Recherche Opérationnelle

Chaînes de Markov à temps continu

Jean-François Hêche

Institut de Mathématiques

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Les chaînes de Markov à temps continu

- Définition et structure
  - Probabilités et matrices de transition
  - Classification
  - Temps de séjour et chaîne de Markov sous-jacente
  - Intensités, matrice génératrice et graphe représentatif
- Équations de Kolmogorov : équations du futur et du passé
- Comportement asymptotique des chaînes irréductibles
- Les processus de naissance et de mort
  - Le processus de Poisson
  - La file $M/M/1$

Définition d'une chaîne de Markov à temps continu

Une **chaîne de Markov à temps continu** est un processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$, à temps continu, défini sur un espace d'états S fini ou dénombrable et vérifiant la propriété de Markov

$$P[X_{t+u} = j \mid X_s, 0 \leq s \leq t] = P[X_{t+u} = j \mid X_t] \quad \forall\, j \in S, \forall\, t, u \geq 0.$$

Une chaîne de Markov à temps continu est **homogène** (dans le temps) si les probabilités précédentes sont indépendantes de t, c.-à-d. si

$$P[X_{t+u} = j \mid X_t = i] = P[X_u = j \mid X_0 = i] \quad \forall\, i, j \in S, \forall\, t, u \geq 0.$$

Nous ne considérerons dès à présent que des processus homogènes !

Probabilités et matrices de transition

Pour une chaîne de Markov homogène, nous noterons

$$p_{ij}(t) = P[X_t = j \mid X_0 = i]$$

les **probabilités de transition** au temps t, et

$$\boldsymbol{P}(t) = (p_{ij}(t))$$

la **matrice (des probabilités) de transition** au temps t.

Hypothèse. Nous supposerons toujours que $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$.

Propriétés des matrices de transition

Si la famille de matrices $\{\boldsymbol{P}(t), t \geq 0\}$ décrit les lois d'évolution d'une chaîne de Markov à temps continu, elle doit vérifier les deux propriétés suivantes.

- Chaque matrice $\boldsymbol{P}(t)$ est une matrice stochastique.

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &\geq 0 && \forall\, t \geq 0 \\ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) &= 1 && \forall\, i \in S, \forall\, t \geq 0 \end{aligned}$$

- Les équations de Chapman-Kolmogorov sont vérifiées.

$$\boldsymbol{P}(t+u) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(u) \qquad \forall\, t, u \geq 0.$$

Remarque. Les propriétés précédentes et l'hypothèse $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$ suffisent à assurer la continuité des probabilités $p_{ij}(t)$ (vues comme fonctions de t).

Classification des chaînes de Markov à temps continu

- L'état j est **accessible** depuis l'état i s'il existe $t \geq 0$ tel que

$$p_{ij}(t) > 0.$$

- Les états i et j **communiquent** s'ils sont accessibles l'un depuis l'autre, c.-à-d. s'il existe $t_1 \geq 0$ et $t_2 \geq 0$ tel que

$$p_{ij}(t_1) > 0 \qquad \text{et} \qquad p_{ji}(t_2) > 0.$$

- Une chaîne de Markov à temps continu est **irréductible** si tous ses états communiquent deux à deux.
- Un état i est **absorbant** si $p_{ii}(t) = 1$, pour tout $t \geq 0$.

Remarque. Une chaîne de Markov à temps continu n'est jamais périodique.

Structure des chaînes de Markov à temps continu

- Temps de séjour

Supposons que l'état d'une chaîne de Markov à l'instant t soit égal à i ($X_t = i$). Elle va rester dans cet état pendant une durée aléatoire τ_i

- dont la loi ne dépend pas la valeur de t car le processus est homogène ;
- dont la loi est sans mémoire car, le processus étant markovien, son évolution au-delà de t est indépendante de son passé une fois l'état X_t connu.

Le **temps de séjour** τ_i dans l'état i est une variable aléatoire exponentielle de paramètre α_i ne dépendant que de i.

- Probabilités de passage

Lorsque la chaîne de Markov quitte l'état i, elle se déplace dans l'état j avec probabilité q_{ij}. Cette probabilité est

  - indépendante de la valeur de t car le processus est homogène ;
  - indépendante de la valeur de τ_i car le processus est markovien.

