Calculus and Probability Theory
Klausurvorbereitung

Christoph Schmidl
s4226887
c.schmidl@student.ru.nl

16. April 2018

Analysis - Grundlagen

Brüche

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

Binomische Formeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Potenzen und Potenzgesetze

Erfahrungen besagen, dass ca 50% aller Versagensfälle von Klausuren oft auf mangelnde Kenntnisse der Potenzgesetze zurückzuführen sind. Dieses Thema ist also ausserordentlich wichtig, da wir mit Hilfe dieser Kenntnisse verschiedenste Ausdrücke umschreiben und gegebenenfalls vereinfachen können.

- Gleiche Basis

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

- Gleicher Exponent

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

- Zweimal potenzieren

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

- Spezielle Potenzen

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad 1^n = 1 \quad a^n = 0$$

- Zusammenhang Wurzeln und Potenzen

$$a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a} \qquad a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{n}$$

Wurzeln

Wichtigste Gesetze:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Man kann Wurzeln auch einfach in Potenzen umwandeln und wendet dann die bereits bekannten Potenzgesetze an.

$$\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}} \qquad \sqrt[k]{a^n} = a^{\frac{n}{k}}$$

Alternativ zur Umwandlung der Wurzeln in Potenzen, kann man auch mit folgenden Gesetzen arbeiten:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{km} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Spezielle Wurzeln:

$$\sqrt[n]{0} = 0 \qquad \sqrt[2]{a} = \sqrt{a} \qquad \sqrt[1]{a} = a \qquad \sqrt[n]{a^{-m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Logarithmen

Definition: $\log_a b = x$ ist gleich bedeutend mit $a^x = b$
Logarithmen im Kopf rechnen: $\log_a b =?$ bedeutet: a hoch wieviel ergibt b?

Regeln:

$$\log(u \cdot v) = \log i + \log v \qquad \log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v$$

$$\log u^r = r \cdot \log u \qquad \log\left(\frac{1}{v}\right) = -\log v$$

Logarithmen zu speziellen Basen:

$$lg\ b = \log_{10} b \qquad \ln b = \log_e b$$

Der Taschenrechner kennt nur die Logarithmen zur Basis 10 und zur Basis e. Deshalb müssen Logarithmen zu anderen Basen zuerst mit dem Basiswechselsatz umgeformt werden:

$$\log_a b = \frac{lg\ b}{lg\ a} = \frac{ln\ b}{ln\ a}$$

Logarithmen von speziellen Werden:

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_a a^n = n \qquad a^{\log_a b} = b$$

Arithmetik Beispiele

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} \qquad (x^4)^5 = x^{4 \cdot 5} \qquad \frac{x^7}{x^2} = x^{7-2} \qquad (2 \cdot x \cdot a^3)^4 = 2^4 \cdot x^4 \cdot a^{12}$$

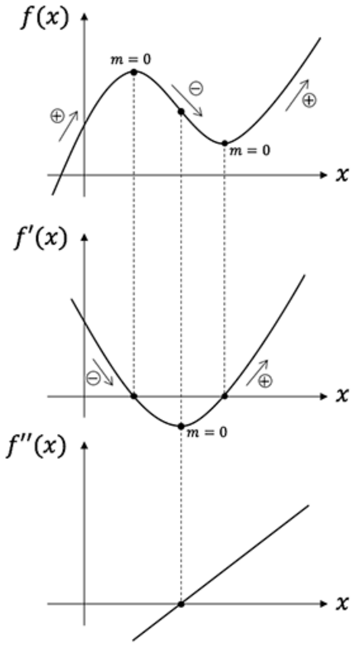
$$\frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}} = 2 \cdot \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{5}{4}}} = 2 \cdot (3 \cdot x^{\frac{5}{4}})^{-1} = 2 \cdot 3^{-1} \cdot x^{-\frac{5}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{5}{4}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{4}}$$

Analysis - Ableiten

Grafisches Ableiten

Anhand der folgenden Grafik kann man sehen wie $f(x), f'(x)$ und $f''(x)$ miteinander verbunden sind. N steht hierbei fr die Nullstelle, E fr Extrempunkte und W fr den Wendepunkt.

$f(x)$	N	E	W		
$f'(x)$		N	E	W	
$f''(x)$			N	E	W



Die Nullstelle der 2. Ableitung $f''(x)$ zeigt uns den x-Wert fr den Extrempunkt der 1.Ableitung $f'(x)$. Dieser wiederum zeigt uns, wo die Ausgangsfunktion $f(x)$ seinen Wendepunkt hat.

