

Applied QML

Lecture 6: Quantum Optimization

Christophe Pere

2024-02-08

Table des matières

MaxCut & Modèle d'Ising

Formuler un problème de la bonne façon

D'un Ising à un QUBO

QUBO pour les problèmes d'optimisation

MaxCut

MaxCut & Modèle d'Ising

MaxCut

Classe de problème d'optimisation combinatoire

Algorithmes d'approximation

MaxCut & Modèle d'Ising

MaxCut

Classe de problème d'optimisation combinatoire

Algorithmes d'approximation

undirected graph

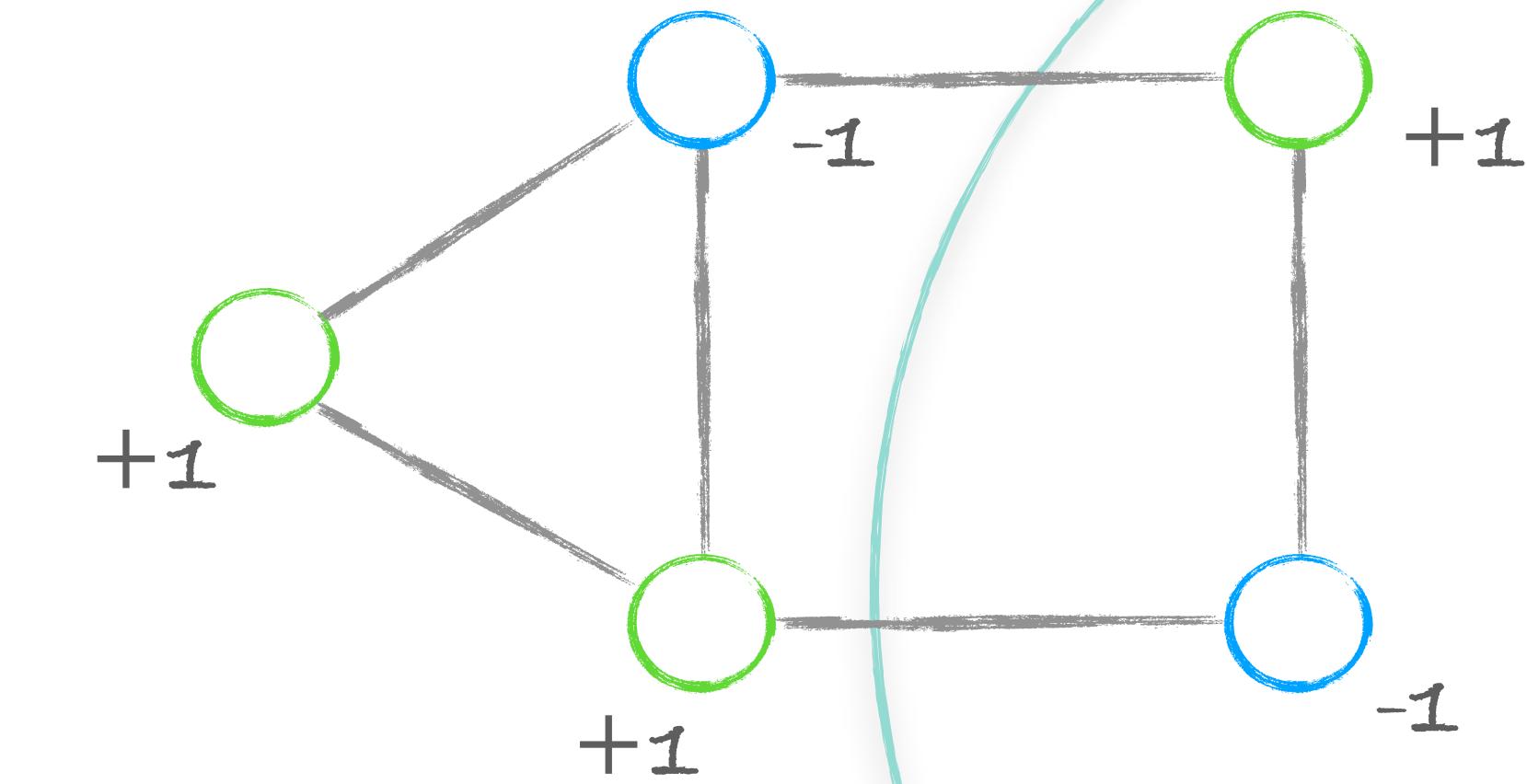
Nodes

Éléments

Edges

Connexions

Relations



MaxCut & Modèle d'Ising

MaxCut

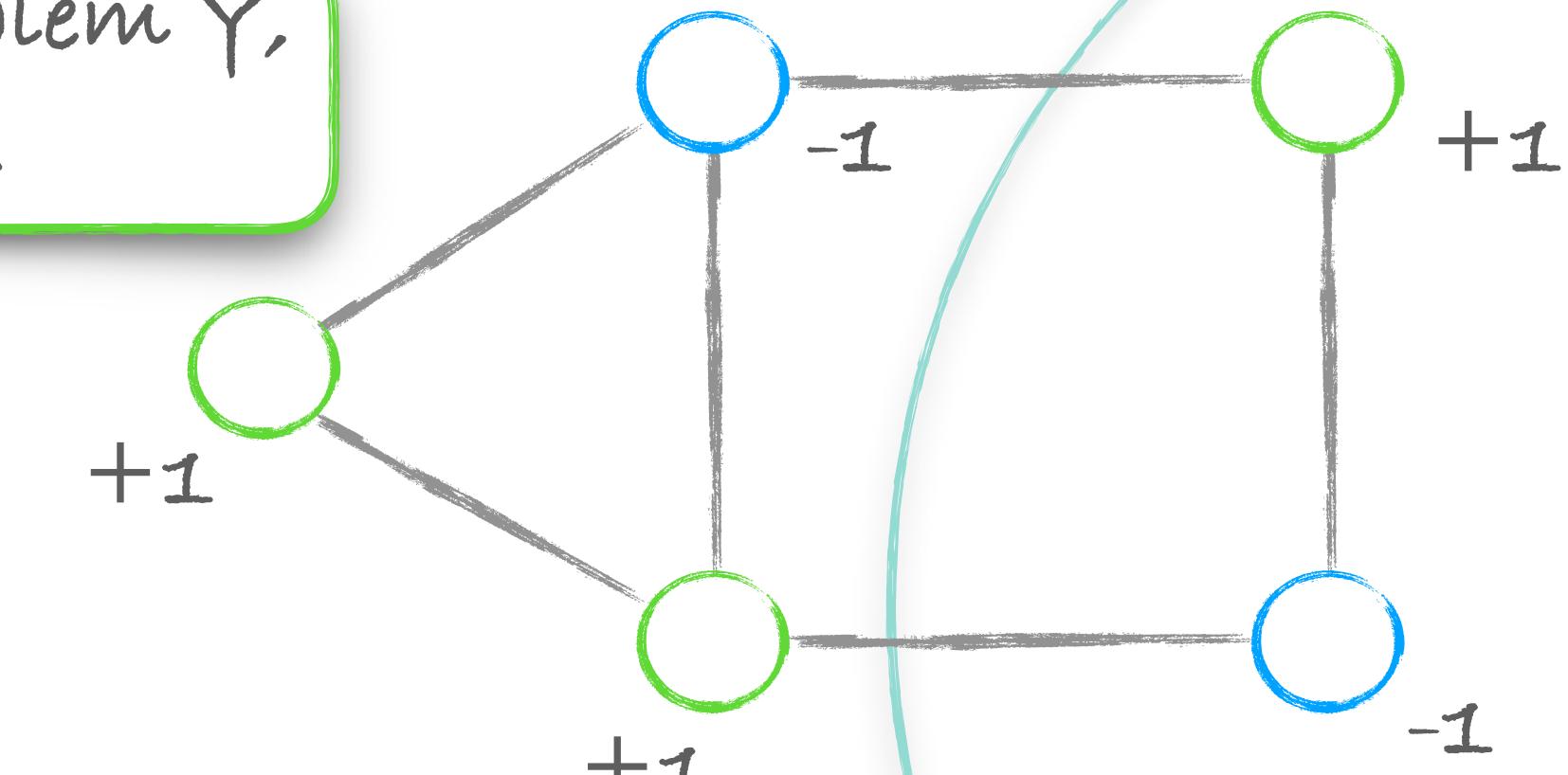
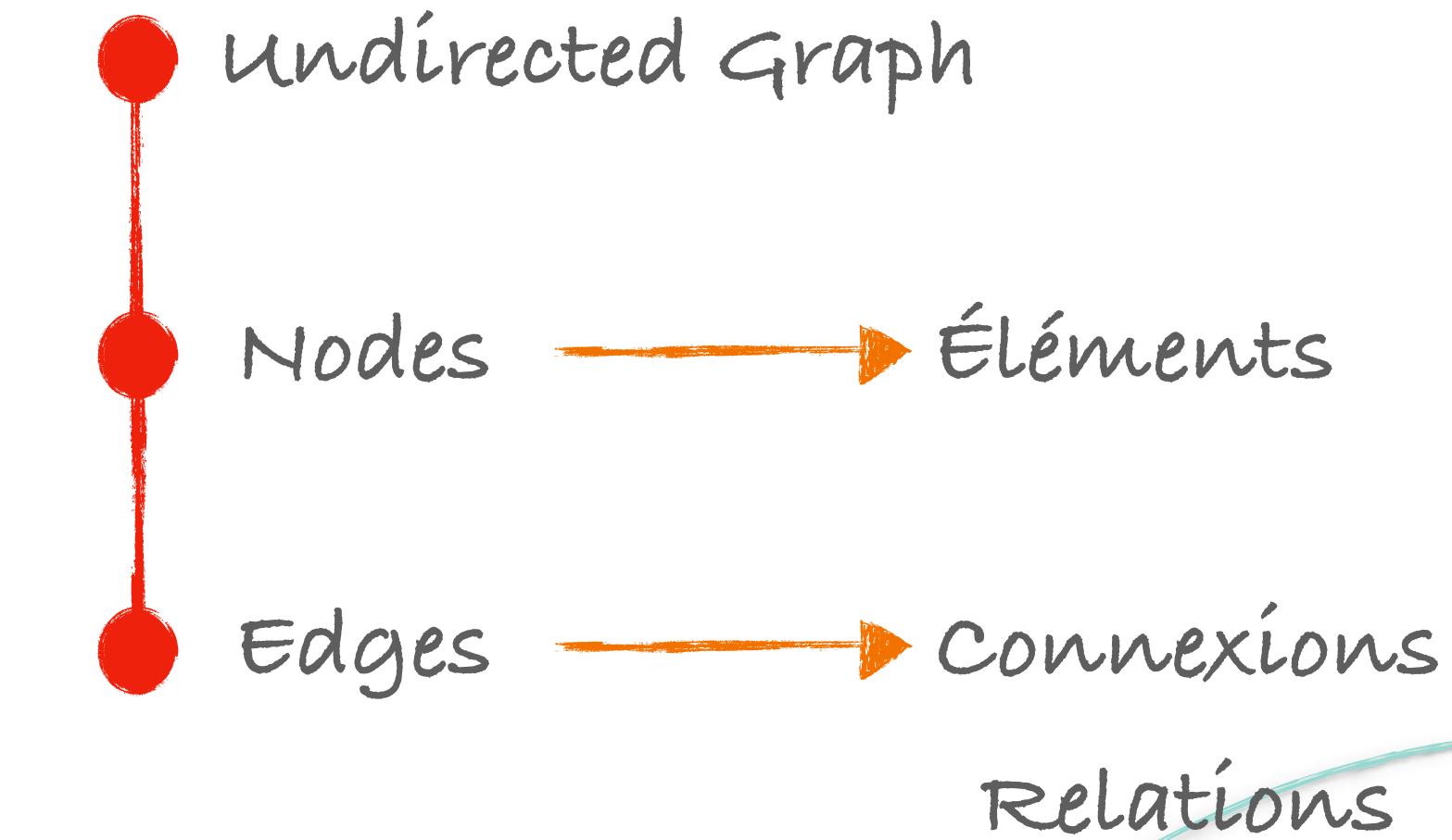
Classe de problème d'optimisation combinatoire

Algorithmes d'approximation

NP-Hard

A problem X is NP-hard, if there is an NP-complete problem Y , such that Y is reducible to X in polynomial time.

Un problème NP-Hard n'a pas besoin d'être dans NP ni d'être un problème de décision



MaxCut & Modèle d'Ising

MaxCut

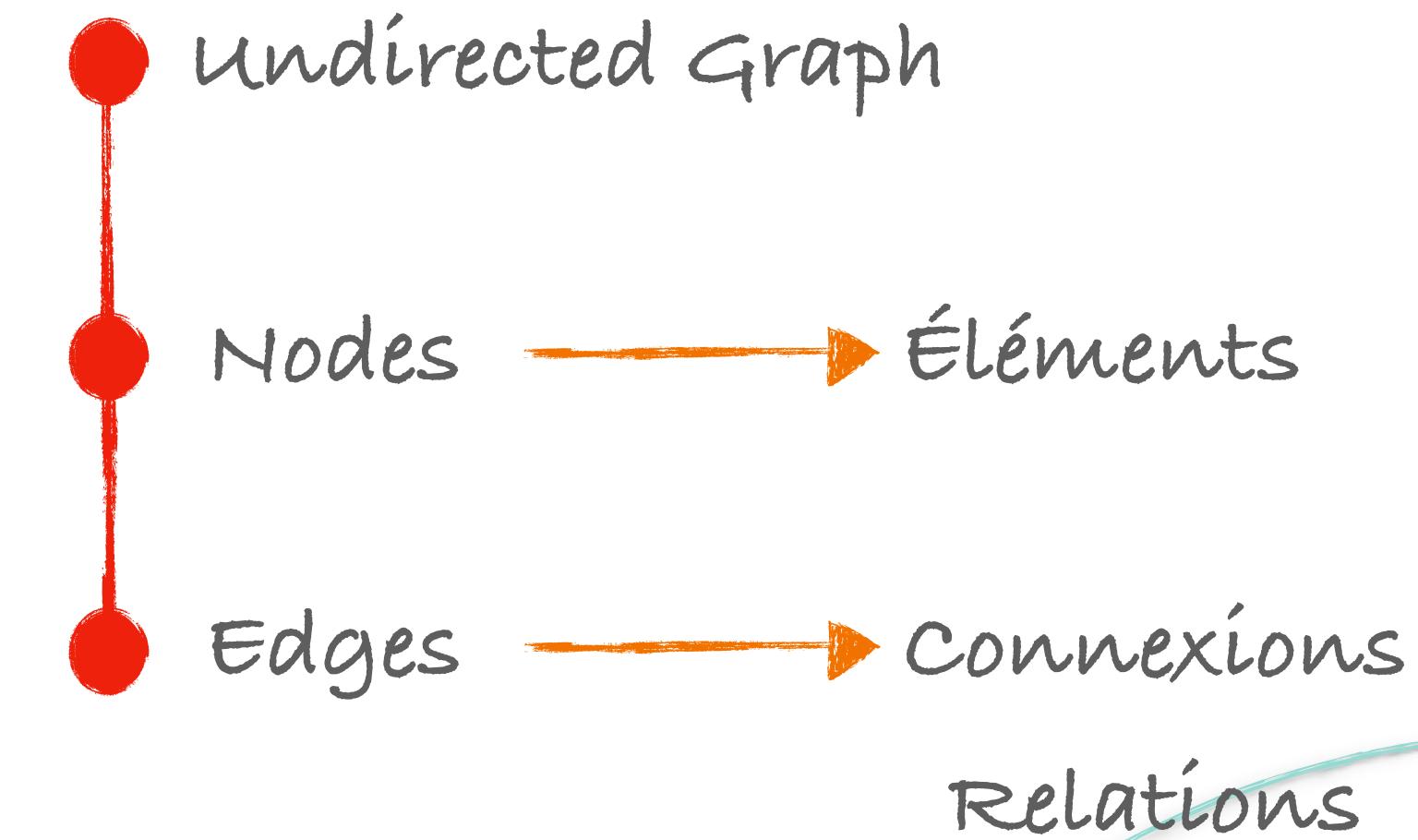
Classe de problème d'optimisation combinatoire

Algorithmes d'approximation

NP-Hard

A problem X is NP-hard, if there is an NP-complete problem Y , such that Y is reducible to X in polynomial time.

Tout problème NP-complet peut être réduit à tout autre problème NP-complet en temps polynomial, tous les problèmes NP-complets peuvent être réduits à tout problème NP-Hard en temps polynomial. Ainsi, s'il existe une solution à un problème NP-Hard en temps polynomial, il existe une solution à tous les problèmes NP en temps polynomial.



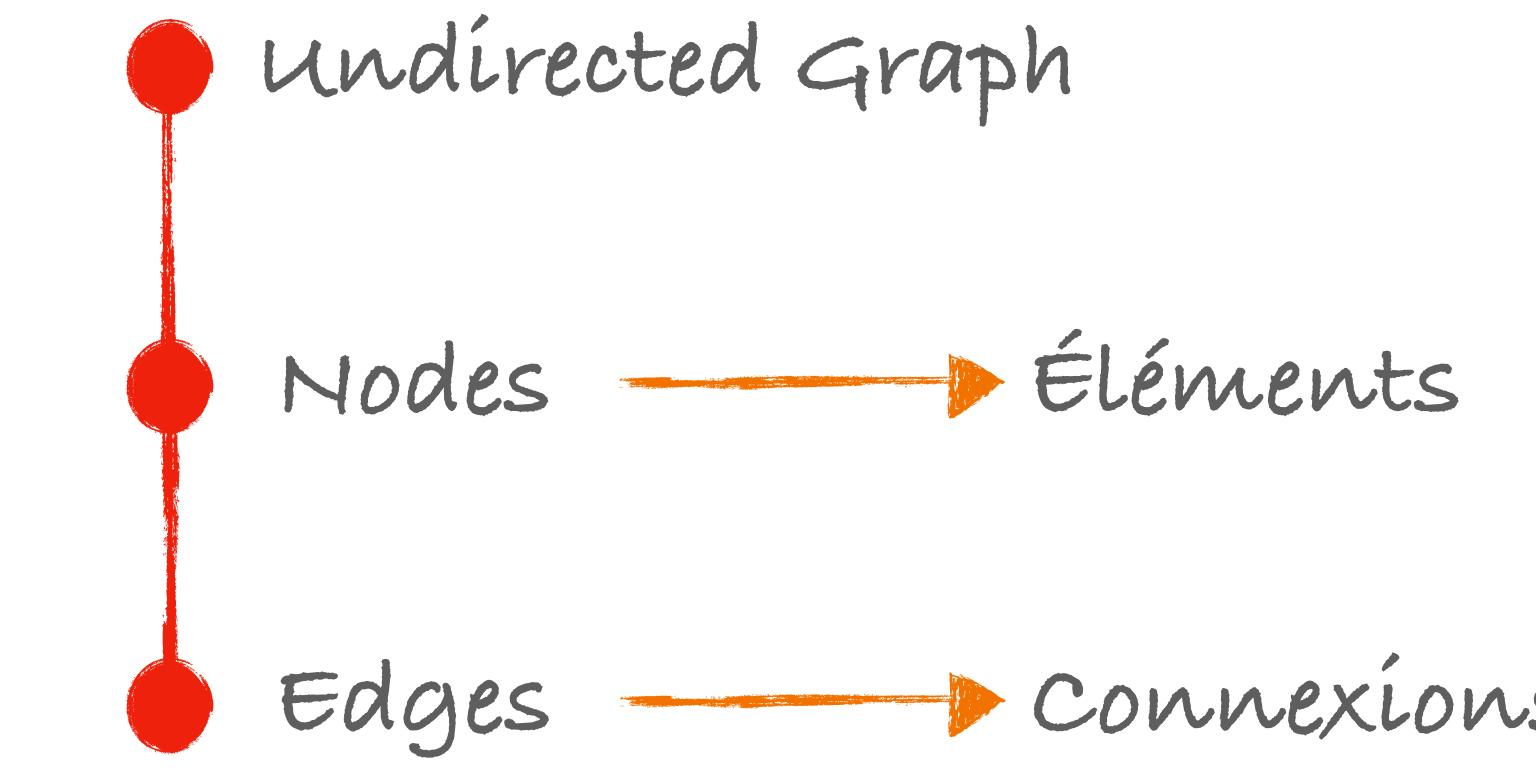
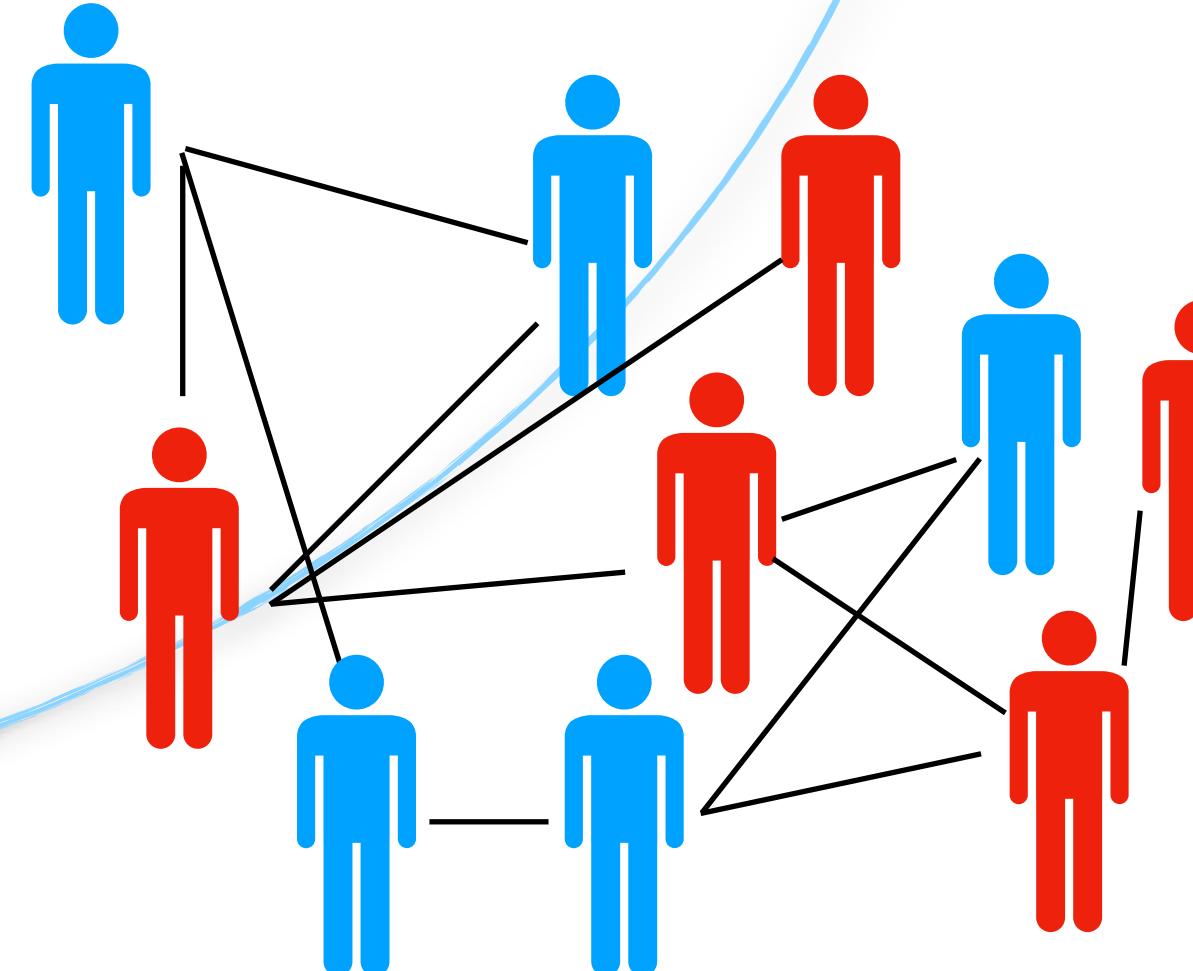
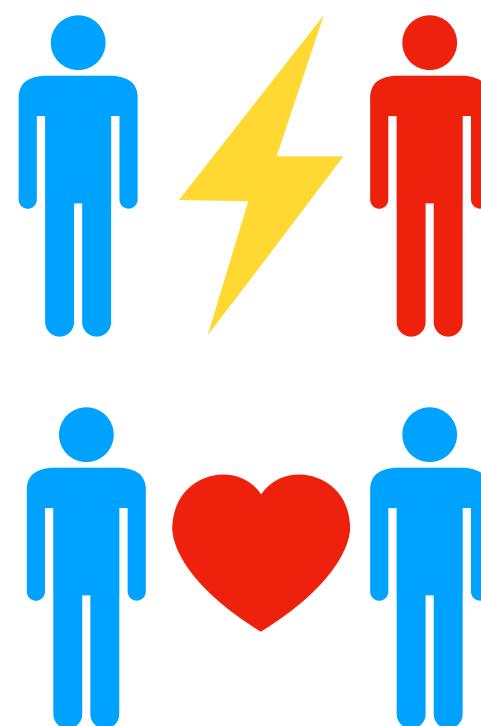
MaxCut & Modèle d'Ising

