

1 Teoretični uvod

Strižna napetost je napetost telesa preko ravnine, pravokotne na tlačno silo. Označimo jo kot

$$\frac{F}{S} = G\alpha,$$

kjer je F/S strižna napetost, G pa strižni modul. Strižno napetost lahko izrazimo tudi pri torzijski deformaciji in sicer kot

$$M = D\phi,$$

kjer je M navor in ϕ kot zasuka enega dela žice glede na drugega. Da bi izpeljali D glede na G si predstavljamo, da je žica sestavljena iz mnogih tankih cevok, ki se prilagajajo ena na drugo. Vsak majhen košček te cevke se ob torzijski deformaciji premakne za ϕr , dolžina cevke pa je l , torej se košček deformira za $\alpha = r\phi/l$. Glede na zgornjo enačbo za strižno deformacijo lahko torej napišemo:

$$dM = rdF = r\alpha GdS.$$

V enačbo vstavimo vrednosti za α in S , potem pa enačbo integriramo

$$M = \int dM = \frac{\pi r_0^2 G \phi}{2l} = D\phi, \quad (1)$$

kar pomeni, da je $D = \frac{\pi r_0^2 G}{2l}$. G lahko povežemo z prožnostnim modulom preko:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (2)$$

kjer je μ Poissonovo število in predstavlja razmerje:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\mu \frac{\Delta l}{l}.$$

Zadevo povežimo še z nihanjem na torzijskem nihalu. To opisuje naslednja enačba (za majhne odklone):

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}, \quad (3)$$

kjer je D že prej omenjeni torzijski koeficient, J pa vztrajnostni moment. V nalogi je potrebno izračunati vztrajnostni moment za dve telesi.

Votel valj Osnovna enačba za izračun vztrajnostnega momenta telesa je:

$$J = \rho \int_V r^2 dV.$$

Glede na to, da gre za cilindar, izkoristimo simetrijo, da dobimo:

$$J = \rho \int_r^R r^2 2\pi r L dr$$

Kar nam ob izvedenotanju da:

$$J = \frac{2\pi L \rho (R^4 - r^4)}{4}$$

Enačbo lahko razpišemo preko razdelitve kvadratov v:

$$J = \frac{\pi L \rho (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)}{2}$$

pri tem pa upoštevajmo, da je masa cilindra ravno $M = \pi L \rho (R^2 - r^2)$, kar nam da končno enačbo

$$J = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2) \quad (4)$$

Kvader z valjasto votlino Pri izračunu lahko uporabimo dejstvo, da so vztrajnostni momenti aditivni. Tako je

$$J_{\text{votel kvader}} = J_{\text{poln kvader}} - J_{\text{izrezan cilindar}}$$

Edina nevšečnost je torej določiti mase polnega kvadra in izrezanega cilindra, v kolikor imamo le maso votlega kvadra.

Gostoto materiala, iz katerega je cilindar, lahko izračunamo kot:

$$\rho = \frac{M}{a \cdot b \cdot l - \pi r^2 l},$$

vstavimo:

$$J_{\text{votel kvader}} = \frac{1}{12} \rho (a \cdot b \cdot l) (a^2 + b^2) - \frac{1}{2} \rho (\pi r^2 l) r^2$$

in izpostavimo:

$$J_{\text{votel kvader}} = \frac{M}{12(a \cdot b \cdot l - \pi r^2 l)} ((a \cdot b \cdot l)(a^2 + b^2) - 6(\pi r^2 l) r^2). \quad (5)$$

2 Meritve

Mase

$$m_{\text{valja}} = 2490.0 \pm 1g$$

$$m_{\text{kvadra}} = 1193.0 \pm 1g$$

$$m_{\text{zobnika}} = 750 \pm 1g$$

Valj

$$r_{\text{notranji}} = 7.2 \pm 0.05mm$$

$$r_{\text{zunanjji}} = 43.6 \pm 0.05mm$$

$$h = 49.3 \pm 0.1mm$$

Kvader

$$a = 60.0 \pm 0.1mm$$

$$r_{\text{notranji}} = 20.1 \pm 0.05mm$$

Žica

$$l = 20.8 \pm 0.1cm$$

$$r = 0.27 \pm 0.005mm$$

Nihajni časi Tabela predstavlja meritev 10ih nihajnih časov:

Meritev	Prazna ploščad (s)	Kvader (s)	Valj (s)	Zobnik (s)
1	22,3	42,5	62,0	31,2
2	21,7	42,3	61,9	31,1
3	21,7	42,5	61,9	31,4
4	21,5	42,2	61,7	31,3
5	21,8	42,4	61,8	30,9

Iz izmerjenih časov lahko izračunamo:

$$t_p = 2.18 \pm 0.03s$$

$$t_k = 4.238 \pm 0.013s$$

$$t_v = 6.186 \pm 0.011s$$

$$t_z = 3.118 \pm 0.019s$$

3 Obdelava in rezultati

Na podlagi enačbe 4, in iz izmerjenih mas ter dimenzij, lahko izračunamo vztrajnostni moment valja kot $J_k = 958000.0 \pm 11000.0 \text{ gmm} = 9.58 \cdot 10^{-4} \pm 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}$. Obrnjena enačba 3 nam pove, da

$$\frac{t_0^2}{4\pi^2} = \frac{J}{D},$$

Vemo pa, da je pri nihajnih časih votlega valja $J_s = J_p + J_v$:

$$\frac{t_v^2 - t_p^2}{4\pi^2} = \frac{J_p + J_v - J_p}{D} = \frac{J_v}{D},$$

enačbo obrnemo in izračunamo, da je $D = 0.002864 \pm 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-2}$. Sedaj ko imamo D , lahko iz istih enačb izračunamo še vztrajnostni moment plošče, ki je $J_p = 3.45 \cdot 10^{-4} \pm 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}$.

Iz enačbe 1 lahko izračunamo G , v kolikor poznamo D , in sicer $G = 7.14 \cdot 10^{10} \pm 5.3 \cdot 10^9 \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Podatki iz literature za Jeklo se gibljejo od 72.5 GPa do 85.3 GPa, kar pomeni, da se meriteve ne ujemata znotraj napake.

Teoretično lahko izračunamo vztrajnostni moment votlega kvadra z enačbo 5. Dobimo $J_{kT} = 9.744 \cdot 10^{-4} \pm 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}$. Podatek dobimo tudi eksperimentalno, in sicer $J_k = 9.58 \cdot 10^{-4} \pm 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}$. Podatka se ne ujemata v okviru napake.

Podobno kot sem eksperimentalno dobil podatek za vztrajnostni moment kvadra, lahko izračunam še vztrajnostni moment zobnika. Dobim $J_z = 3.61 \cdot 10^{-4} \pm 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}$