ABC-Formel

Die Gleichung ist

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ABC-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ableitungsregeln

- Ableiten einer Konstanten

  $f(x) = C \rightarrow f'(x) = 0$
  Beispiel: $f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = 0$ oder $f(x) = -8 \rightarrow f'(x) = 0$

- Ableiten von x

  $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
  Beispiel: $f(x) = x + 5 \rightarrow f'(x) = 1$ oder $f(x) = x - 8 \rightarrow f'(x) = 1$

- Potenzregel

  $f(x) = x^p \rightarrow f'(x) = px^{p-1}$
  Beispiel: $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$ oder $f(x) = x^{-5} \rightarrow f'(x) = -5x^{-6}$

- Faktorregel / Skalarregel

  $f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$
  Beispiel: $f(x) = 2x^3 \rightarrow f'(x) = 6x^2$ oder $f(x) = -4x^{-4} \rightarrow f'(x) = 16x^{-5}$

- Summen-/Differenzregel

  $f(x) = f(x) \pm g(x) \rightarrow f'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
  Beispiel: $f(x) = x^3 + 2x - 5 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$

- Kettenregel/Kompositionsregel

  $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$: Aussere Ableitung mal innerer Ableitung
  Beispiel: $f(x) = (x^3 + 5x)^3 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot (x^3 + 5x)^2 \cdot (3x^2 + 5)$

- Produktregel

  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
  Beispiel: $f(x) = (2x^3 - 5) \cdot \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = 6x^2 \cdot \sqrt{x} + (2x^3 - 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Quotientenregel
  $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
  Beispiel: $f(x) = \frac{x^3+2}{x^5}$
  $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^5 - (x^3+2) \cdot 5x^4}{(x^5)^2} = \frac{3x^7 - 5x^7 - 10x^4}{x^{10}} = \frac{-2x^7 - 10x^4}{x^{10}}$

  Tipp: Manchmal kann man einen Bruch umformen und bentigt gar nicht die QUotientenregel! Schreibt den Bruch einfach als Produkt und wendet die Produktregel an.

- Reziprokenregel/Kehrwertregel

  $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$
  Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
  Beispiel: $f(x) = \frac{1}{cos(x)} \rightarrow f'(x) = -\frac{(-sin(x))}{cos^2(x)}$

- Inversenregel/Umkehrregel

  Die Inversenregel besagt, dass eine umkehrbare (das heisst bijektive) reele Funktion f, die an der Stelle x differenzierbar ist und dort keine waagerechte Tangente besitzt, d.h. fuer die $f'(x) \neq 0$ gilt, auch ihre Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $y = f(x)$ differenzierbar ist mit Ableitung

  $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

  Beispiel: Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = f(x) = e^x$ ist der natrliche Logarithmus.

  $$f^{-1} = ln(y)$$

  Wegen $f'(x) = e^x$ gilt also

  $$ln'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

Eine weitere wichtige Anwendung der Umkehrregel sind die Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. So gilt z.B. fuer die Ableitung der Arkussinus

$$arcsin'(y) = \frac{1}{cos(arcsin(y))}$$

Mit der Identitaet $cos^2(y) + sin^2(y) = 1$ folgt

$$arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

- Ableiten von e-Funktionen

  Die offizielle Methode ist, dass man die Kettenregel anwendet. Die einfachere Methode funktioniert wie folgt:

  $(e^{\text{etwas}})' = e^{\text{etwas}} \cdot (etwas)'$

  Beispiel: $f(x) = e^{5x} \to f'(x) = e^{5x} \cdot 5$
  Beispiel: $f(x) = e^{2-4x} \to f'(x) = -4e^{2-4x}$

- Ableiten von ln-Funktionen

  Eine Voraussetzung um diese Methode anzuwenden ist, dass wir wissen, dass $f(x) = ln(x) \to f'(x) = \frac{1}{x}$

  $(ln(etwas))' = \frac{1}{etwas} \cdot (etwas)'$

  Beispiel: $f(x) = ln(5x^2 - 3x) \to f'(x) = \frac{1}{5x^2-3x} \cdot (5x^2 - 3x)' = \frac{1}{5x^2-3x} \cdot (10x - 3)$

Wichtige Ableitungen

- $(a^x)' = a^x \cdot ln(a)$ with special case $(e^x)' = e^x$
- $(log_a x)' = \frac{1}{x \cdot ln(a)}$ with special case $(ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(sin(x))' = cos(x)$
- $(cos(x))' = -sin(x)$
- $(-sin(x))' = -cos(x)$
- $(-cos(x))' = sin(x)$
- $(tan(x))' = (\frac{sin(x)}{cos(x)})' = \frac{1}{cos^2(x)}$
- $(arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ where $arcsin = sin^{-1}$
- $(arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ where $arccos = cos^{-1}$
- $(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ where $arctan = tan^{-1}$

Trigonometrische Identitaeten

- $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$
- $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$
- $cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$

Summenregeln

- $sin(x + y) = sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y)$
- $cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y)$
- $sin(x - y) = sin(x)cos(y) - cos(x)sin(y)$
- $cos(x - y) = cos(x)cos(y) + sin(x)sin(y)$

Analysis - Integrale

Wichtige Integrale

- $\int 0 \; dx = C$
- $\int a \; dx = ax + C$ so $\int 1 \; dx = x + C$
- $\int x^n \; dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$, for $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \; dx = ln(x) + C$
- $\int e^x \; dx = e^x + C$
- $\int a^x \; dx = e^x + C$
- $\int a^x \; dx = \frac{1}{ln(a)} \cdot a^x + C$
- $\int sin(x) \; dx = -cos(x) + C$
- $\int cos(x) \; dx = sin(x) + C$
- $\int$