Принцип вычисления ошибок в методах

Остаток(Residuals в коде) — это ошибка, которая вычисляется как разница между значением, полученным методом, и значением, которое должно было быть получено по идее (например, подставив найденный корень в исходное уравнение).

Остатки дают представление о точности решения: если остаток велик, значит, метод дал неточное решение.

В методе Кардано ошибки могут возникать при вычислении дискриминанта и корней уравнения из-за операций с числами, которые имеют сильно разные порядки величины. Это может привести к потере точности.

В методе Ньютона ошибки округления чаще всего возникают при делении на малую производную или при работе с числами, которые очень близки друг к другу.

В методе Кардано для каждого значения α решается кубическое уравнение и вычисляются корни с помощью приведения уравнения к приведенной форме и использования формул Кардано. Для каждого корня проверяется остаток, который рассчитывается как:

residuals = [abs(x \*\* 3 + a \* x \*\* 2 + b \* x + c) for x in roots]

Это позволяет оценить, насколько хорошо корни приближены к настоящим корням уравнения.

В методе Ньютона корни находятся через итерационный процесс, начиная с начального приближения x0x\_0x0​. При каждом шаге проверяется, насколько новое приближение отличается от старого, и если разница меньше заданной точности, то итерации прекращаются. Ошибка вычисляется как остаток:

residual = abs(f(root, alpha))

где f(x) — это исходное уравнение. Остаток показывает, насколько найденный корень близок к реальному корню уравнения.

**Что анализируется?**

1. **Метод Кардано**:
   * Потеря точности при вычислении корней для больших α.
   * Ошибки округления, вызванные сложением и вычитанием чисел разного порядка.
2. **Метод Ньютона**:
   * Влияние выбора начального приближения x0 на сходимость.
   * Величина остатка (ошибки) при больших α из-за ошибок округления.

### Ожидаемые выводы:

* **Метод Кардано**: Потеря точности возрастает при больших α, так как значения s и q/2 становятся близки по величине, что приводит к ошибкам вычитания.
* **Метод Ньютона**: При правильном выборе начального приближения метод остаётся устойчивым, но может не сходиться для сложных начальных условий, особенно при больших α.

**ВЫВОДЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ**

**Метод Кардано:**

1. **Малые значения α (например, α = 1×10-5):**
   * Для небольших значений α, результат вычислений остаётся точным, остатки ошибок невелики (порядка 10).
   * Корни имеют комплексные компоненты (из-за дискриминанта), но результаты близки к теоретическим.
2. **Увеличение α (например, α = 100000):**
   * При увеличении значения α ошибки начинают существенно расти. Остатки ошибок становятся огромными, порядка 1015, что указывает на потерю точности.
   * Корни содержат большие числа, что приводит к большим числовым погрешностям. При вычислениях с такими большими числами ошибки округления становятся более выраженными.
3. **Очень большие значения α (например, α = 1×1012):**
   * Для очень больших значений α, например, α=1×1012, ошибки достигают порядка 1030, что свидетельствует о катастрофической потере точности.
   * Корни становятся весьма большими, и округления приводят к значительным ошибкам.

**Заключение по методу Кардано:**

* **Проблемы с точностью возникают при больших значениях α**. Когда значения коэффициентов становятся очень большими, числовые погрешности из-за округления и работы с числами разного порядка становятся значительными.
* Метод Кардано демонстрирует сильную зависимость от величины α, и при увеличении α теряется точность, особенно для комплексных корней.

**Метод Ньютона:**

1. **Малые значения α (например, α = 1×10−5):**
   * Для малых значений α метод Ньютона находит корни с высокой точностью, например, для начального приближения -10 результат −2.999999999977778 с ошибкой порядка 1.66×10−17, что является практически точным.
   * Однако, для начальных приближений 0 и 10 метод не сходится, что показывает важность выбора хорошего начального приближения для метода Ньютона.
2. **Средние значения α (например, α = 1):**
   * При α = 1, метод Ньютона также находит корни с высокой точностью для начального приближения -10 (остаток ошибки 2.22×10−15).
   * Но опять же, для начальных приближений 0 и 10 метод не сходится, что указывает на чувствительность метода к начальным условиям.
3. **Большие значения α (например, α = 100000):**
   * Для больших значений α (например, α=100000) метод Ньютона находит корни с точностью до 0, что означает, что метод стабилизируется и сходится быстро.
   * Ошибка при начальном приближении и для других значений близка к нулю, что свидетельствует о том, что метод Ньютона стабилен для больших значений α.
4. **Очень большие значения α (например, α = 1×1012):**
   * Для очень больших значений α\alphaα метод Ньютона продолжает находить корни с высокой точностью (например, −1.0 для α=1012), независимо от начального приближения.
   * Ошибка при нахождении корня близка к нулю, что указывает на стабильность метода при больших значениях α.

**Заключение по методу Ньютона:**

* **Метод Ньютона** демонстрирует отличную сходимость и точность, особенно для больших значений α, если выбрать подходящее начальное приближение.
* **Ошибки округления влияют на результат**, если начальное приближение далеко от корня или если числовые погрешности становятся значительными для малых значений α.
* Метод Ньютона более чувствителен к начальным приближениям, чем метод Кардано, и может не сойтись для некоторых начальных значений.

**Общие выводы:**

* **Метод Кардано** может сталкиваться с проблемами потери точности при работе с большими значениями коэффициентов, особенно когда корни становятся большими или комплексными.
* **Метод Ньютона** более устойчив и точен для больших значений α, но требует хорошего начального приближения для сходимости, особенно для малых значений α.

**Общие выводы:**

1. **Метод Кардано**:
   * Чувствителен к потерям точности при больших α.
   * Требует дополнительной оптимизации или численных улучшений для работы с большими коэффициентами.
2. **Метод Ньютона**:
   * Более устойчив к ошибкам округления.
   * Для больших α работает надежно, даже при произвольном начальном приближении.
   * Для малых α требуется продуманный выбор начального приближения.
3. **Практическая рекомендация**:
   * Для больших значений α предпочтительнее использовать метод Ньютона.
   * Метод Кардано подходит только для малых значений α, где ошибки округления минимальны.