La suite des états visités par une chaîne de Markov à temps continu forme une chaîne de Markov à temps discret. Cette dernière est appelée **chaîne de Markov sous-jacente** ou **induite** et sa matrice de transition sera notée $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$.

La loi exponentielle

Une variable aléatoire X est une **variable aléatoire exponentielle de paramètre α** ($\alpha > 0$) si

$$P[X \leq x] = F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

La densité de X est

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

L'espérance et la variance de X sont

$$E[X] = \frac{1}{\alpha} \qquad Var[X] = \frac{1}{\alpha^2}.$$

La loi exponentielle est la seule loi continue sans mémoire. Plus précisément, on a

$$P[X > t + u \mid X > t] = P[X > u] \quad \forall\, t \geq 0 \text{ et } \forall\, u > 0.$$

Cas particuliers.

- Une variable exponentielle X de paramètre $\alpha = 0$ est une variable ne prenant qu'une seule valeur : l'infini. Elle vérifie

$$P[X > t] = 1 \qquad \forall\, t \geq 0.$$

  L'état i est absorbant si et seulement si le temps de séjour en i est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\alpha_i = 0$.

- Une variable exponentielle X de paramètre $\alpha = \infty$ est une variable ne prenant qu'une seule valeur : zéro.

Les chaînes régulières

Une chaîne de Markov à temps continu est **régulière** si, avec probabilité 1, le nombre de transitions qu'elle effectue dans un intervalle de temps fini est fini.

L'existence d'une constante $c < \infty$ telle que $0 \leq \alpha_i < c$ pour tout $i \in S$ suffit à assurer la régularité d'une chaîne de Markov. En particulier, toute chaîne possédant un nombre fini d'états est régulière.

Nous ne considérons ici que des chaînes régulières.

Intensités de transition et de passage

Théorème 1. *Les probabilités de transition d'une chaîne de Markov à temps continu, homogène et régulière admettent une dérivée à droite en $t = 0$ égale à*

$$a_{ij} = \frac{d}{dt} p_{ij}(t)\Big|_{t=0_+} = \lim_{t \to 0_+} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t} = \begin{cases} -\alpha_i & \text{si } i = j \\ \alpha_i q_{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Pour t petit, on a

$$P[X_t = j \mid X_0 = i] = p_{ij}(t) = a_{ij} t + o(t) \qquad i \neq j$$

et $a_{ij} = \alpha_i q_{ij}$ est appelé **intensité de transition** de i à j. On a aussi

$$P[X_t \neq i \mid X_0 = i] = 1 - p_{ii}(t) = -a_{ii} t + o(t)$$

et $a_{ii} = -\alpha_i$ est appelé **intensité de passage** hors de i.

Matrice génératrice et graphe représentatif

La matrice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ est appelée la **matrice génératrice** de la chaîne.

Toute matrice génératrice vérifie

$$a_{ij} \geq 0 \qquad i \neq j$$

et

$$\sum_{j \in S} a_{ij} = 0 \qquad \forall\, i \in S.$$

On associe à la matrice génératrice $\boldsymbol{A}$ un **graphe représentatif** $G = (V, E)$ où $V = S$ et $E = \{(i, j) \mid a_{ij} > 0\}$.

Propriété 1. *Une chaîne de Markov à temps continu est irréductible si et seulement si son graphe représentatif est fortement connexe.*

Équations de Kolmogorov

Rappelons que pour une fonction réelle f dérivable en 0, le développement de Taylor de f d'ordre 1 est, pour h petit,

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + o(h).$$

Pour $f(h) = \boldsymbol{P}(h)$ (il faudrait, en fait, traiter chaque élément successivement) on a

$$\boldsymbol{P}(h) = \boldsymbol{P}(0) + h\boldsymbol{P}'(0) + \boldsymbol{o}(h) = \boldsymbol{I} + h\boldsymbol{A} + \boldsymbol{o}(h).$$

Utilisant Taylor et Chapman-Kolomogorov, on obtient

$$\boldsymbol{P}(t+h) = \boldsymbol{P}(h)\boldsymbol{P}(t) = (\boldsymbol{I} + h\boldsymbol{A} + \boldsymbol{o}(h))\boldsymbol{P}(t)$$

et

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{P}(t+h)-\boldsymbol{P}(t)}{h} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t).$$

On obtient ainsi les premières équations de Kolmogorov connues sous le nom d'**équations du futur**

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t).$$

Partant de

$$\boldsymbol{P}(t+h) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(h) = \boldsymbol{P}(t)(\boldsymbol{I} + h\boldsymbol{A} + \boldsymbol{o}(h))$$

on obtient également

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{P}(t+h)-\boldsymbol{P}(t)}{h} = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}.$$

et les secondes équations de Kolmogorov connues sous le nom d'**équations du passé** sont

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}.$$

Pour la condition initiale $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$, les deux systèmes d'équations différentielles $\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)$ et $\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}$ ont les mêmes solutions.

