3: Energies et fonctions propres du système

Tout le principe du système repose sur le fait que si le système est dans l'état  $|6\rangle$  associé à  $\epsilon_6$  et reçoit un photon d'énergie  $\hbar\omega = k_B(\epsilon_7 - \epsilon_6)$  lui augmentant sa probabilité d'être en  $|7\rangle$ , alors la moyenne

des mesures du flux augmentera et l'on pourra détecter cette absorption d'énergie. Les amplitudes de probabilités associées aux niveaux inférieurs à 6 donnent des moyennes de mesures du flux autour de  $0.7 \Phi_0$ . A noter que malgré que le flux du circuit puisse prendre des valeurs continues, celui est bien quantifié, les deux jonctions Josephson de la Figure (1a) ont toutes deux des valeurs de différence de phases qui, une fois converties en terme de flux et sommées à  $\Phi$ , donnent une valeur entière de  $\Phi_0$ .

## 2.4 Mesure continue du système

Comme dit précédemment la mesure du flux du système se fait par un faible couplage magnétique entre le système et un autre circuit voisin fonctionnant comme un gradiomètre pour le champ magnétique. Très brièvement, la mesure est faite en regardant la variation de la fréquence de résonance d'un circuit RLC qui est modifiée par le champ créé par le gradiomètre lui-même couplé au système quantique. On sait qu'en mécanique quantique la mesure d'un système dans un état le projette dans le vecteur propre associé à cet état. Ici la mesure est faite de manière continue durant le temps d'utilisation du circuit, ce qui va influencer sur sa dynamique.

## 3 Travail de recherche : Simulation numérique du circuit

Le but de mon travail est de commencer une simulation du fonctionnement de ce système quand il sera testé en laboratoire, c'est à dire que le signal énergétique envoyé au circuit sera choisi extérieurement et ne correspondra pas à un photon naturel. Une simulation entièrement réaliste du circuit serait impossible car il y a trop de paramètres. Dans ma simulation je me suis d'abord attaché à décrire la dynamique du système après la réception d'un ou plusieurs photons sans prendre en compte le terme dissipatif de l'équation (1). Ensuite j'ai essayé de modéliser les résultats de mesures qui pourraient être obtenus par le système en prenant en compte le phénomène de mesure continue. Finalement pour aller plus loin j'ai essayé d'ajouter le phénomène de dissipation en passant à des équations matricielles. D'autres paramètres devront être ajoutés afin de rendre la simulation plus réaliste, en particulier le courant parasite dans le circuit dû à la température non nulle du système ainsi que le bain thermique dans lequel il est plongé. En effet le circuit, très sensible aux champs magnétiques externes est isolé dans un environnement à sa température ( $\sim 30$  mK) qui peut émettre des photons tel un corps noir. Afin d'illustrer mon travail mon rapport contient normalement deux animations Figure (9) et Figure (12) mais elles ne sont pas incluses dans cette version. Elles sont présentes dans le dossier github à l'adresse [https://github.com/ChristianVerollet/Stage\\_L3\\_ENS](https://github.com/ChristianVerollet/Stage_L3_ENS) ainsi que le code python utilisé pour effectuer les différentes simulations, des liens sont mis sous les figures en question.

### 3.1 Signal d'entrée

Je sais que l'énergie apportée au système va l'être par l'intermédiaire du flux produit par la ligne signal d'entrée que l'on peut observer Figure (2). En m'inspirant de l'ajout du flux  $\Phi_{e2}$  dans l'équation (2), j'ai ajouté un flux  $\Phi_E(t)$  à l'équation (2) de sorte que l'Hamiltonien du système prenne la forme de l'équation (5).

$$\mathcal{H}(\mathcal{Q}, \Phi) = \frac{\mathcal{Q}^2}{2C} + \frac{1}{2L}(\Phi - \Phi_{e2} + \Phi_E(t))^2 - \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{\beta_L}{L} \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (5)$$

Pour résoudre la dynamique du système, je me suis appuyé sur le système stationnaire que j'ai déjà résolu précédemment. En développant le terme quadratique, l'Hamiltonien prend la forme de l'équation (6), où on retrouve l'Hamiltonien du système stationnaire  $\mathcal{H}_0$ , un terme linéaire en  $\Phi$  qui va perturber le système et un dernier terme qui sera diagonal une fois l'Hamiltonien quantifié ; celui-ci, après plusieurs simulations ne semble pas modifier la dynamique du système (je retrouve le même avis dans l'article

[8]).

$$\mathcal{H}(\mathcal{Q}, \Phi) = \underbrace{\frac{\mathcal{Q}^2}{2C} + \frac{1}{2L}(\Phi - \Phi_{e2})^2 - \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{\beta_L}{L} \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{\frac{1}{L}\Phi_E(t)\Phi}_{\text{perturbation}} + \underbrace{\frac{1}{2L}[\Phi_E^2(t) - 2\Phi_E(t)]}_{\text{terme superflu}} \quad (6)$$

Le terme  $\Phi_E(t)$  va s'écrire  $\alpha \frac{V(t)}{\omega_0}$  où  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2,56.10^{11}$  rad/s est la pulsation correspondant à la partie oscillateur harmonique de l'équation (1), et  $V(t)$  correspond à un signal en Volt -équation (7)- qui sera contrôlé extérieurement grâce à la ligne micro-onde.  $\alpha$  représente le couplage entre la ligne micro-onde et le circuit, ce coefficient est supposé ajustable en modifiant la distance entre la ligne et le circuit tant que cela ne dépasse des valeurs raisonnables de l'ordre de quelques pourcents. Le signal  $V(t)$  correspond à une tension produite par une jonction Josephson, on a  $R_s = 10 \Omega$ ,  $I_v = 1 \times 10^{-4}$  A,  $\omega_c = \frac{2\pi R_s I_v}{\Phi_0} = 3,03.10^{12}$  rad/s la pulsation caractéristique du signal et  $i > 1$  le paramètre ajustable du signal.

$$V(t) = R_s I_v \frac{i^2 - 1}{i + \cos\left(\sqrt{i^2 - 1}\omega_c t\right)} \quad (7)$$

Dans la suite je travaille en temps normalisé  $T$  telle que  $t = \frac{T}{\omega_0}$  ce qui donne  $t = 3,89.10^{-12}$  s pour  $T = 1$ . Une visualisation de  $V(T)$  pour différentes valeurs de  $i$  est illustrée Figure (4), une propriété remarquable de  $V(T)$  est que l'aire sous chacun des "pics" vaut toujours  $\Phi_0$  quel que soit  $i$ . Dans la simulation numérique une distribution porte centrée en  $T_0$  et de largeur  $\Delta T$  (touts deux modifiables) est ajoutée pour modéliser le début et la fin du pulse envoyé.

