



Lomonosov Moscow State University



Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics

---

Суперкомпьютерное моделирование и технологии

Отчет о выполнении задания

Разработка параллельной программы решения  
трехмерного гиперболического уравнения

Вариант 4

студент 624 группы факультета ВМК МГУ

Гладышев Глеб Юрьевич

## Содержание

<b>1</b>	<b>Математическая постановка дифференциальной задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Численный метод решения задачи</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Особенности варианта</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Программная реализация</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Графики решений и погрешности</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Расчеты времени выполнения и погрешности</b>	<b>6</b>
6.1	OpenMP . . . . .	6
6.2	MPI . . . . .	7
6.3	MPI + OpenMP . . . . .	7
6.4	MPI + CUDA . . . . .	9
<b>7</b>	<b>Профилирование MPI+CUDA</b>	<b>9</b>
<b>8</b>	<b>Выводы</b>	<b>10</b>

# 1 Математическая постановка дифференциальной задачи

В трехмерной замкнутой области

$$\Omega = [0 \leq x \leq L_x] \times [0 \leq y \leq L_y] \times [0 \leq z \leq L_z]$$

для  $0 < t \leq T$  требуется найти решение  $u(x, y, z, t)$  уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u,$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

при условии, что на границах области заданы однородные граничные условия первого рода

$$u(0, y, z, t) = 0, \quad u(L_x, y, z, t) = 0,$$

$$u(x, 0, z, t) = 0, \quad u(x, L_y, z, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0, t) = 0, \quad u(x, y, L_z, t) = 0,$$

либо периодические граничные условия

$$u(0, y, z, t) = u(L_x, y, z, t), \quad u_x(0, y, z, t) = u_x(L_x, y, z, t),$$

$$u(x, 0, z, t) = u(x, L_y, z, t), \quad u_y(x, 0, z, t) = u_y(x, L_y, z, t),$$

$$u(x, y, 0, t) = u(x, y, L_z, t), \quad u_z(x, y, 0, t) = u_z(x, y, L_z, t).$$

Конкретная комбинация граничных условий определяется индивидуальным вариантом задания.

## 2 Численный метод решения задачи

Для численного решения задачи введем на  $\Omega$  сетку  $\omega_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$ , где

$$T = T_0, \quad L_x = L_{x0}, \quad L_y = L_{y0}, \quad L_z = L_{z0},$$

$$\bar{\omega}_h = \{(x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z), i, j, k = 0, 1, \dots, N, h_x N = L_x, h_y N = L_y, h_z N = L_z\},$$

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, K, \tau K = T\}.$$

Через  $\omega_h$  обозначим множество внутренних, а через  $\gamma_h$  — множество граничных узлов сетки  $\bar{\omega}_h$ .

Для аппроксимации исходного уравнения (1) с однородными граничными условиями (4)-(6) и начальными условиями (2)-(3) воспользуемся следующей системой уравнений:

$$\frac{u_{ijk}^{n+1} - 2u_{ijk}^n + u_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = \Delta_h u^n, \quad (x_i, y_j, z_k) \in \omega_h, \quad n = 1, 2, \dots, K-1,$$

где  $\Delta_h$  — семиточечный разностный аналог оператора Лапласа:

$$\Delta_h u^n = \frac{u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n}{h^2} + \frac{u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n}{h^2} + \frac{u_{i,j,k-1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k+1}^n}{h^2}.$$

Приведенная выше разностная схема является явной — значение  $u_{ijk}^{n+1}$  на  $(n+1)$ -м шаге можно явно выразить через значения на предыдущих слоях.