De plus, sous certaines conditions (toujours vérifiées si la chaîne ne possède qu'un nombre fini d'états), l'unique solution des équations de Kolmogorov est, pour la condition initiale $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$,

$$\boldsymbol{P}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{A}t)^k}{k!} \qquad t \geq 0 \qquad (\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}).$$

Distribution initiale et comportement transitoire

Comme dans le cas à temps discret, l'état initial (au temps $t = 0$) de la chaîne est choisi selon une **distribution initiale** donnée par un vecteur de probabilités $\boldsymbol{\pi}(0)$ vérifiant

$$\pi_i(0) = P[X_0 = i] \qquad \forall\, i \in S.$$

La probabilité d'observer le processus dans l'état i au temps t est alors

$$\pi_i(t) = P[X_t = i] = \sum_{j \in S} P[X_0 = j] P[X_t = i \mid X_0 = j] = \sum_{j \in S} \pi_j(0) p_{ji}(t)$$

et

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}(t).$$

Le calcul exact ou approché de $\boldsymbol{\pi}(t)$ nécessite la résolution des équations de Kolmogorov. Cet exercice n'est possible que dans les cas les plus simples. Ainsi, comme pour les processus à temps discret, on s'intéresse le plus souvent au comportement à long terme des chaînes de Markov à temps continu.

Les questions centrales de cette étude asymptotique ne sont pas différentes entre le cas à temps discret et celui à temps continu :

- Sous quelles conditions la chaîne est-elle asymtotiquement stationaire ?
- Quelle est la distribution asymptotique ? Est-elle indépendante de la distribution initiale ?
- Quel est le pourcentage du temps passé dans un état donné ? Quel est le temps moyen entre deux visites successives d'un état donné ?

Comportement asymptotique des chaînes homogènes, régulières et irréductibles

Si une chaîne possède une distribution asymptotique unique, elle doit être irréductible (ou du moins ne posséder qu'une classe persistante).

Pour toute chaîne irréductible, $\lim_{t\to\infty} \pi_j(t)$ existe et est indépendante de $\boldsymbol{\pi}(0)$:

$$\lim_{t\to\infty} \pi_j(t) = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j^*$$

pour tout $j \in S$ indépendamment de i.

De plus, si $\lim_{t\to\infty} \pi_j(t) = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ existe, alors

$$\lim_{t\to\infty} \pi'_j(t) = \lim_{t\to\infty} p'_{ij}(t) = 0.$$

Partant des équations du passé

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) a_{kj} \qquad \forall\, i, j \in S, \forall\, t \geq 0$$

et prenant la limite lorsque t tend vers l'infini, les probabilités stationnaires doivent vérifier

$$0 = \sum_{k \in S} \pi_k^* a_{kj} \qquad \forall\, j \in S.$$

Sous forme matricielle, la distribution $\boldsymbol{\pi}$ est stationnaire si elle est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{\pi A} & = & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\pi 1} & = & 1. \end{array} \right.$$

Théorème 2. *Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ une chaîne de Markov à temps continu, homogène, régulière et irréductible. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- *La suite $\{\boldsymbol{P}(t), t \geq 0\}$ des matrices de transition du processus converge vers une matrice $\boldsymbol{P}^*$ lorsque t tend vers l'infini.*
- *Les lignes de $\boldsymbol{P}^*$ sont toutes égales à un même vecteur $\boldsymbol{\pi}^*$.*
- *Soit $\pi_j^* = 0$ pour tout $j \in S$ et la chaîne est transitoire ou récurrente nulle, soit $\pi_j^* > 0$ pour tout $j \in S$ et la chaîne est récurrente non nulle*
- *Si la chaîne est récurrente non nulle, elle est ergodique. Dans ce cas, le vecteur $\boldsymbol{\pi}^*$ est une distribution de probabilités et est la solution unique du système*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{1} &= 1. \end{cases}$$

Les équations $\boldsymbol{\pi A} = \mathbf{0}$ sont appelées les équations de bilan et s'écrivent aussi

$$-\pi_i a_{ii} = \sum_{j \neq i} \pi_j a_{ji} \qquad \forall\, i \in S.$$

La partie gauche représente le taux de transition hors de l'état i et la partie droite le taux de transition dans l'état i. Pour une distribution stationnaire, ces deux taux doivent être égaux quel que soit l'état considéré.

