3.4.3 Modellierung

Die Abstraktionen aus Kapitel 3.4.1 und die ermittelte Zielfunktion aus Kapitel 3.4.2 sollen nun zu einem neuen VRP, dem *Craftsmen Vehicle Routing Problem* (CMVRP), zusammengefasst werden.

$G = (V, E)$: Ein vollständiger kantengewichteter metrischer Graph

K : Menge der Fahrzeuge bzw. Touren

V_C : Menge der Serviceaufträge

V_D : Menge der Startpunkte der Handwerker

Q_k : Menge der Fähigkeiten des Fahrzeugs k

q_i : Menge der Anforderungen des Knotens i

$$x_{ijk} : \begin{cases} 1, & \text{Knoten } j \text{ ist direkter Nachfolger von Knoten } i \text{ auf Tour } k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u_{ik} : \begin{cases} 1, & \text{Fahrzeug } k \text{ hält unmittelbar vor Erreichen des Knotens } i \\ & \text{seine Pause ab} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

T_k : Maximale Arbeitszeit bzw. Tourendauer von Fahrzeug k

T'_k : Reguläre Arbeitszeit bzw. Tourendauer von Fahrzeug k

u'_a : Beginn des betrieblichen Pausenzeitraums

u'_b : Ende des betrieblichen Pausenzeitraums

u'_k : Pausenbeginn von Fahrzeug k

l_k : Mehrarbeit von Fahrzeug k

a_i : Frühestmöglicher Arbeitsbeginn bei Serviceauftrag i

b_i : Spätestmöglicher Arbeitsbeginn bei Serviceauftrag i

s_i : Servicezeit bei Knoten i

w_{ik} : Zeitpunkt zu dem die Tour k Knoten i erreicht

p_{ik} : Wartezeit von Fahrzeug k bei Knoten i

t_{ij} : Fahrtzeit zwischen Knoten i und j

c_{ij} : Distanz der Wegstrecke zwischen Knoten i und j

μ_i : Erwarteter Gewinn bei Besuch des Knotens i

ΔO_k : Kosten für die Mehrarbeit des Fahrzeugs k je Zeiteinheit

ΔD_k : Kosten für die Nutzung des Fahrzeugs k je Längeneinheit

$$\begin{aligned} \text{Min!} \quad & \sum_{k \in K} \sum_{i \in V: q_i \subseteq Q_k} \sum_{j \in V: q_j \subseteq Q_k} (1 - x_{ijk}) \mu_i \\ & + \sum_{k \in K} \Delta O_k l_k + \sum_{k \in K} \sum_{i \in V: q_i \subseteq Q_k} \sum_{j \in V: q_j \subseteq Q_k} \Delta D_k c_{ij} x_{ijk} \end{aligned} \tag{3.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \qquad \forall (i, j) \in [V]^2, \forall k \in K \tag{3.2}$$

$$u_{ik} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in V, \forall k \in K \tag{3.3}$$

$$\sum_{i \in V: q_i \subseteq Q_k} \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq 1 \qquad \forall j \in V_C \tag{3.4}$$

$$\sum_{i \in V: q_i \subseteq Q_k} \sum_{j \in V: q_j \subseteq Q_k} (t_{ij} + p_{ik} + s_i) x_{ijk} \leq T_k \qquad \forall k \in K \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in V: q_i \subseteq Q_k} u_{ik} = 1 \qquad \forall k \in K \quad (3.6)$$

$$\sum_{i \in V: q_i \subseteq Q_k} x_{ihk} - \sum_{j \in V: q_j \subseteq Q_k} x_{hjk} = 0 \qquad \forall k \in K, \forall h \in V : q_h \subseteq Q_k \quad (3.7)$$

$$\sum_{i \in V_D} \sum_{j \in V_C: q_j \subseteq Q_k} x_{ijk} \leq 1 \qquad \forall k \in K \quad (3.8)$$

$$a_i \sum_{j \in V: q_j \subseteq Q_k} x_{ijk} \leq w_{ik} + p_{ik} \leq b_i \sum_{j \in V: q_j \subseteq Q_k} x_{ijk} \qquad \forall i \in V_C : q_i \subseteq Q_k, \forall k \in K \quad (3.9)$$

$$w_{ik} + p_{ik} + s_i + t_{ij} - M(1 - x_{ijk}) \leq w_{jk} \qquad \forall (i,j) \in [V]^2 : q_i, q_j \subseteq Q_k, \forall k \in K \quad (3.10)$$

$$u'_a \leq u'_k \leq u'_b \qquad \forall k \in K \quad (3.11)$$

$$T'_k \leq T_k \qquad \forall k \in K \quad (3.12)$$

$$w_{ik} \geq 0 \qquad \forall i \in V, \forall k \in K \quad (3.13)$$

$$p_{ik} \geq 0 \qquad \forall i \in V, \forall k \in K \quad (3.14)$$

Die Nebenbedingungen fordern Folgendes:

- Ungleichung 3.4 verlangt, dass jeder Kunde höchstens einmal besucht wird. Der jeweils vorangegangene Knoten muss dabei stets vom Fahrzeug bedient werden können. Zusammen mit Gleichung 3.7 entstehen so nur Touren, bei denen das zugehörige Fahrzeug auf Grund seiner Fähigkeiten auch alle Serviceaufträge bedienen kann.

- Ungleichung 3.5 sorgt dafür, dass die Fahrzeuge ihre maximale Arbeitszeit nicht überschreiten.

- Gleichung 3.6 verlangt, dass jedes Fahrzeug seine Pause genau einmal abhält. Ungleichung 3.11 sichert dabei zu, dass die Pausen innerhalb des betrieblichen Pausenzeitraums begonnen werden.

- Gleichung 3.7 stellt sicher, dass jeder Knoten gleich oft besucht und verlassen wird. Diese Bedingung wird dabei auf die Betrachtung von Anreisen und Abreisen reduziert, die ein Fahrzeug im Rahmen seiner Fähigkeiten durchführen kann.

- Ungleichung 3.8 stellt sicher, dass ein Fahrzeug seinen Startpunkt höchstens einmal zu einem (für das Fahrzeug bedienbaren) Serviceauftrag hin verlassen kann. Zusammen mit Gleichung 3.7 wird garantiert, dass das Fahrzeug wieder zum selben Startpunkt zurückkehrt, insofern er verlassen wird.

- Ungleichung 3.9 verlangt, dass jeder Kunde in seinem Verfügbarkeitsintervall besucht wird. Hierbei wurde die ursprüngliche Formulierung 2.11 des VRPTW um die hier zusätzlich eingeführte Wartezeit p_{ik} ergänzt.

- Ungleichung 3.10 eliminiert Kurzzyklen analog zu dem im VRPTW genutzten zeitlichen Ablauf 2.13. Dieser Ablauf wurde um die neue Variable p_{ik} ergänzt. Die Herstellung eines zeitlichen Ablaufs erfolgt dabei nur noch für Knoten, die vom jeweiligen Fahrzeug k auf Basis dessen Fähigkeiten Q_k besucht werden können.