Для начала счета (т.е. для нахождения  $u_{ijk}^2$ ) должны быть заданы значения  $u_{ijk}^0$  и  $u_{ijk}^1$ ,  $(x_i, y_j, z_k) \in \omega_h$ . Из условия (2) имеем

$$u_{ijk}^0 = \varphi(x_i, y_j, z_k), \quad (x_i, y_j, z_k) \in \omega_h.$$

Простейшая замена начального условия (3) уравнением  $(u_{ijk}^1 - u_{ijk}^0)/\tau = 0$  имеет лишь первый порядок аппроксимации по  $\tau$ . Аппроксимацию второго порядка по  $\tau$  и  $h$  дает разностное уравнение

$$\frac{u_{ijk}^1 - u_{ijk}^0}{\tau} = \frac{\tau}{2} \Delta_h \varphi(x_i, y_j, z_k), \quad (x_i, y_j, z_k) \in \omega_h.$$

Откуда

$$u_{ijk}^1 = u_{ijk}^0 + \frac{\tau^2}{2} \Delta_h \varphi(x_i, y_j, z_k).$$

Разностная аппроксимация для периодических граничных условий выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{0jk}^{n+1} &= u_{Njk}^{n+1}, & u_{1jk}^{n+1} &= u_{N+1,j,k}^{n+1}, \\ u_{i0k}^{n+1} &= u_{iNk}^{n+1}, & u_{i1k}^{n+1} &= u_{iN+1,k}^{n+1}, \\ u_{ij0}^{n+1} &= u_{ijN}^{n+1}, & u_{ij1}^{n+1} &= u_{ijN+1}^{n+1}, \end{aligned}$$

где  $i, j, k = 0, 1, \dots, N$ . Для вычисления значений  $u^0, u^1 \in \gamma_h$  допускается использование аналитического значения  $u$ , которое задается в программе еще для вычисления погрешности решения задачи.

### 3 Особенности варианта

$x$	$y$	$z$	$u_{\text{analytical}}$
1P	П	П	$\sin\left(\frac{3\pi}{L_x}x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L_y}y\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L_z}z\right) \cdot \cos(a_t \cdot t + 4\pi), \quad a_t = \pi \sqrt{\frac{9}{L_x^2} + \frac{4}{L_y^2} + \frac{4}{L_z^2}}$

### 4 Программная реализация

Алгоритм решения задачи выглядит следующим образом:

1. Исходя из варианта, рассчитывается точное аналитическое решение  $u_{\text{analytical}}$  в узлах сетки.
2. Проводим разбиение области  $\Omega$  между процессами.
3. Фиксируем временной слой (начиная с  $t = 0$ ).
4. Используя формулы (10) и (12), находим значения  $u^0$  и  $u^1$ .
5. Пользуясь найденными  $u^0$  и  $u^1$  и разностным представлением уравнения (1), находим значения  $u$  в локальной области разбиения.
6. Передаем посчитанные граничные значения блокам-соседям.
7. Повторяем шаги 5-6 для внутренних блоков.
8. Определяем максимальную погрешность на сетке между посчитанным и аналитическим решением.
9. Переходим на следующий слой по времени и повторяем шаги 2-9.

В параллельной версии программы с помощью технологии OpenMP осуществляется распараллеливание следующих фрагментов кода:

- цикл по узлам сетки, вычисляющий начальное условие задачи в момент времени  $t = 0$ .
- цикл по внутренним узлам сетки, вычисляющий приближенное значение решения в момент времени  $t = \tau$ .
- цикл по внутренним узлам сетки, вычисляющий приближенное значение решения на каждом временном слое.

- цикл по всем узлам сетки, вычисляющий максимальную разницу между численным решением и аналитическим решением.

Использована директива OpenMP `reduction(max:max_error)`, которая обеспечивает корректное объединение локальных максимальных значений от каждого потока в глобальное максимальное значение.

В представленном коде реализована параллельная программа с использованием библиотеки MPI. Работа начинается с инициализации среды MPI при помощи `MPI_Init`, где каждому процессу присваивается уникальный идентификатор (`rank`) и определяется общее количество процессов (`size`) с помощью `MPI_Comm_rank` и `MPI_Comm_size`.

Для распределения процессов в трёхмерной сетке используется функция `MPI_Dims_create`, которая автоматически определяет разбиение по осям X, Y, Z. Затем `MPI_Cart_create` создаёт декартову топологию, упорядочивая процессы в трёхмерной структуре. Каждый процесс определяет свои координаты в этой решётке с помощью `MPI_Cart_coords`.