La probabilité π_i^* est égale à la proportion du temps passé dans l'état i si le système est observé suffisamment longtemps.

On peut également montrer que, pour tout $i \in S$, $\dfrac{1}{\pi_i^* \alpha_i}$ est égal à l'espérance du temps entre deux visites successives de l'état i.

Les processus de naissance et de mort

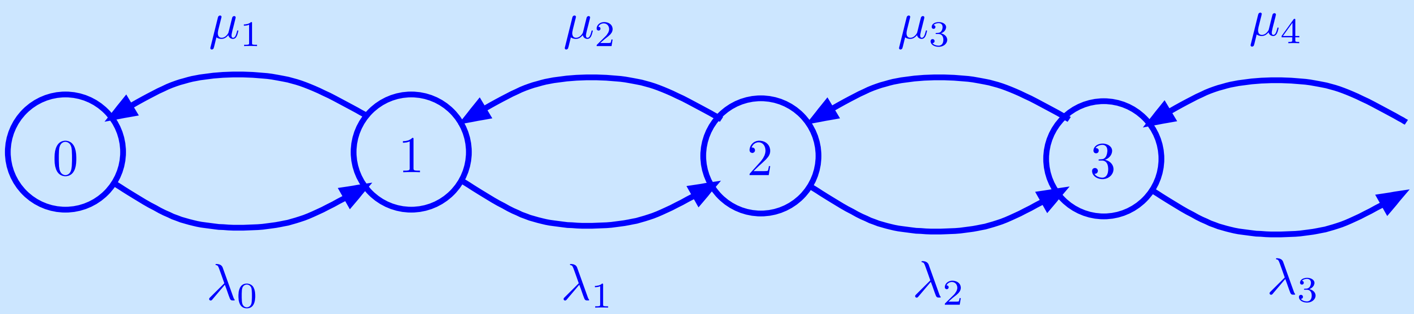
Un **processus de naissance et de mort** est une chaîne de Markov à temps continu,

- définie sur l'espace des états $S = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ou, éventuellement, $S = \{0, 1, \ldots, K\}$;
- telle que depuis n'importe quel état i, les seules transitions possibles se font soit vers l'état $i - 1$ (mort) soit vers l'état $i + 1$ (naissance).

Le plus souvent, l'état X_t du processus au temps t est interprété comme la taille d'une population. Si cette taille est égale à i,

- le taux de naissance est $\lambda_i = a_{i,i+1}$, $i = 0, 1, 2 \ldots$;
- le taux de mort est $\mu_i = a_{i-1,i}$, $i = 1, 2 \ldots$ (on a évidemment $\mu_0 = 0$).

Graphe représentatif et matrice génératrice



$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & & & & \\
\mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & & & \\
 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & & \\
 & & \mu_3 & -\lambda_3 - \mu_3 & \lambda_3 & \\
 & & & & &
\end{pmatrix}
$$

Interprétation

Un gardant comme image l'évolution de la taille d'une population, l'état X_t de la chaîne au temps t représente le nombre d'individus vivants.

Lorsque la taille de la population est i,

- le temps avant la prochaine naissance est une variable aléaoire exponentielle de paramètre λ_i ;
- le temps avant la prochaine mort est une variable aléatoire exponentielle de paramètre μ_i.

Les deux variables précédentes sont indépendantes et le processus reste dans l'état i pendant une durée aléatoire exponentielle de paramètre $\alpha_i = \lambda_i + \mu_i$.