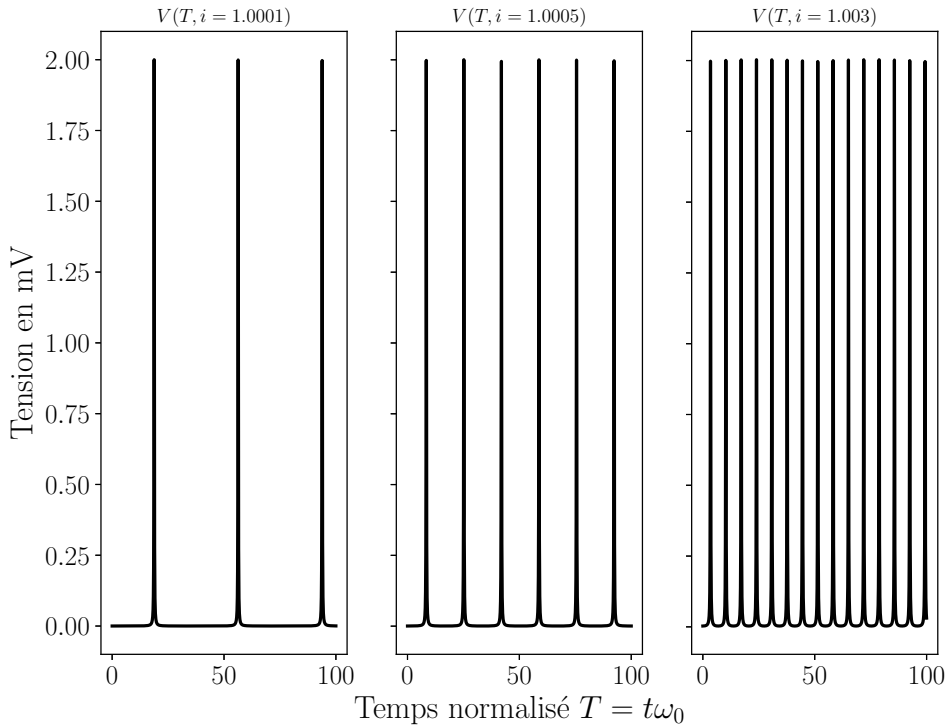


FIGURE 4:  $V(T)$  pour différentes valeurs du paramètre ajustable  $i$



### 3.2 Oscillations de Rabi

Pour trouver la dynamique il faut d'abord quantifier l'Hamiltonien (6), comme dit précédemment j'ai choisi de travailler dans la base des valeurs propres de  $\hat{\mathcal{H}}_0$ . De plus l'Hamiltonien (2) étant celui d'un oscillateur harmonique décalé pour  $\beta_L = 0$  on définit de la même façon les opérateurs créations et annihilations de sorte qu'on ait  $\hat{\Phi} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0 L}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$  avec  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Js. L'Hamiltonien (6) prend alors la forme (8) où  $P(T)/\omega_0$  est l'énergie transmise au système à chaque instant.

$$\hat{\mathcal{H}} = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} E_j |j\rangle \langle j|}_{\hat{\mathcal{H}}_0} + \underbrace{\alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2L}} \frac{V(T)}{\omega_0}}_{P(T)/\omega_0} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (8)$$

L'énergie totale reçue par le système durant la durée du signal s'exprime alors comme l'équation (9). Il est important de pouvoir connaître l'énergie envoyée au système, afin de la comparer à la différence d'énergie des deux niveaux  $|6\rangle$  et  $|7\rangle$  qui nous intéressent.

$$E_{tot} = \int P(t) dt = \int_{T_0 - \frac{\Delta T}{2}}^{T_0 + \frac{\Delta T}{2}} \frac{P(T)}{\omega_0} dT = \sum_{\text{"pics"}} \alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2L}} \Phi_0 \quad (9)$$

On va alors résoudre numériquement l'équation de Schrödinger (10) dépendante du temps en ne considérant que les dix premiers niveaux d'énergies, ce qui fait que les opérateurs et l'état du système prennent la forme (11) où on note les  $a_j(t)$  le coefficient complexe du j-ème vecteur de base. Comme condition initiale on suppose pour le moment que  $|\Psi(T=0)\rangle = |6\rangle$ .

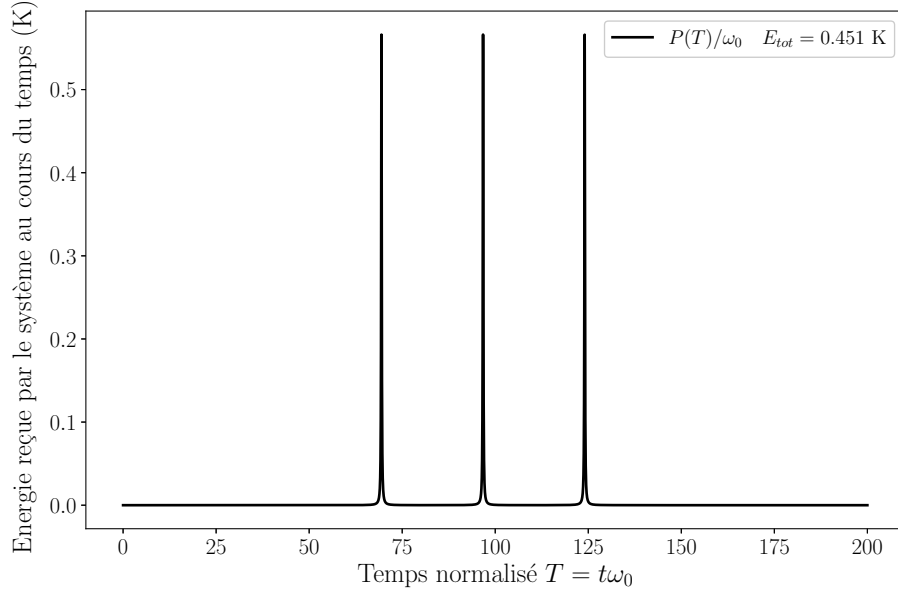
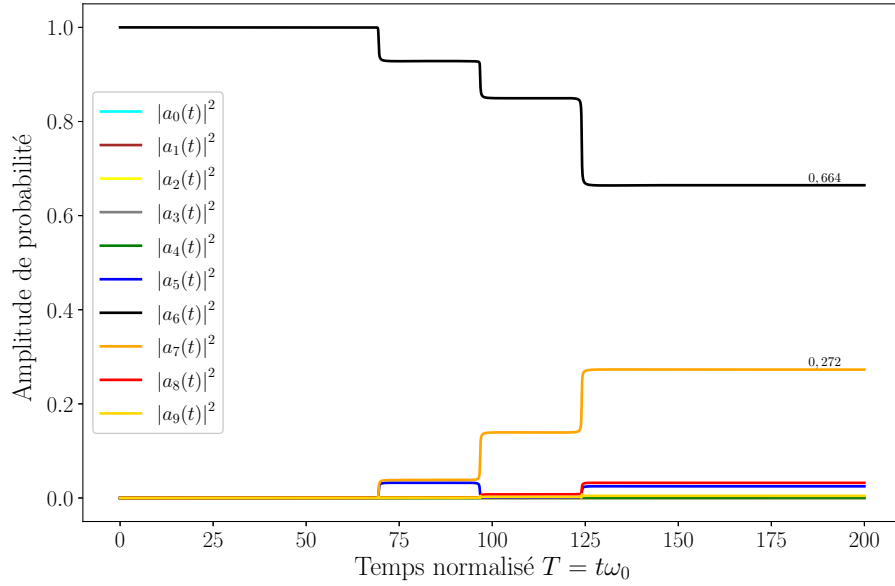
$$\hat{\mathcal{H}} |\Psi(T)\rangle = i\hbar\omega_0 \frac{d}{dT} |\Psi(T)\rangle \quad (10)$$

$$|\Psi(T)\rangle = \sum_{j=0}^9 a_j(T) |j\rangle \quad \text{et} \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \sqrt{2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \sqrt{9} \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