Чтобы организовать обмен данными между соседними процессами, `MPI_Cart_shift` определяет соседей каждого процесса по каждой из осей, задавая их ранги в `neighborRanksPrev` и `neighborRanksNext`. Эти данные используются для передачи и получения граничных слоёв между процессами.

Глобальные размеры сетки задаются переменными `Nx`, `Ny`, `Nz`, а локальные размеры вычисляются для каждого процесса в зависимости от количества процессов по оси (`gridDimensions`) и координат процесса в сетке (`gridCoordinates`). Границы локального блока данных (`xCoordinates`, `yCoordinates`, `zCoordinates`) определяются функцией `initCoordinates`, которая рассчитывает индексы начала и конца блока на основе шагов сетки (`hx`, `hy`, `hz`).

Функция `communicateBoundaryLayers` обеспечивает обмен граничными слоями между соседними процессами, используя буферы `sendLeftX`, `sendRightX` и их аналоги для всех осей. Передача и приём данных выполняются с помощью `MPI_Sendrecv`.

Начальные значения для вычислений задаются функцией `updateField`, которая рассчитывает значение поля `u` на основе аналитического решения. На каждом временном шаге данные обновляются, а вычисления производятся с использованием оператора Лапласа (`computeLaplacian`) и метода конечных разностей.

Время выполнения программы измеряется через `MPI_Wtime`. Максимальное время среди всех процессов определяется при помощи `MPI_Reduce` и выводится процессом с нулевым рангом. Завершение работы программы и освобождение ресурсов происходит с вызовом `MPI_Finalize`.

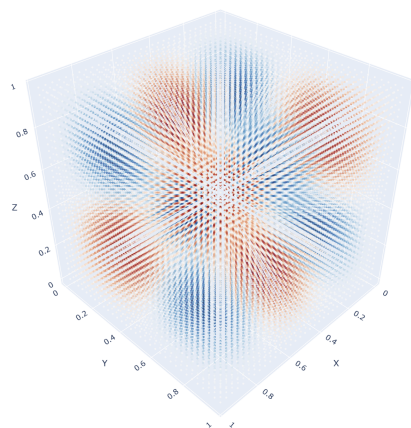
В параллельной версии MPI+CUDA для работы с памятью и реализации редукции использовалась библиотека `thrust`. С помощью `nvprof` было выполнено профилирование и подсчитано время, затраченное на работу различных функций программы.

Проверка корректности выполнения параллельных версий программ проверялась сопоставлением результатов работы программ с результатами работы последовательной версии. Ошибки вычисления функции на каждом временном слое выводились в файл мастер-процессом и сравнивались с ошибками последовательной версии. Полученные одинаковые значения позволяют предположить правильность работы программ.

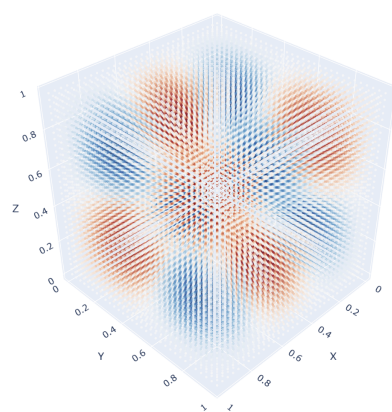
## 5 Графики решений и погрешности

Графики для аналитической функции, вычисленной функции и погрешности вычисления для  $L = 1$ ,  $N = 128$

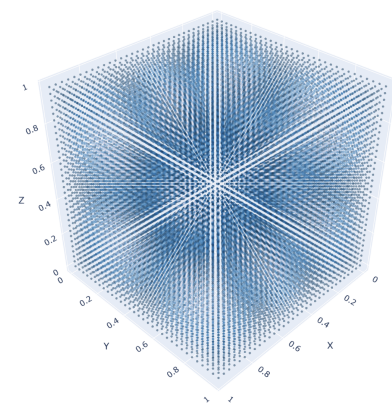
Численное решение:



Аналитическое решение:



Погрешность:



## 6 Расчеты времени выполнения и погрешности

### 6.1 OpenMP

Таблица 1: Анализ производительности с различными параметрами сетки

Входные данные $L$	Число OpenMP нитей в процессе	Число точек сетки $N^3$	Время решения $T$	Ускорение $S$	Погрешность $\delta$
1	1	$128^3$	3.34371	1	3.98742e-06
1	2	$128^3$	1.91444	1.74657	3.98742e-06
1	4	$128^3$	1.08232	3.08939	3.98742e-06
1	8	$128^3$	0.622881	5.36814	3.98742e-06
1	16	$128^3$	0.304624	10.97651	3.98742e-06
1	1	$256^3$	26.4043	1	8.00743e-06
1	2	$256^3$	13.9152	1.89751	8.00743e-06
1	4	$256^3$	7.14958	3.69312	8.00743e-06
1	8	$256^3$	4.98064	5.30139	8.00743e-06
1	16	$256^3$	3.03546	8.69861	8.00743e-06
$\pi$	1	$128^3$	3.32794	1	4.04025e-07
$\pi$	2	$128^3$	1.72477	1.92949	4.04025e-07
$\pi$	4	$128^3$	0.919064	3.62101	4.04025e-07
$\pi$	8	$128^3$	0.608638	5.46785	4.04025e-07
$\pi$	16	$128^3$	0.304545	10.9275805	4.04025e-07
$\pi$	1	$256^3$	26.4894	1	8.11441e-07
$\pi$	2	$256^3$	13.2944	1.99252	8.11441e-07
$\pi$	4	$256^3$	6.74646	3.92641	8.11441e-07
$\pi$	8	$256^3$	3.65854	7.24042	8.11441e-07
$\pi$	16	$256^3$	3.14987	8.40968	8.11441e-07

## 6.2 MPI

Таблица 2: Анализ производительности с различными параметрами сетки

Входные данные $L$	Число MPI процессов	Число точек сетки $N^3$	Время решения $T$	Ускорение $S$	Погрешность $\delta$
1	1	$128^3$	8.27669	1	3.98744e-06
1	2	$128^3$	4.31723	1.91712	3.98744e-06
1	4	$128^3$	2.29078	3.61304	3.98744e-06
1	8	$128^3$	1.30512	6.34170	3.98744e-06
1	10	$128^3$	4.97012	1.6653	3.98744e-06
1	16	$128^3$	0.87159	9.49608	3.98744e-06
1	20	$128^3$	0.795861	10.3997	3.98744e-06
1	32	$128^3$	0.65704	12.59693	3.98744e-06
1	1	$256^3$	64.04690	1	8.00759e-06
1	2	$256^3$	32.62930	1.96286	8.00759e-06
1	4	$256^3$	16.99500	3.76857	8.00759e-06
1	8	$256^3$	9.45677	6.7726	8.00759e-06
1	10	$256^3$	34.8285	1.83892	8.00759e-06
1	16	$256^3$	7.21225	8.88029	8.00759e-06
1	20	$256^3$	4.53177	14.13286	8.00759e-06
1	32	$256^3$	4.85620	13.18869	8.00759e-06
$\pi$	1	$512^3$	589.397	1	1.60438e-05
$\pi$	10	$512^3$	125.508	3.06767	1.60438e-05
$\pi$	20	$512^3$	59.5438	18.4759	1.60438e-05
$\pi$	1	$128^3$	8.08089	1	4.04025e-07
$\pi$	2	$128^3$	4.23362	1.90874	4.04025e-07
$\pi$	4	$128^3$	3.70684	2.17999	4.04025e-07
$\pi$	8	$128^3$	1.26281	6.39913	4.04025e-07
$\pi$	10	$128^3$	4.88576	1.65397	4.04025e-07
$\pi$	16	$128^3$	1.09307	7.39284	4.04025e-07
$\pi$	20	$128^3$	0.825526	9.788778	4.04025e-07
$\pi$	32	$128^3$	0.499441	16.17987	4.04025e-07
$\pi$	1	$256^3$	64.45800	1	8.11442e-07
$\pi$	2	$256^3$	32.57080	1.97901	8.11441e-07
$\pi$	4	$256^3$	17.02980	3.78501	8.11441e-07
$\pi$	8	$256^3$	9.52857	6.76471	8.11441e-07
$\pi$	10	$256^3$	33.9424	1.899	8.11441e-07
$\pi$	16	$256^3$	4.82382	13.36244	8.11441e-07
$\pi$	20	$256^3$	4.47272	14.41136	8.11441e-07
$\pi$	32	$256^3$	2.97843	21.6416	8.11441e-07
$\pi$	1	$512^3$	589.397	1	1.62641e-06
$\pi$	10	$512^3$	192.132	3.06767	1.62641e-06
$\pi$	20	$512^3$	31.9008	18.4759	1.62641e-06