Rappel. Le minimum de n variables exponentielles indépendantes de paramètres λ_i est une variable exponentielle de paramètre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Lorsqu'il quitte l'état i, le processus se retrouve dans l'état $i-1$ avec probabilité

$$q_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

et dans l'état $i+1$ avec probabilité

$$q_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}.$$

La matrice de transition de la chaîne sous-jacente est donc

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1} & & \\ & \frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2} & \\ & & \frac{\mu_3}{\lambda_3+\mu_3} & 0 & \frac{\lambda_3}{\lambda_3+\mu_3} \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Distribution stationnaire

Si le processus de naissance et de mort est irréductible et régulier, le calcul de sa distribution stationnaire, si elle existe, se ramène à la résolution des équations de bilan $\boldsymbol{\pi A} = \mathbf{0}$.

Elles s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{lllll} 0 & = & & -\lambda_0\pi_0 & +\mu_1\pi_1 \\ 0 & = & \lambda_0\pi_0 & -(\lambda_1+\mu_1)\pi_1 & +\mu_2\pi_2 \\ 0 & = & \lambda_1\pi_1 & -(\lambda_2+\mu_2)\pi_2 & +\mu_3\pi_3 \\ & \dots & & & \\ 0 & = & \lambda_{k-2}\pi_{k-2} & -(\lambda_{k-1}+\mu_{k-1})\pi_{k-1} & +\mu_k\pi_k \\ & \dots & & & \end{array}\right.$$

ou, en isolant $\mu_i \pi_i$ de l'équation i et en substitutant dans l'équation $i+1$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu_1 \pi_1 & = & \lambda_0 \pi_0 \\ \mu_2 \pi_2 & = & \lambda_1 \pi_1 + (\mu_1 \pi_1 - \lambda_0 \pi_0) = \lambda_1 \pi_1 \\ \mu_3 \pi_3 & = & \lambda_2 \pi_2 + (\mu_2 \pi_2 - \lambda_1 \pi_1) = \lambda_2 \pi_2 \\ & \cdots & \\ \mu_k \pi_k & = & \lambda_{k-1} \pi_{k-1} + (\mu_{k-1} \pi_{k-1} - \lambda_{k-2} \pi_{k-2}) = \lambda_{k-1} \pi_{k-1} \\ & \cdots & \end{array} \right.$$

La solution de ce système, en fonction de π_0, est

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\pi_1 & = & \pi_0 \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} \\
\pi_2 & = & \pi_1 \dfrac{\lambda_1}{\mu_2} = \pi_0 \dfrac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \\
\pi_3 & = & \pi_2 \dfrac{\lambda_2}{\mu_3} = \pi_0 \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \\
 & \cdots & \\
\pi_k & = & \pi_{k-1} \dfrac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = \pi_0 \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} = \pi_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \\
 & \cdots &
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

Pour déterminer π_0, il suffit d'utiliser $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$, c'est-à-dire

$$\pi_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) = 1. \tag{2}$$

La condition d'existence d'une distribution stationnaire est donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} < \infty. \tag{3}$$

Si elle est vérifiée, le processus est ergodique et

$$\lim_{t \to \infty} \pi_j(t) = \pi_j^* > 0 \qquad \forall j$$

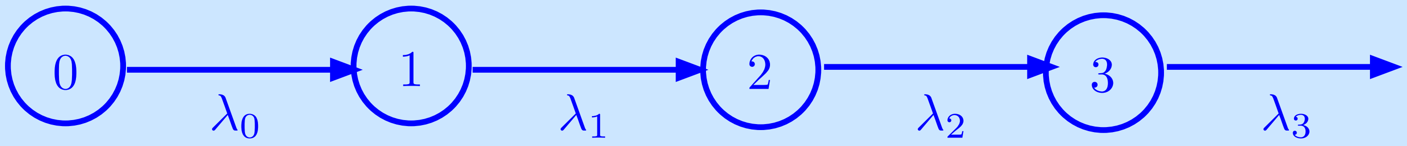
où π_j^* est donné par (1) et (2).

Cas particulier : le processus de Poisson

Un processus de Poisson est un processus de naissance pur à taux constant :

$$\lambda_i = \lambda \qquad \forall\, i \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \mu_i = 0 \qquad \forall\, i > 0.$$

De graphe représentatif



un tel processus n'admet évidemment pas de distribution stationnaire (chaque état forme une classe à lui seul) mais est suffisamment simple pour qu'on puisse résoudre les équations de Kolmogorov.