L'idée du circuit est de mesurer l'énergie d'un photon d'énergie  $\epsilon_7 - \epsilon_6 \simeq 0.4508$  K et de pulsation  $\omega_{6 \rightarrow 7} = \frac{k_B}{\hbar} (\epsilon_7 - \epsilon_6) \simeq 5,9 \cdot 10^{10}$  rad/s. Au repos on a  $a_j = \exp\left(-i \frac{k_B \epsilon_j}{\hbar\omega_0} T\right)$ , afin d'exciter correctement le système,  $i$  va être choisi de sorte qu'on ait  $\sqrt{i^2 - 1}\omega_c = \omega_{6 \rightarrow 7}$ . Cependant pour la même énergie  $E_{tot} = k_B (\epsilon_7 - \epsilon_6)$ , en s'imaginant qu'on peut faire varier légèrement  $\alpha$ , on peut soit envoyer un signal long avec un  $\alpha$  faible soit envoyer un signal court avec un  $\alpha$  plus important. Par exemple Figure (5) on envoie un signal correspondant à l'énergie  $\frac{\hbar\omega_{6 \rightarrow 7}}{k_B}$  (on ne travaille dans la suite qu'avec des valeurs d'énergie normalisée en Kelvin) avec  $\alpha = 0,385\%$  (cette valeur permet d'avoir l'énergie attendue en trois "pics"), on peut voir Figure (5a) le signal envoyé et Figure (5b) la dynamique du système. La dynamique est celle attendue, le système commence dans la condition initiale qu'on lui a donnée et au fur et à mesure des "pics" il a un peu plus de chance d'être dans l'état  $|7\rangle$ .

Maintenant on va lui envoyer la même quantité d'énergie mais plus étalée temporellement, on va simplement diviser par deux  $\alpha$  et multiplier par deux la durée du signal afin d'avoir six "pics". On peut voir les résultats Figure (6), sur la Figure (6a) on voit le signal envoyé qui est correspond à un photon et sur la Figure (6b) la dynamique du système.

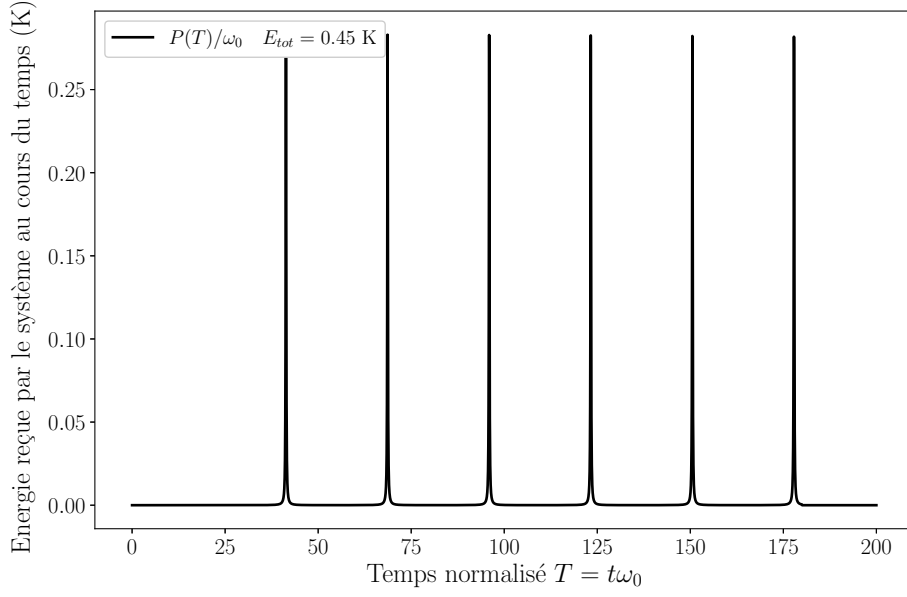
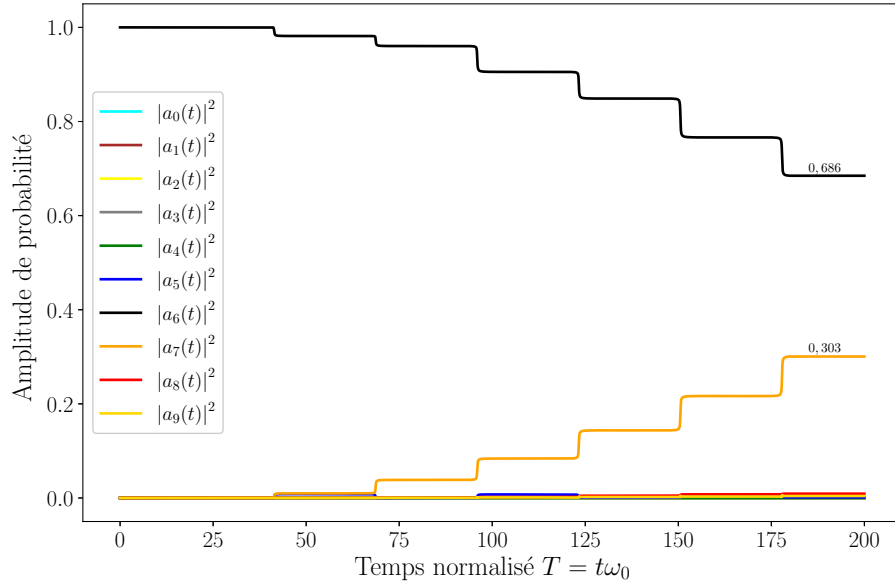
Il est intéressant d'observer que, malgré que l'énergie apportée soit la même, l'augmentation de  $|a_7(t)|^2$  est supérieure si le signal envoyé contient un grand nombre de "pics" d'amplitude faible plutôt qu'un faible nombre de "pics" avec une forte amplitude (0,272 contre 0,303). Après plusieurs simulations, j'ai en conclu que les rôles de l'amplitude et de l'étalement temporel étaient les suivants : pour une