## 6.3 MPI + OpenMP

Везде число нитей OpenMP = 4



Таблица 3: Анализ производительности с различными параметрами сетки

Входные данные $L$	Число MPI процессов	Число точек сетки $N^3$	Время ре- шения $T$	Ускорение $S$	Погрешность $\delta$
1	1	$128^3$	6.79814	1	3.98744e-06
1	2	$128^3$	9.62519	0.70629	3.98744e-06
1	4	$128^3$	11.3649	0.59817	3.98744e-06
1	8	$128^3$	14.0331	0.48444	3.98744e-06
1	16	$128^3$	10.2732	0.66174	3.98744e-06
1	32	$128^3$	25.3954	0.26769	3.98744e-06
1	1	$256^3$	34.9094	1	8.00759e-06
1	2	$256^3$	22.8497	1.52778	8.00759e-06
1	4	$256^3$	35.8495	0.97378	8.00759e-06
1	8	$256^3$	13.4166	2.60196	8.00759e-06
1	16	$256^3$	9.2506	3.77374	8.00759e-06
1	32	$256^3$	19.3432	1.80474	8.00759e-06
$\pi$	1	$128^3$	2.22027	1	4.04025e-07
$\pi$	2	$128^3$	7.59362	0.29239	4.04025e-07
$\pi$	4	$128^3$	9.08707	0.24433	4.04025e-07
$\pi$	8	$128^3$	6.70878	0.33095	4.04025e-07
$\pi$	16	$128^3$	16.8566	0.13172	4.04025e-07
$\pi$	32	$128^3$	13.104	0.16943	4.04025e-07
$\pi$	1	$256^3$	16.9434	1	8.11442e-07
$\pi$	2	$256^3$	33.0304	0.51296	8.11441e-07
$\pi$	4	$256^3$	26.9937	0.62768	8.11441e-07
$\pi$	8	$256^3$	32.7482	0.51738	8.11441e-07
$\pi$	16	$256^3$	23.2874	0.72758	8.11441e-07
$\pi$	32	$256^3$	17.2685	0.98117	8.11441e-07

Гибридная программа MPI+OpenMP с числом нитей 4 демонстрирует значительно худшую производительность по сравнению с программой, использующей только MPI. Это связано с существенными накладными расходами. Помимо затрат на межпроцессные коммуникации, использование OpenMP увеличивает нагрузку, так как потоки обрабатывают относительно небольшую часть данных, выделенных процессу. В результате на графиках при увеличении числа процессов часто наблюдается замедление работы программы.