Pour la condition initiale $\pi_0(0) = 1$ et $\pi_i(0) = 0$ pour $i \geq 1$, les équations du passé deviennent, pour $t \geq 0$,

$$\begin{cases} \pi_0'(t) & = & & - & \lambda\pi_0(t) \\ \pi_1'(t) & = & \lambda\pi_0(t) & - & \lambda\pi_1(t) \\ \pi_2'(t) & = & \lambda\pi_1(t) & - & \lambda\pi_2(t) \\ & \cdots & & & \end{cases}$$

et leur solution est

$$\pi_i(t) = P[X_t = i \mid X_0 = 0] = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \qquad i = 0, 1, \ldots;\ t \geq 0.$$

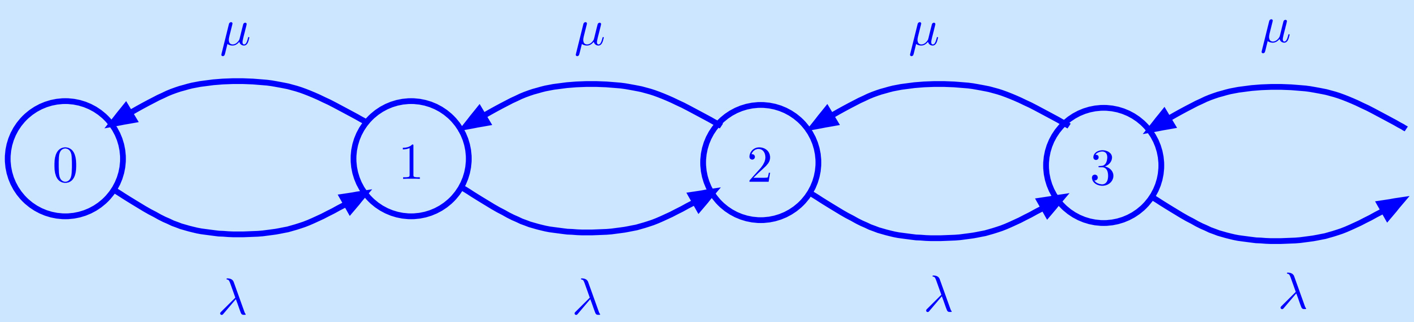
Autrement dit, $\pi_i(t)$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λt.

Le processus de Poisson $\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus de comptage d'événements se produisant dans le temps, deux événements consécutifs étant séparant par une durée aléatoire exponentielle de paramètre λ.

Cas particulier : la file d'attente $M/M/1$

La file $M/M/1$ est un processus très simple où les taux de naissance et de mort sont constants :

$$\lambda_i = \lambda > 0 \quad i = 0, 1, \dots \qquad \text{et} \qquad \mu_i = \mu > 0 \quad i = 1, 2, \dots$$



Même pour ce cas très simple, la résolution des équations de Kolmogorov est loin d'être triviale (elle est cependant possible à l'aide des transformées de Laplace et des fonctions de Bessel).

Le calcul de la distribution stationnaire est, lui, beaucoup plus simple. Posant

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

la solution du système (1) n'est rien d'autre que

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \pi_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\mu} = \pi_0 \prod_{i=1}^{k} \rho = \pi_0 \rho^k.$$

La condition (3) se résume à

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k < \infty$$

et cette série géométrique converge si et seulement si

$$\rho < 1.$$

Cette condition de stabilité demande que le nombre de morts pas unité de temps soit plus élevé que le nombre de naissances par unité de temps. Si elle n'est pas satisfaite, la taille de la population augmente inexorablement avec le temps.

Remarque. La chaîne de Markov est irréductible quelque soit la valeur de ρ. Cependant,

- si $\rho > 1$, tous les états sont transitoires et $\pi_i^* = 0$ pour tout i ;
- si $\rho = 1$, tous les états sont récurrents nuls et $\pi_i^* = 0$ pour tout i ;
- si $\rho < 1$, tous les états sont récurrents non nuls et $\pi_i^* > 0$ pour tout i.

Lorsque la file est stable ($\iff \rho < 1$), la valeur de π_0 se déduit de (2) :

$$\pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \right) = 1 \qquad \iff \qquad \pi_0 = 1 - \rho.$$

La distribution stationnaire est donc

$$\pi_k^* = (1-\rho)\rho^k \qquad k = 0, 1, \ldots$$

La probabilité que la population comporte au moins un individu est

$$P[X > 0] = 1 - P[X = 0] = 1 - \pi_0^* = \rho$$

et la taille moyenne de la population est

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k^* = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$