MaxCut

Classe de problème d'optimisation combinatoire

Algorithmes d'approximation

Team

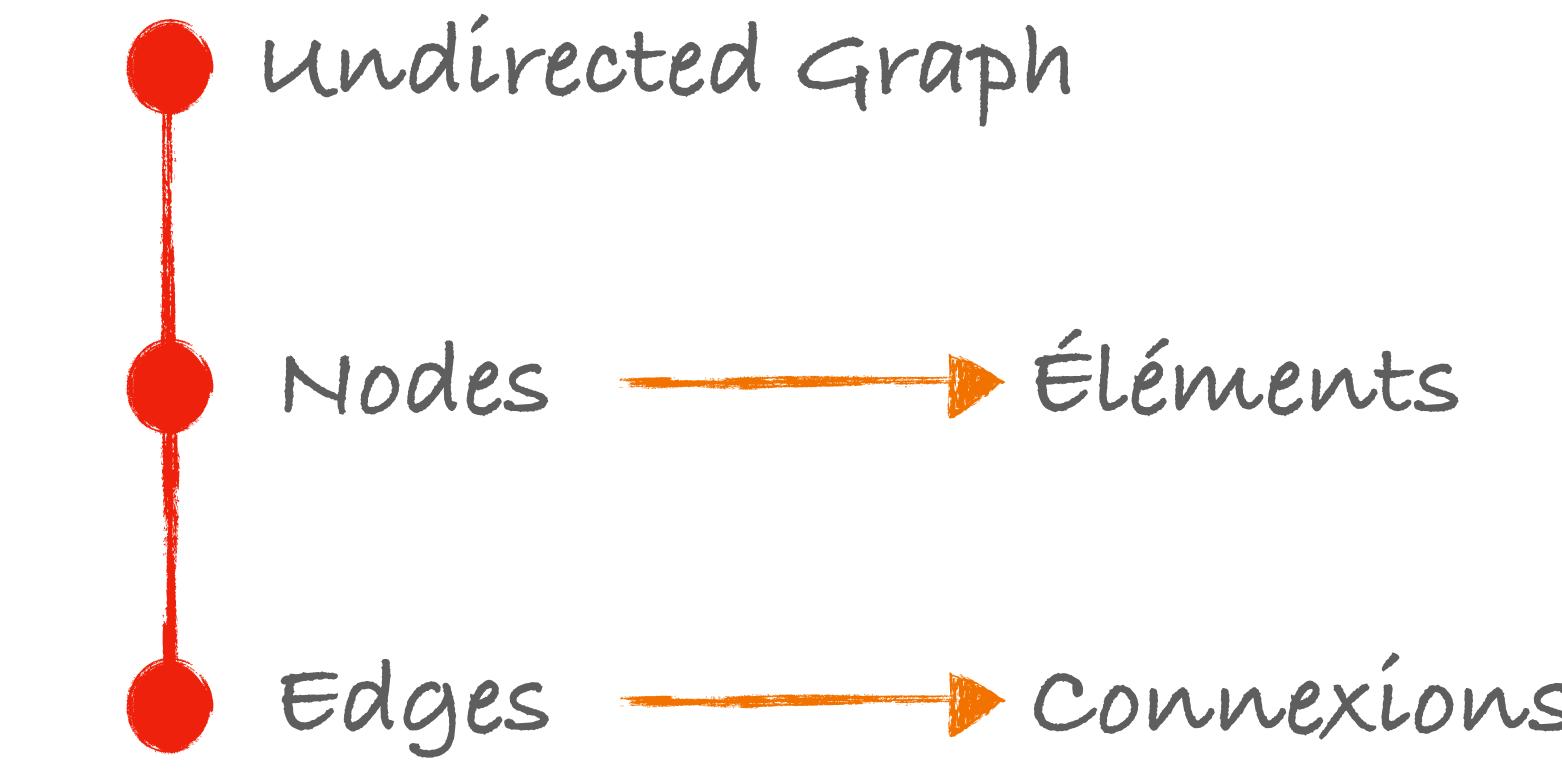
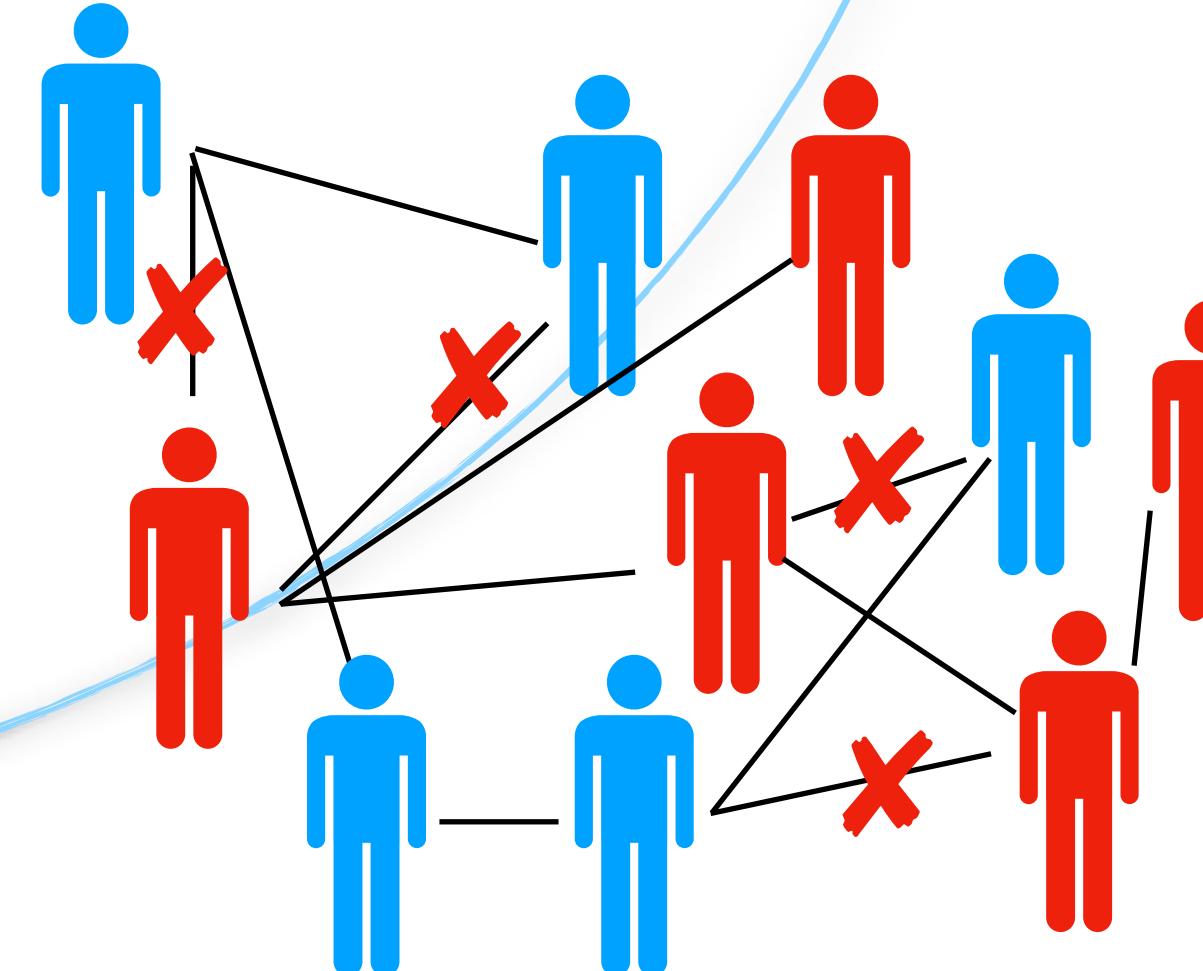
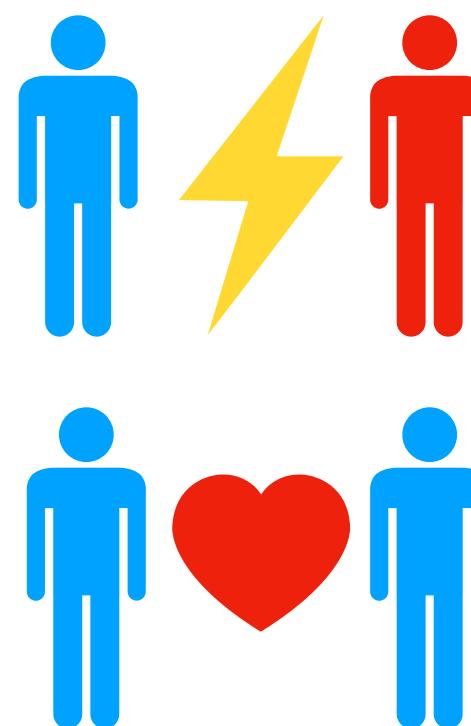


MaxCut & Modèle d'Ising

MaxCut

Classe de problème d'optimisation combinatoire

Algorithmes d'approximation

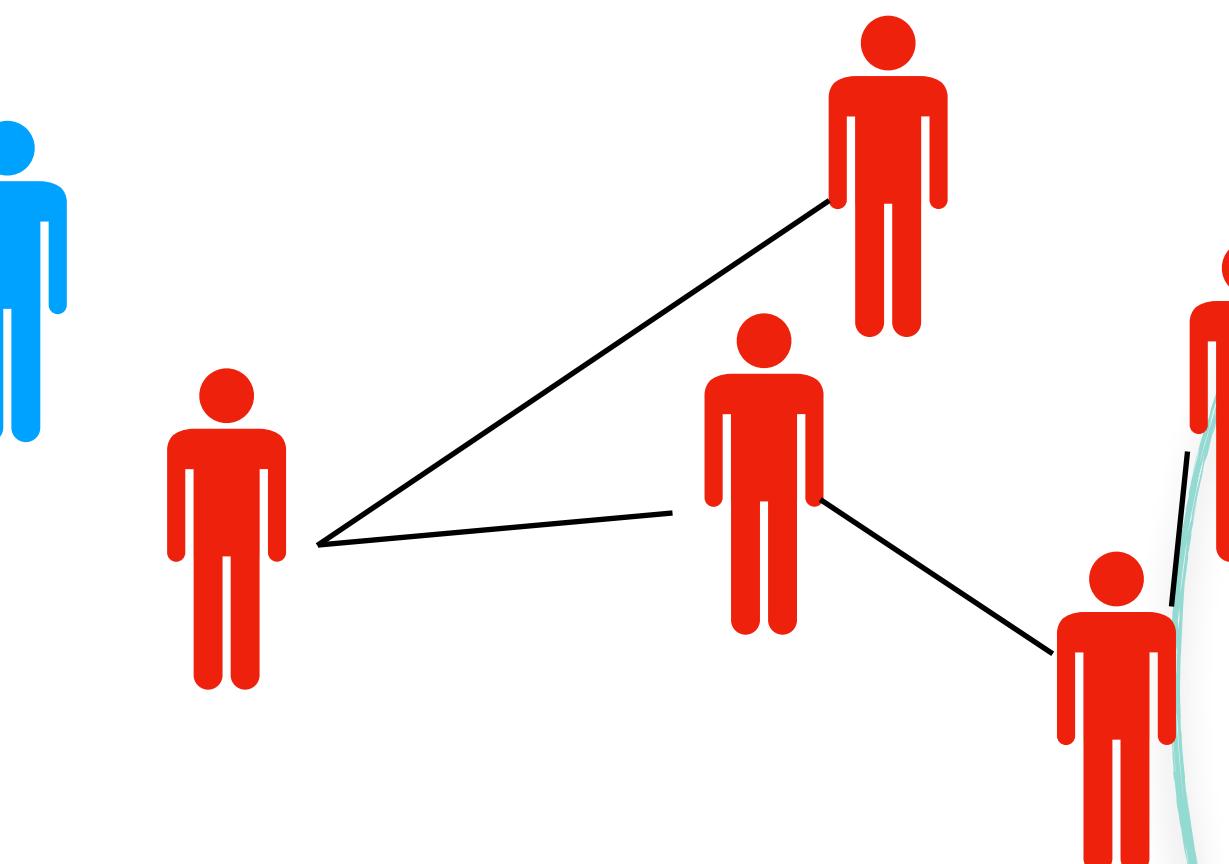
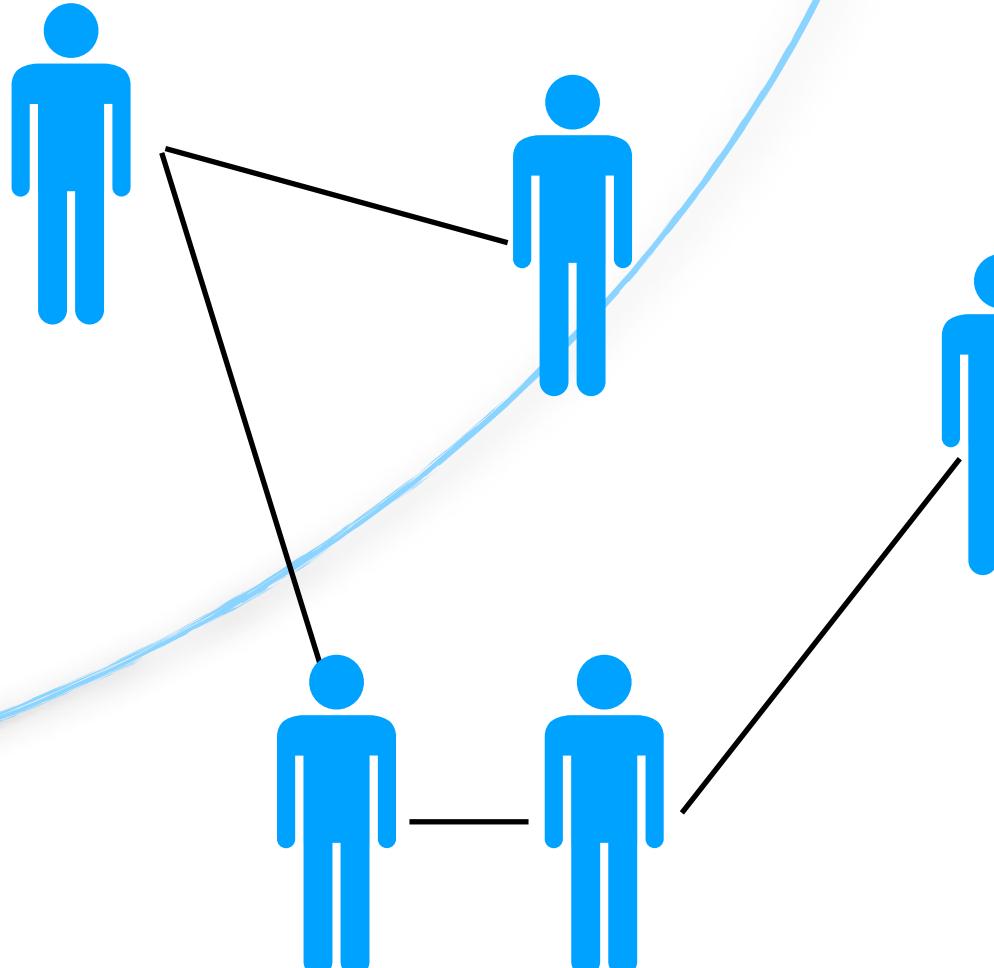
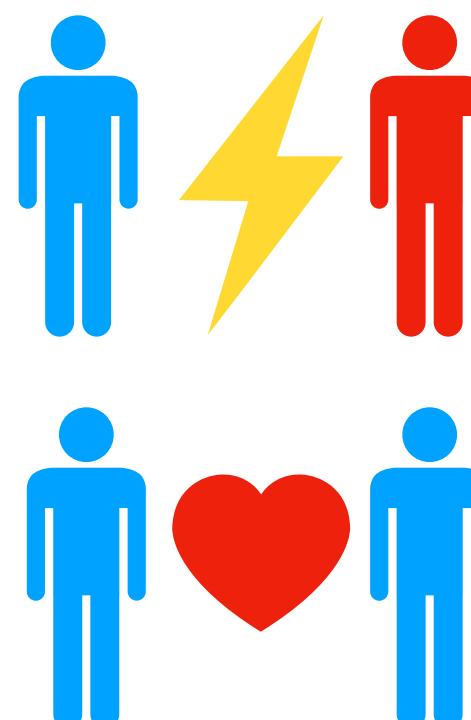


MaxCut & Modèle d'Ising

MaxCut

Classe de problème d'optimisation combinatoire

Algorithmes d'approximation



undirected graph

Nodes

Éléments

Edges

Connexions

Relations

Modèle d'Ising

MaxCut & Modèle d'Ising

Ising

Physique

Modèle ferromagnétique qui représente les "spins" des atomes et les interactions avec les atomes voisins. La structure est appelée un lattice.

MaxCut & Modèle d'Ising

Ising

Physique

Modèle ferromagnétique qui représente les "spins" des atomes et les interactions avec les atomes voisins. La structure est appelée un lattice.

Informatique

Modèle de graphe dont les noeuds sont binaires (+1, -1).

MaxCut & Modèle d'Ising

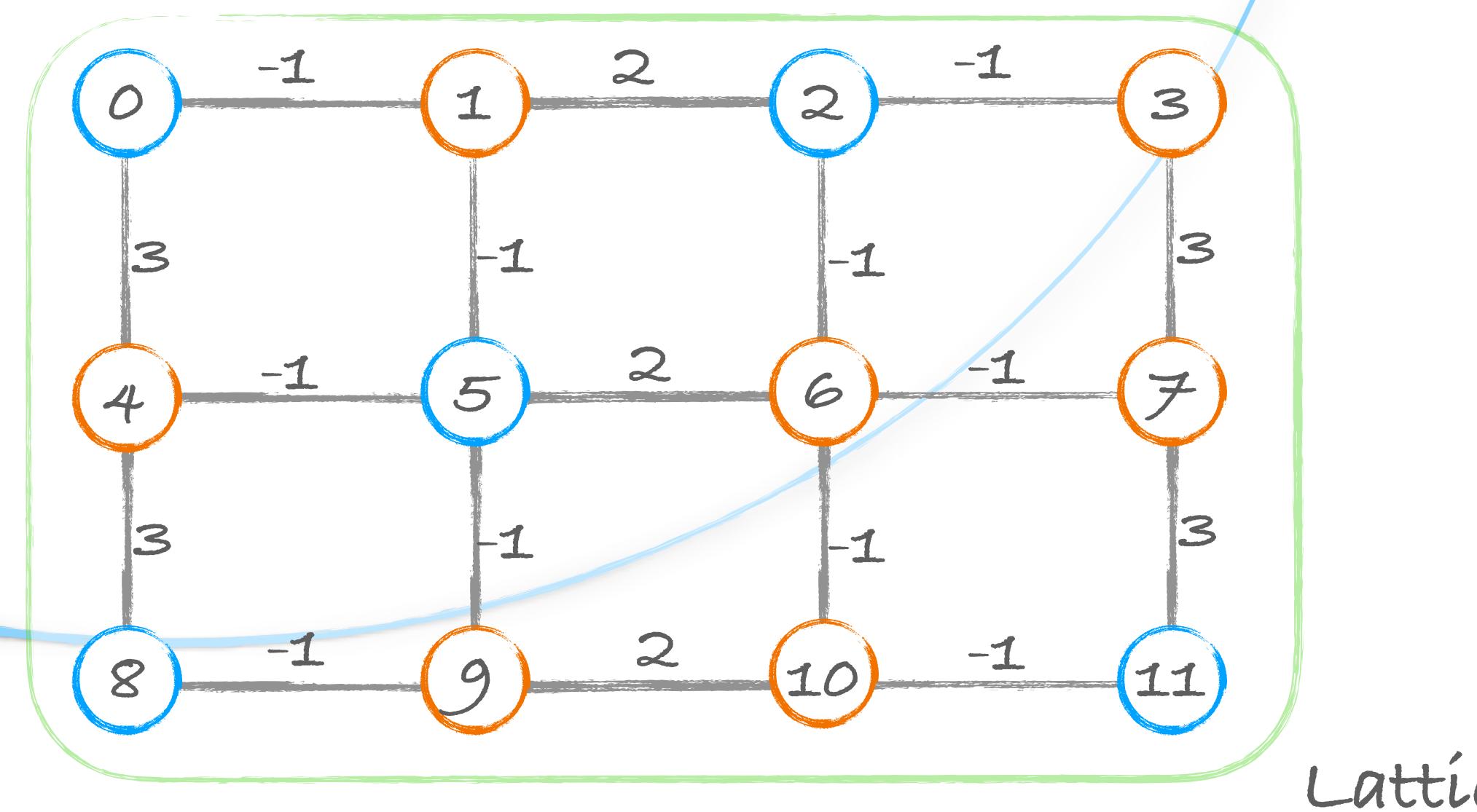
Ising

Physique

Modèle ferromagnétique qui représente les "spins" des atomes et les interactions avec les atomes voisins. La structure est appelée un lattice.

Informatique

Modèle de graphe dont les noeuds sont binaires (+1, -1).



Spin up (+1)



Niveau d'énergie
Spin down (-1)

MaxCut & Modèle d'Ising

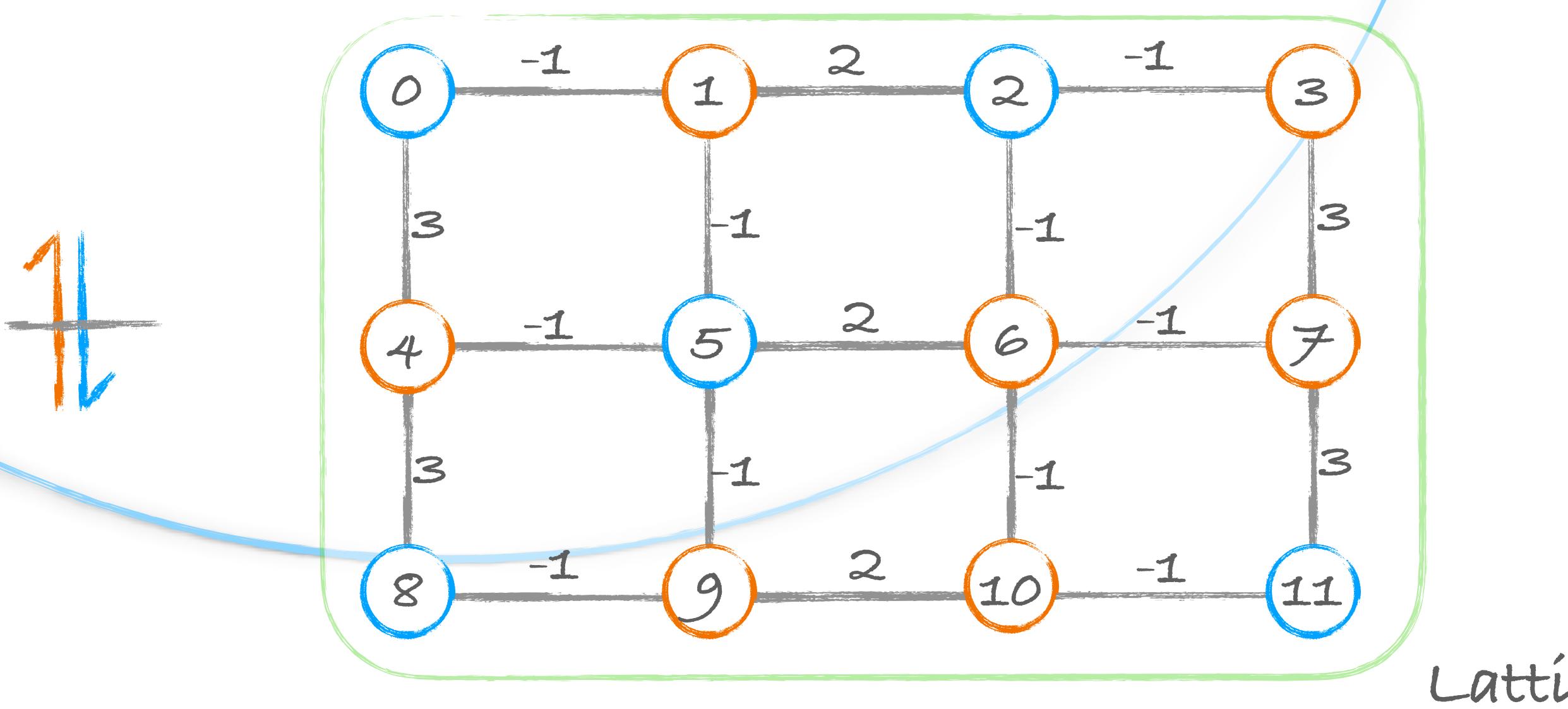
Ising

Physique

Modèle ferromagnétique qui représente les "spins" des atomes et les interactions avec les atomes voisins. La structure est appelée un lattice.