Таблица 4: Анализ производительности с различными параметрами сетки

Входные данные $L$	Число MPI процессов	Число OMP нитей	Число точек сетки $N^3$	Время решения $T$	Ускорение $S$	Погрешность $\delta$
1	1	1	$128^3$	8.75989	1	3.98744e-06
1	1	20	$128^3$	1.7543	4.9933	3.98744e-06
1	1	40	$128^3$	0.722399	12.12611	3.98744e-06
1	1	80	$128^3$	1.18963	7.36354	3.98744e-06
1	1	160	$128^3$	1.5523	5.64317	3.98744e-06
1	1	1	$256^3$	534.639	1	3.98744e-06
1	1	20	$256^3$	434.154	1.2415	3.98744e-06
1	1	40	$256^3$	402.602	1.32796	3.98744e-06
1	1	80	$256^3$	399.083	1.33967	3.98744e-06
1	1	160	$256^3$	596.492	0.8963	3.98744e-06
1	2	1	$128^3$	12.4376	1	3.98744e-06
1	2	20	$128^3$	17.6084	0.70634	3.98744e-06
1	2	40	$128^3$	24.3897	0.50995	3.98744e-06
1	2	80	$128^3$	64.9352	0.19154	3.98744e-06
1	2	1	$256^3$	486.685	1	3.98744e-06
1	2	20	$256^3$	483.263	1.0071	3.98744e-06
1	2	40	$256^3$	576.884	0.84365	3.98744e-06
1	2	80	$256^3$	567.913	0.8570	3.98744e-06

## 6.4 MPI + CUDA

CUDA со 128 потоками в одном блоке

Таблица 5

Входные данные $L$	Число MPI процессов	Число точек сетки $N^3$	Число GPU	Время решения $T$	Погрешность $\delta$
1	1	$512^3$	1	5.46489	1.74656e-09
1	2	$512^3$	2	3.61453	1.74656e-09
$\pi$	1	$512^3$	1	13.1153	1.77233e-10
$\pi$	2	$512^3$	2	7.11973	1.77233e-10

## 7 Профилирование MPI+CUDA

Для оценки времени выполнения различных частей программы были проведены замеры с использованием утилиты `nvprof`. Программа запускалась на одном MPI-процессе с различными размерами сетки  $N = 128, 256$  и  $512$ . Общее время, затраченное на выполнение основных функций, представлено в таблицах.

Таблица 6: Времена выполнения основных функций при  $L = 1, p = 1$ 

Имя функции	Время выполнения
<b>N = 128</b>	
computeLayerErrorKernel(...)	27.006 ms
updateFieldKernel(...)	3.1602 ms
initializeU1Kernel(...)	169.54 us
initializeField(...)	205.77 us
<b>N = 256</b>	
computeLayerErrorKernel(...)	202.39 ms
updateFieldKernel(...)	24.960 ms
initializeU1Kernel(...)	1.3360 ms
initializeField(...)	1.6409 ms
<b>N = 512</b>	
computeLayerErrorKernel(...)	1.50482 s
updateFieldKernel(...)	211.01 ms
initializeU1Kernel(...)	10.662 ms
initializeField(...)	13.304 ms

Таблица 7: Времена выполнения вспомогательных функций при  $L = 1, p = 1$ 

Имя функции	Время выполнения
<b>N = 128</b>	
cudaMemcpyAsync	32.984 ms
cudaDeviceSynchronize	29.565 ms
cudaMalloc	223.83 ms
cudaLaunchKernel	1.7302 ms
cudaFree	406.46 us
<b>N = 256</b>	
cudaMemcpyAsync	349.84 ms
cudaDeviceSynchronize	228.70 ms
cudaMalloc	183.97 ms
cudaLaunchKernel	2.0977 ms
cudaFree	797.19 us
<b>N = 512</b>	
cudaMemcpyAsync	2.80755 s
cudaDeviceSynchronize	1.72791 s
cudaMalloc	198.96 ms
cudaLaunchKernel	2.3508 ms
cudaFree	3.7970 ms

## 8 Выводы

В ходе работы были разработаны последовательная и четыре параллельные программы (OpenMP, MPI, MPI+OpenMP, MPI+CUDA) для численного решения трехмерного гиперболического уравнения с использованием явной разностной схемы. Для вычисления максимальной погрешности и предотвращения состояния гонки применялся механизм редукции с функцией «максимум».

Несмотря на неизбежные дополнительные затраты при выполнении параллельных программ, можно заключить, что использование параллельного алгоритма для решения этой задачи существенно сокращает время вычисления значений функции и обеспечивает более высокую точность результатов.