(a) Signal envoyé avec  $\alpha = 0,385\%$ 

(b) Dynamique du système correspond au signal envoyé

FIGURE 5: Signal envoyé et dynamique associée correspondant à l'énergie  $\frac{\hbar\omega_{6\rightarrow7}}{k_B}$  avec  $\alpha = 0,385\%$ 

pulsation donnée  $\omega_{a\rightarrow b}$  qui permet de passer d'un niveau  $|a\rangle$  à  $|b\rangle$ , considérons un signal de même énergie, plus celui-ci est étalé temporellement plus il sera précis mais moins il sera efficace c'est à dire qu'il excitera seulement le niveau qui nous intéresse mais avec une faible ratio probabilité/énergie. Au contraire si le signal est très court avec de très forte amplitude alors il sera peu précis et commencera à exciter des niveaux supérieurs. C'est ce que l'on retrouve sur les Figure (5b) et (6b), la différence entre les deux  $|a_7(t)|^2$  est due au fait que les niveaux  $|5\rangle$  et  $|6\rangle$  ont été légèrement excités. Il faut trouver donc un bon équilibre entre les deux, cependant avoir un  $\alpha$  élevé permet de faire monter plus rapidement le système dans l'état qui nous intéresse ; or si le système dissipe, il sera important d'exciter le système plus rapidement que celui-ci ne perd son énergie. Dans tous les cas, quand des signaux de

(a) Signal envoyé avec  $\alpha = 0,1925\%$ 

(b) Dynamique du système correspond au signal envoyé

FIGURE 6: Signal envoyé et dynamique associé correspondant à l'énergie  $\frac{\hbar\omega_{6\rightarrow7}}{k_B} \simeq 0,45\text{K}$  avec  $\alpha = 0,1925\%$ 

"vrais" photons seront reçus par le système, on ne choisira pas l'étalement de leur paquet d'onde et  $\alpha$  sera fixé à la fabrication du circuit mais pourra quand même être choisi au départ. Je pense alors que le mieux sera de le choisir le plus grand possible, car ici pour simplifier la simulation on a supposé que l'on recevait un flux qui apportait directement l'énergie que l'on souhaitait, mais dans la réalité le photon circulera dans la ligne micro-onde et qu'une petite partie de son énergie sera transmise au circuit.

On va maintenant considérer un  $\alpha = 0,1\%$  et regarder ce qui se passe si l'on envoie un long signal Figure (7) avec une énergie totale correspondant à un grand nombre de photons  $\simeq 12$ . On voit sur

la Figure (8) qu'une fois atteinte une certaine probabilité très proche de 1,  $|a_7(T)|^2$  redescend au fur et à mesure qu'on envoie de l'énergie, ce sont des oscillations de Rabi. Elle sont semblables à celles qu'on pourrait créer en couplant capacitivement un qubit [7]. Dans la suite on va continuer à travailler avec des signaux représentant plusieurs photons d'affilée même si l'intérêt du système est d'être capable de détecter des photons uniques cela permet de mieux visualiser la dynamique. Pour un photon unique ce sera la même dynamique mais avec une variation du flux beaucoup plus faible.

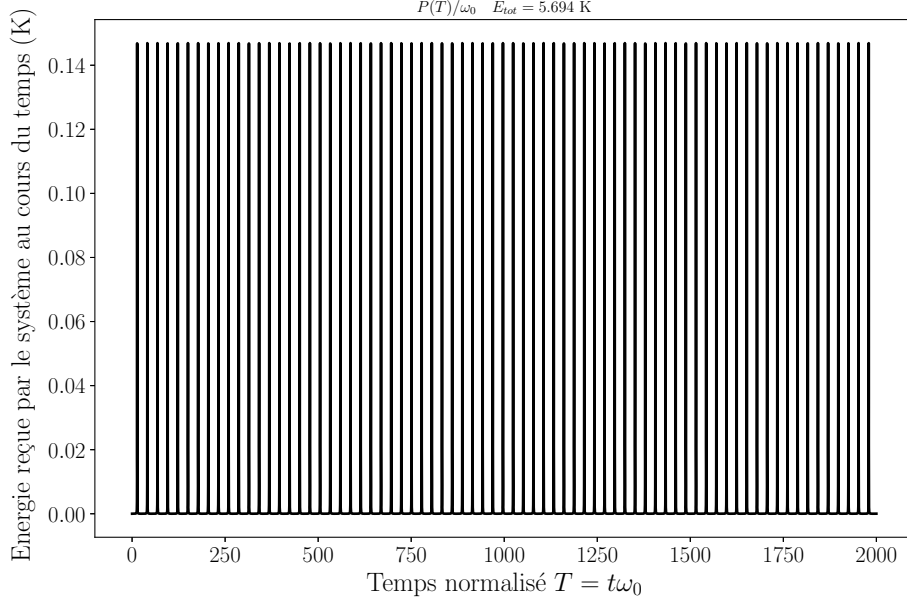


FIGURE 7: Signal envoyé d'énergie  $5,69\text{K} \simeq 12,6 \times \frac{\hbar\omega_{6 \rightarrow 7}}{k_B}$  avec  $\alpha = 0,1\%$

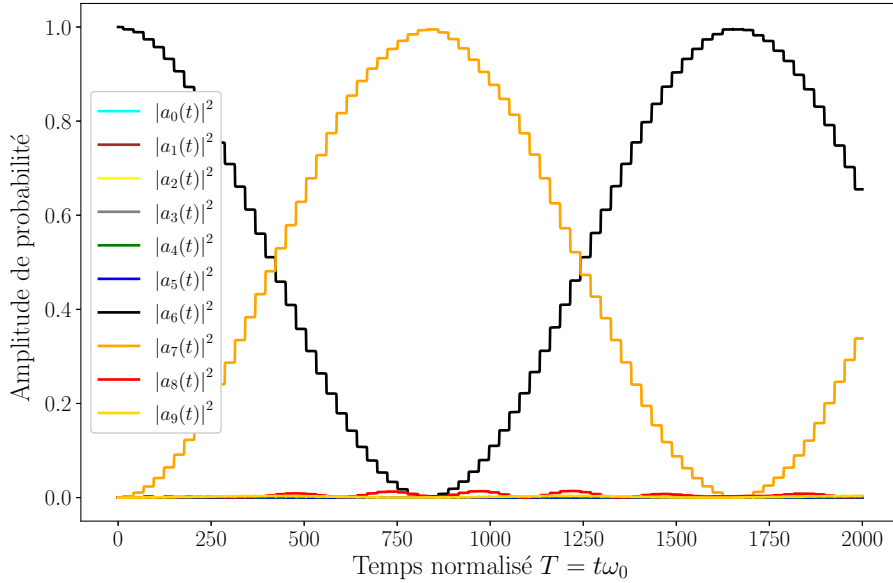


FIGURE 8: Dynamique du système correspondant à Fig.(7)

On a pu voir au travers des différents graphiques que si l'on envoie un signal à la bonne pulsation  $\omega_{6 \rightarrow 7}$  et avec une amplitude pas trop élevée, alors les seuls niveaux vraiment excités sont le  $|6\rangle$  et le  $|7\rangle$ . On

peut donc tronquer le système à un qubit en ne considérant que ces deux niveaux et représenter leur évolution sur la sphère de Bloch Figure (9), ce qui permet de voir la partie complexe des coefficients qui était totalement invisible sur les précédents graphes. Sur la sphère de Bloch le qubit tourne naturellement autour de l'axe  $z$  à la pulsation  $\omega_{6 \rightarrow 7}$  et chaque "pic" qu'il reçoit le fait descendre d'un cran vers le bas. L'animation est courte pour éviter qu'elle soit trop lourde mais si on fait la même chose avec la dynamique de la Figure (8) alors une fois arrivé en bas le qubit commencera à remonter et ainsi de suite.