Informatique

Modèle de graphe dont les noeuds sont binaires (+1, -1).



Hamiltonien

$$H = - \sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k - \sum_j h_j z_j$$

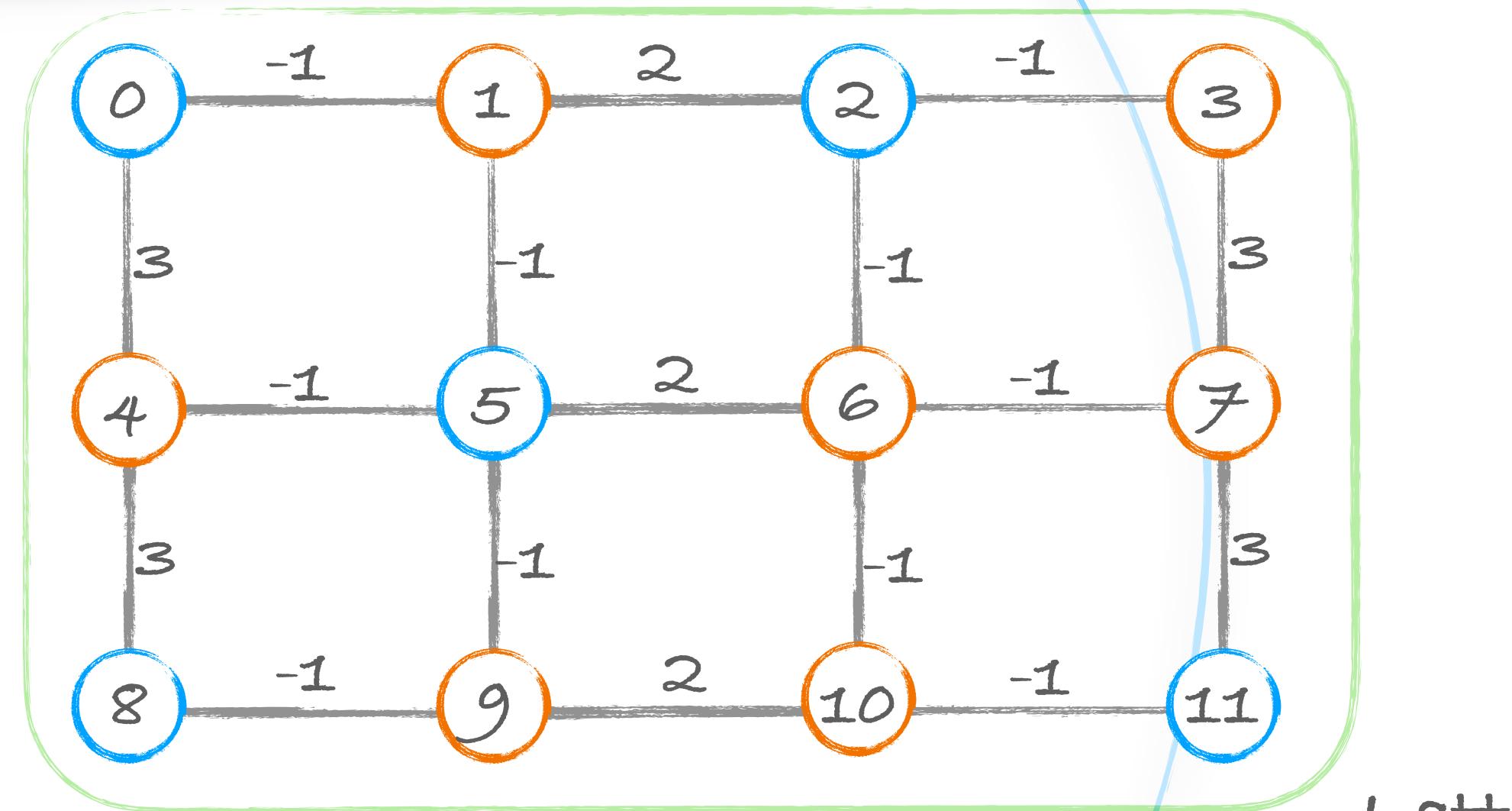
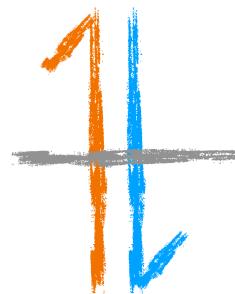
J_{jk} interaction particule j et k

h_j champ magnétique externe

z particule

MaxCut & Modèle d'Ising

Ising



Comment formuler l'hamiltonien avec:

$$J_{jk} = 1$$

$$h_j = 1$$

Hamiltonien

$$H = - \sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k - \sum_j h_j z_j$$

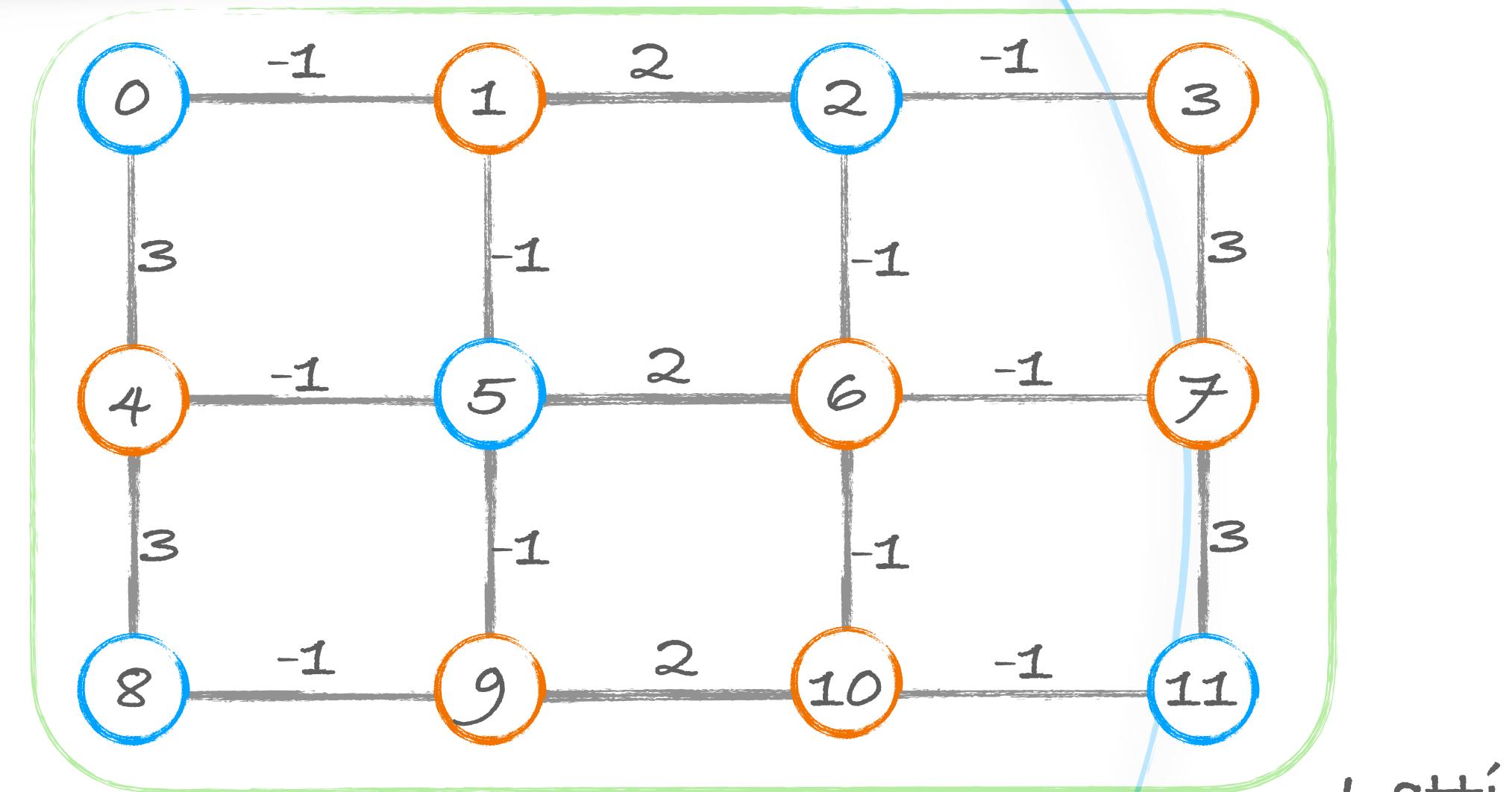
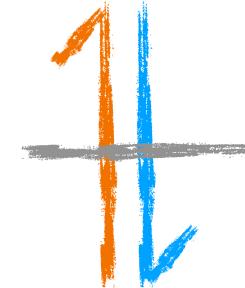
J_{jk} interaction particule j et k

h_j champ magnétique externe

z particule

MaxCut & Modèle d'Ising

Ising



Comment formuler l'hamiltonien avec:

$$J_{jk} = 1$$

$$h_j = 1$$

$$-\sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k$$

$$\begin{aligned} & z_0 z_1 - 2 z_1 z_2 + z_2 z_3 - 3 z_0 z_4 + z_1 z_5 + z_2 z_6 - 3 z_3 z_7 \\ & + z_4 z_5 - 2 z_5 z_6 + z_6 z_7 - 3 z_4 z_8 + z_5 z_9 + z_6 z_{10} - 3 z_7 z_{11} \\ & + z_8 z_9 - 2 z_9 z_{10} + z_{10} z_{11} \end{aligned}$$

Hamiltonien

$$H = - \sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k - \sum_j h_j z_j$$

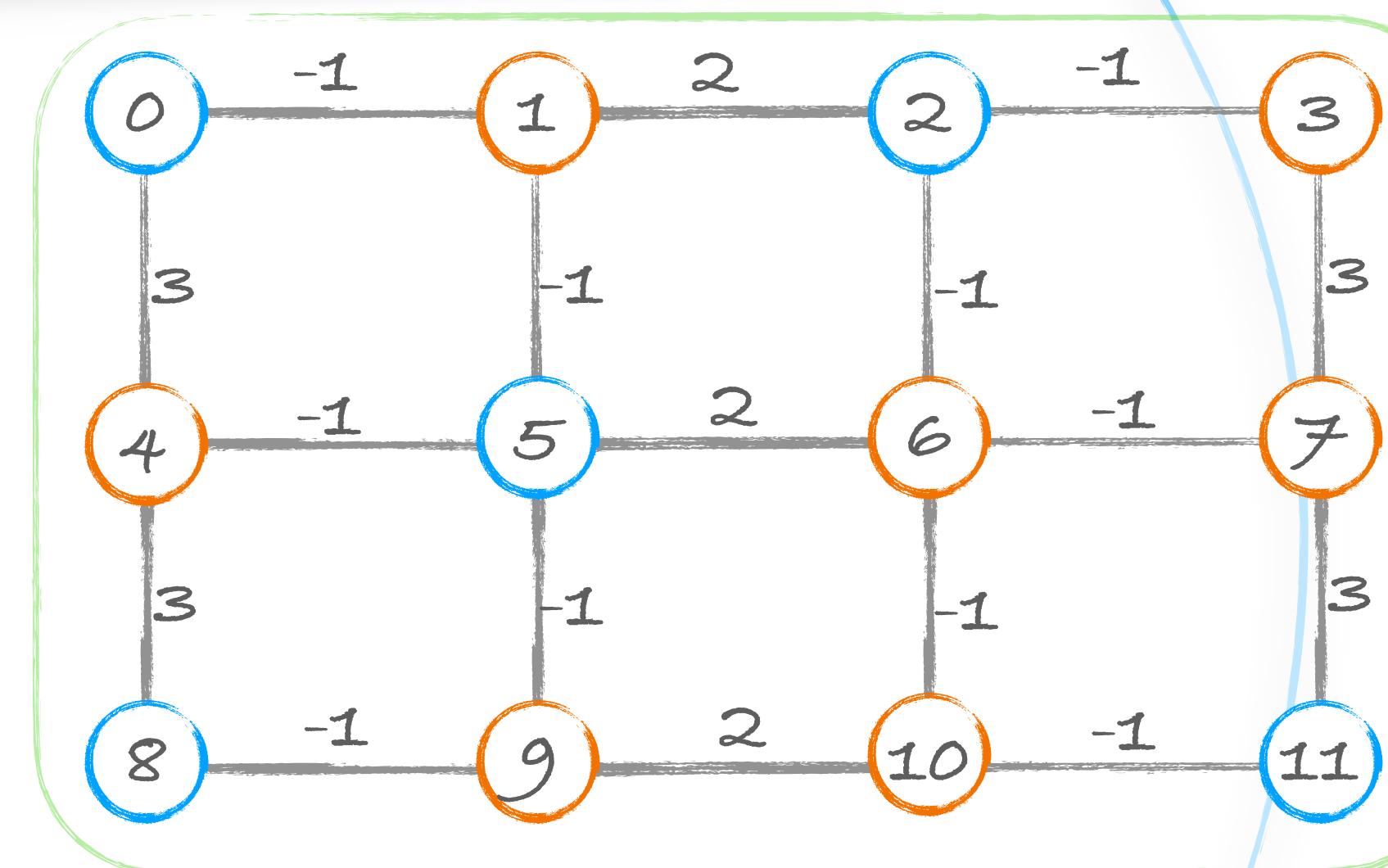
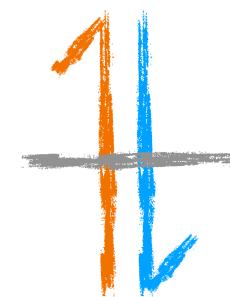
J_{jk} interaction particule j et k

h_j champ magnétique externe

z particule

MaxCut & Modèle d'Ising

Ising



Lattice

Comment formuler l'hamiltonien avec:

$$J_{jk} = 1$$

$$h_j = 1$$

$$-\sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k$$

$$-\sum_j h_j z_j$$

Hamiltonien

$$H = - \sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k - \sum_j h_j z_j$$

J_{jk} interaction particule j et k

h_j champ magnétique externe

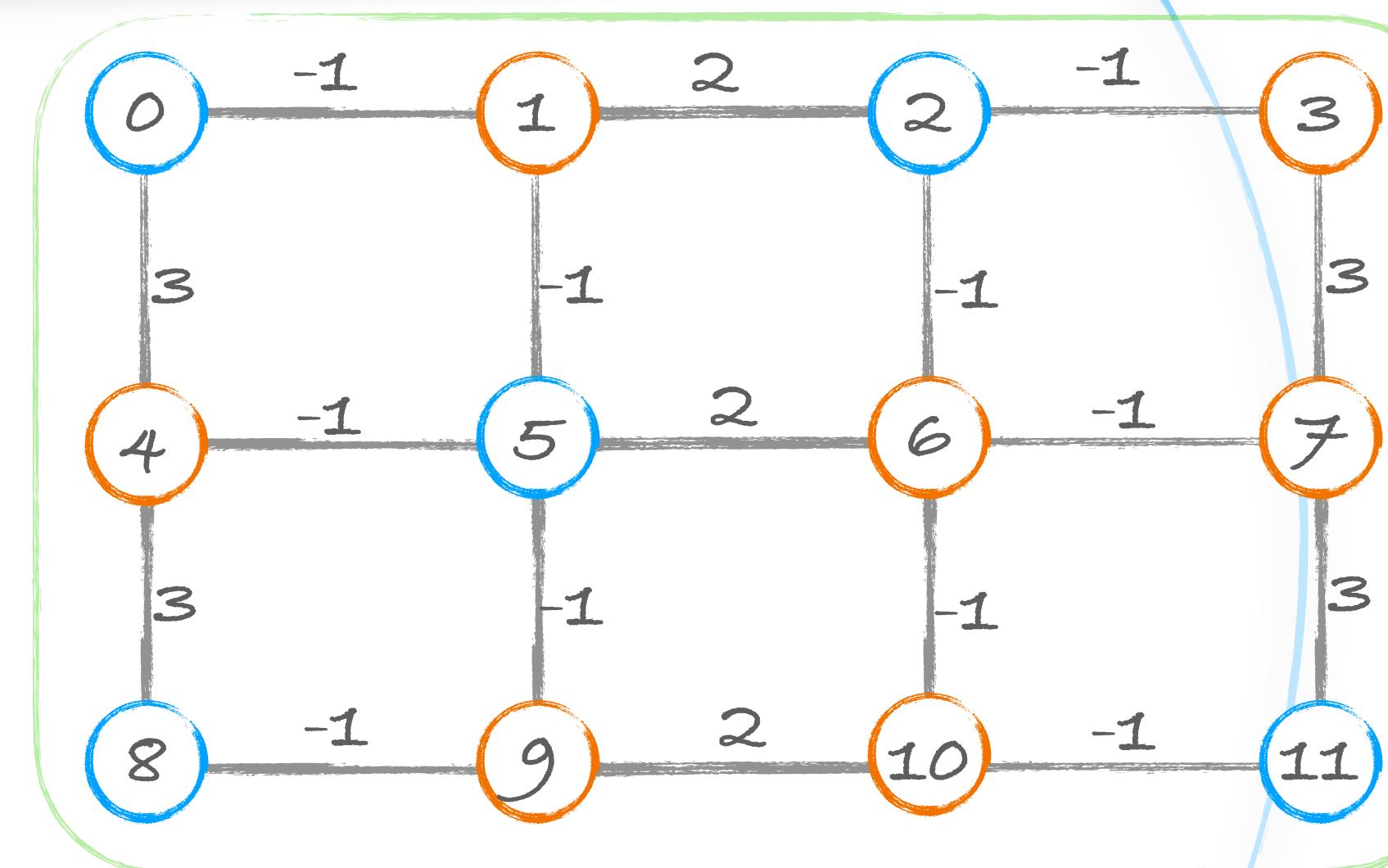
z particule

$$\begin{aligned} & z_0 z_1 - 2 z_1 z_2 + z_2 z_3 - 3 z_0 z_4 + z_1 z_5 + z_2 z_6 - 3 z_3 z_7 \\ & + z_4 z_5 - 2 z_5 z_6 + z_6 z_7 - 3 z_4 z_8 + z_5 z_9 + z_6 z_1 \\ & + z_8 z_9 - 2 z_9 z_{10} + z_{10} z_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -z_0 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4 - z_5 - z_6 - z_7 - z_8 - z_9 \\ & - z_{10} - z_{11} \end{aligned}$$

MaxCut & Modèle d'Ising

Ising



Lattice

Comment formuler l'hamiltonien avec:

$$J_{jk} = 1$$

$$h_j = 1$$

Minimiser

$$-\sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k - \sum_j h_j z_j$$

$$z_j = \{1, -1\} \quad j = 0, \dots, 11$$

Hamiltonien

$$H = - \sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k - \sum_j h_j z_j$$

J_{jk} interaction particule j et k

h_j champ magnétique externe

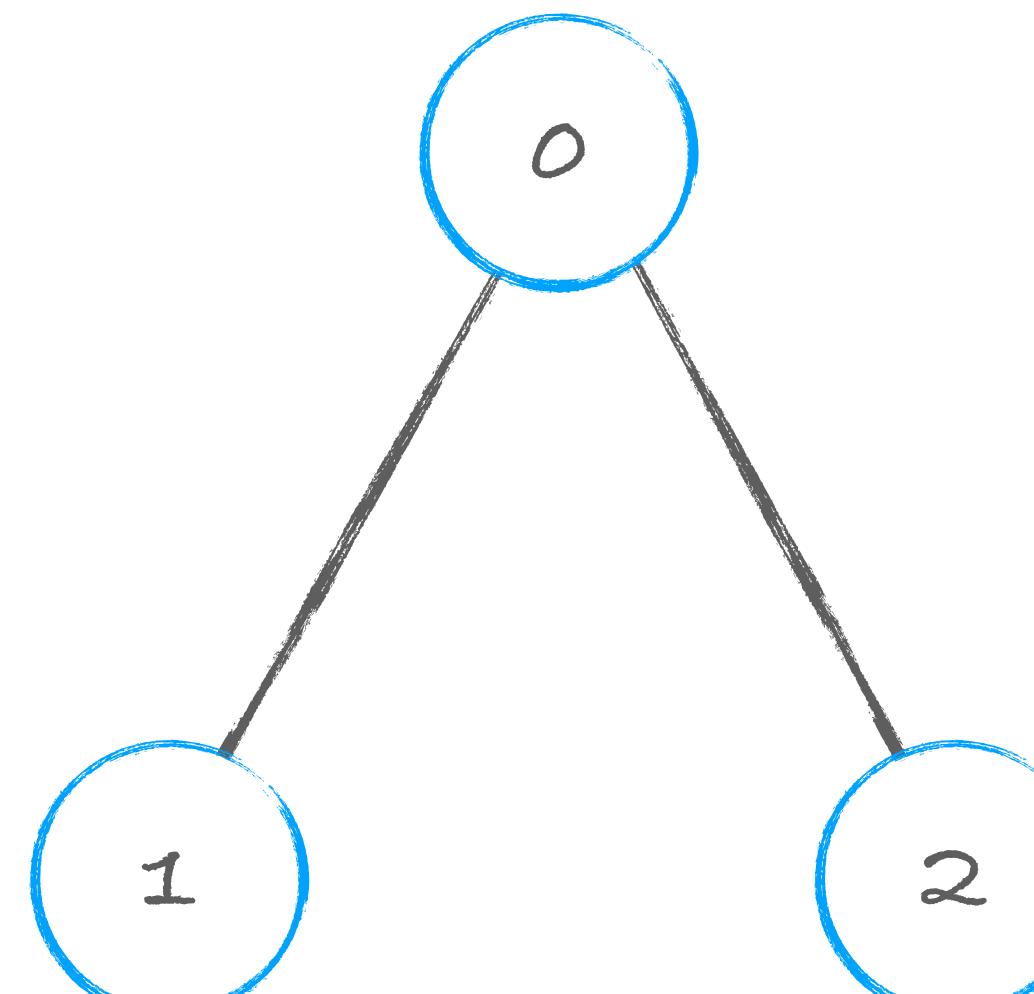
z particule

$$\begin{aligned} & z_0 z_1 - 2 z_1 z_2 + z_2 z_3 - 3 z_0 z_4 + z_1 z_5 + z_2 z_6 - 3 z_3 z_7 \\ & + z_4 z_5 - 2 z_5 z_6 + z_6 z_7 - 3 z_4 z_8 + z_5 z_9 + z_6 z_1 \\ & - z_0 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4 - z_5 - z_6 - z_7 - z_8 - z_9 \\ & - z_{10} - z_{11} \end{aligned}$$