FIGURE 9: Oscillation de Rabi du qubit correspondant au signal Fig.(5a) [https://github.com/ChristianVerollet/Stage\\_L3\\_ENS/blob/main/6\\_7\\_Bloch.gif](https://github.com/ChristianVerollet/Stage_L3_ENS/blob/main/6_7_Bloch.gif)

### 3.3 Mesure du circuit

On peut essayer de prédire l'allure des mesures qui seront faites sur le système. Dans un premier temps on va tracer la moyenne de l'observable au cours du temps sans se soucier de l'impact de la mesure, puis dans un second temps on rajoutera le phénomène de mesure continue.

#### 3.3.1 Moyenne de l'observable flux

Maintenant que l'on connaît la dynamique du système, on peut exprimer la fonction d'onde totale du système -équation (12)- ainsi que sa norme carrée qui représente la probabilité de mesure du flux -équation (13)-. La probabilité de mesure du flux fait intervenir des interférences entre les différentes fonctions propres du système.

$$\Psi(x, T) = \langle x | \Psi(T) \rangle = \sum_{j=0}^9 a_j(T) \underbrace{\langle x | j \rangle}_{\Psi_j(x)} \quad (12)$$

$$|\Psi(x, T)|^2 = \langle x | \Psi(T) \rangle \langle \Psi(T) | x \rangle = \sum_{j,k=0}^9 a_j a_k^* \Psi_j(x) \Psi_k(x)^* \quad (13)$$

Pour la simulation de l'évolution de la fonction d'onde du signal on va travailler avec le signal Figure (10) et la dynamique visible Figure (11), la valeur de  $\alpha$  choisie permet de faire monter assez rapidement le système en  $|7\rangle$  sans trop exciter  $|8\rangle$ . On peut donc dans les équations 12 et 13 sommer  $j$  seulement de 6 à 8 tout en gardant une très bonne précision.

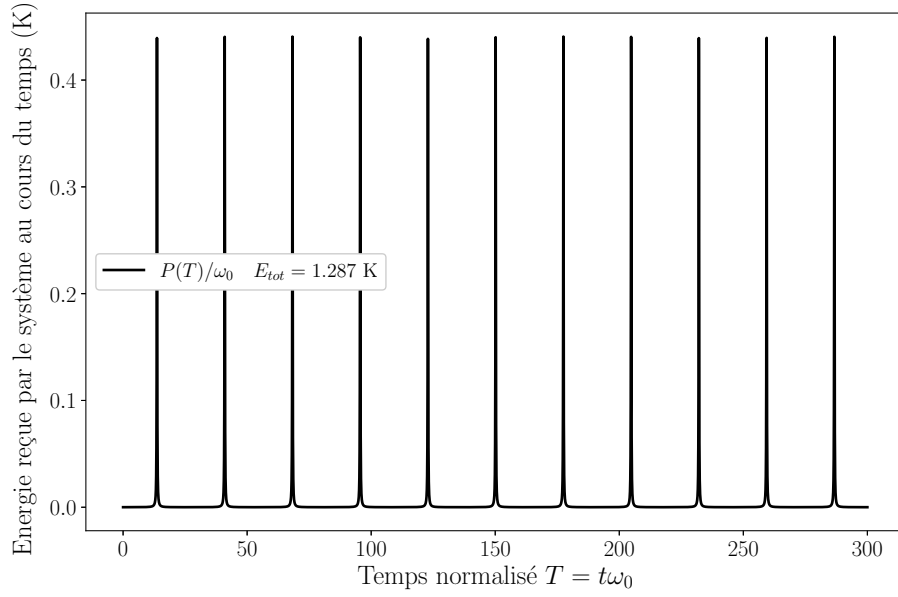
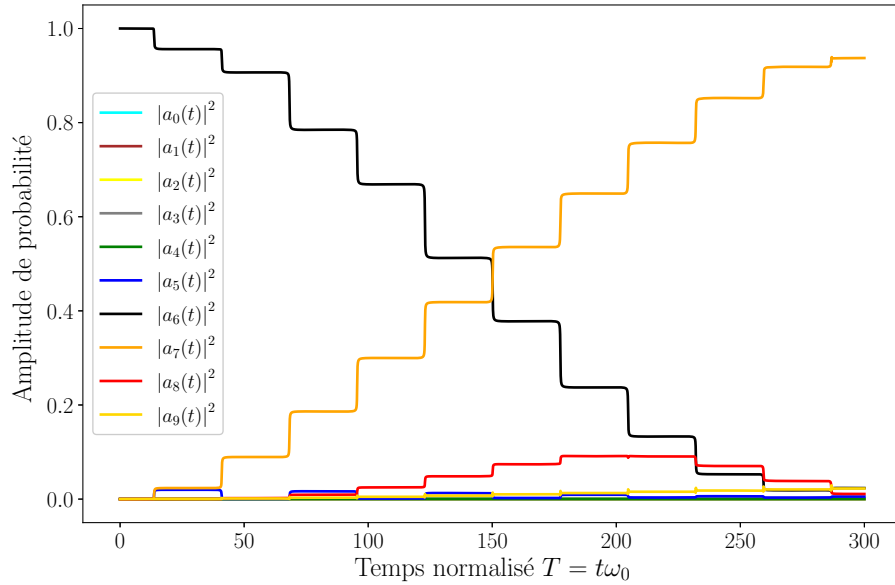
FIGURE 10: Signal envoyé avec  $\alpha = 0,3\%$ 

FIGURE 11: Dynamique associée à Fig.(10)

L'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde et de sa norme carré peut-être vue sur l'animation de la Figure (12). Pour que celle-ci ne soit pas trop lourde, l'échantillonnage temporel a été grandement réduit pour diminuer le nombre totale de trames, cependant la dynamique n'est pas affectée.

FIGURE 12: Évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde du système et de sa norme carré par rapport au signal envoyé Fig.(10) [https://github.com/ChristianVerollet/Stage\\_L3\\_ENS/blob/main/fct\\_onde.gif](https://github.com/ChristianVerollet/Stage_L3_ENS/blob/main/fct_onde.gif)

Maintenant que la dynamique du système est connue, on peut prédire l'évolution de la moyenne de l'observable  $\hat{x} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$  (en supposant que l'on peut l'observer sans lui faire perdre sa cohérence). On calcule celle-ci avec la formule classique -équation (14)- utilisant la densité de probabilité qu'on a calculée précédemment. Les résultats sont visibles Figure (13), la courbe orange est un fit linéaire et la courbe bleue un fit utilisant la méthode des moindres carrés avec la forme  $aT + b + c \sin(2\pi dT + e)$ , j'ai fait ces fits car j'avais besoin d'une forme analytique de la moyenne pour l'équation (19).

$$\langle x \rangle(T) = \langle \Psi(T) | \hat{x} | \Psi(T) \rangle = \int_0^1 x |\Psi(x, T)|^2 dx \quad (14)$$

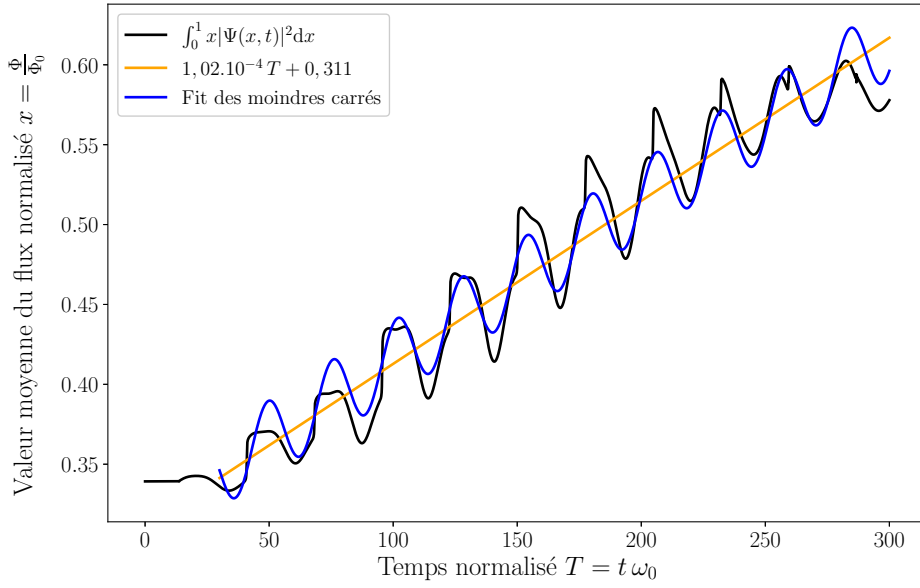


FIGURE 13: Moyenne de l'observable  $\hat{x}$  au cours du temps

### 3.3.2 Mesure continue

En réalité le système est continuellement soumis à une mesure faible qui permet d'extraire de l'information de façon continue. Ce phénomène nécessite un traitement particulier, en m'appuyant sur les calculs faits dans [6] j'ai essayé de modéliser l'impact de la mesure continue sur la dynamique du système et l'allure des mesures qui pourraient être faites. Pour modéliser la mesure continue on suppose qu'on divise le temps de mesure en une série d'intervalles  $\Delta t$ , dans chaque intervalle la mesure qui est faite est décrite par les opérateurs -équation (15)- (on cherche ici à mesurer l'opérateur  $\hat{x}$ ) où  $\beta$  est un index continu de telle sorte qu'il y ait une continuité de mesures toutes référencées par  $\beta$ .  $k$  est un paramètre dépendant de l'appareil de mesure, il est dit que si  $k$  est grand alors la mesure est forte et s'il est petit alors la mesure est faible.

$$\hat{A}(\beta) = \left( \frac{4k\Delta t}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k\Delta t(x-\beta)^2} |x\rangle \langle x| dx \quad (15)$$

Il est montré dans l'article [6] que  $\beta$  se comporte comme une quantité stochastique -équation (16)-,  $\Delta W$  est une variable aléatoire issue d'une Gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\Delta t$ , la lettre  $W$  fait référence au processus de Wiener. Ce phénomène est très proche de celui que l'on retrouve dans le mouvement Brownien.

$$\beta = \langle \hat{x} \rangle + \frac{\Delta W}{\sqrt{8k\Delta t}} \quad (16)$$

Le phénomène de mesure continue correspond à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$  il est alors montré que l'évolution du système prend la forme d'une équation de Schrödinger stochastique -équation (17)- que l'on normalise par rapport au temps  $T$  -équation (18)-. D'un point de vue mathématique, le formalisme utilisé est celui de l'analyse d'Itô que je ne maîtrise pas, la relation cependant très utile est le fait que  $(dW)^2 = dt = \frac{dT}{\omega_0}$ . Afin d'être rigoureux je note avec un tilde le nouveau terme stochastique qui avec la normalisation du temps n'est pas la même que précédemment mais cela ne change rien pour les calculs numériques car la distribution sera fixée sur le pas  $dT$ .

$$d|\Psi(t)\rangle = \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} dt - k(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 dt + \sqrt{2k}(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) dW \right\} |\Psi(t)\rangle \quad (17)$$

$$d|\Psi(T)\rangle = \left\{ -\frac{i}{\hbar\omega_0} \hat{\mathcal{H}} dT - \frac{k}{\omega_0}(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 dT + \sqrt{\frac{2k}{\omega_0}}(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) d\tilde{W} \right\} |\Psi(T)\rangle \quad (18)$$

Pendant ce temps l'observateur obtient l'information -équation (19)- à chaque instant.

$$dy = \langle \hat{x} \rangle dt + \frac{dW}{\sqrt{8k}} \Leftrightarrow dy = \frac{\langle \hat{x} \rangle}{\omega_0} dT + \frac{dW}{\sqrt{8k\omega_0}} \quad (19)$$

J'ai essayé de simuler ces deux équations en prenant  $dT = 0.5$ , je ne sais pas comment rattacher la valeur de  $k$  aux grandeurs du système de mesure utilisé, je teste donc le paramètre et je regarde son influence. Sans même afficher les courbes, on devine le rôle de  $k$ , si celui est grand alors le terme de bruit sera important dans l'équation (18) et la dynamique du système sera très aléatoire. Au contraire si  $k$  est faible alors la dynamique du système est peu affectée par le bruit qui vient de la mesure, mais l'information obtenue est très bruitée. Pour les calculs et particulièrement pour le terme  $\langle \hat{x} \rangle$ , j'ai approximé le système comme un qubit car le package que j'utilise (Pytorchsde) ne traite pas les grandeurs complexes, il faut donc tout découpler et les temps de calculs s'avèrent long. Pour la dynamique du système, j'ai fait une simulation avec un  $k = 1.10^{11} \text{ s}^{-1}$  voir Figure (14), ce qui me paraît très grand mais au vu des autres grandeurs du système, en particulier  $\omega_0$  reste raisonnable. La dynamique est toujours basée sur le signal Figure(10), j'ai choisi après résolution de l'équation de normaliser les coefficients, c'est pour cela que les deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe



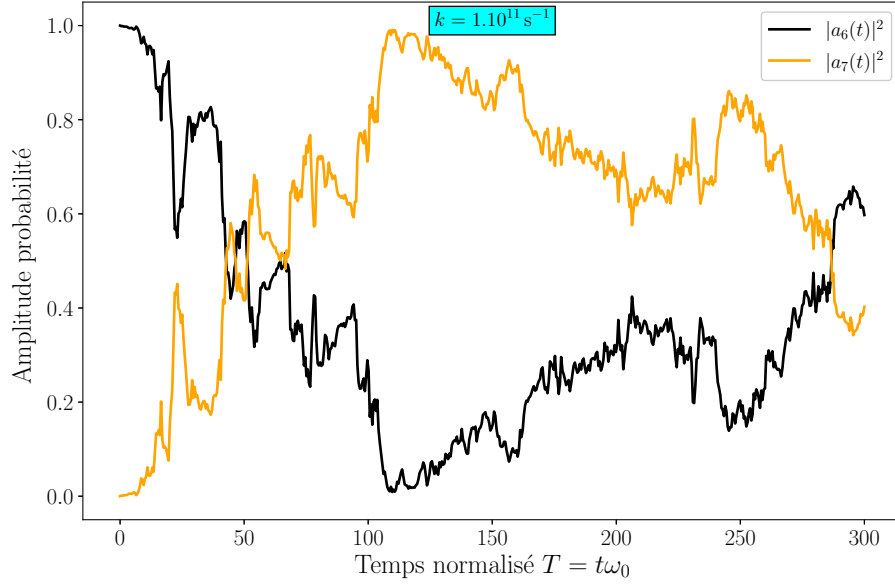
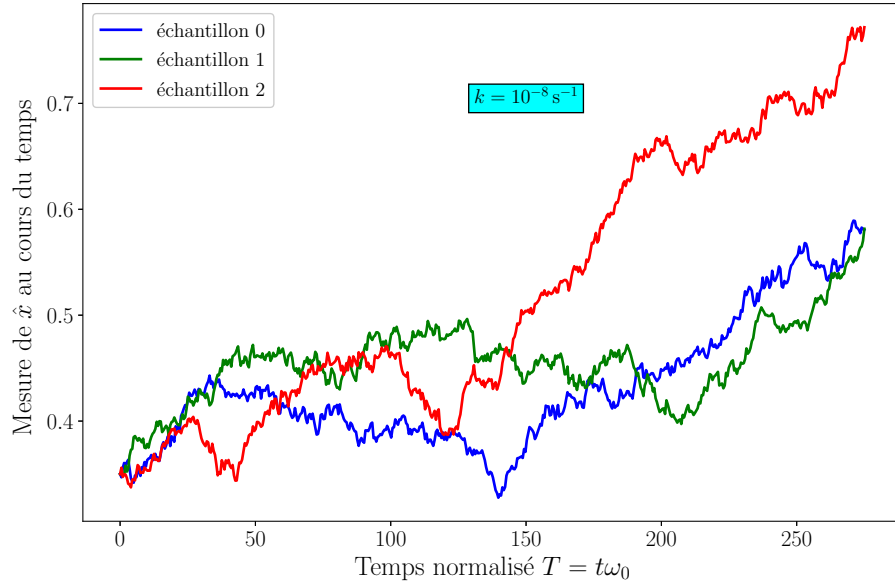


FIGURE 14: Dynamique du système perturbé par Fig.(10) et avec une mesure forte

$x = 0, 5$ . Il n'est pas utile de tracer la moyenne de  $\langle \hat{x} \rangle$  car celle-ci sera tout aussi bruitée. Dans le cas où  $k$  est très faible, l'équation (18) redonne la même dynamique que sur la Figure (11) mais les résultats de mesures sont censés eux être différents. Cependant lorsque j'ai résolu l'équation (19) mes résultats prenaient des allures exponentielles. Je n'arrive pas très bien à comprendre cette dernière équation car  $dy$  n'est pas homogène à  $\langle \hat{x} \rangle$ , j'ai donc essayé de remplacer le terme  $\langle \hat{x} \rangle$  par  $\frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt}$  en utilisant l'approximation des moindres carrés Fig.(13). J'obtiens cette fois-ci des résultats plutôt cohérents voir Figure (15) où trois échantillons de mesure différents sont tracés.

FIGURE 15: Mesure faible de l'observable  $\langle \hat{x} \rangle$

### 3.4 Ajout du frottement

Pour rendre la simulation plus réelle je vais prendre en compte le terme dissipatif dans l'équation (1) dû à l'ajout de la résistance en parallèle dans le modèle RCSJ. (Dans cette partie nous négligeons l'effet de la mesure sur le système). Pour cela j'ai trouvé deux solutions, la première consiste à résoudre un Hamiltonien non conservatif -équation (20)- où  $\gamma = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{Z}{R}$  avec  $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 51 \Omega$  mais celui-ci étant non séparable il faudrait résoudre une EDP à deux variables, ce qui est numériquement très compliqué au vu de notre potentiel, même si des solutions existent dans des cas simples comme pour l'oscillateur harmonique [2]. La seconde solution est d'utiliser l'équation de Lindblad [5] -équation (21)- qui est une généralisation de l'équation de Schrödinger aux systèmes ouverts, celle-ci porte sur la matrice densité même si dans mon cas je vais continuer à ne considérer que des états purs. Dans cette équation  $\hat{\mathcal{H}}(\mathcal{Q}, \Phi, T)$  est l'Hamiltonien (6) sans le terme diagonal superflu,  $[\cdot, \cdot]$  dénote le commutateur et  $\{\cdot, \cdot\}$  l'anti commutateur et  $\hat{\rho} = |\Psi(T)\rangle \langle \Psi(T)| = a_i(T)a_j^*(T)|i\rangle \langle j|$

$$\mathcal{H}_{\text{dissi}}(\mathcal{Q}, \Phi, T) = e^{-\gamma T} \frac{\mathcal{Q}^2}{2C} + e^{\gamma T} \left[ \frac{1}{2L} (\Phi - \Phi_{e2} + \Phi_E(T))^2 - \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{\beta_L}{L} \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right] \quad (20)$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dT} = -\frac{i}{\hbar\omega_0} \left[ \hat{\mathcal{H}}(\mathcal{Q}, \Phi, T), \hat{\rho} \right] + \underbrace{\gamma \left( \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho} \right\} \right)}_{\text{dissipation}} \quad (21)$$

Les résultats de la simulation numérique pour  $R = 5.10^3 \Omega$  peuvent être vus Figure (16), dans cette simulation pour bien voir le phénomène de cascade des différents niveaux d'énergies, on enlève la partie perturbative de  $\hat{\mathcal{H}}(\mathcal{Q}, \Phi, T)$ , ce qui fait que  $\hat{\mathcal{H}}(\mathcal{Q}, \Phi, T) = \hat{\mathcal{H}}_0$ . On suppose toujours la même condition initiale à savoir  $\hat{\rho}(T=0) = |6\rangle \langle 6|$