Formuler un problème de la bonne façon

Formuler un problème de la bonne façon

Problème simple



Hamiltonien

$$H = - \sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k - \sum_j z_j$$

Minimiser

$$z_0 z_1 + z_1 z_2$$

Pour

$$|\psi\rangle = |0\rangle$$

$$H = Z$$

valeur attendue

$$\langle \psi | H | \psi \rangle$$

"Ground state"

$$|\psi\rangle = |1\rangle$$

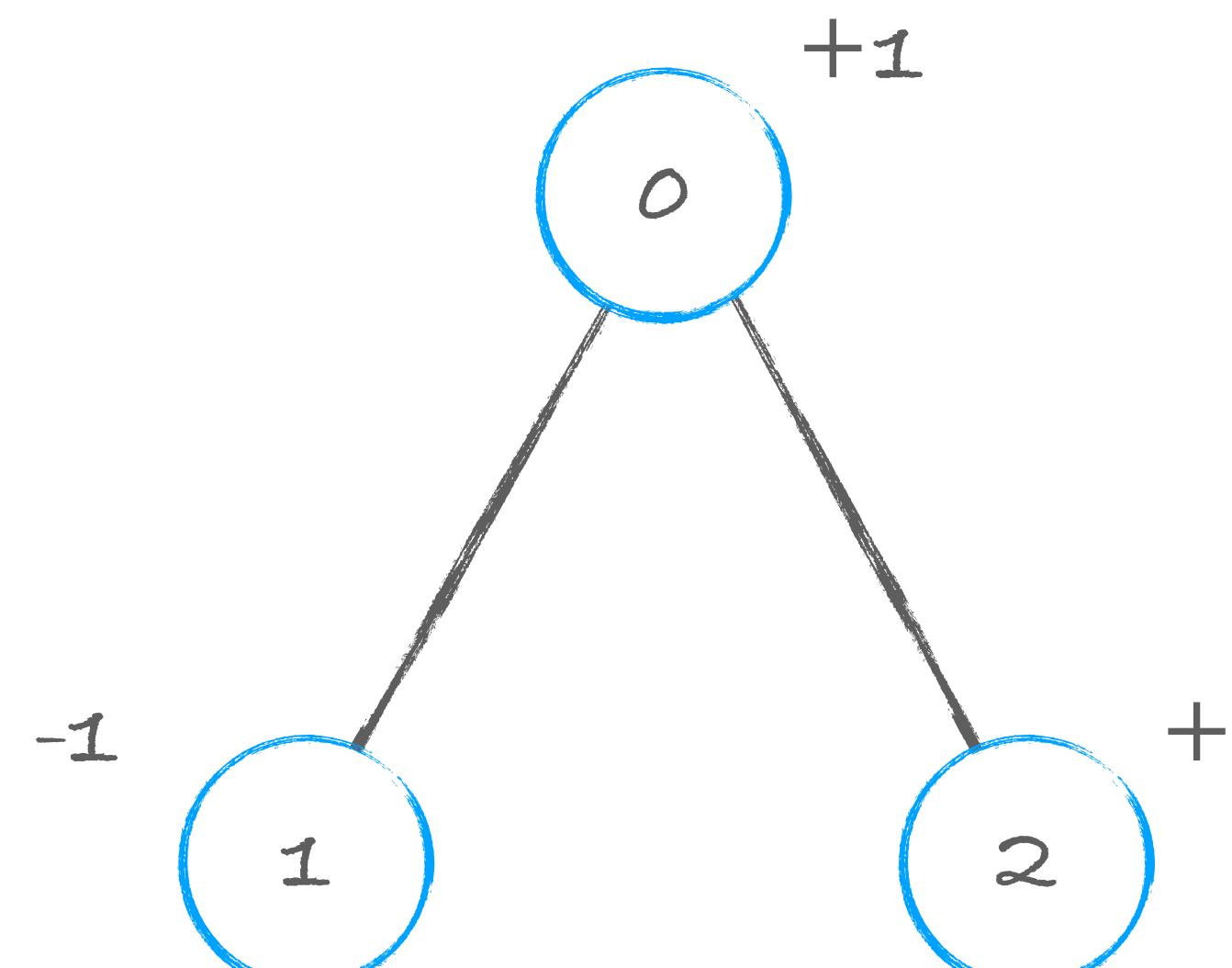
$$H = Z$$

$$\langle 0 | Z | 0 \rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle 1 | Z | 1 \rangle = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Formuler un problème de la bonne façon

Problème simple



Prenons l'état

$$|\psi\rangle = |010\rangle$$

$$H = ZZI$$

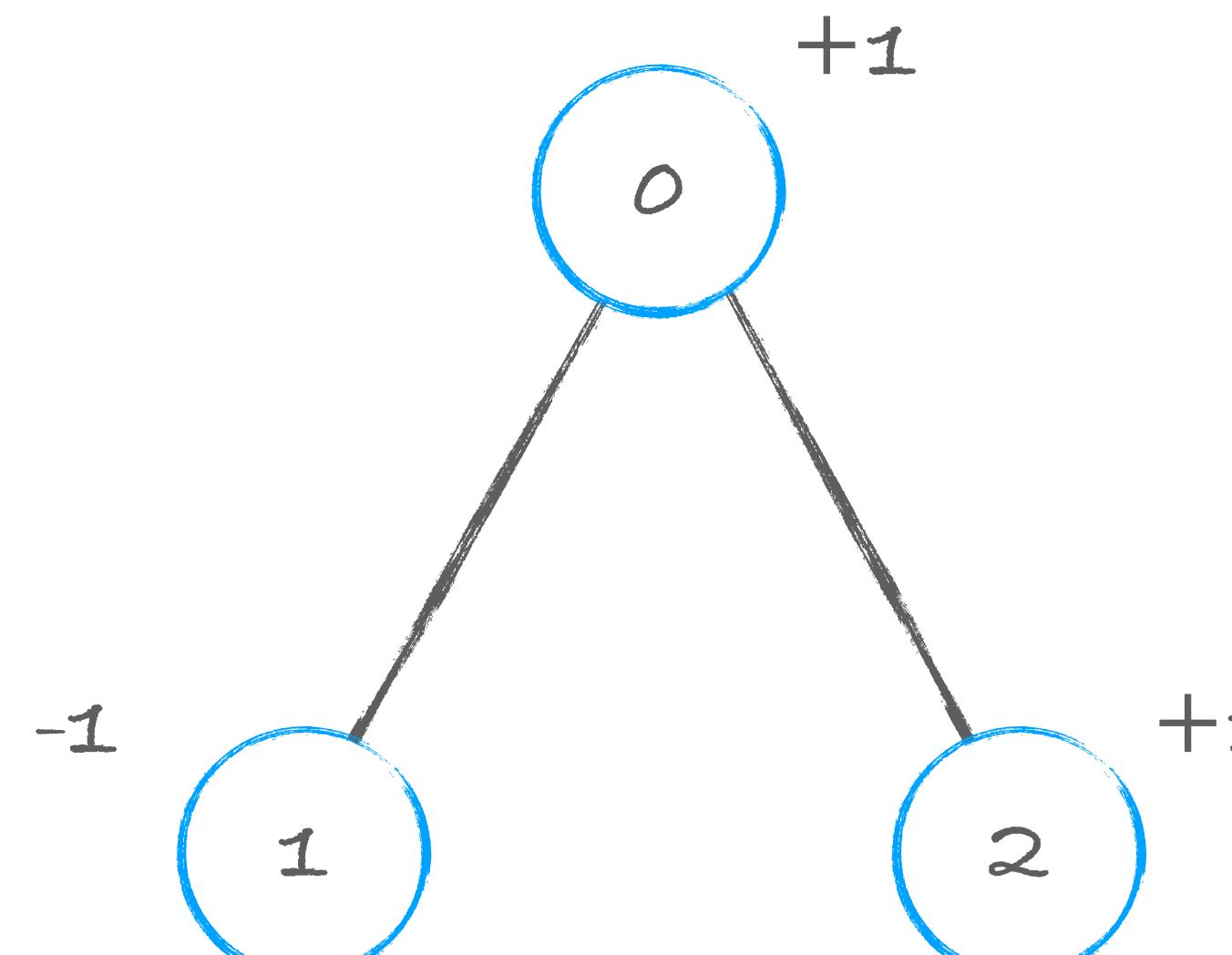
$$Z \otimes Z \otimes I = Z_0 Z_1$$

0 pour représenter +1
1 pour représenter -1

Z pour évaluer 0
Z pour évaluer 1
I pour évaluer 2

Formuler un problème de la bonne façon

Problème simple



Prenons l'état

$$|\psi\rangle = |010\rangle$$

0 pour représenter +1
1 pour représenter -1

$$H = ZZI$$

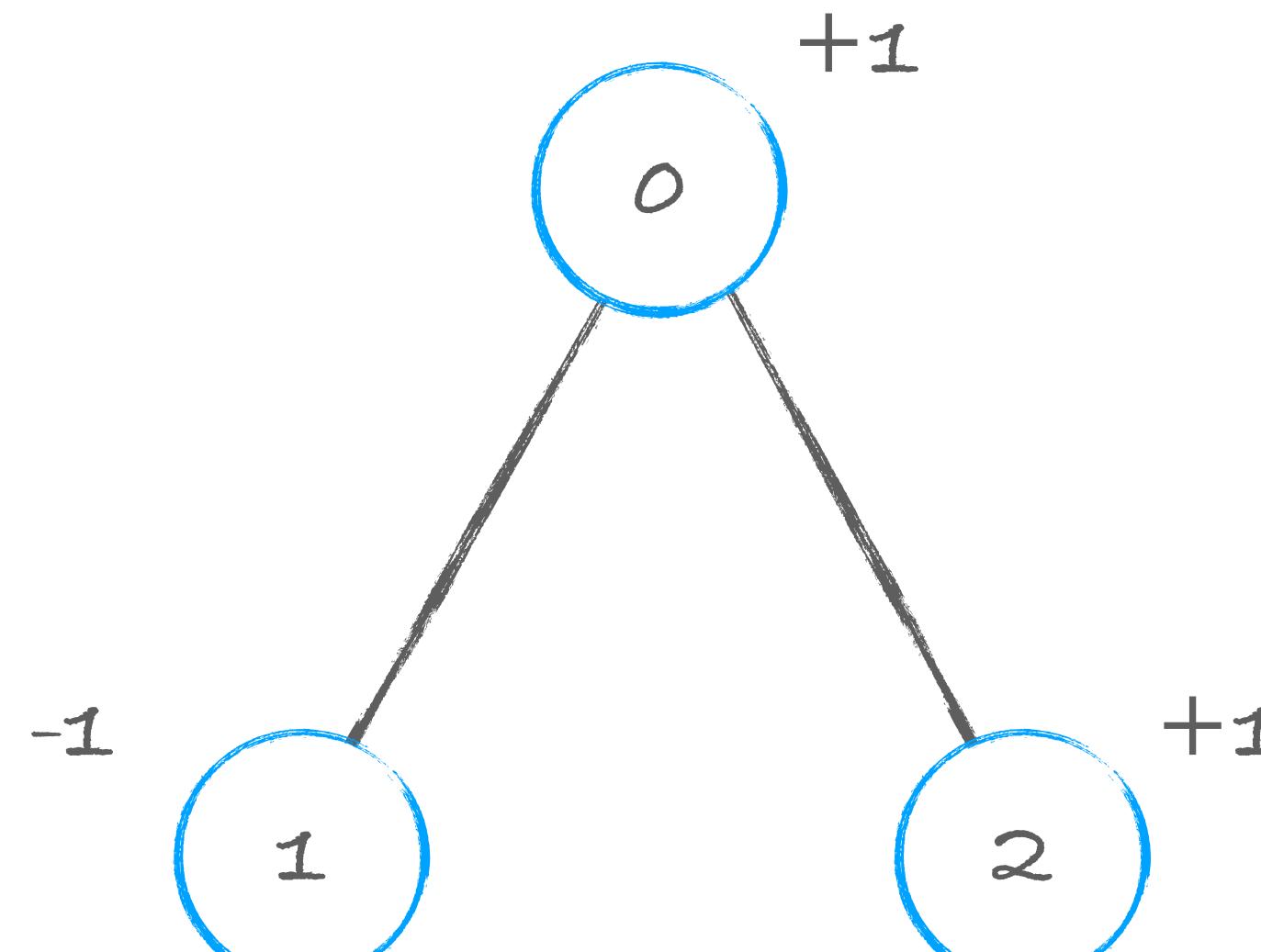
$$Z \otimes Z \otimes I = Z_0 Z_1$$

Z pour évaluer 0
Z pour évaluer 1
I pour évaluer 2

$$\begin{aligned}\langle 010 | Z \otimes Z \otimes I | 010 \rangle &= \langle 010 | (Z|0\rangle \otimes Z|1\rangle \otimes I|0\rangle) \\ &= \langle 0|Z|0\rangle \langle 1|Z|1\rangle \langle 0|I|0\rangle \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1\end{aligned}$$

Formuler un problème de la bonne façon

Problème simple



Prenons l'état

$$|\psi\rangle = |010\rangle$$

0 pour représenter +1
1 pour représenter -1

$$H = ZZI$$

$$Z \otimes Z \otimes I = Z_0 Z_1$$

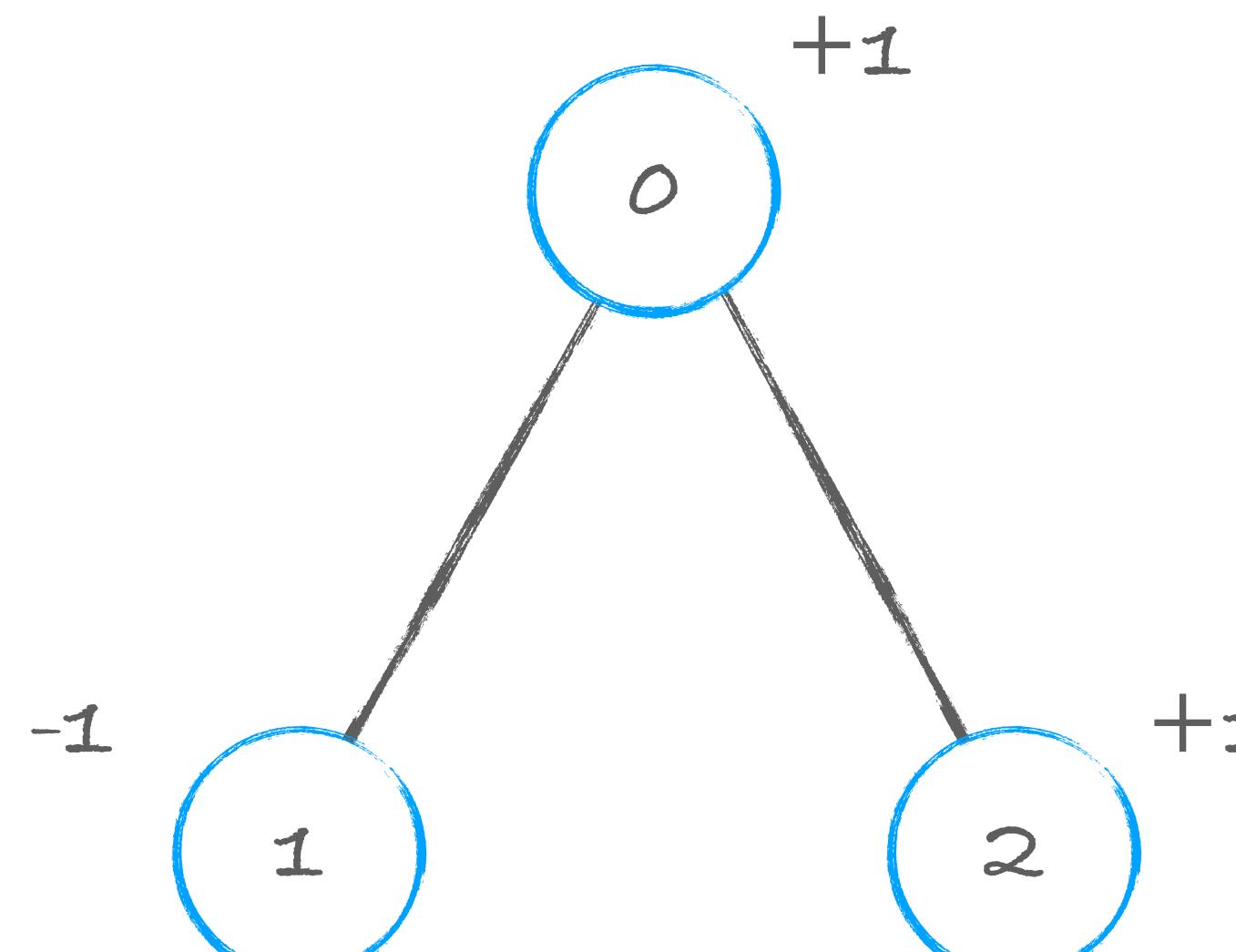
Z pour évaluer 0
Z pour évaluer 1
I pour évaluer 2

$$\begin{aligned}\langle 010 | Z \otimes Z \otimes I | 010 \rangle &= \langle 010 | (Z|0\rangle \otimes Z|1\rangle \otimes I|0\rangle) \\ &= \langle 0|Z|0\rangle \langle 1|Z|1\rangle \langle 0|I|0\rangle \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1\end{aligned}$$

Comme 0 et 1 sont différents l'évaluation donne -1 et devient un "cut"

Formuler un problème de la bonne façon

Problème simple



Pour Z_0Z_2

Prenons l'état

$$|\psi\rangle = |010\rangle$$

0 pour représenter +1
1 pour représenter -1

$$H = ZZI$$

$$Z \otimes Z \otimes I = Z_0Z_1$$

Z pour évaluer 0
 Z pour évaluer 1
I pour évaluer 2

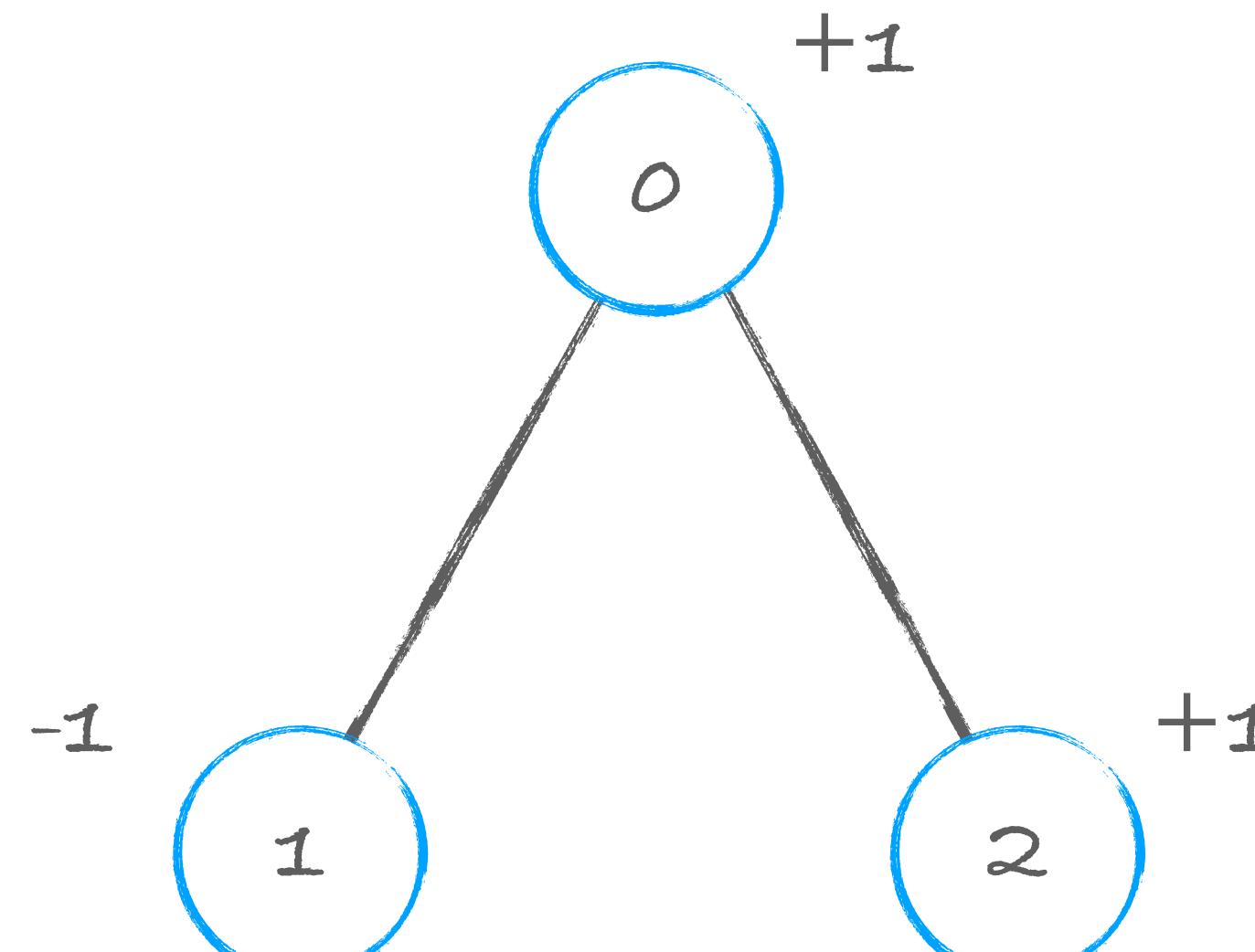
$$\begin{aligned}\langle 010 | Z \otimes Z \otimes I | 010 \rangle &= \langle 010 | (Z|0\rangle \otimes Z|1\rangle \otimes I|0\rangle) \\ &= \langle 0|Z|0\rangle \langle 1|Z|1\rangle \langle 0|I|0\rangle \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1\end{aligned}$$

Comme 0 et 1 sont différents l'évaluation donne -1 et devient un "cut"

$$\begin{aligned}\langle 010 | Z \otimes I \otimes Z | 010 \rangle &= \langle 010 | (Z|0\rangle \otimes I|1\rangle \otimes Z|0\rangle) \\ &= \langle 0|Z|0\rangle \langle 1|I|1\rangle \langle 0|Z|0\rangle \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Formuler un problème de la bonne façon

Problème simple



Comme 0 et 2 sont identiques l'évaluation donne 1 et ne devient pas un "cut"

Pour $Z_0 Z_2$

Prenons l'état

$$|\psi\rangle = |010\rangle$$

0 pour représenter +1
1 pour représenter -1

$$H = ZZI$$

$$Z \otimes Z \otimes I = Z_0 Z_1$$

Z pour évaluer 0
Z pour évaluer 1
I pour évaluer 2

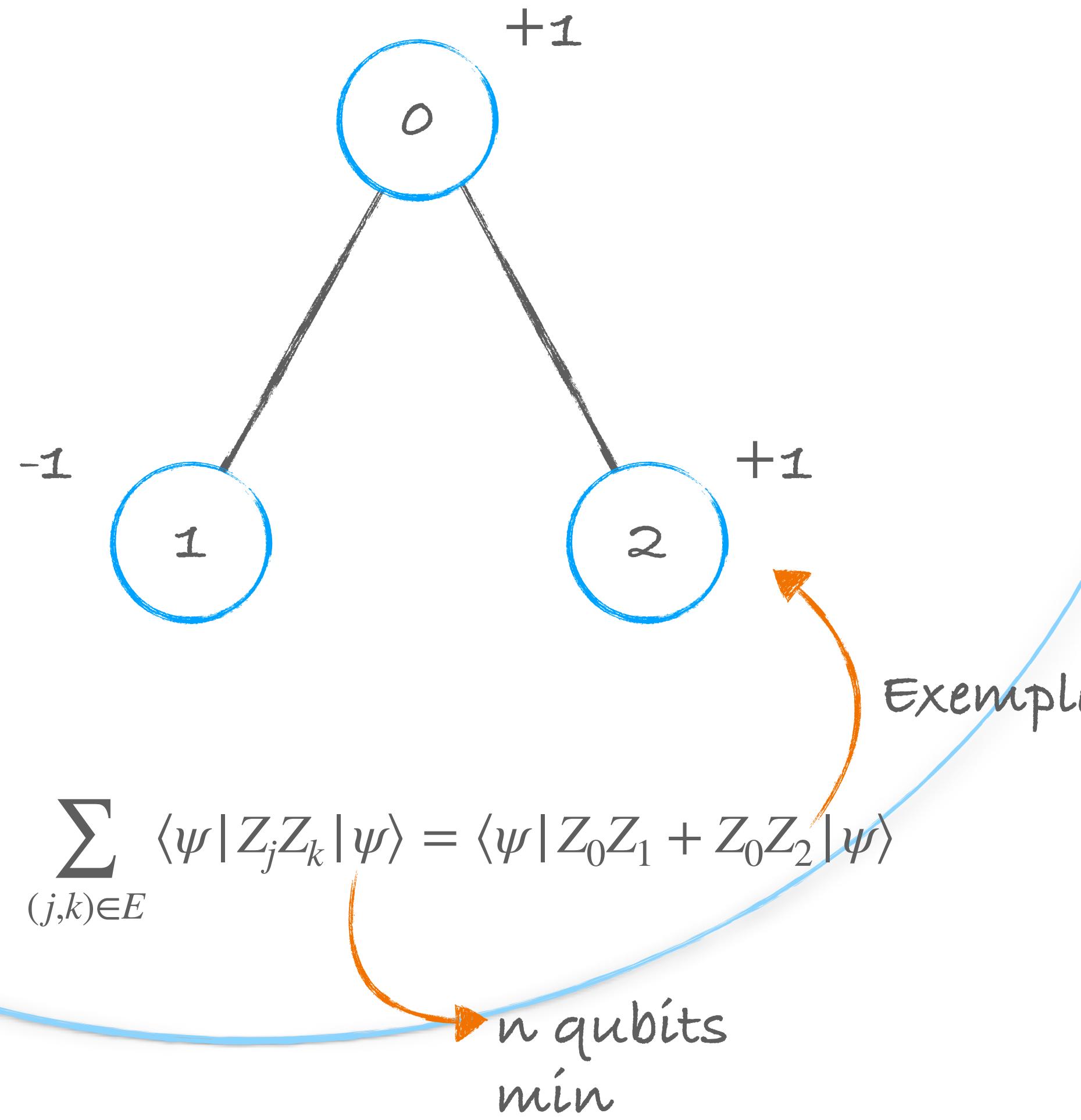
$$\begin{aligned}\langle 010 | Z \otimes Z \otimes I | 010 \rangle &= \langle 010 | (Z|0\rangle \otimes Z|1\rangle \otimes I|0\rangle) \\ &= \langle 0|Z|0\rangle \langle 1|Z|1\rangle \langle 0|I|0\rangle \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1\end{aligned}$$

Comme 0 et 1 sont différents l'évaluation donne -1 et devient un "cut"

$$\begin{aligned}\langle 010 | Z \otimes I \otimes Z | 010 \rangle &= \langle 010 | (Z|0\rangle \otimes I|1\rangle \otimes Z|0\rangle) \\ &= \langle 0|Z|0\rangle \langle 1|I|1\rangle \langle 0|Z|0\rangle \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Formuler un problème de la bonne façon

Problème simple



Prenons l'état

$$|\psi\rangle = |010\rangle$$

0 pour représenter +1
1 pour représenter -1

$$H = ZZI$$
$$Z \otimes Z \otimes I = Z_0 Z_1$$

Z pour évaluer 0
Z pour évaluer 1
I pour évaluer 2

$$Z_j Z_k |\psi\rangle$$

Eigenvector

Pour des eigenvalues de 1 et -1

L'objectif est de trouver la valeur minimum pour maximiser les "cuts"

Cela reviens à dire trouver le bitstring dont l'entier est le plus bas

Formuler un problème de la bonne façon

Problème simple

Ising

$$\text{Minimiser} \quad - \sum_{(j,k) \in E} J_{jk} \langle \psi | Z_j Z_k | \psi \rangle - \sum_j h_j \langle \psi | Z_j | \psi \rangle$$

Rappel $H = - \sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k - \sum_j h_j z_j$

n qubits
min

Hamiltonien
ou
Self-adjoint matrix

Les problèmes combinatoires peuvent être réécrits comme des problèmes de détermination du "ground state"

D'un Ising à un QUBO

D'un Ising à un QUBO

Subset sum pb

1 set de données
1 cible (target)

Est-ce que la somme de plusieurs éléments peut être égale à la cible?

NP-Complet

D'un Ising à un QUBO

Subset sum pb

1 set de données
1 cible (target)

Est-ce que la somme de plusieurs éléments peut être égale à la cible?

Exemple 1:

$$S = \{1, 3, 4, 7, -4\}$$
$$T = 6$$

NP-Complet

D'un Ising à un QUBO

Subset sum pb

1 set de données
1 cible (target)

Est-ce que la somme de plusieurs éléments peut être égale à la cible?

Exemple 1:

$$S = \{1, 3, 4, 7, -4\}$$
$$T = 6$$

$$S' = \{3, 7, -4\}$$
$$3 + 7 - 4 = 6 = T$$

Il y a une solution

NP-Complet

D'un Ising à un QUBO

Subset sum pb

1 set de données
1 cible (target)

Est-ce que la somme de plusieurs éléments peut être égale à la cible?

Exemple 1:

$$S = \{1, 3, 4, 7, -4\}$$
$$T = 6$$

$$S' = \{3, 7, -4\}$$
$$3 + 7 - 4 = 6 = T$$

Il y a une solution

Exemple 2:

$$S = \{2, -2, 4, 8, -12\}$$
$$T = 1$$

NP-Complet

D'un Ising à un QUBO

Subset sum pb

1 set de données
1 cible (target)

Est-ce que la somme de plusieurs éléments peut être égale à la cible?

Exemple 1:

$$S = \{1, 3, 4, 7, -4\}$$
$$T = 6$$

$$S' = \{3, 7, -4\}$$
$$3 + 7 - 4 = 6 = T$$

Il y a une solution

Exemple 2:

$$S = \{2, -2, 4, 8, -12\}$$
$$T = 1$$

Il n'y a une solution
Tous les éléments de S sont pairs, la target est impaire

NP-Complet

D'un Ising à un QUBO

subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

1 set de données
1 cible (target)

Est-ce que la somme de plusieurs éléments peut être égale à la cible?

Problème de minimisation avec des variables binaires

$$S = \{a_0, \dots, a_m\}$$

variables binaires $x_j \quad j = 0, \dots, m$

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Équation quadratique

D'un Ising à un QUBO

subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

1 set de données
1 cible (target)

Est-ce que la somme de plusieurs éléments peut être égale à la cible?

Problème de minimisation avec des variables binaires

$$S = \{a_0, \dots, a_m\}$$

variables binaires $x_j \quad j = 0, \dots, m$

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Équation quadratique

Pour obtenir une valeur positive

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = 0$$

Toujours non-négatif

$$x_0, x_1, \dots, x_m$$

chaîne binaire qui permet
de sélectionner les valeurs du set
quand i est présent dans x_j

D'un Ising à un QUBO

subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

1 set de données
1 cible (target)

Est-ce que la somme de plusieurs éléments peut être égale à la cible?

Problème de minimisation avec des variables binaires

$$S = \{a_0, \dots, a_m\}$$

variables binaires $x_j \quad j = 0, \dots, m$

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Équation quadratique

Le problème revient à minimiser $c(x_0, x_1, \dots, x_m)$

S'il la minimisation est égale à 0 il y une solution sinon il n'y a pas de solution

D'un Ising à un QUBO

Subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Exemple:

$$S = \{1, 4, -2\}$$

$$T = 2$$

D'un Ising à un QUBO

subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Exemple:

$$\begin{aligned} S &= \{1, 4, -2\} \longrightarrow c(x_0, x_1, x_2) = (x_0 + 4x_1 - 2x_2 - 2)^2 \\ T &= 2 \end{aligned}$$

D'un Ising à un QUBO

Subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Exemple:

$$\begin{aligned} S &= \{1, 4, -2\} \longrightarrow c(x_0, x_1, x_2) = (x_0 + 4x_1 - 2x_2 - 2)^2 \\ T &= 2 \end{aligned}$$

Revient à minimiser $x_0^2 + 8x_0x_1 - 4x_0x_2 - 4x_0 + 16x_1^2 - 16x_1x_2 - 16x_1 + 4x_2^2 + 8x_2 + 4$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 0, \dots, m$$

D'un Ising à un QUBO

subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Exemple:

$$\begin{aligned} S &= \{1, 4, -2\} \longrightarrow c(x_0, x_1, x_2) = (x_0 + 4x_1 - 2x_2 - 2)^2 \\ T &= 2 \end{aligned}$$

Revient à minimiser $x_0^2 + 8x_0x_1 - 4x_0x_2 - 4x_0 + 16x_1^2 - 16x_1x_2 - 16x_1 + 4x_2^2 + 8x_2 + 4$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 0, \dots, m$$

variables binaires $x_j^2 = x_j$

D'un Ising à un QUBO

subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Exemple:

$$\begin{aligned} S &= \{1, 4, -2\} \longrightarrow c(x_0, x_1, x_2) = (x_0 + 4x_1 - 2x_2 - 2)^2 \\ T &= 2 \end{aligned}$$

Revient à minimiser $x_0^2 + 8x_0x_1 - 4x_0x_2 - 4x_0 + 16x_1^2 - 16x_1x_2 - 16x_1 + 4x_2^2 + 8x_2 + 4$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 0, \dots, m$$

variables binaires $x_j^2 = x_j$

solution $x_0 = 0, \quad x_1 = x_2 = 1$

D'un Ising à un QUBO

Subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Toujours de degré 2  quadratic unconstrained binary optimization (QUBO) problem

NP-Hard

D'un Ising à un QUBO

Subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Toujours de degré 2 \longrightarrow Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO) problem

Minimiser $q(x_0, \dots, x_m)$

Avec $x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

QUBO car on cherche à minimiser des expressions quadratiques avec des variables binaires sans restrictions car toutes les combinaisons de 0 et 1 sont permises.

NP-Hard

D'un Ising à un QUBO

Subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Toujours de degré 2  Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO) problem

Minimiser $q(x_0, \dots, x_m)$

Avec $x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

Formulation pour un Ising?

$$H = - \sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k - \sum_j h_j z_j$$

D'un Ising à un QUBO

Subset sum pb

Réécriture selon un Ising ground state

$$c(x_0, x_1, \dots, x_m) = (a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m - T)^2$$

Toujours de degré 2 \longrightarrow Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO) problem

Minimiser $q(x_0, \dots, x_m)$

Avec $x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

Formulation pour un Ising?

$$H = - \sum_{j,k} J_{jk} z_j z_k - \sum_j h_j z_j$$

Nouvelle variable

QUBO à Ising

$$x_j = \frac{(1 - z_j)}{2}$$

$$\begin{aligned} x_j = 0 &\rightarrow z_j = 1 \\ x_j = 1 &\rightarrow z_j = -1 \end{aligned}$$

Ising à QUBO

$$z_j = 1 - 2x_j$$

$$\begin{aligned} x_j = 0 &\rightarrow z_j = 1 \\ x_j = 1 &\rightarrow z_j = -1 \end{aligned}$$

Ising à QUBO

$$z_j = 2x_j - 1$$

Polynôme quadratique
qui représente exactement
la fonction d'énergie

D'un Ising à un QUBO

Exemple

Ising énergie $-\frac{z_0 z_1}{2} + z_2$

QUBO?

D'un Ising à un QUBO

Exemple

Ising énergie

$$-\frac{z_0 z_1}{2} + z_2$$

QUBO?

$$z_j = 1 - 2x_j$$

$$-\frac{(1 - 2x_0)(1 - 2x_1)}{2} + (1 - 2x_2) = -2x_0x_1 - x_0 + x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}$$

D'un Ising à un QUBO

Exemple

Ising énergie

$$-\frac{z_0 z_1}{2} + z_2$$

QUBO?

$$z_j = 1 - 2x_j$$

$$-\frac{(1 - 2x_0)(1 - 2x_1)}{2} + (1 - 2x_2) = -2x_0x_1 - x_0 + x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}$$

QUBO Formulation

Minimiser $-2x_0x_1 - x_0 + x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}$

Avec $x_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2$

D'un Ising à un QUBO

Exemple

QUBO

$$x_0^2 + 2x_0x_1 - 3$$

Ising?

$$x_j = \frac{1 - z_j}{2}$$

D'un Ising à un QUBO

Exemple

QUBO

$$x_0^2 + 2x_0x_1 - 3$$

Ising?

$$x_j = \frac{1 - z_j}{2}$$

$$\frac{z_0^2}{4} + \frac{z_0z_1}{2} - z_0 - \frac{z_1}{2} - \frac{9}{4}$$

D'un Ising à un QUBO

Exemple

QUBO

$$x_0^2 + 2x_0x_1 - 3$$

Ising?

$$x_j = \frac{1 - z_j}{2}$$

$$\frac{z_0^2}{4} + \frac{z_0z_1}{2} - z_0 - \frac{z_1}{2} - \frac{9}{4}$$

Plusieurs problèmes



valeurs au carré

Termes indépendants

D'un Ising à un QUBO

Exemple

QUBO

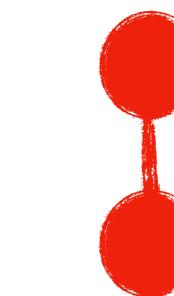
$$x_0^2 + 2x_0x_1 - 3$$

Ising?

$$x_j = \frac{1 - z_j}{2}$$

$$\frac{z_0^2}{4} + \frac{z_0z_1}{2} - z_0 - \frac{z_1}{2} - \frac{9}{4}$$

Plusieurs problèmes



valeurs au carré

Termes indépendants

Solutions



$$z_j = \{1; -1\}; \quad z_j^2 = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{z_0z_1}{2} - z_0 - \frac{z_1}{2} - \frac{9}{4}$$

D'un Ising à un QUBO

Exemple

QUBO

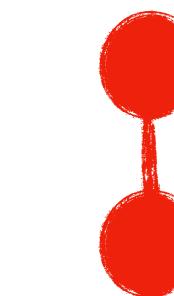
$$x_0^2 + 2x_0x_1 - 3$$

Ising?

$$x_j = \frac{1 - z_j}{2}$$

$$\frac{z_0^2}{4} + \frac{z_0z_1}{2} - z_0 - \frac{z_1}{2} - \frac{9}{4}$$

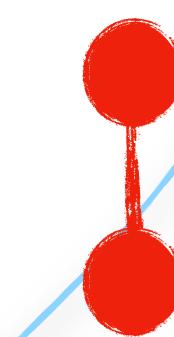
Plusieurs problèmes



valeurs au carré

Termes indépendants

Solutions



$$z_j = \{1; -1\}; \quad z_j^2 = 1$$

Minimisation

$$\frac{1}{4} + \frac{z_0z_1}{2} - z_0 - \frac{z_1}{2} - \frac{9}{4}$$

$$\frac{z_0z_1}{2} - z_0 - \frac{z_1}{2}$$

D'un Ising à un QUBO

Exemple

QUBO

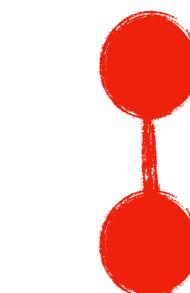
$$x_0^2 + 2x_0x_1 - 3$$

Ising?

$$x_j = \frac{1 - z_j}{2}$$

$$\frac{z_0^2}{4} + \frac{z_0z_1}{2} - z_0 - \frac{z_1}{2} - \frac{9}{4}$$

Plusieurs problèmes



valeurs au carré

Termes indépendants

Solutions



$$z_j = \{1; -1\}; \quad z_j^2 = 1$$

Minimisation

$$\frac{1}{4} + \frac{z_0z_1}{2} - z_0 - \frac{z_1}{2} - \frac{9}{4}$$

$$\frac{z_0z_1}{2} - z_0 - \frac{z_1}{2}$$

Ising Formulation

$$\text{Minimiser} \quad \frac{z_0z_1}{2} - z_0 - \frac{z_1}{2}$$

Avec

$$z_j \in \{1, -1\}, \quad j = 0, 1, 2$$

D'un Ising à un QUBO

Exemple

$$S = \{1, -2, 3, -4\}; \quad T = 0$$

QUBO?

Ising?

A vous de jouer!!

D'un Ising à un QUBO

Exemple

$$S = \{1, -2, 3, -4\}; \quad T = 0$$

QUBO?

QUBO Formulation

$$\text{Minimiser } x_0^2 - 4x_0x_1 + 6x_0x_2 - 8x_0x_3 + 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 16x_1x_3 + 9x_2^2 - 24x_2x_3 + 16x_3^2$$

Avec

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0,1,2,3$$

Ising?

D'un Ising à un QUBO

Exemple

$$S = \{1, -2, 3, -4\}; \quad T = 0$$

QUBO?

QUBO Formulation

$$\text{Minimiser } x_0^2 - 4x_0x_1 + 6x_0x_2 - 8x_0x_3 + 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 16x_1x_3 + 9x_2^2 - 24x_2x_3 + 16x_3^2$$

Avec $x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0,1,2,3$

Ising?

Ising Formulation

$$\text{Minimiser } -z_0z_1 + \frac{3z_0z_2}{2} - 2z_0z_3 + z_0 - 3z_1z_2 + 4z_1z_3 - 2z + 1 - 6z_2z_3 + 3z_2 - 4z_3$$

Avec $z_j \in \{1, -1\}, \quad j = 0,1,2,3$

Pour les problèmes combinatoires, l'approche Ising est généralement préférée

QUBO pour les problèmes d'optimisation

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Binary Linear programming

Le principe est d'optimiser une fonction linéaire avec des variables binaires en posant des contraintes linéaires.

Forme générale

Minimiser $c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_mx_m$

Avec $Ax \leq b$

$x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

c_0, c_1, \dots, c_m

coefficients entiers

x_0, x_1, \dots, x_m

valeurs binaires

A

Matrice d'entiers

$x = (x_0, \dots, x_m)^\dagger$

Transposée

b

vecteur colonne d'entiers

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Binary Linear programming

Formulation

Forme générale

Minimiser $c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_mx_m$

Avec $Ax \leq b$

$x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

Minimiser $-5x_0 + 3x_1 - 3x_2$

Avec

$$x_0 + x_2 \leq 1$$

$$3x_0 - x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2$$

On ne peut avoir que x_0 ou x_1 car $x_j \in \{0,1\}$

Les configurations qui respectent les contraintes sont appelées
"Faisable"

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Binary Linear programming

Formulation

Forme générale

Minimiser $c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_mx_m$

Avec $Ax \leq b$

$x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

Minimiser $-5x_0 + 3x_1 - 3x_2$

Avec

$$\begin{cases} x_0 + x_2 \leq 1 \\ 3x_0 - x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2 \end{cases}$$

On ne peut avoir que x_0 ou x_1 car $x_j \in \{0,1\}$

Le problème est que les inégalités ne sont pas "tolérées", les contraintes doivent être modifiées pour intégrer des variables supplémentaires appelées "**slack variables**"

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Binary Linear programming

Formulation

Forme générale

Minimiser $c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_mx_m$

Avec $Ax \leq b$

$x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

Minimiser $-5x_0 + 3x_1 - 3x_2$

Avec

$$x_0 + x_2 \leq 1$$

$$3x_0 - x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2$$

On ne peut avoir que x_0 ou x_1 car $x_j \in \{0,1\}$

$$x_0 + x_2 + y_0 = 1$$

$$x_0 = x_2 = 0 ; y_0 = 1$$

$$x_0 = 0; x_2 = 1 ; y_0 = 0 \text{ ou } x_0 = 1; x_2 = 0 ; y_0 = 0$$

Note importante
Une règle pour la minimisation des expressions linéaires est de mettre 0 pour les coefficients positifs et 1 pour les négatifs

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Binary Linear programming

Formulation

Forme générale

Minimiser $c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_mx_m$

Avec $Ax \leq b$

$x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

$$\text{Minimiser } -5x_0 + 3x_1 - 3x_2$$

Avec

$$\begin{aligned} & x_0 + x_2 \leq 1 \\ & 3x_0 - x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & x_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2 \end{aligned}$$

On ne peut avoir que x_0 ou x_1 car $x_j \in \{0,1\}$

$$x_0 + x_2 + y_0 = 1$$

$$x_0 = x_2 = 0 ; y_0 = 1$$

$$x_0 = 0; x_2 = 1 ; y_0 = 0 \text{ ou } x_0 = 1; x_2 = 0 ; y_0 = 0$$

Le set de solutions "faisables" n'est pas changé

valeur minimale de $3x_0 - x_1 + 3x_2$ est -1 la valeur ajoutée pour la contrainte est donc de 5
5 en binaire s'écrit 101 il faut donc ajouter 3 variables binaires supplémentaires

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Binary Linear programming

Formulation

Forme générale

Minimiser $c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_mx_m$

Avec $Ax \leq b$

$x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

Minimiser $-5x_0 + 3x_1 - 3x_2$

Avec

$$x_0 + x_2 \leq 1$$

$$3x_0 - x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2$$

$$3x_0 - x_1 + 3x_2 + y_0 = 1$$

$$y_1 = 1; 2y_2 = 2; 2y_3 = 2; \sum_j y_j = 5$$

On ne peut avoir que x_0 ou x_1 car $x_j \in \{0,1\}$

$$x_0 = x_2 = 0; y_0 = 1$$

$$x_0 = 0; x_2 = 1; y_0 = 0 \text{ ou } x_0 = 1; x_2 = 0; y_0 = 0$$

Le set de solutions "faisables" n'est pas changé

Reformulation

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Binary Linear programming

Formulation

$$\text{Minimiser} \quad -5x_0 + 3x_1 - 3x_2$$

$$\text{Avec} \quad x_0 + x_2 + y_0 = 1$$

$$3x_0 - x_1 + 3x_2 + y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 4$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0,1,2$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad j = 0,1,2,3$$

Forme générale

$$\text{Minimiser} \quad c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_mx_m$$

$$\text{Avec} \quad Ax \leq b$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0, \dots, m$$

Forme d'un QUBO ?

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Binary Linear programming

Formulation

$$\text{Minimiser} \quad -5x_0 + 3x_1 - 3x_2$$

Avec

$$x_0 + x_2 + y_0 = 1$$

$$3x_0 - x_1 + 3x_2 + y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 4$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0,1,2$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad j = 0,1,2,3$$

Forme générale

$$\text{Minimiser} \quad c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_mx_m$$

Avec

$$Ax \leq b$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0, \dots, m$$

Ajout en termes de pénalité pour la minimisation

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Binary Linear programming

Formulation

Forme générale

Minimiser $c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_mx_m$

Avec $Ax \leq b$

$x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

Minimiser $-5x_0 + 3x_1 - 3x_2 + B(x_0 + x_2 + y_0 - 1)^2 + B(3x_0 - x_1 + 3x_2 + y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 4)^2$

Avec $x_j \in \{0,1\}, j = 0, 1, 2$

$y_j \in \{0,1\}, j = 0, 1, 2, 3$

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Binary Linear programming

Formulation

Forme générale

Minimiser $c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_mx_m$

Avec $Ax \leq b$

$x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

Minimiser $-5x_0 + 3x_1 - 3x_2 + B(x_0 + x_2 + y_0 - 1)^2 + B(3x_0 - x_1 + 3x_2 + y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 4)^2$

Avec $x_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2$

$y_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2,3$

B doit être grand pour ne pas que les conditions soient violées

Ici si $B = 11$ on a une forme de QUBO dont les contraintes ne peuvent pas être violées

Minimiser $-5x_0 + 3x_1 - 3x_2 + 11(x_0 + x_2 + y_0 - 1)^2 + 11(3x_0 - x_1 + 3x_2 + y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 4)^2$

Avec $x_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2$

$y_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2,3$

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Binary Linear programming

Formulation

Forme générale

Minimiser $c_0x_0 + c_1x_1 + \dots + c_mx_m$

Avec $Ax \leq b$

$x_j \in \{0,1\}, j = 0, \dots, m$

Minimiser $-5x_0 + 3x_1 - 3x_2 + B(x_0 + x_2 + y_0 - 1)^2 + B(3x_0 - x_1 + 3x_2 + y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 4)^2$

Avec $x_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2$

$y_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2,3$

B doit être

Avec cette approche vous savez transformer tout problème linéaire en QUBO

soient violées

Ici si $B = 11$ on a une forme de contraintes qui ne peuvent pas être violées

Slack variables

Pénalités

Minimiser $-5x_0 + 3x_1 - 3x_2 + 11(x_0 + x_2 + y_0 - 1)^2 + 11(3x_0 - x_1 + 3x_2 + y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 4)^2$