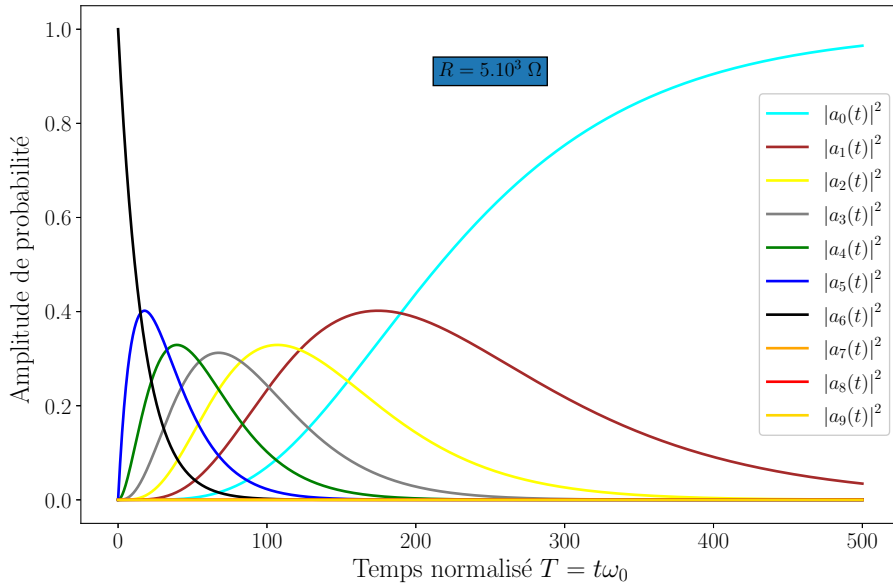


FIGURE 16: Dissipation du système non perturbé

On voit qu'avec  $R = 5.10^3 \Omega$ , la dissipation est très rapide si on l'on compare avec l'étalement temporel du signal Figure (10) par exemple. Le signal est fait pour faire passer le système de  $|6\rangle$  à  $|7\rangle$  et le système ne sera déjà quasiment plus en  $|6\rangle$  après le premier "pic" du signal. Il faut donc augmenter la valeur de la résistance afin d'avoir une dissipation moindre et de pouvoir observer l'effet du signal d'entrée comme cela est fait sur la Figure (17) où la résistance vaut  $1.10^5 \Omega$ . Cependant il faudra faire attention

dans l'utilisation du système à ne pas confondre le signal d'un photon avec la désexcitation du système, en effet la fonction d'onde  $\langle x|5\rangle$  est assez semblable à la fonction  $\langle x|7\rangle$  sachant que l'on mesure que des moyennes, il sera difficile de différencier les deux. C'est pour cela qu'il faut essayer d'avoir une résistance la plus haute possible afin que la variation de flux due à l'absorption du photon se fasse de manière beaucoup plus rapide que la dissipation. Avec  $R = 1.10^5 \Omega$  par exemple on retrouve quasiment la dynamique Figure (11).

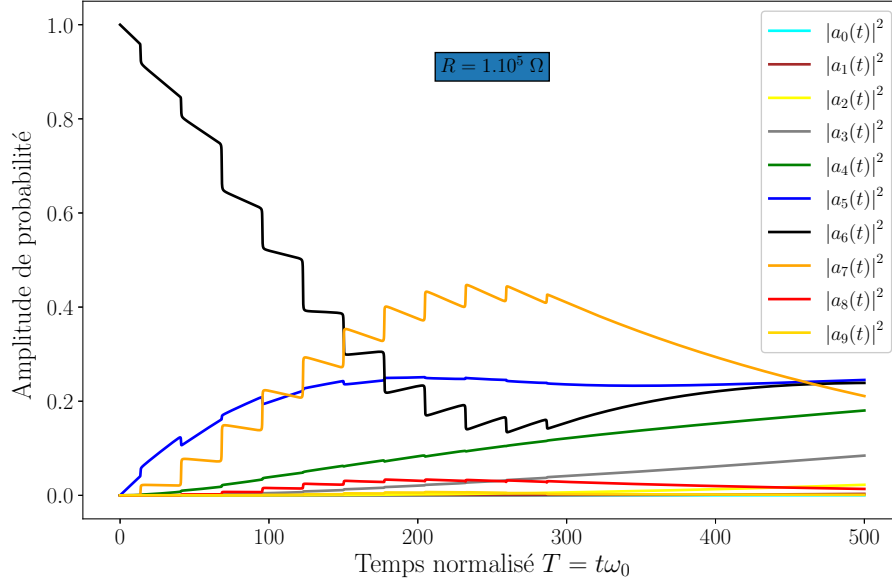


FIGURE 17: Dissipation du système perturbé

### 3.5 Initialisation du circuit

Jusqu'à maintenant à  $T = 0$  on considérait le circuit dans l'état  $|6\rangle$  cependant il faudra que celui-ci soit initialisé dans cet état. Si on considère qu'au repos le système est majoritairement en  $|0\rangle$  alors il suffira de lui envoyer un signal avec une fréquence correspondant à  $\frac{k_B}{h}(\epsilon_6 - \epsilon_0)$ . Si cette fréquence est trop grande pour le matériel utilisé, il est également possible par exemple de le faire passer en  $|3\rangle$  avant, puis ensuite d'envoyer un signal de fréquence  $\frac{k_B}{h}(\epsilon_6 - \epsilon_3)$  (où toutes autres combinaisons de niveaux). La dynamique est sensiblement la même que celle des oscillations de Rabi.

## 4 Conclusion et perspectives

En conclusion mon rapport propose le début d'une simulation d'un système quantique et essaye d'explorer différentes pistes pour modéliser son interaction avec l'environnement et sa dynamique. Au fur et à mesure de l'avancement de mon stage je me suis rendu compte que le bon formalisme pour traiter ce système est celui des systèmes ouverts. J'ai essayé de commencer à l'aborder en utilisant la matrice densité, seulement je ne l'ai utilisée qu'avec un état pur, il faut maintenant que j'essaie de coder un système impur dans le lequel la matrice représente la probabilité classique d'être dans plusieurs états quantiques. Pour perfectionner ma simulation il faudrait également rajouter un bain d'oscillateurs harmoniques correspondants aux émissions de photons de l'environnement, ainsi que le bruit dû aux fluctuations du courant et le couplage avec le système de lecture qui ajouterait un nouveau flux dans l'équation (5) avec une fréquence correspondant au circuit RLC de mesure.

## Références

- [1] Toon Baeyens and Marnix Van Daele. The fast and accurate computation of eigenvalues and eigenfunctions of time-independent one-dimensional Schrödinger equations. 258 :107568.
- [2] Jeong Ryeol Choi. Analysis of quantum energy for Caldirola–Kanai Hamiltonian systems in coherent states. 3 :115–121.
- [3] John Clarke and Alex I. Braginski, editors. *Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems*. Number J. Clarke ; A. I. Braginski (eds.) ; Vol. 1 in The SQUID Handbook. Wiley-VCH.
- [4] Michel Devoret. CIRCUITS ET SIGNAUX QUANTIQUES. page 24.
- [5] Klaus Hornberger. Introduction to decoherence theory.
- [6] Kurt Jacobs and Daniel A. Steck. A Straightforward Introduction to Continuous Quantum Measurement. 47(5) :279–303.
- [7] Edward Leonard Jr., Matthew A. Beck, J. J. Nelson, Brad G. Christensen, Ted Thorbeck, Caleb Howington, Alexander Opremcak, Ivan V. Pechenezhskiy, Kenneth Dodge, Nicholas P. Dupuis, Jaseung Ku, Francisco Schlenker, Joseph Suttle, Christopher Wilen, Shaojiang Zhu, Maxim G. Vavilov, Britton L. T. Plourde, and Robert McDermott. Digital coherent control of a superconducting qubit. 11(1) :014009.
- [8] S. E. Rasmussen, K. S. Christensen, S. P. Pedersen, L. B. Kristensen, T. Bækkegaard, N. J. S. Loft, and N. T. Zinner. The superconducting circuit companion – an introduction with worked examples.
- [9] V. Shnyrkov, Wu Yangcao, Oleg Turutanov, V. Lyakhno, and A. Soroka. Scheme for Flux-Qubit-Based Microwave Single-Photon Counter with Weak Continuous Measurement. pages 737–742.