Avec $x_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2$

$y_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2,3$

QUBO pour les problèmes d'optimisation

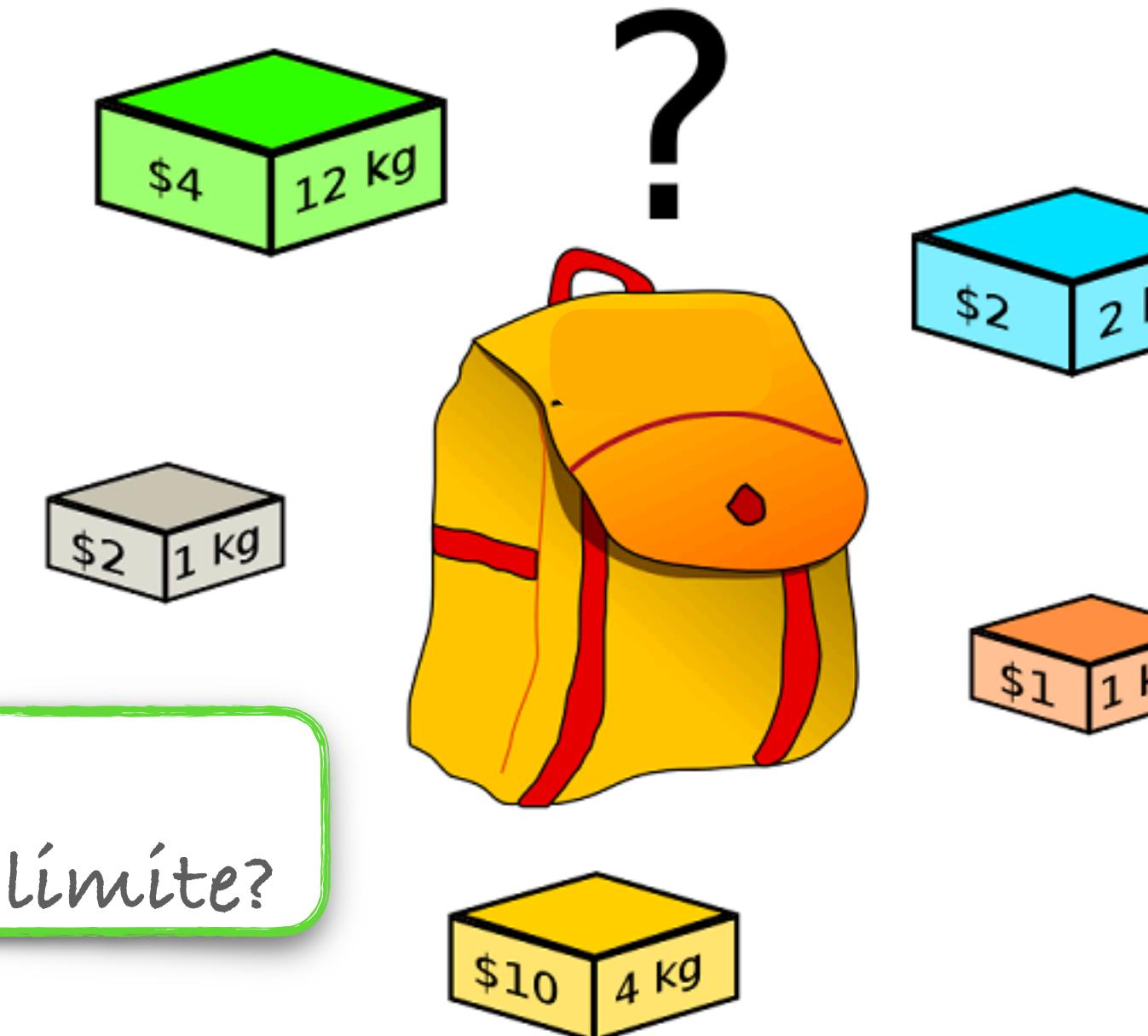
Knapsack Problem

Liste d'objets $j = 0, \dots, m$

chaque objet a un poids w_j
et une valeur c_j

on a un poids maximum W

Comment obtenir la valeur
maximum sans dépasser le poids limite?



$$w_0 = 12 ; c_0 = 4$$

$$w_1 = 2 ; c_1 = 2$$

$$w_2 = 1 ; c_2 = 2$$

$$w_3 = 1 ; c_3 = 1$$

$$w_4 = 4 ; c_4 = 10$$

$$W = 17$$

NP-Hard

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Knapsack Problem

Liste d'objets $j = 0, \dots, m$

chaque objet a un poids w_j
et une valeur c_j

On a un poids maximum W

Comment obtenir la valeur
maximum sans dépasser le poids limite?

$$w_0 = 12 ; c_0 = 4$$

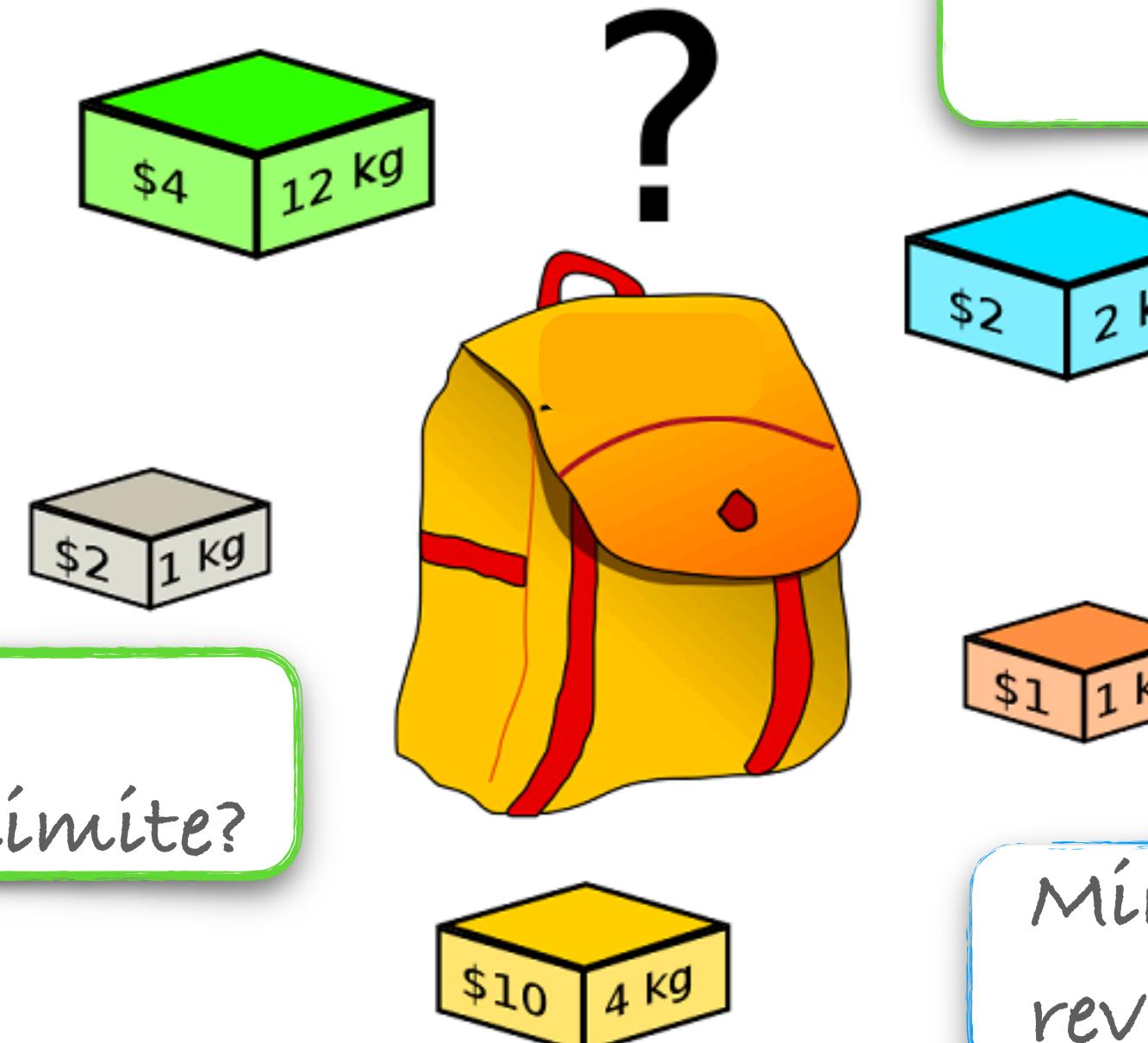
$$w_1 = 2 ; c_1 = 2$$

$$w_2 = 1 ; c_2 = 2$$

$$w_3 = 1 ; c_3 = 1$$

$$w_4 = 4 ; c_4 = 10$$

$$W = 17$$



Minimiser $-c_0x_0 - c_1x_1 - \dots - c_mx_m$

Avec

$$w_0x_0 + w_1x_1 + \dots + w_mx_m \leq W$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0, \dots, m$$

Minimiser une expression négative
revient à maximiser le problème

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Knapsack Problem

Liste d'objets $j = 0, \dots, m$

chaque objet a un poids w_j
et une valeur c_j

on a un poids maximum W

Comment obtenir la valeur
maximum sans dépasser le poids limite?

$$w_0 = 12 ; c_0 = 4$$

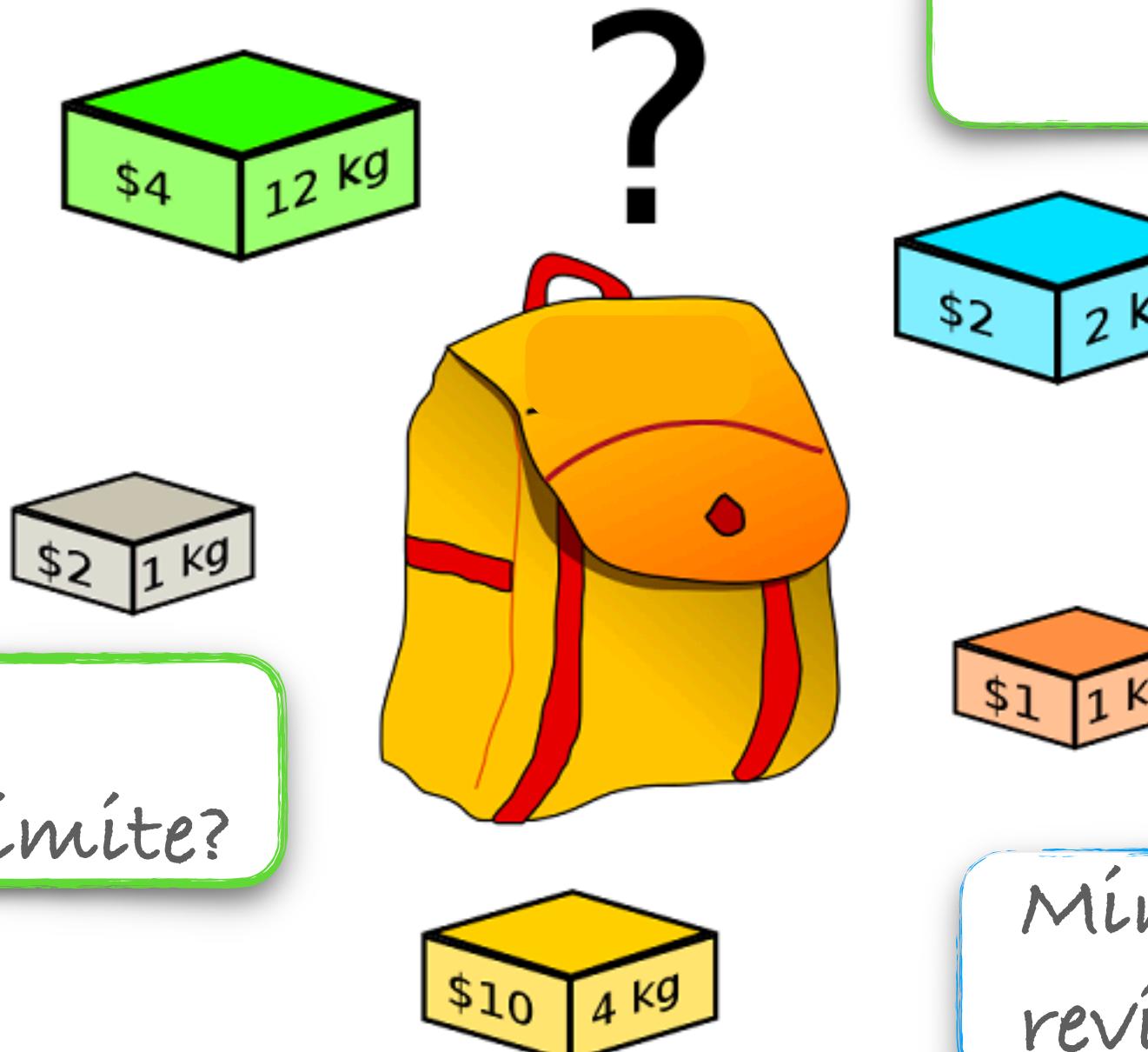
$$w_1 = 2 ; c_1 = 2$$

$$w_2 = 1 ; c_2 = 2$$

$$w_3 = 1 ; c_3 = 1$$

$$w_4 = 4 ; c_4 = 10$$

$$W = 17$$



$$\text{Minimiser } -c_0x_0 - c_1x_1 - \dots - c_mx_m$$

Avec

$$w_0x_0 + w_1x_1 + \dots + w_mx_m \leq W$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0, \dots, m$$

Minimiser $-4x_0 - 2x_1 - 2x_2 - 1x_3 - 10x_4$
Avec $12x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 4x_4 \leq 17$
 $x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0,1,2,3,4$

Minimiser une expression négative
revient à maximiser le problème

NP-Hard

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Knapsack Problem

Liste d'objets $j = 0, \dots, m$

chaque objet a un poids w_j
et une valeur c_j

on a un poids maximum W

Comment obtenir la valeur
maximum sans dépasser le poids limite?

$$w_0 = 12 ; c_0 = 4$$

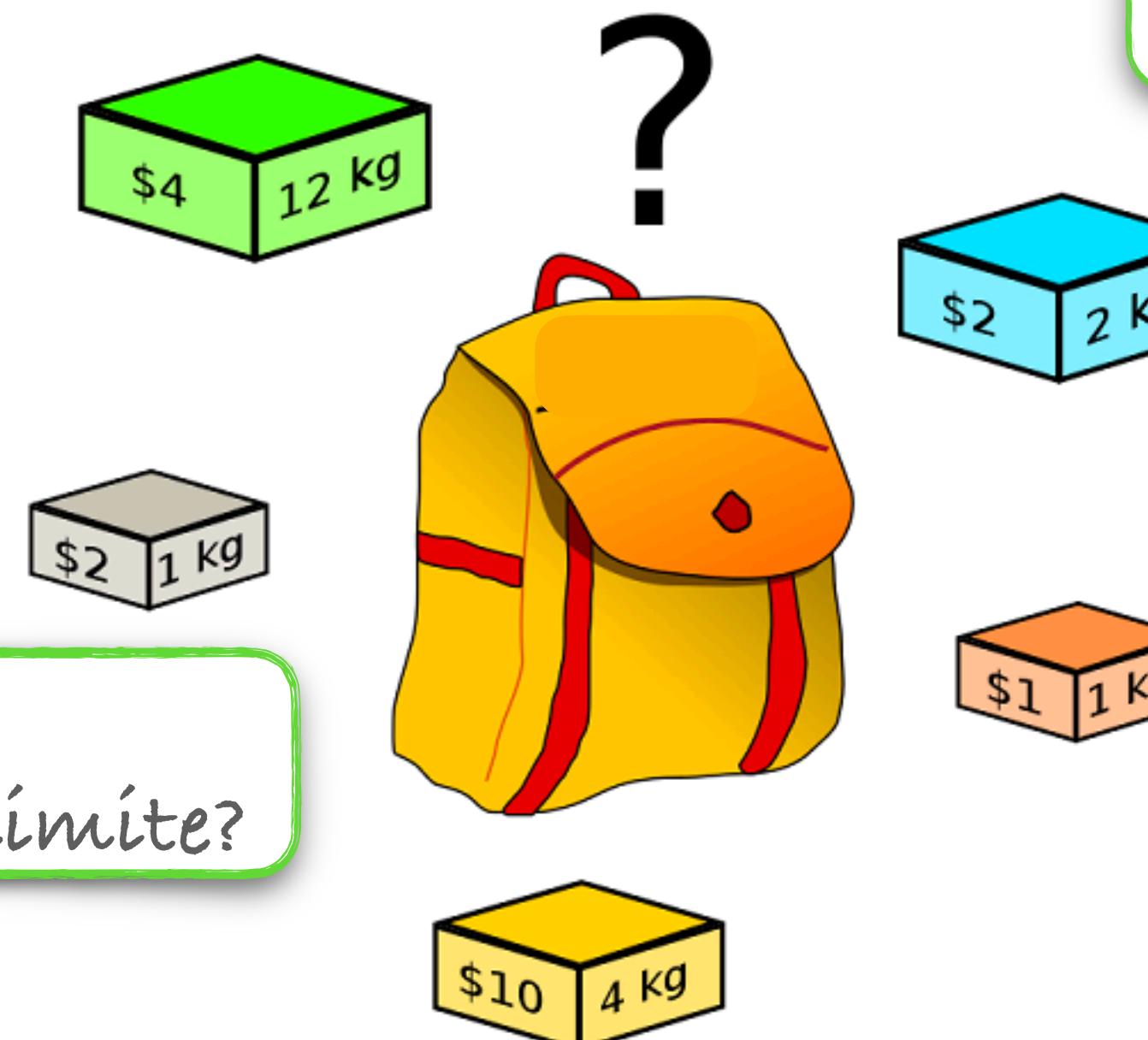
$$w_1 = 2 ; c_1 = 2$$

$$w_2 = 1 ; c_2 = 2$$

$$w_3 = 1 ; c_3 = 1$$

$$w_4 = 4 ; c_4 = 10$$

$$W = 17$$



Minimiser $-4x_0 - 2x_1 - 2x_2 - 1x_3 - 10x_4$

Avec $12x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 4x_4 \leq 17$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0,1,2,3,4$$

QUBO?

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Knapsack Problem

Liste d'objets $j = 0, \dots, m$

chaque objet a un poids w_j
et une valeur c_j

on a un poids maximum W

Comment obtenir la valeur
maximum sans dépasser le poids limite?

$$w_0 = 12 ; c_0 = 4$$

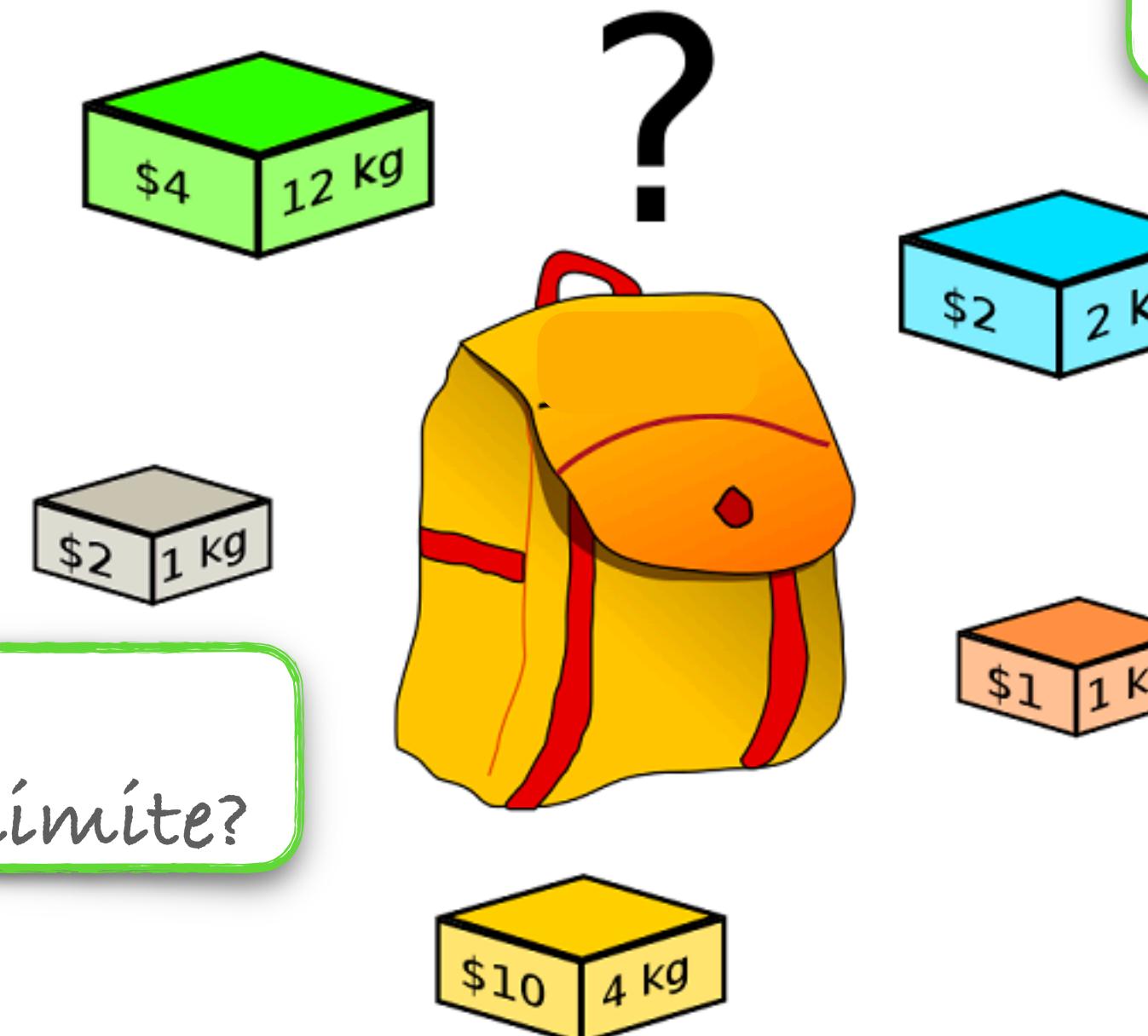
$$w_1 = 2 ; c_1 = 2$$

$$w_2 = 1 ; c_2 = 2$$

$$w_3 = 1 ; c_3 = 1$$

$$w_4 = 4 ; c_4 = 10$$

$$W = 17$$



Minimiser $-4x_0 - 2x_1 - 2x_2 - 1x_3 - 10x_4$

Avec $12x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 4x_4 \leq 17$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0,1,2,3,4$$

QUBO?

$$17 = 10001$$

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Knapsack Problem

Liste d'objets $j = 0, \dots, m$

chaque objet a un poids w_j
et une valeur c_j

on a un poids maximum W

Comment obtenir la valeur
maximum sans dépasser le poids limite?

$$w_0 = 12 ; c_0 = 4$$

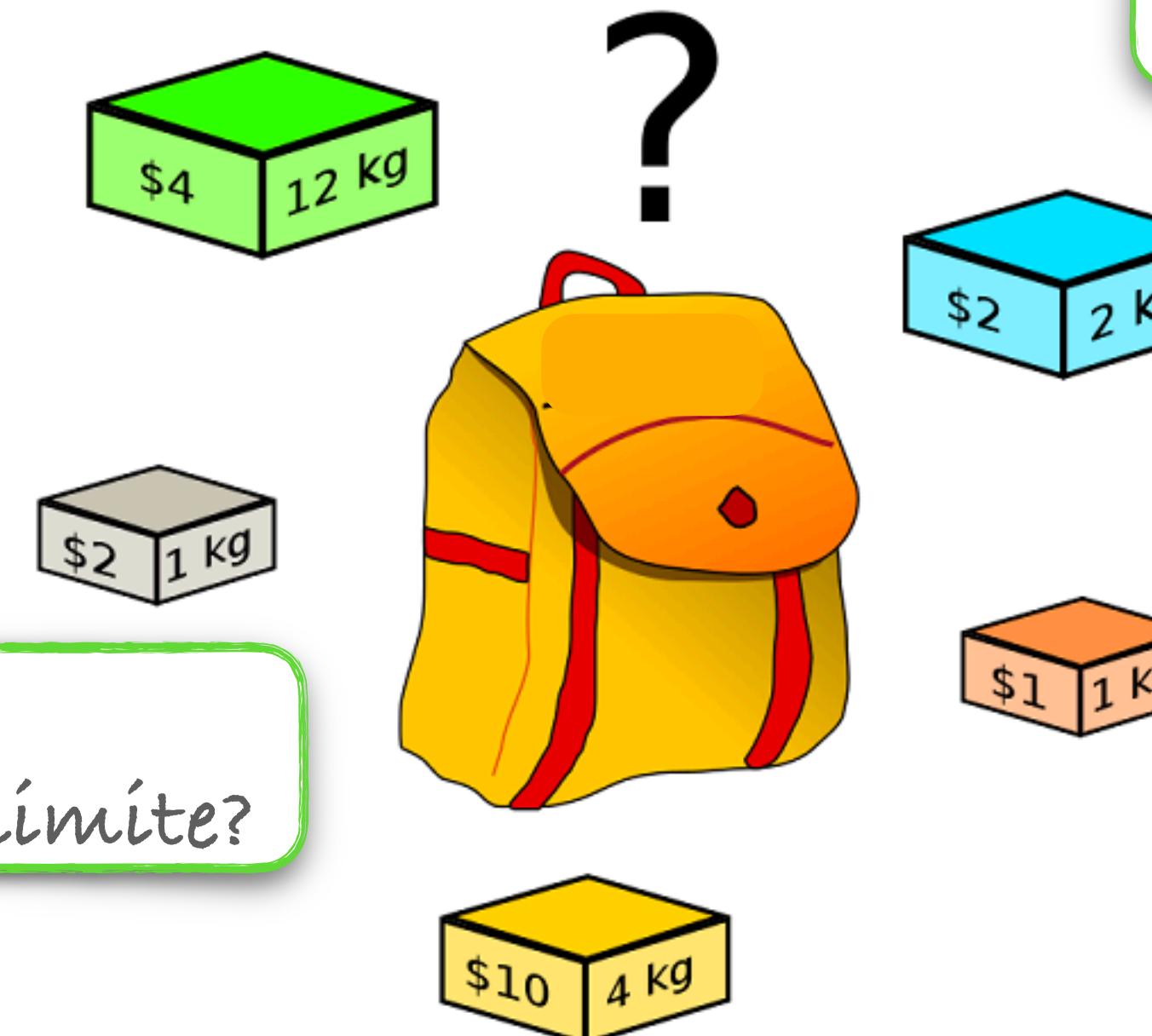
$$w_1 = 2 ; c_1 = 2$$

$$w_2 = 1 ; c_2 = 2$$

$$w_3 = 1 ; c_3 = 1$$

$$w_4 = 4 ; c_4 = 10$$

$$W = 17$$



Minimiser $-4x_0 - 2x_1 - 2x_2 - 1x_3 - 10x_4$

Avec $12x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 4x_4 \leq 17$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 0,1,2,3,4$$

QUBO?

$$17 = 10001$$

$$\begin{aligned} & 12x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 4x_4 \\ & + 3y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 4y_4 = 17 \end{aligned}$$

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Knapsack Problem

Liste d'objets $j = 0, \dots, m$

chaque objet a un poids w_j
et une valeur c_j

on a un poids maximum W

Comment obtenir la valeur
maximum sans dépasser le poids limite?

$$w_0 = 12 ; c_0 = 4$$

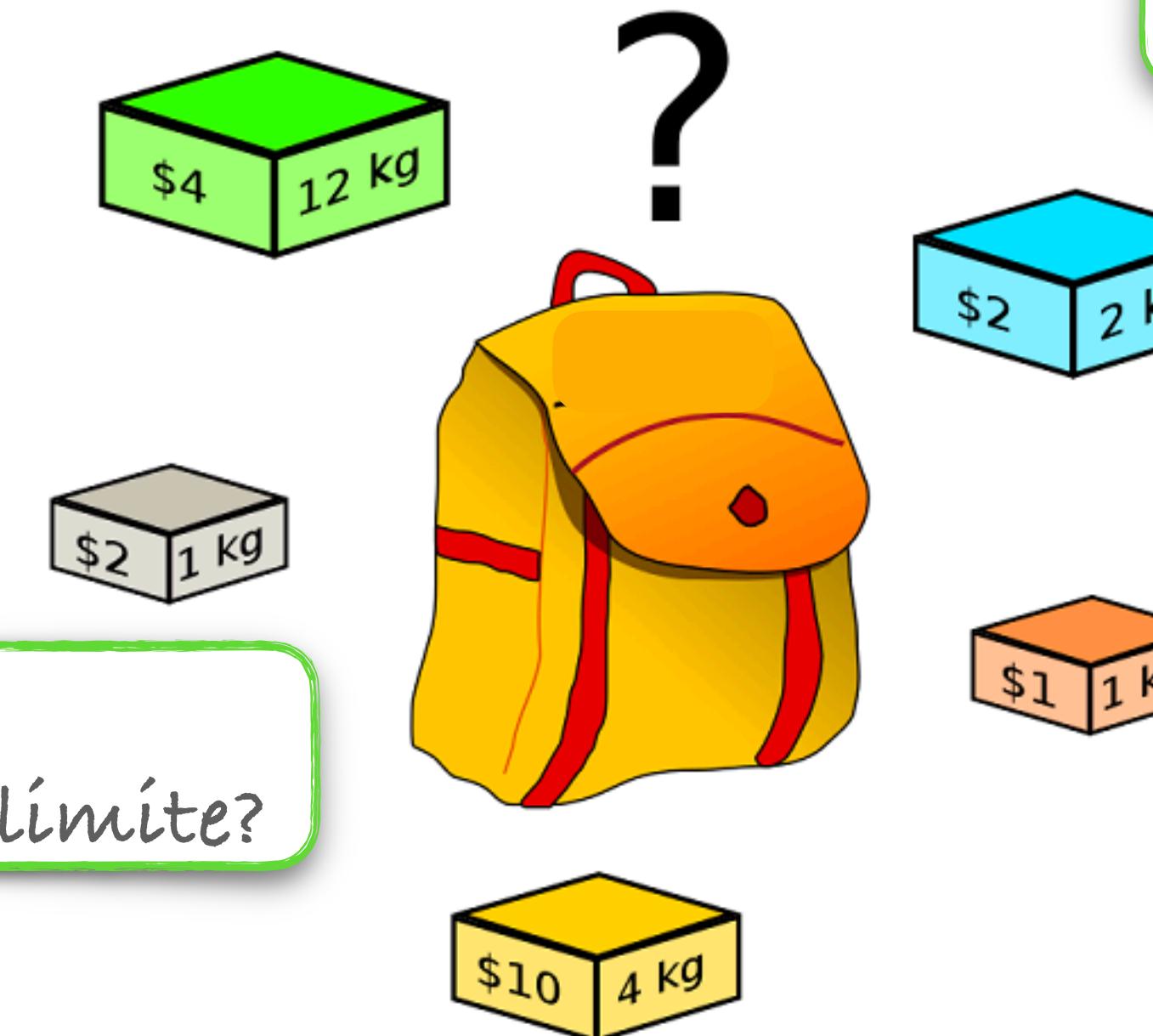
$$w_1 = 2 ; c_1 = 2$$

$$w_2 = 1 ; c_2 = 2$$

$$w_3 = 1 ; c_3 = 1$$

$$w_4 = 4 ; c_4 = 10$$

$$W = 17$$



Minimiser $12x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 4x_4$
+ $B(3y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 4y_4 - 17)^2$
Avec $x_j, y_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2,3,4$

Minimiser $-4x_0 - 2x_1 - 2x_2 - 1x_3 - 10x_4$

Avec $12x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 4x_4 \leq 17$

$x_j \in \{0,1\}, j = 0,1,2,3,4$

QUBO?

$$17 = 10001$$

$$12x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 4x_4 + 3y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 4y_4 = 17$$

QUBO pour les problèmes d'optimisation

Knapsack Problem

Liste d'objets $j = 0, \dots, m$

chaque objet a un poids w_j
et une valeur c_j

On a un poids maximum W

Comment obtenir la valeur
maximum sans dépasser le poids limite?

$$w_0 = 12 ; c_0 = 4$$

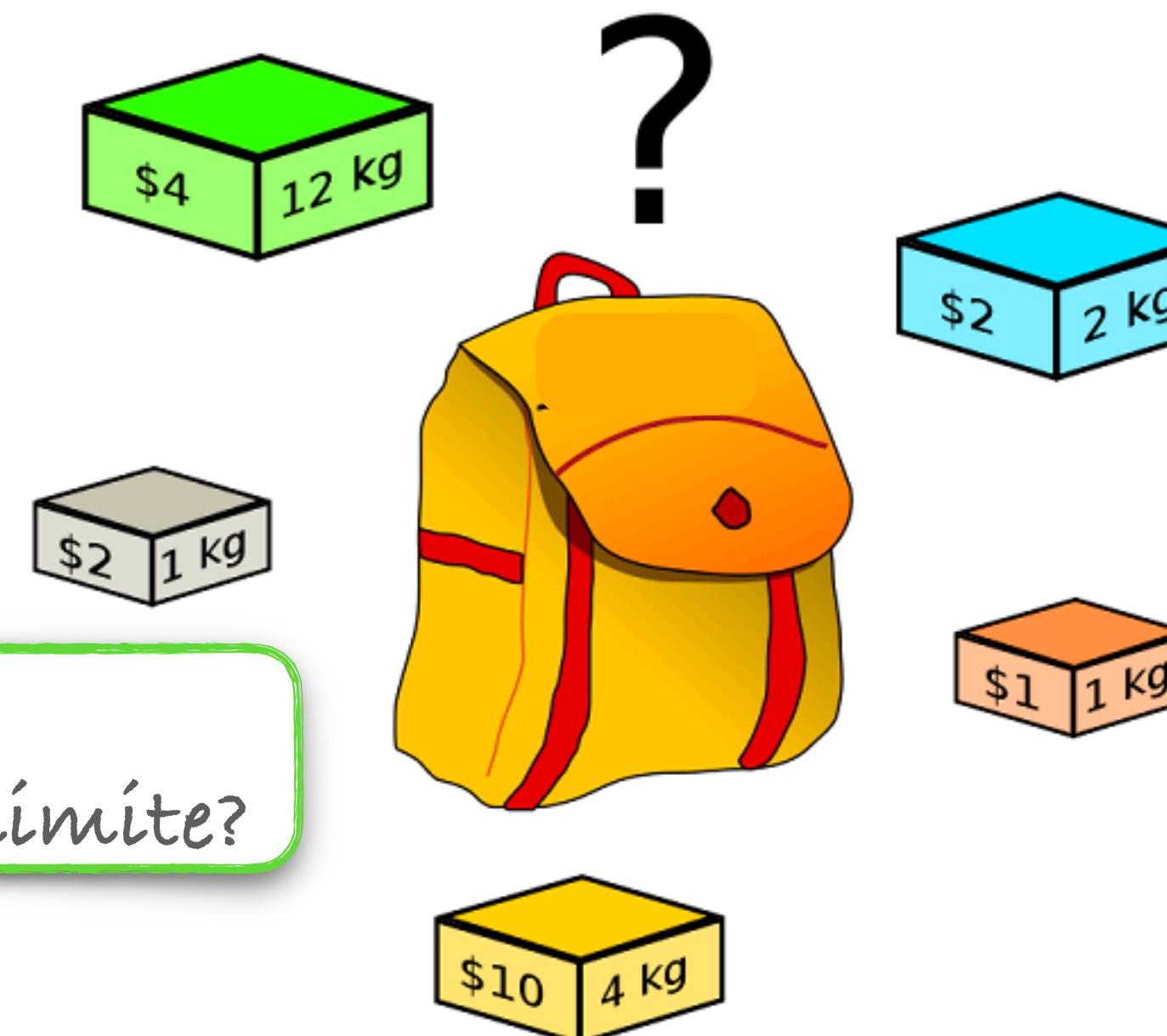
$$w_1 = 2 ; c_1 = 2$$

$$w_2 = 1 ; c_2 = 2$$

$$w_3 = 1 ; c_3 = 1$$

$$w_4 = 4 ; c_4 = 10$$

$$W = 25$$



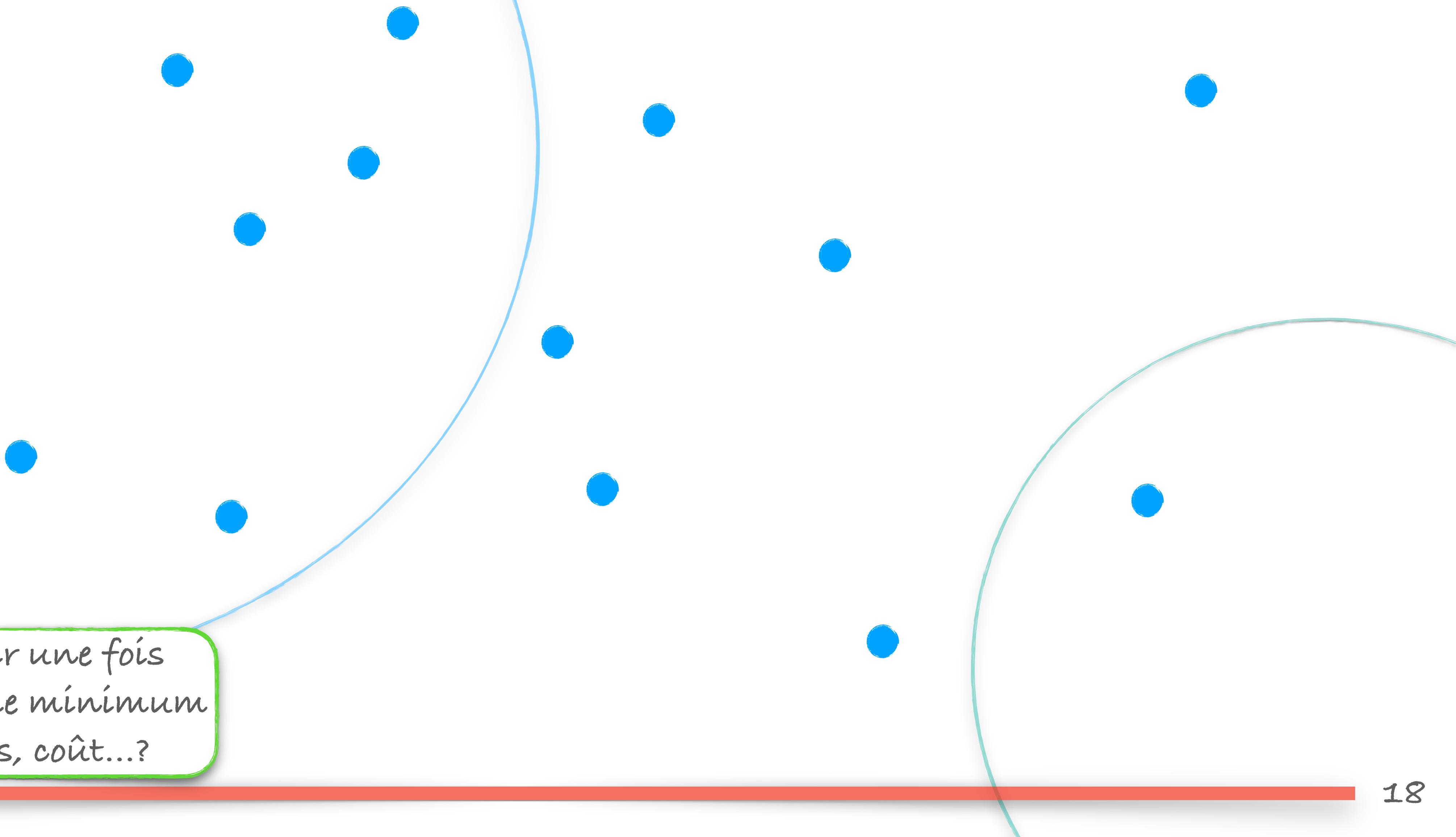
Une variation serait d'utiliser des entiers plutôt que du binaire pour représenter le nombre de fois qu'un paquet peut être utilisé

QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP

Prenons des villes

• villes/noeuds



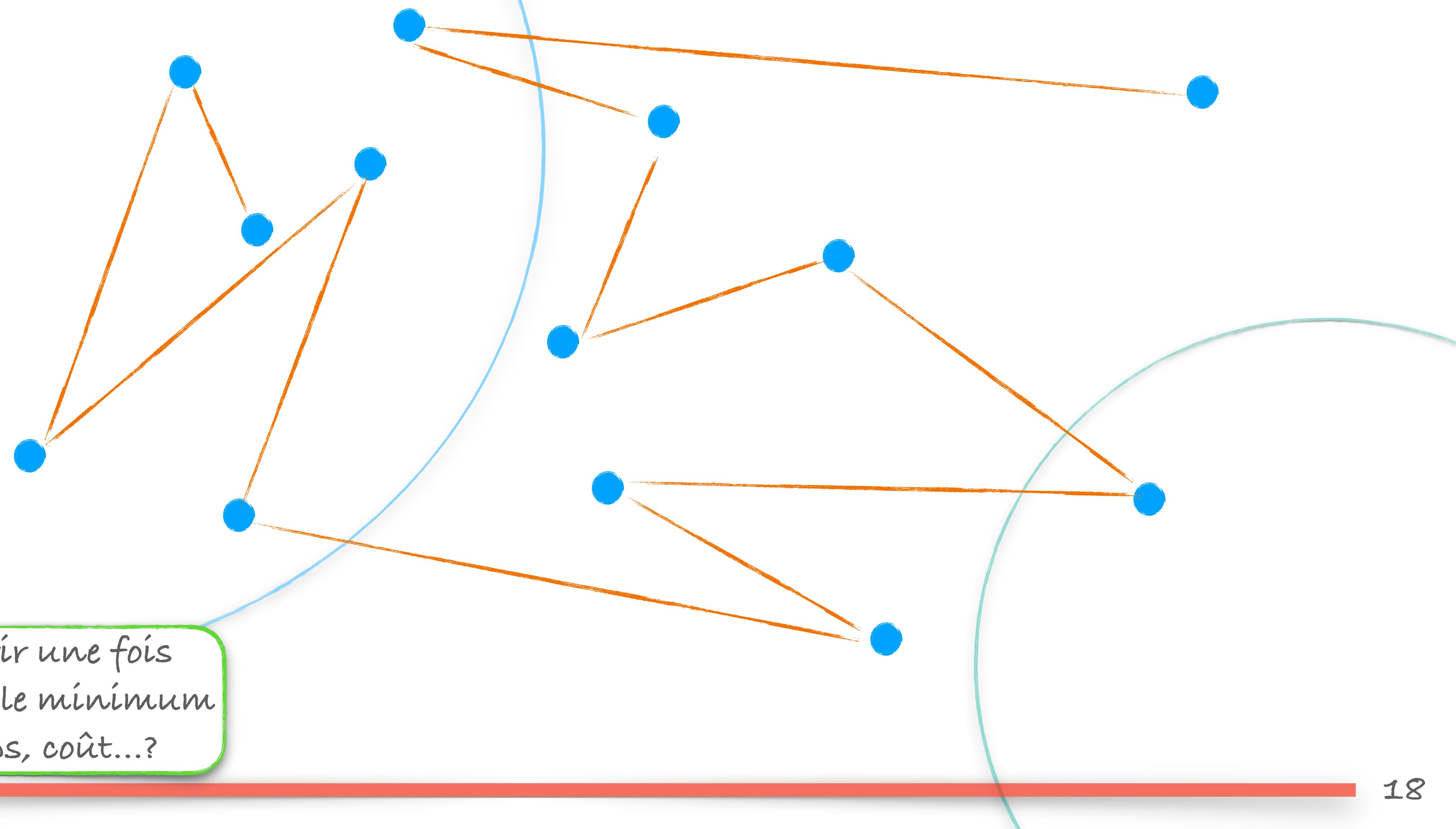
Comment parcourir une fois toutes les villes avec le minimum de distance, temps, coût...?

QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP

Prenons des villes

• villes/noeuds

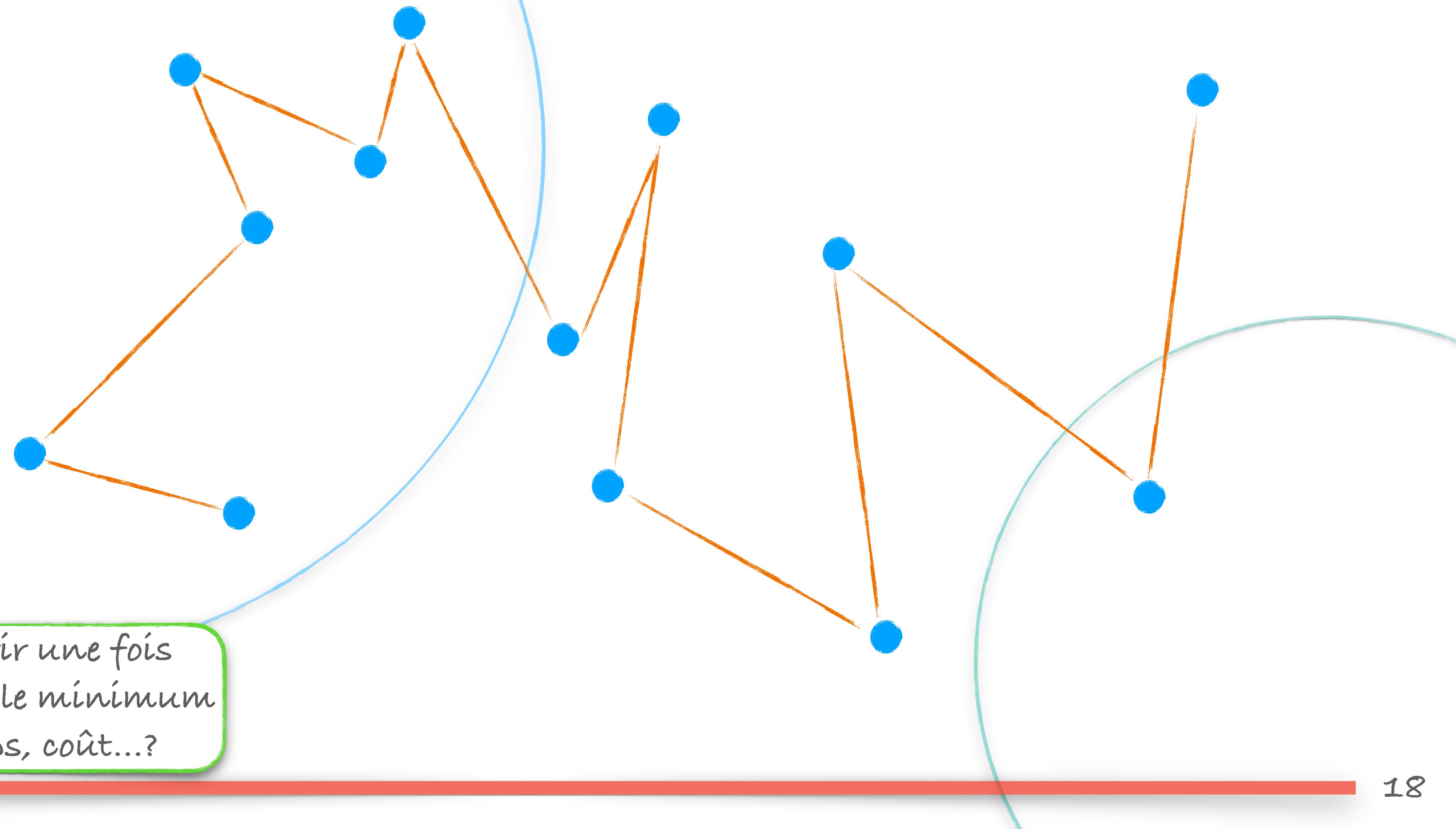


QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP

Prenons des villes

• villes/noeuds



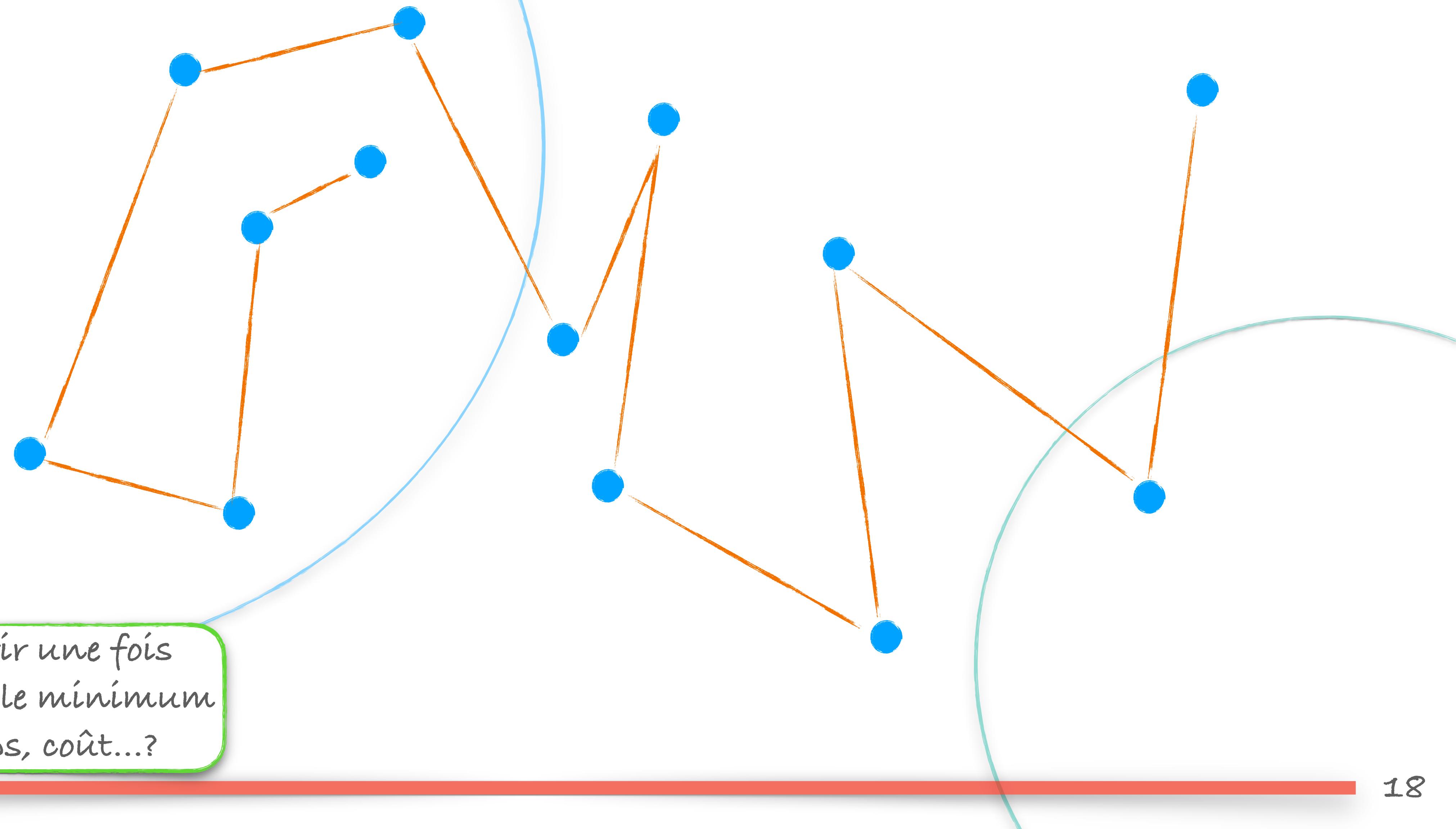
Comment parcourir une fois toutes les villes avec le minimum de distance, temps, coût...?

QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP

Prenons des villes

• villes/noeuds



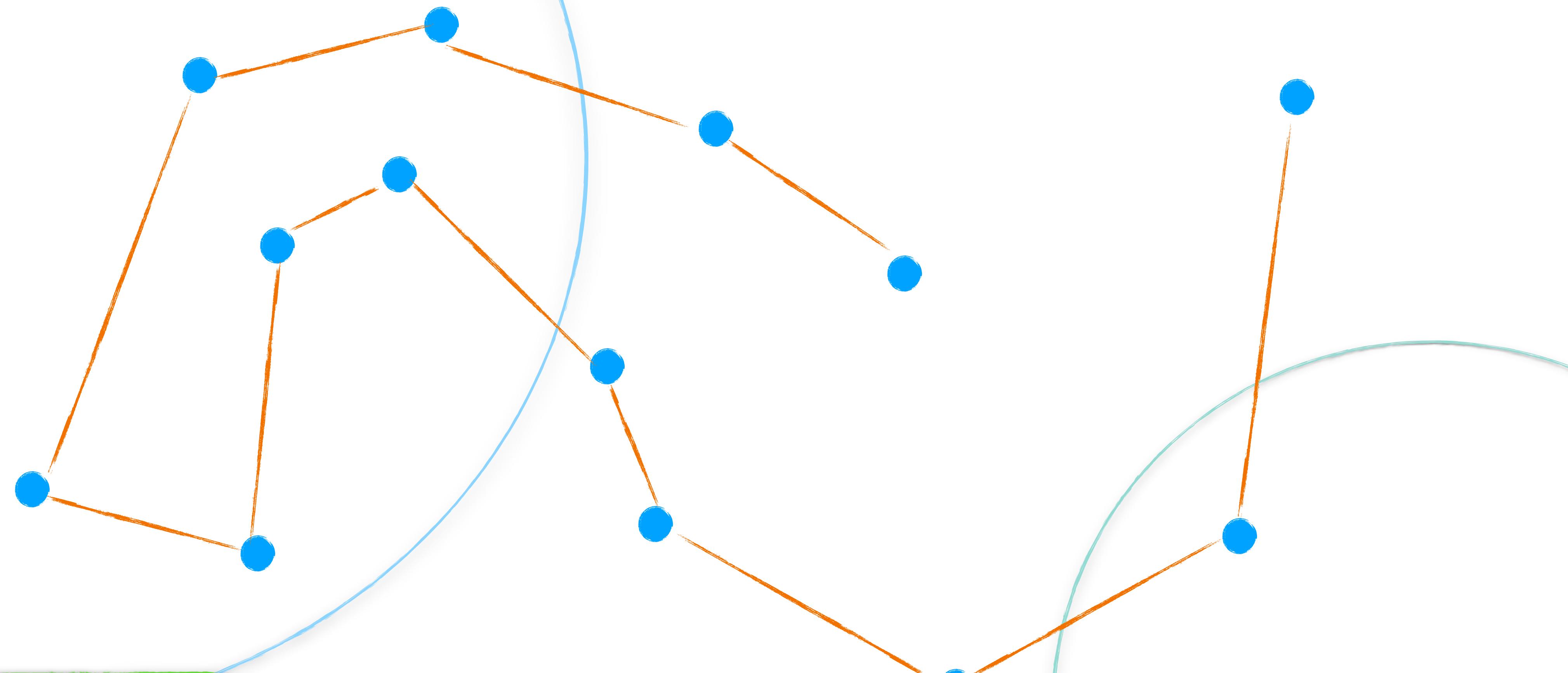
Comment parcourir une fois toutes les villes avec le minimum de distance, temps, coût...?

QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP

Prenons des villes

villes/noeuds



Comment parcourir une fois toutes les villes avec le minimum de distance, temps, coût...?

QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP

Prenons des villes

• villes/noeuds

$j = 0, \dots, m$

j et l sont des noeuds reliés
par un lien qui a un poids

w_{jl}

On doit trouver un chemin entre les villes

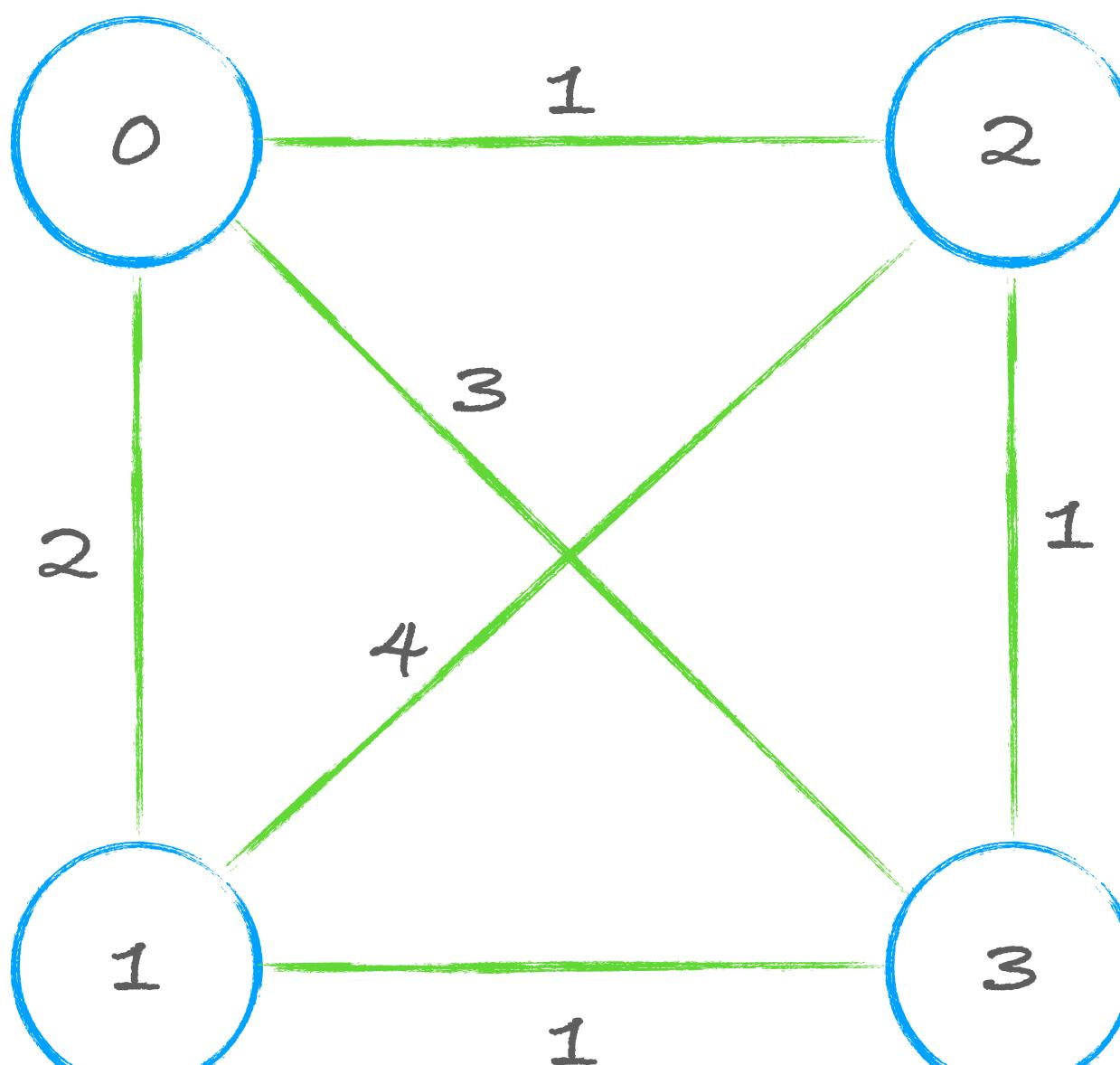
Comment parcourir une fois
toutes les villes avec le minimum
de distance, temps, coût...?

Minimisation de la somme des poids sur
les liens (edges) entre les villes (noeuds)

NP-Hard

QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP

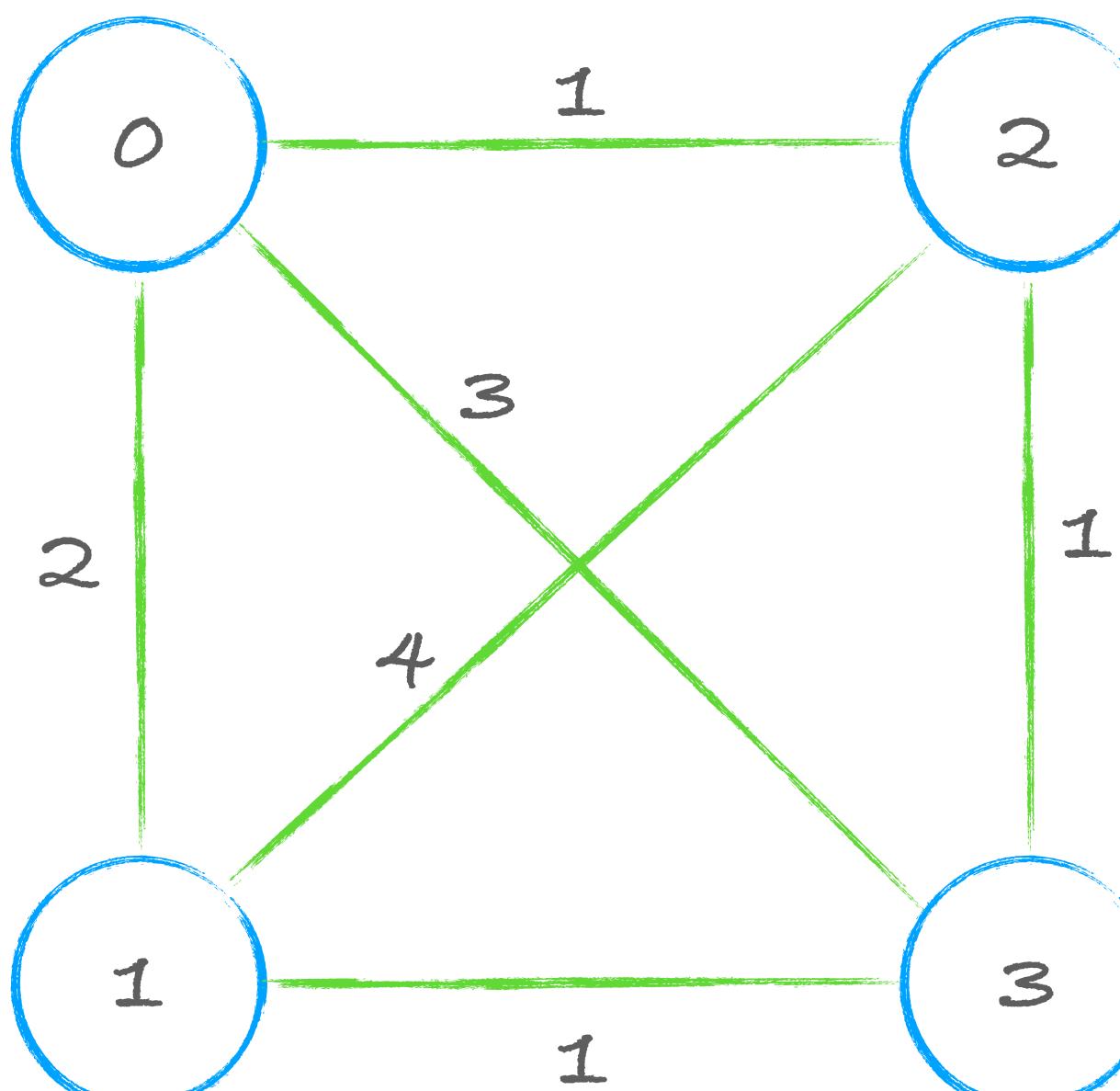


On définit x_{jl} comme des variables binaires qui représentent l'ordre de visite des différents noeuds

Si j est le l -ème noeud dans le graphe, $x_{jl} = 1$ et $x_{jh} = 0$ si $h \neq l$

QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP



On définit x_{jl} comme des variables binaires qui représentent l'ordre de visite des différents noeuds

Si j est le l -ème noeud dans le graphe, $x_{jl} = 1$ et $x_{jh} = 0$ si $h \neq l$

Contraintes

$$\sum_{l=0}^m x_{jl} = 1$$

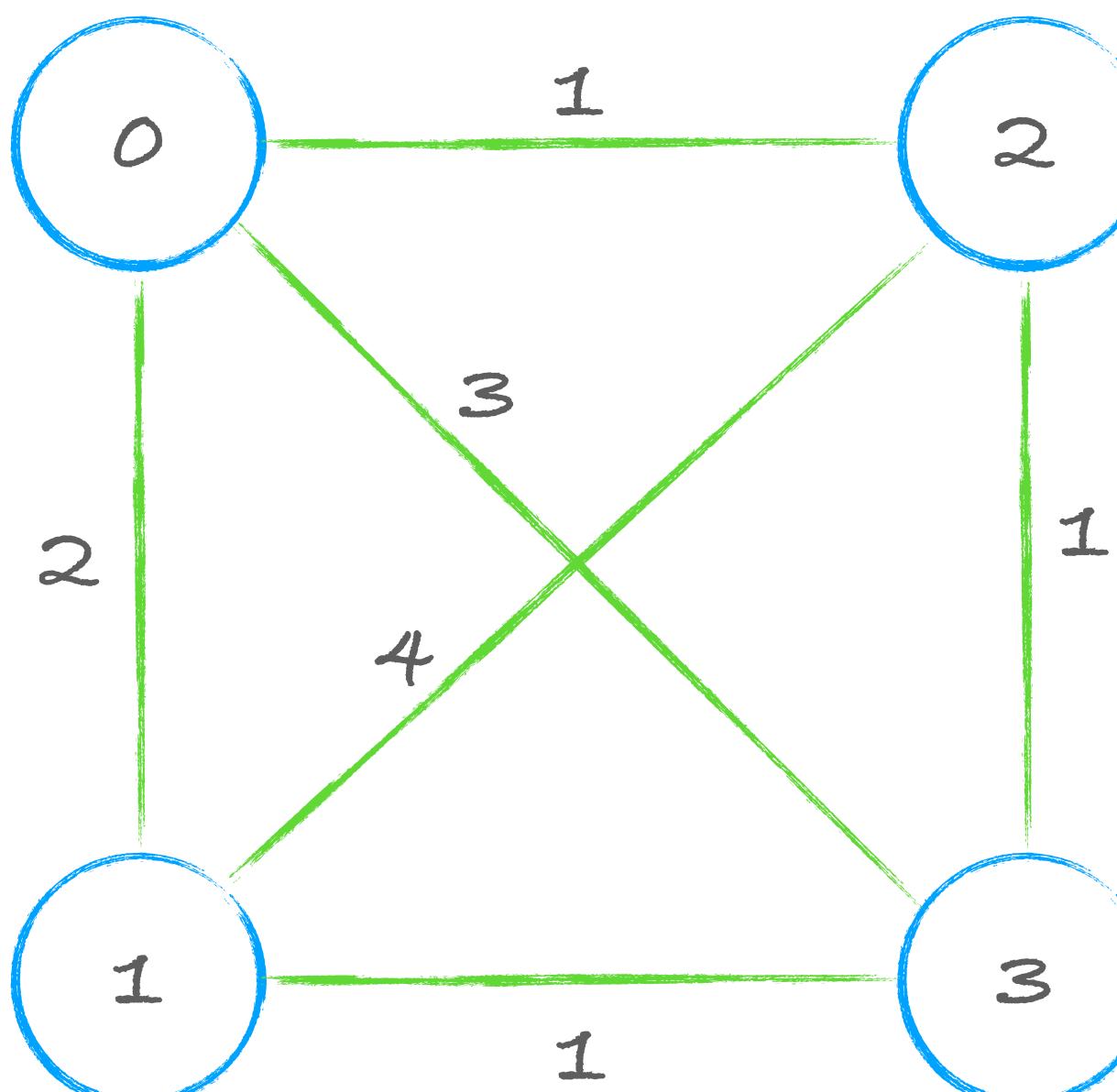
Chaque noeud ne peut être visité qu'une fois

$$\sum_{j=0}^m x_{jl} = 1$$

On ne peut visiter qu'une ville à la fois

QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP



Parcourir les edges

$$\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m w_{jk} x_{jl} x_{kl+1}$$

$$w_{jj} = 0$$

Rester dans la même ville
n'a aucun coût

On définit x_{jl} comme des variables binaires qui représentent l'ordre de visite des différents noeuds

Si j est le l -ème noeud dans le graphe, $x_{jl} = 1$ et $x_{jh} = 0$ si $h \neq l$

Contraintes

$$\sum_{l=0}^m x_{jl} = 1$$

Chaque noeud ne peut être visité qu'une fois

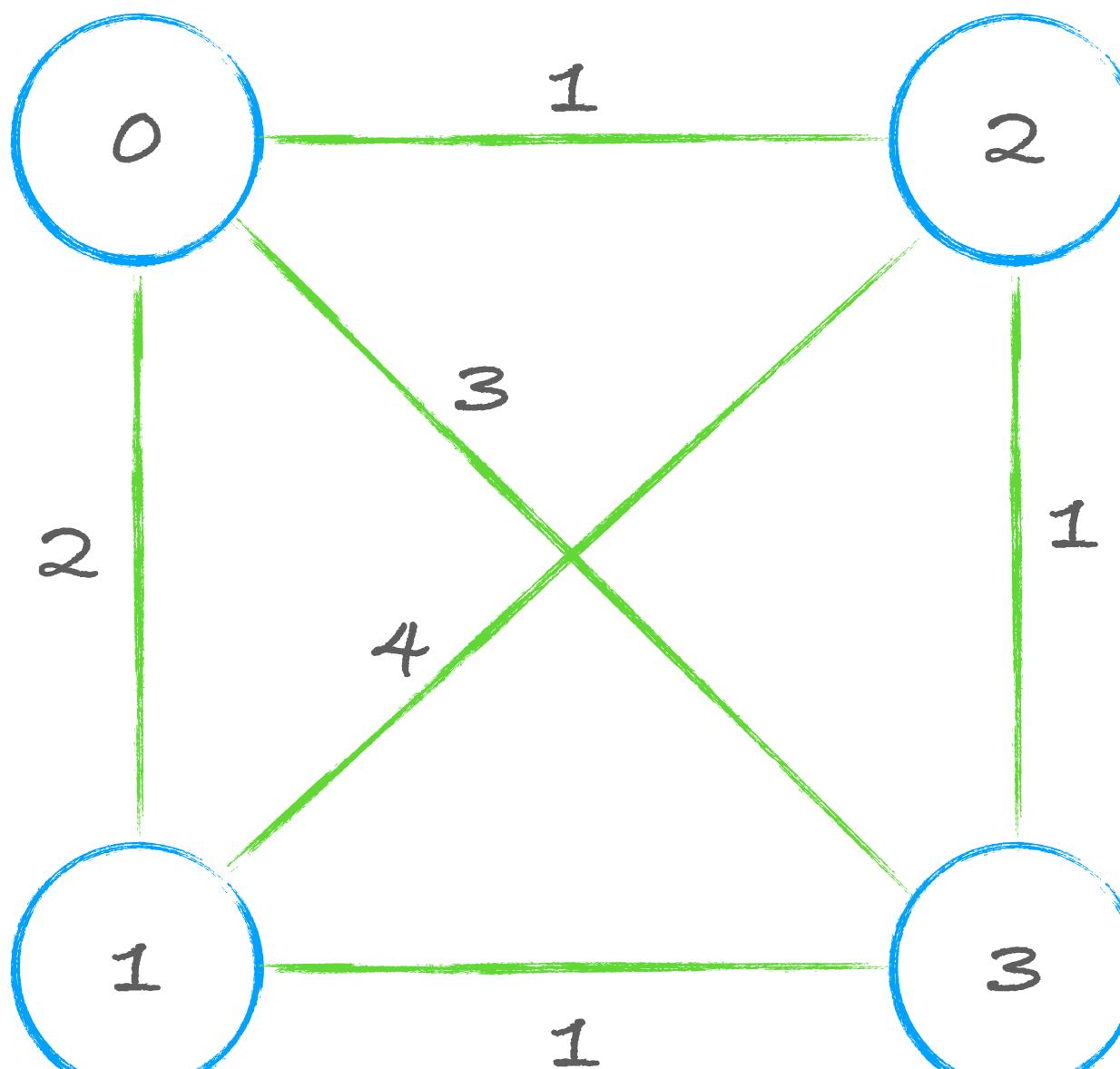
$$\sum_{j=0}^m x_{jl} = 1$$

On ne peut visiter qu'une ville à la fois

QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP

Formulation



QUBO

Minimiser

$$\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m w_{jk} x_{jl} x_{kl+1} + B \left(\sum_{l=0}^m x_{jl} - 1 \right)^2 + B \left(\sum_{j=0}^m x_{jl} - 1 \right)^2$$

Avec

$$x_{jl} \in \{0,1\}, \quad j, l = 0, \dots, m$$

B doit être choisi pour que les solutions infaisables n'amènent jamais à une solution optimale

$$B = 1 + \sum_{l,k=0}^m x_{jk}$$

La pénalité est plus importante que le coût pour n'importe quelle configuration

QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP

Trouver la bonne formulation à un QUBO et comparer les formulations entre elles est un champ de recherche actif

Peut-on trouver un modèle d'Ising ou un QUBO générique pour la classe NP-Complete?

QUBO pour les problèmes d'optimisation

TSP

D'autres problèmes d'optimisation

- Quadratic Assignment Problems
- Capital Budgeting Problems
- Multiple Knapsack Problems
- Task Allocation Problems (distributed computer systems)
- Maximum Diversity Problems
- P-Median Problems
- Asymmetric Assignment Problems
- Symmetric Assignment Problems
- Side Constrained Assignment Problems
- Quadratic Knapsack Problems

- Constraint Satisfaction Problems (CSPs)
- Discrete Tomography Problems
- Set Partitioning Problems
- Set Packing Problems
- Warehouse Location Problems
- Maximum Clique Problems
- Maximum Independent Set Problems
- Maximum Cut Problems
- Graph Coloring Problems
- Number Partitioning Problems
- Linear Ordering Problems
- Clique Partitioning Problems
- SAT problems

Références

- [1] Combarro E. F. & González-Castillo S., 2023, A Practical Guide to Quantum Machine Learning and Quantum Optimization, Chapitres 3, 5
- [2] Karp R. M., 1972, Reducibility among combinatorial problems, Springer, 85-103, <https://cgi.di.uoa.gr/~sgk/teaching/grad/handouts/karp.pdf>
- [3] <https://www.hackerearth.com/practice/notes/the-knapsack-problem/>